



А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

2

ФЕВРАЛЬ

Москва

2021

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2021 г. В.В. АВЕТИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vavetisyan@ysu.am)
(Ереванский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ СХВАТА ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УЧЕТОМ ТИПА КОНЕЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления перемещением точечного схвата плоского двузвеного манипулятора с прямолинейными звеньями равной длины и со вторым статически уравновешенным звеном. На плоскости обобщенных координат манипулятора построены области достижимых конфигураций, позволяющие из двух конечных конфигураций, соответствующих заданному терминальному положению схвата, определить ту конфигурацию и тот способ управления манипулятором, при которых обеспечивается перемещение схвата из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за минимальное время. Численными расчетами установлено, что оптимальный выбор типа конечной конфигурации может приводить к значительному увеличению быстродействия.

Ключевые слова: двузвенный манипулятор, оптимальное по быстродействию управление, конечный тип конфигурации.

DOI: 10.31857/S000523102102001X

1. Введение

В различных отраслях современного производства широко применяются двузвенные роботы-манипуляторы. Используются они как самостоятельно, так и в составе конструкций многозвенных манипуляционных роботов таких, для которых именно эти два звена выполняют основной объем движений робота при выполнении им различных технологических операций. Поэтому разработка эффективных режимов управления двузвонным роботом-манипулятором по сей день представляет собой актуальную задачу. Одним из возможных подходов к рациональному расчету режимов управления является их оптимизация по отношению к некоторому критерию качества функционирования манипулятора (время транспортных операций, энергозатраты и т.д.). Существенной составляющей при формировании оптимальных алгоритмов управления движением двузвенника является учет его конструктивных и геометрических особенностей. Для плоского двузвеного манипулятора каждому положению схвата отвечают две возможные конфигурации, отличающиеся знаком угла между звеньями. Следовательно, качество перемещения схвата в терминальное положение зависит как от типа конечной конфигурации, так и от способа управления, приводящего манипулятор в

эту конфигурацию. В [1, 2] для двузвенного манипулятора с безынерционными звеньями построены оптимальные и субоптимальные законы управления в двухточечной задаче перемещения схвата с грузом. Выявлена существенная зависимость времени приведения схвата в терминальное состояние от типа конфигурации манипулятора и решена задача выбора оптимального типа конфигурации. В [3] разработан графоаналитический подход к построению субоптимальных по быстродействию программных управлений, приводящих двузвенный манипулятор с произвольными геометрическими и инерционными характеристиками из начальной конфигурации покоя в произвольную конечную конфигурацию покоя. Методам оптимизации для решения задачи управления роботами, в том числе двузвенными манипуляторами, и расчета их конструктивных параметров посвящены публикации [4–8]. В [9–11, 12] рассмотрены модели механического и электромеханического плоского двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном и с произвольными инерционными характеристиками. В предположении, что конструкция манипулятора допускает полный поворот звеньев в направлениях по часовой и против часовой стрелки, установлено, что в одну и ту же конечную конфигурацию манипулятор можно привести при различных сочетаниях поворотов звеньев. Для каждого из двух типов конечных конфигураций графоаналитической процедурой решена задача выбора направлений поворотов звеньев манипулятора и определения способа управления, при которых заданный критерий качества (быстродействие [9, 10], энергозатраты [12] и комбинированный от них функционал [11]) достигает минимального значения. Прямым вычислением найден оптимальный тип конечной конфигурации. В [13] методом параметрической оптимизации построено субоптимальное по квадратичному функционалу управление движением плоского двузвенника с учетом возможных конфигураций манипулятора, соответствующих заданным положениям схвата в начале и в конце движения.

В настоящей статье рассматривается механическая модель двузвенного манипулятора [3], конструкция которого в отличие от [3, 9–12] допускает лишь пол-оборота вращений звеньев в положительном и отрицательном направлениях. На плоскости обобщенных координат манипулятора построены области, позволяющие по заданным координатам терминального положения схвата манипулятора определить тип конечной конфигурации и способ управления, при которых обеспечивается перемещение схвата из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за минимальное время.

2. Расчетная модель манипулятора

Рассмотрим механическую двузвенную систему, состоящую из двух абсолютно жестких звеньев G_1 , G_2 равной длины, соединенных шарниром O_2 . Звено G_1 при помощи шарнира O_1 связано с неподвижным основанием. Шарниры являются идеальными, цилиндрическими, а их оси параллельны друг другу. На конце второго звена в точке O_3 укреплен схват. Будем предполагать, что линейные размеры схвата много меньше длин звеньев и при исследовании транспортных движений считать схват материальной точкой. Управление манипулятором осуществляется с помощью двух независимых приводов

D_1, D_2 . Привод D_1 осуществляет взаимодействие первого звена с основанием, а D_2 – взаимодействие между звеньями G_1, G_2 манипулятора. Управляющими функциями в исследуемой модели манипулятора являются величины M_1, M_2 – вращающие моменты относительно осей O_1, O_2 , развиваемые приводами D_1, D_2 соответственно. Описанная система совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров O_1, O_2 .

Уравнения Лагранжа, описывающие движение рассматриваемой системы, имеют вид [3]:

$$\begin{aligned}
 (I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 L l f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2) &= M_1 - M_2, \\
 I_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 L l f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1) &= M_2, \\
 f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2) &= \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\
 f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1) &= \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2).
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Здесь введены следующие обозначения: φ_1 – угол между осью O_1x и прямой O_1O_2 ; φ_2 – угол между осью O_1x и прямой O_2C , проходящей через центр масс C звена G_2 ; $L = |O_1O_2| = |O_2O_3|$ – длина первого и второго звеньев; $l = |O_2C|$ – расстояние от оси O_2 до центра масс звена G_2 ; I_1, I_2 – моменты инерции звеньев G_1, G_2 относительно осей шарниров O_1, O_2 соответственно; m – масса звена G_2 . Примем, что положительное направление отсчета углов φ_1 и φ_2 ведется против часовой стрелки от прямой O_1x .

В данной статье будем рассматривать частный случай манипулятора (2.1), когда второе звено манипулятора статически уравновешено, т.е. в (2.1) $l = 0$:

$$(I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2.
 \tag{2.2}$$

На управляющие моменты M_1, M_2 имеются ограничения

$$|M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq M_2^0,
 \tag{2.3}$$

где M_1^0, M_2^0 – заданные постоянные.

3. Постановка задачи

Цель управления манипулятором состоит в приведении схвата в заданное пространственное положение в предположении, что конструкция манипулятора допускает лишь пол-оборота вращений звеньев в положительном и отрицательном направлениях. Из геометрии двузвенника следует, что при плоскопараллельном движении положение схвата полностью определяется, например, декартовыми координатами проекции точки O_3 на горизонтальную плоскость. Задание обобщенных координат φ_1, φ_2 однозначно определяет положение точечного схвата, поскольку между декартовыми координатами проекции точки O_3 и обобщенными координатами φ_1, φ_2 существует однозначная связь

$$x = L(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad y = L(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2).
 \tag{3.1}$$

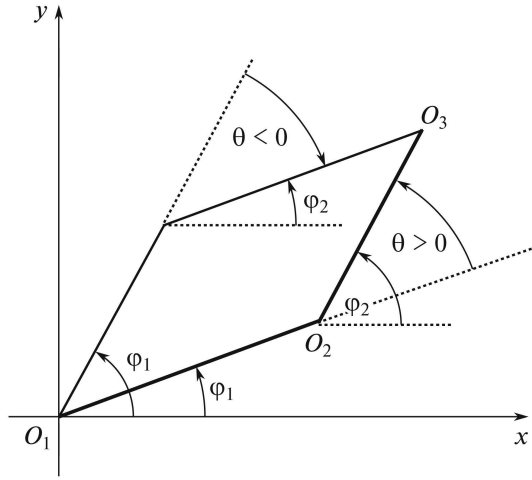


Рис. 1. Положению схвата Q_3 соответствуют две конфигурации двузвенника, отличающиеся знаком угла между звеньями $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Однако углы φ_1, φ_2 определяются по декартовым координатам x, y неоднозначно. С учетом конструктивных ограничений двузвенника разрешим систему уравнений (3.1) относительно φ_1, φ_2 и выберем из них те решения, которые по модулю не больше π :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} |\varphi_1| &= \left| \arctg \frac{y}{x} - \frac{1}{2}K\delta + \pi\alpha(x)\text{sign}y \right| \leq \pi, \\ |\varphi_2| &= \left| \arctg \frac{y}{x} + \frac{1}{2}K\delta + \pi\alpha(x)\text{sign}y \right| \leq \pi, \end{aligned}$$

$$K = \pm 1, \quad \delta = \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - 2L^2}{2L^2} \right), \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Из (3.2) вытекает, что каждому положению схвата (x, y) внутри рабочей зоны манипулятора $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4L^2\}$ соответствуют две конфигурации двузвенника, отличающиеся знаком угла между звеньями $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ (рис. 1). Величина δ в (3.2) – угол при вершинах O_1 и O_3 треугольника $O_1O_2O_3$. Как следует из (3.2), значениям $K = 1$ и $K = -1$ отвечают конфигурации, для которых соответственно $\theta > 0$ и $\theta < 0$, т.е. $K = \text{sign}\theta$. Конфигурация, отвечающая значению $K = 1, 0 < \theta < \pi$, показана на рис. 1 жирной сплошной линией, а конфигурация $K = -1, -\pi < \theta < 0$ – тонкой сплошной линией. Если обозначить их через $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}_K, K = \pm 1$, то согласно (3.2) между углами φ_1, φ_2 , отвечающими различным значениям K , имеется следующая связь:

$$(3.3) \quad \varphi_1(x, y)|_{K=-1} = \varphi_2(x, y)|_{K=+1}, \quad \varphi_2(x, y)|_{K=-1} = \varphi_1(x, y)|_{K=+1}$$

(в дальнейшем аргументы (x, y) функций $\varphi_i(x, y)$ будут опускаться).

Таким образом, на плоскости обобщенных координат манипулятора

$$(3.4) \quad \Phi = \{\varphi_1, \varphi_2 : -\pi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi\}$$

точки (φ_1, φ_2) , (φ_2, φ_1) , отвечающие конфигурациям $\{\varphi_1, \varphi_2\}_{K=1}$, $\{\varphi_2, \varphi_1\}_{K=-1}$ соответственно, симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов и при этом

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) &\in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \geq \varphi_1\} = \Phi(+1), \\ (\varphi_2, \varphi_1) &\in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \leq \varphi_1\} = \Phi(-1). \end{aligned}$$

Систему (2.2) будем рассматривать при начальных условиях

$$(3.6) \quad \varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

которым согласно (3.1) соответствует начальное положение покоя схвата

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x(0) &= L(\cos \varphi_1^0 + \cos \varphi_2^0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ y(0) &= L(\sin \varphi_1^0 + \sin \varphi_2^0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Пусть заданы несовпадающие начальное (x^0, y^0) (3.7) и конечное (x^T, y^T) положения схвата в рабочей зоне манипулятора R . Так как положению (x^T, y^T) отвечают две конфигурации $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_K$, $K = \pm 1$, то в качестве конечных условий для системы (2.2) рассмотрим условия

$$(3.8) \quad \varphi_i|_K(T) = \varphi_i^T|_K, \quad \dot{\varphi}_i|_K(T) = 0, \quad i = 1, 2; \quad K = \pm 1,$$

которым однозначно соответствует одно и то же положение покоя схвата

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x(T) &= L(\cos \varphi_1^T|_K + \cos \varphi_2^T|_K) = x^T, \quad \dot{x}(T) = 0, \\ y(T) &= L(\sin \varphi_1^T|_K + \sin \varphi_2^T|_K) = y^T, \quad \dot{y}(T) = 0, \end{aligned} \quad K = \pm 1.$$

Система (2.2), (2.3) полностью управляема в классе кусочно-непрерывных функций $M_1(t)$, $M_2(t)$ [14], поэтому при заданных краевых состояниях схвата (3.7), (3.9) каждой совокупности условий (3.8) ($K = \pm 1$) и каждому допустимому управлению $M = (M_1(t), M_2(t))$ соответствует некоторое время перемещения

$$(3.10) \quad T = T\left[\left\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\right\}|_K, M\right].$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального по быстродействию управления перемещением схвата манипулятора с учетом конечного типа конфигурации.

Задача. Определить тип $K = \pm 1$ конечной конфигурации (3.8) и закон изменения ограниченного управления $M = (M_1(t), M_2(t))$ (2.3), доставляющие минимум

$$(3.11) \quad T^* = \min_K \min_M T\left[\left\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\right\}|_K, M\right]$$

при приведении схвата манипулятора из начального состояния покоя (3.7) в заданное состояние покоя (3.9).

4. Построение оптимального по быстродействию управления

Внутренний минимум в (3.11) является задачей построения оптимального по быстродействию управления $M = (M_1, M_2)$ системой (2.2), (2.3), (3.6), (3.8) для фиксированного значения K . При решении этой задачи в краевых условиях (3.8) параметр K будем опускать, подразумевая тем самым, что конечная конфигурация $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}$ отвечает одному из значений $K = +1$ или $K = -1$.

В (2.2), (2.3), (3.1), (3.6)–(3.9) перейдем к безразмерным переменным

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t' &= (M_2^0 / (m_2 L^2))^{1/2} t, & I'_i &= I_i / (m_2 L^2), & M'_i &= M_i / M_2^0, \\ x' &= x / L, & y' &= y / L, & \varphi'_i &= \varphi_i - \varphi_i^0, & \varphi_i'^{0,T} &= \varphi_i^{0,T} - \varphi_i^0, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Если теперь опустить штрихи, то соотношения (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.6)–(3.9) упростятся: в них получим $\varphi_{1,2}^0 = 0$, $L = 1$, $M_2^0 = 1$, а система (2.2), ограничения (2.3) и краевые условия (3.6), (3.8) примут вид:

$$(4.2) \quad (I_1 + 1)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2,$$

$$(4.3) \quad |M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq 1,$$

$$(4.4) \quad \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(4.5) \quad \varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Заменой переменных

$$(4.6) \quad q_1 = (I_1 + 1)\varphi_1 + I_2\varphi_2, \quad q_2 = I_2\varphi_2$$

система (4.2) приводится к простейшей форме, отвечающей разделению движений по координатам q_1, q_2 :

$$(4.7) \quad \ddot{q}_1 = M_1, \quad \ddot{q}_2 = M_2.$$

Начальные и конечные условия для системы (4.7) согласно (4.4)–(4.6), имеют вид:

$$(4.8) \quad q_1(0) = q_1^0 = 0, \quad q_2(0) = q_2^0 = 0, \quad \dot{q}_{1,2}(0) = 0,$$

$$(4.9) \quad q_1(T) = q_1^T = (I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T, \quad q_2(T) = q_2^T = I_2\varphi_2^T, \quad \dot{q}_{1,2}(T) = 0.$$

Решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении для системы, описываемой отдельно каждым из уравнений (4.7), известно (см. [15]) и имеет вид:

$$(4.10) \quad M_i^* = \begin{cases} M_i^0 \text{sign}(q_i^T), & t \in [0, \tau_i), \\ -M_i^0 \text{sign}(q_i^T), & t \in [\tau_i, T_i], \end{cases}$$

$$T_i = 2\tau_i = 2(|q_i^T| / M_i^0)^{1/2}, \quad i = 1, 2; \quad M_2^0 = 1.$$

Управление $M_i^*(t)$ переводит систему, описываемую уравнением $\ddot{q}_i = M_i$ с ограничением $|M_i| \leq M_i^0$, за минимально время T_i из состояния $q_i(0) = 0$, $\dot{q}_i(0) = 0$ в состояние $q_i(T_i) = q_i^T$, $\dot{q}_i(T_i) = 0$.

Заметим, что минимальное значение времени перехода системы (4.7) из состояния (4.8) в состояние (4.9) не может быть меньше наибольшего из двух минимальных значений времени перехода, соответствующих рассмотренным независимым подсистемам (4.7) при соответствующих граничных условиях. Таким образом, искомое время быстрогодействия равно

$$(4.11) \quad T = \max(T_1, T_2).$$

Возможны следующие случаи.

A1. Если $T_1 > T_2$, то $M_1(t) = M_1^*$, а $M_2(t)$ является любым допустимым управлением, осуществляющим требуемый переход за время T_1 . При этом на плоскости (q_1, q_2) неравенству $T_1 > T_2$ в силу (4.10) отвечает область, определяемая неравенством

$$(4.12) \quad |q_1^T|/M_1^0 > |q_2^T|.$$

A2. Если $T_2 > T_1$, которому на плоскости (q_1, q_2) отвечает область, определяемая неравенством

$$(4.13) \quad |q_2^T| > |q_1^T|/M_1^0,$$

то, наоборот, $M_2(t) = M_2^*$, а $M_1(t)$ является любым допустимым управлением, осуществляющим требуемый переход за время T_2 .

A3. Если $T_1 = T_2 = T$, то $M_1(t) = M_1^*$, $M_2(t) = M_2^*$ только для тех точек на плоскости (q_1, q_2) , для которых

$$(4.14) \quad |q_1^T|/M_1^0 = |q_2^T|.$$

В случаях A1 и A2 будем задавать управления $M_2(t)$ и $M_1(t)$ в следующих формах соответственно:

$$(4.15) \quad M_2(t) = \begin{cases} \text{sign} q_2^T, & t \in [0, \tau_2^{(1)}), \\ 0, & t \in [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}), \\ -\text{sign} q_2^T, & t \in [\tau_2^{(2)}, T_1], \end{cases}$$

$$M_1(t) = \begin{cases} M_1^0 \text{sign} q_1^T, & t \in [0, \tau_1^{(1)}), \\ 0, & t \in [\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}), \\ -M_1^0 \text{sign} q_1^T, & t \in [\tau_1^{(2)}, T_2], \end{cases}$$

имеющих по две точки переключения и принимающих по модулю значения, не превосходящие максимальных.

Интегрируем уравнения (4.7) с краевыми условиями (4.8), (4.9) при управлениях (4.15) на интервалах времени $[0, T_2]$ и $[0, T_1]$:

$$(4.16) \quad q_2(T) = \tau_2^{(1)} \tau_2^{(2)} \text{sign}(q_2^T) = q_2^T,$$

$$\dot{q}_2(T) = \text{sign}(q_2^T)(\tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)} - T_1) = 0,$$

$$(4.17) \quad q_1(T) = \tau_1^{(1)} \tau_1^{(2)} M_1^0 \text{sign}(q_1^T) = q_1^T,$$

$$\dot{q}_1(T) = M_1^0 \text{sign}(q_1^T)(\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)} - T_2) = 0.$$

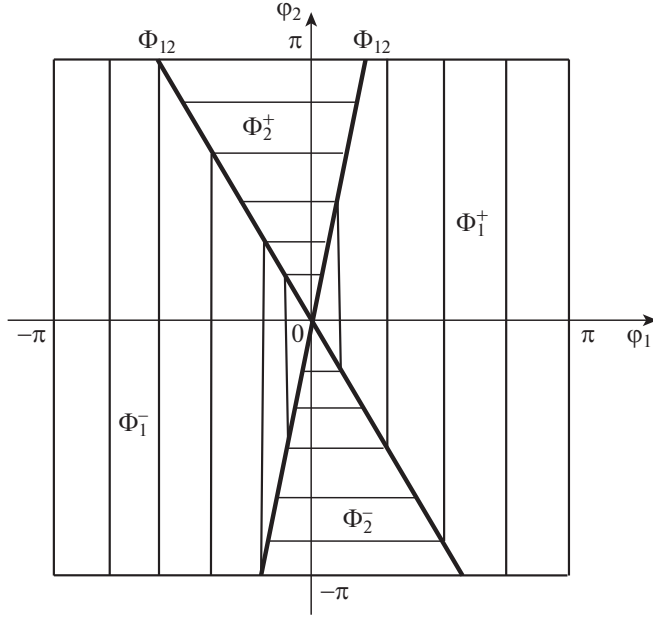


Рис. 2. В областях $(\Phi_1^+ \cup \Phi_1^-)$ и $(\Phi_2^+ \cup \Phi_2^-)$ реализуются случаи А1 ($T_1 > T_2$) и А2 ($T_2 > T_1$) соответственно, а в областях Φ_{12} и Φ_{21} – случай А3 ($T_1 = T_2$).

Решение системы (4.16) и (4.17) относительно параметров $\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}$ и $\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}$ соответственно не является единственным. Единственность гарантируется условиями $\tau_i^{(1)} \leq \tau_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, в соответствии с (4.15). Разрешив систему (4.16), (4.17) с учетом этих замечаний и переходя к исходным переменным по формулам (4.6), получим, что в случаях А1, А2 моменты переключения управлений $M_2(t)$, $M_1(t)$ (4.15) определяются по следующим формулам соответственно:

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad & \tau_2^{(1)} = T_1/2 - (T_1^2/4 - |I_2\varphi_2^T|)^{1/2}, \\
 & (A1, M_2): \quad \tau_2^{(2)} = T_1/2 + (T_1^2/4 - |I_2\varphi_2^T|)^{1/2}, \\
 & T_1 = 2(|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad & \tau_1^{(1)} = T_2/2 - (T_2^2/4 - |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2}, \\
 & (A2, M_1): \quad \tau_1^{(2)} = T_2/2 + (T_2^2/4 - |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2}, \\
 & T_2 = 2(|I_2\varphi_2^T|)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Неравенствам (4.12) и (4.13) в исходных переменных (4.6) на плоскости (φ_1, φ_2) отвечают области $(\Phi_1^+ \cup \Phi_1^-)$ и $(\Phi_2^+ \cup \Phi_2^-)$, в которых реализуются случаи А1 ($T_1 > T_2$) и А2 ($T_2 > T_1$) соответственно. На рис. 2 области Φ_1^+, Φ_1^- заштрихованы вертикальными, а области Φ_2^+, Φ_2^- – горизонтальными линиями. В обозначениях этих областей нижний индекс определяет номер управляющего момента, имеющего одно переключение, а верхний – знак этого

управления на первом интервале. В соответствии со случаем АЗ ($T_1 = T_2$), на границах Φ_{12} (изображены жирными линиями) между областями Φ_i^+ , Φ_i^- реализуются режимы управления с одним переключением. Аналитические выражения областей $\Phi_i^+(\varphi_1, \varphi_2)$, $\Phi_i^-(\varphi_1, \varphi_2)$, выводимые из (4.12)–(4.14), имеют вид:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \Phi_1^+ &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -A\varphi_1 < \varphi_2 < B\varphi_1, \varphi_1 > 0\}, \\ \Phi_1^- &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B\varphi_1 < \varphi_2 < -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\}, \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \Phi_2^+ &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B\varphi_1 < \varphi_2, \varphi_1 > 0 \text{ и } -A\varphi_1 < \varphi_2, \varphi_1 < 0\}, \\ \Phi_2^- &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 < -A\varphi_1, \varphi_1 > 0 \text{ и } \varphi_2 < B\varphi_1, \varphi_1 < 0\}, \end{aligned}$$

$$(4.22) \quad \Phi_{12} = \Phi_{1,2}^{+,+} \cup \Phi_{1,2}^{+,-} \cup \Phi_{1,2}^{-,+} \cup \Phi_{1,2}^{-,-},$$

$$\Phi_{1,2}^{+,+} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = B\varphi_1, \varphi_1 > 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{-,+} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{+,-} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = -A\varphi_1, \varphi_1 > 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{-,-} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = B\varphi_1, \varphi_1 < 0\},$$

$$(4.23) \quad A = (I_1 + 1)(M_1^0 + 1)^{-1}I_2^{-1}, \quad B = (I_1 + 1)(M_1^0 - 1)^{-1}I_2^{-1}.$$

В обозначениях областей (4.22) нижние индексы указывают номера управлений с одним переключением, а верхние – знаки этих управлений на первом интервале.

З а м е ч а н и е. При построении диаграммы (рис. 2) было принято, что манипулятор характеризуется размерными параметрами, фигурирующими в (2.2), (2.3),

$$(4.24) \quad \begin{aligned} L &= 1 \text{ м}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad I_1 = I_2 = (10/3) \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ M_1^0 &= 2 \text{ н} \cdot \text{м}, \quad M_2^0 = 1 \text{ н} \cdot \text{м}, \end{aligned}$$

которые отвечают манипулятору, звенья которого – одинаковые однородные стержни.

После перехода к безразмерным параметрам согласно (4.1) получим из (4.24), что

$$(4.25) \quad L = 1, \quad m_2 = 1, \quad I_1 = I_2 = 1/3, \quad M_1^0 = 2, \quad M_2^0 = 1.$$

Отметим, что суть методики решения поставленной задачи не меняется при других геометрических и физических параметрах манипулятора.

Подытожив полученные результаты, оптимальный режим управления системой (4.2)–(4.5) можно представить в виде

$$(4.26) \quad M^* = \begin{cases} (M_1^*, M_2), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^+ \cup \Phi_1^-, \\ (M_1, M_2^*), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^+ \cup \Phi_2^-, \\ (M_1^*, M_2^*), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_{12}, \end{cases}$$

где управления M_i^* , M_i , $i = 1, 2$ определяются формулами (4.10), (4.15), (4.18), (4.19), а Φ_i^+ , Φ_i^- , $i = 1, 2$, и Φ_{12} – формулами (4.20)–(4.22).

Таким образом, построенная диаграмма позволяет по заданным значениям φ_1^T , φ_2^T находить тип режима управления, моменты переключения и время процесса. Тип управления определяется в зависимости от того, какой области достижимых конечных конфигураций принадлежат данные терминальные значения φ_1^T , φ_2^T .

5. Определение оптимального типа конечной конфигурации манипулятора

Перейдем к определению внешнего минимума в (3.11). Пусть конечное положение схвата $(x^T, y^T) \in R$ зафиксировано. Тогда из формулы (3.2) найдем две конечные точки $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi(+1)$, $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Phi(-1)$ (3.4), которые согласно (3.3) отвечают конфигурациям манипулятора $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=+1}$ и $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1}$ соответственно.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad G_1(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq B\varphi_1, \varphi_1 > 0\} \subset \Phi_1^+ \subset \Phi(1), \\
 G_2(1) &= \Phi_2^+(\varphi_1, \varphi_2) \subset \Phi(1), \\
 G_3(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_4(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -A^{-1}\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_5(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B^{-1}\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -A^{-1}\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_6(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq B^{-1}\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1).
 \end{aligned}$$

Поскольку области $\Phi(1)$, $\Phi(-1)$ взаимно симметричны относительно прямой $\varphi_2 = \varphi_1$, то при замене $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ области $G_i(1) \subset \Phi(1)$, $i = 1, \dots, 6$, перейдут на симметричные относительно прямой $\varphi_2 = \varphi_1$ области $G_i(-1) \subset \Phi(-1)$, $i = 1, \dots, 6$, соответственно (см. рис. 3).

Области $G_i(1)$, $i = 1, \dots, 6$, находятся над прямой $\varphi_2 = \varphi_1$, изображенной на рис. 3 штриховой линией, а области $G_i(-1)$, $i = 1, \dots, 6$, – под прямой $\varphi_2 = \varphi_1$. Таким образом, если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_i(1)$, то $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_i(-1)$. Каждой из этих точек, в зависимости от их принадлежности областям $G_i(1)$, $G_i(-1)$, $1 \leq i \leq 6$, отвечает оптимальное время перемещения схвата в эту конфигурацию при соответствующем оптимальном режиме управления (4.26):

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad T &= T_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = 2 \left(|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T| / M_1^0 \right)^{1/2}, \\
 &\quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_{1,3,4,5,6}(1), \\
 T &= T_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = 2 \left(|I_2\varphi_2^T| \right)^{1/2}, \quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1), \\
 T &= T_1(\varphi_2^T, \varphi_1^T) = 2 \left(|(I_1 + 1)\varphi_2^T + I_2\varphi_1^T| / M_1^0 \right)^{1/2}, \\
 &\quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_{1,2,3,4,6}(-1), \\
 T &= T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T) = 2 \left(|I_2\varphi_1^T| \right)^{1/2} \quad \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_5(-1).
 \end{aligned}$$

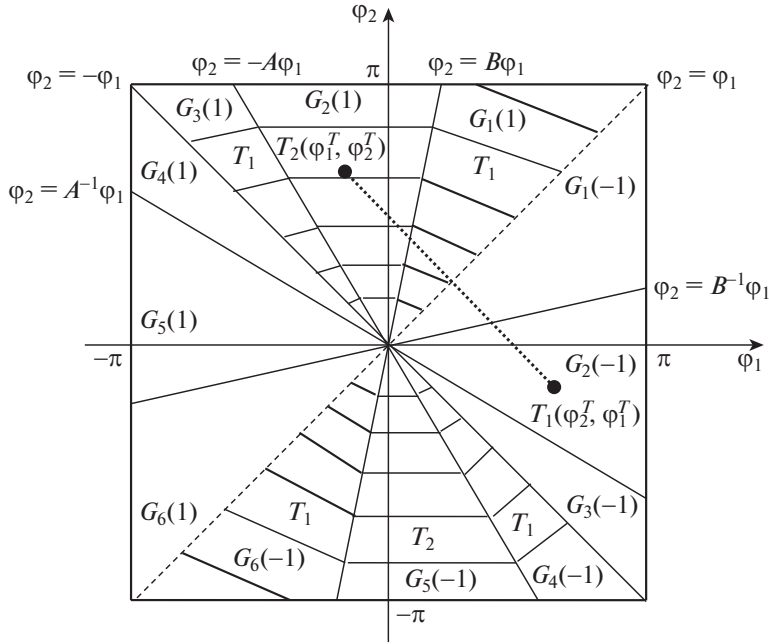


Рис. 3. Диаграмма для определения оптимального типа конечной конфигурации и оптимального типа режима управления.

Учитывая (5.2), вычисление внешнего минимума в (3.11) сводится к выбору оптимальной из двух конечных конфигураций в задаче

$$(5.3) \quad T^* = \min \left[T(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \Big|_{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_i(1)}, T(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \Big|_{(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_i(-1)} \right], \\ 1 \leq i \leq 6.$$

Произведя вычисления минимума в (5.3) при числовых значениях (4.25), в итоге получаем

$$(5.4) \quad T^* = \begin{cases} T_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_1(1) \cup G_3(1), \\ T_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1), \\ T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T), & \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_5(-1), \\ T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T), & \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_4(-1) \cup G_6(-1). \end{cases}$$

Расчетные результаты в соответствии с (5.4) представлены на диаграмме рис. 3, которая позволяет определить оптимальный тип конечной конфигурации и соответствующий оптимальный тип режима управления (4.15), при помощи которых можно перевести схват манипулятора в заданное конечное состояние, а также параметры для этого режима из (4.18), (4.19). Тип конечной конфигурации и режим управления устанавливается в зависимости от областей, в которых лежат точки $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ и $(\varphi_2^T, \varphi_1^T)$. На рис. 3 области $G_{1,2,3}(1)$ и $G_{4,5,6}(-1)$ заштрихованы.

Приведем числовой пример. Для манипулятора с безразмерными параметрами (4.25) начальные и конечные координаты схвата возьмем в виде

$$(5.5) \quad x^0 = 2, \quad y^0 = 0, \quad x^T = 1, \quad y^T = 0,5.$$

Значениям координат начального и терминального положений схвата (5.5) соответствуют начальная конфигурация $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$ и две конечные конфигурации (3.3), которым отвечают две симметричные относительно прямой $\varphi_2 = -\varphi_1$ точки на плоскости углов манипулятора (углы даны в радианной и градусной мерах):

$$(5.6) \quad \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=1} : (\varphi_1^T, \varphi_2^T) = (-0,514 \text{ рад}, 1,441 \text{ рад}) = (-29^\circ 45', 82^\circ 56'),$$

$$(5.7) \quad \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1} : (\varphi_2^T, \varphi_1^T) = (1,441 \text{ рад}, -0,514 \text{ рад}) = (82^\circ 56', -29^\circ 45').$$

Из диаграммы рис. 3 находим, что в рассматриваемом случае $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1)$, а $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_2(-1)$. Следовательно, согласно формуле (5.4) минимальное время перемещения схвата достигается в точке (5.6), которой соответствует конечная конфигурация, отвечающая значению $K = 1$. При этом следует использовать режим управления $M^* = (M_1, M_2^*)$ (4.26), где M_1 – управление с двумя переключениями в моменты $\tau_1^{(1)} = 0,0784$ (0,1754 с), $\tau_1^{(2)} = 1,3078$ (2,9257 с), M_2^* – с одним переключением в момент $\tau_2 = 0,6931$ (1,5505 с), а оптимальное время перемещения – $T^* = T_2 = 1,3862$ (3,1011 с). В скобках даны размерные значения времен с использованием формул перехода (4.1). Для сравнения отметим, что если выбрать конечную конфигурацию (5.7), то время перемещения схвата оказывается намного хуже: $T^* = T_1 = 1,8708$ (4,1853А).

6. Заключение

На конфигурационной плоскости двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном построены области, позволяющие по заданным координатам терминального положения схвата манипулятора определить тип конечной конфигурации и структуру оптимального управления, приводящего манипулятор в эту конфигурацию, при которых достигается минимальное значение времени перемещения схвата из начального положения покоя в произвольное положение покоя рабочей зоны манипулятора. Численными расчетами установлено, что оптимальный выбор типа конечной конфигурации может приводить к значительному увеличению быстродействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Оптимальные прямолинейные перемещения груза при помощи двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1982. № 1. С. 68–74.
2. Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Оптимизация управления и конфигураций двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 4. С. 123–131.

3. *Avetisyan V.V., Bolotnik N.N., Chernousko F.L.* Optimal Programmed Motions of a Two-Link Manipulator // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1985. V. 23. No. 5. P. 65–73.
4. *Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A.* Optimal Control of Manipulation Robots // IFAC Proc. 1985. V. 17. Iss. 2. P. 311–315.
5. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N.* Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // Optimal Control Applications and Methods. 1989. V. 10. Iss. 4. P. 293–311.
6. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1990. № 1. С. 189–238.
7. *Meier E.B., Bryson A.E.* Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. Iss. 5. P. 859–866.
8. *Chernousko F.L.* Optimization in Control of Robots / Computational Optimal Control. Basel: Birkhauser, 1994. P. 19–28.
9. *Аветисян В.В., Овакимян Н.В.* Оптимальные плоскопараллельные движения двузвенного манипулятора // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 161–168.
10. *Avetisyan V.V., Hovakimyan N.V.* Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1997. V. 36. Iss. 4. P. 638–646.
11. *Аветисян В.В.* Оптимизация конфигурации и направлений поворотов звеньев двузвенного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. № 4. С. 65–71.
12. *Avetisyan V.V.* Movements of an Electromechanical Manipulator Robot Optimal with Respect to Energy Rxpnditure // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1996. V. 35. Iss. 4. P. 679–685.
13. *Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N.* Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. V. 238. No. 2. P. 174–188.
14. *Овсеевич А.И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845–848.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 21.05.2020

После доработки 01.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020

© 2021 г. В.Н. БУКОВ, д-р техн. наук (v_bukov@mail.ru)
(ОАО “Бортовые аэронавигационные системы”, Москва),
А.М. БРОННИКОВ, д-р техн. наук (bronnikov_a_m@mail.ru)
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана),
И.Ф. ГАМАЮНОВ, канд. техн. наук (ilyagama@gmail.com)
(ВУНЦ ВВС “Военно-воздушная академия
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина”, Воронеж)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНФИГУРИРОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО РАССОГЛАСОВАНИЮ

Развивается аналитический подход к управлению избыточностью технических систем на фоне осуществления в системе управления по рассогласованию. Новые результаты приводятся в сопоставлении с полученными ранее основными положениями подхода для случая внешнего воздействия на избыточную систему. Получены условия допустимости и формулы альтернативных конфигураций в двух вариантах: как только достаточный и как необходимый и достаточный. Методические примеры иллюстрируют применение полученных решений.

Ключевые слова: избыточная система, управление избыточностью, конфигурация системы, допустимая конфигурация, передаточная матрица, целевая функция, канонизация матриц.

DOI: 10.31857/S0005231021020021

1. Введение

Под конфигурацией избыточного оборудования понимается способ или схема выборочного соединения компонентов оборудования с целью достижения заданной цели функционирования [1–5]. Чаще всего перестройке подвергается вычислительная система [6–9], коммуникационная система [10–12] или несколько систем сразу [13–15].

Одним из наиболее распространенных технических приложений использования избыточности является синтез отказоустойчивых систем управления, для которых в случае отказа или повреждения одного из каналов управления или передачи информации можно перераспределять его функции по оставшимся исправным каналам [11, 15].

Авторам не известны работы с постановкой и решением задачи, аналогичными рассматриваемой в статье. Так, например, в [15] решается задача обеспечения неизменности управляющего воздействия на систему за счет реконфигурации регулятора при возникновении отказа органов управления и не затрагивается задача обеспечения неизменности передаточной матрицы по рассогласованию. От других работ в области стабилизации свойств линейных систем за счет управления избыточностью данную статью отличает, прежде всего, представление традиционного регулятора в цепи обратной связи в виде произведения интерфейсных и интеграционных матриц, что, по мнению

авторов, наиболее соответствует практическим нуждам. Новизной статьи относительно предыдущих работ авторов является использование в качестве целевой функции передаточной матрицы по рассогласованию.

Аналитический подход к управлению избыточностью оборудования с линейными стационарными моделями и названный здесь конфигурированием, охватывает такие вопросы, как:

тестирование альтернативных конфигураций на их допустимость в смысле наличия возможности достижения целей функционирования системы в соответствующей конфигурации,

интеграция избыточных компонентов в систему с едиными целями функционирования в смысле определения настроек системы (в основном алгоритмов ее вычислительных средств), обеспечивающих достижение этих целей при выбранной допустимой конфигурации.

Данная статья нацелена на лаконичное изложение некоторых результатов направления применительно к системам, подверженным внешним воздействиям, а также на получение аналогичных результатов для систем с так называемым управлением по рассогласованию.

2. Исходные положения

Формальным объектом задачи конфигурирования (управления избыточностью) системы, подвергающейся внешнему воздействию [16, 17], является линейная динамическая система, состоящая из объекта управления и избыточных в общем случае динамических компонентов комплекса оборудования (КО), вместе в линейном приближении описываемых уравнением с дискретным временем $\tau = 1, 2, \dots$

$$(1) \quad x_{\tau+1} = Ax_{\tau} + Bu_{\tau} + Gv_{\tau}, \quad x_{\tau=0} = x_0, \quad y_{\tau} = Dx_{\tau},$$

а также избыточной бортовой интегрированной вычислительной среды, функционирование которой в линейном приближении описывается формулой

$$(2) \quad u_{\tau} = Q(z)y_{\tau}.$$

Здесь x_{τ} – метавектор (составной вектор) состояния объекта и компонентов размерности n на такте τ с известными начальными условиями x_0 , u_{τ} – метавектор входов компонентов для межкомпонентных связей размерности l , v_{τ} – метавектор входов компонентов для внешних воздействий размерности k , y_{τ} – метавектор выходов всех компонентов размерности m , A – блочная числовая матрица собственной динамики объекта и компонентов размеров $n \times n$, B – блочная числовая матрица эффективности межкомпонентных связей размеров $n \times l$, G – блочная числовая матрица эффективности внешних воздействий размеров $n \times k$, D – блочная числовая матрица формирования выходов всех компонентов размеров $m \times n$, z – оператор сдвига во времени на один такт вперед [18, 19], $Q(z)$ – передаточная матрица размеров $l \times m$ (по оператору z) от метавектора выходов компонентов y_{τ} к метавектору их входов для межкомпонентных связей u_{τ} , названная конфигурационной матрицей [16].

В настоящей статье основное внимание сосредоточено на системах с управлением по рассогласованию выходов, в линейном приближении описываемых уравнением и равенствами с дискретным временем $\tau = 1, 2, \dots$

$$(3) \quad x_{\tau+1} = Ax_{\tau} + Bu_{\tau} + Gv_{\tau}, \quad x_{\tau=0} = x_0, \quad y_{\tau} = Dx_{\tau}, \quad u_{\tau} = Q(z)(y_{\tau}^{\text{зад}} - y_{\tau}),$$

где $y_{\tau}^{\text{зад}}$ – метавектор заданных значений выходов системы.

В задаче управления избыточностью линейной системы числовые матрицы A , B , G и D в (1) и (3) полагаются фиксированными. Их значения определяют динамические свойства как объекта, так и всех (используемых и неиспользуемых в текущий момент времени) располагаемых компонентов КО в разрозненном состоянии.

Конфигурационная матрица $Q(z)$ в (2) и (3) через размещение ненулевых элементов (соответствует коммутированию входов и выходов соответствующих компонентов) объединяет компоненты КО и объект в единую систему. Посредством же конкретных значений ненулевых элементов она определяет правила обработки данных вычислительными средствами. Таким образом осуществляется подчинение функционирования системы (1), (2) или (3) общим целям и удовлетворение предъявляемых требований.

Именно значения конфигурационной матрицы $Q(z)$, а точнее, закономерности возникновения и изменения множества ее в некотором смысле эквивалентных значений $\{Q(z)\}_{\kappa}$, где κ – совокупное обозначение параметров, варьирование которых порождает это множество, являются предметом поиска, исследования и практического использования в задаче управления избыточностью технической системы.

3. Передаточные матрицы системы

В развиваемом подходе требования к динамическим свойствам избыточной системы связываются со значениями передаточных матриц для вынужденных составляющих:

замкнутой системы (1), (2) от внешних воздействий v_{τ} к выходам y_{τ}

$$(4) \quad W_y^v(z) = \left[w_{y_{j,\tau}}^{v_{i,\tau}}(z) \right]_{m \times k} = D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1}G,$$

где $w_{y_{j,\tau}}^{v_{i,\tau}}(z)$ – передаточная функция от i -го входа $v_{i,\tau}$ к j -му выходу $y_{j,\tau}$, I_n – единичная матрица размеров $n \times n$;

замкнутой системы (3) от заданных значений $y_{\tau}^{\text{зад}}$ к выходам y_{τ}

$$(5) \quad W_y^{y^{\text{зад}}}(z) = \left[w_{y_{j,\tau}}^{y_{i,\tau}^{\text{зад}}}(z) \right]_{m \times m} = D(zI_n - A + BQ(z)D)^{-1}BQ(z).$$

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют структуры моделей, соответствующих передаточным матрицам (4) и (5). В зависимости от конкретных условий рассматривается одна из этих передаточных матриц или они рассматриваются совместно.

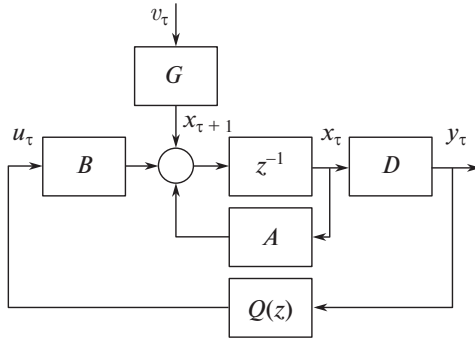


Рис. 1. Структура системы “объект + КО” с внешним воздействием.

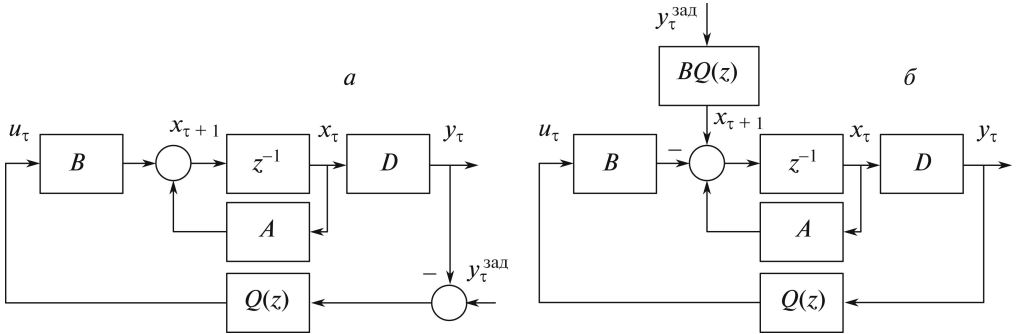


Рис. 2. Структуры системы “объект + КО” с управлением по рассогласованию выходов: *а* — исходная, *б* — преобразованная к виду рис. 1.

Принципиальное различие моделей (4) и (5), определяющее структуры матричных конструкций в основе решения задачи управления избыточностью, заключается в том, что варьируемая конфигурационная матрица $Q(z)$ находится либо только в цепи обратной связи (рис. 1) от воздействия v_τ до выхода системы y_τ , либо присутствует также и в цепи прямой связи (рис. 2) от $y_\tau^{зад}$ до y_τ .

4. Формулировка задачи и номинальная конфигурация

Для линейной динамической системы, описываемой передаточными матрицами (4) или (5), вводится понятие целевой функции [17], отражающей применение системы по назначению. В качестве такой функции для случая внешних воздействий используются выборочные строки и столбцы передаточной матрицы (4) в соответствии с весовыми матрицами α размеров $k \times g$ и β размеров $f \times m$:

$$(6) \quad \Phi^{возд}(z) = \beta W_y^v(z) \alpha = \beta D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1} G \alpha.$$

В задаче управления по рассогласованию выходов используются выборочные строки и столбцы передаточной матрицы (5) с весовыми матрицами α

размеров $m \times g$ и β размеров $f \times m$:

$$(7) \quad \Phi^{\text{расс}}(z) = \beta W_y^{y^{\text{зад}}}(z) \alpha = \beta D(zI_n - A + BQ(z)D)^{-1} BQ(z) \alpha.$$

Традиционная задача определения обратных связей (в общем случае речь должна идти о множестве¹ эквивалентных матриц $Q(z)$), обеспечивающих требуемое значение $\Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z)$ целевой функции для случая внешнего воздействия, заключается в разрешении уравнения (6), или значение $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$ – для случая управления по рассогласованию выходов, связанное с решением уравнения (7). Это кратко можно записать диаграммой

$$\Phi_{\text{треб}}(z) \xRightarrow{\text{Решение (6) или (7)}} \{Q(z)\}_{\kappa}.$$

При постановке задачи о конфигурировании (управлении избыточностью) КО осуществляется расчленение этой диаграммы на два этапа. Первый из них заключается в определении любого одного решения $Q_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)$ для уравнения

$$(8) \quad \Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z) = \beta D(zI_n - A - BQ_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)D)^{-1} G \alpha$$

или $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$ для уравнения

$$(9) \quad \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = \beta D(zI_n - A + BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)D)^{-1} BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \alpha,$$

названного номинальной конфигурацией КО и устраивающего разработчика.

Для решения таких задач разработан широкий арсенал подходов и методов, использующих как строгие положения теорий управления и оптимизации [20–23], так и инженерные приемы и методики, основанные на опыте, переносе отработанных на прототипах решений и пр. [24]. Примем, что как минимум по одному решению $Q_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)$ для (8) и $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$ для (9) существуют.

Второй этап сосредоточен только на порождении множества решений, эквивалентных номинальному в смысле неизменности значения целевой функции $\Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z)$ или $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$, что записывается диаграммой

$$(10) \quad \underbrace{\Phi_{\text{треб}}(z) \xRightarrow{\text{Решение (8) или (9)}} Q_{\text{ном}}(z)}_{\text{Этап 1}} \underbrace{\xRightarrow{\text{Конфигурирование}} \{Q(z)\}_{\kappa}}_{\text{Этап 2}}.$$

Считается, что первый этап выполняется предварительно, и далее все внимание сосредотачивается только на втором этапе. При этом существование конфигураций $Q_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)$ и $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$, отличных от номинальных, пока остается открытым вопросом.

¹ В подавляющем большинстве применений различных подходов либо единственность решения обеспечивается “излишними” условиями (например, процедуры типа метода наименьших квадратов обеспечивают минимальность квадратичной нормы результата, что с содержательной стороны не всегда имеет внятное обоснование), либо разработчик не подозревает о существовании других эквивалентных решений поставленной задачи.

5. Формализация и допустимость конфигурации

Исследования показали, что решение уравнений (6) или (7) дает значения матриц $Q(z)$ с заполненными (не нулевыми) практически всеми их элементами, что противоречит физическому содержанию задачи, поскольку какая-то (порой значительная) часть этих элементов должна принимать заведомо нулевые значения. Это отражает (формализует) управляемое отключение некоторых компонентов комплекса в реализуемой конфигурации системы.

Удачным разрешением указанной ситуации стало [16, 17] представление конфигурационных матриц в виде произведения

$$(11) \quad Q(z) = C_{\text{вх}} E(z) C_{\text{вых}},$$

где $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ – распределительные матрицы размеров $l \times p$ и $q \times m$, т.е. матрицы, содержащие бинарные элементы и не более одного единичного элемента в строке, названные интерфейсными матрицами [17], поскольку без учета задержек моделируют функционирование входных и выходных интерфейсов всех компонентов и каналов связи между ними за исключением объекта, $E(z)$ – в общем случае рациональная полиномиальная матрица размеров $p \times q$, моделирующая обработку вычислительными средствами всех поступающих данных и задержек в интерфейсных устройствах и каналах связи, названная интеграционной матрицей [17].

В выборе интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, осуществляемом преимущественно на основе инженерных доводов, заключается процесс конфигурирования избыточной системы, а определение интеграционной матрицы $E(z)$ путем решения специальных матричных уравнений составляет процесс интеграции избыточной системы.

Задача конфигурирования избыточной системы, подвергающейся внешнему воздействию v_{τ} , базирующаяся на уравнении (6) с заданным значением целевой функции (8), решена ранее. В [25] изложены формальные условия допустимости возможных конфигураций, задаваемых выбором $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, в [26] – решение основного уравнения интеграции для множества интеграционных матриц $\{E(z)\}_{\kappa}$, соответствующих допустимым конфигурациям и заданной целевой функции, а в [27] – общая методика решения таких задач.

Далее рассматривается только задача конфигурирования избыточной системы с управлением по рассогласованию выходов $y_{\tau}^{\text{зад}} - y_{\tau}$, связанная с решением уравнения (7) и заданным значением целевой функции (9).

Как и ранее в задаче с внешним воздействием [25, 26], конфигурацию $Q(z)$ будем считать допустимой, если при выбранных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ в системе (7) существует возможность (существует соответствующая $E(z)$) сохранения неизменным значение целевой функции

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z),$$

зафиксированное весовыми функциями α , β и номинальной конфигурацией КО $Q_{\text{ном}}(z)$ в соответствии с (9).

6. Управление по рассогласованию

Задача заключается в том, чтобы для целевой функции системы (9) определить допустимость заданных интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$, $C_{\text{вых}}$ и при их допустимости найти множество таких интеграционных матриц $E(z)$, при которых значение целевой функции $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$ остается неизменным:

$$(12) \quad \beta D(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D)^{-1}BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}\alpha = \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z).$$

Уравнение (12) относительно неизвестной матрицы $E(z)$ является основным уравнением интеграции избыточной системы при управлении по рассогласованию выходов.

Далее используются обозначения канонизации [20] произвольной матрицы S ранга r : $\bar{S}^{\text{L}}$ и $\bar{S}^{\text{R}}$ – левый и правый делители нуля максимального ранга, $S^{\sim\text{L}}$, $S^{\sim\text{R}}$ и $S^{\sim}$ – левый, правый и сводный канонизаторы, удовлетворяющие тождествам

$$\bar{S}^{\text{L}}S = 0, \quad S\bar{S}^{\text{R}} = 0, \quad S^{\sim\text{R}}S^{\sim\text{L}} = S^{\sim} \quad \text{и} \quad S^{\sim\text{L}}SS^{\sim\text{R}} = I_r.$$

Неединственность указанных матричных образований позволяет отбирать среди множества альтернатив упрощенные решения (с нулевыми и единичными значениями элементов) для ускорения вычислений и обеспечения наглядности примеров [26].

Решение задачи сформулировано в виде двух теорем.

Теорема 1. Достаточным условием существования интеграционных матриц $E(z)$, обеспечивающих выполнение равенства (12) при заданных интерфейсных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, является одновременное выполнение двух условий с блочной матрицей $\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}$

$$(13) \quad \overline{BC_{\text{вх}}}^{\text{L}} BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} = 0,$$

$$(14) \quad BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} \overline{C_{\text{вых}}}^{\text{R}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}^{\text{L}} = 0,$$

при этом множество интеграционных матриц $E_{\mu,\eta}(z)$ описывается формулой

$$(15) \quad \{E(z)\}_{\mu,\eta} = \underbrace{(BC_{\text{вх}})^{\sim} BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} (C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix})^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} + \underbrace{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\text{R}} \mu}_{\text{Вариация столбцов}} + \underbrace{\eta \overline{C_{\text{вых}}}^{\text{L}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}^{\text{L}}}_{\text{Вариация строк}},$$

где μ и η – произвольные матрицы подходящих размеров, выбор которых ограничен условием

$$(16) \quad \det(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E_{\mu,\eta}(z)C_{\text{вых}}D) \neq 0.$$

Только достаточность теоремы 1 обусловлена удовлетворением требования неизменности раздельно для знаменателя и числителя матричной дроби (12), что исключает учет возможной компенсации их вариаций и тем самым значительно сужает множество получаемых решений. Вместе с тем теорема 1 обладает двумя важными достоинствами: относительной вычислительной простотой и возможностью получения заведомо физически реализуемых решений, т.е. решений в виде матриц $E(z)$, степень полиномов числителей которых не превышает степень полинома знаменателя.

Исчерпывающее же решение задачи дает следующая теорема.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием существования интеграционных матриц $E(z)$, обеспечивающих выполнение равенства (12) при заданных интерфейсных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, является одновременное выполнение двух условий разрешимости основного уравнения интеграции

$$(17) \quad \overline{\aleph(z)}^L \overline{BC_{\text{вх}}}^L (zI_n - A) (\beta D)^{\sim} \Phi_{\text{треб}}^{\text{pacc}}(z) = 0,$$

$$(18) \quad \delta_{\xi}(z) \overline{C_{\text{вых}} (\alpha - D\delta_{\xi}(z))}^R = 0$$

и условия существования передаточной матрицы замкнутой системы

$$(19) \quad \det(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E_{\xi, \vartheta, \psi}(z)C_{\text{вых}}D) \neq 0,$$

где

$$(20) \quad \aleph(z) = \overline{BC_{\text{вх}}}^L (zI_n - A) \overline{\beta D}^R,$$

матрица $\delta_{\xi}(z)$ принадлежит множеству, вычисляемому по формулам

$$(21) \quad \{\delta(z)\}_{\xi} = (\beta D)^{\sim} \Phi_{\text{треб}}^{\text{pacc}}(z) + \overline{\beta D}^R \rho_{\xi}(z),$$

$$(22) \quad \{\rho(z)\}_{\xi} = -(\aleph(z))^{\sim} \overline{BC}^L (zI_n - A) (\beta D)^{\sim} \Phi_{\text{треб}}^{\text{pacc}}(z) + \underbrace{\overline{\aleph(z)}^R}_{\text{Вариация базового решения на 2-м ярусе}} \xi,$$

ξ – матрица подходящих размеров с почти произвольными элементами, обеспечивающими выполнение условий (18) и (19), при этом все множество интеграционных матриц $E_{\xi, \vartheta, \psi}(z)$ описывается формулой

$$(23) \quad \begin{aligned} \{E(z)\}_{\xi, \vartheta, \psi} = & \underbrace{(BC_{\text{вх}})^{\sim} (zI_n - A) \delta_{\xi}(z) (C_{\text{вых}} (\alpha - D\delta_{\xi}(z)))^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} + \\ & + \underbrace{\overline{BC_{\text{вх}}}^R \vartheta}_{\text{Вариация стролбцов на 1-м ярусе}} + \underbrace{\psi \overline{C_{\text{вых}} (\alpha - D\delta_{\xi}(z))}^L}_{\text{Вариация строк на 1-м ярусе}}, \end{aligned}$$

где ϑ и ψ – удовлетворяющие условию² (19) произвольные матрицы подходящих размеров.

² Строго говоря, условия (15) и (19) могут нарушаться в конечном числе значений z , называемых полюсами соответствующих передаточных функций.

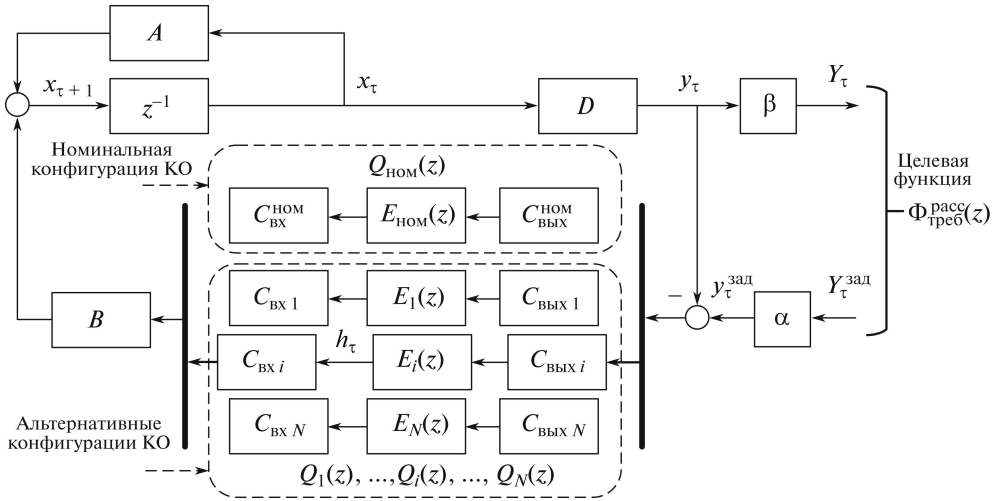


Рис. 3. Общая структура системы “объект + избыточный КО”.

Теорема 2 отличается от теоремы 1 существенно большей сложностью, связанной с количеством процедур канонизации и “двухъярусностью” варьирования решения: первого путем выбора матриц ϑ и ψ в формуле (23) с проверкой условия (19) и второго путем выбора матрицы ξ в формуле (22) с проверкой условий (18), (19). При этом условие (17) по аналогии с результатами [26] является автономным в том смысле, что не зависит от варьируемых матриц.

Трудность использования теоремы 2 связана с неявным ограничением выбора матрицы ξ в формуле (22) условиями (18) и (19) через формулу (21). Способ прямого удовлетворения таких ограничений не найден, но в частных весьма распространенных случаях при выполнении любого из двух равенств

$$(24) \quad \overline{\beta D}^R = 0, \quad \overline{\aleph(z)}^R = 0$$

матрица $\delta_\xi(z)$ принимает единственное значение, а условия (18) и (19) не зависят от выбора ξ .

Доказательства теорем приведены в Приложении.

Обобщающая иллюстрация решенной задачи показана на рис. 3, где жирными элементами условно показаны коммутационные средства, осуществляющие подключение эквивалентных по целевой функции номинальной или одной из N альтернативных конфигураций.

Содержательное объяснение условий (24) сводится к следующему. Введенная в (20) матрица $\aleph(z)$ является фактором связности³ для динамической системы

$$(25) \quad F_Y^h(z) = \beta D(zI_n - A)^{-1} B C_{\text{вх}},$$

представляющей собой часть системы (12) от p -мерного выхода h_τ всех вычислительных средств КО к тестовым выходам Y_τ при оборванных связях

³ В [20] использован термин “матрица связности”, который здесь корректируется.

КО: $E(z) = 0$. Согласно теореме 2.4 и определению 2.6 из [20] любое из условий (24) соответствует отсутствию в системе (25) линейной зависимости входов, обусловленной только ее внутренней связностью, т.е. без учета внешней связности, формализуемой делителем нуля $\overline{BC_{\text{вх}}}^R$ и учитываемой явно в (23). На рис. 3 показано положение вектора h_T , относящегося к определению функции (25).

7. Примеры

Управление самолетом. Пример из [25] с упрощенной моделью продольного движения самолета преобразуем к задаче управления по рассогласованию выходов (7). Соответствующие матрицы имеют значения:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Номинальная конфигурация задана следующими значениями матриц:

$$C_{\text{вх}}^{\text{ном}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\text{вых}}^{\text{ном}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{\text{ном}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{ном}} = \begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = \frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}}.$$

В рамках примера для различных вариантов конфигураций выполнены вычисления в соответствии теоремами 1 и 2 с привлечением программы MatLab. Полученные результаты с целью проверки подставлялись в (12). Выборочно результаты вариантов (вариант 0 – номинальный) сведены в табл. 1 и 2, где выполнение условий теорем отмечено символами: “+” — выполняется, “–” — не выполняется.

В табл. 2 введены дополнительные обозначения функций:

$$(26) \quad q(z) = \frac{a_3((z - a_1)(z - a_4) - a_2a_3)}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2a_3}, \quad p(z) = -\frac{a_3(z - a_1)}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2a_3},$$

$$r(z) = \frac{a_3(z - 1)((z - a_1)(z - a_4) - a_2a_3)}{(z - 1)((z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2a_3) - a_2a_3(z - a_1)},$$

$$t(z) = \frac{(z-1)((z-a_1)(z-a_{\text{ж}}) - a_2a_3)}{a_2a_3(z-a_1)},$$

$$f(z) = \frac{a_3(z-1)((z+a_1)(z-a_4) + a_2a_3)}{(z-a_1)((z+1)(z-a_{\text{ж}}) + a_2a_3)},$$

$$s(z) = \frac{(z-1)((z-a_1)(z-a_{\text{ж}}) - a_2a_3)}{a_2a_3(a_1-1)}.$$

Для варианта 1 далее приводятся некоторые детали вычислений.

Таблица 1. Генерирование альтернативных конфигураций по теореме 1

№	Конфигурация		Условия существ. (13), (14)	Решение по формуле (15)		
	$C_{\text{вх}}$	$C_{\text{вых}}$		Базовое решение	Вариация столбцов	
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	+	+	$\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} \end{bmatrix}$	—
1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	+	+	$\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_2} & \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_2} \end{bmatrix}$	—
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	+	+	$\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	+	—	Нет решения	
4	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	+	—		

Таблица 2. Генерирование альтернативных конфигураций по теореме 2

№	Конфигурация		Условия существ. (17)–(19)	Решение по формуле (23)		
	$C_{\text{вх}}$	$C_{\text{вых}}$		Базовое решение	Вариация столбцов	Вариация строк
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{q(z)}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	—	$\psi \begin{bmatrix} p(z) & 1 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{q(z)}{b_2} & 0 \end{bmatrix}$	—	$\psi \begin{bmatrix} p(z) & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{bmatrix} [\vartheta_1 \ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{bmatrix} [\vartheta_1 \ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{r(z)}{b_1} & \frac{r(z)}{b_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{bmatrix} [\vartheta_1 \ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t(z) \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{f(z)}{b_1} & \frac{f(z)}{b_1} \end{bmatrix}$	—	$\psi \begin{bmatrix} 1 & s(z) \end{bmatrix}$

Вычисления по теореме 1 (табл. 1). Предварительные расчеты:

$$\begin{aligned}
 BC_{\text{BX}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{BC_{\text{BX}}}^{\text{R}} = 0, \\
 \overline{BC}^{\text{L}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (BC)^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b_2} & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha]}^{\text{L}} = 0, \\
 (C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha])^{\sim} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Условие (13) выполняется:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{BC_{\text{BX}}}^{\text{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{Ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{НОМ}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[D \ \alpha]} = 0.$$

Условие (14) также выполняется:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{Ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{НОМ}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[D \ \alpha]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha]}^{\text{R}}} = 0.$$

Решение по формуле (15) единственное:

$$\begin{aligned}
 (27) \quad E(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b_2} & 0 \end{bmatrix}}_{(BC_{\text{BX}})^{\sim}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4 - a_{\text{Ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{НОМ}}} \times \\
 &\times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[D \ \alpha]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha])^{\sim}} + \underbrace{\overline{BC_{\text{BX}}}^{\text{R}}}_0 \mu + \eta \underbrace{\overline{C_{\text{ВЫХ}} [D \ \alpha]}^{\text{L}}}_0 = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{a_3}{b_2} & \frac{a_4 - a_{\text{Ж}}}{b_2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вычисления подтверждают выполнение (16) у вариантов 1 и 2. Следовательно, конфигурация строки 1 в табл. 1 является допустимой. Проверка подтверждает совпадение $\Phi^{\text{расс}}(z)$ и $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$. У вариантов 3 и 4 условие (14) не выполняется, из чего следует, что конфигурации недопустимы.

Вычисления по теореме 2 (табл. 2). Предварительные расчеты:

$$\beta D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\beta D}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\beta D)^\sim = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \aleph(z) = \begin{bmatrix} z - a_1 & 0 \\ 0 & z - 1 \end{bmatrix}.$$

Фактор связности $\aleph(z)$ обратим, и его оба делителя нуля равны нулю. Условие (17) выполняется, а вычисления по формуле (22) дают единственное значение

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{z - a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - 1} \end{bmatrix}}_{\aleph^\sim = \aleph^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{BC}_{\text{вх}}^L} \underbrace{\begin{bmatrix} z - a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & z - a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & z - 1 \end{bmatrix}}_{(zI_n - A)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(\beta D)^\sim} \underbrace{\frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}}}_{\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_2 a_3}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})} \\ \frac{a_2 a_3}{(z - 1)(z - a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица $\delta_\xi(z)$ имеет единственное значение

$$\delta(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(\beta D)^\sim} \underbrace{\frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}}}_{\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\beta D}^R} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_2 a_3}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})} \\ \frac{a_2 a_3}{(z - 1)(z - a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}}_{\rho(z)} = \begin{bmatrix} \frac{a_2 a_3}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})} \\ \frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}} \\ \frac{a_2 a_3}{(z - 1)(z - a_{\text{ж}})} \end{bmatrix},$$

и, соответственно, матричное выражение, результаты повторной канонизации которого используются в (20) и (23), принимает тоже единственное значение

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{вых}}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\alpha} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_2 a_3}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})} \\ \frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}} \\ \frac{a_2 a_3}{(z - 1)(z - a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}}_{\delta(z)} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})} \\ -\frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}} \end{bmatrix}.$$

Канонизация этой матрицы дает:

$$\begin{aligned} \overline{C_{\text{вых}}(\alpha - D\delta_\xi(z))}^L &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3}{a_3(z - a_1)} \end{bmatrix}, \\ \overline{C_{\text{вых}}(\alpha - D\delta_\xi(z))}^R &= 0, \\ (C_{\text{вых}}(\alpha - D\delta_\xi(z)))^\sim &= \begin{bmatrix} \frac{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}})}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Условие (18) выполняется. Вычисления по формуле (23) в итоге дают множество решений

$$(28) \quad \{E(z)\}_\psi = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q(z)}{b_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Базовое решение}} + \underbrace{\psi \begin{bmatrix} p(z) & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Вариация строк}},$$

где функции $q(z)$ и $p(z)$ принимают значения (26), ψ – произвольное число или выражение такие, что выполняется условие (19). Соответствующее ограничение имеет вид неравенства

$$\psi(z) \neq \frac{a_2(a_3 b_1 - b_2 q(z)) - b_1(z - a_1)(z - a_4)}{b_1 b_2((z - a_1) + a_2 p(z))}.$$

При любых других значениях этой функции условие (19) выполняется, и конфигурация допустима. Вычисления показывают совпадение $\Phi^{\text{расс}}(z)$ и $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$ у вариантов 1–4.

Множество решений (28) содержит физически реализуемые и не реализуемые элементы, что связано с выбором варьируемого параметра ψ .

Среди решений $\{E(z)\}_\psi$ присутствует и решение (27), полученное ранее по теореме 1, в чем можно убедиться, используя в (28) значение параметра

$$\psi = \frac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1}.$$

Пример подтверждает справедливость утверждений теорем 1 и 2, а табл. 1 и 2 демонстрируют более широкие возможности применения теоремы 2.

*Методический пример*⁴. Рассмотрим следующие матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = D = \beta = I_2, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

⁴ Пример подсказан рецензентом статьи.

Таблица 3. Альтернативные конфигурации в методическом примере

№	Конфигурация		Условия существ. (17)–(19)	Решение по формуле (23)		
	$C_{\text{вх}}$	$C_{\text{вых}}$		Базовое решение	Вариация столбцов	Вариация строк
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	–	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} [1 \ z]$
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\vartheta_1 \ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} [1 \ z]$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	+ + –	Значения $E(z)$, не являющиеся решениями		
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\vartheta_1 \ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} [1 \ z]$

Пусть задана номинальная конфигурация

$$Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) = \underbrace{I_2}_{C_{\text{вх}}^{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{z^3}{z^2+1} & \frac{z^2}{z^2+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{\text{ном}}(z)} \underbrace{I_2}_{C_{\text{вых}}^{\text{ном}}} = \begin{bmatrix} -\frac{z^3}{z^2+1} & \frac{z^2}{z^2+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = [z \ 0]^T.$$

Варианты трех конфигураций приведены в табл. 3, где вариант 0 соответствует номинальной конфигурации при выборе $\psi_1(z) = -\frac{z}{z^2+1}$, $\psi_2 = 0$. Вариант 2 сформирован заведомо неработоспособным, поскольку в (12) для него имеет место равенство $C_{\text{вых}}\alpha = 0$.

Применим теорему 2 для варианта 2. Условия (17), (18) выполнены:

$$\aleph(z) = \overline{BC_{\text{вх}}}^L (zI_2 - A) \underbrace{\overline{\beta D}^R}_0 = [0 \ 1] zI_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\overline{\aleph(z)}^L \overline{BC_{\text{вх}}}^L (zI_2 - A) (\beta D)^\sim \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = 1 [0 \ 1] zI_2 I_2 \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\delta(z) = (\beta D)^\sim \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z),$$

$$C_{\text{вых}}(\alpha - D\delta_\xi(z)) = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C_{\text{вых}}(\alpha - D\delta_\xi(z))}^R = 0.$$

Однако условие (19) не выполняется, в чем можно убедиться следующими вычислениями:

$$(BC_{\text{вх}})^\sim L = [1 \ 0], \quad (BC_{\text{вх}})^\sim R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(BC_{\text{вх}})^\sim = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{E(z)\}_{\vartheta, \psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z I_2 \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -z & \psi_1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 + \psi_2 \end{bmatrix},$$

$$\det \left(z I_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & \psi_1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 + \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, в конфигурации варианта 2 ни одно из вычисленных значений $E(z)$ не может быть решением задачи из-за невыполнения условия (19).

8. Заключение

Применительно к избыточному комплексу оборудования, реализующему управление по рассогласованию выходов системы, предложено аналитическое решение задачи генерирования (тестирования и интеграции) альтернативных конфигураций, обеспечивающих неизменность целевой функции его функционирования, зафиксированной в номинальной конфигурации. В отличие от ранее решенной аналогичной задачи применительно к системе, подвергающейся внешнему воздействию, вновь полученное решение является более сложным, что выражено в существенно большем числе операций с полиномиальными матрицами и двумя ярусами их варьирования.

Предлагаемый подход не ограничен исключительно областью линейных систем. В сочетании с использованием различных приемов декомпозиции и линеаризации он становится универсальным инструментом для структурных решений в избыточных системах более широкого круга.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что равенство (12), содержащее матричную дробь, будет справедливо, если одновременно выполняются равенства для знаменателя и правого числителя:

$$(П.1) \quad BC_{\text{вх}} E(z) C_{\text{вых}} D = BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) D, \quad BC_{\text{вх}} E(z) C_{\text{вых}} \alpha = BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \alpha.$$

В блочном форме этим равенствам соответствует запись

$$(П.2) \quad BC_{\text{вх}} E(z) C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} = BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z) \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}.$$

Уравнение (П.2) относительно неизвестной матрицы согласно теореме 1.6 из [20] разрешимо, если и только если выполнены условия (13) и (14), а его решение согласно теореме 1.7 из [20] определяется формулой (15). Равенство (12) имеет смысл, если и только если выполняется условие (16). Вместе с тем, выполнение первого условия (П.1) гарантирует неизменность знаменателя матричной дроби (12), а значит и существование таких варьируемых параметров μ и η , при которых детерминантное условие (16) выполняется. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Вводя с учетом (11) замену

$$(П.3) \quad \delta(z) = (zI_n - A + BQ(z)D)^{-1}BQ(z)\alpha,$$

перепишем уравнение (12) в виде

$$(П.4) \quad \beta D \delta(z) = \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z).$$

Это уравнение всегда разрешимо относительно матрицы $\delta(z)$, поскольку условие существования решения

$$\overline{\beta D}^L \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = 0,$$

соответствующее теореме 1.4 из [20], при подстановке значения $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$ из (9) становится тождеством:

$$\underbrace{\overline{\beta D}^L}_{0} \beta D (zI_n - A + BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)D)^{-1} BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)\alpha = 0.$$

Множество решений $\delta(z)$ уравнения (П.4) в соответствии с теоремой 1.4 из [20] записывается формулой (22), где ρ – некоторая матрица подходящих размеров, возможные значения которой уточняются далее.

Теперь перепишем формулу (П.3) следующим образом:

$$BQ(z)(\alpha - D\delta(z)) = (zI_n - A)\delta(z),$$

куда подставляем (11) и любой из элементов $\delta_\xi(z)$ множества (21):

$$(П.5) \quad BCE(z)C(\alpha - D\delta_\xi(z)) = (zI_n - A)\delta_\xi(z).$$

Одно из условий разрешимости двухстороннего матричного уравнения (П.5) в соответствии с теоремой 1.7 из [20] записывается в виде равенства

$$\overline{BC}_{\text{вх}}^L (zI_n - A)\delta_\xi(z) = 0,$$

которое с учетом (21) и введением обозначения (20) перепишем в виде

$$(П.6) \quad \aleph(z)\rho = -\overline{BC}^L (zI_n - A)(\beta D)^\sim \Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z).$$

Выполнение этого условия явным образом зависит от выбора матрицы ρ , введенной в (21). Решая (П.6) как левостороннее уравнение относительно указанной матрицы, согласно теореме 1.4 [20] получаем условие разрешимости в виде равенства (17) и решение в виде формулы (22).

Вторым условием разрешимости (П.5) в соответствии с теоремой 1.7 из [20] является выполнение равенства (18) (обратимый сомножитель $(zI_n - A)$ слева опущен как не влияющий на результат проверки), а все множество решений описывается формулой (23).

Однако скрытое в формулах теоремы варьирование знаменателя матричной дроби (12) требует проверки его существования, т.е. существования таких варьированных параметров ξ , ϑ и ψ , при которых выполняется детерминантное условие (19). Выполнение аналогичного условия для матрицы $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$ связано с существованием по определению номинальной конфигурации. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев А.М., Бронников А.М., Буков В.Н., Гамаюнов И.Ф. Супервизорный метод управления избыточностью технических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 59–69.
2. Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Озеров Е.В., Шурман В.А. Концепция управляемой избыточности комплексов бортового оборудования // Науч. чтения по авиации, посвящ. пам. Н.Е. Жуковского: Матер. XVI Всерос. науч.-практ. конф. / Гл. ред. С.П. Халютин (11–12 апр. 2019, Москва). М.: Изд. дом Акад. им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 17–33.
3. Amato F., Cosentino C., Mattei M., Paviglianiti G. A Direct/Functional Redundancy Scheme for Fault Detection and Isolation on an Aircraft // Aerospace Sci. Technol. 2006. V. 10. No. 4. P. 338–345.
4. Bartys M., Patton R.J., Syfert M., Heras S., Quevedo J. Introduction to the DAMADICS Actuator FDI Benchmark Study // Control Engineering Practice. 2006. V. 14. No. 6. P. 577–596. Special Issue “Fault Diagnosis of Actuator Systems: the DAMADICS Benchmark Problem”.
5. Patton R.J., Uppal F.J., Simani S., Polle B. Reliable Fault Diagnosis Scheme for a Spacecraft Attitude Control System // J. Risk Reliabil. 2008. V. 222. No. 2. P. 139–152.
6. Клошников В.Ю. Повышение целевой эффективности наноспутников информационного обеспечения // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 2018. Т. 61. № 5. С. 414–422.
7. Gupta S. Dynamic Microcontroller Reconfiguration Delivers More Than 100% Resource Utilization. URL: <https://www.radiolocman.com/review/article.html?di=148343>. (Дата обращения: 26.05.2020).
8. Филиппов А.К. Современные архитектуры динамически реконфигурируемых систем обработки информации // Проектирование и технология электронных средств. 2007. № 2. С. 2–9.
9. Потомский С.Ю., Полойко Н.А. Архитектура распределенной системы управления на основе реконфигурируемой многоконвейерной вычислительной среды L-Net // Системный администратор. 2014. № 10 (143). URL: <http://samag.ru/archive/article/2806>. (Дата обращения: 26.05.2020).
10. Knyazeva N. Improving the Structural Survivability of the Telecommunications Network // Inform. Models Anal. V. 2. 2013. No. 3. P. 275–284.
11. Hagiyev C., Caliskan F. Fault Diagnosis and Reconfiguration in Flight Control Systems. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004.
12. Grebeshkov A.Y., Zuev A.V., Kiporov D.S. Computer Simulation of Average Channel Access Delay in Cognitive Radio Network // Commun. Computer Inform. Sci. 2016. V. 678. P. 325–336.
13. Дегтярев А.Р., Киселев С.К. Отказоустойчивые реконфигурирующиеся комплексы интегрированной модульной авионики // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2016. Т. 12. № 1. С. 89–99.
14. Кулаков А.Ю., Павлов А.Н., Потрясаев С.А., Соколов Б.В. Методы, алгоритмы и технологии реконфигурации бортовых систем маломассоразмерных космических аппаратов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. Т. 61. № 7. С. 596–603.
15. Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В. Аналитический синтез многосвязных отказоустойчивых систем управления с упрощенной схемной реализацией // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 1. С. 108–117.

16. Агеев А.М. Конфигурирование избыточных комплексов бортового оборудования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 175–192.
17. Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф. Аналитический подход к формированию конфигураций технических систем // АиТ. 2017. № 9. С. 67–83.
18. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
19. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5 томах. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
20. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
21. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
22. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
23. Красовский А.А., Александров А.Г., Артемьев В.М. и др. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
24. Авиация ВВС России и научно-технический прогресс: боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / Под. ред. Е.А. Федосова. М.: Дрофа, 2005.
25. Буков В.Н., Бронников А.М. Тестирование конфигураций избыточных интегрированных комплексов оборудования // АиТ. 2019. № 2. С. 76–95.
26. Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф. Интеграция комплекса оборудования выбранной конфигурации // АиТ. 2019. № 4 С. 105–125.
27. Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Шурман В.А. Генерация альтернативных связей последовательно соединенных подсистем в избыточном комплексе оборудования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 53–65.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 27.02.2020

После доработки 22.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. А.А. ПЕРЕГУДИН (peregudin@itmo.ru)
(Национальный исследовательский университет ИТМО;
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

МЕТОД ПРИТЯГИВАЮЩИХ ЦИЛИНДРОВ. РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ¹

Представлен метод притягивающих цилиндров — обобщение метода инвариантных эллипсоидов на случаи задач слежения и наблюдения. На основе разработанного метода предложен алгоритм расчета параметров регулятора, обеспечивающего ограниченность ошибки слежения или наблюдения в присутствии ограниченных внешних возмущений. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примерах.

Ключевые слова: задача слежения, задача наблюдения, подавление возмущений.

DOI: 10.31857/S0005231021020033

1. Введение

Задача подавления ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов ранее рассматривалась в [1–3]. В частности, в [1] решалась задача стабилизации возмущенной системы с измеряемым состоянием с помощью статического регулятора; в [2] аналогичный подход применялся для стабилизации возмущенной системы с измеряемым выходом — к статическому регулятору был добавлен динамический наблюдатель Люенбергера; в [3] аналогичная задача была решена с помощью динамического регулятора общего вида. Однако во всех этих работах решалась только задача стабилизации объекта, но не задача слежения.

Распространению метода инвариантных эллипсоидов на задачу слежения посвящены работы [4, 5], в которых на систему наложен ряд дополнительных условий. Так, в [4] предполагается, что все компоненты задающего воздействия измеряемы и могут быть использованы регулятором, а в [5] дополнительно предполагается, что их производные также измеряемы и ограничены. Отметим, что в обеих работах состояние объекта является измеряемым, а используемый регулятор — статическим. В этом смысле работы [4, 5] обобщают [1], но не более поздние [2, 3], в которых уже используется динамический регулятор при неизмеряемом состоянии объекта.

Целью настоящей работы является обобщение метода инвариантных эллипсоидов на случай задачи слежения при использовании динамического регулятора по выходу. В качестве инструмента используется новый метод, ос-

¹ Результаты разделов 3 и 4 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 5 и 6 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МД-1054.2020.8).

нованный на притягивающих множествах более общего вида, в том числе неограниченных по части переменных.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{S}^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, то $\text{range} A = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, A^+ — псевдообратная Мура–Пенроуза (существует у любой матрицы вне зависимости от полноты ранга).

2. Мотивирующий пример

В качестве мотивирующего примера рассмотрим неустойчивую систему, состоящую из объекта первого порядка и наблюдателя первого порядка, заданную как

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bf(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) = (a - l)\hat{x}(t) + lx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$ — состояние объекта, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}$ — состояние наблюдателя, $f(t) \in \mathbb{R}$ — внешнее возмущение, $|f(t)| \leq 1$, $b > 0$ и $l > a > 0$. В качестве выходной переменной объединенной системы (1) рассмотрим ошибку наблюдения

$$y(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Представленная система неустойчива и не имеет притягивающего эллипсоида по состоянию. Однако в силу того, что выход $y(t)$ имеет устойчивую динамику

$$\dot{y}(t) = (a - l)y(t) + bf(t),$$

у системы существуют притягивающие эллипсоиды по выходу. Минимальный притягивающий эллипсоид по выходу (в данном случае — отрезок минимальной длины) может быть найден аналитически как

$$(2) \quad \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 \leq \frac{b^2}{(a - l)^2} \right\},$$

однако в пространстве состояний ему соответствует *неограниченное* множество

$$(3) \quad \left\{ (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - \hat{x}| \leq \frac{b}{l - a} \right\},$$

не являющееся эллипсоидом. Метод инвариантных эллипсоидов [1] не может быть непосредственно применен для поиска притягивающего множества (2), потому как у системы (1) не существует инвариантного эллипсоида по состоянию. Существует, однако, притягивающее подмножество пространства состояний системы в форме полосы (3). Траектория попадает в эту полосу и затем движется в ней, неограниченно удаляясь от начала координат. Рисунок 1 иллюстрирует описанную ситуацию.

Данный пример показывает, что для решения задачи слежения или наблюдения в общем случае недостаточно метода инвариантных (притягивающих) эллипсоидов, разработанного в [1–3] для решения задач стабилизации. Для обобщения существующего метода на случаи, подобные представленному выше, в настоящей работе развивается *метод притягивающих цилиндров*.

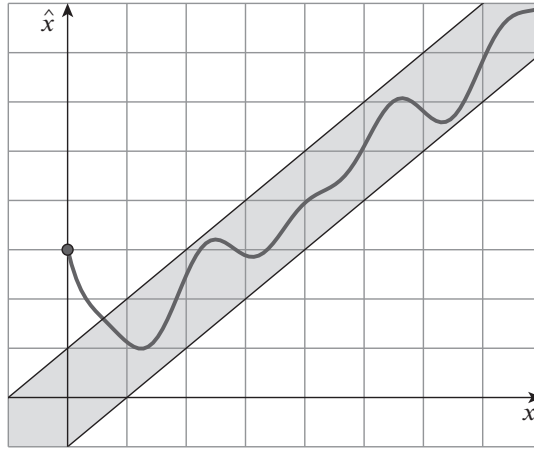


Рис. 1. Пример траектории системы. Серым цветом выделено неограниченное притягивающее подмножество пространства состояний.

3. Геометрические основы метода притягивающих цилиндров

Для описания рассматриваемых в настоящей работе притягивающих подмножеств введем следующее определение.

Определение 1. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, заданное как

$$(4) \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Q x \leq 1\},$$

где $Q \in \mathbb{S}^n$, $Q \succeq 0$ и $\text{rank} Q = k$, называется (k, n) -цилиндром.

Примеры (k, n) -цилиндров приведены на рис. 2–4. Им соответствуют множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 \leq 1\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq 1\}$, каждое из которых можно задать в виде (4), выбрав соответствующую матрицу Q .

Замечание 1. Отметим, что при $k = n$ множество (4) является эллипсоидом и что в [1–3] авторами рассматривались притягивающие подмноже-



Рис. 2.

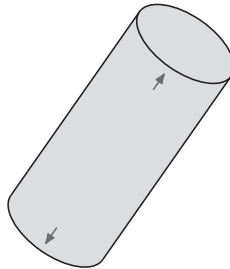


Рис. 3.



Рис. 4.

Рис. 2. Бесконечная полоса – пример (1, 2)-цилиндра.

Рис. 3. Бесконечный цилиндр – пример (2, 3)-цилиндра.

Рис. 4. Слой пространства между двумя плоскостями – пример (1, 3)-цилиндра.

ства именно такого вида. При $k < n$ множество (4) эллипсоидом уже не является, но при этом также может являться притягивающим подмножеством пространства состояний некоторой системы. В этом смысле метод притягивающих цилиндров является обобщением метода инвариантных (притягивающих) эллипсоидов.

Сформулируем геометрическое описание (k, n) -цилиндров.

Утверждение 1. Как множество в линейном пространстве (k, n) -цилиндр (4) является суммой k -мерного эллипсоида, лежащего в подпространстве $\text{range} Q$, и всего подпространства $\ker Q$.

Следствие 1. Как топологическое пространство (k, n) -цилиндр гомеоморфен прямому произведению замкнутого k -мерного шара и $\mathbb{R}^{n-k}$.

Доказательства утверждения 1 и следствия 1 приведены в Приложении.

Известно, что образом эллипсоида при линейном отображении является эллипсоид. Обобщим это утверждение на случай (k, n) -цилиндров.

Утверждение 2. Пусть $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank} C = m$. Образом (k, n) -цилиндра (4) при отображении $y = Cx$ является (r, m) -цилиндр

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid y^T R y \leq 1 \right\}, \quad R = C^+{}^T M (I - (MN)(MN)^+) M C^+,$$

где $r = \text{rank} R$, $M = Q^{1/2}$, $N = I - C^+ C$.

Следствие 2. При $n \geq 2$ проекцией (k, n) -цилиндра на произвольную плоскость является либо вся плоскость, либо полоса (часть плоскости между двумя параллельными прямыми), либо эллипс (часть плоскости, ограниченная эллипсом).

Доказательства утверждения 2 и следствия 2 приведены в Приложении.

Изложенные выше утверждения дают читателю базовые представления о геометрии рассматриваемых в настоящей работе притягивающих подмножеств.

4. Анализ. Метод притягивающих цилиндров

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$(5) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, A , B – вещественные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что внешнее возмущение ограничено и что известна матрица $G \succ 0$ такая, что

$$(6) \quad f^T(t) G f(t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Определение 2. Притягивающим (k, n) -цилиндром системы (5)–(6) называется множество (4) такое, что для всех траекторий системы выполнено

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x^T(t) Q x(t) \leq 1,$$

а также, если $x(t_0) \in (4)$, то $x(t) \in (4)$ при всех $t \geq t_0$.

Согласно определению 2, притягивающие (k, n) -цилиндры являются одновременно притягивающими и инвариантными подмножествами пространства состояний.

Сформулируем достаточное условие существования притягивающего цилиндра в пространстве состояний системы (5)–(6).

Теорема 1. Если матрица $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ такова, что

$$\text{rank} C = k, \quad CA(I - C^+C) = 0,$$

и если существуют $P \succ 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\begin{bmatrix} PCAC^+ + (CAC^+)^T P + \alpha P & PCB \\ (CB)^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0,$$

то подмножество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T C^T P C x \leq 1\}$ пространства состояний системы (5)–(6) является притягивающим (k, n) -цилиндром.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Замечание 2. Отметим, что в частном случае, при $C = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, теорема 1 совпадает с основным результатом работы [1], и тогда притягивающий (k, n) -цилиндр является инвариантным эллипсоидом.

5. Синтез. Общая линейная задача слежения

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) + C_1 w(t), \\ y(t) = D_1 x(t) + E_1 u(t) + F_1 w(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{a_1}$ – неизмеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^{b_1}$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^{c_1}$ – неизмеряемый вектор возмущений, $y(t) \in \mathbb{R}^{b_2}$ – измеряемый выход, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ – известные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть эталонная модель задана как

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_2 x_r(t) + C_2 h(t), \\ g(t) = D_2 x_r(t), \end{cases}$$

где $x_r(t) \in \mathbb{R}^{a_2}$ – неизмеряемый вектор состояния, $h(t) \in \mathbb{R}^{c_2}$ – неизмеряемое задающее воздействие, $g(t) \in \mathbb{R}^{b_2}$ – измеряемый эталонный выход, A_2, C_2, D_2 – известные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Замечание 3. Формально, эталонную модель можно не выделять в отдельную систему, а сделать частью уравнения (7), объединив вектор $x(t)$ с вектором $x_r(t)$, $w(t)$ с $h(t)$ и $y(t)$ с $g(t)$. Однако в настоящей работе предлагается рассмотреть (7) и (8) как две различные модели. Такое разделение не является обязательным, но помогает лучше понять смысл целевой переменной z , раскрываемый далее.

Для достижения цели управления предполагается использование регулятора заданного динамического порядка $a_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вида

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_3 x_c(t) + B_3 y(t) + C_3 g(t), \\ u(t) = D_3 x_c(t) + E_3 y(t) + F_3 g(t), \end{cases}$$

где $x_c(t) \in \mathbb{R}^{a_3}$ – вектор состояния регулятора, $A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$ – вещественные матрицы соответствующих размерностей, подлежащие выбору.

Замечание 4. При $a_3 = 0$ матрицы A_3, B_3, C_3, D_3 пустые, регулятор (9) является статическим и описывается формулой $u(t) = E_3 y(t) + F_3 g(t)$. Поскольку современные компьютерные программы (например, МАТЛАВ) свободно работают с пустыми матрицами различных размерностей, далее не будем рассматривать этот случай отдельно, считая его частью общей теории.

Предполагается, что внешние сигналы $w(t), h(t)$ ограничены и что известна матрица $G \succ 0$ такая, что

$$(10) \quad \begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix}^T G \begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Замечание 5. Консервативность основного результата, который будет изложен в разделе 5.2, может быть несколько снижена путем замены (10) на пару ограничений $w(t)^T G_1 w(t) \leq 1, h(t)^T G_2 h(t) \leq 1$, где $G_1, G_2 \succ 0$, или даже на большее число ограничений, наложенных на отдельные компоненты данных векторов. Однако это приведет к увеличению числа свободных переменных и усложнению формулировок, не обязательному для настоящей статьи.

Цель управления формулируется следующим образом: при $w(t), h(t) \equiv 0$ обеспечить асимптотическую сходимость целевой переменной

$$(11) \quad z(t) = K_1 x(t) + K_2 x_r(t) + K_3 x_c(t)$$

к нулю. Если же $w(t), h(t) \not\equiv 0$, но выполнено условие (10), то переменная (11) должна асимптотически сходиться к ограниченному множеству вида $\{z \in \mathbb{R}^k \mid z^T P z \leq 1\}$ и должна быть найдена соответствующая матрица $P \succ 0$. Предполагается, что матрицы $K_1 \in \mathbb{R}^{k \times a_1}, K_2 \in \mathbb{R}^{k \times a_2}, K_3 \in \mathbb{R}^{k \times a_3}$, задающие цель управления, известны и что $\text{rank} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = k$. Последнее условие наложено для удобства и не является ограничительным, так как его выполнения всегда можно добиться, убрав из матрицы $\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$ линейно зависимые строки.

Сформулированная таким образом задача в рамках настоящей статьи называется *общей линейной задачей слежения*. Отметим несколько частных случаев:

1. Задача стабилизации. Если $K_1 = I, K_2 = K_3 = 0$, то при отсутствии внешних воздействий цель управления принимает вид $\|x(t)\| \rightarrow 0$. В [3] показано, что такая задача может быть решена с помощью метода инвариантных эллипсоидов.

2. Задача слежения. Если $K_1 = I$, $K_2 = -I$, $K_3 = 0$, то при отсутствии внешних воздействий цель управления имеет вид $\|x(t) - x_r(t)\| \rightarrow 0$, что соответствует слежению вектора состояния объекта за вектором состояния эталонной модели.

3. Задача наблюдения. Если $K_1 = I$, $K_2 = 0$, $K_3 = -I$, то регулятор (9) превращается в наблюдатель, вектор состояния которого должен сходиться к вектору состояния объекта. Если внешние воздействия отсутствуют, то такая цель управления может быть сформулирована как $\|x_c(t) - x(t)\| \rightarrow 0$.

Если матрицы K_i выбраны иным образом, то цель управления представляет собой некоторое сочетание задач стабилизации, слежения и наблюдения (возможно, по части переменных). Таким образом, поставленная задача синтеза может быть интерпретирована как одна из этих трех базовых задач, либо как их комбинация.

Отметим, что на матрицы $A_1, B_1, C_1, D_1, F_1, A_2, C_2, D_2$ в (7) и (8) не накладывается никаких ограничений. Однако требуется наложить ограничение на матрицу E_1 , связанное с корректностью рассматриваемой обратной связи. Рассмотрим вспомогательный измеряемый выход $\hat{y}(t) = y(t) - E_1 u(t) = D_1 x(t) + F_1 w(t)$ системы (7), который получается из выражения для $y(t)$, если убрать слагаемое с E_1 . Предположим, что поставленная задача может быть решена с помощью регулятора (9), в котором вместо выхода $y(t)$ используется вспомогательный выход $\hat{y}(t)$. Тогда после подстановки $\hat{y}(t) = y(t) - E_1 u(t)$ получим закон управления в виде

$$u(t) = (I + E_1 E_3)^{-1} (D_3 x_c(t) + E_3 y(t) + F_3 g(t)) = \hat{D}_3 x_c(t) + \hat{E}_3 y(t) + \hat{F}_3 g(t),$$

для реализации которого необходимо, чтобы матрица $(I + E_1 E_3)^{-1}$ существовала. Именно это условие и накладывается дополнительно. С учетом указанного свойства при формулировке основного результата достаточно ограничиться случаем $E_1 = 0$, что и будет сделано, при этом соответствующий регулятор для общего случая всегда может быть восстановлен.

5.2. Основной результат

Введем вспомогательные обозначения для описания замкнутой системы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ D_3 & E_3 & F_3 \end{bmatrix}, \quad s(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix},$$

$$M = A + B X D, \quad N = C + B X F, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad n = a_1 + a_2 + a_3.$$

Тогда уравнение замкнутой системы (7)–(9), (11) может быть записано как

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{s}(t) = M s(t) + N f(t), \\ z(t) = K s(t), \end{cases}$$

при этом ограничение (10) примет вид

$$(13) \quad f^T(t)Gf(t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Перед формулировкой основного результата введем обозначения

$$(14) \quad \begin{aligned} H_1 &= KAK^+ + KB(KB)^+KA(D(K^+K - I))^+DK^+, \\ H_2 &= KC + KB(KB)^+KA(D(K^+K - I))^+F, \\ H_3 &= KB, \quad H_4 = DK^+ + D(D(K^+K - I))^+DK^+, \\ H_5 &= F + D(D(K^+K - I))^+F. \end{aligned}$$

Сформулируем основной результат в виде теоремы.

Теорема 2. Если матрицы A, B, D, K таковы, что

$$(15) \quad KB(KB)^+KA(D(I - K^+K))^+D(I - K^+K) = KA(I - K^+K),$$

и если существуют $P, Q \succ 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ такие, что $PQ = I$ и

$$(16) \quad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} H_1Q + QH_1^T + \alpha Q & H_2 \\ H_2^T & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} H_3H_3^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} PH_1 + H_1^TP + \alpha P & PH_2 \\ H_2^TP & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_2 \begin{bmatrix} H_4^TH_4 & H_4^TH_5 \\ H_5^TH_4 & H_5^TH_5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

то существует набор X параметров регулятора (9) такой, что подмножество $\{s \in \mathbb{R}^n \mid s^TK^TPKs \leq 1\}$ пространства состояний замкнутой системы (12) является притягивающим (k, n) -цилиндром.

При фиксированных α, P соответствующая матрица X находится как

$$(17) \quad X = (KB)^+KA(D(K^+K - I))^+ + Y + (KB)^+KBVYD(D(K^+K - I))^+,$$

где Y – любое решение линейного матричного неравенства

$$(18) \quad \begin{bmatrix} PH_1 + H_1^TP + \alpha P & PH_2 \\ H_2^TP & -\alpha G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PH_3YH_4 + (PH_3YH_4)^T & PH_3YH_5 \\ (PH_3YH_5)^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Из доказательства, в частности, следует, что при выполнении условий теоремы матричное неравенство (18) всегда имеет решение.

Условие (15) является вполне естественным: оно показывает, как должны соотноситься между собой параметры объекта (7) и эталонной модели (8), чтобы решение соответствующей задачи слежения было возможным. Можно показать, что для задач стабилизации и наблюдения, при $K = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $K = \begin{bmatrix} I & 0 & -I \end{bmatrix}$ соответственно, условие (15) всегда выполнено независимо от параметров объекта и эталонной модели. Если же $K = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \end{bmatrix}$, что соответствует задаче слежения, то условие (15) представляется в виде

$$B_1B_1^+(A_1 - A_2)(D_1^TD_1 + D_2^TD_2)^+(D_1^TD_1 + D_2^TD_2) = (A_1 - A_2).$$

Следует отметить, что выполнение этого условия еще не означает возможность построения соответствующего регулятора, ведь помимо него должно быть также выполнено второе условие теоремы 2, связанное с неравенствами (16).

5.3. Вычислительные аспекты

Поскольку на матрицы P и Q , входящие в формулировку теоремы 2, наложено дополнительное ограничение $PQ = I$, матричные неравенства (16) не являются линейными даже при фиксированном α и не могут быть непосредственно решены с помощью стандартных программных средств, таких как YALMIP или CVX. Однако существует эффективный алгоритм решения матричных неравенств именно с таким типом нелинейности, который в литературе можно встретить под названием “Cone complementarity algorithm” (алгоритм восполнения конуса) [6–9].

Алгоритм 1.

1. Задать $i = 0$. Зафиксировать параметр $\alpha > 0$ и найти положительно определенное решение $(\hat{P}, \hat{Q})$ системы линейных матричных неравенств (16).
2. Положить $(R_i, S_i) = (\hat{P}, \hat{Q})$.
3. Найти положительно определенное решение $(\hat{P}, \hat{Q})$ задачи минимизации:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать} \quad \text{trace}(PS_i + QR_i) \\ & \text{при условиях} \quad \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (16). \end{aligned}$$

4. Если выполнено условие остановки (например, величина $\text{trace}(\hat{P}S_i + \hat{Q}R_i)$ достаточно близка к $2k$ или величина i достигла предельного значения), перейти к шагу 5. Иначе увеличить i на единицу и перейти к шагу 2.

5. Принять полученную пару $(\hat{P}, \hat{Q})$ в качестве пары (P, Q) , приближенно удовлетворяющей условиям теоремы 2. Закончить.

В [6] показано, что алгоритм 1 сходится к паре (P, Q) , удовлетворяющей условиям (16) и доставляющей локальный минимум величине $\text{trace}(PQ + QP)$. Несмотря на то, что в общем случае выполнение условия $PQ = I$ не гарантировано, алгоритм широко применяется [6–9] для решения задач теории управления, в которых возникают подобные матричные неравенства.

Применение теоремы 2 на практике во всей полноте предполагает выполнение следующей последовательности действий:

1. Проверить, что для поставленной задачи выполнено условие (15).
2. Применив алгоритм 1, найти взаимобратные P и Q , удовлетворяющие (16).
3. Используя найденную матрицу Q , найти матрицу Y , удовлетворяющую (18).
4. Вычислить матрицу X параметров регулятора по формуле (17).

Однако следует отметить, что нахождение пары взаимобратных матриц (P, Q) не является обязательным для синтеза регулятора. Если в процессе выполнения алгоритма 1 найдена матрица P такая, что неравенство (18) имеет решение Y , то нет необходимости далее выполнять алгоритм — можно сразу перейти к вычислению параметров регулятора по формуле (17).

6. Примеры

6.1. Задача слежения

Рассмотрим объект управления (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,99 & 3,10 \\ -2,10 & 2,01 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,15 \end{bmatrix}, \\ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

и эталонную модель (8) с матрицами

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,1 \\ -0,1 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что объект управления является устойчивым, а эталонная модель, напротив, неустойчива. Условие (10) предполагается выполненным при $G = 1$.

Пусть динамический порядок a_3 регулятора (9) положен равным 1, а целевая переменная (11) задана как

$$z(t) = x(t) - x_r(t),$$

что соответствует задаче слежения и выбору матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае условие (15) выполнено. Тогда в результате выполнения алгоритма 1 при $\alpha = 0,5$ может быть найдена матрица

$$P = \begin{bmatrix} 1485 & -1585 \\ -1585 & 1698 \end{bmatrix} \succ 0$$

и затем по формулам (18), (17) восстановлены параметры

$$X = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ D_3 & E_3 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,95 & 4,95 \end{bmatrix}$$

регулятора (9), который, несмотря на заданный динамический порядок $a_3 = 1$, оказывается статическим.

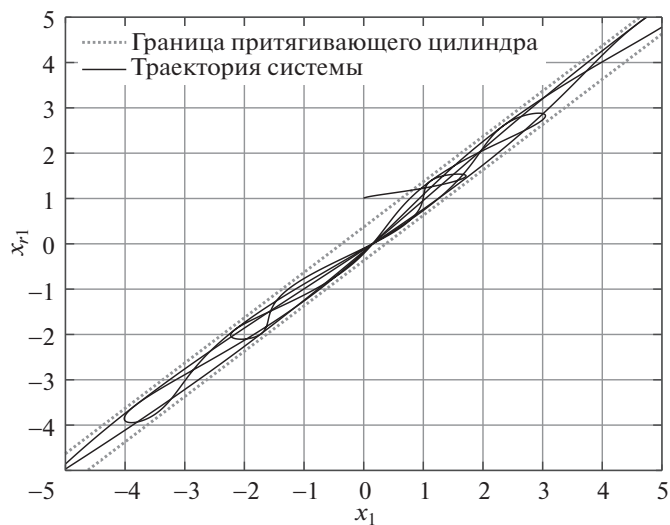


Рис. 5. Проекция притягивающего (k, n) -цилиндра и траектории замкнутой системы.

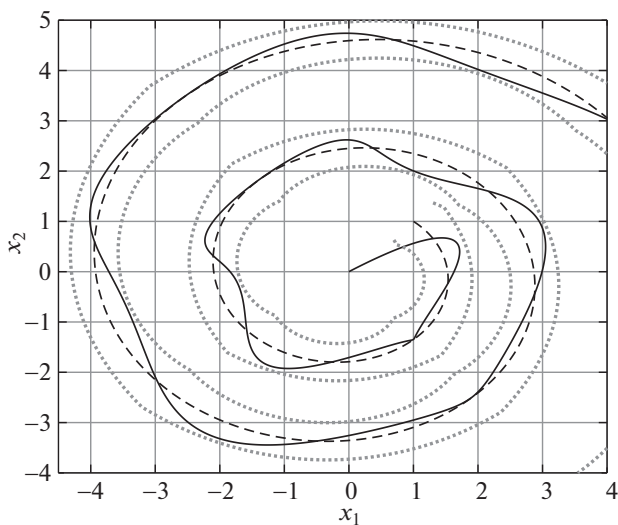


Рис. 6. Траектория объекта (—), траектория эталонной модели (--) и границы допустимого коридора (...).

При моделировании внешнее возмущение было задано как $w(t) = \sin(0,4t)$, а начальные условия положены равными $x(0) = [0 \ 0]^T$ и $x_r(0) = [1 \ 1]^T$.

Результаты моделирования представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показана проекция траектории замкнутой системы: по оси абсцисс отложено значение первой координаты вектора состояния объекта, а по оси ординат — значение первой координаты вектора состояния эталонной модели. Также показаны границы полосы, являющейся проекцией притягивающего (k, n) -цилиндра на эту плоскость.

На рис. 6 показаны траектория $x(t)$ объекта и траектория $x_r(t)$ эталонной модели. На рисунке также отмечены границы “допустимого коридора”, имеющего следующий смысл: если в данный момент времени каждая из проекций траектории замкнутой системы – на плоскость (x_1, x_{r1}) (см. рис. 5) и на плоскость (x_2, x_{r2}) (не приводится, так как выглядит аналогично) – находится внутри соответствующей проекции притягивающего (k, n) -цилиндра, то траектория $x(t)$ в данный момент времени находится в границах допустимого коридора. Иными словами, тот факт, что траектория объекта, начиная с какого-то момента, не выходит за границы точечного пунктира, является иллюстрацией того, что траектория замкнутой системы попадает внутрь (k, n) -цилиндра и не покидает его.

6.2. Задача наблюдения

Рассмотрим объект (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,168 & -0,132 & -0,052 \\ 0,148 & -0,152 & 0,028 \\ 0,204 & -0,196 & -0,006 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = [-0,2 \quad 0,8 \quad -0,2], \quad E_1 = [0], \quad F_1 = [0,02].$$

Отметим, что объект является неустойчивым. В этом примере эталонная модель не рассматривается, т.е. все матрицы в (8) пустые. Условие (10) предполагается выполненным при $G = 1$.

Пусть динамический порядок a_3 регулятора (9) положен равным 3, а целевая переменная (11) задана как

$$z(t) = x(t) - x_c(t),$$

что соответствует задаче наблюдения и выбору матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае условие (15) выполнено. Тогда в результате выполнения алгоритма 1 при $\alpha = 0,3$ может быть найдена матрица

$$P = \begin{bmatrix} 192 & -624 & 222 \\ -624 & 2051 & -732 \\ 222 & -732 & 289 \end{bmatrix} \succ 0$$

и затем по формулам (18), (17) восстановлены параметры

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3,970 & -15,341 & 3,750 \\ 1,506 & -5,585 & 1,386 \\ 0,559 & -1,618 & 0,349 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 19,011 \\ 6,792 \\ 1,777 \end{bmatrix}$$

регулятора (9), который в этой задаче выполняет роль наблюдателя.

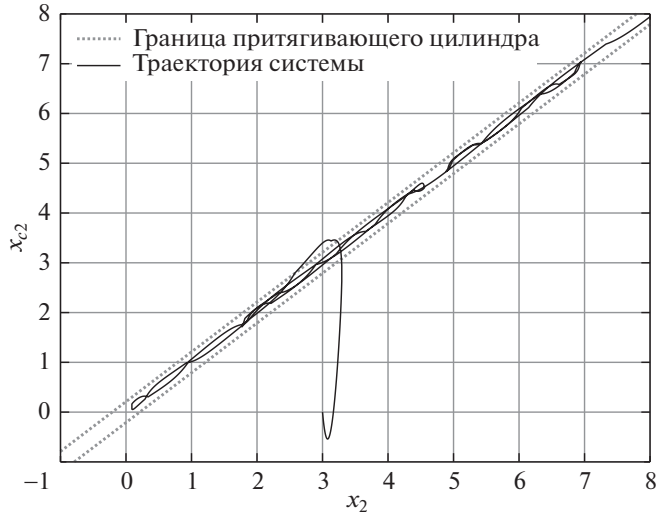


Рис. 7. Проекция притягивающего (k, n) -цилиндра и траектории замкнутой системы.

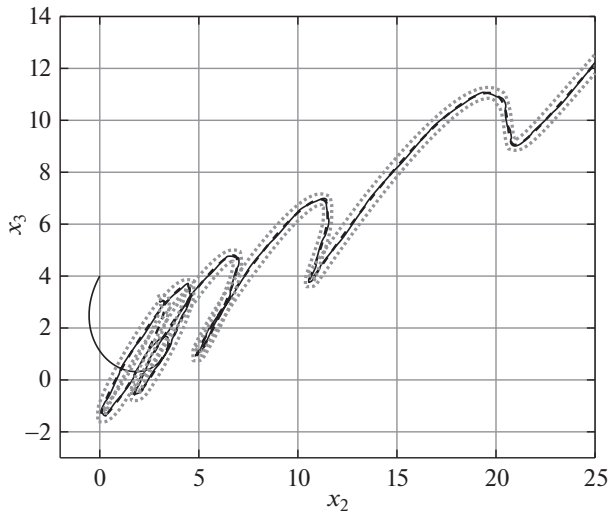


Рис. 8. Траектория объекта (—), траектория эталонной модели (--) и границы допустимого коридора (...).

Можно заметить, что для полученных матриц выполнено $A_3 = A_1 - B_3 D_1$, а значит, структура системы (9) совпадает со структурой наблюдателя Люенбергера

$$\dot{x}_c(t) = A_1 x_c(t) + B_3 (y(t) - D_1 x_c(t)).$$

Примечательно, что такая структура не была создана искусственно, а получилась сама собой в результате выполнения алгоритма 1.

При моделировании внешняя помеха была задана как $w(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(\sin(0,1t))$, а начальные условия положены равными $x(0) = [3, 2 \ 3 \ 3]^T$ и $x_c(0) = [-10 \ 0 \ 4]^T$.

Результаты моделирования представлены на рис. 7 и 8. На рис. 7 показана проекция траектории замкнутой системы: по оси абсцисс отложено значение второй координаты вектора состояния объекта, а по оси ординат — значение второй координаты вектора состояния регулятора (наблюдателя). Также показаны границы полосы, являющейся проекцией притягивающего (k, n) -цилиндра на эту плоскость.

На рис. 8 показаны траектория $x(t)$ объекта и траектория $x_c(t)$ регулятора (наблюдателя). На рисунке также отмечены границы “допустимого коридора”, имеющего следующий смысл: если в данный момент времени каждая из проекций траектории замкнутой системы — на плоскость (x_2, x_{c2}) (см. рис. 7) и на плоскость (x_3, x_{c3}) (не приводится, так как выглядит аналогично) — находится внутри соответствующей проекции притягивающего (k, n) -цилиндра, то траектория $x(t)$ в данный момент времени находится в границах допустимого коридора. Иными словами, тот факт, что траектория наблюдателя начиная с какого-то момента не выходит за границы точечного пункта, является иллюстрацией того, что траектория замкнутой системы попадает внутрь (k, n) -цилиндра и не покидает его.

7. Заключение

В работе предложено обобщение метода инвариантных эллипсоидов, позволяющее находить притягивающие подмножества пространства состояний более общего вида. Показано, что предложенный метод может быть использован для решения задач стабилизации, слежения и наблюдения, а также их комбинаций. Предложен алгоритм, позволяющий применять основной результат на практике с помощью стандартных программных средств. На численных примерах продемонстрирована эффективность предложенного подхода.

Автор выражает благодарность Игорю Борисовичу Фуртату и анонимному рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить форму и содержание статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Матрица Q симметричная, поэтому пространство $\mathbb{R}^n$ можно представить как прямую сумму ее образа и ядра:

$$\mathbb{R}^n = \text{range}Q \oplus \ker Q.$$

Иными словами, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственное разложение

$$x = x_r + x_k, \quad x_r \in \text{range}Q, \quad x_k \in \ker Q.$$

Тогда (k, n) -цилиндр (4) можно представить как

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Q x \leq 1 \right\} &= \left\{ (x_r + x_k) \in \mathbb{R}^n \mid (x_r + x_k)^T Q (x_r + x_k) \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ (x_r + x_k) \in \mathbb{R}^n \mid x_r^T Q x_r \leq 1 \right\} = \left\{ x_r \in \text{range}Q \mid x_r^T Q x_r \leq 1 \right\} + \ker Q. \end{aligned}$$

Сужение оператора Q на подпространство $\text{range}Q$ имеет полный ранг. Следовательно, множество $\{x_r \in \text{range}Q \mid x_r^T Q x_r \leq 1\}$ является k -мерным эллипсоидом.

Доказательство следствия 1. Символом $\cong$ обозначим гомеоморфность. Из того что $\text{range}Q \cong \mathbb{R}^k$, $\ker Q \cong \mathbb{R}^{n-k}$, а множества $\{x_r \in \text{range}Q \mid x_r^T Q x_r \leq 1\}$ и $\ker Q$ ортогональны друг другу, следует, что

$$\{x_r \in \text{range}Q \mid x_r^T Q x_r \leq 1\} + \ker Q \cong \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^T x \leq 1\} \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Лемма 1 [10]. Если матрицы A, U, C, V таковы, что обе части равенства

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

имеют смысл (все операции определены), то указанное равенство выполнено.

Лемма 2 [11]. Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ верно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (A^T A + \varepsilon I)^{-1} A^T = A^+.$$

Указанное равенство выполнено даже в тех случаях, когда $(A^T A)^{-1}$ не существует.

Доказательство утверждения 2. Воспользуемся полнотой строчного ранга матрицы C и рассмотрим семейство матриц R_ε с параметром ε , определенных как

$$R_\varepsilon = \left(C(Q + \varepsilon I)^{-1} C^T \right)^{-1}, \quad \varepsilon > 0.$$

Известно (см. [1]), что если $Q \succ 0$, то $R = (CQ^{-1}C^T)^{-1}$. При $Q \succeq 0$ в силу непрерывности отображения $x \mapsto Cx$ имеем $R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R_\varepsilon$. Согласно лемме 1

$$(Q + \varepsilon I)^{-1} = (\varepsilon I + MM)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} I - \frac{1}{\varepsilon} M \left(I + \frac{1}{\varepsilon} MM \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} M.$$

Тогда

$$R_\varepsilon = \left(C(Q + \varepsilon I)^{-1} C^T \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon} CC^T - \frac{1}{\varepsilon} CM \left(I + \frac{1}{\varepsilon} MM \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} MC^T \right)^{-1}.$$

Заметим, что матрица CC^T обратима. Вновь применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= \varepsilon(CC^T)^{-1} + \\ &+ (CC^T)^{-1} CM \left(I + \frac{1}{\varepsilon} M(I - C^T(CC^T)^{-1}C)M \right)^{-1} MC^T(CC^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся известными равенствами

$$C^T(CC^T)^{-1} = C^+, \quad I - C^T(CC^T)^{-1}C = N = N^2$$

и перепишем R_ε в виде

$$R_\varepsilon = \varepsilon(CC^T)^{-1} + C^{+T}M \left(I + \frac{1}{\varepsilon}MNNM \right)^{-1} MC^+.$$

Применяя лемму 1, получаем

$$R_\varepsilon = \varepsilon(CC^T)^{-1} + C^{+T}M \left(I - MN(\varepsilon I + NMMN)^{-1}NM \right) MC^+.$$

Тогда согласно лемме 2, учитывая, что $M = M^T$, $N = N^T$, имеем

$$R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R_\varepsilon = C^{+T}M \left(I - MN(MN)^+ \right) MC^+.$$

Наконец заметим, что $I - MN(MN)^+ \succeq 0$ и, следовательно, $R \succeq 0$.

Доказательство следствия 2. Если C – проекция на $\mathbb{R}^2$, то $m = 2$, $r \leq 2$. Значит, образом (k, n) -цилиндра может быть только $(0, 2)$, $(1, 2)$ или $(2, 2)$ -цилиндр.

Лемма 3 [12]. Если $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times l}$, то матричное уравнение

$$AXB = C$$

разрешимо относительно $X \in \mathbb{R}^{m \times k}$ тогда и только тогда, когда

$$AA^+CB^+B = C,$$

и в этом случае все решения можно параметризовать как

$$X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+,$$

где $Y \in \mathbb{R}^{m \times k}$ – произвольная матрица.

Лемма 4 [13]. Если $A \in \mathbb{S}^n$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $A^2 = A$, то $A(BA)^+ = (BA)^+$.

Лемма 5 [14]. Если $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $C \in \mathbb{S}^n$, то матричное неравенство

$$AXB + (AXB)^T + C \prec 0$$

разрешимо относительно $X \in \mathbb{R}^{m \times k}$ в том и только в том случае, если существуют $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$C \prec \mu_1 AA^T, \quad C \prec \mu_2 B^T B.$$

Доказательство теоремы 1. Введем переменную $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^k$, составим уравнение ее динамики

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBf(t)$$

и найдем условие, при котором оно может быть записано независимо от $x(t)$, т.е. условие существования матрицы X такой, что

$$\dot{y}(t) = XCx(t) + CBf(t) = Xy(t) + CBf(t).$$

Для этого рассмотрим уравнение $CA = XC$. В соответствии с леммой 3 оно разрешимо относительно X в том и только в том случае, если выполнено условие $CA(I - C^+C) = 0$, и тогда все решения могут быть параметризованы как $X = CAC^+ + Y(I - CC^+)$, где Y – произвольная матрица соответствующей размерности. Если дополнительно выполнено условие $\text{rank} C = k$, то уравнение имеет единственное решение $X = CAC^+$.

Так как все соответствующие условия включены в формулировку теоремы, динамика переменной $y(t)$ может быть записана независимо от $x(t)$ в виде

$$(П.1) \quad \dot{y}(t) = CAC^+y(t) + CBf(t).$$

Обозначим: $V = y^T Py$. Заметим, что из матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} PCAC^+ + (CAC^+)^T P + \alpha P & PCB \\ (CB)^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0$$

следует, что

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ f(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PCAC^+ + (CAC^+)^T P + \alpha P & PCB \\ (CB)^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

и тогда

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq \alpha f^T(t) G f(t), \quad \forall t \geq 0.$$

При выполнении условия (6) из этого следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} V(t) \leq 1$$

и если $V(t_0) \leq 1$, то $V(t) \leq 1$ при всех $t \geq t_0$. При этом $V = x^T C^T P C x$, $C^T P C \succeq 0$ и $\text{rank} C^T P C = k$, а значит, подмножество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Q x \leq 1 \right\}, \quad Q = C^T P C$$

пространства состояний системы (5)–(6) является притягивающим (k, n) -цилиндром.

Доказательство теоремы 2. В соответствии с теоремой 1 подмножество $\{s \in \mathbb{R}^n \mid s^T K^T P K s \leq 1\}$ системы (12) является притягивающим (k, n) -цилиндром, если выполнены условия

$$(П.2) \quad KM(I - K^+K) = 0,$$

$$(П.3) \quad \begin{bmatrix} PKMK^+ + (KMK^+)^T P + \alpha P & PKN \\ (KN)^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0.$$

Для существования регулятора (9) такого, чтобы для замкнутой системы (12) выполнялось условие (П.2), необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$K(A + BXD)(I - K^+K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad KBXD(I - K^+K) = -KA(I - K^+K)$$

было разрешимо относительно X . В соответствии с леммой 3 это так в том и только в том случае, если выполнено

$$(П.4) \quad \begin{aligned} KB(KB)^+KA(I - K^+K)(D(I - K^+K))^+D(I - K^+K) = \\ = KA(I - K^+K), \end{aligned}$$

причем все соответствующие матрицы X могут быть параметризованы как

$$(П.5) \quad \begin{aligned} X = (KB)^+KA(K^+K - I)(D(I - K^+K))^+ + \\ + Y - (KB)^+KBYD(I - K^+K)(D(I - K^+K))^+, \end{aligned}$$

где Y – произвольная матрица соответствующей размерности. Согласно лемме 4 (П.4) и (П.5) равносильны (15) и (17) соответственно.

С учетом выражений $M = A + BXD$, $N = C + BXF$ условие (П.3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} PKAK^+ + (KAK^+)^T P + \alpha P & PKC \\ (KC)^T P & -\alpha G \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} PKB \\ 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} DK^+ & F \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} PKB \\ 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} DK^+ & F \end{bmatrix} \right)^T \prec 0 \end{aligned}$$

и после подстановки (17) и применения обозначений (14) представлено как

$$(П.6) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} PH_1 + H_1^T P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^T P & -\alpha G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PH_3 \\ 0 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} H_4 & H_5 \end{bmatrix} + \\ & + \left(\begin{bmatrix} PH_3 \\ 0 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} H_4 & H_5 \end{bmatrix} \right)^T \prec 0. \end{aligned}$$

Согласно лемме 5 соответствующая матрица Y – а значит, и набор X параметров регулятора (9) – существует в том и только в том случае, если найдутся $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, при которых выполнены матричные неравенства

$$(П.7) \quad \begin{bmatrix} PH_1 + H_1^T P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} PH_3 H_3^T P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(II.8) \quad \begin{bmatrix} PH_1 + H_1^T P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^T P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_2 \begin{bmatrix} H_4^T H_4 & H_4^T H_5 \\ H_5^T H_4 & H_5^T H_5 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если матрица Q такова, что $PQ = I$, то (II.7) равносильно

$$(II.9) \quad \begin{bmatrix} H_1 Q + Q H_1^T + \alpha Q & H_2 \\ H_2^T & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} H_3 H_3^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

чтобы увидеть это, достаточно умножить (II.7) слева и справа на $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что (II.8), (II.9) совпадают с (16), (II.6) равносильно (18) и что при фиксированных α, P матричное неравенство (18) является линейным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
2. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
3. Хлебников М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. № 4. С. 27–42.
Khlebnikov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.
4. Железнов К.О., Хлебников М.В. Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения // Тр. МФТИ. 2013. Т. 5. № 4. С. 115–121.
5. Железнов К.О., Квинто Я.И., Хлебников М.В. Решение задачи слежения для линейной системы управления на основе метода инвариантных эллипсоидов // УБС. 2018. № 71. С. 45–60.
6. El Ghaoui L., Oustry F., AitRami M. A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 1. P. 1171–1176.
7. Briat C. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems: Analysis, Observation, Filtering and Control. Springer, 2015.
8. Arzelier D., Henrion D., Peaucelle D. Robust State-Feedback $\mathcal{D}$ -stabilization via a Cone Complementarity Algorithm // 6th European Control Conference. Portugal. 2001.
9. Song X., Zhou S., Zhang B. A Cone Complementarity Linearization Approach to Robust $\mathcal{H}_\infty$ -controller Design for Continuous-Time Piecewise Linear Systems with Linear Fractional Uncertainties // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2008. V. 2. No. 4. P. 1264–1274.

10. *Henderson H. V., Searle S. R.* On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices // SIAM Rev. 1981. V. 23. No. 1. P. 53–60.
11. *Gene G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, 1996.
12. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.M.* A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design / Nonlinear Analysis. London: Taylor & Francis, Ltd, 1998.
13. *Maciejewski A.A., Klein C.A.* Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments // Int. J. Robot. Res. 1985. V. 4. No. 3. P. 109–117.
14. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 02.04.2020

После доработки 15.07.2020

Принята к публикации 10.09.2020

© 2021 г. А.А. ЩЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)
(Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

К ВОПРОСУ О СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается интервальное семейство дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) в предположениях, гарантирующих совпадение структуры общего решения каждой из систем данного семейства со структурой общего решения номинальной системы. Анализ базируется на преобразовании интервального семейства ДАУ к виду, в котором разделены дифференциальная и алгебраическая части. Данное преобразование включает в себя обращение интервальной матрицы. В предположении сверхустойчивости дифференциальной подсистемы номинальных ДАУ найдена оценка радиуса устойчивости. Получены достаточные условия робастной устойчивости на основе условия сверхустойчивости дифференциальной части интервального семейства.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, интервальные коэффициенты, произвольно высокий индекс неразрешенности, робастная устойчивость, сверхустойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021020045

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad A_0 x'(t) + B_0 x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty),$$

где A_0 и B_0 — заданные вещественные $(n \times n)$ -матрицы, $x(t)$ — искомая n -мерная функция. Предполагается, что $\det A_0 = 0$. Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

Статья посвящена исследованию асимптотической устойчивости ДАУ с интервальными коэффициентами.

Анализ робастной устойчивости в случае систем ДАУ существенно сложнее, чем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (см., например, [1, с. 186–225]). Это связано с тем, что даже в простейшем случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов ДАУ может привести к нарушению внутренней структуры системы и к изменению вида общего решения.

Публикаций по робастной устойчивости ДАУ относительно немного. Первыми опубликованными исследованиями по данной тематике считаются [2, 3]. Большинство авторов рассматривают только системы с возмущенным матричным коэффициентом при $x(t)$ [3–7]. Лишь в нескольких публикациях допускаются возмущения матрицы при производной искомой вектор-функции [2, 8–10]. Отдельные исследования посвящены робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости нестационарных ДАУ индекса 1 [4, 5, 11]. Вычислительный аспект нахождения радиуса устойчивости ДАУ изучался в [12]. Некоторое представление о современном состоянии исследований в области робастной устойчивости ДАУ дает обзор [13, с. 63–95].

Тем не менее по-прежнему актуальным остается получение результатов по робастной устойчивости систем произвольно высокого индекса неразрешенности с возмущениями, присутствующими во всех матричных коэффициентах, в частности интервальными. Именно такого рода системам и посвящена данная статья.

Рассматривается интервальное семейство

$$(1.2) \quad (A_0 + \gamma \Delta_A) x'(t) + (B_0 + \gamma \Delta_B) x(t) = 0, \quad t \in T,$$

где $\Delta_A = (\alpha_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta_B = (\beta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ — матрицы неопределенностей. При этом

$$(1.3) \quad \underline{G} \leq \Delta_A \leq \overline{G}, \quad \underline{H} \leq \Delta_B \leq \overline{H}$$

(здесь и далее матричные неравенства следует понимать в поэлементном смысле); $\underline{G}$, $\overline{G}$, $\underline{H}$, $\overline{H}$ задают масштабы изменения матриц A_0 и B_0 , величина $\gamma > 0$ определяет размах неопределенностей.

Для анализа используется структурная форма ДАУ с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. В предположении сверхустойчивости дифференциальной подсистемы получена оценка величины γ , при выполнении которой каждая из систем интервального семейства (1.2) будет асимптотически устойчива. Кроме того, обоснованы достаточные условия робастной устойчивости ДАУ (1.1), вытекающие из условия сверхустойчивости дифференциальной подсистемы интервального семейства. При этом, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения ДАУ (1.2) были такими же, как у невозмущенной системы (1.1), на интервальные возмущения налагаются ограничения в виде конечных соотношений.

2. Структурная форма для системы дифференциально-алгебраических уравнений

Для ДАУ (1.1) определим $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_r &= \text{col}(B_0, O, \dots, O), \\ \mathcal{A}_r &= \text{col}(A_0, B_0, O, \dots, O), \end{aligned}$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$(2.2) \quad \Lambda_r = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A_0 & O & \dots & O & O \\ B_0 & A_0 & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A_0 & O \\ O & O & \dots & B_0 & A_0 \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$\mathcal{D}_r = (\mathcal{B}_r \mid \mathcal{A}_r \parallel \Lambda_r).$$

Предположим, что для некоторого r ($0 \leq r \leq n$) в $\mathcal{D}_r$ найдется неособенный минор $n(r+1)$ -го порядка, включающий в себя $\lambda = \text{rank } \Lambda_r$ столбцов матрицы Λ_r и все столбцы матрицы $\mathcal{A}_r$. Такой минор будем называть *разрешающим*. Обозначим через M_r матрицу, определителем которой является разрешающий минор.

Разобьем матричные коэффициенты системы (1.1) на блоки:

$$(2.3) \quad (A_1 \ A_2) = A_0 Q, \quad (B_1 \ B_2) = B_0 Q,$$

где Q — матрица перестановок столбцов такая, что все столбцы матрицы

$$(2.4) \quad \mathcal{B}_{2,r} = \text{col}(B_2, O, \dots, O)$$

являются составляющей частью разрешающего минора, а столбцы матрицы

$$\text{col}(B_1, O, \dots, O)$$

не входят в этот минор. Блоки B_2 и A_2 имеют размеры $n \times d$, $d = nr - \lambda$. О построении матрицы Q см. [14].

Определение 1. Наименьшее значение r , при котором в матрице $\mathcal{D}_r$ найдется разрешающий минор, называется индексом неразрешенности ДАУ (1.1).

Лемма 1 [15]. Наличие разрешающего минора в матрице $\mathcal{D}_r$ необходимо и достаточно для существования оператора

$$(2.5) \quad \mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \dots + R_r \left(\frac{d}{dt} \right)^r$$

(R_j — $(n \times n)$ -матрицы ($j = \overline{0, r}$)), обладающего свойством: для любой n -мерной функции $\varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \left[A \frac{d}{dt} \varphi(t) + B \varphi(t) \right] = \\ & = (R_0 \ R_1 \ \dots \ R_r) \mathcal{D}_r \text{col} \left(\varphi(t), \frac{d}{dt} \varphi(t), \dots, \left(\frac{d}{dt} \right)^{(r+1)} \varphi(t) \right) = \\ & = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1} \frac{d}{dt} \varphi(t) + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} Q^{-1} \varphi(t), \end{aligned}$$

где Q — матрица перестановок из (2.3), J_1 и J_2 — некоторые матрицы соответствующих размеров.

При этом

$$(2.6) \quad (R_0 \ R_1 \ \dots \ R_r) = (E_n \ O \ \dots \ O) M_r^{-1}.$$

Таким образом, действие оператора (2.5) на систему (1.1) преобразует ее к виду

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где $\text{col}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$.

Лемма 2 [14]. Пусть в матрице D_r имеется разрешающий минор и справедливо равенство

$$(2.8) \quad \text{rank } \Lambda_{r+1} = \text{rank } \Lambda_r + n.$$

Тогда оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором

$$\mathcal{L} = L_0 + L_1 \frac{d}{dt}.$$

3. Достаточные условия сохранения внутренней структуры

В предположениях леммы 2 существует оператор $\mathcal{R}$ вида (2.5), который преобразует систему (1.1) к структурной форме (2.7) и при этом имеет левый обратный оператор $\mathcal{L}$. Непосредственно из существования операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ вытекает эквивалентность в смысле решений систем (1.1) и (2.7). Таким образом, системы (1.1) и (2.7) обладают одними и теми же свойствами устойчивости.

Для того чтобы иметь возможность проводить анализ устойчивости интервальных ДАУ (1.2), (1.3), опираясь на информацию о структуре и свойствах системы (1.1) (или, что то же, (2.7)), введем следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что возмущения $\gamma\Delta_A$ и $\gamma\Delta_B$, подчиняющиеся ограничениям (1.3), сохраняют внутреннюю структуру ДАУ (1.1), если существует оператор

$$(3.1) \quad \tilde{\mathcal{R}} = \sum_{j=0}^r \tilde{R}_j \left(\frac{d}{dt} \right)^j$$

с интервальными коэффициентами такой, что его действие на систему (1.2) преобразует ее к виду

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 & E_d \\ U_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где $\text{col}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$, U_1 и U_2 — некоторые интервальные матрицы соответствующих размеров.

Найдем условия, при которых для системы (1.2) при каждом выборе возмущений определен оператор $\tilde{\mathcal{R}}$.

Аналогично тому, как это было сделано в (2.3), разобьем на блоки все матрицы, фигурирующие в неравенствах (1.3):

$$(3.3) \quad \Delta_A Q = (\Delta_{A_1} \ \Delta_{A_2}), \quad \Delta_B Q = (\Delta_{B_1} \ \Delta_{B_2}),$$

$$\underline{G}Q = (\underline{G}^{[1]} \ \underline{G}^{[2]}), \quad \overline{G}Q = (\overline{G}^{[1]} \ \overline{G}^{[2]}),$$

$$(3.4) \quad \underline{H}Q = (\underline{H}^{[1]} \ \underline{H}^{[2]}), \quad \overline{H}Q = (\overline{H}^{[1]} \ \overline{H}^{[2]}).$$

Здесь Q — матрица перестановок из (2.3); блоки Δ_{A_2} , Δ_{B_2} , $\underline{G}^{[2]}$, $\overline{G}^{[2]}$, $\underline{H}^{[2]}$ и $\overline{H}^{[2]}$ имеют размеры $n \times d$, также как и блоки A_2 и B_2 в (2.3).

Обозначим

$$(3.5) \quad \Delta_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \Delta_A & O & \dots & O & O \\ \Delta_B & \Delta_A & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \Delta_B & \Delta_A \end{pmatrix},$$

$$(3.6) \quad \underline{\Delta}_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \underline{G} & O & \dots & O & O \\ \underline{H} & \underline{G} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \underline{H} & \underline{G} \end{pmatrix}, \quad \overline{\Delta}_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \overline{G} & O & \dots & O & O \\ \overline{H} & \overline{G} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \overline{H} & \overline{G} \end{pmatrix},$$

где Δ_{Λ_r} задает возмущение матрицы Λ_r (2.2). По построению

$$\underline{\Delta}_{\Lambda_r} \leq \Delta_{\Lambda_r} \leq \overline{\Delta}_{\Lambda_r}.$$

Пусть Q_Λ — матрица перестановок столбцов, такая что

$$\Lambda_r \tilde{Q} Q_\Lambda = (\Lambda_r^{[1]} \ \Lambda_r^{[2]}),$$

где

$\tilde{Q} = \text{diag} \{Q, \dots, Q\}$ имеет на главной диагонали r блоков, равных Q ;

$\Lambda_r^{[1]}$ — матрица размеров $n(r+1) \times \lambda$, состоящая из столбцов матрицы Λ_r , которые входят в разрешающий минор;

$\Lambda_r^{[2]}$ — матрица размеров $n(r+1) \times (nr - \lambda)$, состоящая из столбцов, которые не входят в упомянутый минор.

Введенные обозначения позволяют записать явное представление матрицы M_r :

$$M_r = \left(\mathcal{B}_{2,r} \mid \mathcal{A}_r \parallel \Lambda_r^{[1]} \right).$$

Аналогичным образом разобьем на блоки матрицы (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned}\Delta_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda &= \left(\Delta_{\Lambda}^{[1]}, \Delta_{\Lambda}^{[2]} \right), \\ \underline{\Delta}_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda &= \left(\underline{\Delta}_{\Lambda}^{[1]}, \underline{\Delta}_{\Lambda}^{[2]} \right), \quad \overline{\Delta}_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda = \left(\overline{\Delta}_{\Lambda}^{[1]}, \overline{\Delta}_{\Lambda}^{[2]} \right).\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$(3.7) \quad \Delta_{M_r} = \left(\begin{array}{c|cc} \Delta_{B_2} & \Delta_{A_1} & \Delta_{A_2} \\ O & \Delta_{B_1} & \Delta_{B_2} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \Delta_{\Lambda}^{[1]} \right. \right),$$

определяющую возмущение матрицы M_r ,

$$(3.8) \quad \underline{\Delta}_{M_r} \leq \Delta_{M_r} \leq \overline{\Delta}_{M_r},$$

где

$$(3.9) \quad \begin{aligned}\underline{\Delta}_{M_r} &= \left(\begin{array}{c|cc} \underline{H}^{[2]} & \underline{G}^{[1]} & \underline{G}^{[2]} \\ O & \underline{H}^{[1]} & \underline{H}^{[2]} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \underline{\Delta}_{\Lambda_r}^{[1]} \right. \right), \\ \overline{\Delta}_{M_r} &= \left(\begin{array}{c|cc} \overline{H}^{[2]} & \overline{G}^{[1]} & \overline{G}^{[2]} \\ O & \overline{H}^{[1]} & \overline{H}^{[2]} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \overline{\Delta}_{\Lambda_r}^{[1]} \right. \right).\end{aligned}$$

Рассмотрим интервальное семейство матриц $M_r + \gamma \Delta_{M_r}$, в котором каждая из “точечных” матриц, подчиняется неравенствам

$$(3.10) \quad M_r + \gamma \underline{\Delta}_{M_r} \leq M_r + \gamma \Delta_{M_r} \leq M_r + \gamma \overline{\Delta}_{M_r}.$$

Определение 3. Пусть заданы вещественные матрицы $\underline{S} = (\underline{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\overline{S} = (\overline{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и семейство интервальных матриц $S = (s_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$:

$$\underline{S} \leq S \leq \overline{S}.$$

Определим матрицу $\text{abs}(S) = (\hat{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, такую что

$$\hat{s}_{i,j} = \max \{ |\underline{s}_{i,j}|, |\overline{s}_{i,j}| \}.$$

В соответствии с определением 3 построим матрицу $F = \text{abs}(\Delta_A \Delta_B)$. Тогда для любой матрицы Δ_{M_r} , удовлетворяющей оценке (3.8),

$$\|\Delta_{M_r}\| \leq \|F\|,$$

где

$$\|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |s_{ij}| \right)$$

для любой $(n \times n)$ -матрицы S с элементами s_{ij} .

Утверждение. Пусть

$$(3.11) \quad \gamma \|F\| < \frac{1}{\|M_r^{-1}\|}.$$

Тогда матрица $M_r + \gamma \Delta_{M_r}$ будет обратима при любых неопределенностях Δ_A и Δ_B , удовлетворяющих неравенствам (1.3). Кроме того, справедливы оценки:

$$(3.12) \quad \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}\| \leq \frac{\|M_r^{-1}\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|},$$

$$(3.13) \quad \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1}\| \leq \frac{\gamma \|M_r^{-1}\|^2 \|F\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Утверждение является очевидным следствием известных результатов [16, с. 205].

Обозначим через M_{r+1} обратимую подматрицу порядка $n(r+2)$ матрицы $\mathcal{D}_{r+1}$, включающую в себя $n + \lambda$ столбцов матрицы Λ_{r+1} и все столбцы матрицы $(\mathcal{B}_{2,r+1} \mathcal{A}_{r+1})$ (см. (2.4), (2.3), (2.1)).

Теорема 1. Пусть:

- 1) в матрице $\mathcal{D}_r$ существует разрешающий минор;
- 2) имеет место равенство (2.8);
- 3) при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B , подчиняющихся ограничениям (1.3),

$$(3.14) \quad (E_{n+d} \ O_\lambda) M_r^{-1} \Delta_\Lambda^{[2]} = O$$

(индекс при нулевой матрице указывает на число ее столбцов), а матрица $M_r^{-1} \Delta_{M_r}$ обладает структурой

$$(3.15) \quad M_r^{-1} \Delta_{M_r} = \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix},$$

где размеры нулевого блока $(n+d) \times \lambda$; * обозначает матрицу, явный вид которой несуществен.

Если кроме того

$$(3.16) \quad \gamma \|F\| < \frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}\|},$$

то при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B оператор (3.1), преобразующий ДАУ (1.2) к виду (3.2), существует, имеет левый обратный оператор $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_1 \frac{d}{dt}$ и его коэффициенты вычисляются по формуле

$$(3.17) \quad \begin{pmatrix} \tilde{R}_0 & \tilde{R}_1 & \dots & \tilde{R}_r \end{pmatrix} = (E_n \ O) (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}.$$

Доказательство теоремы 1 опущено.

Замечание 1. Нетрудно показать, что неравенство (3.16) гарантирует оценку (3.11).

4. Оценка радиуса робастной устойчивости ДАУ

В этом разделе в предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получена оценка величины γ , при выполнении которой ДАУ (1.2) будут асимптотически устойчивы для всех матричных коэффициентов из рассматриваемых интервальных семейств. Эта оценка является следствием формулы для радиуса сверхустойчивости дифференциальной подсистемы

$$(4.1) \quad x_1'(t) + U_2 x_1(t) = 0$$

интервального семейства (3.2).

Определение 4. Решением ДАУ (1.1) будем называть n -мерную вектор-функцию $x_*(t) \in \mathbb{C}^1(T)$, обращающую систему (1.1) в тождество при подстановке.

При каждом выборе возмущений Δ_A и Δ_B , подчиняющихся оценкам (1.3), решение системы (1.2) будем понимать в смысле определения 4.

Определение 5. Интервальное семейство (1.2) будем называть асимптотически устойчивым, если при каждом выборе возмущений (1.3) соответствующая система ДАУ из этого семейства асимптотически устойчива.

Замечание 2. Как было отмечено выше, в предположениях леммы 2 системы (1.1) и (2.7) обладают одними и теми же свойствами устойчивости. Пусть дифференциальная подсистема ДАУ (2.7)

$$(4.2) \quad x_1'(t) + J_2 x_1(t) = 0$$

асимптотически устойчива, т.е. любое решение $x_1(t)$ этой системы обладает свойством $\|x_1(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. В свою очередь любое решение алгебраической подсистемы находится по формуле $x_2(t) = -J_1 x_1(t)$ и, следовательно, $\|x_2(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Поэтому будем называть систему (2.7) или, что то же, систему (1.1) асимптотически устойчивой, если этим свойством обладает система (4.2).

Замечание 3. В предположениях теоремы 1 можно провести аналогичные рассуждения в отношении систем (1.2) и (3.2). Существование операторов $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ гарантирует, что семейства (1.2) и (3.2) имеют одни и те же решения, так что они и асимптотически устойчивы одновременно. Последнее имеет место, если этим же свойством обладает каждая система из интервального семейства (4.1).

В условиях теоремы 1 по построению

$$U_2 = (O_d \ E_{n-d}) \tilde{R}_0 (B_1 + \gamma \Delta_{B_1}),$$

где матрицы B_1 и Δ_{B_1} определены в (2.3) и (3.3) соответственно, $\tilde{R}_0$ — первый коэффициент дифференциального оператора (3.1), который переводит (1.2) в систему (3.2).

С учетом (3.17) можно получить представление

$$(4.3) \quad U_2 = J_2 + \Delta_{U_2},$$

где $J_2 = (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) M_r^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ — матричный коэффициент из (2.7) и (4.2), $\Delta_{U_2} = (\delta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Delta_{U_2} = & (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) \left((M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} + \\ & + \gamma (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_{B_1} \\ O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определение 6. В условиях теоремы 1 будем говорить, что система (1.1) робастно устойчива относительно ограничений (1.3), если каждая система из интервального семейства (1.2) асимптотически устойчива.

Определение 7. Радиусом робастной устойчивости системы (1.1) относительно ограничений (1.3) будем называть точную верхнюю грань по всем значениям параметра γ , при которых интервальное семейство (1.2) асимптотически устойчиво.

Для матрицы $J_2 = (\zeta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ из (4.2) определим величину

$$\sigma(J_2) = \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(\zeta_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |\zeta_{i,j}| \right).$$

Система (4.2) называется *сверхустойчивой* [1, с. 199], если

$$(4.5) \quad \sigma(J_2) > 0.$$

Сверхустойчивая система асимптотически устойчива.

По замечанию 2 в предположениях леммы 2 система (1.1) будет асимптотически устойчива, если сверхустойчива система (4.2).

Обратимся к интервальному семейству (4.1).

Лемма 3 [1, с. 223]. Пусть система (4.2) сверхустойчива, т.е. имеет место неравенство (4.5). Интервальное семейство (4.1), (4.3) будет сверхустойчиво при всех $\delta_{i,j}$:

$$(4.6) \quad |\delta_{i,j}| \leq \eta, \quad i, j = \overline{1, n-d},$$

тогда и только тогда, когда

$$\eta < \eta^* := \frac{\sigma(J_2)}{n-d}.$$

Величина η^* называется радиусом сверхустойчивости семейства (4.1), (4.3), (4.6).

В рассматриваемом случае невозможно априори указать величину η , определяющую границы изменения элементов матрицы Δ_{U_2} из (4.3), поскольку система (4.1) получена из (1.2) посредством обращения интервальной матрицы.

Для получения оценки $|\delta_{i,j}|$ разобьем следующие $(n-d) \times n(r+1)$ -матрицы на блоки размеров $(n-d) \times n$:

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} O_d & E_{n-d} & O_{nr} \end{pmatrix} (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 & \mathcal{M}_1 & \dots & \mathcal{M}_r \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} O_d & E_{n-d} & O_{nr} \end{pmatrix} M_r^{-1} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_r \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(4.8) \quad \begin{aligned} J_2 &= P_0 B_1, \\ \Delta_{U_2} &= (\mathcal{M}_0 - P_0) B_1 + \gamma \mathcal{M}_0 \Delta_{B_1}. \end{aligned}$$

Используя обозначения для элементов матриц

$$(4.9) \quad \mathcal{M}_0 = (\mu_{i,l})_{i=\overline{1,n-d}, l=\overline{1,n}}, \quad P_0 = (p_{i,j})_{i=\overline{1,n-d}, j=\overline{1,n}},$$

$$(4.10) \quad B_1 = \left(b_{i,j}^{[1]} \right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n-d}}, \quad \Delta_{B_1} = \left(\beta_{i,j}^{[1]} \right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n-d}},$$

запишем (4.8) поэлементно

$$(4.11) \quad \delta_{i,j} = \sum_{l=1}^n (\mu_{i,l} - p_{i,l}) b_{l,j}^{[1]} + \gamma \sum_{l=1}^n \mu_{i,l} \beta_{l,j}^{[1]}, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

Здесь величины $\mu_{i,l}$ и $\beta_{l,j}^{[1]}$ являются “точечными” значениями из соответствующих интервалов.

Из (4.11) следует, что

$$(4.12) \quad |\delta_{i,j}| \leq \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l} - p_{i,l}| |b_{l,j}^{[1]}| + \gamma \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l}| |\beta_{l,j}^{[1]}|, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

С учетом (3.12) и (3.13)

$$(4.13) \quad \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l} - p_{i,l}| \leq \|\mathcal{M}_0 - P_0\| \leq \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1}\| \leq \frac{\gamma \|M_r^{-1}\|^2 \|F\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|},$$

$$(4.14) \quad \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l}| \leq \|\mathcal{M}_0\| \leq \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}\| \leq \frac{\|M_r^{-1}\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Обозначим через b^* максимальный элемент матрицы $|B_1|$:

$$(4.15) \quad b^* = \max_{1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n-d} |b_{l,j}^{[1]}|;$$

а через β^* — максимальный элемент матрицы $\text{abs}(\Delta_{B_1})$:

$$(4.16) \quad \beta^* = \max_{1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n-d} \text{abs}(\beta_{l,j}^{[1]}).$$

Введем в рассмотрение величину

$$(4.17) \quad \theta = \|M_r^{-1}\| [\|M_r^{-1}\| \|F\| b^* + \beta^*].$$

Используя (4.13)–(4.17), оценку (4.12) можно усилить:

$$|\delta_{i,j}| \leq \frac{\gamma \theta}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Из замечания 3 следует, что семейство (1.2) будет асимптотически устойчиво, если сверхустойчива интервальная система (4.1). Согласно лемме 3 последнее имеет место, когда

$$\frac{\gamma \theta}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|} < \eta^*,$$

откуда получаем искомую оценку радиуса робастной устойчивости системы (1.1)

$$(4.18) \quad \gamma < \frac{\eta^*}{\theta + \eta^* \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и справедливо условие (4.5). Система ДАУ (1.1) будет робастно устойчива относительно ограничений (1.3), если имеет место неравенство (4.18), в котором $\eta^ = \frac{\sigma(J_2)}{n-d}$, а величина θ находится по формуле (4.17).*

5. Достаточное условие робастной устойчивости как следствие робастной сверхустойчивости дифференциальной подсистемы

Положим $\gamma = 1$, так что система (1.2) приобретает вид

$$(5.1) \quad (A_0 + \Delta_A) x'(t) + (B_0 + \Delta_B) x(t) = 0, \quad t \in T.$$

Как было показано в разделе 4, в предположениях теоремы 1 каждая система интервального семейства (5.1) будет асимптотически устойчива, если тем же свойством обладает и семейство (4.1).

В обозначениях (4.7), (2.3) и (3.3) интервальная матрица $U_2 = (u_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ из (3.2) и (4.1) находится по формуле

$$U_2 = \mathcal{M}_0(B_1 + \Delta_{B_1}).$$

С использованием (4.9), (4.10)

$$u_{i,j} = \sum_{l=1}^n \mu_{i,l} \left(b_{l,j}^{[1]} + \beta_{l,j}^{[1]} \right).$$

Допустим, удалось получить оценки

$$(5.2) \quad \underline{u}_{i,j} \leq u_{i,j} \leq \overline{u}_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

По определению каждая из систем семейства (4.1) будет сверхустойчива, если выполняется условие

$$(5.3) \quad \sigma(U_2) = \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(u_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |u_{i,j}| \right) > 0.$$

Поскольку

$$u_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |u_{i,j}| \geq \underline{u}_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} \max \{ |\underline{u}_{i,j}|, |\overline{u}_{i,j}| \},$$

то неравенство (5.3) будет иметь место, если

$$(5.4) \quad \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(\underline{u}_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} \max \{ |\underline{u}_{i,j}|, |\overline{u}_{i,j}| \} \right) > 0.$$

Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\gamma = 1$ и выполнены все предположения теоремы 1. Если кроме того имеет место неравенство (5.4), то система (1.1) будет робастно устойчива относительно ограничений (1.3).

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим ДАУ

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0.$$

Для этой системы справедливо условие 1 теоремы 1, так как в матрице

$$D_1 = \left(\begin{array}{cc|cc||cc} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & -3 \end{array} \right)$$

имеется подматрица M_1 , обведенная штриховой линией, определителем которой является разрешающий минор. При этом $r = 1$, $d = 1$, $Q = E_2$, $B_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\text{rank } \Lambda_1 = \lambda = 1$. Используя явный вид матрицы Λ_2 , нетрудно вычислить $\text{rank } \Lambda_2 = 3$. Следовательно, условие 2 теоремы 1 тоже выполнено.

Покажем, что для соответствующей интервальной системы (5.1) имеют место все предположения теоремы 3. Поскольку

$$M_1^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc||cc} 1/2 & & 0 & 0 & 0 & \\ -1/3 & & 2/3 & 1 & 0 & \\ \hline -1/2 & & 1 & 2 & 0 & \\ 7/36 & & -7/18 & -2/3 & 1/6 & \end{array} \right),$$

$$\Delta_{\Lambda}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{M_1} = \left(\begin{array}{cc|cc||cc} \beta_{1,2} & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & 0 \\ \beta_{2,2} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,1} \\ 0 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \alpha_{2,1} \end{array} \right),$$

то

$$(E_{n+d} \ O_{\lambda}) M_1^{-1} \Delta_{\Lambda}^{[2]} = \text{col}(0, \alpha_{1,2}, 2\alpha_{1,2}),$$

$$M_1^{-1} \Delta_{M_1} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & \alpha_{1,1} \\ * & * & * & 2\alpha_{1,1} \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

где звездочками обозначены элементы, явный вид которых несуществен. Таким образом, условия (3.14) и (3.15) означают, что

$$(5.6) \quad \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 0.$$

Равенства (5.6) представляют собой условия сохранения внутренней структуры для интервальных ДАУ (5.1).

С учетом (5.6) зададим масштабы изменения коэффициентов системы (5.5):

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,03 & -0,025 \end{pmatrix} \leq \Delta_A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,03 & 0,025 \end{pmatrix},$$

$$(5.8) \quad \begin{pmatrix} -0,05 & -0,045 \\ -0,02 & -0,02 \end{pmatrix} \leq \Delta_B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0,05 & 0,045 \\ 0,02 & 0,02 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\|F\| = 0,095$. В свою очередь $\|M_2^{-1}\| = 10,5$ (явное представление матрицы M_2^{-1} из-за громоздкости приводить не будем). Очевидно, что неравенство (3.16) выполняется. Таким образом, для рассматриваемых ДАУ имеют место все предположения теоремы 1.

Найдем оценку радиуса устойчивости, пользуясь теоремой 2. В соответствии с формулой (2.6) $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}$ и в (2.7) $J_2 = (7/3)$. Очевидно, что неравенство (4.5) выполнено и $\eta^* = 7/3$. По формуле (4.17) находим $\theta = 3,66625$. Наконец, из (4.18) получаем искомую оценку $\gamma < \frac{7}{13,32625} \approx 0,52$.

Проверим для рассматриваемой системы выполнение достаточного условия робастной устойчивости, предоставляемого теоремой 3. Ввиду того что $U_2 = (u_{1,1})$, условие (5.4) в данном случае имеет вид $\underline{u}_{1,1} > 0$, где

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \mu_{1,1}(-3 + \beta_{1,1}) + \mu_{1,2}(2 + \beta_{2,1}), \\ \mu_{1,1} &= \frac{-1 - \beta_{2,2}}{h}, \quad \mu_{1,2} = \frac{2 + \beta_{1,2}}{h}, \\ h &= (2 + \beta_{1,2})(6 + \alpha_{2,1}) - (-3 + \beta_{1,1})(-3 + \alpha_{2,2}). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5.7), (5.8) $\underline{u}_{1,1} = \frac{67619}{35551} > 1,9 > 0$. Согласно теореме 3 это означает, что система (5.5) робастно устойчива относительно ограничений (5.7), (5.8).

Замечание 4. Следует отметить, что получить явные формулы для фигурантов неравенства (5.4) в общем случае невозможно без дополнительных предположений о свойствах матрицы $M_r + \Delta_{M_r}$, обратная к которой используется для вычисления M_0 (см. (4.7)). Интервальный анализ предоставляет весьма скромные средства для нахождения оценок обратных интервальных матриц. Например, можно предположить, что $M_r + \underline{\Delta}_{M_r}$ и $M_r + \overline{\Delta}_{M_r}$ ($\underline{\Delta}_{M_r}$ и $\overline{\Delta}_{M_r}$ — “крайние” матрицы для Δ_{M_r} (см. (3.8), (3.9)) положительно обратимы, являются M -матрицами или H -матрицами [17, с. 104–113]. К сожалению, все эти предположения вступают в противоречие с условиями (5.3), (5.4) и (4.5).

6. Заключение

В статье получены оценка радиуса устойчивости и достаточные условия робастной устойчивости для ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности с использованием условия сверхустойчивости.

Система ДАУ состоит из двух взаимосвязанных частей: подсистемы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), разрешенной относительно производной, и подсистемы алгебраических уравнений. Под сверхустойчивостью системы ДАУ понимается сверхустойчивость ее дифференциальной части. Таким образом, класс сверхустойчивых ДАУ соизмерим с классом сверхустойчивых систем, разрешенных относительно производной. Несмотря на то, что этот класс довольно узок, понятие сверхустойчивости позволяет получить простое или явное представление для радиуса робастной устойчивости систем ОДУ (см., в частности, [18, 19]). Подход к исследованию ДАУ, связанный с предположением о сверхустойчивости, наследует все преимущества и недостатки, присущие исследованию робастной устойчивости сверхустойчивых систем, разрешенных относительно производной.

Особенностью ДАУ является то, что даже в случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов может привести к тому, что изменится размерность дифференциальной и алгебраической подсистем и свойства общего решения возмущенной системы не будут иметь ничего общего со свойствами общего решения номинальной системы [20, с. 7]. Для того чтобы избежать подобной ситуации и гарантировать наследование интервальными ДАУ свойства устойчивости, на матрицы возмущений накладываются ограничения (называемые “условиями сохранения структуры”), обеспечивающие совпадение структуры общего решения возмущенной и номинальной систем. Преимуществом результатов, представленных в данной статье, является то, что использованные предположения не накладывают ограничений на внутреннюю структуру номинальных ДАУ, ориентированы на системы произвольного индекса с возмущениями, присутствующими не только в матрице при $x(t)$, но и в матрице при производной. Полученные условия робастной устойчивости носят конструктивный характер и несложны для проверки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Byers R., Nichols N.K. On the Stability Radius of a Generalized State-Space System // Linear Algebra Appl. 1993. No. 188–189. P. 113–134.
3. Qiu L., Davisov E.J. The Stability Robustness of Generalized Eigenvalues // IEEE Trans. Autom. Control. 1992. No. 37. P. 886–891.
4. Chyan C.J., Du N.H., Linh V.H. On Data-Dependence of Exponential Stability and the Stability Radii for Linear Time-Varying Differential-Algebraic Systems // J. Differ. Equat. 2008. No. 245. P. 2078–2102.
5. Du N.H., Linh V.H. Stability Radii for Linear Time-Varying Differential-Algebraic Equations with Respect to Dynamics Perturbations // J. Differ. Equat. 2006. No. 230. P. 579–599.
6. Fang C.-H., Chang F.-R. Analysis of Stability Robustness for Generalized State-Space Systems with Structured Perturbations // Syst. Control Lett. 1993. No. 21. P. 109–114.
7. Lee L., Fang C.-H., Hsieh J.-G. Exact Unidirectional Perturbation Bounds for Robustness of Uncertain Generalized State-Space Systems: Continuous-Time Cases // Automatica. 1997. No. 33. P. 1923–1927.

8. *De Teran F., Dopico F.M., Moro J.* First Order Spectral Perturbation Theory of Square Singular Matrix Pencil // Linear Algebra Appl. 2008. No. 429. P. 548–576.
9. *Linh V.H., Mehrmann V.* Lyapunov, Bohl and Sacker-Sell Spectral Intervals for Differential-Algebraic Equations // J. Dyn. Differ. Equat. 2009. V. 21. P. 153–194.
10. *Lin Ch., Lam J., Wang J., Yang G.-H.* Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems // Syst. Control Lett. 2001. No. 42. P. 267–278.
11. *Berger T.* Robustness of Stability of Time-Varying Index-1 DAEs // Math. Control Signals Syst. 2014. No. 26. P. 403–433.
12. *Benner P., Sima V., Voigt M.* L_∞ -norm Computation for Continuous-Time Descriptor Systems Using Structured Matrix Pencils // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 57. No. 1. P. 233–238.
13. *Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V.* Robust Stability of Differential-Algebraic Equations / Surveys in Differential-Algebraic Equations I. Ilchmann A., Reis T. (Eds.). Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
14. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // АиТ. 2017. № 5. С. 36–55.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Robust Stability of Differential-Algebraic Equations with an Arbitrary Unsolvability Index // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. P. 798–814.
15. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределенности // Диффер. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Stability of Differential-Algebraic Equations under Uncertainty // Differ. Equat. 2018. No. 7. P. 860–869.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
17. *Neumaier A.* Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления I // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems I. Analysis // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления II // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems II. Design // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.
20. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 02.09.2019

После доработки 11.02.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Нелинейные системы

© 2021 г. В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru),

А.П. ПРЕСНОВА (presnova.a.p@yandex.ru)

(Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва)

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА “РАСШИРЕННОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ”¹

Проблема оптимального управления формулируется для класса динамических систем, нелинейные объекты которых представимы в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимального управления, т.е. параметров регулятора, перейти от необходимости поиска решений уравнения Гамильтона–Якоби к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения такого уравнения в темпе функционирования объекта. Предложен алгоритмический метод параметрической оптимизации регулятора, основанный на использовании необходимых условий оптимальности рассматриваемой системы управления. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере медикаментозного лечения пациентов при наличии ВИЧ.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, метод расширенной линеаризации, оптимальное управление, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния, параметрическая оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231021020057

1. Введение

Проблема линеаризации является одной из самых богатых областей исследований систем управления за последние четыре десятилетия. Самым распространенным методом анализа и синтеза систем с аналитическими (гладкими) функциями является линеаризация, основанная на разложении нелинейной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00535).

функции в окрестностях точки, определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасыванием нелинейных членов. Начиная с работ А.М. Ляпунова [1], основные результаты оценки устойчивости нелинейной системы по первому приближению, а также синтеза управления по первому приближению [2] основаны на изучении расположения корней характеристического уравнения системы первого приближения (“некритические задачи”). Однако для “критических задач” рассмотрения первого приближения недостаточно, управления же, синтезированные по первому приближению, могут и не обеспечить устойчивости нелинейной системе.

В отличие от этого метода развиваются методы эквивалентного представления нелинейных систем, например, метод линеаризации обратной связью (exact linearization) [3–6] или метод “расширенной линеаризации” (extended linearization) [7–10], который и используется в данной статье.

Впервые проблема управления нелинейными объектами с их эквивалентным представлением в виде линейных моделей (State Dependent Coefficient, SDC) с параметрами, зависящими от состояния, и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована в начале 60-х гг. XX столетия в [7]. С конца 90-х гг. прошлого столетия метод привлекает все большее внимание со стороны ученых и практиков. Преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, и использование квадратичного функционала качества позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation, SDRE). Это и составляет основу SDRE-метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления [8–10]. Следует отметить, что до настоящего времени остается ряд вопросов, связанных с неоднозначностью представления нелинейного объекта в виде модели с линейной структурой и с параметрами, зависящими от состояния. Синтезированные управления с использованием SDC-модели и квадратичным критерием качества обеспечивают устойчивость модели при любых начальных условиях. Но этого может не быть при приложении синтезированного таким образом управления к исходной нелинейной системе. Таким образом, в общей постановке задачи синтеза не решена задача о глобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы с управлением, синтезированным с использованием ее модели с параметрами, зависящими от состояния. Основная же проблема реализации регулятора, полученного на основе SDRE-метода, заключается в сложности нахождения решения алгебраического матричного уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования системы.

Материал статьи размещен в следующем порядке: во втором разделе осуществлена постановка задачи управления нелинейным объектом, описываемым системой обыкновенных дифференциальных уравнений, задан квадратичский функционал качества. Для синтеза оптимальных управлений использован метод динамического программирования. В третьем разделе обсуждается метод “расширенной линеаризации”, используемый для синтеза оптимального управления в задаче с заданным временем переходного процесса

и синтеза субоптимального управления в задаче с неограниченным временем окончания переходного процесса. Реализация синтезированного управления наталкивается на сложность реализации решений матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния системы. В статье для решения этой проблемы предлагается использовать один из методов алгоритмического конструирования систем с неполной информацией [11]. В четвертом разделе излагается метод алгоритмического конструирования системы с параметрической оптимизацией, основанный на применении функции допустимых управляющих воздействий (гамильтонианов). В пятом разделе демонстрируется применение полученных теоретических результатов с использованием математической модели, описывающей поведение иммунной системы человека при наличии вируса ВИЧ, в задаче управления подачей препаратов ВААРТ. Представлены результаты математического моделирования построенной системы.

2. Задача оптимального управления нелинейным детерминированным объектом

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in R^n, t \in [t_0, t_f]\}$ – состояние системы; $x \in \Omega_x$, $x_0 \in X_0 \subset \Omega_x$ – множество возможных начальных условий системы; $u(\cdot) = \{u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_f]\}$ – управление; вектор-столбец $f(x(t))$ и матрица $g(x(t))$ – непрерывные функции соответствующих размеров.

Предположение 1. Вектор-функция $f(x(t))$ – непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(x(t)) \in C^1(\Omega_x)$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x(t))$, $g(x(t))$ такие, что из любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \in R^+ \times \Omega_x$ исходит одно и только одно решение уравнения (2.1).

2.1. Задача с заданным временем окончания переходного процесса

Введем функционал качества

$$(2.2) \quad J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt.$$

Здесь $R = R^T$ – положительно определенная матрица, матрицы $F = F^T$ и $Q = Q^T$, по крайней мере, положительно полуопределенные.

Предположение 2. Пусть $f(x(t))$, $g(x(t))$ – достаточно гладкие функции такие, что функция Беллмана $V(t, x(t))$, определенная как

$$(2.3) \quad V(s, x(\cdot)) \triangleq \inf_{u(\cdot) \in U} \frac{1}{2} \left[x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_s^{t_f} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \right],$$

дифференцируемая функция при любых допустимых управлениях $u(\cdot) \in L_2[t_0, t_f]$.

В силу сделанных выше предположений значение функции $V(t, x(t))$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана [12, 13]

$$(2.4) \quad \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \min_{u \in U} H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right) = 0,$$

где H – гамильтониан

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \{f(x(t)) + g(x(t))u(t)\}. \end{aligned}$$

Функция $H(t, x(t), u(t), \partial V(t, x(t))/\partial x)$ определена и непрерывна для $t \in [t_0, t_f]$.

Оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче (2.1)–(2.2) является точкой стационарности гамильтониана (2.5) и определяется соотношением

$$\left\{ \frac{\partial H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right)}{\partial u} \right\}^T = 0, \quad \frac{\partial^2 H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right)}{\partial u^2} = R \succ 0,$$

откуда

$$(2.6) \quad u^0(t) = -R^{-1}g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T,$$

где вектор $\{\partial V(t, x(t))/\partial x\}^T$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) = 0, \\ & V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f). \end{aligned}$$

Исходная система (2.1) с управлением (2.6) имеет вид

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) - g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0.$$

Лемма 1. Если существует оптимальное управление в задаче (2.1)–(2.2), то оно единственно и определяется уравнением (2.8), где вектор $\{\partial V(t, x(t))/\partial x\}^T$ является решением уравнения (2.7) [14].

Основная трудность реализации управлений в виде (2.6) заключается в нахождении вектора $\{\partial V(t, x(t))/\partial x\}^T$, удовлетворяющего скалярному уравнению в частных производных (2.7). В случае успешного решения уравнения (2.7) управление $u(\cdot)$ осуществляется с использованием принципа обратной связи по состоянию, т.е. $u(t) = u(t, x(t))$.

В дальнейшем потребуется знание о поведении гамильтониана, соответствующее оптимальному управляемому процессу $\xi = (x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f])$.

Лемма 2 [13]. Поведение гамильтониана

$$(2.9) \quad \begin{aligned} H \left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right) = \\ = \frac{1}{2} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)], \end{aligned}$$

соответствующее управляемому процессу $\xi = (x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f])$, где

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u^0(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ u^0(t) &= -R^{-1}g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T, \end{aligned}$$

определяется решением уравнения

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} - H \left(t, x(t), u^0(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right) &= 0, \\ V(t_f, x(t_f)) &= \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f). \end{aligned}$$

2.2. Задача с неопределенным временем окончания переходного процесса

В случае, когда $t \in [t_0, t_f]$, $t_f \rightarrow \infty$, функционал качества записывается в виде

$$(2.11) \quad J(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt.$$

Здесь $Q = Q^T$ и $R = R^T$ – положительно определенные матрицы.

В этом случае $\{\partial V(x(t))/\partial t\} = 0$ и оптимальное управление и соответствующая траектория системы (2.1) имеют вид

$$(2.12) \quad u(t) = -R^{-1}g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right\}^T,$$

$$(2.13) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^T$ ищется решением уравнения

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right\}^T + \\ & + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, проблема нахождения управления (2.12) полностью зависит от успешного решения уравнения в частных производных (2.14).

Лемма 3. Значение гамильтониана, соответствующее управляемому процессу $\xi = (x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f])$, на всем интервале управления постоянно, т.е.

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} H \left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right\}^T + \\ & + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) = 0. \end{aligned}$$

3. Метод “расширенной линеаризации” в задаче синтеза управлений

3.1. SDC-представление нелинейной системы

Будем искать решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.14), применив к исходной нелинейной модели управляемого объекта метод “расширенной линеаризации”. Для этого необходимо сделать несколько предположений [8].

Предположение 3. Положим, что при $x = 0$ выполняются следующие условия: $f(0) = 0$ и, кроме этого, $g(x(t)) \neq 0, \forall x(t) \in \Omega_x$.

Учитывая сделанные предположения, представим исходную систему (2.1) с помощью метода “расширенной линеаризации” в виде системы с линейной структурой, параметры которой зависят от состояния объекта (SDC-представление, State Dependent Coefficient factorization [8–10]). Для этого представим вектор $f(x(t))$ в виде

$$(3.1) \quad f(x(t)) = A(x(t))x(t).$$

При таком представлении уравнение объекта (2.1) примет вид

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Такую запись нелинейной управляемой системы (2.1) в виде (3.2) называют SDC-представлением [8, 9].

Естественно, что такое представление (3.2) для систем, порядок которых выше первого, не является единственным. Предположим, что в общем случае матрица-функция $f(x(t))$ может быть p способами преобразована в произведение матрицы $A_i(x(t))$ с параметрами, зависящими от состояния, на вектор состояния $x(t)$, т.е.

$$(3.3) \quad f(x(t)) = A_i(x(t))x(t), \quad i = 1, \dots, p.$$

Необходимо учесть, что не все полученные таким образом p представлений вектора $f(x(t))$ можно использовать при построении системы, эквивалентной исходной. Модель с параметрами, зависящими от состояния, полученная с помощью данного преобразования (3.3), должна быть управляема.

Предположение 4. Будем считать, что представление исходной нелинейной системы в виде системы с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, является управляемым в области допустимых значений $[t_0, t_f] \times \Omega_x$, т.е. пара $\langle A_j(x(t)), g(x(t)) \rangle$ является поточечно управляемой для всех $(t, x) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x$.

Следует отметить, что в настоящее время отсутствуют критерии для определения таких структурных свойств, как управляемость и наблюдаемость моделей систем, полученных с использованием метода “расширенной линеаризации”. Для полученных моделей систем можно провести “поточечную” проверку на управляемость в некоторой области исследуемого состояния системы [10, 15].

Сделанные выше предположения 3 и 4 позволят при использовании метода “расширенной линеаризации” получить представление исходной нелинейной системы (2.1) в виде модели (3.2), которая имеет линейную структуру и является управляемой.

3.2. Задача с заданным временем окончания переходного процесса

Модифицированное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.7) имеет вид

$$(3.4) \quad \frac{dV(t, x(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T - \\ - \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t),$$

$$V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f).$$

Определим функцию $V(t, x(t))$ с точностью до положительно определенной симметрической матрицы $S(x(t))$ в виде

$$(3.5) \quad V(t, x(t)) = \frac{1}{2} x^T(t) S(x(t)) x(t).$$

Перепишем (3.4) с учетом (3.5)

$$(3.6) \quad \frac{dV(t, x(t))}{dt} = -\frac{1}{2}x^T(t) [S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t)) + Q] x(t),$$

$$V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f).$$

С учетом того, что $\{\partial V(t, x(t))/\partial x\}^T = S(x(t))x(t)$, управление (2.6) принимает вид

$$(3.7) \quad u^0(t) = -R^{-1}g^T(x(t))S(x(t))x(t),$$

а уравнение модели (3.2) с управлением (3.7) может быть записано как

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt}x(t) = [(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t))] x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Получим выражение для полной производной по времени от функции $V(t, x(t))$, используя ее представление в виде (3.5), а также учитывая выражение (3.8):

$$(3.9) \quad \frac{dV(t, x(t))}{dt} = \frac{1}{2}x^T(t) \left[\frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))S(x(t)) - \right.$$

$$\left. - 2S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t)) \right] x(t),$$

$$V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f).$$

Приравнявая правые части выражений (3.6) и (3.9), получим

$$(3.10) \quad \frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))S(x(t)) -$$

$$- S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t)) + Q = 0,$$

$$S(x(t_f)) = F.$$

Здесь

$$\frac{dS(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt}.$$

Выражение (3.10) есть уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния, и заданным краевым условием на правом конце.

Теорема 1. Даны управляемая модель (3.8) системы (2.1) и функционал (2.2). Обозначим через $J^0(t, x(t))$ минимальную величину, достигаемую функционалом $J(x(\cdot), u(\cdot))$ при оптимальном управлении $u^0(t)$, реализованном с использованием обратной связи. Эта величина равна

$$J^0(t, x(t)) = \frac{1}{2}x^T(t)S(x(t))x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

Теорема 2. Модель нелинейной системы (2.1), описываемая уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t))]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

в котором матрица $S(x(t))$ является симметрической положительно определенной и находится решением дифференциального уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (3.10), асимптотически устойчива.

Доказательства теорем 1 и 2 содержатся в Приложении.

Следует отметить, что асимптотическая стабилизация может не иметь место в исходной нелинейной системе (2.1) с синтезированным SDRE-методом оптимальным управлением вида (3.7) и произвольным начальным состоянием x_0 (глобальная асимптотическая стабилизация).

3.3. Задача с неопределенным временем окончания переходного процесса (субоптимальное управление)

Как это было сделано выше, определим функцию $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^T$ с точностью до значения матрицы $\widehat{S}(x(t))$ в виде

$$(3.11) \quad \{\partial V(x(t))/\partial x\}^T = \widehat{S}(x(t))x(t),$$

где $\widehat{S}(x(t))$ – симметрическая положительно определенная матрица.

Заменяя в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.14) $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^T$ на $\widehat{S}(x(t))x(t)$ и учитывая, что $f(x(t)) = A(x(t))x(t)$, получим

$$\begin{aligned} x^T(t) & \left[A^T(x(t))\widehat{S}(x(t)) + \widehat{S}(x(t))A(x(t)) - \right. \\ & \left. - \widehat{S}(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))\widehat{S}(x(t)) + Q \right] x(t) = 0 \end{aligned}$$

откуда, учитывая что $x(t)$ есть решение уравнения (3.2) с начальным условием $x(t_0) \neq 0$, имеем

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & A^T(x(t))\widehat{S}(x(t)) + \widehat{S}(x(t))A(x(t)) - \\ & - \widehat{S}(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))\widehat{S}(x(t)) + Q = 0. \end{aligned}$$

Управление для рассматриваемой задачи принимает вид

$$(3.13) \quad u^0(t) = -R^{-1}g^T(x(t))\widehat{S}(x(t))x(t).$$

Запишем исходную систему (2.1) с субоптимальным управлением (3.13)

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))\widehat{S}(x(t))x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Отметим справедливость сформулированной выше теоремы 1 об асимптотической устойчивости модели с параметрами, зависящими от состояния, и сделанного замечания относительно глобальной устойчивости исходной нелинейной системы.

Для рассматриваемой модели (3.8) исходного объекта (2.1) в случае с открытым интервалом управления можно, используя теоремы 1 и 2, сформулировать соответствующие теоремы о конечном значении функционала при оптимальном управлении и устойчивости.

Теорема 3. Даны управляемая модель (3.8) системы (2.1) и функционал (2.11). Обозначим через $J^0(x(\cdot))$ минимальную величину, достигаемую функционалом $J(x(\cdot), u(\cdot))$ при оптимальном управлении, реализованном с использованием обратной связи. Эта величина равна

$$J^0(x(t_0)) = \frac{1}{2} x_0^T \widehat{S}(x_0) x_0,$$

где положительно определенная симметрическая матрица определяется решением алгебраического уравнения типа Риккати с постоянными параметрами

$$A^T(x_0) \widehat{S}(x_0) + \widehat{S}(x_0) A(x_0) - \widehat{S}(x_0) g(x_0) R^{-1} g^T(x_0) \widehat{S}(x_0) + Q = 0.$$

Теорема 4. Модель нелинейной системы (2.1), описываемая уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = \left[A(x(t)) - g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) \widehat{S}(x(t)) \right] x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

в котором матрица $\widehat{S}(x(t))$ является симметрической положительно определенной и находится решением алгебраического уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (3.12), асимптотически устойчива с положением равновесия в точке $x = 0$.

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2.

Однако отметим, асимптотическая стабилизация может не иметь место в исходной нелинейной системе (2.1) с синтезированным SDRE-методом субоптимальным управлением вида (3.13) и произвольным начальным состоянием x_0 (глобальная асимптотическая стабилизация).

В заключение данного раздела отметим, что выражения для оптимального (3.7) и субоптимального (3.13) управлений нелинейной системой получены. Однако проблема реализации таких управлений наталкивается на проблему поиска решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния системы (3.10) или (3.12), в темпе функционирования системы управления. Поиск решения этой проблемы, описанный в следующем разделе статьи, основан на установленных закономерностях поведения гамильтониана при оптимальном управлении и соответствующем состоянии нелинейного объекта (леммы 2 и 3).

4. Конструирование алгоритмов оптимизации нелинейных неопределенных систем управления

Представлен новый метод формирования алгоритмов оптимизации нелинейных неопределенных систем управления, основанный на применении функций допустимых значений управляющих воздействий (гамильтонианов) [16]. Под термином “неопределенные системы” понимаются системы с неполной информацией о параметрах и действующих возмущениях [11].

4.1. Общая структура алгоритмов параметрической оптимизации нелинейных неопределенных систем

Пусть нелинейный управляемый объект описывается дифференциальным уравнением вида

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt}x(t) = \tilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in R^n, t \in [t_0, t_f]\}$ – состояние объекта; $u(\cdot) = \{u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_f]\}$ – управляющие воздействия; $\eta(\cdot) = \{\eta(t) \in \Delta \subset R^k, t \in [t_0, t_f]\}$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, при этом известно, что $|d\eta(t)/dt| \leq \max_{\eta \in \Delta} |d\eta(t)/dt| = \sigma$, $\sigma_i > 0, i = 1, \dots, k$; вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы: $a(\cdot) = \{a(t) \in A \subset R^p, t \in [t_0, t_f]\}$. Отметим, что в общем случае $k \geq p$. Выделенные для параметрической оптимизации параметры системы могут находиться как в самом объекте, так и в регуляторе.

Как следует из лемм 1 и 2, поведение гамильтонианов при оптимальных управлениях $u^0(t)$ и соответствующих траекториях $x(t)$ определяется вполне определенными выражениями. Это свойство гамильтонианов положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления.

Сформулируем необходимые условия, при которых функционал качества достигает минимального значения, основываясь на поведении гамильтониана вдоль оптимальной траектории. Рассмотрим вначале случай, когда $k = p$ и параметры $a(t)$ могут “парировать” возмущения $\eta(t)$, т.е. возможно выполнение условия $a(t) - \eta(t) = 0$.

Пусть скалярная функция $\varphi(t)$ соответствует значению гамильтониана при оптимальном управляемом процессе $\xi = (x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f])$ на всем интервале управления, т.е.

$$\varphi(t) = -H \left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right),$$

где $H \left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right)$ – значение гамильтониана в каждый момент времени управления при отсутствии параметрических возмущений (или при полном их парировании) при оптимальном управлении и соответствующей траектории системы (4.1).

Введем скалярную функцию $\mathfrak{R}(\cdot)$ такую, что

$$\mathfrak{R} \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) = H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) + \varphi(t).$$

Таким образом, условие, которое достигается при $a(t) - \eta(t) = 0$,

$$(4.2) \quad \Re \left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right) = 0$$

есть необходимое условие оптимальности системы управления.

Предположение 5. Необходимые условия оптимальности в задачах (2.1), (2.2) и (2.1), (2.11), а именно условия вида (4.2), являются и достаточными условиями оптимальности.

Это предположение выполняется в случае, когда

а) задача унимодальная, т.е. функционал имеет только один минимум и отсутствуют другие точки стационарности гамильтониана;

б) исследователь располагает информацией об области нахождения главного экстремума (минимума) функционала качества, которая соответствует заданной области допустимых управлений, так что можно рассматривать задачу с одним глобальным минимумом.

Необходимые и достаточные условия оптимальности (4.2) будут использоваться в качестве основы при конструировании алгоритмов оптимизации неопределенных систем [11].

Таким образом, в случае, когда $a(t) - \eta(t) \neq 0$, условие (4.2) выполняться не будет, т.е. $\Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \neq 0$.

Теорема 5. Пусть неопределенная нелинейная динамическая система описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = \tilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in R^n$ – состояние объекта; $u(t) \in R^r$ – управляющие воздействия; $\eta(t) \in \Delta \subset R^k$, $|d\eta(t)/dt| \leq \max_{\eta \in \Delta} |d\eta(t)/dt| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений; $a(t) \in A \subset R^p$ – вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы. Предполагается также, что при $p = k$ во внутренней области множества значений параметров A , при соответствующем $u^0(t) \in U$, существуют такие значения $a^0(t) \in A$, при которых достигается заданная цель параметрического управления, т.е.

$$a^0(t) = \arg \left[\min_{a \in A} J(x(t), u^0(t), \eta(t), a(t)) \right] = \arg [J(x^0(t), u^0(t), \eta(t), a^0(t))] \in A,$$

что соответствует выполнению условия

$$\Re \left(x^0(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a^0(t) \right) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \frac{d}{dt}a(t) = & - \left\{ \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \right\}^T \times \\
 & \times \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right), \\
 & a(t_0) = a_0
 \end{aligned}$$

обеспечивает исходной системе асимптотическое свойство параметрической оптимизации в смысле заданного функционала качества $J(x(t), u(t))$ при выполнении условия

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \Re^2 \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \left\| \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \right\|^2 > \\
 & > \left| \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial \eta} \sigma \right|.
 \end{aligned}$$

Отметим, что назначение начального условия $a(t_0)$ для алгоритма (4.3) параметрической оптимизации зависит от априорной информации о состоянии в данный момент времени возмущенных параметров $\eta(t_0)$.

Дадим пояснение о возможности реализации алгоритма (4.3). Как видно, этот алгоритм содержит неизмеряемую информацию о возмущенных параметрах $\eta(t)$. Вся информация о возмущенных параметрах и параметрах оптимизации содержится в выражении, описывающем гамильтониан системы. Действительно:

$$\begin{aligned}
 & H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) = \\
 & = L(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \tilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)) = \\
 & = L(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \{dx(t)/dt\},
 \end{aligned}$$

так как $dx(t)/dt = \tilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t))$. Здесь $L(x(t), u(t))$ – интегрант функционала (2.2) или (2.11). Таким образом, для реализации алгоритма (4.3) необходимо располагать информацией о $dx(t)/dt$.

Как выше отмечалось, количество параметров системы, подвергающихся возмущениям, может быть больше, чем параметров, на которые возлагается задача уменьшения наилучшим образом влияния этих возмущений, т.е. в этом случае $k > p$. Условие успешной параметрической оптимизации системы в этом случае формулируется следующей теоремой.

Теорема 6. Пусть вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, отвечает условию $\eta(t) \in \Delta \subset R^k$, $|d\eta(t)/dt| \leq \max_{\eta \in \Delta} |d\eta(t)/dt| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, а вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы, есть $a_p(t) \in A_p \subset R^p$, $p < k$. Предполагается, что в области множества значений параметров A_p , выделенных в системе управления для ее оптимизации, при соответствующем $u_p^0(t) \in U$ существуют такие значения $a_p^0(t) \in A_p$, при которых достигается заданная цель параметрического управления, т.е.

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_p^0(t) &= \arg \left[\min_{a_0 \in A} J_p(x_p(t), u_p^0(t), \eta(t), a_p(t)) \right] = \\ &= \arg [J_p(x_p^0(t), u_p^0(t), \eta(t), a_p^0(t))] \in A_p, \end{aligned}$$

что соответствует выполнению условия

$$(4.6) \quad \Re_p \left(x_p^0(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p^0(t) \right) = 0.$$

Алгоритм

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_p(t) &= - \left\{ \frac{\partial H \left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t) \right)}{\partial a_p} \right\}^T \times \\ &\times \Re_p \left(x_p(t), u_p(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t) \right) \end{aligned}$$

обеспечивает исходной системе асимптотическое свойство параметрической оптимизации в смысле заданного функционала качества $J_p(x_p(t), u_p^0(t))$, ($p < k$) при выполнении условия

$$\begin{aligned} &\Re_p^2 \left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t) \right) \left\| \frac{\partial H \left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t) \right)}{\partial a_p} \right\|^2 - \\ &- \left| \Re_p \left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t) \right) \right|, \\ &\left| a_p(t) \frac{\partial H \left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t) \right)}{\partial \eta} \sigma \right| > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнение условия (4.5) обеспечивает существование необходимого условия оптимальности (4.6), которое используется в структуре алгоритма параметрической оптимизации. Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

Назначение начального условия $a_p(t_0)$ так же, как и для алгоритма (4.3), зависит от априорной информации о состоянии в данный момент времени возмущенных параметров $\eta(t_0)$.

4.2. Алгоритмы оптимизации нелинейных систем, линеаризованных с помощью метода “расширенной линеаризации”

Полученные в разделе 4.1 алгоритмы параметрической оптимизации неопределенных нелинейных динамических систем применимы для поиска субоптимального решения задачи построения нелинейной системы управления, рассмотренной в разделе 3.2 статьи, а именно, для нахождения матрицы $\hat{S}(x(t))$, минуя проблемы нахождения решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (3.5). Для этого представим матрицу $\hat{S}(x(t))$ в виде

$$(4.7) \quad \hat{S}(x(t)) = S_0 + s(t),$$

здесь матрица S_0 находится из решения уравнения Риккати с постоянными параметрами (при $x(t_0) = x_0$)

$$(4.8) \quad S(x_0)A(x_0) + A^T(x_0)S(x_0) - S(x_0)g(x_0)R^{-1}g^T(x_0)S(x_0) + Q = 0,$$

а матрица $s(t)$ – матрица настраиваемых параметров.

В соответствии с изложенным выше способом представления матрицы $\hat{S}(x(t))$ (4.7) запишем алгоритм для нахождения $s(t)$

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt}s(t) = - \left\{ \frac{\partial H(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t))}{\partial s} \right\}^T \Re(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t)),$$

$$s(t_0) = 0,$$

здесь

$$\begin{aligned} & \Re(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t)) = \\ & = H(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t)) - H(x^0(t), u^0(t), S(x^0)x^0(t)), \\ & H(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t)) = \\ & = \frac{1}{2}x^T(t) \left\{ Q - [S_0 + s(t)]^T g(x(t))R^{-1}g^T(x(t)) [S_0 + s(t)] + \right. \\ & \quad \left. + 2[S_0 + s(t)]^T A(x(t)) \right\} x(t), \end{aligned}$$

$S(x^0)$ – матрица, при которой выполняется условие

$$\Re\left(x^0(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a^0(t)\right) = 0.$$

Функция чувствительности $\left\{ \partial H(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t)) / \partial s \right\}^T$ определяется выражением

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial H(x(t), u(t), [S_0 + s(t)] x(t))}{\partial s} \right\}^T = \\ & = [-g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))(S_0 + s(t)) + A(x(t))] x(t)x^T(t). \end{aligned}$$

С учетом (3.7) и (4.7) управление с параметрической оптимизацией при использовании данного алгоритма принимает вид

$$(4.10) \quad u(t) = -R^{-1}g^T(x(t))[S_0 + s(t)]x(t).$$

Система (2.1) с управлением (4.10) принимает вид

$$(4.11) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))[S_0 + s(t)]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где матрица S_0 определяется решением уравнения (4.8), а матрица $s(t)$ находится с использованием алгоритма (4.9).

Таким образом, для исходной нелинейной системы (2.1) решена задача синтеза субоптимального управления с параметрической оптимизацией регулятора в случае незаданного времени переходного процесса.

5. Демонстрация работы алгоритма параметрической оптимизации в задаче управления нелинейной системой

Для проверки возможности использования рассмотренных в статье подходов построения систем управления с параметрической неопределенностью и проверки работоспособности алгоритмов параметрической оптимизации в этом разделе представлены результаты конструирования системы медикаментозного лечения иммунного заболевания ВИЧ. В качестве объекта исследования была выбрана модель поведения иммунной системы человека при наличии в ней ВИЧ, предложенная в [17–19]. Модель образуют пять дифференциальных уравнений:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}i(t) &= \lambda - di(t) - \beta(1 - \eta u(t))i(t)y(t), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \beta(1 - \eta u(t))i(t)y(t) - ay(t) - p_1z_1(t)y(t) - p_2z_2(t)y(t), \\ \frac{d}{dt}z_1(t) &= c_1z_1(t)y(t) - b_1z_1(t), \\ \frac{d}{dt}w(t) &= c_2i(t)y(t)w(t) - c_2qy(t)w(t) - b_2w(t), \\ \frac{d}{dt}z_2(t) &= c_2qy(t)w(t) - hz_2(t), \end{aligned}$$

здесь обозначены: i – незараженные Т-клетки иммунной системы, Т-хелперы; y – зараженные Т-хелперы (вирусы); z_1 – Т-киллеры; w – В-лимфоциты; z_2 – иммуноглобулины, клетки-памяти; λ – скорость производства Т-хелперов в организме. Управление системой (5.1) осуществляется подачей лекарственных препаратов (u – доза вводимого препарата), максимальная эффективность которых выражается коэффициентом η . Значения параметров, использованных при построении и проведении математического моделирования, приняты из [18]. Параметры являются безразмерными и усредненными, так

как сама модель описывает поведение иммунной системы на качественном уровне и является безразмерной.

Для примера был рассмотрен очень слабый пациент, имеющий вирус ВИЧ. Для такого состояния начальные значения примем равными: $i = 0,2$, $y = 2$, $z_1 = 0,08$, $w = 0,01$, $z_2 = 0,01$. Для рассматриваемой модели иммунной системы значение концентрации здоровых клеток иммунной системы для нормальной жизнедеятельности должно быть в диапазоне 8–10. Значения $i \leq 1$ говорят о том, что иммунная система не справляется с инфекциями, попадающими в организм, и состояние пациента близко к стадии наступления СПИДа.

Перепишем систему (5.1) в следующем виде:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

где $x^T(t) = [i(t)y(t)z_1(t)w(t)z_2(t)]$,

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} [-d - \beta y(t)] i(t) \\ \beta i(t)y(t) - ay(t) - p_1 z_1(t)y(t) - p_2 z_2(t)y(t) \\ c_1 z_1(t)y(t) - b_1 z_1(t) \\ c_2 i(t)y(t)w(t) - c_2 qy(t)w(t) - b_2 w(t) \\ c_2 qy(t)w(t) - h z_2(t) \end{bmatrix},$$

$$g(x(t)) = \begin{bmatrix} \beta \eta i(t)y(t) \\ -\beta \eta i(t)y(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (5.2) в SDC-представлении, учитывая что $(10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ точка равновесия системы (5.1)

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

здесь

$$A(x(t)) = \begin{pmatrix} -d - \beta y & -10\beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta y & 10\beta - (a + p_1 z_1 + p_2 z_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 y - b_1 & 0 & 0 \\ c_2 y w & 0 & 0 & 10c_2 y - c_2 qy - b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2 qy w}{z_2} - h \end{pmatrix},$$

где переменные i, y, z_1, w, z_2 , как и в (5.1), зависят от времени, т.е. $i(t), y(t), z_1(t), w(t), z_2(t)$.

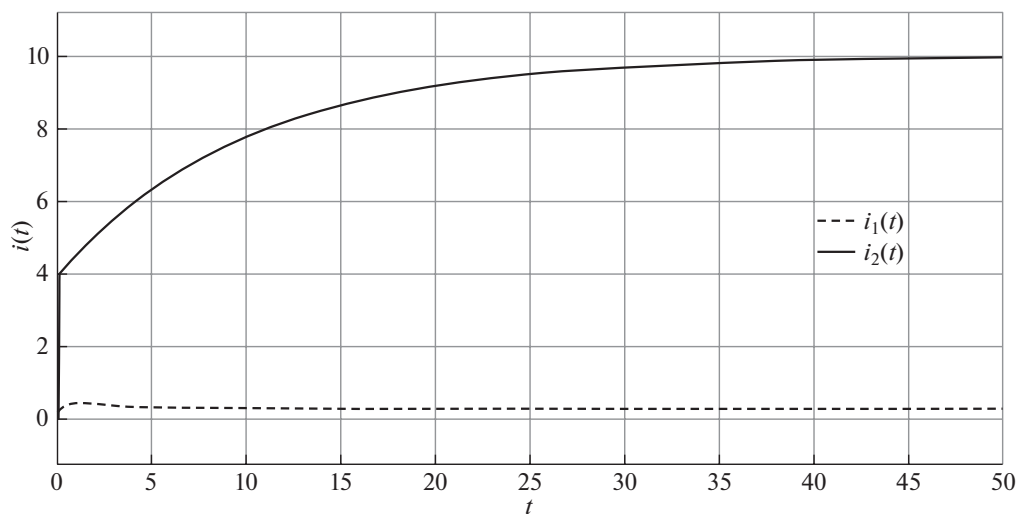


Рис. 1.

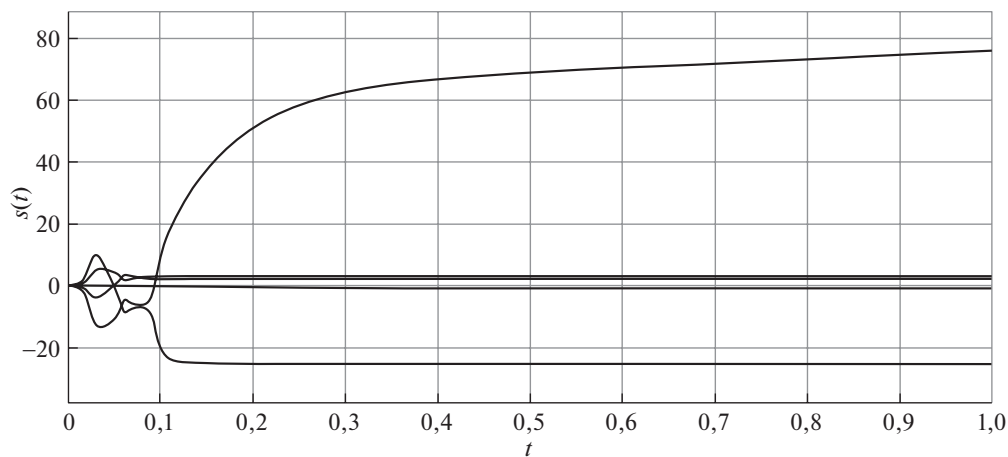


Рис. 2.

Для назначенных начальных условий и заданных матриц Q, R с использованием пакета прикладных программ MATLAB получено решение матричного уравнения Риккати S_0 :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 113,426 & 112,15 & 0 & 115780 & 0 \\ 112,15 & 111,7475 & 0 & 114460 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 & 0 \\ 115780 & 114460 & 0 & 11885 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{pmatrix}.$$

Организация алгоритма оптимизации параметров матрицы $s(t)$ для рассматриваемого примера полностью соответствует приведенному в четвертом

разделе статьи (4.7)–(4.11) методу поиска субоптимального решения задачи построения нелинейной системы управления.

В статье приведены результаты моделирования исходной системы (5.1) в отсутствие каких-либо управляющих воздействий (без лечения, $u = 0$) и с управлениями, синтезированными с использованием алгоритма (4.9), см. рис. 1 и 2.

Результаты компьютерного моделирования подтверждают эффективность полученного алгоритмического метода синтеза управлений с параметрической оптимизацией. Как видно из приведенных результатов моделирования, разработанное целенаправленное воздействие на иммунную систему, помогает ей установить приемлемый уровень собственных клеток и контролировать концентрацию зараженных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Подставим в подынтегральную часть функционала

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt$$

выражение $d[x^T(t) S(x(t)) x(t)] / dt$, компенсировав вне интеграла следующим соотношением $0,5 [x^T(t) S(x(t)) x(t) - x^T(t_f) S(x(t_f)) x(t_f)]$. Получим

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), u(\cdot)) &= \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} [x^T(t) S(x(t)) x(t) - x^T(t_f) S(x(t_f)) x(t_f)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + d[x^T(t) S(x(t)) x(t)] / dt\} dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание то, что

$$(П.1) \quad \frac{d}{dt} x(t) = [(x(t)) - g(x(t)) R^{-1} g^T(x(t)) S(x(t))] x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

и что $S(x(t_f)) = F$, имеем

$$J^0(t, x(t)) = \frac{1}{2} x^T(t) S(x(t)) x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы об асимптотической устойчивости модели (П.1) введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V_L(x(t))$ такую, что

$$(П.2) \quad \omega_1 \{|x|\} \leq V_L(x(t)) \leq \omega_2 \{|x|\}, \quad dV_L(x(t))/dt \leq -\omega_3 \{|x|\}, \quad \forall x,$$

где $\omega_i \{|x|\}$, $i = 1, 2, 3$ – скалярные неубывающие функции такие, что $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i \{|x|\} > 0$. Используя вторую теорему Ляпунова, получим, что при выполнении условия

$$(П.3) \quad \frac{dV_L(x(t))}{dt} = \frac{\partial V_L(x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} \leq -\omega_3 \{|x|\}$$

система будет устойчива. Назначим $V_L(x(t))$ в виде

$$V_L(x(t)) = x^T(t)S(x(t))x(t),$$

где $S(x(t))$ – положительно определенная симметрическая матрица, являющаяся решением уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$(П.4) \quad \begin{aligned} & \frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))S(x(t)) - \\ & - S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t)) + Q = 0, \\ & S(x(t_f)) = F. \end{aligned}$$

Определим $\omega_3 \{|x|\}$ в виде $\omega_3 \{|x|\} = x^T(t)Qx(t)$, $\forall x \neq 0$. Тогда с учетом (П.1) должно выполняться условие (П.3)

$$\begin{aligned} & \frac{dV_L(x(t))}{dt} = \\ & = x^T(t) \left[\frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))S(x(t)) - \right. \\ & \quad \left. - S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t)) + Q \right] x(t) - \\ & - x^T(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t))x(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая (П.4), будем иметь

$$x^T(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^T(x(t))S(x(t))x(t) \geq 0.$$

Это условие выполняется при всех $x(t) \neq 0$. Следовательно, модель (П.1) нелинейной системы (2.1) является асимптотически устойчивой.

Доказательство теоремы 5. Для построения алгоритма параметрической оптимизации системы

$$(П.5) \quad \frac{d}{dt}x(t) = \tilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

введем функцию Ляпунова

$$(П.6) \quad \begin{aligned} & V_L(\eta(t), a(t)) = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) - \Re \left(x^0(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right) \right\}^2 = \\ & = \frac{1}{2} \Re^2 \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right). \end{aligned}$$

Тогда для асимптотической параметрической оптимизации ее производная должна быть отрицательной для случая $a(t) - \eta(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.7}) \quad & \frac{d}{dt} V_L(\eta(t), a(t)) = \\
 & = \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \times \\
 & \times \left[\frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial \eta} \frac{d}{dt} \eta(t) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \frac{d}{dt} a(t) \right] < 0,
 \end{aligned}$$

так как $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H^0}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial \eta} = 0$ и $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial a} = 0$.

Назначим алгоритм параметрической оптимизации в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} a(t) &= - \left\{ \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \right\}^T \times \\
 &\times \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right), \\
 a(t_0) &= a_0.
 \end{aligned}$$

При таком назначении алгоритма параметрической оптимизации из условия (П.14) получим

$$\begin{aligned}
 & \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial \eta} \frac{d}{dt} \eta(t) - \\
 & - \Re^2 \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \right\} < 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что на скорость изменения возмущающих воздействий наложено ограничение, т.е. $|d\eta(t)/dt| \leq \max_{\eta \in \Delta} |d\eta(t)/dt| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, можно записать условие успешного выполнения процесса оптимизации:

$$\begin{aligned}
 & \Re^2 \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \left\| \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial a} \right\|^2 > \\
 & > \left| \Re \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right) \frac{\partial H \left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t) \right)}{\partial \eta} \sigma \right|.
 \end{aligned}$$

Заключение

В статье для нелинейных динамических систем, представимых моделями, построенными с использованием метода “расширенной линеаризации”, и квадратических функционалов качества произведен синтез управляющих воздействий, реализация которых требует получения решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Линейная структура моделей и квадратический функционал качества позволяют перейти от уравнения в частных производных к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения такого уравнения в темпе функционирования объекта. В статье предложен алгоритмический метод параметрической оптимизации регулятора, основанный на использовании необходимых условий оптимальности, выраженных в виде поведения гамильтониана на оптимальной траектории системы управления. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере медикаментозного лечения пациентов при наличии ВИЧ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: УРСС, 2004.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.
3. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London: Springer, 1995.
4. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. New York: Prentice Hall, 2002.
5. *Mehra R., Chinde V., Kazi K., and Singh N.M.* Feedback Linearization of Single-Input and Multi-Input Control System // Proc. 19th World Congress IFAC. Cape Town, 2014. P. 5479–5484.
6. *Афанасьев В.Н., Орлов П.В.* Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Изв. РАН ТиСУ. 2011. № 3. С. 13–22.
7. *Pearson J.D.* Approximation Methods in Optimal Control // J. Electron. Control. 1962. № 12. P. 453–469.
8. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proc. 17th World Conf. IFAC. Seoul, 2008. P. 3771–3775.
9. *Mracek C.P., Cloutier J.R.* Missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method // Proc. Int. Conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. Daytona Beach, 1996. P. 387–396.
10. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: URSS, 2015.
11. *Афанасьев В.Н.* Динамические системы с неполной информацией: Алгоритмическое конструирование. М.: Наука. Физматлит, 2008.
12. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Изд-во Мир, 1974.
13. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2011.

14. *Галеев Э.М., Зеликин М.Ю., Конягин С.В.* Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.
15. *Гамкрелидзе Р.В.* Скользящие режимы в теории оптимального управления // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 180–193.
16. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
17. *Perelson A.S, Kirschner D.E.* Dynamics of Hiv Infection of CD4+T Cells // Math. Biosci. 1993. V. 114. P. 81–125.
18. *Wodarz D., Nowak M.A.* Specific Therapy Regimes Could Lead to Long-Term Immunological Control of HIV // Proc. National. Acad. Sci. 1999. V. 96. P. 14464–14469.
19. *Zurakowski R., Teel A.* A Model Predictive Control Based Scheduling Method for HIV Therapy // J. Theor. Biol. 2006. V. 238. P. 368–382.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 08.04.2020

После доработки 06.06.2020

Принята к публикации 10.09.2020

© 2021 г. А.Н. КУЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (anat_kulikov@mail.ru),
Д.А. КУЛИКОВ, канд. физ.-мат. наук (kulikov_d_a@mail.ru)
(Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СЛАБОДИССИПАТИВНОГО ВАРИАНТА НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ¹

Рассматривается периодическая краевая задача для нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау в слабодиссипативном его варианте. Изучен вопрос о существовании, устойчивости и локальных бифуркациях одномерных периодических решений. Показано, что в окрестности одномерных периодических решений может существовать трехмерный локальный аттрактор, заполненный пространственно неоднородными периодическими по времени решениями. Для них получены асимптотические формулы. Результаты получены на базе использования и развития методов теории бесконечномерных динамических систем. В особом варианте рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения с частными производными изучен вопрос о существовании глобального аттрактора. Для этого варианта нелинейной краевой задачи найдены ее решения в виде рядов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, локальные, глобальные аттракторы, устойчивость, бифуркации.

DOI: 10.31857/S0005231021020069

1. Введение

Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау — одно из самых изучаемых уравнений математической физики. Оно используется в различных областях физики, а также химической кинетике. В обзоре [1] приведен широкий спектр приложений, где встречается, используется это уравнение. Конечно, этот список далеко не полон, но достаточно убедительно демонстрирует актуальность изучения данного уравнения. Вывод этого уравнения на физическом уровне строгости был дан в [2].

Обычно это уравнение приводят в следующем виде:

$$v_\tau = (\alpha + i\beta)v - (b_1 + ic_1)v|v|^2 + (a_1 + id_1)\Delta v,$$

где $v = v(\tau, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha, \beta, a_1, b_1, c_1, d_1 \in R$, $a_1 \geq 0$, $a_1^2 + d_1^2 \neq 0$, $\alpha > 0$, $b > 0$, $\Delta u = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}$, т.е. Δ — оператор Лапласа. Обычно, $n = 1, 2, 3$. Наиболее изучаемый вариант данного уравнения соответствует выбору $n = 1$. Далее $n = 1$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований в рамках научного проекта (грант № 18-01-00672).

После замены $v = \eta \exp(i\beta\tau)u$ и последующей нормировки времени $\tau = \gamma t$, если $\gamma\alpha = 1$, $b\gamma\eta^2 = 1$, получаем новый нормированный вариант уравнения

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + id)u_{xx},$$

где $a = \gamma a_1$, $d = \gamma d_1$, $u = u(t, x)$. Подчеркнем, что в большинстве случаев изучается вариант этого уравнения, когда $a > 0$ [1–6]. Отдельного внимания заслуживает вариант, когда $a = 0$. Такой вариант уравнения Гинзбурга–Ландау встречается, например, в нелинейной оптике, используется в гидродинамике (см., например, [7–10]). Другой частный случай, когда $c = d = 0$, $a > 0$, встречается в теории конденсированных сред (см., например, [1, 5]). Отметим, что, конечно, изучается и вариант когда $n \geq 2$, т.е. число пространственных переменных больше одной. Так, например, в [3, 9] был изучен вопрос о влиянии геометрической размерности на характер динамики решений этого уравнения. Отметим также, что при $a > 0$ и соответствующем выборе краевых условий получаем краевую задачу, которую можно включить в класс абстрактных нелинейных уравнений, изученных в [11]. При $a = 0$ краевые задачи для этого уравнения могут быть, скорее, проинтерпретированы как гиперболические и включены в классы уравнений, изученных в [12, 13], посвященных доказательству локальной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Отметим еще, что уравнение Гинзбурга–Ландау при $a = 0$ часто называют и иначе: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера.

В связи с изучением такого явления, как ферромагнетизм, появился новый вариант уравнения Гинзбурга–Ландау [14–16], который принято называть нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау

$$v_\tau = (\alpha + i\beta)v + (\gamma + i\delta)v_{yy} - (\alpha_1 + i\beta_1)v|v|^2 - (\alpha_2 + i\beta_2)v \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |v|^2 dy \right).$$

Его, как правило, рассматривают с периодическими краевыми условиями

$$v(\tau, y + 2l) = v(\tau, y).$$

Здесь $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $l > 0$.

Замены, аналогичные предыдущим, а также замена $y = lx/\pi$ позволяют предыдущую краевую задачу для функции $v(\tau, y)$ свести к нормированной краевой задаче

$$(1.1) \quad u_t = u + (a - id)u_{xx} - (b + ic)u|u|^2 - (b_1 + ic_1)u \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx \right),$$

$$(1.2) \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x),$$

где $b_1 + b = 1$. Далее ограничимся слабодиссипативным вариантом уравнения (1.1), когда $a = 0$ ($d \neq 0$).

Для анализа динамики решений эволюционной краевой задачи (1.1), (1.2) будут использованы такие методы анализа систем с распределенными параметрами, как метод интегральных многообразий и нормальных форм. Во

многих случаях использование этих методов позволяет свести соответствующую бесконечномерную задачу к анализу конечномерной динамической системе, для которой используют, обычно, название — нормальная форма. Естественно, что существуют и иные подходы к анализу систем с распределенными параметрами. Например, в [17, 18] для анализа систем с распределенными параметрами также используется сведение к конечномерным динамическим системам. Такой вариант может оказаться эффективным при наличии симметрии в анализируемых динамических системах.

2. Постановка задачи

В работе будет изучаться краевая задача

$$(2.1) \quad u_t = u - (b_1 + ic_1)uV(u) - (b + ic)u|u|^2 - idu_{xx},$$

$$(2.2) \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x),$$

где $b_1, b, c_1, c \in \mathbb{R}$, $b_1, b \geq 0$, $b_1 + b = 1$, $d > 0$, $V(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx$. На протяжении большей части работы будем рассматривать вариант интегродифференциального уравнения (2.1) в случае, когда $b > 0$. Случай $b = 0$ является особым и будет рассмотрен отдельно в предпоследнем разделе данной работы.

Если дополнить краевую задачу (2.1), (2.2) начальным условием

$$(2.3) \quad u(0, x) = f(x),$$

где комплекснозначная функция $f(x)$ имеет период 2π и справедливо включение $f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]$ при $x \in [-\pi, \pi]$, а через $W_2^2[-\pi, \pi]$ обозначено соответствующее пространство Соболева [19], то из [12, 13] вытекает, что для начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) справедливы утверждения:

- 1) она локально корректно разрешима;
- 2) ее решения порождают локальный гладкий поток.

Это дает основание использовать при анализе краевой задачи (2.1), (2.2) понятия и методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В данном случае в качестве фазового пространства (пространства начальных условий) естественно выбрать пространство $H_2 : f(x) \in H_2$, если $f(x)$ имеет период 2π и при $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо включение $f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]$.

Лемма 1. Решения краевой задачи (2.1), (2.2) диссипативны в норме пространства $L_2(-\pi, \pi)$: с течением времени они попадают в шар $Q(R)$ пространства $L_2(-\pi, \pi)$, где $R = 2(1 + \delta)\pi$, δ — любое положительное число.

Справедливость этого утверждения проверяется следующим образом. Домножим, уравнение (2.1) на $\bar{u}(t, x)$, а сопряженное ему уравнение — на $u(t, x)$. После их сложения и интегрирования по x от $-\pi$ до π получим равенство

$$\rho_t = 2 \left[\rho - \frac{1}{2\pi} b_1 \rho^2 - b \rho_1 \right],$$

где $\rho = \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx$, $\rho_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |u|^4 dx$, т.е. $\rho(t), \rho_1(t)$ — функции переменной t . В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\rho_t \leq 2\rho \left[1 - \frac{1}{2\pi}(b + b_1)\rho \right] \leq 2\rho \left(1 - \frac{1}{2\pi}\rho \right) < 0,$$

если $\rho = \rho(t) > 2\pi$, т.е. с течением времени для $\rho(t)$ будет выполнено неравенство $\rho(t) \leq 2(1 + \delta)\pi$, где δ — сколь угодно малая положительная постоянная.

Далее в работе будут рассмотрены вопросы, касающиеся существования и устойчивости инвариантных многообразий нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2), а также формирующих их решений.

3. Одномодовые периодические решения

Элементарно проверяется, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет счетное семейство t периодических решений

$$(3.1) \quad u_n(t, x) = \exp(i\sigma_n t + inx),$$

где $\sigma_n = -(c_1 + c) + dn^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Особую роль для приложений играет пространственно однородное решение $u(t, x) = u_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$, $\sigma_0 = -(c_1 + c)$. При проверке того, что любая функция из семейства (3.1) удовлетворяет краевой задаче (2.1), (2.2), используется равенство $b_1 + b = 1$. Решение $u_0(t)$ принято называть циклом Андронова–Хопфа или пространственно однородным периодическим решением.

Для решений краевой задачи (2.1), (2.2) справедлив “принцип самоподобия” (см., например, [9]). Суть его заключается в том, что замена

$$(3.2) \quad u(t, x) = w(t, y) \exp(i\omega_n t + inx),$$

где $\omega_n = dn^2$, $y = x + 2dnt$, переводит уравнение (2.1) в то же самое уравнение для функции $w(t, y)$, где функция $w(t, y)$ по переменной y имеет период 2π . Такая задача для $w(t, y)$, естественно, имеет решение $w_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$, которому соответствует уже семейство t периодических решений $u_n(t, x)$ (см. (3.1), (3.2)) основной краевой задачи (2.1), (2.2). Поэтому для изучения вопроса об устойчивости решений $u_n(t, x)$ достаточно рассмотреть соответствующий вопрос для одного представителя этого семейства: $u_0(t, x) = u_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$. Далее вместо σ_0 будем писать просто σ . Иначе, рассмотрим вопрос об устойчивости пространственно однородного решения $u_0(t)$.

В краевой задаче (2.1), (2.2) положим

$$(3.3) \quad u(t, x) = u_0(t)(1 + v(t, x)) = \exp(i\sigma t)(1 + v(t, x)).$$

Замена (3.3) позволяет получить новую краевую задачу для функции $v(t, x)$

$$(3.4) \quad v_t = -(b_1 + ic_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (v + \bar{v}) dx - (b + ic)(v + \bar{v}) - idv_{xx} + F_2(v) + F_3(v),$$

$$(3.5) \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x),$$

где

$$F_2(v) = -(b_1 + ic_1) \frac{1}{2\pi} \left[v \int_{-\pi}^{\pi} (v + \bar{v}) dx + \int_{-\pi}^{\pi} v \bar{v} dx \right] - (b + ic)(2v\bar{v} + v^2),$$

$$F_3(v) = -(b_1 + ic_1) \frac{1}{2\pi} v \int_{-\pi}^{\pi} |v|^2 dx - (b + ic)v^2\bar{v}.$$

Теперь у краевой задачи (3.4), (3.5) анализу подлежит вопрос об устойчивости нулевого решения. Для этого можно рассмотреть линеаризованный ее вариант

$$(3.6) \quad v_t = Av, \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x),$$

где

$$Av = -(b_1 + ic_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (v + \bar{v}) dx - (b + ic)(v + \bar{v}) - idv_{xx}.$$

В свою очередь, устойчивость решений линейной краевой задачи (3.6) можно свести к аналогичному вопросу для следующей краевой задачи:

$$(3.7) \quad w_t = Bw, \quad w(t, x + 2\pi) = w(t, x),$$

где

$$w = w(t, x) = colon(w_1, w_2), \quad w_1 = Re v(t, x), \quad w_2 = Im v(t, x),$$

$$Bw = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_1 dx - 2bw_1 + dw_{2xx} \\ -\frac{c_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_1 dx - 2cw_1 - dw_{1xx} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вопрос об устойчивости решений линейной краевой задачи (3.7) может быть сведен к анализу расположений точек спектра линейного дифференциального оператора Bf , где $f = f(x) = colon(f_1(x), f_2(x))$, определенного на достаточно гладких 2π периодических вектор-функциях $f(x)$. Собственные элементы такого линейного оператора следует искать в виде

$$h_k(x) = h_k \exp(ikx), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad h_k = colon(q_1, q_2),$$

где $q_1, q_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, так как семейство функций $\{\exp(ikx)\}$ формирует полную ортогональную систему функций в $L_2(-\pi, \pi)$. В свою очередь, соответствующие собственные значения λ_k определяются как собственные значения счетного семейства матрицы

$$B_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2(c_1 + c) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} -2b & -dk^2 \\ -2c + dk^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Элементарные вычисления показывают, что $\lambda_{0,1} = 0$, $\lambda_{0,2} = -2$, а остальные λ_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) находятся как корни характеристических уравнений

$$\lambda_k^2 + 2b\lambda_k + q_k = 0, \quad q_k = dk^2(dk^2 - 2c).$$

Лемма 2. Пусть $d - 2c > 0$, тогда все корни семейства характеристических уравнений для λ_k лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda_k \leq -b + \sqrt{b^2 - d(d - 2c)} < 0$, т.е. величиной, не зависящей от $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. При $d - 2c < 0$ есть собственные значения, лежащие в правой полуплоскости комплексной плоскости. Наконец, при $d = 2c$ получаем $\lambda_{1,1} = \lambda_{-1,1} = 0$ ($\lambda_{1,2} = \lambda_{-1,2} = -b$).

Из леммы 2 и полноты системы собственных функций вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть $d > 2c$, тогда решение $u_0(t)$ устойчиво (цикл, порождаемый этим решением, орбитально асимптотически устойчив). При $d < 2c$ периодическое решение $u_0(t)$ неустойчиво.

Отметим, что вместе с решением $u_0(t)$ краевая задача (2.1), (2.2) имеет семейство решений $u_0(t + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Этим объясняется наличие в спектре устойчивости при всех значениях параметров у оператора $A(B)$ собственного числа $\lambda_{0,1} = 0$.

При $d = 2c$ возникает критический случай в задаче об устойчивости пространственно однородного цикла. Нетрудно проверить, что линейный дифференциальный оператор

$$A_0 f = -2icf'' - (b_1 + ic_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f + \bar{f}) dx - (b + ic)(f + \bar{f})$$

имеет трехкратное нулевое собственное число. Ему отвечают собственные функции

$$h_0(x) = i, \quad h_1(x) = (-c + ib) \cos x, \quad h_2(x) = (-c + ib) \sin x.$$

В разделе 4 рассмотрим вопрос о локальных бифуркациях от пространственно однородного цикла, порожденного периодическим решением $u_0(t) = \exp(i\sigma t)$ при

$$d = 2c - \nu\varepsilon, \quad \nu = \pm 1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon_0 < 1,$$

где ν будет выбрано далее. При этом здесь представляют интерес те решения краевой задачи (2.1), (2.2), которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к циклу $u_0(t)$. Вспомним, что наряду с периодическим решением $u_0(t)$ краевая задача (2.1), (2.2) имеет решение

$$u_0(t + \alpha) = \exp(i\sigma t) \exp(i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, можно и целесообразно вместо замены (3.3) выполнить замену

$$(3.8) \quad u(t, x) = \exp(i\sigma t) \exp(i\psi) [1 + v(t, x)],$$

где $\psi = \psi(t, \varepsilon)$ и подходящую функцию $\psi(t, \varepsilon)$ со значениями в $\mathbb{R}$ выберем в ходе бифуркационного анализа. В результате замены (3.8) для $v(t, x)$ получим нелинейную краевую задачу, подобную краевой задаче (3.4), (3.5)

$$(3.9) \quad v_t = A(\varepsilon)v + F_2(v) + F_3(v) - i\psi_t(1 + v),$$

$$(3.10) \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x),$$

где

$$A(\varepsilon)v = A_0v + \nu\varepsilon A_1v,$$

$$A_0v = -2icv_{xx} - (b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (v + \bar{v})dx - (b + ic)(v + \bar{v}),$$

$$A_1v = iv_{xx}.$$

Нелинейные слагаемые $F_2(v), F_3(v)$ были указаны ранее.

4. Вспомогательная бифуркационная задача

Пусть $v(0, x) = f(x) \in H_2$. Если при этом $f(x)$ — четная функция, то такое подпространство H_2 обозначим через $H_{2,ev}$. В силу специфики структуры правой части уравнения (3.9) подпространство $H_{2,ev}$ инвариантно для решений краевой задачи (3.9), (3.10). Поэтому можно добавить еще одно условие

$$(4.1) \quad v(t, -x) = v(t, x).$$

При этом любое решение краевой задачи (3.9), (3.10), (4.1) будет решением более общей задачи (3.9), (3.10). Следовательно, можно и полезно сначала изучить вспомогательную краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1). В свою очередь, краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1) можно и естественно заменить на краевую задачу следующего вида:

$$(4.2) \quad v_t = A_0v + \varepsilon\nu A_1v + F_2(v) + F_3(v) - i\psi_t(1 + v),$$

$$(4.3) \quad v_x(t, 0) = v_x(t, \pi) = 0,$$

где теперь

$$A_0v = -2icv_x - (b_1 + ic_1)\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (v + \bar{v})dx - (b + ic)(v + \bar{v}), \quad A_1v = iv_{xx},$$

$$F_2(v) = -\frac{1}{\pi}(b_1 + ic_1) \left[v \int_0^{\pi} (v + \bar{v})dx + \int_0^{\pi} v\bar{v}dx \right] - (b + ic) \left[2v\bar{v} + v^2 \right],$$

$$F_3(v) = -\frac{1}{\pi}(b_1 + ic_1)v \int_0^{\pi} v\bar{v}dx - (b + ic)v^2\bar{v}.$$

Приступим к анализу краевой задачи (4.2), (4.3). При ее анализе следует учесть, что линейный оператор A_0 имеет двукратное нулевое собственное число (нулевому собственному числу отвечают две собственные функции $i, (-c + ib) \cos x$).

При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уже реализуется случай, близкий к критическому, двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Следовательно, в окрестности нулевого состояния равновесия вспомогательной краевой задачи существует двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$ [20–22], которое часто называют центральным. Анализ локальной динамики решений краевой задачи (4.2), (4.3), как известно [21–23], может быть, сведен к анализу системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4.4) \quad \psi_t = G_0(\psi, z, \varepsilon), \quad z_t = G_1(\psi, z, \varepsilon),$$

где $G_0(\psi, z, \varepsilon)$, $G_1(\psi, z, \varepsilon)$ — достаточно гладкие функции, которые в данном случае обладают рядом свойств:

$$1) G_0(\psi, 0, \varepsilon) = G_1(\psi, 0, \varepsilon) = 0;$$

$$2) G_0(\psi, z, 0) = G_1(\psi, z, 0) = 0;$$

3) обе эти функции не зависят от ψ , так как в равенстве (3.8) можно ψ заменить на $\psi + \alpha$, где α — любая действительная постоянная, и получить то же самое вспомогательное уравнение для $\psi + \alpha$.

Эти замечания позволяют считать, что еще до детального определения правых частей системы (4.4) можно считать, что $G_0 = \varepsilon g_0(z, \varepsilon)$, $G_1 = \varepsilon g_1(z, \varepsilon)$, где по-прежнему $g_0(z, \varepsilon)$, $g_1(z, \varepsilon)$ — достаточно гладкие функции, для которых выполнены тождества $g_0(0, \varepsilon) = 0$, $g_1(0, \varepsilon) = 0$. Система дифференциальных уравнений (4.4) играет во многом определяющую роль. В качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений ее обычно называют нормальной формой Пуанкаре (Пуанкаре–Дюлака) [22, 23]. Ее конкретный вид будет определен далее в процессе реализации алгоритма, который является развитием известного алгоритма Крылова–Боголюбова на случай бесконечномерных динамических систем (см., например, [9]).

Отметим также, что в ситуации общего положения достаточно определить укороченный вариант правых частей нормальной формы (4.4). Такой вариант нормальной формы получил название укороченной нормальной формы (“truncated” normal form) [22]. Вместо системы (4.4) далее будет рассматриваться следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(4.5) \quad \psi_t = \varepsilon q_0(z), \quad z_t = \varepsilon q_1(z), \quad q_0(z) = g_0(z, 0), \quad q_1(z) = g_1(z, 0).$$

Перейдем к изложению алгоритма построения нормальной формы. Решения краевой задачи (4.2), (4.3), принадлежащие $V_2(\varepsilon)$, можно и целесообразно искать в виде

$$(4.6) \quad v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(x, z) + \varepsilon w_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} w_3(x, z) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $z = z(t)$ — одна из компонент нормальной формы. Положим также

$$w_1(x, z) = (-c + ib)z \cos x,$$

т.е. $A_0 w_1 = 0$. Если теперь подставить сумму (4.6) в нелинейную краевую задачу (4.2), (4.3) с последующим приравнованием членов при ε и $\varepsilon^{3/2}$, то получим уже две линейные неоднородные краевые задачи для определения $w_2(x, z)$, $w_3(x, z)$

$$(4.7) \quad w_{2t} = A_0 w_2 + F_2(w_1) - iq_0(z),$$

$$(4.8) \quad w_{2x}(t, 0) = w_{2x}(t, \pi) = 0,$$

$$(4.9) \quad w_{3t} = A_0 w_3 - q_1(z)(-c + ib) \cos x + F_2(w_1, w_2) + F_3(w_1) - iq_0(z)w_1 + \nu A_1 w_1,$$

$$(4.10) \quad w_{3x}(t, 0) = w_{3x}(t, \pi) = 0.$$

Отметим, что выше

$$\begin{aligned} F_2(w_1) &= -(b_1 + ic_1) \frac{1}{\pi} \left[w_1 \int_0^\pi (w_1 + \bar{w}_1) dx + \int_0^\pi w_1 \bar{w}_1 dx \right] - (b + ic) [2w_1 \bar{w}_1 + w_1^2], \\ F_3(w_1) &= -(b_1 + ic_1) w_1 \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi w_1 \bar{w}_1 dx \right] - (b + ic) w_1^2 \bar{w}_1, \\ F_2(w_1, w_2) &= -(b_1 + ic_1) \frac{1}{\pi} \left[w_1 \int_0^\pi (w_2 + \bar{w}_2) dx + w_2 \int_0^\pi (w_1 + \bar{w}_1) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi (w_1 \bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2) dx \right] - 2(b + ic) [w_1 \bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2 + w_1 w_2]. \end{aligned}$$

При формировании краевых задач (4.7), (4.8) и (4.9), (4.10) производные по переменной t от функций w_1, w_2, w_3 вычислялись в силу нормальной формы (4.5).

Из условий разрешимости краевой задачи (4.7), (4.8) в классе функций, явным образом не зависящих от t , определяем, что

$$q_0(z) = [c(b^2 + (2b - 1)c^2) + 2bc^2 c_1] z^2,$$

а соответствующее решение можно выбрать в следующем виде:

$$w_2(x, z) = \left[-bc^2 - \frac{b^2 + c^2}{4} \right] z^2 + \left[\frac{3c^2 - b^2}{12} - i \frac{b(9c^2 + b^2)}{24c} \right] z^2 \cos 2x.$$

Условия разрешимости неоднородной краевой задачи (4.9), (4.10) позволяют найти

$$q_1(z) = \frac{1}{b} (\nu c - l z^2) z,$$

где

$$l = \frac{2(12b + 3)c^4 - 9b^2c^2 + b^4}{6}.$$

Подчеркнем, что $l > 0$ при всех $c \in \mathbb{R}$, если $b \in (0, 59; 1]$. Случай $l \leq 0$ реализуется редко и требует отдельного анализа. Далее $l > 0$.

Рассмотрим теперь второе уравнение нормальной формы (4.5), т.е. уравнение

$$(4.11) \quad z_t = \frac{\varepsilon}{b}(\nu c - lz^2)z.$$

Лемма 3. Обыкновенное дифференциальное уравнение (4.11) имеет три состояния равновесия

$$S_0 : z = 0; \quad S_{\pm} : z(t) = \eta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\nu c}{l}},$$

если $\nu > 0$ (в данном случае $c > 0$). При этом S_0 неустойчиво, $S_{\pm}$ асимптотически (экспоненциально) устойчивы.

Доказательство леммы 3 стандартно.

Из результатов работ [24–27] вытекает, что для вспомогательной краевой задачи (4.2), (4.3) справедливо утверждение.

Теорема 2. Существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому ненулевому состоянию равновесия $S_{\pm}$ обыкновенного дифференциального уравнения (4.11) соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия

$$(4.12) \quad \begin{aligned} S_{\pm}(\varepsilon) : v_{\pm}(x, \varepsilon) = & \varepsilon^{1/2} \eta_{\pm}(-c + ib) \cos x + \\ & + \varepsilon \eta_{\pm}^2 \left[-bc^2 - \frac{b^2 + c^2}{4} + \left(\frac{3c^2 - b^2}{12} - i \frac{b(9c^2 + b^2)}{24c} \right) \cos 2x \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Эти оба состояния равновесия устойчивы в норме фазового пространства решений вспомогательной краевой задачи (4.2), (4.3).

Отметим, что в данном случае $c \neq 0$ ($c > 0$). При $c = 0$ все одномодовые периодические решения устойчивы и, следовательно, необходимые условия в задаче о локальных бифуркациях не выполнены.

5. Результаты для основной краевой задачи

Полученные результаты в предыдущем разделе автоматически переносятся на краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1), т.е. когда дополнительно предполагается четность относительно x функции $v(t, x)$. Вместе с тем решения краевой задачи (3.9), (3.10) трансляционно инвариантны, т.е. замена $x \rightarrow x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ переводит одно решение краевой задачи (3.9), (3.10) в другое. В частности, решения $v_{\pm}(x, \varepsilon)$, указанные в рамках теоремы 2, будут решениями краевой задачи (3.9), (3.10). Итак, справедливо утверждение.

Теорема 3. Существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная краевая задача (3.9), (3.10) имеет одномерное притягивающее многообразие $V_1(\alpha, \varepsilon)$, сформированное однопараметрическим семейством состояний равновесия

$$(5.1) \quad v(x, \varepsilon, \alpha) = v_+(x + \alpha, \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где для $v_+(x, \varepsilon)$ приведена асимптотическая формула (4.12).

Отметим, что в последней теореме использовано решение $v_+(x, \varepsilon)$ из теоремы 2. В (5.1) можно в правой части взять $v_-(x, \varepsilon)$, т.е. положить

$$v(x, \varepsilon, \beta) = v_-(x + \beta, \varepsilon),$$

но замена $\beta = \alpha + \pi$ приводит к описанию того же однопараметрического семейства.

Основным следствием из теорем 2, 3 является следующая теорема – основной результат при анализе краевой задачи (2.1), (2.2) в случае, если $b > 0$ ($b \in (0, 1]$), $c > 0$.

Теорема 4. При всех ε , указанных в рамках теорем 2, 3 и $d = 2c - \nu\varepsilon$, краевая задача (2.1), (2.2) при каждом целом n имеет двухпараметрическое семейство устойчивых предельных циклов

$$(5.2) \quad u(t, x, \varepsilon, n) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\omega_n t + i\beta_n) \left[1 + v_+(x + \alpha_n, \varepsilon) \right],$$

где

$$\omega_n(\varepsilon) = \omega(\varepsilon) = \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon), \quad \omega_0 = \left[c(b^2 + (2b - 1)c^2) + 2bc^2c_1 \right] \frac{c\nu}{l},$$

а функция $v_+(x, \varepsilon)$ была указана ранее, α_n, β_n – произвольные действительные постоянные.

Замечание 1. Теорема 4 сформулирована при положительных c ($d = 2c - \varepsilon$, $\nu = 1$). Если $c < 0$, то будет иметь место аналогичная теорема, но при этом $d = 2c + \varepsilon$, $\nu = -1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В рамках доказательства ν следует заменить на $-\nu$.

Особый случай возникает, если $b = 0$, т.е. $b_1 = 1$ ($b_1 = 1 - b$). Понятно, что семейство решений (3.1) существует. Все решения семейства (3.1) в ситуации общего положения будут по t периодическими функциями. Если $dn^2 - (c_1 + c) = 0$ при некоторых $\pm k$, то эти два решения из указанного семейства будут уже состояниями равновесия. При анализе устойчивости решений (3.1) (если $b = 0$) получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + q_k = 0, \quad q_k = dk^2(dk^2 - 2c)$$

и при любом выборе c , если постоянная k^2 достаточно велика, спектр устойчивости содержит счетный набор корней вида $\pm i\omega$, т.е. реализуется критический случай в задаче об устойчивости этих решений с бесконечномерным вырождением или эти решения заведомо неустойчивы. Подчеркнем, что, если

$$d > 0, \quad d - 2c < 0 \quad \text{или} \quad d < 0, \quad d - 2c > 0,$$

то решения семейства (3.1) будут неустойчивыми.

При $b = c = 0$ возникает особый вариант при анализе краевой задачи (2.1), (2.2), который может быть изучен с использованием другого подхода.

6. Нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау в специальном случае

В этом разделе рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$(6.1) \quad u_t = u - (1 + ic_1)uV(u) - idu_{xx},$$

$$(6.2) \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x),$$

которую дополним начальным условием

$$(6.3) \quad u(0, x) = f(x).$$

Здесь $d, c_1 \in \mathbb{R}$, $V(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx$, $f(x)$ — комплекснозначная 2π периодическая функция, принадлежащая при $x \in [-\pi, \pi]$ пространству Соболева $W_2^2[-\pi, \pi]$. В иных терминах $f(x) \in H_2$.

Решение смешанной задачи (6.1)–(6.3) можно записать в виде ряда

$$(6.4) \quad u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) \exp(inx).$$

Из равенства Парсеваля заключаем, что

$$V(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2.$$

Следовательно, коэффициенты ряда (6.4) можно находить как решения задачи Коши счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(6.5) \quad \dot{u}_n = a_n u_n - (1 + ic_1) u_n V,$$

$$(6.6) \quad u_n(0) = f_n,$$

где $u_n(t)$ — комплекснозначная функция t , $a_n = 1 + idn^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Как и ранее, $V(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2$, $f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) dx$. Подчеркнем, что $\{f_n\} \subset l_{2,2}$, т.е. последовательность $\{f_n\}$ принадлежит гильбертову пространству бесконечных последовательностей, для которых сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 |f_n|^2$. Наконец, при тех t , когда решение задачи Коши (6.5), (6.6) существует, компоненты $\{u_n(t)\}$ таковы, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 |u_n(t)|^2 < \infty$.

Как известно, $l_{2,2}$ следует интерпретировать как дискретный аналог пространства Соболева H_2 . Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_*, \mathbb{Z}_0$ — подмножества $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}_* \cup \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$. Рассмотрим подпространство $l_{2,2,0}$, состоящее из тех $\{u_n\} \in l_{2,2}$, для которых $u_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_0$. Очевидно, что линейное подпространство $l_{2,2,0}$ инвариантно для решений задачи (6.5), (6.6) в обычном смысле, т.е. если $f_k = 0$, то $u_k(t) = 0$ при всех рассматриваемых k .

Последнее замечание позволяет считать сначала, что $f_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, т.е. рассматривается “общий” случай. В частности, $u_n(t) \neq 0$ ни при одном n , если $t \in I$ — интервалу существования решений. Положим в таком случае

$$u_n(t) = \rho_n(t) \exp(i\varphi_n(t))$$

и вместо задачи (6.5), (6.6) получим две следующие вспомогательные задачи Коши:

$$(6.7) \quad \dot{\rho}_n = \rho_n - \rho_n V(\rho), \quad \rho_n(0) = r_n = |f_n|,$$

$$(6.8) \quad \dot{\varphi}_n = dn^2 - c_1 V(\rho), \quad \varphi_n(0) = \psi_n,$$

где $V(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k^2$, $\psi_n = \arg f_n$. Подчеркнем, что задачу Коши (6.7) можно изучить отдельно, а затем найти решения задачи Коши (6.8).

Если уравнение с номером m ($m \in \mathbb{Z}$) умножить на ρ_0 , а уравнение с номером 0 умножить на ρ_m , то после почленного вычитания получаем равенство

$$\dot{\rho}_m \rho_0 - \dot{\rho}_0 \rho_m = 0.$$

Итак, $\rho_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right) = 0$. Следовательно, $\rho_m(t) = r_m \rho_0(t) / r_0$. В результате получим уравнение для определения $\rho_0(t)$

$$(6.9) \quad \dot{\rho}_0 = \rho_0 - \rho_0^3 \beta,$$

где $\beta = \frac{1}{r_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2$. Подчеркнем, что ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2$ сходится в силу предположения о включении $\{f_n\}$ в $l_{2,2}$. Интегрируя уравнение Бернулли (6.9) с учетом начального условия $\rho_0(0) = r_0$, получаем, что

$$\rho_0(t) = r_0 \frac{\exp(t)}{\sqrt{1 + Q(\exp(2t) - 1)}}, \quad Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2.$$

Поэтому

$$\rho_m(t) = r_m \frac{\exp(t)}{\sqrt{1 + Q(\exp(2t) - 1)}}, \quad \rho_m(0) = r_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, решение смешанной начально-краевой задачи (6.1)–(6.3) имеет вид

$$(6.10) \quad u(t, x) = V_0(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma_m(t)) r_m \exp(imx),$$

где

$$\sigma_m(t) = dm^2 t - \frac{c_1}{2} \ln(1 + Q(\exp(2t) - 1)) + \psi_m,$$

$$V_0(t) = \exp(t) \left[1 + Q(\exp(2t) - 1) \right]^{-1/2}.$$

Добавим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} V_0(t) = (1/Q^{1/2})$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_m(t) = (r_m/Q^{1/2})$. Отметим, что функцию (6.10) можно записать в виде

$$(6.11) \quad u(t, x) = V_0(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(i\varphi_k(t)) \exp(ikx),$$

где

$$\varphi_k(t) = dk^2 t - c_1 \ln(1 + Q(\exp(2t) - 1))/2.$$

При этом учтено, что $r_k \exp(i\psi_k) = f_k$.

Замечание 2. Формула (6.10) была выведена в предположении, что все $r_m = |f_m| \neq 0$. Если же оказалось, что $r_k = 0$ при $k \in \mathbb{Z}_0$ (некоторому подмножеству $\mathbb{Z}$), то полученную формулу следует модифицировать и суммирование в ней следует вести по тем m , которые принадлежат $\mathbb{Z}_*$, т.е. в правой части остаются только те номера n , для которых соответствующий $r_n \neq 0$.

Из предыдущих построений вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 5. Пусть $f(x) \in H_2$, тогда начально-краевая задача (6.1)–(6.3) имеет решение при всех $t \geq 0$ (см. (6.11)). При этом при всех $t \geq 0$ функция $u(t, x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) она непрерывна по совокупности переменных;
- 2) при любом $t_0 \geq 0$ функции одного переменного $u_t(t_0, x), u_{xx}(t_0, x) \in L_2(-\pi, \pi)$;
- 3) $u_x(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных;
- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = f(x)$ в смысле нормы пространства H_2 .

Проверка свойств опирается на изучение сходимости ряда в правой части (6.11), а также того обстоятельства, что в данном случае ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^4 r_m^2 < \infty$.

Теорема 6. Начально краевая задача (6.1)–(6.3) имеет инвариантное многообразие V_∞ , выделяемое условием $f(x) \in V_\infty$, если

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 1, \quad f(x) \in H_2.$$

Все решения начально краевой задачи (6.1)–(6.3) с начальными условиями, не принадлежащими к V_∞ , с течением времени приближаются к этому многообразию.

Многообразие V_∞ имеет размерность, равную бесконечности ($\dim V_\infty = \infty$), и является глобальным аттрактором.

Доказательство теоремы 6 основано на анализе формулы (6.10). Действительно, если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1$, то $V_0(t) = 1$ и правая часть равенства (6.10) упрощается,

$$u_\infty(t, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m \exp(i(dm^2 t - c_1 t + \psi_m)) \exp(imx)$$

и, конечно, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx = 1$ уже при всех t ($\psi_m = \varphi_m(0)$).

Наконец, при $t \rightarrow \infty$ функция в правой части (6.10) приближается к функции

$$u_*(t, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{r_m}{Q^{1/2}} \exp(i(dm^2 t - c_1 t + \delta_m)) \exp(imx),$$

где $\delta_m = -c_1(\ln Q)/2 + \arg(f_m)$, $Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2$, где уже $u_*(t, x)$ является решением, принадлежащим V_{∞} . Подчеркнем, что приближение следует понимать в смысле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x) - u_*(t, x)\|_{H_2} = 0.$$

Следствием из последних утверждений является утверждение.

Следствие 1. Решения краевой задачи (6.1), (6.2), принадлежащие V_{∞} , можно записать в виде

$$(6.12) \quad u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i(dn^2 - c_1)t) \exp(inx),$$

где $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1$. Все эти решения устойчивы в смысле определения Ляпунова в метрике фазового пространства решений краевой задачи (6.1), (6.2), т.е. H_k .

Каждое решение семейства (6.12) является бесконечной суммой слагаемых вида $f_n \exp(i\sigma_n t) \exp(inx)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = dn^2 - c_1$, где любое такое слагаемое будет периодической функцией периода $2\pi/\sigma_n$ (или не зависит от t , если при некотором $n = k$ оказалось, что $\sigma_k = 0$). Но, с другой стороны, частоты σ_n (периоды $T_n = 2\pi/\sigma_n$) в ситуации общего положения несоизмеримы и, следовательно, решение $u(t, x)$, принадлежащее V_{∞} , будет квазипериодической функцией. Конечно, существует вариант, когда все решения (6.12) будут t -периодическими функциями. Например, если $c_1 = 0$.

7. Заключение

В работе рассмотрены два основных варианта постановки периодической краевой задачи для нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау в слабодиссипативном варианте, когда коэффициент при u_{xx} чисто мнимый.

Если $b, c \neq 0$, то краевая задача (2.1), (2.2) имеет счетный набор периодических решений вида (3.1). При этом дан ответ об их устойчивости и изучен вопрос об их локальных бифуркациях. Подчеркнем, что в данной ситуации он мало отличается от ответа на аналогичный вопрос для краевой задачи (2.1), (2.2) при $b_1 = c_1 = 0$, т.е. для относительно традиционного варианта уравнения Гинзбурга–Ландау, а именно уравнения вида

$$u_t = u - (b + ic)u|u|^2 - idu_{xx},$$

где $b > 0$, $d \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Иная ситуация при анализе уравнения (2.1) возникает, если $b_1 > 0$ ($b_1 = 1$), но $b = c = 0$. Тогда, как уже отмечалось, краевая задача (2.1), (2.2) имеет глобальный аттрактор V_∞ ($\dim V_\infty = \infty$). Решения $u(t, x) \in V_\infty$, конечно, при всех $t \geq 0$ принадлежат H_2 , но нормы их в H_2 как функций, зависящих от x при всех рассматриваемых t , могут быть велики, хотя их нормы в $L_2(-\pi, \pi)$ фиксированы и равны $\sqrt{2\pi}$. Действительно, пусть в начальной краевой задаче (6.1)–(6.3) $f(x) \in H_2$ и $f(x) \in V_\infty$, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi$. В качестве примера возьмем $f(x) = \exp(imx)$. Тогда ей соответствует решение $u(t, x) = \exp(i\sigma_m t) \exp(imx)$, где $\sigma_m = dm^2 - c_1$. При любом t это решение как функция x имеет норму $|u(t, x)|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, т.е. принадлежит V_∞ . Однако, $|u_{xx}(t, x)|_{L_2}^2 = 2\pi m^4$, т.е. стремится к бесконечности. Это же замечание справедливо и для кинетической энергии, которая пропорциональна $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |u_t|^2 dx = \pi \sigma_m^2 = \pi (dm^2 - c_1)^2 \rightarrow \infty$, если $m \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aranson I.S., Kramer L.* The World of the Complex Ginzburg-Landau Equation // Rev. Modern. Phys. 2002. V. 74. P. 99–143.
2. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the Formation of Dissipative Structures in Reaction-Diffusion Systems // Prog. Ther. Phys. 1975. V. 54. No. 3. P. 687–699.
3. *Bartucelli M., Constantin P., Doering C.R., Gibbon J.D., Gisselalt M.* On the Possibility of Soft and Hard Turbulence in the Complex Ginzburg-Landau Equation // Phys. D. 1990. V. 44. No. 3. P. 421–444.
4. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
5. *Kulikov A.N., Rudy A.S.* States of Equilibrium of Considered Matter with Ginzburg-Landau ψ^4 -Model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
6. *Kulikov A.* Bifurcation d'Andronov-Hopf et Systems d'Equation aux derivees partielles singulieres de type parabolique // Caher Mathematiques. 1988. Fasc. 1. P. 57–60.
7. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. John Wiley and Sons Inc., 1974
8. *Scheuer J., Malomed B.A.* Stable and Chaotic Solutions of the Complex Ginsburg-Landau Equation with Periodic Boundary Conditions // Physica D. 2002. V. 161. No. 1. P. 102–115.
9. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравн. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
10. *Drazin P.G.* Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge. Cambridge Univ. Press, 2002.
11. *Sobolevskii P.E.* Equations of a Parabolic Type in a Banach Space // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1961. V. 10. P. 297–350.
12. *Segal I.* Nonlinear Semigroups // Ann. Math. 1963. V. 78. No. 2. P. 339–364.
13. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Тр. ММО. 1970. Т. 23. С. 37–60.

Yakubov S.Ya. Solvability of the Cauchy Problem for Abstract Second Order Hyperbolic Equations, and Their Applications // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1970. V. 23. P. 37–60.

14. *Duan J., Hung V.L., Titi E.S.* The Effect of Nonlocal Interactions on the Dynamics of the Ginzburg–Landau Equation // *ZAMP*. 1996. V. 47. No. 3. P. 432–455.
15. *Matkowsky B.J., Volpert V.A.* Coupled Nonlocal Complex Ginzburg–Landau Equations in Gasless Combustion // *Physica D*. 1992. V. 54. No. 3. P. 203–219.
16. *Elmer F.J.* Nonlinear and Nonlocal Dynamics of Spatially Extended Systems: Stationary States, Bifurcations and Stability // *Physica D*. 1988. V. 30. No. 3. P. 321–341.
17. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // *ДАН*. 2017. Т. 472. № 6. С. 627–630.
Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Attractors in the Filtration Models // *Dokl. Ross. Akad. Nauk*. 2017. V. 472. No. 6. P. 627–630.
18. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact Geometry and Non-Linear Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
19. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1959.
20. *Куликов А.Н.* Интегральные многообразия гиперболических уравнений в случае близком к критическому пары чисто мнимых собственных значений // *Вестн. Яросл. ун-та*. 1975. В. 13. С. 94–117.
21. *Marsden J., McCracken M.* Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1982.
22. *Guckenheimer J., Holmes P.J.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
23. *Chow S.-N., Li C., Wang D.* Normal forms and bifurcations of planar vector fields. Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1994.
24. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // *Дифференц. уравн.* 2003. Т. 39. № 5. С. 584–601.
25. *Куликов А.Н.* О бифуркациях инвариантных торов // *Межвузовский мат. сборник “Исследования по устойчивости и теории колебаний”*. 1983. С. 112–117.
26. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2003.
27. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 04.03.2020

После доработки 05.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.com),
А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ДИАГНОСТИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ¹

Рассматривается задача диагностирования динамических систем, описываемых моделями в виде нелинейных дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами (параметрами системы). Для решения задачи применяется непараметрический метод диагностирования, позволяющий исключить влияние неизвестных коэффициентов уравнений на результаты диагностирования. Приводится изложение сути непараметрического метода. Предлагается новый метод принятия решений о наличии и виде дефекта, учитывающий ошибки модели, неконтролируемые возмущающие воздействия, а также шумы измерений. Отличительной особенностью этого метода является комплексное сочетание метода пороговой логики принятия решения и сопоставление сигнала рассогласования (невязки) с формируемыми в процессе диагностирования сигнатурами дефектов.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, диагностирование, робастность, непараметрический метод.

DOI: 10.31857/S0005231021020070

1. Введение

Современные технические системы ответственного назначения характеризуются значительной сложностью, что не позволяет гарантировать безотказность их функционирования. В связи с этим возникает задача обеспечения отказоустойчивости подобных систем. Решение последней задачи предполагает, во-первых, диагностирование (обнаружение и локализацию дефектов) и, во-вторых, парирование выявленных дефектов. Настоящая статья концентрируется на проблеме обнаружения и локализации (поиска) дефектов.

Решение задачи диагностирования осуществляется в рамках концепции аналитической избыточности [1]. Суть этой концепции состоит в предположении о существовании аналитических зависимостей между входами и выходами диагностируемой системы, измеряемыми на конечном интервале времени. Эти зависимости справедливы при исправном функционировании системы. Дефекты, возникающие в системе, приводят к их нарушению. Как следствие, задача диагностирования сводится к проверке известных аналитических зависимостей посредством соответствующей обработки (в рамках скользящего временного окна определенной размерности) входов и выходов системы.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-19-00046-П.

Реализация концепции аналитической избыточности предполагает два этапа диагностирования. На первом этапе формируется невязка как сигнал рассогласования между поведением имеющейся эталонной модели, используемой для нахождения аналитических зависимостей, и реальным поведением системы. На втором этапе осуществляется анализ невязки с целью обнаружения дефектов в системе и определения вида дефекта.

Выделяют два принципиально различных подхода к синтезу генератора невязки. Первый подход, предполагающий формирование генератора невязки с замкнутой петлей обратной связи, приводит к использованию наблюдателей состояния, разрабатываемых с учетом специфических требований, предъявляемых задачами диагностирования [2–4]. Достоинством этого подхода является то, что, помимо собственно генерации невязки, он позволяет также решить задачу оценивания состояния системы. Последнее может быть важно для решения различных задач управления в условиях ограниченного наблюдения состояния системы.

При использовании второго подхода осуществляется синтез генератора невязки с разомкнутой петлей обратной связи. Использование второго подхода не позволяет одновременно получать оценки состояния системы, но упрощает задачу обеспечения устойчивости невязки. По своим динамическим характеристикам формируемая невязка аналогична невязке, получаемой с использованием наблюдателя состояния, имеющего конечный отклик на начальное рассогласование. Именно этот подход используется в настоящей статье.

Помимо дефектов, на невязку могут влиять дестабилизирующие факторы: ошибки эталонной модели, различные внешние неконтролируемые возмущающие воздействия, а также шумы измерений. Как следствие, возникает задача обеспечения робастности (нечувствительности принимаемого решения к дестабилизирующим факторам или крайне низкой чувствительности к этим факторам по сравнению с чувствительностью к дефектам). Задача обеспечения робастности рассматривалась в ряде работ [5–7]. Принято различать активные и пассивные методы обеспечения робастности. Первые работают на этапе формирования невязки и базируются на принципах адаптации, полной развязки и оптимизации, в то время как вторые используют специальные методы принятия решения. В частности, на этапе обнаружения дефектов широко используются методы пороговой логики принятия решения [5–7], в основе которых лежит сравнение некоторой нормы сигнала невязки с порогом; превышение нормой невязки порога рассматривается как факт возникновения дефекта в системе.

Традиционные активные методы обеспечения робастности имеют ряд ограничений, влияющих на возможность их практического применения [8]. Специальную группу активных методов составляют так называемые непараметрические методы, предложенные в [8] для систем с непрерывным временем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (линейными и нелинейными) и в [9] для систем с дискретным временем, описываемых нелинейными разностными уравнениями. Непараметрические методы позволяют частично снять ограничения традиционных активных методов; их отличительной особенностью является то, что они обеспечивают форми-

рование невязки, не чувствительной к значениям неизвестных постоянных коэффициентов уравнений (параметров системы). Однако присутствие дестабилизирующих факторов приводит к необходимости привлечения пассивных методов обеспечения робастности, обеспечивающих приемлемый компромисс между минимальной величиной гарантированно обнаруживаемых и локализуемых дефектов, с одной стороны, и отсутствием ложных тревог в силу действия дестабилизирующих факторов, с другой.

Для обеспечения подобного компромисса в известных работах предлагается использование адаптивного порога, величина которого устанавливается с учетом измеряемых сигналов системы [5]. Идея расчета адаптивного порога для нелинейных динамических систем была сформулирована в [10]. С использованием методов теории чувствительности эта идея была распространена в [7] на случай применения непараметрического метода диагностирования. В последней работе рассматривались структурированные возмущающие воздействия, входящие в описание эталонной модели в качестве дополнительных неизвестных входов. Для расчета порога в реальном времени за основу принималось выражение для матрицы чувствительности компонент вектора невязки к неизвестным входам, представляющим возмущающие воздействия. Поскольку точное вычисление этой матрицы не представлялось возможным в силу ее зависимости от компонент вектора состояния системы, не доступных для непосредственного измерения, было предложено в процессе вычисления порога использовать верхнюю граничную оценку нормы H_∞ матрицы чувствительности в пространстве Харди [11], определяемую для заданного диапазона изменения значений компонент вектора состояния системы и зависящую только от измеряемых входов и выходов системы. Недостатком этого решения является определенное завышение величины порога и, как следствие, занижение чувствительности к дефектам. Кроме того, модель структурированных возмущающих воздействий не всегда адекватно может отражать реальную практическую ситуацию.

Предлагаемое в настоящей статье решение позволяет устранить отмеченные недостатки. Его отличительной особенностью является то, что учет воздействия дестабилизирующих факторов и формирование адаптивного порога осуществляется посредством соответствующей обработки уже сформированного сигнала невязки. Это дает возможность упростить процедуру формирования адаптивного порога для принятия решения об отсутствии дефектов в системе, а также снизить величину этого порога, тем самым увеличив чувствительность к дефектам. При этом для принятия решения о наличии дефекта в системе и о виде этого дефекта дополнительно предполагается осуществлять сопоставление сигнала невязки с сигнатурами этих дефектов.

Для обеспечения единства изложения в рамках одной статьи класс рассматриваемых моделей динамических систем ограничивается моделями с непрерывным временем, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Распространение полученных результатов на класс моделей с дискретным временем, описываемых нелинейными разностными уравнениями, представляется возможным с использованием результатов [9].

2. Особенности генерации невязки непараметрическим методом

2.1. Используемые диагностические модели

Пусть диагностируемая система описывается моделью вида

$$(1) \quad dx(t)/dt = f(x(t), u(t), a), \quad y(t) = h(x(t), a),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$, $y(t) \in R^l$ – соответственно векторы состояния, входа (управления) и измеряемого выхода, $a \in R^m$ – вектор коэффициентов (параметров системы), в качестве своих компонент включающий: 1) постоянные коэффициенты модели, соответствующие точно не известным параметрам системы, и 2) коэффициенты, имеющие смысл отклонений значений определенных параметров системы от первоначальных постоянных значений и принимающие ненулевое значение только в случае возникновения дефектов, подлежащих обнаружению и локализации; для удобства вектор последних коэффициентов будем рассматривать как подвектор вектора a и обозначать как a^f .

Дополнительно будем предполагать, что дефект в системе приводит к внезапному или постепенному отклонению от нуля значения соответствующей компоненты вектора a^f (номер компоненты совпадает с номером дефекта). Будем также придерживаться гипотезы о существовании только однократных дефектов в системе.

Нелинейные векторные функции $f(*)$ и $h(*)$ описывают соответственно динамику системы и характеристики датчиков. Здесь и ниже символ “звездочка” используется вместо пропущенных с целью упрощения записи аргументов функций.

Отметим, что в модель (1) не включено описание дестабилизирующих факторов. Учет действия этих факторов будет осуществляться по результатам обработки вектора невязки, формируемого непосредственно в процессе диагностирования.

Синтез генератора невязки требует осуществления ряда дополнительных преобразований исходной модели (1). Рассмотрим их.

Сначала осуществляется переход от модели (1) к модели без внутренних обратных связей

$$(2) \quad \begin{aligned} dx^{(1)}(t)/dt &= f^{(1)}(y(t), u(t), a), \\ dx^{(2)}(t)/dt &= f^{(2)}(x^{(1)}(t), y(t), u(t), a), \\ &\vdots \\ dx^{(N)}(t)/dt &= f^{(N)}(x^{(N-1)}(t), x^{(N-2)}(t), \dots, x^{(1)}(t), y(t), u(t), a), \\ (3) \quad y_*(t) &= h_*(x^{(N)}(t), x^{(N-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), a). \end{aligned}$$

Динамика модели (2) разбита на N частей и $x^{(i)}(t)$ – вектор состояния i -й части. Каждая часть зависит от векторов входа и выхода системы, а также векторов состояния предыдущих частей. Вектор выхода модели (3) формируется

как некоторая функция от векторов состояния частей. Преобразование модели (1) к модели (2), (3) осуществляется в предположении о существовании функциональной связи между вектором состояния модели (1) и векторами состояния частей модели (2):

$$(4) \quad x^{(i)}(t) = \varphi^{(i)}(x(t)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

а также между векторами выхода моделей (1) и (3):

$$(5) \quad y_*(t) = \psi(y(t)),$$

где $\varphi^{(i)}(*)$, $1 \leq i \leq N$ и $\psi(*)$ – некоторые дифференцируемые векторные функции. Отметим, что решение задачи преобразования исходной модели (1) к модели (2), (3) было получено в [8] и развито в [7] на основе дифференциально-геометрического подхода [12]. Для удобства читателя краткое изложение этого результата приведено в Приложении.

На следующем этапе синтеза генератора невязки осуществляется переход от модели (2), (3) к вход-выходному описанию системы. Для осуществления такого перехода может потребоваться преобразование компонент функций $f^{(i)}(*)$, $1 \leq i \leq N$, и $h_*(*)$ к полиномиальному виду. Выполнение этого требования обеспечивается путем разложения функций более общего вида в ряд. Допускаемые при этом ошибки рассматриваются как ошибки модели. Особенности структуры модели (2), (3) и полиномиальное представление ее функций позволят гарантировать получение вход-выходного описания.

Рассмотрим особенности перехода. Для упрощения последующих записей введем оператор I в соответствии с условием

$$(6) \quad I \left(f^{(j)} \left(x^{(j-1)}(t), x^{(j-2)}(t), \dots, x^{(1)}(t), y(t), u(t), a \right) \right) = \\ = \int_{t_0}^t f^{(j)} \left(x^{(j-1)}(\tau), x^{(j-2)}(\tau), \dots, x^{(1)}(\tau), y(\tau), u(\tau), a \right) d\tau + x^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t).$$

В силу (6) можно записать

$$(7) \quad \begin{aligned} x^{(1)}(t) &= I \left(f^{(1)}(*) \right), \\ x^{(2)}(t) &= I \left(f^{(2)} \left(I \left(f^{(1)}(*) \right), y(t), u(t), a \right) \right), \\ &\vdots \\ x^{(N)}(t) &= I \left(f^{(N)} \left(I \left(f^{(N-1)}(*) \right), \dots, I \left(f^{(1)}(*) \right), y(t), u(t), a \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляя (7) в (3), учитывая (5) и осуществляя эквивалентные преобразования, можно окончательно перейти к вход-выходному описанию системы в следующем виде:

$$(8) \quad \psi(y(t)) = (A + A^f)W(t_0, t),$$

где $W(t_0, t)$ и A , A^f – соответственно вектор-столбец и матрицы такие, что: 1) элементами вектор-столбца $W(t_0, t)$ являются функционалы, зависящие от значений векторов входа и выхода системы, измеряемых на интервале времени $[t_0, t]$; 2) элементами матрицы A являются полиномы от компонент векторов постоянных коэффициентов a , не подверженных влиянию дефектов, и состояний частей модели (2) $x^{(j)}(t_0)$, $1 \leq j \leq N$, в некоторый “начальный” момент времени t_0 ; 3) элементами матрицы A^f являются полиномы от компонент вектора коэффициентов a^f и, возможно, других компонент вектора a и состояний частей модели. Для дальнейшего важно, что при отсутствии дефектов должно выполняться

$$(9) \quad A^f = 0.$$

С этой целью полиномиальные элементы матрицы A^f формируется таким образом, что каждый терм полиномов в качестве множителя включает хотя бы один коэффициент вектора a^f .

Модель (8) будем рассматривать как эталонную модель, используемую для нахождения аналитических зависимостей, проверка выполнения которых позволит осуществлять обнаружение и поиск дефектов.

2.2. Генерация невязки

Пусть $t_0, t_1, \dots, t_L$, где $t_i = t_0 + i\Delta t$, $1 \leq i \leq L$, – некоторые дискретные отсчеты времени и Δt – период выборки измерений значений входов и выходов системы. Выбор Δt определяется динамикой (быстродействием) диагностируемой системы и вычислительной мощностью средств, используемых для реализации процесса диагностирования. Чем меньше Δt , тем меньше будут временные затраты на обнаружение и определение вида дефекта.

С учетом (9) аналитические зависимости, связывающие входы и выходы исправной системы на интервале времени $T_L = [t_0, t_L]$ (в рамках размеров текущего скользящего временного окна), можно записать в виде

$$(10) \quad Y(t_L) = AV(t_L),$$

где матрицы

$$(11) \quad Y(t_L) = (\psi(y(t_1))\psi(y(t_2)) \dots \psi(y(t_L))),$$

$$(12) \quad V(t_L) = (W(t_0, t_1)W(t_0, t_2) \dots W(t_0, t_L)).$$

Пусть размер скользящего временного окна выбран таким образом, что

$$(13) \quad \text{rank } V(t_{L-1}) = \text{rank } V(t_L).$$

В этом случае матрица $V(t_L)$ имеет ненулевое ядро [11]. Напомним, что для любого вектора $v(t_L)$, принадлежащего ядру матрицы $V(t_L)$, выполняется равенство $V(t_L)v(t_L) = 0$. Поэтому правило проверки аналитических зависимостей (вычисления невязки) может быть предложено в следующем виде

$$(14) \quad r(t_L) = Y(t_L)v(t_L), \quad v(t_L) \in \ker V(t_L),$$

где $r(t_L)$ – значение вектора невязки, формируемое в момент времени t_L и $v(t_L)$ – произвольный вектор, принадлежащий ядру матрицы $V(t_L)$. Действительно, в силу (10) из (14) получаем

$$(15) \quad r(t_L) = AV(t_L)v(t_L) = 0.$$

Для сведения к минимуму временных затрат на обнаружение дефекта размер скользящего временного окна должен быть минимально возможным, при котором выполняется (13). Это достигается за счет применения следующего алгоритма генерации невязки.

Алгоритм 1 (генерация невязки).

1. Положить $L = 1$. Вычислить $V(t_1) = W(t_0, t_1)$.
2. Принять $L = L + 1$. Вычислить $V(t_L)$ согласно (12).
3. Проверить выполнение равенства (13). При его невыполнении перейти к п. 2.
4. Вычислить $Y(t_L)$ согласно (11).
5. Вычислить невязку согласно (14).
6. Конец.

Заметим, что вычислительную сложность алгоритма можно уменьшить за счет исключения п. 3. Действительно, при значении $L = L_{\max}$, где величина $L_{\max}$ на единицу превышает число столбцов матрицы A , число столбцов матрицы $V(t_L)$ превышает число ее строк и матрица $V(t_L)$ будет заведомо иметь ненулевое ядро. Однако в этом случае минимальный размер временного окна не будет гарантирован.

Дополнительно отметим, что в [13] также рассматривались правила генерации невязки, отличающиеся от правила, представленного формулой (14).

3. Комплексный метод принятия решений

3.1. Пороговая логика

В отсутствие дефектов и дестабилизирующих факторов правило (14) обеспечивает формирование вектора невязки, равного нулю. На практике из-за действия различных дестабилизирующих факторов, описание которых не включено в эталонную модель (8), формируемое значение вектора невязки будет ненулевым. При этом возникает необходимость ответа на вопрос: “Является ли действие дестабилизирующих факторов единственной причиной формирования ненулевого вектора невязки?” Для ответа на этот вопрос предлагается использовать пороговую логику принятия решения.

Пусть по результатам вычисления невязки и ее анализа при положениях скользящего временного окна, предшествующих текущему его положению, сделан вывод об исправности системы до момента времени $t = t_{L-1}$ включительно, где момент времени t_{L-1} рассматривается в привязке к текущему временному положению интервала T_L . В этом случае значение порога, используемого для принятия решения в момент времени t_L , предлагается вычислять по формуле

$$(16) \quad \Pi(t_L) = \Pi_0 + \max_{\tau \in T_*} (r(\tau)^T r(\tau))^{1/2}, \quad T_* = \{t_0, t_{L-1}\},$$

где верхний индекс Т обозначает транспонирование. Постоянную составляющую порога Π_0 предлагается определять по результатам моделирования или натурных испытаний исправной системы в соответствии с требованием отсутствия ложных тревог.

Если генерируемое в момент времени t_L значение нормы вектора невязки не превышает порога, принимается решение об отсутствии дефектов в системе. Поскольку предложенный способ вычисления порога не учитывает возможное изменение интенсивности действия дестабилизирующих факторов в момент времени t_L , возможно нарушение неравенства

$$(17) \quad (r^T(t_L)r(t_L))^{1/2} \leq \Pi(t_L)$$

даже при отсутствии дефектов. Как следствие, принятие окончательного решения о дефекте в системе требует проведения дополнительной проверки (см. ниже). Если эта проверка не подтвердит факт присутствия дефекта, то при следующем положении временного окна будет сформированно большее значение порога.

Заметим, что предложенный способ вычисления порога позволяет учитывать возможное изменение интенсивности действия дестабилизирующих факторов в процессе диагностирования, что обеспечивает адаптацию порога к реальным условиям диагностирования.

3.2. Сопоставление с сигнатурами дефектов

Пусть дефект в системе впервые приводит к ненулевому значению параметра a_j^f в момент времени t_L такому, что результатом является нарушение неравенства (17). При этом матрица A не меняет своего значения, в то время как $A^f \neq 0$. Тогда по-прежнему будет выполняться (15) и, как следствие, “вклад” дефекта в значение вектора невязки в момент времени t_L будет определяться равенством

$$(18) \quad r(t_L) = A^f W(t_0, t_L) v_L(t_L),$$

где $v_L(t_L)$ – значение последней компоненты вектора $v(t_L)$.

Предположив, что величина дефекта достаточно мала, воспользуемся линейным приближением

$$(19) \quad A^f = \left(\partial A^f / \partial a_j^f \right)_{|a^f=0} a_j^f.$$

Тогда в силу (18) и (19) при отсутствии дестабилизирующих факторов направление вектора невязки будет совпадать с направлением вектора

$$(20) \quad \sigma_j(t_L) = \left(\partial A^f / \partial a_j^f \right)_{|a^f=0} W(t_0, t_L).$$

Вектор $\sigma_j(t_L)$ назовем сигнатурой j -го дефекта.

Влияние дестабилизирующих факторов на невязку чревато неполным совпадением направлений векторов $r(t_L)$ и $\sigma_j(t_L)$. В этом случае вывод о присутствии в системе j -го дефекта может быть сделан на основе оценки углового расстояния между векторами $r(t_L)$ и $\sigma_j(t_L)$. В качестве такой оценки

предлагается использовать абсолютное значение косинуса угла между этими векторами, рассчитываемое по формуле

$$(21) \quad \alpha_j(t_L) = \frac{|r^T(t_L) \sigma_j(t_L)|}{(r^T(t_L) r(t_L))^{1/2} (\sigma_j^T(t_L) \sigma_j(t_L))^{1/2}}.$$

Чем ближе значение $\alpha_j(t_L)$ к единице, тем больше степень уверенности в том, что в системе имеет место j -й дефект.

Отметим, что в выражение для частных производных $(\partial A^f / \partial a_j^f)|_{af=0}$ могут входить значения неизвестных коэффициентов и компонент векторов $x^{(j)}(t_0)$, $1 \leq j \leq N$. Для того чтобы иметь возможность вычислять сигнатуры дефектов непосредственно в процессе диагностирования, предлагается находить оценки значений этих коэффициентов и компонент векторов для последующей подстановки их в (20). Нахождение оценок предполагается осуществлять в два этапа: 1) вычисление элементов матрицы A путем прямого решения уравнения (10) и 2) выражение искомых значений коэффициентов и компонент векторов через значения элементов матрицы A .

Предположим, что размер скользящего временного окна L является минимальным, таким, что выполняется равенство (13). Тогда матрица $V(t_0, t_{L-1})$, во-первых, имеет ранг L и, во-вторых, зависит от значений векторов входа и выхода исправной системы, измеренных на отрезке времени $T_* = [t_0, t_{L-1}]$. Если матрица $V(t_0, t_{L-1})$ не является квадратной, то, пользуясь представлением

$$AV(t_0, t_{L-1}) = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} V_1(t_0, t_{L-1}) \\ V_2(t_0, t_{L-1}) \end{bmatrix},$$

где $V_1(t_0, t_{L-1})$ – квадратная невырожденная матрица, из (10) получим

$$(22) \quad A_1 = [Y(t_0, t_{L-1}) - A_2 V_2(t_0, t_{L-1})] V_1^{-1}(t_0, t_{L-1}).$$

При этом для нахождения матрицы A_1 потребуется задание матрицы A_2 путем дополнительного определения значений некоторых коэффициентов и не доступных для непосредственного измерения компонент вектора состояния системы. Если дополнительно определяемые коэффициенты принимают значения в пределах известных интервалов (допусков), то для их определения целесообразно использовать средние значения допусков. Однако при этом будет возможным осуществлять лишь приближенное вычисление сигнатур дефектов. Если дополнительно определяемыми являются значения компонент состояния системы в момент времени t_0 , то может потребоваться использование дополнительного наблюдателя состояния для их оценивания.

Очевидно, что если $V(t_0, t_{L-1})$ – квадратная матрица, то никакого доопределения не требуется и для нахождения матрицы A достаточно положить в (22) $A_1 = A$, $V_1(t_0, t_{L-1}) = V(t_0, t_{L-1})$ и $A_2 V_2(t_0, t_{L-1}) = 0$.

3.3. Реализация комплексного метода принятия решения

В приведенных выше соотношениях для вычисления вектора невязки (14), порога (16), а также значений сигнатуры дефектов и углового расстояния

(соотношения (20) и (21) соответственно) используется “внутреннее” время интервала T_L , представляющего скользящее временное окно. Для того чтобы привязать это “внутреннее” время к текущему времени системы t , достаточно положить в соответствующих соотношениях

$$(23) \quad t_L = t, \quad t_i = t - (L - i)\Delta t, \quad 0 \leq i \leq L - 1.$$

Рассмотрим особенности совместного использования описанных выше методов для принятия решения о наличии дефекта в системе и о виде дефекта. Во-первых, для реализации метода пороговой логики должна существовать возможность вычисления в реальном времени: 1) вектора невязки и 2) порога. Вычисление вектора невязки в момент времени t является возможным, если доступны значения входов и выходов системы на отрезке времени T_L , предшествующем моменту t . Как было показано выше, это требование гарантированно выполняется при $i \geq L_{\max}$. Далее, для формирования порога необходимо иметь возможность использовать значения вектора невязки, сформированные на отрезке времени не менее чем T_* ; длина этого отрезка не превышает $(L_{\max} - 1)\Delta t$.

Во-вторых, должно быть установлено пороговое значение $\alpha_{\min}$, достаточно близкое к единице, такое что выполнение неравенства

$$(24) \quad \alpha_j(t) \geq \alpha_{\min}$$

позволяет сделать формальное заключение о присутствии в системе j -го дефекта.

Опишем алгоритм, реализующий комплексный подход к принятию решений.

Алгоритм 2 (принятие решений).

1. Запустить работу алгоритма с момента времени $t = t_{L_{\max}}$.
2. Положить $i = L_{\max} - 1$.
3. Воспользовавшись алгоритмом 1, вычислить вектор невязки $r(t)$.
4. Если $i \geq 1$, положить $i = i - 1$, $t = t + \Delta t$ и перейти к п. 3.
5. Положить $t = t + \Delta t$.
6. Воспользовавшись алгоритмом 1, вычислить вектор невязки $r(t)$.
7. Воспользовавшись соотношением (16), вычислить значение порога $\Pi(t)$.
8. Если неравенство (17) выполняется, перейти к п. 5.
9. Для каждого j вычислить $\sigma_j(t)$ и $\alpha_j(t)$ согласно (20) и (21) соответственно.
10. Если ни для одного j неравенство (24) не выполняется, перейти к п. 5.
11. Если для некоторого j и всех $i, i \neq j$, выполняется $\alpha_j(t) > \alpha_i(t)$, принять решение о j -м дефекте в системе.

Приведем ряд комментариев к алгоритму. Выполнение п. 1 гарантирует наличие информации о входах и выходах системы, достаточной для вычисления невязки на начальном этапе диагностирования. П.п. 2–4 обеспечивают вычисление значений вектора невязки, необходимых для формирования порога на начальном этапе диагностирования. П.п. 5–10 представляют этап диагностирования, завершаемый обнаружением дефекта, в то время как при

выполнении п. 11 принимается решение о виде дефекта. Заметим, что если при выполнении этого пункта для некоторой пары дефектов с номерами i и j имеет место $\alpha_i(t) \simeq \alpha_j(t)$, то это означает неразличимость этих дефектов в рамках используемой процедуры диагностирования.

4. Пример

4.1. Формирование эталонной модели

Проиллюстрируем особенности применения полученных результатов на уже ставшим классическим примере объекта [14], состоящего из трех последовательно соединенных баков с площадями поперечного сечения ϑ_1 , ϑ_2 и ϑ_3 . Баки соединены между собой трубами с площадями поперечного сечения ϑ_4 и ϑ_5 . В первый бак вливается жидкость, а из последнего через отверстие поперечного сечения ϑ_6 , расположенное в дне третьего бака, вытекает. Модель объекта представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 dx_1(t)/dt &= a_1 u_1(t) - (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}, \\
 dx_2(t)/dt &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - (a_3 - a_3^f) \sqrt{x_2(t) - x_3(t)}, \\
 dx_3(t)/dt &= (a_3 - a_3^f) \sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - (a_4 - a_4^f) \sqrt{x_3(t)}, \\
 y_1(t) &= x_2(t), \quad y_2(t) = x_3(t),
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

где переменные входа $u_1(t)$ и состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_1(t) \geq x_2(t) \geq x_3(t)$, введены для обозначения соответственно объема поступающей жидкости в единицу времени и уровней жидкости в баках. Непосредственно измеряемыми являются уровни $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Постоянные коэффициенты – это $a_1 = 1/\vartheta_1$, $a_2 = \vartheta_4 \sqrt{2g}/\vartheta_1$, $a_3 = \vartheta_5 \sqrt{2g}/\vartheta_2$, $a_4 = \vartheta_6 \sqrt{2g}/\vartheta_3$, и g – гравитационная постоянная. Диагностированию подлежат дефекты, приводящие к засорению труб и, как следствие, уменьшению площади их сечения. На модели (25) дефекты задаются ненулевыми (положительными) значениями коэффициентов a_2^f , a_3^f и a_4^f .

Рассмотрим поэтапно задачу синтеза эталонной модели. Осуществив преобразование (25) к модели без внутренних обратных связей, получим

$$\begin{aligned}
 dx_1^{(1)}(t)/dt &= a_1 u_1(t) - (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)}, \\
 dx_2^{(1)}(t)/dt &= (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)} - (a_4 - a_4^f) \sqrt{y_2(t)}, \\
 dx_1^{(2)}(t)/dt &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1^{(1)}(t) - 2y_1(t)} - (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)}, \\
 y_1(t) &= x_1^{(2)}(t), \quad y_2(t) = x_2^{(1)}(t),
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

при

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(x(t)) &= (x_1(t) + x_2(t), x_3(t))^T, \quad \varphi^{(2)}(x(t)) = x_2(t), \\ \psi(y(t)) &= (y_1(t), y_2(t))^T.\end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (6) и делая подстановку согласно (7), запишем

$$x_1^{(1)}(t) = a_1 \int_{t_0}^t u_1(\tau) d\tau - (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(1)}(t_0),$$

$$(27) \quad x_2^{(1)}(t) = (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau - (a_4 - a_4^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_2(\tau)} d\tau + x_2^{(1)}(t_0),$$

$$\begin{aligned}(28) \quad x_1^{(2)}(t) &= (a_2 - a_2^f) \times \\ &\times \int_{t_0}^t \left(\sqrt{a_1 \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' - (a_2 - a_2^f) \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' + x_1^{(1)}(t_0) - 2 y_1(\tau)} \right) d\tau - \\ &- (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(2)}(t_0).\end{aligned}$$

Используем разложение квадратного корня в ряд Маклорена. Положим

$$(29) \quad \mu(\tau) = a_1 \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' - (a_2 - a_2^f) \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' - 2 y_1(\tau).$$

Можно показать (посредством моделирования), что для используемых значений $u_1(t)$ и $x_i(t_0)$, $1 \leq i \leq 3$, выполняется $|\mu(\tau)/x_1^{(1)}(t_0)| < 1$. Как следствие, справедлива приближенная запись

$$\sqrt{1 + \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} - \frac{1}{8} \left(\frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} \right)^2 - \dots$$

Ограничившись первыми тремя членами разложения, получим приближенное равенство

$$\begin{aligned}(30) \quad x_1^{(2)}(t) &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} - \frac{1}{8} \left(\frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} \right)^2 \right) d\tau - \\ &- (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(2)}(t_0).\end{aligned}$$

С учетом (27) и (29), (30) запишем матрицы эталонной модели (8):

$$\begin{aligned}
A &= \\
&= \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t_0) & a_2 \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} & \frac{a_1 a_2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2}{\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & -a_3 & \frac{-a_2^2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} \\ x_2^{(1)}(t_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & \frac{a_2^2 a_2}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_1 a_2^2}{4x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^3}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^f &= \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a_2^f \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} & \frac{-a_1 a_2^f}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_2^f}{\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^f}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & a_3^f & \frac{-2a_2 a_2^f + (a_2^f)^2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3^f & 0 \\ 0 & \frac{-a_1^2 a_2^f}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_1(-2a_2 a_2^f + (a_2^f)^2)}{4x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-3a_2^2 a_2^f + 3a_2(a_2^f)^2 - (a_2^f)^3}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2 a_2^f + (a_2^f)^2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & 0 & 0 \\ a_4^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
W(t_0, t) &= \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' d\tau & \int_{t_0}^t y_1(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t y_1^2(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' d\tau & \int_{t_0}^t \sqrt{y_2(\tau)} d\tau & \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' \right)^2 d\tau \\ \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' \right) d\tau & \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' \right)^2 d\tau \\ \int_{t_0}^t y_1(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' \right) d\tau \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Анализ полученных матриц позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, реализуемая в соответствии с алгоритмом 1 процедура генерации невязки является непараметрической, поскольку не требует знания точных значений параметров объекта диагностирования (коэффициенты $a_1 - a_4$). Это также обуславливает универсальность процедуры: она пригодна для любых трехбачковых объектов, независимо от их геометрических размеров. Во-вторых, матрицы частных производных $(\partial A^f / \partial a_j^f)|_{a^f=0}$, $1 \leq j \leq 3$, зависят от коэффициентов модели.

Для того чтобы исключить необходимость оценивания значений неизвестных параметров и переменных объекта диагностирования для вычисления

матрицы производных $(\partial A^f / \partial a_j^f)|_{a^f=0}$, $1 \leq j \leq 3$, рассмотрим структуру матрицы A^f . Несложно видеть, что дефект, соответствующий a_2^f , влияет только на первую строку матрицы A^f , дефект, соответствующий a_4^f , влияет только на вторую строку матрицы A^f , в то время как вклад дефекта, соответствующего a_3^f , в строки матрицы A^f одинаков по величине, но различается по знаку. Теперь учитывая (20), можно принять $\sigma_1 = (1 \ 0)^T$, $\sigma_2 = (1 \ -1)^T$ и $\sigma_3 = (0 \ 1)^T$. Таким образом, принятие решения не требует знания значений параметров объекта. Следовательно, процедура принятия решения также является универсальной и пригодна для любых трехбачковых объектов.

4.2. Результаты моделирования

Полученные выше матрицы эталонной модели были использованы для моделирования в среде пакета MatLab процесса диагностирования трехбачкового объекта. При моделировании исправного объекта задавались следующие значения параметров объекта: $a_1 = 1 \text{ м}^{-2}$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0,4427 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$. Генерация невязки и принятие решений осуществлялись на основе алгоритмов 1 и 2. Результаты, полученные для исправного объекта, представлены на рис. 1, где графики a – $г$ описывают поведение соответственно переменных $u(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ и нормы вектора невязки, а также адаптивного порога. Неравенство невязки нулю здесь обуславливается приближенным характером эталонной модели в связи с использованием при ее получении разложения квадратного корня в ряд Маклорена. Значение постоянной составляющей порога

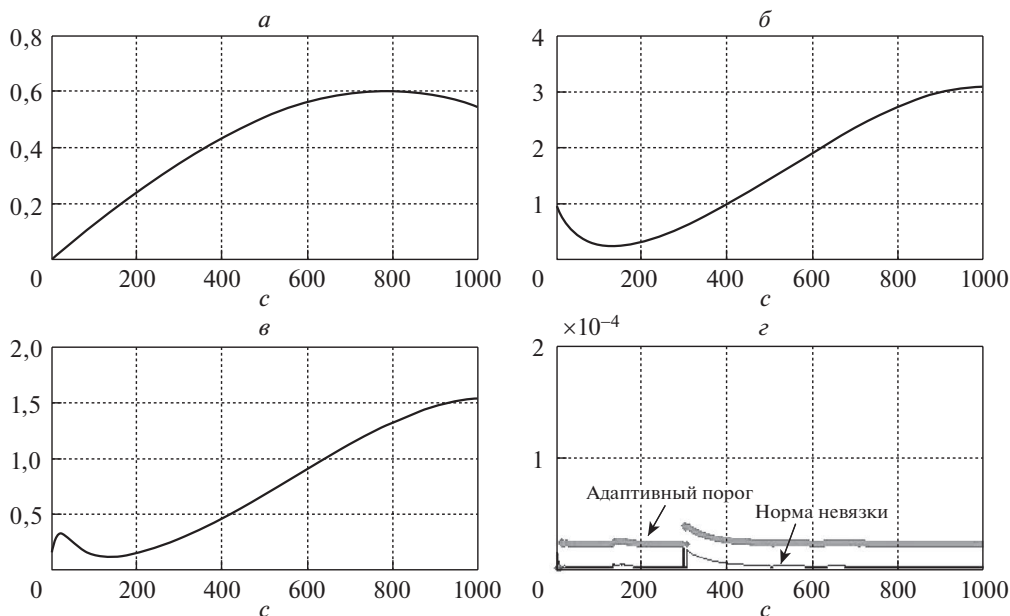


Рис. 1. Случай исправного функционирования трехбачкового объекта.

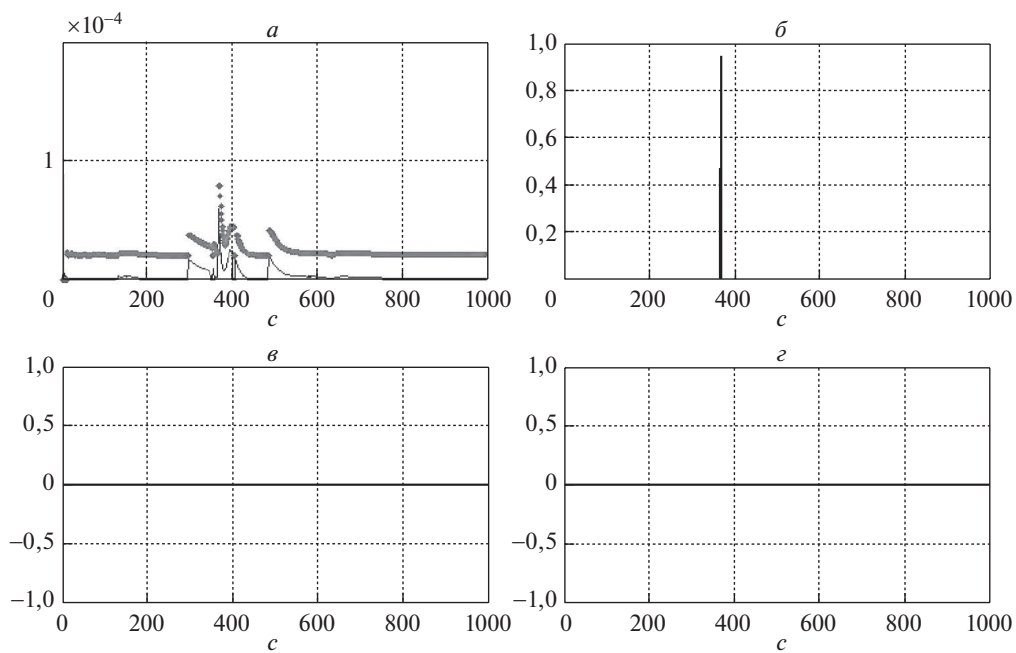


Рис. 2. Первый дефект в трехбашенном объекте.

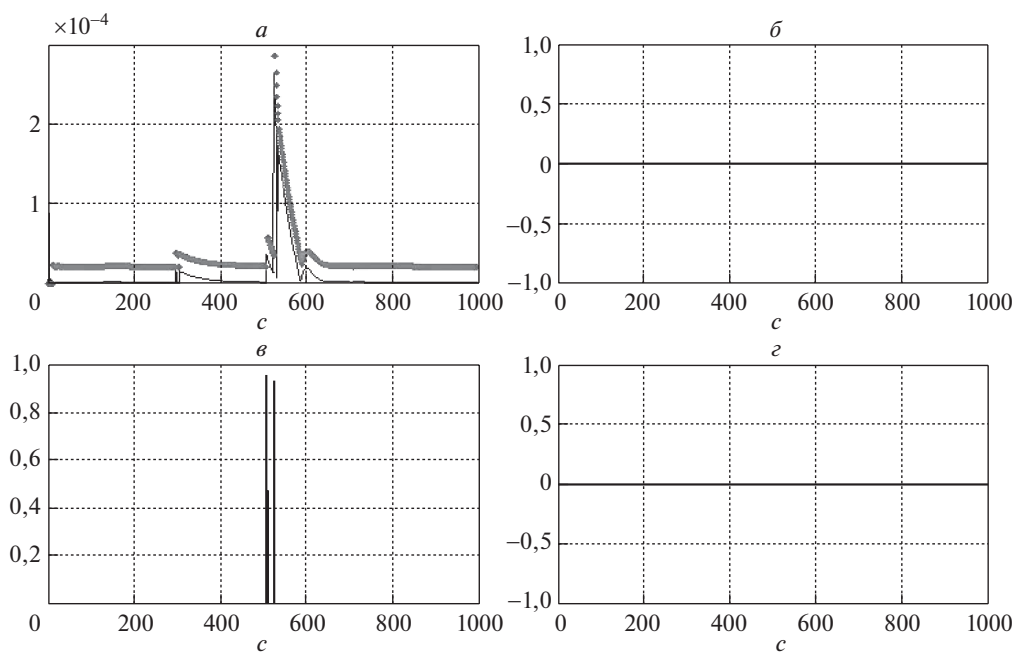


Рис. 3. Второй дефект в трехбашенном объекте.

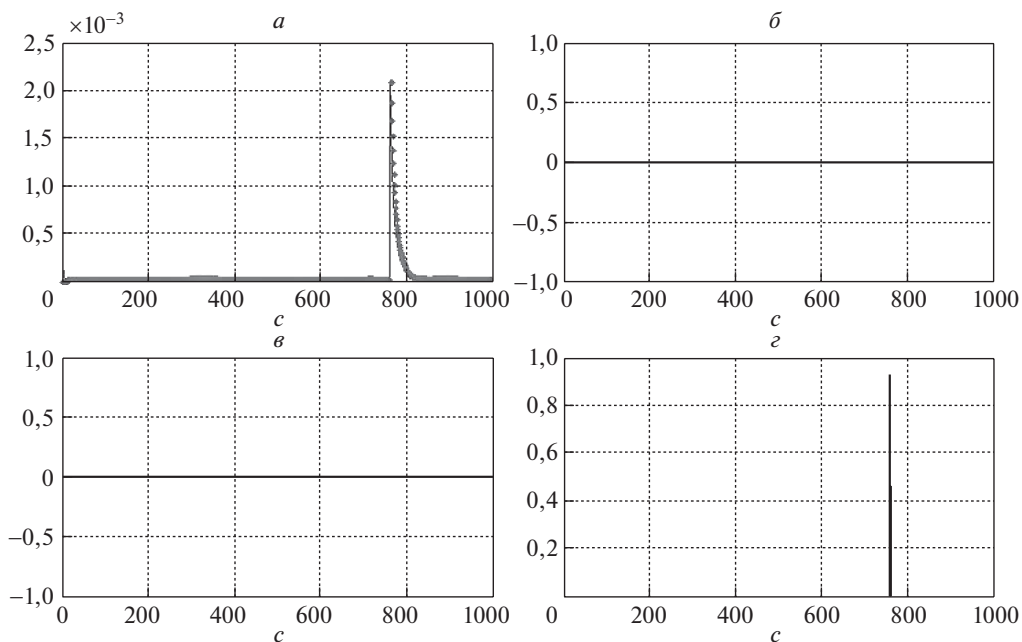


Рис. 4. Третий дефект в трехбаковом объекте.

$\Pi_0 = 0,2 \times 10^{-4}$ выбрано из условия отсутствия ложной тревоги в момент времени $t = 300$ с, см. график z .

На рис. 2, 3 и 4 приведены результаты моделирования для случаев возникновения в объекте первого, второго и третьего дефектов, приводящих соответственно к: 1) засорению трубы между первым и вторым баками (значение коэффициента $a_2^f = 0,1$ с момента времени $t = 350$ с), 2) засорению трубы между вторым и третьим баками (значение коэффициента $a_3^f = 0,2$ с момента времени $t = 500$ с) и 3) засорению слива из третьего бака (значение коэффициента $a_4^f = 0,1$ с момента времени $t = 700$ с). Графики a описывают поведение нормы сигнала невязки и адаптивного порога. На графиках $б-г$ приводятся значения угловых расстояний α_j , $1 \leq j \leq 3$, в случае превышения ими порогового значения $\alpha_{\min} = 0,9$. Если для некоторого α_j порог не превышает, то на графиках приводится значение $\alpha_j = 0$.

Сопоставление графиков $б-г$, полученных для различных дефектов, позволяет сделать вывод о возможности локализации всех трех дефектов.

5. Заключение

В работе предложено эффективное решение задачи робастного диагностирования нелинейных динамических систем в условиях воздействия дестабилизирующих факторов (ошибок эталонной модели, неконтролируемых внешних возмущающих воздействий и ошибок измерений доступных переменных системы). Отличительной особенностью этого решения является совместное использование активного (непараметрический метод генерации невязки) и

пассивного (комплексный метод принятия решения о наличии дефекта и виде этого дефекта) подходов к обеспечению робастности.

Новизна статьи состоит в разработке комплексного метода принятия решения, обеспечивающего определенный компромисс между минимальной величиной гарантированно обнаруживаемых и локализуемых дефектов и отсутствием ложных тревог.

Особенностью комплексного метода является сочетание пороговой логики принятия решения, использующей адаптивный порог, и сопоставление формируемого вектора невязки с сигнатурами дефектов, также формируемых в реальном времени с учетом текущих значений входов и выходов диагностируемой системы. Еще одной особенностью этого метода является ориентированность на получение минимально возможного размера скользящего временного окна, что должно положительно сказаться на оперативности принятия решений.

С другой стороны, увеличение размера скользящего временного окна может положительно сказаться на подавлении эффекта воздействия дестабилизирующих факторов, носящих случайный характер, за счет следующего: 1) в соотношениях (16), (17) и (21) вместо евклидовой нормы вектора невязки использовать евклидову норму для среднего значения вектора невязки, вычисленную на некотором интервале времени; и 2) применить метод наименьших квадратов для оценивания неизвестных параметров системы вместо использования прямого решения, получаемого из уравнения (22). Рациональный выбор размера скользящего временного окна представляет самостоятельную задачу и может рассматриваться как предмет дополнительного исследования.

В качестве предмета дополнительного исследования также может рассматриваться задача перенесения полученных результатов на случай моделей с дискретным временем, задаваемых разностными уравнениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу преобразования модели (1) к модели (2), (3), приняв во внимание (4) и (5). Дифференцируя обе части равенства (4) по времени, запишем

$$(П.1) \quad \dot{x}^{(i)} = \left(\partial \varphi^{(i)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Осуществляя подстановки согласно (2) в левую часть уравнений (П.1) и учитывая (1) и (4), получим

$$(П.2) \quad \begin{aligned} f^{(1)}(h(x), u, a) &= \left(\partial \varphi^{(1)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \\ f^{(2)}\left(\varphi^{(1)}(x), h(x), u, a\right) &= \left(\partial \varphi^{(2)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \\ &\vdots \\ f^{(N)}\left(\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(N-1)}(x), h(x), u, a\right) &= \left(\partial \varphi^{(N)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a). \end{aligned}$$

Далее, совместно рассматривая второе уравнение из (1), уравнения (3) и (5), запишем

$$(П.3) \quad h_* \left(\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(N)}(x) \right) = \psi(h(x, a)).$$

Уравнения (П.2) и (П.3) могут быть непосредственно использованы для нахождения функций $f^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, и h_* преобразованной модели (2), (3) при заранее найденных функциях $\varphi^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, и ψ .

Воспользовавшись языком дифференциальной геометрии [12], опишем способ нахождения функций $\varphi^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, обеспечивающих разрешимость уравнений (П.2). Пусть Λ_i обозначает расслоение, введенное для функции $\varphi^{(i)}$: $\Lambda_i = \text{span}\{\lambda \mid (\partial\varphi^{(i)}/\partial x)\lambda = 0\}$, где символ “*span*” обозначает линейную оболочку системы векторов (ковекторов). Пусть также $\Omega_i = \Lambda_i^\perp$ – соответствующее корасслоение, где символ “ $\perp$ ” обозначает аннигилятор, т.е. $\Lambda_i^\perp = \{\omega \in R^n \mid \langle \omega, \lambda \rangle = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda_i\}$, и скобки

$$\langle \omega, \lambda \rangle = \sum_s \omega_s \lambda_s$$

введены для обозначения внутреннего произведения.

Положим $f_{ij}(x) = f(x, u_i, a_j)$, где u_i , $1 \leq i \leq v_1$, a_j , $1 \leq j \leq v_2$ – некоторые фиксированные значения векторов входа u и параметров a , v_1 и v_2 – конечные значения такие, что векторная функция $f(x, u, a)$ при любых допустимых значениях векторов u и a линейно выражается через семейство векторных функций (полей) $F = \{f_{ij}(x), 1 \leq i \leq v_1, 1 \leq j \leq v_2\}$.

Рассмотрим три операции дифференцирования. Первая операция (дифференцирование Ли) вводится для скалярной функции α и векторного поля $\gamma \in \text{span } F$ следующим образом:

$$L_\gamma \alpha = (\partial\alpha/\partial x)\gamma.$$

Вторая операция (скобки Ли) вводится для двух векторных полей $\lambda_1 \in \Lambda$ и $\lambda_2 \in \Lambda$, где Λ – некоторое расслоение:

$$[\lambda_1, \lambda_2] = (\partial\lambda_2/\partial x)\lambda_1 - (\partial\lambda_1/\partial x)\lambda_2.$$

Третья операция вводится для ковекторного поля $\omega \in \Omega$ и векторного поля $\lambda \in \Lambda$, где Λ и Ω – некоторые расслоение и корасслоение соответственно; результатом является ковекторное поле, определяемое следующим образом:

$$L_\lambda \omega = \lambda^T (\partial\omega^T/\partial x)^T + \omega(\partial\lambda/\partial x).$$

В соответствии с определением расслоения Λ_i векторная функция $\varphi^{(i)}$ может быть найдена посредством интегрирования однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$(П.4) \quad \left(\partial\varphi^{(i)}/\partial x \right) \lambda = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_i.$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (П.4) определяются теоремой Фробениуса (см. [12], с. 23). В соответствии с этой теоремой регулярное (т.е. имеющее постоянный ранг во всей области определения) расслоение интегрируемо, если оно инволютивно (замкнуто) относительно операции взятия скобок Ли. Процедура интегрирования уравнений (П.4) также может быть найдена в [12].

Далее, согласно свойствам приведенных выше операций дифференцирования (см. [12], с. 10), для ковекторного поля $\omega \in \Omega_i$ и векторного поля

$$(П.5) \quad \lambda \in \Lambda_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} \Lambda_j \cap \ker(\partial h / \partial x), \quad i \geq 2,$$

(при $i = 1$ принимаем $\Lambda = \ker(\partial h / \partial x)$) справедливо

$$(П.6) \quad L_\gamma \langle \omega, \lambda \rangle = \langle L_\gamma \omega, \lambda \rangle + \langle \omega, [\gamma, \lambda] \rangle, \quad \gamma \in G.$$

По построению корасслоения Ω_i для $\lambda \in \Lambda_i$ и $\omega \in \Omega_i$ выполняется $\langle \omega, \lambda \rangle = 0$ и, как следствие,

$$L_\gamma \langle \omega, \lambda \rangle = 0.$$

Дополнительно положим в (П.6)

$$(П.7) \quad \langle \omega, [\gamma, \lambda] \rangle = 0,$$

что приведет к

$$(П.8) \quad \langle L_\gamma \omega, \lambda \rangle = 0.$$

Равенство (П.8) эквивалентно включению

$$(П.9) \quad L_\gamma \omega \in \sum_{j=1}^{i-1} \Omega_j + \text{span}(\partial h / \partial x).$$

При $\partial \varphi_s^{(i)} / \partial x = \omega$, где нижний индекс “s” указывает номер компоненты векторной функции $\varphi^{(i)}$, это означает, что соответствующая компонента векторной функции $(\partial \varphi^{(i)} / \partial x) f(*)$ может быть выражена через компоненты векторных функций $h(x)$, $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(i-1)}(x)$ и векторов u, a . Поскольку это должно выполняться для всех компонент векторной функции $(\partial \varphi^{(i)} / \partial x) f(*)$, для которых найдутся “свои” ковекторы ω , удовлетворяющие (П.9), существуют некоторые векторные функции $f^{(i)}(*)$, $1 \leq i \leq N$, удовлетворяющие уравнениям (П.2). При этом равенство (П.7) может рассматриваться как достаточное условие разрешимости уравнений (П.2). Опираясь на вышеизложенное, приведем алгоритм нахождения функций $\varphi^{(i)}(x)$, $1 \leq i \leq N$.

Алгоритм 3 (нахождение функций $\varphi^{(i)}(x)$, $1 \leq i \leq N$).

1. Положить $i = 1$, сформировать расслоение $\Lambda'_1 = \ker(\partial h / \partial x)$.

2. Сформировать расслоение $\Lambda_i = \Lambda'_i \cap \text{span}\{[\gamma, \lambda] \mid \gamma \in G, \lambda \in \Lambda'_i\}$.
3. Если $i \geq 2$ и $\Lambda_i \supseteq \Lambda_{i-1}$, положить $N = i$ и перейти к п. 5.
4. Положить $i = i+1$ и найти расслоение Λ'_i в соответствии с (П.5). Перейти к п. 2.

5. Найти векторные функции $\varphi^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, посредством интегрирования уравнений (П.4).

6. Для сокращения размерности получаемой модели исключить из функций $\varphi^{(i)}$, $i \geq 2$, компоненты, функционально зависящие от компонент векторных функций $\varphi^{(j)}$, $1 \leq j \leq i-1$.

Конец.

Отметим следующее. П.п. 1, 2 и 4 алгоритма позволяют формировать расслоения Λ_i , одновременно удовлетворяющие соотношению (П.5) и ограничению (П.7). Проверка функциональной зависимости (последний пункт алгоритма) может быть проведена с использованием анализа ранга соответствующих матриц Якоби (см. [15, с. 112]).

Способ нахождения функции $\psi(h(x))$, обеспечивающий разрешимость уравнений (П.3), предполагает интегрирование замкнутого расслоения $\Lambda_\psi \supseteq \ker(\partial h / \partial x) + \bigcap_{i=1}^N \Lambda_i$.

Пример преобразования модели (25) к модели (26) приведен в [7, с. 104–114].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chow E., Willsky A. Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1984. V. 29. P. 603–614.
2. Patton R., Kangethe S. Robust fault diagnosis using eigenstructure assignment of observers. – In Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and application / Eds. Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N. N.Y.: Prentice Hall, 1989. P. 99–154.
3. Ding X., Frank P.M. An adaptive observer-based fault detection scheme for nonlinear dynamic systems // Proc. 12th World Congress IFAC 1993. V. 8. P. 307–310.
4. De Persis C., Isidori A. A Geometric Approach to Nonlinear Fault Detection and Isolation // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. AC-46. No. 6. P. 853–865.
5. Gertler J. Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems. N.Y.: Marcel Dekker., 1998.
6. Chen J., Patton R. Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems. London: Kluwer Academic Publishers., 1999.
7. Шумский А.Е., Журабок А.Н. Методы и алгоритмы диагностирования и отказоустойчивого управления динамическими системами. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2009.
8. Shumsky A. Redundancy Relations for Fault Diagnosis in Nonlinear Uncertain Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. P. 477–489.
9. Журабок А.Н., Шумский А.Е. Непараметрический метод диагностирования нелинейных динамических систем // АиТ. 2019. № 2. С. 22–41.
Zhirabok A.N., Shumskii A.E. Nonparametric Method for Diagnosis of Nonlinear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 217–233.
10. Seliger R., Frank P.M. Robust residual evaluation by threshold selection and performance index for nonlinear observer-based fault diagnosis // Proc. of IFAC Conf. Tooldiag'93. Toulouse, France. 1993. P. 496–504.

11. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.
12. Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer Verlag, 1989.
13. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В. Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // АиТ. 2017. № 7. С. 3–21.
Zhirabok A.N., Shumskii A.E., Pavlov S.V. Diagnosis of linear dynamic systems by the nonparametric method // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
14. Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N. Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and applications / N.Y.: Prentice Hall, 1989.
15. Корн Г, Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 02.11.2019

После доработки 14.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. О.П. КУЗНЕЦОВ, д-р техн. наук (olkuznes@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АСИНХРОННЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ МНОГОСОРТНЫЕ СИСТЕМЫ¹

Асинхронная многоагентная многосортная система (АММС) – это сеть из пороговых элементов (агентов), функционирующая в непрерывном времени. Агенты находятся либо в активном, либо в пассивном состоянии. В активном состоянии агент генерирует сигнал определенного сорта (цвета). Сигнал воспринимается всеми агентами, имеющими входы того же цвета. Агент обладает потенциалом, изменяющимся под возбуждающим или тормозящим действием сигналов; он активен, только если его потенциал превышает порог. Изменения активности агентов являются событиями, разбивающими временную шкалу на такты – временные интервалы, внутри которых состояние системы не меняется. Последовательность состояний системы называется ее поведением. Исследуется зависимость автономного поведения сети от значений ее параметров.

Ключевые слова: асинхронная система, пороговый элемент, многосортные сигналы, автономное поведение, события.

DOI: 10.31857/S0005231021020082

1. Введение

Модель, описываемая в данной статье, возникла по двум причинам. Во-первых, она обобщает модель химических взаимодействий между нейронами [1]. В предлагаемой модели опущены биологические сущности; в результате вместо сети нейронов, обменивающихся химическими сигналами (нейротрансмиттерами), появляется сеть из абстрактных агентов, которые обмениваются сигналами разных сортов, циркулирующими в едином пространстве сигналов и в едином асинхронном времени. Многосортность сигналов означает, что каждый агент воспринимает только сигналы определенных сортов и “не слышит” остальные сигналы.

Во-вторых, правомерно рассматривать эту модель как многоагентную систему (МАС), хотя, возможно, это не согласуется с существующей традицией теории МАС. Дело в том, что уже многие годы в этой теории доминирует парадигма BDI-архитектуры [2], в которой агенты обладают убеждениями, желаниями и намерениями. Однако, как отмечено в обзоре [3], этот

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-29-07029, 20-07-00190).

подход не оправдал ожиданий, поскольку потребовал привлечения сложных и вычислительно неэффективных логических средств. В резюме этого обзора отмечается, что “в новой парадигме формализации МАС рационально строить как множество простых агентов с богатой компонентой взаимодействия и широким использованием принципов самоорганизации и эволюции, присущих живым системам”. Предлагаемая модель удовлетворяет, по крайней мере, требованиям простоты агентов и разнообразию типов взаимодействия.

Асинхронность – еще одна важная особенность предлагаемой модели. Асинхронные дискретные модели появились в 50-х гг. XX в. в логической схемотехнике [4]. Их главная особенность – зависимость поведения от временных параметров элементов логических схем. Одной из важных задач проектирования асинхронных схем всегда являлось преодоление этой зависимости с целью обеспечения детерминированного поведения схемы [5, 6]. В данной работе предлагается новый подход к асинхронным сетям, при котором их зависимость от временных параметров оказывается достоинством: она порождает репертуар возможных поведений и позволяет переключать поведение при изменении параметров. Сеть, в которой зафиксированы все основные параметры ее элементов, будет называться асинхронной системой.

Краткое изложение первых трех разделов настоящей статьи (без доказательств теорем 2 и 3) опубликовано в [7].

2. Формальная модель – основные определения

Асинхронная многоагентная многосортная система (АММС) $\mathbf{S}$ определяется как $\mathbf{S} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{T} \rangle$, где $\mathbf{N} = \{N_1, \dots, N_n\}$ – множество агентов, $\mathbf{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ – множество абстрактных цветов (сортов), $\mathbf{H}$ – множество параметров системы, $\mathbf{T}$ – непрерывное время, в котором происходят *события*. Агенты могут находиться в одном из двух состояний – активном и пассивном. Событиями являются моменты изменения состояния любого агента. Переход агента из пассивного состояния в активное иногда будем называть включением, а переход из активного состояния в пассивное – выключением.

События разбивают непрерывную шкалу времени на отрезки – такты. Границы тактов (точки на этой шкале, т.е. моменты наступления событий) нумеруются натуральными числами и называются дискретными моментами времени. Такт t – это интервал между моментами t и $t + 1$, т.е. между двумя соседними событиями. Такты имеют разную длительность; длительность такта t обозначается $\tau(t)$. Текущее состояние активности агента N_i задается величиной $y_i(t) \in \{0, 1\}$; $y_i(t) = 1$ означает, что на такте t агент активен; $y_i(t) = 0$ означает, что на такте t агент пассивен.

Выходы, входы и сигналы. В активном состоянии агент N_i генерирует сигнал, характеризуемый цветом c_j и мощностью d_{ij} . Мощность задается матрицей $\mathbf{D} = \|d_{ij}\|_{n \times m}$, в которой строки соответствуют агентам, а столбцы – цветам. Агент N_i обладает входами, каждый из которых имеет цвет из множества $\mathbf{C}$. Разные входы имеют разные цвета; вход цвета c_j имеет вес $w_{ij} \in \mathbf{R}$. Вес $w_{ij} = 0$ означает, что у агента N_i нет входов цвета c_j ; $w_{ij} > 0$ означает, что сигнал, пришедший на вход цвета c_j , оказывает на агента возбуждаю-

щее воздействие, $w_{ij} < 0$ означает тормозное воздействие. Множество весов также удобно задавать матрицей $\mathbf{W} = \|w_{ij}\|_{n \times m}$.

По характеру активности агенты делятся на два типа: инициативный и реактивный. Инициативный агент переходит в пассивное состояние только при достаточно сильных тормозящих воздействиях; в остальное время он активен. Реактивный агент активизируется только при достаточно сильных возбуждающих воздействиях; в остальное время он пассивен.

Совокупность цветов, присвоенных входам и выходу агента N_i , а также знаки весов его входов будем называть разметкой агента. Разметки агентов однозначно определяют связи между агентами: ориентированная связь от агента N_k к агенту N_l существует, если N_l имеет вход, цвет которого совпадает с цветом выхода N_k . Будем считать, что эта связь имеет тот же цвет. Тем самым разметка всех агентов однозначно порождает раскрашенный ориентированный граф системы $\mathbf{S}$, который будем называть размеченной сетью (или просто сетью) $\Sigma_{\mathbf{S}}$ системы $\mathbf{S}$.

Из приведенных определений следует, что сигнал цвета c_j будет воспринят только теми агентами, которые имеют входы цвета c_j . Иначе говоря, сигналы в системе являются, с одной стороны, широковещательными, а с другой – избирательными. Заметим также, что в АММС возможны “скрытые” входы и выходы: это соответствует случаям, когда некоторый цвет имеют только входы или только выходы. В автономной (не имеющей внешних входов) системе такой цвет не будет влиять на ее функционирование.

Внешним (наблюдаемым) состоянием системы в момент t называется вектор состояний активности всех агентов системы, т.е. вектор $Y(t) = (y_1(t), \dots, \dots, y_n(t))$.

Пространство сигналов описывается вектором $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, где $x_j(t)$ – суммарная мощность сигналов цвета c_j , генерируемых на протяжении такта t и распространяемых по связям этого цвета. Она вычисляется по формуле

$$(1) \quad x_j(t) = \sum_{i=1}^n d_{ij} y_i(t).$$

В матричном виде эта формула принимает вид

$$(1a) \quad \mathbf{X}(t) = Y(t) \times \mathbf{D},$$

где $\mathbf{X}(t)$ – вектор-строка пространства сигналов, $\mathbf{Y}(t)$ – вектор-строка активности нейронов.

Потенциалы агентов. Агент N_i имеет потенциал $U_i(t)$ – непрерывную величину, которая может изменяться в интервале $U_{i0} \leq U_i(t) \leq U_{i\max}$. Агент активен, если величина $U_i(t)$ не меньше порогового значения P_i , которое также находится в интервале $U_{i0} < P_i < U_{i\max}$:

$$(2) \quad y_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } U_i(t) \geq P_i; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значения U_{i0} , $U_{i\max}$ и P_i специфичны для каждого агента.

Потенциал агента N_i внутри такта меняется, но не создает событий; важны только его значения $U_i(t)$ и $U_i(t+1)$. Внутри такта потенциал изменяется линейно, т.е. с постоянной в пределах такта суммарной скоростью $v_i(t)$:

$$(3) \quad v_i(t) = s_i(t) + v_{ien}^\alpha(t),$$

где $s_i(t)$ – экзогенная скорость, пропорциональная силе внешних воздействий:

$$(4) \quad s_i(t) = h \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(t),$$

v_{ien}^α – эндогенная скорость, т.е. собственная скорость агента, не зависящая от внешних воздействий; в дальнейшем полагаем $h = 1$. Перепишем (4) в матричном виде:

$$(4a) \quad \mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t) \times \mathbf{W}^T,$$

где $\mathbf{S}(t)$ – вектор-строка экзогенных скоростей (сил внешних воздействий), $\mathbf{X}(t)$ – вектор-строка пространства сигналов, $\mathbf{W}^T$ – транспонированная матрица весов.

Каждый агент имеет два значения эндогенной скорости:

$$(5) \quad v_{ien}^\alpha(t) = \begin{cases} v_{ien}^0, & \text{если } U_i(t) < P_i, \\ v_{ien}^1, & \text{если } U_i(t) \geq P_i, \end{cases}$$

причем для инициативного агента обе скорости положительны, для реактивного агента обе скорости отрицательны и для обоих типов агентов $v_{ien}^0 < v_{ien}^1$.

Параметры системы. Параметры, определяющие систему $\mathbf{S}$ (формулы (1)–(5)), разбиваются на два класса: статические (не меняющиеся в процессе функционирования) и динамические параметры. Статические параметры (количество входов, их веса, величина порога и др.) образуют множество $\mathbf{H}$, описываемое табл. 1. Динамические параметры ($y_i(t)$, $U_i(t)$, $v_i(t)$ и др.) меняются со временем.

Будем считать, что асинхронная система $\mathbf{S} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{T} \rangle$ состоит из двух компонентов: размеченной сети $\Sigma_{\mathbf{S}}$ и ее параметров. Сеть $\Sigma_{\mathbf{S}}$ системы $\mathbf{S}$ определяется множествами $\mathbf{N}$, $\mathbf{C}$ и разметками агентов; множество параметров $\mathbf{H}$ задается табл. 1.

Таблица 1. Статические параметры системы

	P_i	$U_i^{\max}$	U_i^0	v_{ien}^0	v_{ien}^1	d_{i1}	...	d_{1m}	w_{i1}	...	w_{im}
N_1	P_1	$U_1^{\max}$	U_1^0	v_{1en}^0	v_{1en}^1	d_{11}	...	d_{1m}	w_{11}	...	w_{1m}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
N_i	...	...	U_i^0	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
N_n	P_n	$U_n^{\max}$	U_n^0	v_{nen}^0	v_{nen}^1	d_{n1}	...	d_{nm}	w_{n1}	...	w_{nm}

Такое разделение позволяет говорить об изменениях параметров без изменения сети. Две АММС, имеющие одну и ту же сеть Σ , но отличающиеся наборами значений параметров $\mathbf{H}_k$ и $\mathbf{H}_l$, будем называть конфигурациями сети Σ и обозначать как $\Sigma(\mathbf{H}_k)$ и $\Sigma(\mathbf{H}_l)$.

3. Динамика системы и ее вычисление

3.1. Динамические параметры системы

Последовательность состояний $Y(0), Y(1), \dots$, порождаемую системой, будем называть *поведением* системы. В дальнейшем рассматривается автономное поведение системы, т.е. поведение при отсутствии внешних воздействий. Алгоритм, вычисляющий ее поведение, должен по заданному состоянию системы в момент t вычислить ее состояние в момент $t + 1$. Однако в асинхронной системе вычислению состояния в момент $t + 1$ предшествует вычисление самого момента $t + 1$, т.е. длительности $\tau(t)$ такта $[t, t + 1)$ и положения момента $t + 1$ на шкале непрерывного времени. Это вычисление связано с пересчетом на каждом такте динамических параметров системы.

К уже введенным ранее динамическим параметрам $y_i(t), x_j(t), U_i(t), s_i(t), v_i(t)$ добавим несколько новых динамических параметров.

Остаточным потенциалом $\Delta U_i(t)$ в момент t назовем величину, равную “расстоянию” до наступления ближайшего события, связанного с агентом N_i . Ближайшее событие для агента N_i определяется таблицей переходов, одинаковой для обоих типов агентов; ее вид приведен в табл. 2. Знак ∞ означает, что значение потенциала агента N_i в такте t не достигнет порога и ближайшее событие не связано с агентом N_i . Если $v_i(t) = 0$, то $\Delta U_i(t) = \Delta U_i(t - 1)$, поэтому этого случая в таблице нет.

Таблица 2. Таблица переходов для агентов

	$U_i(t)$	Знак $v_i(t)$	Ближайшее событие	$\Delta U_i(t)$
1	$U_i(t) \geq P_i$	+	Движение вверх, активность не меняется, события нет	∞
2	$U_i(t) \geq P_i$	−	$y_i = 0$	$U_i(t) - P_i$
3	$U_i(t) < P_i$	+	$y_i = 1$	$P_i - U_i(t)$
4	$U_i(t) < P_i$	−	Движение вниз, активность не меняется, события нет	∞

Остаточное время $\tau_{ri}(t)$ агента N_i – это время до достижения ближайшего события при текущем потенциале $U_i(t)$ и скорости $v_i(t)$. Знак ∞ означает, что это время не влияет на вычисление следующего события.

$$(6) \quad \tau_{ri}(t) = \begin{cases} \frac{U_i(t)}{\lceil v_i(t) \rceil}, & \text{если } v_i \neq 0 \text{ и } \Delta U_i(t) \neq \infty, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.2. Алгоритм функционирования автономной АММС и его вычислительная сложность

Теорема 1. *Поведение автономной АММС однозначно определяется вектором $U(0) = (U_1(0), \dots, U_n(0))$ и множеством ее статических параметров $\mathbf{H}$.*

Доказательством служит алгоритм, который по заданным $U(t)$ и $\mathbf{H}$ вычисляет $Y(t)$ и $U(t+1)$ для любого t .

Этот алгоритм выглядит так:

1. Вектор $Y(t)$ вычисляется по формуле (2).
2. Вектор $X(t)$ вычисляется по формуле (1а).
3. Силы воздействия $s_1(t), \dots, s_n(t)$ вычисляются по формуле (4а).
4. Суммарные скорости $v_1(t), \dots, v_n(t)$ вычисляются по формулам (3), (5).
5. Остаточные потенциалы вычисляются по табл. 2.
6. Остаточные времена вычисляются по формуле (6).
7. Ищется минимальное остаточное время $\tau_{\min}(t)$. Если $\tau_{\min}(t) = \tau_i(t)$, то:
 - длина такта t $\tau(t) = \tau_i(t)$;
 - событием является изменение активности агента N_i ;
 - состояние $Y(t+1)$ отличается от $Y(t)$ значением $y_i(t+1)$.
8. Потенциалы для момента $t+1$ пересчитываются по формуле

$$(7) \quad U_i(t+1) = \begin{cases} U_{i\max}, & \text{если } U_i(t) + \tau(t)v_i(t) \geq U_{i\max}, \\ U_{i0}, & \text{если } U_i(t) + \tau(t)v_i(t) \leq U_{i0}, \\ U_i(t) + \tau(t)v_i(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

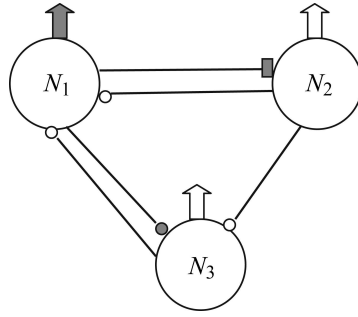
9. Перейти к п. 1 для $t+1$.

Оценим вычислительную сложность шага этого алгоритма, воспользовавшись матричным представлением формул (1а) и (4а). Известно, что сложность произведения матриц $\mathbf{A}_{\|l \times k\|} \times \mathbf{B}_{\|k \times p\|}$ имеет порядок $O(lkp)$. В формуле (1а) имеем $l = 1$, $k = n$, $p = m$. Поэтому сложность вычисления (1а) равна $O(mn)$. Аналогично получаем, что сложность вычисления формулы (4а) также равна $O(mn)$. Остальные шаги имеют сложность, не превосходящую $O(n)$. Поэтому сложность вычисления одного такта имеет порядок $O(mn)$. Важно отметить, что эта сложность линейна относительно числа агентов n , поскольку естественно считать, что число сортов сигналов m растет гораздо медленнее, чем число агентов.

Теорема 1 дает основание называть вектор $U(t)$ *внутренним состоянием* АММС.

3.3. Примеры

Пример 1. На рисунке показана размеченная сеть Σ_1 , где N_1 и N_3 – инициативные агенты, N_2 – реактивный агент. Приведем расчет динамических параметров для конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_1)$ и начального состояния $U(0) = (0,9; 0; 0,9)$. Набор статических параметров $\mathbf{H}_1$ задан табл. 3.



Сеть примера 1.

Момент $t = 0$:

Начальное состояние (текущие потенциалы): $U(0) = (0,9; 0; 0,9)$.

1. Начальное внешнее состояние $Y(0) = (1; 0,1)$.

2. $X(0) = (0,5; 0,3)$.

3. Силы воздействия:

$$s_1(0) = w_{12}x_2(0) = -0,3;$$

$$s_2(0) = w_{21}x_1(0) = 1;$$

$$s_3(0) = w_{31}x_1(0) + w_{32}x_2(0) = -0,15 - 0,3 = -0,45.$$

4. Суммарные скорости:

$$v_1(0) = s_1(0) + v_{1\text{en}}^1 = -0,3 + 0,8 = 0,5,$$

$$v_2(0) = s_2(0) + v_{2\text{en}}^0 = 1 - 0,8 = 0,2,$$

$$v_3(0) = s_3(0) + v_{3\text{en}}^1 = -0,45 + 0,8 = 0,35.$$

5. Остаточные потенциалы:

$$\Delta U_1(0) = \infty \quad (\text{строка 1 табл. 2}),$$

$$\Delta U_2(0) = P_2 - U_2(0) = 0,6,$$

$$\Delta U_3(0) = \infty \quad (\text{строка 1 табл. 2}).$$

6. Остаточные времена:

$$\tau_{r1}(0) = \infty;$$

$$\tau_{r2}(0) = \Delta U_2(0) / |v_2(0)| = 0,6 / 0,2 = 3;$$

$$\tau_{r3}(0) = \infty.$$

7. Минимальное остаточное время $\tau_{\min}(0) = \tau_2(0) = 3$.

Соответственно, *длина такта* $[0, 1]$ будет $\tau(0) = 3$.

Событие, произошедшее в момент 1, – включение нейрона N_2 .

8. Потенциалы для момента $t = 1$:

$$U(1) = (0,9; 0,6; 0,9).$$

Таким образом, к моменту $t = 1$ получаем внешнее состояние $Y(1) = (1, 1, 1)$, внутреннее состояние $U(1) = (0,9; 0,6; 0,9)$ и начальный отрезок поведения 101, 111. Это дает возможность начать расчет для момента $t = 1$.

Таблица 3

	P_i	$U_{i \max}$	U_{i0}	v_{ien}^0	v_{ien}^1	d_{i1}	d_{i2}	w_{i1}	w_{i2}
N_1	0,6	0,9	0	0,5	0,8	0,5	—	0	—1
N_2	0,6	0,9	0	—0,8	—0,5	—	1,0	2	0
N_3	0,6	0,9	0	0,5	0,8	—	0,3	—0,5	—1

Таблица 4

№ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y(t)$	101	111	110	010	000	100	101	111			
$U_1(t)$	0,9	0,9	0,7	0,6	0,3	0,6	0,9	0,9			
$U_2(t)$	0	0,6	0,8	0,9	0,6	0,12	0,36	0,6			
$U_3(t)$	0,9	0,9	0,6	0,225	0	0,3	0,6	0,9			
x_1	0,5	0,5	0,5	0	0	0,5	0,5	0,5			
x_2	0,3	1,3	1	1	0	0	0,3	1,3			
$\tau(t)$	3	0,4	0,5	0,6	0,6	1,2	1,2	0,4			
v_1	0,5	—0,5	—0,2	—0,5	0,5	0,8	0,5	—0,5			
v_2	0,2	0,5	0,5	—0,5	—0,8	0,2	0,2	0,5			
v_3	0,25	—0,75	—0,75	—0,5	0,5	0,25	0,25	—0,75			

Полный протокол вычисления поведения (вместе с изменениями динамических параметров) конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_1)$ приведен в табл. 4.

Видно, что внутренние состояния в тактах 1 и 7 повторяются. Из теоремы 1 следует, что в дальнейшем отрезок протокола, образованный столбцами 1–6, будет повторяться в дальнейшем.

Пример 2. Рассмотрим теперь поведение конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_2)$, в которой набор параметров $\mathbf{H}_2$ получен из $\mathbf{H}_1$ заменой значения $d_{11} = 0,5$ на $d_{11} = 0,3$. Для этого достаточно изменить некоторые величины в приведенном выше расчете. Получим: $X(0) = (0,3; 0,3)$; $s_2(0) = w_{21} \cdot x_1(0) = 0,6$; отсюда $v_2(0) = s_2(0) + v_{2en}^0 = 0,6 - 0,8 = -0,2$, т.е. суммарная скорость роста потенциала N_2 становится отрицательной и потенциал N_2 не растет. Формально это означает, что для $\Delta U_2(0)$ выполняются условия строки 4 таблицы 2, т.е. $\Delta U_2(0) = \infty$. В результате все остаточные потенциалы получают значение ∞ , а это означает, что процесс остановился в самом начале, и поведение конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_2)$ состоит из одного начального внешнего состояния 101.

Эти два примера показывают, что одна и та же сеть при разных параметрах может генерировать различное поведение. Множество всех ее возможных поведений будем называть репертуаром поведений сети. Ниже будут рассмотрены некоторые задачи анализа репертуара поведений автономной сети.

4. Анализ репертуара поведений автономной пороговой сети

Напомним ряд известных понятий. Бесконечная последовательность $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{l-1}, \dots$ называется периодической, если некоторый ее отрезок $a_k, \dots, a_{l-1}$ повторяется бесконечное число раз. Этот отрезок называется периодом, а отрезок $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ — предпериодом. Такая последо-

вательность записывается как $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k, \dots, a_{l-1})$. Длинной предпериода является целое число $k \geq 0$, а длиной периода – целое число $l - k \geq 1$.

В поведении АММС два вектора $Y(t), Y(t + 1)$ всегда отличаются хотя бы в одном разряде, потому что в момент $t + 1$ изменилось состояние, по крайней мере, одного агента. Поэтому для АММС случай $l - k = 1$ соответствует тому, что начиная с момента k , событий не происходит: потенциалы всех агентов соответствуют строкам 1 или 4 табл. 2 и последовательность $Y(0), \dots, Y(k - 1), Y(k)$ становится конечной. Такое поведение будем называть стационарным; его заключительное состояние $Y(k)$ также стационарно. Поведение конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_2)$ (пример 2) – это пример стационарного поведения длины 1; его начальное состояние является одновременно заключительным и, следовательно, стационарным.

При $l - k > 1$ бесконечное поведение $Y(0), \dots, Y(k - 1), (Y(k), \dots, Y(l - 1))$ будем называть периодическим поведением. Поведение конфигурации $\Sigma_1(\mathbf{H}_1)$ (пример 1) – это пример периодического поведения, в котором длина периода равна 6, а длина предпериода равна 1.

Теорема 1 показывает, что автономную АММС можно интерпретировать как автономный автомат, в котором состояниями являются векторы $U(t)$. Из теории конечных автоматов [8] известно, что автономный конечный автомат генерирует периодическую последовательность состояний, причем длина как периода, так и предпериода не превосходит число M состояний. Это объясняется тем, что благодаря конечности числа состояний не позднее, чем через M тактов, появится состояние $Y(t)$, $t \leq M$, которое совпадет с одним из предыдущих состояний $Y(t')$, $t' < t$ и возникнет периодическая последовательность с периодом $(Y(t'), \dots, Y(t - 1))$, длина которого меньше M . Однако в автономной АММС это рассуждение не проходит, поскольку множество возможных значений потенциалов бесконечно, и вопрос о том, всегда ли автономная АС генерирует периодическую последовательность состояний, остается открытым. Здесь ограничимся некоторыми простыми утверждениями.

Начальное состояние сети $U(0)$ будем называть *естественным*, если для любого инициативного агента N_i выполняется $U_i(0) > P_i$, а для любого реактивного агента N_j выполняется $U_j(0) < P_j$.

Теорема 2. Для любой автономной асинхронной сети Σ и любого ее естественного состояния $U(0)$ существует такой набор параметров $\mathbf{H}$, при котором в конфигурации $\Sigma(\mathbf{H})U(0)$ является стационарным.

Доказательство. Пусть $U(0)$ – естественное начальное состояние. Из табл. 2 видно, что оно будет стационарным, если суммарные скорости для всех инициативных агентов положительны, а для всех реактивных агентов отрицательны. Поэтому из (3), (4) получаем, что искомым набор параметров должен удовлетворять следующим условиям:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(0) + v_{ien}^1 &> 0, \quad \text{если } N_i \text{ – инициативный агент;} \\ \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(0) + v_{ien}^0 &< 0, \quad \text{если } N_i \text{ – реактивный агент.} \end{aligned}$$

Конкретный набор значений, удовлетворяющий условиям (8), можно получить следующим образом. Назначаем произвольные значения параметров w_{ij} и d_{ij} ; при этом для всех агентов сформируются суммы $\sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t)$. Найдём среди них максимальную и минимальную суммы. Затем назначаем эндогенные скорости $v_{ien}^\alpha(t)$, удовлетворяющие (8):

1) для инициативных агентов:

если $\max_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) > 0$, то v_{ien}^1 – любое положительное число;

если $\max_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) \leq 0$, то $v_{ien}^1 > \left| \max_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) \right|$;

2) для реактивных агентов:

если $\min_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) < 0$, то v_{ien}^0 – любое отрицательное число;

если $\min_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) \geq 0$, то $v_{ien}^0 < - \left| \min_i \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j(t) \right|$.

Теорема доказана.

Если $U(0)$ не является естественным, теорема может стать неверной: когда инициативный агент пассивен и входное торможение мало, его суммарная скорость положительна и через некоторое время он станет активным. Аналогично, если реактивный агент активен и входное возбуждение мало, то его суммарная скорость отрицательна и через некоторое время он станет пассивным.

Теорема 3. Существуют сети, все поведения которых стационарны.

Покажем, что такими сетями являются все ациклические сети. Пусть Σ – ациклическая сеть. Тогда 1) у нее есть агенты-источники, у которых нет входных связей, и агенты-стоки, у которых нет выходных связей; 2) для любого агента N_i остальные агенты делятся на три группы: а) предки N_i – агенты, из которых есть пути к N_i ; б) потомки N_i – агенты, к которым есть пути из N_i ; в) остальные агенты.

Ацикличность сети позволяет провести ранжирование всех агентов по самому длинному пути из источника: агент N_i получает ранг j , если самый длинный путь из источников в N_i имеет длину j . Заметим, что при такой ранжировке а) агент ранга j обязательно имеет входящее ребро от некоторого агента ранга $j - 1$; б) все предки агента ранга j имеют строго меньшие ранги; в) между агентами одного ранга связей нет.

Рассмотрим множество агентов-источников, т.е. агентов ранга 0. Так как они не имеют воздействий от других агентов сети, то наступит момент t_0 , когда все они перейдут в стационарное естественное состояние: инициативные агенты станут стационарно активными, а реактивные агенты – стационарно пассивными. С этого момента все сигналы, идущие к агентам ранга 1, становятся стационарными и, следовательно, суммарные скорости агентов ранга 1

перестанут изменяться. Поэтому наступит момент t_1 , когда все агенты ранга 1 перейдут в стационарное состояние. Рассуждая индуктивно, допустим, что существует момент t_j , в котором все агенты ранга j перешли в стационарное состояние. С этого момента все сигналы, идущие к агентам ранга $j + 1$, становятся стационарными и, следовательно, суммарные скорости агентов ранга $j + 1$ перестанут изменяться. Поэтому наступит момент t_{j+1} , когда все агенты ранга $j + 1$ перейдут в стационарное состояние. Отсюда следует, что наступит момент $t_{\max}$, когда агенты с максимальным рангом перейдут в стационарное состояние, что и доказывает теорему.

5. Анализ устойчивости поведения автономной сети к изменениям ее параметров

5.1. Постановка задачи и пример

Важным аспектом исследования репертуара поведений асинхронной сети является вопрос об устойчивости конкретного поведения сети к изменениям параметров ее элементов. Точная постановка задачи такова. Задана сеть Σ , конкретная конфигурация $\Sigma(\mathbf{H})$ и ее начальное состояние. Каковы области изменения параметров сети, при которых это поведение не изменяется?

Здесь ограничимся случаем, когда изменяется один параметр. Для этого случая точная постановка задачи выглядит так. Будем рассматривать поведение сети Σ на множестве конфигураций $\Sigma(\mathbf{H}_p)$ таких, что в любых двух конфигурациях $\Sigma(\mathbf{H}_{pi})$ и $\Sigma(\mathbf{H}_{pj})$ из этого множества наборы $\mathbf{H}_{pi}$ и $\mathbf{H}_{pj}$ отличаются только значениями параметра p . Задача заключается в том, чтобы для любого начального состояния $Y(0)$ найти множество положительных чисел $h_1, h_2, \dots$, разбивающих полуось значений параметра p на такие интервалы $[0, h_1)$, $[h_1, h_2)$, $\dots$, $[h_{k-1}, h_k)$, $\dots$, что поведения конфигураций $\Sigma(\mathbf{H}_{pi})$ и $\Sigma(\mathbf{H}_{pj})$ одинаковы, если p_i и p_j находятся внутри одного интервала, и различны, если p_i и p_j находятся в разных интервалах. Такие интервалы назовем *интервалами устойчивости поведения сети* относительно параметра p .

Пример 3. Сначала в качестве примера проведем поиск начального интервала устойчивости $[0, h_1)$ поведения сети на рисунке относительно параметра d_{11} . Как и в предыдущих примерах, начальным внутренним состоянием является $U(0) = (0,9; 0; 0,9)$.

Как видно из примера 2, при $d_{11} = 0,3$ поведение является стационарным. Заметим, что при этом все три агента находятся в естественных состояниях. Область устойчивости этого поведения, как следует из табл. 2 (строка 1 для N_1 и N_3 , строка 4 для N_2), определяется следующими неравенствами:

$$(9) \quad v_1(0) \geq 0, \quad v_2(0) \leq 0, \quad v_3(0) \geq 0.$$

Раскрывая суммарные скорости, получим:

$$(10) \quad \begin{aligned} s_1(0) + v_{1\text{en}}^1 &\geq 0, & \text{т.е. } s_1(0) &\geq -0,8, \\ s_2(0) + v_{2\text{en}}^0 &< 0, & \text{т.е. } s_2(0) &< 0,8, \\ s_3(0) + v_{3\text{en}}^1 &\geq 0, & \text{т.е. } s_3(0) &\geq -0,8. \end{aligned}$$

Подставим вместо $s_i(0)$ их выражения из шага 3 алгоритма:

$$(11) \quad w_{12}x_2(0) \geq -0,8, \quad \text{или} \quad w_{12}d_{32} \geq -0,8,$$

$$(12) \quad 0,8 \geq w_{21}x_1(0), \quad \text{или} \quad 0,8 \geq w_{21}d_{11},$$

$$(13) \quad w_{31}x_1(0) + w_{32}x_2(0) \geq -0,8, \quad \text{или} \quad w_{31}d_{11} + w_{32}d_{32} \geq -0,8.$$

Если в эти формулы подставить значения весов w_{ij} из табл. 4, то получим:

$$(14) \quad -d_{32} \geq -0,8 \quad \text{т.е.} \quad d_{32} \leq 0,8,$$

$$(15) \quad 0,8 \geq 2d_{11}, \quad \text{т.е.} \quad d_{11} \leq 0,4,$$

$$(16) \quad -0,5d_{11} - d_{32} \geq -0,8, \quad \text{т.е.} \quad 0,5d_{11} + d_{32} \leq 0,8,$$

причем неравенство (16) слабее, чем (15), и является лишним.

Видно, что при значениях $d_{11} \leq 0,4$ поведение сети не изменится, поскольку суммарная скорость $v_2(0)$ останется отрицательной. Поэтому 1) стационарное поведение сети рисунке, описанное в примере 2, остается неизменным, если d_{11} находится в интервале $(0, 0,4]$, а остальные параметры сети не меняются; 2) при $d_{11} > 0,4$ поведение сети должно измениться.

Для поиска верхней границы этого поведения воспользуемся описываемым ниже методом.

Пусть для заданного начального состояния $Y(0)$ вычислены границы полуинтервала $[h_{k-1}, h_k)$ устойчивости относительно p . Будем искать верхнюю границу интервала $[h_k, h_{k+1})$, а также вычислять поведение сети в этом интервале.

5.2. Метод определения границ областей устойчивости для одного параметра p

Идея метода заключается в том, чтобы провести вычисления алгоритма п. 3.2 со значением параметра $p = h_k + \varepsilon$, где ε – неизвестное положительное число. В ходе этих вычислений будут возникать выражения, содержащие ε . Формируя неравенства из этих выражений (подобно тому, как это делалось выше при получении неравенств (9)–(16)), будем их решать относительно ε и среди решений вида $\varepsilon < q$, где $q > 0$, выбирать решение с наименьшим q . Решения вида $\varepsilon > q$ выбираться не будут, поскольку они не относятся к окрестности h_k . Если поведение периодически или стационарно, получим конечное число решений вида $\varepsilon < q$. Тогда h_{k+1} – это наименьшее из всех полученных значений q .

Шаги базового алгоритма п. 3.2, которые будут использоваться в описании метода, будем обозначать как A1, A2, ..., а шаги самого метода – как M1, M2, ...

Обозначим набор параметров, в котором $p = h_k$, через $\mathbf{H}_{pk}$, а набор, в котором $p = h_k + \varepsilon$, через $\mathbf{H}_{pk\varepsilon}$. Метод определим индуктивно: считаем, что для первых $t - 1$ тактов уже вычислено поведение конфигурации $\Sigma(\mathbf{H}_{pk\varepsilon})$ и найдена минимальная оценка $\varepsilon < q(t - 1)$. Опишем шаги метода для текущего такта t .

М1. Вычисляются первые 4 шага алгоритма п. 3.2 для начального состояния $Y(t)$ и конфигурации $\Sigma(\mathbf{H}_{pk\varepsilon})$. При этом выражения для некоторых вычисляемых параметров будут содержать не только числа, но и символ ε .

М2. Для всех $i = 1, \dots, n$ проверяются условия переключения агента N_i :

$$(17) \quad \text{если } y_i = 0, \quad \text{то } v_i > 0,$$

$$(18) \quad \text{если } y_i = 1, \quad \text{то } v_i < 0.$$

Для любого агента N_i , у которого ни одно из неравенств (17), (18) не выполняется, $\Delta U_i(t) = \infty$. Эти агенты в дальнейших вычислениях не участвуют. Если $\Delta U_i(t) = \infty$ для всех i , то процесс вычисления останавливается; состояние $Y(t)$ стационарно.

М3. Для остальных агентов возникнут неравенства, некоторые из которых содержат ε . После решения этих неравенств из решений вида $\varepsilon < q, q > 0$, выбирается решение $q_0(t)$, минимальное среди всех q . Текущей оценкой для ε полагается $q_1(t) = \min(q_0(t), q(t-1))$.

М4. Вычисляются шаги А5 и А6. На шаге А6 получаются равенства вида $\tau_{ri}(t) = \alpha_{ri}$, где α_{ri} – либо положительные числа, либо выражения, содержащие ε .

М5. – Если все остаточные времена равны ∞ , то процесс вычисления останавливается; состояние $Y(t)$ стационарно; $h_{k+1} = q_1(t)$;

– если только для одного i $\tau_{ri}(t) \neq \infty$, то в такте t переключается агент N_i и состояние $Y(t+1)$ отличается от $Y(t)$ состоянием агента N_i ; длина такта $\tau(t) = \tau_{ri}(t)$; $q(t) = q_1(t)$;

– в противном случае формируется множество $A = \{\alpha_r^*\}$, в которое включаются все α_{ri} , содержащие ε , а также наименьшее из α_{ri} , являющихся числами.

М6. Для каждой пары $(\alpha_{ri}^*, \alpha_{rj}^*)$ формируются два неравенства $\alpha_{ri}^* < \alpha_{rj}^*$, $\alpha_{ri}^* > \alpha_{rj}^*$ и решаются относительно ε . Верными считаются неравенство, которое дает решение вида $\varepsilon < q$, и соответствующее неравенство $\tau_{ri} < \tau_{rj}$ или $\tau_{ri} > \tau_{rj}$.

М7. Из верных неравенств, полученных на предыдущем шаге, находим $\tau_{\min}(t)$ и выполняем шаг А7, т.е. определяем следующее состояние и длину такта.

М8. Среди правых частей неравенств вида $\varepsilon < q$, полученных на шаге М6, находится минимальное q . Обозначим его как $q_2(t)$. Полагаем $q(t) = \min(q_2(t), q(t-1))$. Таким образом, поведение сети на первых $t+1$ шагах сохраняется в интервале $h_k < p < h_k + q(t)$.

М9. Выполняется шаг А8 базового алгоритма – пересчет потенциалов. В выражениях, полученных на этом шаге, по-прежнему возможно появление ε .

М10. Перейти к М1 для $t+1$.

Пример 4. Приведем пример, поясняющий шаги М4–М7.

Пусть для сети из 3 агентов на шаге М4 получены равенства $\tau_{r1} = 2\varepsilon$, $\tau_{r2} = 0,5 - 0,3\varepsilon$, $\tau_{r3} = 0,4$.

Множество А (шаг М5) состоит из правых частей этих равенств.

М6. Для каждой пары из А составляем два неравенства:

для α_{r1}, α_{r2} : $2\varepsilon < 0,5 - 0,3\varepsilon$, откуда $\varepsilon < 5/23 \approx 0,21$; противоположное неравенство неверно; поэтому $\tau_{r1} < \tau_{r2}$;

для α_{r1}, α_{r3} : $2\varepsilon < 0,4$ и $\varepsilon < 0,2$; поэтому $\tau_{r1} < \tau_{r3}$;

для α_{r2}, α_{r3} : $0,4 < 0,5 - 0,3\varepsilon$ и $\varepsilon < 1/3$; поэтому $\tau_{r3} < \tau_{r2}$.

М7. Из полученных неравенств заключаем, что $\tau_{\min}(t) = \tau_{r1}$.

М8. $q(t) = 0,2$, т.е. $\varepsilon < 0,2$.

Пример 5. В примере 3 было показано, что верхняя граница для интервала $[0, h_1)$ поведения сети на рисунке относительно параметра d_{11} равна 0,4. Применим теперь описанный выше метод для поиска верхней границы следующего интервала устойчивости $[0,4, h_2)$. Вычисления приводятся в сокращенном виде: показаны только те их места, где возникают новые оценки ε .

Момент $t = 0$:

Начальное состояние (текущие потенциалы): $U(0) = (0,9; 0; 0,9)$.

1. Начальное внешнее состояние $Y(0) = (1; 0,1)$.

2. $X(0) = (0,4 + \varepsilon; 0,3)$.

3. Силы воздействия:

$$s_1(0) = w_{12}x_2(0) = -0,3;$$

$$s_2(0) = w_{21}x_1(0) = 0,8 + 2\varepsilon;$$

$$s_3(0) = w_{31}x_1(0) + w_{32}x_2(0) = -0,2 - 0,3 - 0,5\varepsilon = -0,5 - 0,5\varepsilon.$$

4. Суммарные скорости:

$$v_1(0) = s_1(0) + v_{1\text{en}}^1 = -0,3 + 0,8 = 0,5,$$

$$v_2(0) = s_2(0) + v_{2\text{en}}^0 = 0,8 + 2\varepsilon - 0,8 = 2\varepsilon,$$

$$v_3(0) = s_3(0) + v_{3\text{en}}^1 = -0,5 - 0,5\varepsilon + 0,8 = 0,3 - 0,5\varepsilon.$$

5. Остаточные потенциалы:

$$\Delta U_1(0) = \infty,$$

$$\Delta U_2(0) = P_2 - U_2(0) = 0,6,$$

$$\Delta U_3(0) = \infty.$$

Последнее равенство верно при условии, что $v_3(0) = 0,3 - 0,5\varepsilon \geq 0$, откуда $\varepsilon \leq 0,6$ (Шаг М2).

6. Остаточные времена:

$$\tau_{r1}(0) = \infty,$$

$$\tau_{r2}(0) = \Delta U_2(0) / |v_2(0)| = 0,6/2\varepsilon,$$

$$\tau_{r3}(0) = \infty.$$

7. Минимальное остаточное время $\tau_{\min}(0) = \tau_2(0) = 0,6/2\varepsilon$.

Соответственно, *длина такта* $[0, 1)$ $\tau(0) = 0,6/2\varepsilon$.

Событие, произошедшее в момент 1, – включение агента N_2 .

8. Потенциалы для момента $t = 1$:

$$U(1) = (0,9; 0,6; 0,9).$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при $d_{11} > 0,4$ начальное состояние $Y(0)$ уже не стационарно и сеть генерирует новое поведение. Обозначим его через $B_{04\varepsilon}$.

...

Вычисления для тактов 1, 2, 3 ничего не добавляют к оценке ε . На 4-м такте ε исчезает из значений параметров, потому что выключился его носитель N_1 . На 5-м такте ε снова появляется. К этому моменту

$$U_1(5) = 0,6,$$

$$U_2(5) = U_2(4) + \tau(4)v_2(4) = 0,6 - 0,6 \cdot 0,8 = 0,12,$$

$$U_3(5) = 0 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,3.$$

Вычисления на такте 5 дают следующие результаты.

Момент $t = 5$:

1. Внешнее состояние $Y(5) = (1, 0, 0)$.

Вычисленное поведение: 101, 111, 110, 010, 000, 100.

2. $X(5) = (0,4 + \varepsilon; 0)$.

3. Силы воздействия:

$$s_1(5) = w_{12} \cdot x_2(5) = 0;$$

$$s_2(5) = w_{21} \cdot x_1(5) = 2 \cdot (0,4 + \varepsilon) = 0,8 + 2\varepsilon;$$

$$s_3(5) = w_{31} \cdot x_1(5) + w_{32} \cdot x_2(5) = -0,5(0,4 + \varepsilon) = -0,2 - 0,5\varepsilon.$$

4. Суммарные скорости:

$$v_1(5) = s_1(5) + v_{1\text{en}}^1 = 0,8,$$

$$v_2(5) = s_2(5) + v_{2\text{en}}^0 = 0,8 + 2\varepsilon - 0,8 = 2\varepsilon,$$

$$v_3(5) = s_3(5) + v_{3\text{en}}^0 = -0,2 - 0,5\varepsilon + 0,5 = 0,3 - 0,5\varepsilon.$$

5. Остаточные потенциалы:

$$\Delta U_1(5) = \infty,$$

$$\Delta U_2(5) = P_2 - U_2(5) = 0,6 - 0,12 = 0,48,$$

$$\Delta_3(5) = 0,6 - 0,3 = 0,3.$$

6. Остаточные времена:

$$\tau_{r1}(5) = \infty,$$

$$\tau_{r2}(5) = \Delta U_2(5) / |v_2(5)| = 0,48 / 2\varepsilon = 0,24 / \varepsilon,$$

$$\tau_{r3}(5) = 0,3 / (0,3 - 0,5\varepsilon) = 0,6 / (0,6 - \varepsilon).$$

Рассмотрим неравенство $0,6 / (0,6 - \varepsilon) < 0,24 / \varepsilon$. После преобразований получаем $\varepsilon < 0,4(0,6 - \varepsilon)$, откуда $\varepsilon < 0,1714$ и $0,4 + \varepsilon < 0,5714$. Поэтому $\tau_{r3}(5) < \tau_{r2}(5)$. В результате событием, произошедшим в момент 6, является включение нейрона N_3 , а верхняя граница поведения $B_{04\varepsilon}$ до 5-го такта равна 0,5714.

Вычисления до такта 7 ничего не добавляют к оценке ε . К моменту 7 получаем значения потенциалов, совпадающие с их значениями на такте 1: $U(7) = U(1) = (0,9; 0,6; 0,9)$. Таким образом, на этом такте система входит в цикл: $V_{04} = 101, (111, 110, 010, 000, 100, 101)$. Поэтому новых оценок ε уже не будет, оценка $\varepsilon < 0,1714$ – окончательная, верхняя граница интервала значений d_{11} , в котором сеть генерирует поведение V_{04} , равна 0,5714.

Вычисления показывают, что при $d_{11} = 0,58$ поведение сети действительно отличается от V_{04} . Протокол V_{04} для $d_{11} = 0,5$ приведен в табл. 4.

6. Заключение

Как уже было отмечено, предложенная модель интерпретируется как биологическая нейронная сеть с химическими взаимодействиями [1]. Кроме того, ее можно интерпретировать как социальную сеть с разными типами информационных обменов. Заметим, что социальные сети с разными типами активности уже рассматривались в [9, 10]. В нейробиологической интерпретации цветные сигналы – это транмиттеры, пространство сигналов – это внеклеточное пространство, потенциал – это мембранный потенциал нейрона. В социальной сети цветные сигналы – это специальные каналы связи, доступные только определенному виду агентов, пространство сигналов – это общая доска объявлений, на которой каждый агент видит только сообщения определенного цвета; потенциал вместе с эндогенной скоростью – это характеристика инертности агента, уровня его готовности к переключению.

Предложенный метод структурирования поведения формально пригоден для любых статических параметров, однако наибольший интерес представляет структурирование по параметрам d_{ij} . Дело в том, что эти параметры (цветные сигналы) могут изменять пространство сигналов в результате внешних воздействий, тогда как остальные параметры (веса, пороги, эндогенные скорости) являются внутренними характеристиками агентов, изменение которых гораздо более затруднено. В частности, метод структурирования поведения нейробиологических сетей может быть использован для планирования биологических экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А. и др. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018. № 2. С. 3–20.
2. Rao A.S., Georgeff M.P. BDI-agents: From Theory to Practice // Proc. First Int. Conf. Multiagent Syst. (ICMAS'95) (ed. V. Lesser). AAAI Press / The MIT Press. 1995. P. 312–319.
3. Городецкий В.И., Бухвалов О.Л., Скобелев П.О., Майоров И.В. Современное состояние и перспективы промышленных применений многоагентных систем // Управление большими системами. 2017. Вып. 66. С. 93–157.
4. Muller D.E., Bartky W.S. A theory of asynchronous circuits // Int. Sympos. Switching Theory in Harvard University. 1959. P. 204–243.

5. *Варшавский В.И., Кишиневский М.А, Мараховский В.Б. и др.* Автоматное управление асинхронными процессами в ЭВМ и дискретных системах. М.: Наука, 1986.
6. *Brzozowski J.A.* Topics in asynchronous circuit theory //Recent Advances Formal Languages Appl. 2006. V. 25. P. 11–42.
7. *Кузнецов О.П.* Асинхронные сети с многосортными сигналами // ДАН. 2019. Т. 487. № 1. С. 10–13.
8. *Минский М.* Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971.
9. *Zhilyakova L.Yu., Gubanov D.A.* Double-threshold Model of the Activity Spreading in a Social Network. The Case of Two Types of Opposite Activities // Proc. 11th IEEE Int. Conf. Application of Information and Communication Technologies AICT2017. 2017. V. 2. P. 267–270.
10. *Zhilyakova L.Yu.* Modeling the Structure of MIMO-Agents and Their Interactions / Kuznetsov S., Panov A. (eds.) Artificial Intelligence. RCAI 2019. Communications in Computer and Information Science, vol. 1093. Cham: Springer, 2019. P. 3–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Васильевым.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 11.06.20

Принята к публикации 09.07.2020

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griefer@ccas.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АГРЕГИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГРАХ

Исследуются две задачи о рациональном агрегировании информации в иерархических играх. Рассматриваются непрерывные способы агрегирования. Рациональность оценивается по двум критериям: максимальному гарантированному выигрышу одного из игроков и размерности пространства агрегатов.

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат, теория информации, размерность.

DOI: 10.31857/S0005231021020094

1. Введение

Опишем в нескольких словах одно из направлений развития теории игр. В 30-х гг. XX в. Г. фон Штакельберг начал рассматривать игры с фиксированным порядком шагов (см. [1], первое издание вышло в 1934 г.). Он рассматривал лишь игры без обратной связи: игроки, принимающие решения раньше, не имели никакой информации о выборах, которые будут делать игроки, принимающие решения позже.

На рубеже 60-х и 70-х гг. XX в. стали исследоваться аналогичные модели с обратной связью: некоторые игроки выбирали свои решения как функции от выборов своих партнеров. Такие модели стали исследовать практически одновременно и независимо в теории иерархических игр [2], теории активных систем [3], теории контрактов [4] и т.д. Это позволило существенно расширить класс процессов принятия решений, описываемых теоретико-игровыми моделями. В первых моделях такого рода рассматривались лишь крайние случаи: либо предполагалось, что один игрок имеет полную информацию о выборе своего партнера, либо считалось, что такой информации у него нет вовсе.

Промежуточные случаи стали изучаться следующим поколением исследователей. Рассматривались модели, в которых игроки могли получать информацию о выборах друг друга, но в агрегированном виде [5]. Это направление развивалось параллельно в теории иерархических игр и теории активных систем (дальнейшие ссылки – в [6] и [7] соответственно). По-видимому, за

рубежом такие задачи отдельно не изучались, хотя, возможно, и возникали где-то в неявном виде.

Следующий шаг в данном направлении – рассмотрение моделей, в которых некоторые из игроков могут сами выбирать содержание используемой информации. Но здесь возникают новые трудности на этапе постановки задач. Для традиционных моделей легко доказывается принцип: чем большей информацией обладает игрок, тем лучше для него [8]. Поэтому ответ на вопрос о выборе “оптимального” способа обмена информацией становится тривиальным и потому неинтересным. Но при этом никак не учитывается, что использование больших объемов информации требует затрат времени, сил, денег и т.д. Для учета этого обстоятельства необходима мера объема информации.

К сожалению, на сегодняшний день (да, вероятно, и вообще) такой универсальной меры нет. Можно предложить несколько вариантов. Наиболее интересным¹ представляется вариант, рассмотренный в [9]. В этом варианте считается, что информация поступает в виде некоторых сообщений и длину этих сообщений в битах предлагается использовать. Этот подход представляется разумным, пока объемы информации относительно невелики.

При больших объемах информации возникает проблема. В другом контексте она отмечалась уже в [10]. Применительно к задачам принятия решений ее можно сформулировать так. Допустим, лицо, принимающее решения, готово обработать один терабайт информации. Тогда ситуация практически никак не изменится, если увеличить этот объем на триста килобайт или уменьшить на двести мегабайт. Таким образом, при таких объемах информации обычные числа не слишком приспособлены для их измерения. Эта проблема заслуживает отдельного обсуждения, но оно выходит за рамки данной статьи.

В физике часто подобные проблемы решаются следующим образом: большое конечное множество заменяется континуумом, и для описания его “массивности” используется какой-то обобщенный показатель. Можно использовать, например, размерность этого континуума. Это, собственно, и сделано далее. Точные формулировки содержатся в разделе 2.

Подобная задача была впервые поставлена А.Ф. Кононенко [6, 11]. Правда, в этих публикациях рассматриваемый континуум считался вложенным в евклидово пространство и в качестве “меры информации” использовалась размерность этого евклидова пространства. Это дополнительное ограничение не очень хорошо отражает суть дела и затрудняет решение задачи. Кроме того, в цитированных публикациях для решения задачи используются локальные дифференциально-геометрические методы. Как будет видно из дальнейшего, рассматриваемая задача имеет существенно глобальный характер². Поэтому

¹ Ссылки на публикации, в которых рассматриваются другие варианты, можно найти в [9]. К сожалению, в большинстве случаев приходится сталкиваться с какими-то патологиями: либо решение задачи “вырождается” и плохо интерпретируется в содержательных терминах, либо в типичном случае это решение оказывается неустойчивым по отношению к малым изменениям параметров модели и т.п. Модель, рассмотренная в [9], будто бы, свободна от этих недостатков. Кроме того, на ее основе удалось построить модели, учитывающие, например, возможность ошибок при передаче информации. Все эти результаты опубликованы в журнале “Автоматика и телемеханика” и сборнике “Управление большими системами” и легко могут быть найдены по фамилии автора данной статьи.

² См. замечание 6 далее.

му локальными методами удастся получить решение лишь для очень узкого класса игр.

Для случая антагонистических игр рассмотренная в данной статье задача была решена в [12]. В принципе, общий случай сводится к антагонистическому. Но при этом приходится использовать довольно громоздкие геометрические конструкции. Техника, впервые примененная в [9], позволяет исследовать общий случай так же просто, как и антагонистический.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать игру двух лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные топологические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций выигрыша g и h соответственно. Выбор управления из множества U или V считается элементарной операцией.

Замечание 1. Здесь компактность понимается в смысле [13, 14] как возможность выбрать из каждого открытого покрытия конечное подпокрытие. В [15] для этого понятия используется термин бикompактность, а компактность понимается несколько иначе. К сожалению, терминологические расхождения имеются и в других случаях. Везде далее используется терминология из [13, 14].

Введем обозначение. Далее $\Phi(X, Y)$ обозначает класс всех функций из множества X в множество Y .

Пусть заданы множество W и отображение $P: V \rightarrow W$. Наряду с игрой Γ будем рассматривать игру $\Gamma_P = \langle U_P, V_P, g_P, h_P \rangle$, заданную следующими условиями:

$$V_P = V, \quad U_P = \Phi(W, U), \\ g_P(u_P, v_P) = g(u_P(P(v_P)), v_P), \quad h_P(u_P, v_P) = h(u_P(P(v_P)), v_P).$$

Содержательно множество W интерпретируется как множество сообщений, которые второй игрок может передать первому, а функция P – как способ агрегирования информации о сделанном вторым игроком выборе.

Замечание 2. В дальнейшем систематически будет рассматриваться пара игр Γ и Γ_P . Удобно термин “управление” использовать в отношении исходной игры Γ , а термин “стратегия” относить к ее информационному расширению Γ_P . При этом стратегия будет пониматься как способ выбора управлений в зависимости от получаемой информации, что соответствует традиции, восходящей к фон Нейману.

Если отображение P постоянно, то игра Γ_P в естественном смысле изоморфна игре Γ . Особое место занимает случай, когда $W = V$, а отображение P – тождественное. Соответствующую игру по традиции будем обозначать через Γ_2 . Н.С. Кукушкин показал, что при любом способе обмена информацией первый игрок гарантированно получает выигрыш, который не превосходит максимального гарантированного результата в игре Γ_2 . Таким образом,

этот результат – это идеал, которого хотелось бы достичь, по возможности, с наименьшими объемами передаваемой информации. Именно такая постановка вопроса исторически была первой (см., например, [6, 11]). В частности, по этой причине во многих работах речь идет об “агрегировании информации”. В данной статье используется несколько иной подход: акцент сделан на получении “достаточно хорошего” (но не обязательно максимального) результата при приемлемом объеме передаваемой информации.

Будем считать, что игрок номер один обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию и сообщает ее партнеру. В таком случае нетрудно оценить множество рациональных выборов второго игрока. В самом деле, если он действительно стремится к максимизации значения функции h_P , то естественно предположить, что он выберет свою стратегию из множества $BR(u_P)$, определенного одним из условий³:

- $BR(u_P) = \left\{ v \in V : h(u_P(P(v)), v) = \max_{w \in V} h(u_P(P(w)), w) \right\}$, если верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$ достигается;
- $BR(u_P) = \left\{ v \in V : h(u_P(P(v)), v) \geq \sup_{w \in V} h(u_P(P(w)), w) - \kappa \right\}$ в противном случае (здесь κ – наперед заданное положительное число).

Следовательно, выбрав стратегию u_P , при разумном поведении партнера первый игрок может с гарантией рассчитывать на получение выигрыша

$$\inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v),$$

а его максимальный гарантированный результат составит

$$R_\kappa(\Gamma_P) = \sup_{u_P \in \Phi(W, U)} \inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v).$$

Аналогичным образом определяется максимальный гарантированный результат первого игрока в исходной игре Γ :

$$R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v),$$

где

$$BR(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\}.$$

Непосредственно проверяется, что игра Γ_P является квазиинформационным расширением игры Γ . Некоторые простые следствия этого факта будут использоваться далее. В частности, из этого факта следует, что для любых W и $P : V \rightarrow W$ справедливы неравенства $R_\kappa(\Gamma) \leq R_\kappa(\Gamma_P) \leq R_\kappa(\Gamma_2)$. Кроме

³ Поскольку по определению $V = V_P$, здесь и далее вместо v_P и V_P будем писать v и V соответственно. Это сокращает формулы и не должно вызвать недопонимания.

того, при “увеличении объема доступной информации” максимальный гарантированный результат первого игрока не убывает. Определение квазиинформационного расширения и доказательства этих простых фактов можно найти в [8].

Если считать, что интересы управляемой системы отождествляются с интересами первого игрока (Центра), то для оценки качества управления системой довольно естественно использовать величину $R_k(\Gamma_P)$. Попробуем определить меру сложности управления системой. Для этого придется несколько уменьшить класс рассматриваемых игр Γ_P . В контексте изложенного в разделе 1 достаточно естественным выглядит следующее *предположение*.

Будем считать, что пространство W наделено топологией, а отображение P непрерывно.

В таком случае достаточно разумно использовать в качестве меры сложности процесса управления размерность пространства W^4 . Но здесь требуется несколько уточнений.

Очевидно, множество W всегда можно снабдить тривиальной топологией, объявив открытыми пустое множество, само множество W и только их. Тогда всякое отображение $P : V \rightarrow W$ будет непрерывным. Соответствующая задача была, по сути, решена в [16]. Найденное там решение не очень хорошо интерпретируется. Да и размерность такого топологического пространства определить непросто⁵. Поэтому нужны дополнительные предположения, исключающие такого рода тривиальные решения. Из изложенного в данном абзаце следует, что это должны быть предположения типа отделимости.

В дальнейшем будем считать, что пространство W – нормальное. (Напомним, что нормальным называется такое пространство, что, во-первых, для любых двух различных точек x и y найдется открытое множество O , для которого $x \in O$ и $y \notin O$, а, во-вторых, для любых непересекающихся замкнутых множеств X_1 и X_2 найдутся такие открытые множества O_1 и O_2 , что $X_1 \subset O_1$, $X_2 \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.)

Для простоты сделаем еще одно техническое предположение. Будем рассматривать только пространства W , имеющие счетную базу. От этого предположения можно было бы отказаться, но это потребовало бы более тонких топологических рассуждений, что выходит за рамки данной статьи. Данное предположение будет использоваться только при доказательстве необходимых условий в разделе 5.

Содержательная интерпретация более общих пространств в контексте задачи об агрегировании информации вызывает определенные затруднения. Поэтому, не имея в том конкретной нужды, рассматривать их не станем.

⁴ Переходя на неформальный уровень, можно мыслить так. Центр в процессе игры Γ_P получает некоторое “сообщение” о положении точки $w \in W$. Можно предполагать, что ему сообщаются “координаты” точки w . И чем меньше этих координат, тем лучше. А количество координат – это уже “размерность”.

⁵ Формальное определение размерности должно отражать определенные содержательные представления. Придумать определение, удовлетворяющее этому условию для всех топологических пространств, не удастся. Поэтому обычно накладывают дополнительные условия типа отделимости.

Существует несколько альтернативных определений размерности. Для некоторых топологических пространств по-разному определенные размерности не совпадают. Но такие пространства “устроены” весьма сложно, и их вряд ли можно рассматривать в качестве “разумных” решений в задачах принятия решений. Поэтому выбор такого определения можно делать достаточно произвольно. В дальнейшем будет удобно пользоваться определением Чеха–Лебега. Соответствующая размерность пространства X обозначается через $\dim X$.

Напомним, что согласно этому определению размерностью пространства называется наименьшее натуральное число m , для которого в любое конечное открытое покрытие пространства можно вписать покрытие кратности m . Несложно показать, что размерность куба $[0, 1]^m$ не превосходит m . Сложнее, с использованием теоремы Брауэра, доказывается обратное неравенство $\dim [0, 1]^m \geq m$. Следовательно, $\dim [0, 1]^m = m$. Кроме того, размерность является топологическим инвариантом пространства. А поскольку m -мерный симплекс (выпуклая оболочка $m + 1$ точек общего положения, расположенных в евклидовом пространстве) гомеоморфен m -мерному кубу, его размерность тоже равна m .

Остановимся на одном обстоятельстве. Пусть $\varphi : W \rightarrow W'$ – гомеоморфизм. Тогда, с одной стороны, так как φ – гомеоморфизм, то $\dim W = \dim W'$. А с другой стороны, так как φ – взаимно однозначное отображение, то разумно считать, что с помощью отображений P и P' передается одна и та же информация, только по-разному закодированная. Этот факт можно рассматривать как аргумент в пользу использования размерности в качестве меры сложности информационного обмена⁶. Заметим кстати, что в таком случае несложно показать, что игры Γ_P и $\Gamma_{P'}$ изоморфны в том смысле, что каждая из них является квазиинформационным расширением другой. Поэтому получим равенство $R_\kappa(\Gamma_P) = R_\kappa(\Gamma_{P'})$.

Если зафиксировать показатель качества управления системой и количественную меру сложности информационных обменов, то получим двухкритериальную задачу. С одной стороны, хотелось бы, чтобы качество управления было повыше. А с другой – чтобы сложность информационных обменов была поменьше. Если эти показатели задавать так, как сделано выше, то эти две цели “почти противоположны”: с уменьшением сложности качество всегда не увеличивается, а часто уменьшается. Поэтому возникает вопрос о свертке этих двух критериев. Здесь возможны разные варианты.

В данной статье будут получены условия для чисел γ и m , при которых для заданной игры Γ существуют такие нормальное топологическое пространство W со счетной базой и непрерывная функция $P : V \rightarrow W$, что одновременно $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$.

Замечание 3. При сформулированных условиях образ

$$P(V) = \{w \in W : \exists v \in V \quad w = P(v)\}$$

⁶ Разумеется, первое, что приходит в голову в качестве меры “массивности” множества, – это его мощность. Но такая мера слишком “груба”: и одномерный отрезок и многомерный куб имеют мощность континуума (а, видимо, именно такие случаи представляют основной интерес). Поэтому нужна более “тонкая” мера.

множества V при отображении P – компактное, а значит, замкнутое подмножество пространства W . Следовательно, $\dim P(V) \leq \dim W$ (см. [14], с. 567). Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что отображение P сюръективно, а множество W компактно.

Займемся решением поставленной задачи.

3. Альтернативное определение максимального гарантированного результата

Удобнее пользоваться другим определением максимального гарантированного результата.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ_P , если существуют стратегия $u_P \in \Phi(W, U)$ и такое число λ , что выполняются условия:

- 1°. Существует стратегия $v \in V$ для которой $h(u_P(P(v)), v) \geq \lambda$;
- 2°. Для любой стратегии $v \in V$ или $g(u_P(P(v)), v) > \gamma$, или $h(u_P(P(v)), v) < \lambda$. Точная верхняя грань $R(\Gamma_P)$ гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным гарантированным результатом.

Замечание 4. В предыдущих публикациях [17] использовалось аналогичное определение, но там вместо строгого неравенства $g(u_P(P(v)), v) > \gamma$ использовалось нестрогое неравенство $g(u_P(P(v)), v) \geq \gamma$. Несложно видеть, что эти две формы эквивалентны. В данной статье удобнее пользоваться определением со строгим неравенством.

При сделанных в разделе 2 предположениях справедливо равенство $R_\kappa(\Gamma_P) = R(\Gamma_P)$. В этом разделе будут установлены некоторые факты, необходимые для его доказательства.

Введем следующее понятие. Назовем стратегию $u_P \in U_P$ регулярной, если верхняя грань

$$\sup_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$$

достигается. Пусть U_P^r – множество всех регулярных стратегий. Наряду с игрой $\Gamma_P = \langle U_P, V_P, g_P, h_P \rangle$ можно рассмотреть игру $\Gamma_P^r = \langle U_P^r, V_P, g_P, h_P \rangle$ (здесь сужения функций g_P и h_P на множество U_P^r обозначены теми же символами). Для игры Γ_P^r можно определить величины $R_\kappa(\Gamma_P^r)$ и $R(\Gamma_P^r)$, практически дословно повторяя определения этих величин для игры Γ_P . Из включения $U_P^r \subset U_P$ непосредственно следуют неравенства $R_\kappa(\Gamma_P^r) \leq R_\kappa(\Gamma_P)$ и $R(\Gamma_P^r) \leq R(\Gamma_P)$.

Установим следующие вспомогательные факты.

Лемма 1. Имеет место неравенство $R_\kappa(\Gamma_P) \leq R(\Gamma_P)$.

Лемма 2. Справедливо равенство $R_\kappa(\Gamma_P^r) = R(\Gamma_P^r)$.

Лемма 3. Выполняется равенство $R(\Gamma_P^r) = R(\Gamma_P)$.

Доказательства лемм 1–3 приведены в Приложении.

Из этих лемм немедленно следует равенство $R_\kappa(\Gamma) = R(\Gamma)$, которое будет использовано в дальнейшем.

4. Достаточные условия существования агрегата

В этом и следующем разделах будем заниматься вопросом о том, при каких условиях, связывающих числа γ и m , существуют пространство W и отображение $P : V \rightarrow W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$.

Простейшее из таких условий может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1. Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \dots, u_n$ из множества U и число λ , что множества

$$(1) \quad O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

$$(2) \quad O_i = \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = k + 1, \dots, n,$$

покрывают множество V и кратность покрытия $O_0, O_1, \dots, O_n$ не превосходит $m + 1$, а множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\}.$$

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \rightarrow W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$.

Доказательство теоремы 1 см. в Приложении.

Можно сформулировать другое достаточное условие.

Теорема 2. Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \dots, u_n$ из множества U и число λ , что множества

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

покрывают множество V и кратность покрытия $O_0, O_1, \dots, O_n$ не превосходит $m + 1$, а множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\}.$$

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \rightarrow W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$.

Доказательство теоремы 2 практически не отличается от доказательства теоремы 1⁷ и поэтому не приводится.

Достаточные условия теорем 1 и 2, вообще говоря, независимы. Понять причину несложно. Говоря неформально, множества O_i из теоремы 1 “меньше” соответствующих множеств из теоремы 2. Поэтому для того чтобы покрыть множество V , таких множеств потребуется больше. А поэтому кратность такого покрытия может оказаться большой. А с другой стороны, “большим” множествам из теоремы 2 может оказаться “тесно” в пространстве V , и по этой причине покрытие будет иметь большую кратность. Все зависит от конкретной игры. Соответствующие конкретные примеры строятся без труда.

Можно формулировать и другие подобные достаточные условия. Самым общим из них является следующее.

⁷ Функции φ_i нужно определить условием $\varphi_i(v) = \max\{g(u_i, v) - \gamma, \lambda - h(u_i, v), 0\}$, а остальное повторяется практически дословно.

Теорема 3. Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \dots, u_n$ из множества U и число λ , что множества

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

покрывают множество V , множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\},$$

и существуют множества $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ и непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l : V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

- множества $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ покрывают V ;
- покрытие $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ вписано в покрытие $O_0, O_1, \dots, O_n$;
- кратность покрытия $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ не превосходит $m + 1$;
- $\varphi_i(v) > 0$ при $v \in \Omega_i$ и $\varphi_i(v) = 0$ при $v \in V \setminus \Omega_i$ ($i = 0, 1, \dots, l$).

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \rightarrow W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$.

Доказательство теоремы 3 практически не отличается от доказательства теоремы 1, поэтому приводить его не будем.

Замечание 5. В данной статье не делается предположений относительно выполнения аксиом отделимости в пространстве V . Есть основания считать, что в некоторых моделях такие предположения могут оказаться ограничительными. Поэтому существование функций φ_i приходится отдельно предусматривать в условии теоремы 3. Теоремы 1 и 2 показывают, что такие функции могут естественно возникать из теоретико-игровых соображений. Разумеется, условие существования таких функций выполняется автоматически, если пространство V вполне регулярно. Но условие теоремы 3 слабее этого предположения.

Разумеется, достаточное условие теоремы 3 менее конструктивно, чем достаточные условия теорем 1 и 2. Но оно допускает обращение.

5. Необходимое условие существования агрегата

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть числа γ и m таковы, что существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \rightarrow W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leq m$. Тогда существуют такие управления $u_0, u_1, \dots, u_n$ из множества U и число λ , что множества

$$\begin{aligned} O_i &= \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ O_i &= \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = k + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

покрывают множество V , множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\},$$

и существуют множества $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ и непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l : V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

- множества $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ покрывают V ;
- покрытие $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ вписано в покрытие $O_0, O_1, \dots, O_n$;
- кратность покрытия $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ не превосходит $m + 1$;
- $\varphi_i(v) > 0$ при $v \in \Omega_i$ и $\varphi_i(v) = 0$ при $v \in V \setminus \Omega_i$ ($i = 0, 1, \dots, l$).

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Замечание 6. Из результатов теорем 3 и 4 видно, что оптимальное решение определяется в основном глобальными свойствами рассматриваемой игры: количеством множеств в покрытии и их взаимными пересечениями. Локальные свойства, например гладкость функций выигрыша или размерность касательного пространства к многообразию V , не существенны (даже если в конкретной модели они определены). Кроме того, понятно, что скорее всего это решение будет устойчиво по отношению к малым изменениям параметров игры, в том числе и нарушающим эти локальные свойства.

Как и достаточные условия раздела 3, необходимые условия можно записывать в различной форме. Удобство той или иной записи зависит от конкретной игры.

6. Структура оптимального решения

При постановке задачи были наложены лишь самые общие ограничения на структуру множества W и отображения P . Если, скажем, найденное множество W окажется совсем уж экзотическим, то вряд ли такое решение можно будет считать осмысленным с точки зрения принятия решений. На самом деле в этой задаче таких неприятностей не предвидится. Кое-что в этом направлении уже сделано: из доказанных теорем следует, что оптимальное множество W можно искать в классе компактных подмножеств конечномерных евклидовых пространств. Но и среди таких множеств имеются множества, устроенные весьма сложно, например как ковер Серпинского. Однако можно пойти и дальше.

Ранее установлено, что можно выбрать отображение так, что образ $P(V)$ будет содержаться в некотором симплексе. В этом разделе будет показано, что отображение P можно выбирать так, что каждая грань этого симплекса либо входит в $P(V)$ целиком, либо не пересекается с $P(V)$, т.е. оптимальное множество W можно искать в классе симплициальных комплексов.

Для простоты и конкретности будем отталкиваться от достаточных условий из теоремы 1. В других случаях рассуждения аналогичны.

Пусть $O_0, O_1, \dots, O_n$ и Θ – множества, предусмотренные условием теоремы 1. Фиксируем точку $v_0 \in O_0 \cap \Theta$ и такое число γ_0 , что $\gamma < \gamma_0 < g(u_0, v_0)$. Пусть $Z = \{v \in V : g(u_0, v) \geq \gamma_0\}$. По построению $v_0 \in Z \subset O_0$, а в силу непрерывности функции g множество Z замкнуто. Для $i = 1, \dots, n$ положим $O'_i = O_i \setminus Z$.

Множества O'_i открыты. Совокупность множеств $O_0, O'_1, \dots, O'_n$ по-прежнему покрывает пространство V , и кратность этого покрытия не превосходит $m + 1$. А кроме того, точка v_0 покрывается лишь одним множеством O_0 (и не принадлежит множествам $O'_1, \dots, O'_n$).

Отображение P определим так же, как в доказательстве теоремы 1, но с использованием покрытия $O_0, O_1', \dots, O_n'$ вместо покрытия $O_0, O_1, \dots, O_n$: функции φ_i определим условиями:

$$\begin{aligned}\varphi_0(v) &= \max \{g(u_0, v) - \gamma, 0\}, \\ \varphi_i(v) &= \max \{\min [g(u_i, v) - \gamma, \gamma_0 - g(u_0, v)], 0\}, \quad i = 1, \dots, k, \\ \varphi_i(v) &= \max \{\min [\lambda - h(u_i, v), \gamma_0 - g(u_0, v)], 0\}, \quad i = k + 1, \dots, n,\end{aligned}$$

а все остальное повторим дословно. Получим отображение множества V в симплекс S . Но в данном случае можно быть уверенными в том, что вершина a_0 симплекса S принадлежит $P(V)$, в частности, $P(v_0) = a_0$. Дословно повторяя доказательство теоремы 1, можно убедиться, что в соответствующей новому отображению P игре Γ_P можно построить стратегию, гарантиующую первому игроку получение выигрыша γ . Фиксируем построенную таким образом стратегию u_P .

Будем последовательно упрощать множество $W = P(V)$, используя следующую процедуру. Выберем грань S_0 симплекса S , относительная внутренность которой пересекается с W , но содержит и точку a , не принадлежащую W (если такой грани нет, то все уже доказано). Пусть π – проекция симплекса S_0 на его границу из точки a , т.е. $\pi(a')$ – это (единственная) точка пересечения луча aa' с границей симплекса S_0 . Отображение π оставляет неподвижными все точки, не принадлежащие внутренности симплекса S_0 , в частности точку a_0 , если она является его вершиной. Пусть

$$Q(v) = \begin{cases} \pi(P(v)), & \text{если } P(v) \in W \cap S_0, \\ P(v), & \text{если } P(v) \notin W \setminus S_0. \end{cases}$$

По построению отображение $Q : V \rightarrow S$ непрерывно и $Q(V) \subset P(V)$.

Пусть u_Q – сужение функции u_P с множества $P(V)$ на множество $Q(V)$. Непосредственно проверяется, что стратегия u_Q гарантирует первому игроку в игре Γ_Q получение результата γ (практически дословно проходят соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1 с учетом того, что $P(v_0) = Q(v_0)$).

При повторении такой процедуры число граней, которые пересекаются с множеством $P(V)$, но не содержатся в нем целиком, будет уменьшаться. А поскольку симплекс S имеет конечное число граней, в конце концов, получатся искомое множество W и отображение P .

Хорошо известно, что всякий симплициальный комплекс размерности m может быть вложен в евклидово пространство размерности $2m + 1$. Таким образом, достаточные условия, полученные в разделе 3, одновременно дают и достаточные условия для задачи, рассмотренной в [11] (об этой постановке говорилось в разделе 1). Впрочем, в [12] построен пример игры, в которой “оптимальное” множество W представляет собой три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины. Такое множество одномерно, но не может быть вложено в одномерное евклидово пространство. Таким образом, задача из [11] и задача, рассмотренная в данной статье, все-таки существенно различны.

Несколько слов об отображении P . При его построении в теореме 1 использовались функции выигрыша в игре Γ . Понятно, что если эти функции “сложные”, то сложным будет и отображение P . И это принципиально. С другой стороны, использованные выше рассуждения показывают, что если функции g и h “простые”, то среди решений рассматриваемой задачи найдутся такие, у которых отображение P не намного сложнее. Понятию “сложности” в данных рассуждениях можно придать точный смысл несколькими разумными способами, но это уведит слишком далеко от темы данной статьи. Поэтому ограничимся сделанными неформальными замечаниями.

7. Вычисления

Полученные необходимое и достаточные условия записаны в немного нетрадиционной форме. Поэтому имеет смысл обсудить вопрос о том, насколько они конструктивны.

В теории иерархических игр задача считается решенной, если ее удастся свести к вычислению максиминов на “простых” множествах. В рассматриваемой задаче эти множества должны фигурировать в описании игры Γ (в игре Γ_P появляется уже гораздо более сложное функциональное пространство $U_P = \Phi(W, U)$). Разумеется, так понимаемое решение в общем случае далеко от получения конкретных численных результатов. Но и их полезность во многих случаях отрицать нельзя. Поэтому будем следовать традиции.

Покажем, как полученные результаты можно переписать в более традиционной форме. Для конкретности вновь обратимся к результатам теоремы 1.

Определим функцию

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Множества O_i , определенные условиями (1) и (2), покрывают пространство V тогда и только тогда, когда

$$\min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1, \dots, k} [g(u_i, v) - \gamma], \max_{i=k+1, \dots, n} [\lambda - h(u_i, v)] \right\} > 0,$$

или, что то же самое,

$$\min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1, \dots, k} [\vartheta(g(u_i, v) - \gamma)], \max_{i=k+1, \dots, n} [\vartheta(\lambda - h(u_i, v))] \right\} > 0.$$

Аналогично кратность рассматриваемого покрытия не превосходит $m + 1$, если

$$\max_{v \in V} \left\{ \sum_{i=0}^k \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) + \sum_{i=k+1}^n \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\} \leq m + 1,$$

или

$$\min_{v \in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^k \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^n \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\} > 0.$$

Наконец, множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\max_{v \in V} \min \{ \vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v)) \} > 0.$$

Все три условия выполняются в том и только том случае, когда

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1, \dots, k} [\vartheta(g(u_i, v) - \gamma)], \max_{i=k+1, \dots, n} [\vartheta(\lambda - h(u_i, v))] \right\} \right\}, \\ & \min_{v \in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^k \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^n \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\}, \\ & \max_{v \in V} \min \{ \vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v)) \} \right\} > 0. \end{aligned}$$

А поскольку числа k и n и управления u_i можно выбирать, достаточное условие из теоремы 1 записывается в виде

$$\begin{aligned} & \max_{k \geq 0} \max_{n \geq k} \max_{(u_0, u_1, \dots, u_n) \in U^{n+1}} \min \left\{ \min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1, \dots, k} [\vartheta(g(u_i, v) - \gamma)], \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \max_{i=k+1, \dots, n} [\vartheta(\lambda - h(u_i, v))] \right\} \right\}, \\ & \min_{v \in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^k \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^n \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\}, \\ & \max_{v \in V} \min \{ \vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v)) \} \right\} > 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно переформулировать достаточные условия теоремы 2 и другие похожие утверждения. Теоремы 3 и 4, разумеется, менее конструктивны. Понятно, что их нельзя сделать конструктивными, не имея конструктивного способа описания топологии на пространстве V . Если такой способ есть, например топология задается метрикой, то идеи, аналогичные использованным в этом разделе, применимы. Соответствующие конструкции сложнее, поэтому приводить их не станем.

8. Заключение

Итак, в данной статье приведена сбалансированная постановка топологической задачи синтеза рациональных способов агрегирования информации.

Предложен метод ее решения. И постановка, и метод решения оказались достаточно простыми. Кроме того, было показано, что среди оптимальных решений задачи непременно найдутся способы агрегирования информации, вполне разумные с содержательной точки зрения. Это дает основание говорить о целесообразности продолжения изучения подобных моделей. Такие исследования представляются особенно актуальными в связи с появлением технологий работы с “большими данными”. Остановимся на некоторых возможных направлениях исследования.

В теоремах 1 и 2 свойства топологии на множестве V практически не используются. В теореме 3 эти свойства используются уже существенно. В [12] построен пример, показывающий, что в общем случае обойтись без использования свойств топологии, заданной на множестве V , нельзя. В этой связи возникает следующий вопрос. Кроме заданной внешним образом топологии на множестве V , можно определить на нем внутреннюю топологию – топологию, базу которой образуют прообразы открытых множеств действительной прямой $\mathbb{R}$ при отображениях g и h (при всех фиксированных u). Интересно более детально разобраться, каким образом соотношение между внутренней и внешней топологиями влияет на характер оптимальных способов агрегирования информации и сложность их построения.

В контексте моделирования процессов обмена информацией проще интерпретировать не топологическую размерность Чеха–Лебега, а какие-то варианты фрактальных размерностей, скажем, размерность Минковского. Речь идет о следующем.

Можно мыслить размерность линейного пространства или гладкого многообразия как количество координат, достаточное для определения положения отдельной точки. Эти представления как-то формализуются определениями топологической размерности, в частности размерности Чеха–Лебега. И ровно такие идеи были заложены, например, в публикациях [6, 11]. Но есть и некоторые возражения: координата — это действительное число, которое задается бесконечной десятичной дробью. Но чтобы задать такую дробь, уже нужен “бесконечный объем” информации. Не исключено, что в каких-то случаях соответствующие конструкции будут неадекватно описывать реальность.

Возможен иной взгляд на вещи, в известном смысле идущий из теории информации. Будем рассматривать количество сообщений, достаточное, чтобы с заданной точностью задать положение любой точки множества. Разумеется, это количество существенно зависит от заданной точности. А вот скорость роста этого количества при увеличении точности вполне характеризует размерность множества⁸. Таким образом, приходим к понятию фрактальной размерности. Но в этом случае нужна количественная мера близости точек, т.е. топология должна быть заменена, например, метрикой.

Поэтому рассмотрение постановки задачи с заменой размерности Чеха–Лебега фрактальной размерностью вполне оправдано. Видимо, решающий шаг в решении соответствующей задачи сделан в данной статье. Действи-

⁸ Чтобы с точностью ε задать положение точки на единичном отрезке, потребуется порядка $1/\varepsilon$ сообщений, а чтобы с той же точностью задать положение точки единичного трехмерного куба, нужно уже около $1/\varepsilon^3$ сообщений.

тельно, в общем случае фрактальная размерность не является целым числом, но для “хороших” множеств оказывается целой и совпадает с топологической размерностью. Более того, если для какого-то “экзотического” множества (например, канторова совершенного множества) эти размерности не совпадают, то фрактальная размерность больше. Поэтому полученные в данной статье результаты дают ответ в новой задаче. Остается только поставить эту задачу и обосновать этот ответ.

В данной статье удалось обойтись самыми простыми техническими средствами. Было бы интересно понять, что может дать современная топологическая техника для исследования подобных моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть γ – произвольное число, строго меньшее $R_\kappa(\Gamma_P)$. Тогда найдется стратегия u_P , для которой

$$\gamma < \inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v).$$

Фиксируем любую такую стратегию и положим $\lambda = \max_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$, если выбранная стратегия регулярна, и $\lambda = \sup_{v \in V} h(u_P(P(v)), v) - \kappa$ в противном случае.

При таком выборе γ , u_P и λ первый пункт определения 1 выполняется (достаточно взять произвольное v из непустого множества $BR(u_P)$). В силу условия $\gamma < \inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v)$ для $v \in BR(u_P)$ справедливо неравенство $\gamma < g(u_P(P(v)), v)$, а в силу выбора λ для $v \notin BR(u_P)$ имеет место неравенство $h(u_P(P(v)), v) < \lambda$. Следовательно, и второй пункт определения 1 выполняется.

Таким образом, γ – это гарантированный результат первого игрока в смысле определения 1. В силу произвольности γ отсюда следует нужное неравенство $R_\kappa(\Gamma_P) \leq R(\Gamma_P)$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Неравенство $R_\kappa(\Gamma_P^r) \leq R(\Gamma_P^r)$ доказывается практически так же, как и неравенство из леммы 1. Докажем обратное неравенство $R_\kappa(\Gamma_P^r) \geq R(\Gamma_P^r)$.

Пусть γ – произвольный гарантированный результат в смысле определения 1. Фиксируем стратегию u_P и число λ , существование которых предусмотрено этим определением. Для стратегии v из первого пункта этого определения $\lambda \leq h(u_P(P(v)), v) \leq \max_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$, т.е. $\lambda \leq \max_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$. Но тогда для любого $v \in BR(u_P)$ выполняется неравенство $h(u_P(P(v)), v) \geq \lambda$ и в силу второго пункта определения 1 имеет место неравенство $g(u_P(P(v)), v) > \gamma$. Следовательно, $\inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v) \geq \gamma$ и тем более

$$R_\kappa(\Gamma_P^r) = \sup_{u_P \in U_P^r} \inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v) \geq \gamma.$$

В силу произвольности γ отсюда следует нужное неравенство $R_\kappa(\Gamma_P^r) \geq R(\Gamma_P^r)$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Достаточно доказать, что $R(\Gamma_P^r) \geq R(\Gamma_P)$. Сделаем это.

Для каждого $w \in W$ множество $P^{-1}(w) = \{v \in V : P(v) = w\}$ компактно. Поэтому максимум $\max_{v \in P^{-1}(w)} h(u, v)$ достигается при всех $u \in U$ и $w \in W$. Обозначим $f(u, w) = \max_{v \in P^{-1}(w)} h(u, v)$.

Точечно-множественное отображение $P^{-1}(w)$ замкнуто, т.е. замкнут его график

$$\{(w, v) \in W \times V : w = P(v)\}.$$

Следовательно, при любом фиксированном $u \in U$ функция $f(u, w)$ полунепрерывна сверху на множестве W , т.е. ее подграфик

$$\Delta(u) = \{(w, t) \in W \times R : t \leq f(u, w)\}$$

замкнут.

Но тогда замкнуто и пересечение таких множеств

$$\Delta_0 = \bigcap_{u \in U} \Delta(u) = \left\{ (w, t) \in W \times R : t \leq \inf_{u \in U} f(u, w) \right\}.$$

Следовательно, в некоторой точке $u_P^p(w)$ достигается минимум $\min_{u \in U} f(u, w)$ и, кроме того, функция $\phi(w) = \min_{u \in U} f(u, w)$ полунепрерывна сверху на множестве W (так как Δ_0 – ее подграфик).

Таким образом, корректно определена стратегия наказания u_P^p и она является регулярной, т.е. достигается максимум

$$\lambda_0 = \max_{v \in V} h(u_P^p(P(v)), v) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} \max_{v \in P^{-1}(w)} h(u, v).$$

Пусть теперь γ – произвольный гарантированный результат в игре Γ_P в смысле определения 1. Фиксируем стратегию u_P и число λ , существование которых предусмотрено этим определением.

Поскольку по построению

$$\lambda_0 = \min_{u_P' \in U_P} \max_{v \in V} h(u_P'(P(v)), v) = \max_{v \in V} h(u_P^p(P(v)), v),$$

найдется управление v , для которого $h(u_P(P(v)), v) \geq h(u_P^p(P(v)), v) \geq \lambda_0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda \geq \lambda_0$. В самом деле, второй пункт определения 1 выполнить тем легче, чем больше λ ; а первый пункт при $\lambda = \lambda_0$ выполняется в силу только что установленного неравенства.

В силу выбора u_P и λ существует v , для которого $h(u_P(P(v)), v) \geq \lambda$. Если для всех v выполняется условие $h(u_P(P(v)), v) \leq \lambda$, то стратегия u_P является регулярной: максимум $\max_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$ достигается и равен λ .

В таком случае лемма 3 доказана.

В противном случае существует точка v_0 , в которой $h(u_P(P(v_0)), v_0) > \lambda$. Положим $w_0 = P(v_0)$ и рассмотрим стратегию u_P^r , определенную условием

$$u_P^r(w) = \begin{cases} u_P(w_0), & \text{если } w = w_0, \\ u_P^p(w), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стратегия u_P^r является регулярной. Действительно, выберем v_1 , доставляющее максимум $\max_{v \in P^{-1}(w_0)} h(P(w_0), v)$. Тогда для $v \in P^{-1}(w_0)$ имеем

$$h(u_P^r(P(v)), v) = h(u_P(P(v)), v) \leq h(u_P(P(v_1)), v_1) = h(u_P^r(P(v_1)), v_1).$$

А для $v \notin P^{-1}(w_0)$ получим

$$\begin{aligned} h(u_P^r(P(v)), v) &= h(u_P^p(P(v)), v) \leq \lambda_0 < \\ &< h(u_P(P(v_0)), v_0) \leq h(u_P(P(v_1)), v_1) = h(u_P^r(P(v_1)), v_1). \end{aligned}$$

Таким образом, верхняя грань $\sup_{v \in V} h(u_P^r(P(v)), v)$ достигается, например, в точке v_1 .

Покажем, что для стратегии u_P^r и числа $\lambda_1 = h(u_P^r(P(v_1)), v_1)$ выполняются оба пункта определения 1. По определению числа λ_1 выполняется первый пункт и, кроме того, $\lambda_1 \geq \lambda$ и $\lambda_1 > \lambda_0$.

Если $v \in P^{-1}(w_0)$ и $h(u_P^r(P(v)), v) = h(u_P^r(P(v_1)), v_1)$, то

$$h(u_P^r(P(v)), v) = h(u_P(P(v)), v) \geq \lambda$$

и в силу второго пункта определения 1 (для стратегии u_P и числа λ) получим $g(u_P^r(P(v)), v) = g(u_P(P(v)), v) > \gamma$ и в этом случае второй пункт определения 1 выполнен.

Если $v \in P^{-1}(w_0)$, но $h(u_P^r(P(v)), v) \neq h(u_P^r(P(v_1)), v_1)$, то по определению числа λ_1 и управления v_1 имеем $h(u_P^r(P(v)), v) < h(u_P^r(P(v_1)), v_1) = \lambda_1$ и снова второй пункт определения 1 выполнен.

Наконец, если $v \notin P^{-1}(w_0)$, то $h(u_P^r(P(v)), v) = h(u_P^p(P(v)), v) \leq \lambda_0 < \lambda$ и опять второй пункт определения 1 выполнен.

Таким образом, стратегия u_P^r позволяет первому игроку гарантированно получить выигрыш γ . В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $R(\Gamma_P^r) \geq R(\Gamma_P)$.

Лемма 3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. Определим функции

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \max\{g(u_i, v) - \gamma, 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ \varphi_i(v) &= \max\{\lambda - h(u_i, v), 0\}, \quad i = k + 1, \dots, n, \\ \phi(v) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(v). \end{aligned}$$

Очевидно, эти функции непрерывны и неотрицательны, а поскольку множества $O_0, O_1, \dots, O_n$ покрывают пространство V , функция $\phi(v)$ строго положительна в любой точке v .

Выберем в n -мерном евклидовом пространстве n -мерный симплекс S . Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n$ – его вершины. Рассмотрим отображение $P : V \rightarrow S$, определенное условием

$$P(v) = \sum_{i=0}^n \frac{\varphi_i(v)}{\phi(v)} a_i.$$

Отображение P является непрерывным.

Пусть $I \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Если для любого $j \notin I$ выполняется условие $v \notin O_j$, то точка $P(v)$ принадлежит грани симплекса S с множеством вершин $\{a_i, i \in I\}$. Так как по условию кратность покрытия $O_0, O_1, \dots, O_n$ не превосходит $m + 1$, образ $P(v)$ любой точки v принадлежит грани симплекса S , которая имеет не более $m + 1$ вершин и, следовательно, размерность, не превосходящую m .

Пусть W – образ множества V при отображении P . Множество W компактно и, как только что установлено, вложено в m -мерный подкомплекс симплекса S . Следовательно, размерность множества W не превосходит m . Евклидово пространство нормально и имеет счетную базу. Эти свойства наследует и его подпространство W .

Таким образом, определена некоторая игра Γ_P . Построим стратегию u_P в этой игре следующим образом. Пусть $w \in W$ и S_0 – наименьшая по включению грань симплекса S , содержащая w (разумеется, если размерность S_0 больше нуля, то w принадлежит внутренности S_0). Пусть $\{a_i, i \in I\}$ – множество вершин этой грани. Выберем наименьшее $i \in I$ и положим $u_P(w) = u_i$.

Покажем, что выполняются оба пункта определения 1.

По построению отображения P для любого $v \in O_0$ наименьшая грань, содержащая точку $P(v)$, имеет a_0 своей вершиной. Следовательно, по определению стратегии u_P выполняется равенство $u_P(P(v)) = u_0$. А поскольку $O_0 \cap \Theta \neq \emptyset$, для некоторой точки $v \in O_0$ имеем $h(u_P(P(v)), v) = h(u_0, v) \geq \lambda$. Таким образом, первый пункт определения 1 выполнен.

Пусть теперь v – произвольная точка множества V , а I – множество всех индексов i , для которых выполняется условие $v \in O_i$. Поскольку множества $O_0, O_1, \dots, O_n$ покрывают V , множество I не пусто. Тогда по построению отображения P множество вершин наименьшей грани симплекса S , содержащей точку $P(v)$, есть в точности множество $\{a_i, i \in I\}$. Тогда по определению функции u_P для некоторого $i \in I$ выполняется равенство $u_P(P(v)) = u_i$. Если $i \leq k$, то $g(u_P(P(v)), v) = g(u_i, v) > \gamma$ (так как $v \in O_i$). А в противном случае $h(u_P(P(v)), v) = h(u_i, v) < \lambda$. Следовательно, и второй пункт определения 1 выполнен.

Итак, по определению γ – гарантированный результат в игре Γ_P . Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу неравенства $R(\Gamma_P) > \gamma$ число γ является гарантированным результатом в игре Γ_P . Фиксируем стратегию u_P и число λ , существование которых постулируется в определе-

нии 1. Выберем управление v_0 , для которого справедливо неравенство $h(u_P(P(v_0)), v_0) \geq \lambda$ (такое существует в силу первого пункта определения 1). Положим $u_0 = u_P(P(v_0))$ и

$$O_0(u) = \{v \in V : g(u_0, v) > \gamma\}.$$

Множество O_0 не пусто, поскольку в силу второго пункта определения 1 $g(u_P(P(v_0)), v_0) = g(u_0, v_0) > \gamma$, т.е. $v_0 \in O_0$. Кроме того, по определению множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geq \lambda\}.$$

Для $u \in U$ определим множество

$$O'(u) = \{v \in V : g(u, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u, v) < \lambda\}.$$

Множество $O'(u)$ открыто. Поэтому его дополнение $Y(u) = V \setminus O'(u)$ замкнуто и, следовательно, компактно. Тогда компактно множество $Y'(u) = P(Y(u)) \subset W$. Значит, множество $Y'(u)$ замкнуто, а его дополнение $O''(u) = W \setminus Y'(u)$ – открытое множество, возможно пустое.

Но если $u = u_P(P(v))$ для некоторого $v \in V$, то в силу второго пункта определения 1 выполняется включение $P(v) \in O''(u_P(P(v)))$, т.е. соответствующее множество $O''(u)$ не пусто.

Как отмечалось выше, можно считать, что функция P отображает множество V на все множество W . В таком случае семейство открытых множеств $O''(u_P(P(v)))$, $v \in V$, покрывает компактное пространство W . Значит, из этого семейства можно выбрать конечное покрытие пространства W . Обозначим множества этого покрытия через $O_1'', \dots, O_n''$, а соответствующие им управления – через $u_1, \dots, u_n$. Пусть

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

По построению множества $O_0, O_1, \dots, O_n$ (и даже множества $O_1, \dots, O_n$) покрывают V . А кроме того, для любого множества $\Omega' \subset O_i''$ его полный прообраз $P^{-1}(\Omega')$ принадлежит O_i .

Но по условию пространство W имеет размерность m . Значит, в покрытие $O_1'', \dots, O_n''$ можно вписать покрытие $\Omega_0'', \Omega_1'', \dots, \Omega_l''$, кратность которого не превосходит $m + 1$. Тогда множества $\Omega_0 = P^{-1}(\Omega_0'')$, $\Omega_1 = P^{-1}(\Omega_1'')$, $\dots$, $\Omega_l = P^{-1}(\Omega_l'')$ образуют покрытие множества V , вписанное в покрытие $O_0, O_1, \dots, O_n$ и имеющее кратность, не превосходящую $m + 1$.

Пространство W предполагается нормальным и имеющим счетную базу. Поэтому для каждого i можно определить функцию $\psi_i : W \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $\psi_i(w) > 0$ при $w \in \Omega_i''$ и $\psi_i(w) = 0$ в противном случае (см. [14, с. 82]). Тогда для функций $\psi_i \circ P$ имеем $\varphi_i(v) > 0$ при $v \in O_i$ и $\varphi_i(v) = 0$ для остальных v .

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Von Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
4. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. Cambridge: The MIT Press, 2004.
5. *Алиев В.С., Цветков А.В.* Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации // Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ, 1985. С. 35–42.
6. *Алиев В.С.* Точное агрегирование информации в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера // Управление большими системами. Вып. 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 5–17.
7. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Агрегирование информации в моделях стимулирования // АиТ. 2001. № 4. С. 120–127.
Novikov D.A., Tsvetkov A.V. Aggregation of Information in Incentive Models // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 4. P. 617–623.
8. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.
9. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // АиТ. 2011. № 3. С. 124–144.
Gorelov M.A. Maximal Guaranteed Result for Limited Volume of Transmitted Information // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 580–599.
10. *Рашиевский П.К.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук, 1973. Т. 28. Вып. 4 (172). С. 243–246.
11. *Алиев В.С., Кононенко А.Ф.* Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1990.
12. *Горелов М.А.* Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх // Динамика неоднородных систем. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008. С. 41–57.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
15. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
16. *Горелов М.А.* Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 376–387.
17. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. С. 4–31.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 05.05.2020

После доработки 24.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

Аветисян В.В. Оптимальное по быстродействию управление перемещением схвата двузвенного манипулятора с учетом типа конечной конфигурации	3
Буков В.Н., Бронников А.М., Гамаюнов И.Ф. Аналитическое конфигурирование избыточной системы с управлением по рассогласованию	16
Перегудин А.А. Метод притягивающих цилиндров. Решение общей линейной задачи слежения	35
Щеглова А.А. К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений	55

Нелинейные системы

Афанасьев В.Н., Преснова А.П. Параметрическая оптимизация нелинейных систем, представляемых моделями с использованием метода “расширенной линеаризации”	71
Куликов А.Н., Куликов Д.А. Инвариантные многообразия слабо диссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау	94
Шумский А.Е., Жирабок А.Н. Принятие решений при диагностировании нелинейных динамических систем непараметрическим методом	111

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Кузнецов О.П. Асинхронные многоагентные многосортные системы	132
---	-----

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Горелов М.А. Топологическая постановка задачи об агрегировании информации в иерархических играх	149
--	-----

C O N T E N T S

Linear Systems

Avetisyan V.V. Time-Optimal Control of the Movement of the Gripper of a Two-Link Manipulator Taking Into Account the Type of the Final Configuration . .	3
Bukov V.N., Bronnikov A.M., Gamayunov I.F. Analytical Configuration of a Redundant System with Output Mismatch Control	16
Peregudin A.A. Method of Attractive Cylinders. Solution for a General Linear Tracking Problem	35
Shcheglova A.A. To the question of superstability of an interval family of differential-algebraic equations	55

Nonlinear Systems

Afanas'ev V.N., Presnova A.P. Parametric Optimization of Nonlinear Systems Presented by Models Using the "Extendent Linearization" Method	71
Kulikov A.N., Kulikov D.A. Invariant Manifolds of a Weakly Dissipative Version of the Nonlocal Ginzburg–Landau Equation	94
Shumsky A.Ye., Zhirabok A.N. Decision Making for Diagnosis in Nonlinear Dynamic Systems by Non-Parametric Method	111

Robust, Adaptive and Network Control

Kuznetsov O.P. Asynchronous Multi-Agent Multisorted System	132
---	-----

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Gorelov M.A. Topological Setting of the Problem of Information Aggregating in Hierarchical Games	149
---	-----