

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

Расчетное и экспериментальное исследование волновых гидромассажеров <i>Е. И. Велиев, Р. Ф. Ганиев, А. С. Корнеев, Л. Е. Украинский</i>	3
К вопросу о вычислении кинетической энергии твердого тела в общем случае пространственного движения с произвольным вращением <i>Ю. А. Алюшин</i>	13
Роботы параллельной структуры с круговой направляющей: систематический обзор кинематических схем, методов синтеза и анализа <i>С. В. Киселев, А. В. Антонов, А. С. Фомин</i>	26
Решение задач динамики манипуляционного механизма с шестью степенями свободы <i>С. В. Хейло, О. А. Гарин, А. Н. Терехова, В. Е. Прохорович, А. В. Духов</i>	39

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

Анализ и управление параметрами прочности, ресурса и рисками безопасной эксплуатации энергоустановок с различными видами энергоресурсов <i>Н. А. Махутов, М. М. Гаденин</i>	47
Оценка прочности композитного баллона для сжатого газа <i>А. Н. Полилов, Д. Д. Власов, О. Ю. Склемина, Н. А. Татусь</i>	57
Перенос материала абразивного инструмента на поверхность титанового сплава в различные периоды шлифования кругом из карбида кремния <i>В. А. Носенко, Н. Д. Сердюков, А. В. Фетисов</i>	68

---

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ**

Получение наночастиц крахмала с помощью интенсифицирующих волновых резонансных воздействий <i>С. Р. Ганиев, В. П. Касилов, О. Н. Кислогубова, О. А. Бутикова, Н. Е. Кочкина</i>	78
Разработка методики определения конструктивных параметров плетеных сетчатых конструкций авиакосмического назначения <i>С. А. Самипур, В. В. Батраков</i>	86

---

**АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ**

Решение уравнения непараметрической идентификации динамической системы на основе гипердельтной аппроксимации <i>Я. Н. Гусеница</i>	96
---	----

---

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

Феноменологический анализ диаграмм внедрения топокомпозитов на податливой подложке <i>Н. А. Воронин</i>	103
--	-----

---

---



---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 532.517;534.1

**РАСЧЕТНОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВОЛНОВЫХ ГИДРОМАССАЖЕРОВ**© 2022 г. **Е. И. Велиев<sup>1</sup>, Р. Ф. Ганиев<sup>2</sup>, А. С. Корнеев<sup>2,\*</sup>, Л. Е. Украинский<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Городская клиническая больница им. С.П. Боткина ДЗМ, Москва, Россия*<sup>2</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН, Москва, Россия**\*e-mail: korneev47@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.09.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Для проведения исследований механических периодических воздействий на человека предлагается использовать новый тип массажеров, волновые гидромассажеры, способные создавать в гидродинамических течениях трехмерные (в частности, спиральные) волны с амплитудами и частотами скоростей и давлений широкого спектра, в том числе с зонами разрежения на обрабатываемой поверхности. В статье рассмотрены основные типы волновых гидромассажеров. Представлены результаты экспериментальных исследований и математического моделирования волновых гидромассажеров одного из разработанных типов, а именно, струйно-вихревого. Показано, что наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных получается с помощью модели турбулентности крупных вихрей (LES). Полученные данные можно использовать при проектировании волновых гидромассажеров и других гидродинамических генераторов колебаний различного назначения.

*Ключевые слова:* волновые гидромассажеры, эксперимент, расчет, амплитудно-частотные характеристики, модели турбулентности

**DOI:** 10.31857/S0235711922010102

**Постановка задачи.** Периодические воздействия на кожный покров человека могут влиять не только на поверхностные слои кожного покрова и на эпителий, но также на подкожные мышцы, на элементы кровеносной и лимфатических систем, на биохимические превращения, в частности, на насыщение крови связанным кислородом, на внутренние органы, на кровоток и лимфоток, а также на приток крови, лимфы и лекарственных препаратов к внутренним органам. Исследование этого требует широкого диапазона параметров воздействий: давление должно изменяться от нулевых значений (разрежение) до существенных положительных (сжатие), скорости должны иметь все три пульсирующие компоненты, частоты и амплитуды воздействий должны быть управляемыми и находиться в широком диапазоне значений.

Для осуществления периодических воздействий известно большое число массажных устройств разного принципа действия: электромеханические, ультразвуковые, жидкостные струйные и другие. Однако, достаточной широты диапазона изменений параметров как скоростей жидкости, воздействующей на кожный покров, так и давлений они не достигают.

Авторами разработаны гидроволновые устройства [1–6], которые обеспечивают волновое воздействие на кожный покров человека трехмерными (в частности, спиральными) волнами, в широком диапазоне частот и амплитуд. При этом происходит

циклическое вакуум-прессующее многомерное воздействие на кожный покров. Пульсирующие компоненты скоростей жидкости в струе (продольных, поперечных и азимутальных), сопровождаются пульсациями давления, в процессе которых сжатие сменяется разрежением. Разрежение и сжатие обеспечиваются автоколебаниями жидкости, возбуждаемыми в струе жидкости. Механизмы возбуждения автоколебаний обусловлены взаимодействием жидких струй между собой внутри корпуса устройства, либо с образующимися в ней парогазовыми включениями. Частота возбуждаемых автоколебаний поддается регулированию путем изменения расхода жидкости, протекающей через устройство. Усиление автоколебаний обеспечивается резонаторами различной природы. Трехмерный характер течения жидкости в струе обеспечивается волноводными эффектами. В частности, спиральные скорости обеспечиваются генерацией в течении поперечных и азимутальных составляющих скоростей.

Это принципиально отличает данные гидростимуляторы от сертифицированных в Минздраве РФ традиционных гидромассажных устройств, в которых с помощью одномерной водяной струи обеспечивается давящее давление переменной величины, флуктуирующей вокруг значения атмосферного давления, без создания фазы вакуума (фазы “присасывающего”, отрицательного давления) и без поперечных и азимутальных составляющих скорости, обеспечивающих спиралевидное течение. В настоящее время не известны сертифицированные устройства с трехмерными волнами и такими функциональными свойствами.

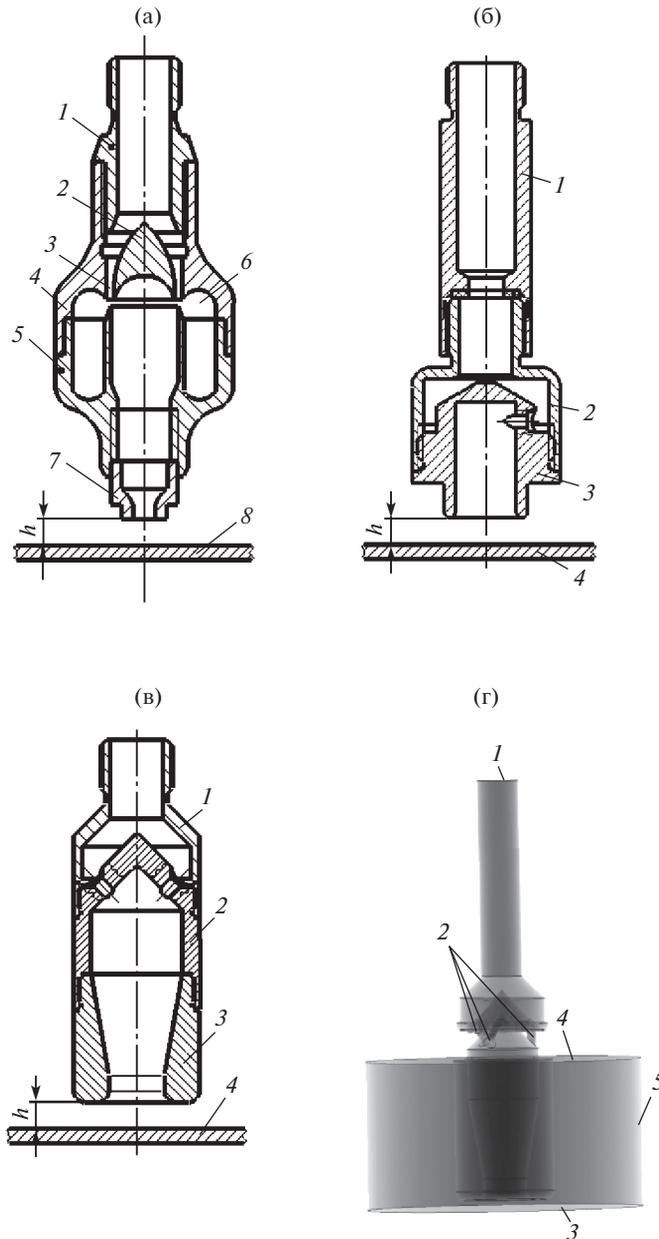
Представляется, что данная уникальная особенность этих гидроволновых массажеров после проведения комплекса клинических исследований может быть использована не только для поведения лабораторных экспериментов, но может привести к разработке прототипов аппаратов для лечебной практики, а также в целях профилактики и реабилитации при широком круге заболеваний бронхолегочной, пищеварительной, мочеполовой систем, а также в спортивной медицине и травматологии.

Конструкции гидроволновых массажеров весьма разнообразны [1–6]. Схемы некоторых из них показаны на рис. 1.

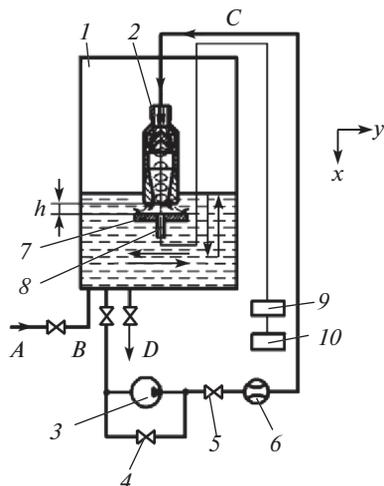
В первом случае (рис. 1а) рабочая жидкость (водопроводная вода) подавалась с помощью гибкого шланга во входной штуцер 1 и с помощью обтекателя 2 через кольцевое сопло 3 направлялась в верхний корпус 4, который совместно с нижним корпусом 5 образовывал тороидальную резонансную камеру 6. Затем вода выходила из массажера через сопло 7 к обрабатываемой поверхности 8. Кольцевой поток воды, выходящий из тороидальной резонансной камеры 6 с определенной частотой, зависящей от частоты собственных колебаний всей системы, прерывал основную кольцевую струю, истекающую из кольцевого сопла 3. Вследствие этого у активной кольцевой кромки тороидальной резонансной камеры 6 генерировались периодические гидродинамические импульсы в виде сжатия и разрежения потока воды. Под воздействием кольцевого потока, выходящего из тороидальной резонансной камеры, под нижней сферической поверхностью обтекателя 2 образовывалась зона разрежения, которая способствовала усилению амплитуды генерируемых волн. Амплитудно-частотные (спектральные) характеристики устройства зависят от площади поверхности и объема резонансной камеры, скорости истечения воды из кольцеобразного сопла и ее расхода. Их можно менять путем взаимного перемещения верхнего 4 и нижнего 5 корпусов.

Во втором случае (рис. 1б) водопроводная вода подавалась с помощью гибкого шланга через корпус 1 и корпус 2 к завихрителю 3. Тангенциально расположенные отверстия в завихрителе обеспечивали создание закрученного потока.

В третьем случае (рис. 1в) рабочая жидкость подавалась с помощью гибкого шланга в корпус 1 и поступала к завихрителю 2. Особое расположение подающих отверстий в завихрителе, показанных на рис. 1в схематично, обеспечивало создание в течении трехмерных струй, имеющих все компоненты скорости: аксиальную, радиальную и тангенциальную. Как показали эксперименты [4], такой способ подачи жидкости поз-



**Рис. 1.** Основные типы волновых гидромассажеров: (а) – струйный [3]: 1 – штуцер входной, 2 – обтекатель, 3 – сопло кольцевое, 4 – корпус верхний, 5 – корпус нижний, 6 – камера резонансная, 7 – сопло, 8 – обрабатываемая поверхность; (б) – вихревой [4]: 1 – ручка, 2 – корпус, 3 – завихритель, 4 – обрабатываемая поверхность; (в) – струйно-вихревой [4]: 1 – корпус, 2 – завихритель, 3 – сопло, 4 – обрабатываемая поверхность; (г) – математическая модель струйно-вихревого гидромассажера: 1 – вход жидкости, 2 – подающие отверстия, 3 – обрабатываемая поверхность, 4, 5 – выходы жидкости.



**Рис. 2.** Схема экспериментальной установки: 1 – водяной бак, 2 – исследуемый гидромассажер, 3 – гидравлический насос, 4 – вентиль байпаса, 5 – вентиль регулировки расхода, 6 – измеритель расхода, 7 – обрабатываемая поверхность, 8 – датчик давления, 9 – усилитель, 10 – осциллограф.

волил увеличить амплитуду колебаний давления, создаваемых в массажере, в 4–6 раз по сравнению со случаем чисто тангенциальной подачи, при котором подающие отверстия лежат в плоскости, перпендикулярной оси течения [4, 5]. Наличие тангенциальной компоненты скорости обеспечивало закрутку потока. За счет центробежных эффектов в приосевой зоне цилиндрического канала завихрителя 2 и сопла 3 возникали области пониженного давления, что обеспечивало вакуумный эффект. При определенных значениях параметров закрученного течения устанавливался режим автоколебаний, приводящий к появлению трехмерных волн давления, распространявшихся от гидромассажера, корпус которого выступает в данном случае как цилиндрический волновод [7].

В настоящей статье представлены результаты исследований гидромассажера струйно-вихревого типа (рис. 1в).

**Методика проведения экспериментов.** Экспериментальная установка (рис. 2) содержала водяной бак 1, выполненный из органического стекла для обеспечения возможности визуальных наблюдений. Водопроводная вода заливалась в бак по магистрали А. Непрерывная циркуляция воды через гидромассажер 2 осуществлялась при помощи насоса 3 по магистралям В и С. Регулировка расхода воды через гидромассажер осуществлялась с помощью вентиля байпаса 4 и регулировочного вентиля 5. Измерение расхода производилось с помощью расходомера 6 (ротаметра) с точностью  $\pm 5\%$ .

Слив воды по окончании эксперимента осуществлялся через магистраль D. Обрабатываемая поверхность 7 (размером  $150 \times 150$  мм) с датчиком давления 8 имела возможность перемещения в продольном направлении  $x$  и в поперечном направлении  $y$  по отношению к гидромассажеру. Размеры обрабатываемой поверхности в поперечном направлении существенно превышали размеры исследуемой зоны течений, что позволяло путем ее смещения в поперечном направлении от оси симметрии гидромассажера измерять пульсации давления в различных точках на поверхности при заданном расстоянии от гидромассажера без существенного искажения течений в исследуемой области. Проведена серия экспериментов, в результате которых получены

осциллограммы пульсаций давления на обрабатываемой поверхности при различном расстоянии  $y$  от оси симметрии гидромассажера и их частотные спектры.

В экспериментах для измерения пульсаций давления использовался датчик динамического давления PS2001-5-01, усилитель сигнала AS07 (коэффициент усиления 100) производства “ГлобалТест” (Саров, Россия) и осциллограф WaveSurfer MXs-B компании “LeCroy”. Для измерения статического разрежения на обрабатываемой поверхности использовался мановакуумметр EN-837-1 с пределами измерений от  $-100$  до  $+150$  кПа класса 1.0.

**Математическая модель.** Расчеты проводились с помощью коммерческой программы ANSYS Fluent (США) [8, 9]. Использовалась трехмерная модель генератора (рис. 1г). Осуществлялось решение системы уравнений неразрывности и Навье–Стокса [10]. Расчеты проводились с использованием модели турбулентности крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation) [11–13]. Эта модель была выбрана по данным работы [14], в которой были проанализированы восемь моделей турбулентности, реализованных в программе ANSYS Fluent. Для гидродинамического генератора колебаний вихревого типа модель LES показала наилучшее согласие с экспериментальными данными. В качестве граничных условий на входе в канал (рис. 1г, зона 1) задавался объемный расход воды  $Q$ . Количество подающих отверстий (рис. 1г, поз. 2) составляло  $n = 3$ . Расстояние  $h$  от среза сопла гидромассажера до обрабатываемой поверхности (рис. 2) варьировалось в пределах  $h = 1–3$  мм. На поверхностях выхода (рис. 1г, зоны 4 и 5) в качестве граничного условия задавалось давление  $p = 0.1$  МПа.

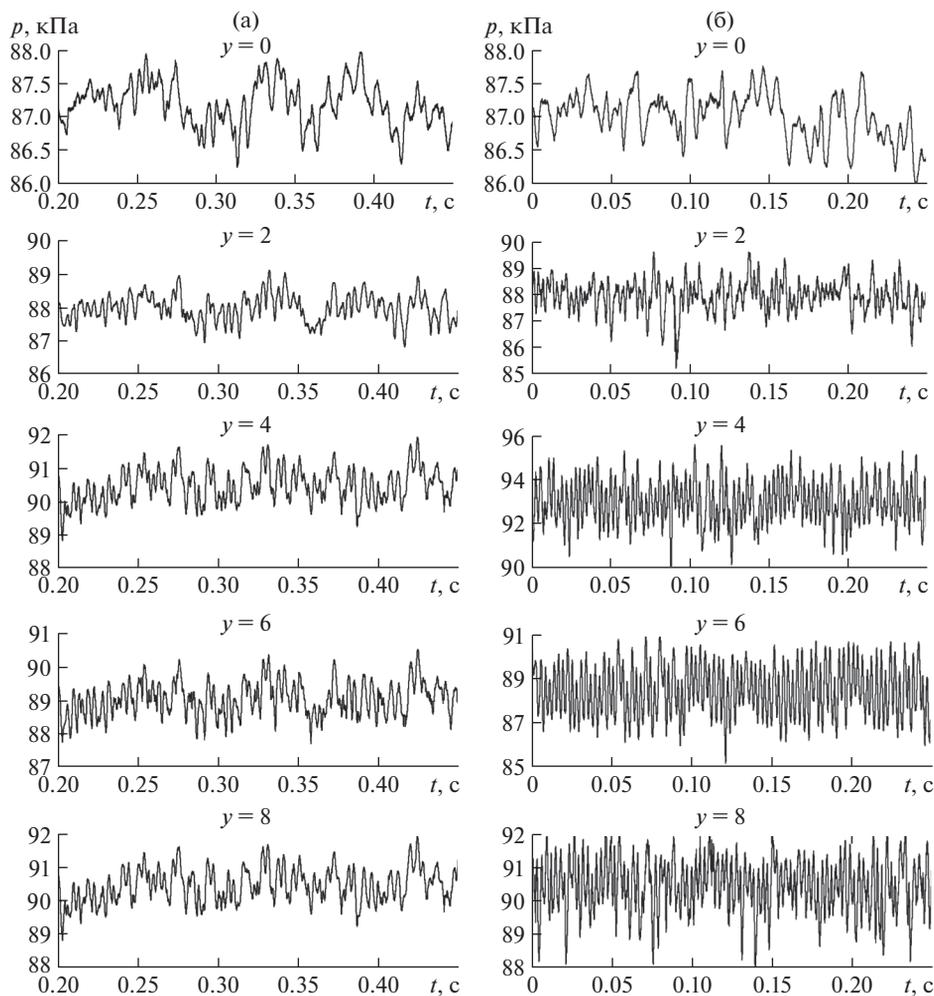
**Результаты исследований.** В результате расчетов были получены зависимости давления от времени на обрабатываемой поверхности на различных расстояниях  $y$  от оси симметрии, представленные на рис. 3а. Соответствующие экспериментальные данные показаны на рис. 3б. В настоящей статье результаты приведены для следующих условий: расход воды  $Q = 12$  дм<sup>3</sup>/мин, расстояние от гидромассажера до обрабатываемой поверхности  $h = 2$  мм. Можно отметить сходный характер, а также близкие диапазоны изменения давления для расчетных и экспериментальных зависимостей, особенно вблизи оси симметрии ( $y = 0$ ). При удалении от оси симметрии (увеличении координаты  $y$ ) на экспериментальных зависимостях появляются высокочастотные колебания, не выявляемые в использованной расчетной модели. Расчетные зависимости  $p(t)$  представлены для участка установившихся колебаний  $t = 0.2–0.45$  с.

Путем Фурье-преобразования зависимостей  $p(t)$ , представленных на рис. 3а, б, были рассчитаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) колебаний (рис. 4а, б).

На оси симметрии ( $y = 0$ ) положения расчетных и экспериментальных главных максимумов совпадают и соответствуют частоте  $f = 16$  Гц. Их амплитуды отличаются на 15%. Второй расчетный максимум наблюдается на частоте  $f = 96$  Гц, а соответствующий экспериментальный – на  $f = 76$  Гц. Разница в частотах составляет 26%. Амплитуды этих максимумов отличаются на 25%. Следующие группы как расчетных, так и экспериментальных максимумов располагаются в диапазонах частот  $f = 100–220$  Гц, а их амплитуды отличаются приблизительно на 35%.

При удалении от оси симметрии (увеличении координаты  $y$ ) на экспериментальных АЧХ наблюдаются максимумы в диапазонах частот  $f = 16–230$  Гц и  $f = 348–360$  Гц. На расчетных АЧХ максимумы расположены в диапазонах  $f = 16–230$  Гц и 320 Гц. При этом во втором из указанных диапазонов экспериментальные амплитуды заметно превышают расчетные. Это указывает на существование резонансных явлений, не выявляемых в использованной математической модели.

Были также произведены расчеты по нескольким другим моделям турбулентности, реализованным в программе ANSYS Fluent. Расчеты по стандартной (*Standard*) модели привели к нереально высоким средним значениям давления на обрабатываемой поверхности (в десятки раз выше, чем экспериментальная величина на входе). Расчеты по реализуемой (*Realizable*) модели привели к затуханию колебаний давления по вре-

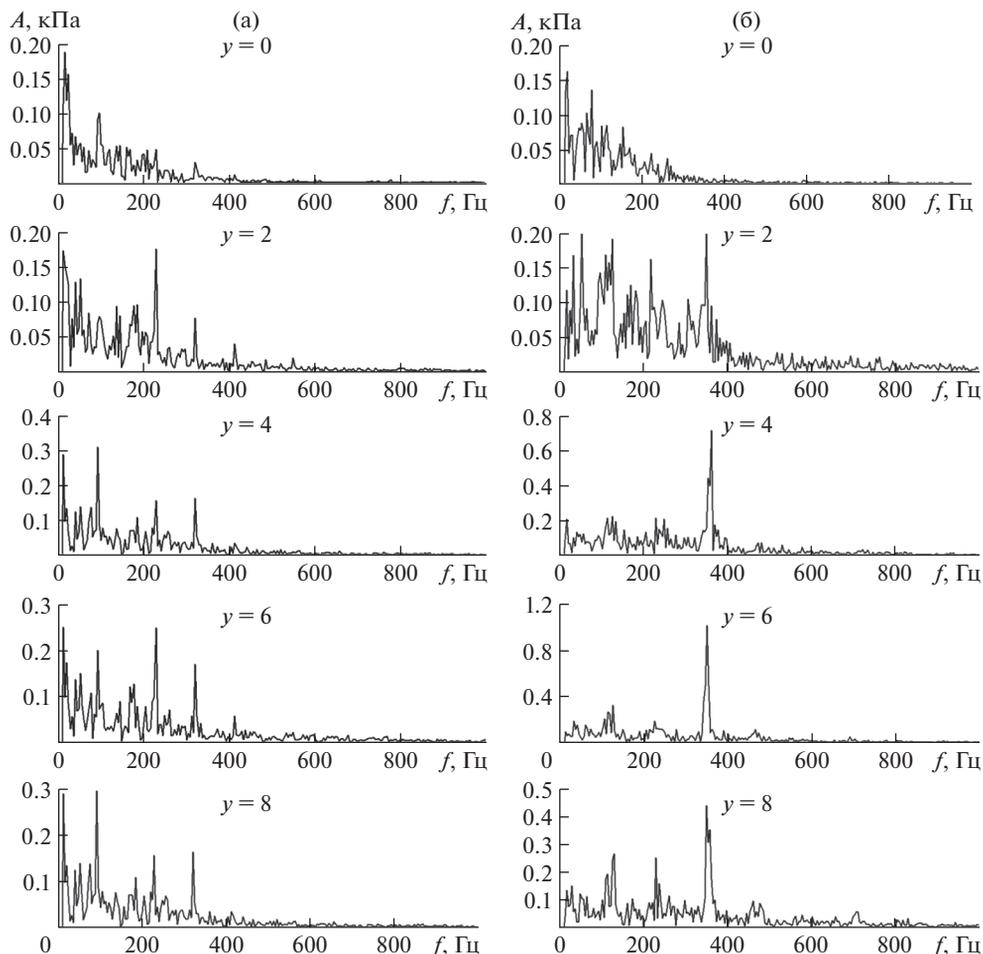


**Рис. 3.** Расчетные (а) и экспериментальные (б) зависимости давления от времени на обрабатываемой поверхности на различных расстояниях  $y$  (в миллиметрах) от оси симметрии.

мени, а в экспериментах наблюдались незатухающие колебания. Модель напряжений Рейнольдса (*RSM*) дала только одну гармонику колебаний на частоте 192 Гц, что не согласовывалось с видом экспериментальных АЧХ. Остальные модели турбулентности, имеющиеся в ANSYS-Fluent, были проанализированы ранее в работе [14] и показали неадекватность для гидродинамических генераторов колебаний вихревого типа. Таким образом, только модель крупных вихрей (*LES*) можно использовать для расчета АЧХ подобных устройств, которые в определенной степени согласуются с экспериментальными данными.

Структура течения в канале исследуемого устройства иллюстрируется рис. 5.

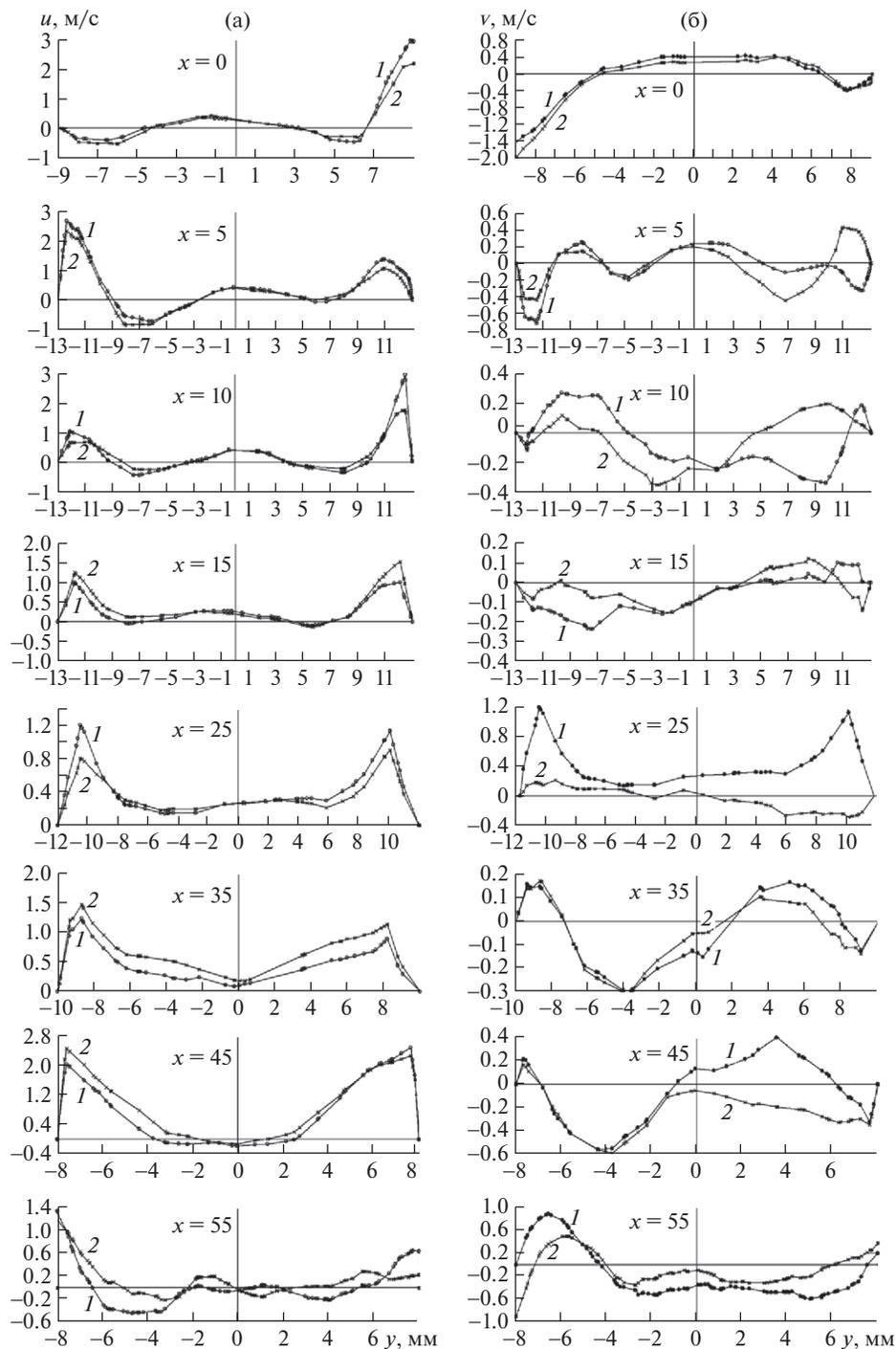
Расчетные профили продольной (параллельной оси  $Ox$ )  $u(y)$  и поперечной (параллельной оси  $Oy$ )  $v(y)$  компонент скорости в различных сечениях канала для момента времени  $t = 0.31328$  с, соответствующего минимуму давления в центре обрабатываемой поверхности ( $x = 56$  мм,  $y = z = 0$  мм) и для момента  $t = 0.32485$  с, соответствующего



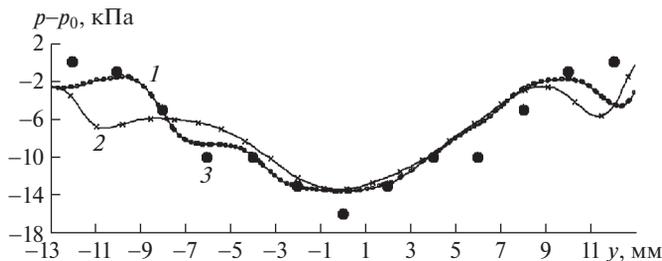
**Рис. 4.** Расчетные (а) и экспериментальные (б) амплитудно-частотные характеристики колебаний на обрабатываемой поверхности на различных расстояниях  $y$  (в миллиметрах) от оси симметрии.

шего максимуму давления в рассматриваемой точке, представлены на рис. 5а, б. Значение продольной координаты  $x = 0$  соответствует сечению выходных кромок подающих отверстий, значение  $x = 56$  мм – положению обрабатываемой поверхности. При  $x = 0$  наблюдается существенная несимметричность профиля продольной скорости (рис. 5а,  $x = 0$ ).

Здесь левая граничная точка ( $y = -9$  мм) находится на твердой поверхности, где все компоненты скорости равны нулю. Правая граничная точка ( $y = 9$  мм) располагается внутри подающего отверстия, поэтому скорость в этой точке максимальна. При  $x = 5$  мм область максимальных продольных скоростей перемещается к левой стенке, при  $x = 10$  мм – снова к правой стенке. Симметричность профиля продольной скорости устанавливается на расстоянии  $x = 45$  мм от выходного сечения подающих отверстий. Различия в профилях продольной скорости между моментами времени, соответствующими минимуму давления (1) и максимуму давления (2) внутри канала



**Рис. 5.** Профили продольной (а) и поперечной (б) компонент скорости на различных расстояниях  $x$  (мм) от подающих отверстий для моментов времени, соответствующих минимуму (1) и максимуму (2) давления в центре обрабатываемой поверхности.



**Рис. 6.** Профили статического давления на обрабатываемой поверхности ( $x = 56$  мм) для моментов времени, соответствующих минимуму (1) и максимуму (2) давления в центре: линии 1 и 2 — расчет, точки 3 — эксперимент.

( $x = 0-45$  мм) незначительны. Они становятся заметными только в зазоре между гидромассажером и обрабатываемой поверхностью ( $x = 55$  мм).

Профили поперечной  $v(y)$  компоненты скорости (рис. 5б) существенно перестраиваются между моментами времени, соответствующими минимуму давления (1) и максимуму давления (2). В некоторых сечениях канала ( $x = 5-45$  мм) изменяется знак поперечной скорости  $v(y)$  между рассматриваемыми моментами времени. Это означает, что изменяется направление течения вдоль оси  $Oy$ . Поток ударяется об одну цилиндрическую стенку, затем отражается от нее, ударяется о противоположную стенку, снова отражается и этот процесс повторяется, приводя к возникновению пульсаций давления, создаваемых гидромассажером. Таким образом, возможными механизмами возникновения колебаний давления в гидродинамических генераторах рассмотренного типа являются поперечные пульсации потока жидкости, а также пульсации тороидальных вихрей в продольном направлении.

Уровень вакуума, создаваемого гидромассажером на обрабатываемой поверхности, характеризуется рис. 6, где линии — результаты расчетов для моментов времени, соответствующих минимуму (1) и максимуму (2) давления в центре этой поверхности, точки 3 — экспериментальные данные, представляющие собой средние по времени значения,  $p_0 = 100$  кПа — нормальное атмосферное давление. Расчетные и экспериментальные распределения согласуются между собой.

**Заключение.** Расчеты с помощью программы ANSYS-Fluent показали, что модель турбулентности крупных вихрей (LES) позволяет рассчитывать амплитудно-частотные характеристики гидродинамических генераторов колебаний струйно-вихревого типа, которые в определенной степени согласуются с экспериментальными данными. Выполненные расчеты позволили выявить некоторые из механизмов возникновения колебаний давления в таких устройствах — поперечные пульсации потока жидкости, а также пульсации тороидальных вихрей в продольном направлении. Расчетные распределения давления вдоль обрабатываемой поверхности согласуются со средними по времени экспериментальными значениями. Как расчетные, так и экспериментальные данные показали, что наибольшая амплитуда колебаний давления возникает не на оси симметрии, а на некотором расстоянии от нее.

Таким образом, теоретическими и экспериментальными исследованиями показано, что предложенные устройства одновременно создают трехмерные волны автоколебательного характера, в том числе спиральные, и вакуумный эффект. Частоты и амплитуды генерируемых колебаний скоростей и давлений имеют широкий спектр. Это позволяет рассматривать его как перспективное устройство для физиотерапии нового класса для широкого использования в медицине. Полученные данные могут быть использованы при проектировании волновых гидромассажеров и других гидродинами-

ческих генераторов колебаний, а также для выбора оптимальных режимов и методов использования таких устройств.

Рекомендации по их применению можно будет дать после проведения клинических испытаний.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена по программе ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 гг., пункт программы № 26, тема “Развитие фундаментальных основ волнового машиностроения. Научные основы волновых технологий получения композитных материалов с уникальными свойствами и новых средств функциональной диагностики”. № гос. регистрации 01201359375.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев Р.Ф., Васильев Р.Х., Муфазалов Р.Ш. и др.* Устройство для гидромассажа. РФ Патент 2010559, 1994.
2. *Ганиев Р.Ф., Муфазалов Р.Ш., Васильев Р.Х. и др.* Устройство для физиотерапии. РФ Патент 2012319, 1994.
3. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р. и др.* Гидроволновой массажер для физиотерапевтического лечения заболеваний мочевого пузыря. РФ Патент 189154, 2019.
4. *Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С.* Волновые гидромассажеры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 99.
5. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е., Ганиев О.Р. и др.* Волновой гидродинамический генератор для гидромассажных процедур: РФ Патент 124564, 2013.
6. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р., и др.* Гидроволновой массажер для лечения сексуального расстройства. РФ Патент 189155, 2019.
7. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. М.: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 780 с.
8. ANSYS Fluent Release 12.1. ANSYS, Inc., Canonsburg, USA, 2009. <http://www.ansys.com>.
9. ANSYS Fluent 12.0. Theory Guide. ANSYS, Inc., 2009. 816 с.
10. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1967. 615 p.
11. *Smagorinsky J.* General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment // Monthly Weather Review. 1963. V. 91. P. 99.
12. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., et al.* A Hybrid RANS-LES Approach With Delayed-DES and Wall-Modelled LES Capabilities // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2008. V. 29. P. 1638.
13. *Piomelli U., Moin P., Ferziger J.H.* Model Consistency in Large-Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow // Physics of Fluids. 1988. V. 31. P. 1884.
14. *Корнеев А.С., Шмырков О.В.* Влияние закрутки потока на характеристики гидродинамических генераторов колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 5. С. 27.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 531.8+621.01

**К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ  
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ**

© 2022 г. Ю. А. Алюшин

*Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, Россия  
e-mail: alyushin7@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.

После доработки 06.10.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Получено точное решение для кинетической энергии в общем случае пространственного движения твердых тел с произвольным вращением с учетом изменения центробежных моментов инерции. Использовано описание движения в форме Лагранжа и принцип суперпозиции, который обеспечивает геометрическое суммирование скоростей и ускорений совмещаемых движений в форме Лагранжа для любой частицы в любой момент времени. Подынтегральная функция в уравнении для кинетической энергии представлена через сумму одинаковых компонент скорости совмещаемых плоскопараллельных движений. Полярные моменты инерции не изменяются в процессе движения и их можно вычислить по текущему или исходному состоянию тела. Центробежные моменты изменяются и обращаются в ноль при вращении относительно главных центральных осей только для тел с равными главными моментами инерции, например для шара. В других случаях разность главных моментов инерции приводит к циклическим изменениям кинетической энергии с возможным проявлением прецессии и нутации, амплитуда которых зависит от угловых скоростей вращения тела. Приведен пример использования уравнений для робота с одной винтовой и двумя вращательными кинематическими парами.

*Ключевые слова:* кинетическая энергия, переменные Лагранжа, принцип суперпозиции движений, полярные, осевые и центробежные моменты инерции

**DOI:** 10.31857/S0235711922010023

Роботы различного назначения получили широкое распространение при выполнении основных и вспомогательных операций, перемещении заготовок и инструмента по заданной траектории с требуемой скоростью и точностью позиционирования. Роботизация является одним из основных факторов развития промышленности [1, 2].

Наиболее распространенные в настоящее время методики проектирования и исследования робототехнических комплексов ориентированы на использование матричных уравнений и отличаются выбором локальных систем координат [3, 4]. Силовой расчет обычно выполняют с использованием метода кинестатики [5, 6], который позволяет рассматривать подвижную систему как условно неподвижную, находящуюся в квазистатическом равновесии.

Такие методы приводят к большим объемам вычислений с частым повторением однотипных процедур, применению высокопроизводительных вычислительных устройств, использующих алгоритмы параллельной обработки данных в многопроцессорных системах. Широкое распространение получили пакеты прикладных программ для моде-

лирования работы роботов [7, 8]. Из-за сложности математического аппарата и численных методов расчета трудно оценить влияние вспомогательных факторов на результаты динамического анализа механизмов.

Проблема обеспечения необходимой точности позиционирования, расчета силовых факторов в кинематических парах и опасных сечениях звеньев остается актуальной. Продолжается поиск методов, ориентированных на совершенствование применяемого математического аппарата, методики расчета кинетической энергии звеньев механизмов с переходом от численных методов анализа к аналитическим [9, 10].

Кинетическая энергия является обязательным и обычно основным компонентом движения абсолютно твердых тел. Это требует особой ответственности при выборе методов ее определения, например при динамическом анализе мобильных роботов и иных механизмов, сложность которых с развитием технического прогресса возрастает. Основанием для расчета является теорема Кенига [11, 12] о равенстве кинетической энергии материальной системы сумме энергии переносного поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и энергии вращательного движения относительно координатных осей, движущихся вместе с центром масс

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2, \quad (1)$$

где  $m$  – масса твердого тела;  $v_C$  – скорость центра масс;  $I_C$  – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс;  $\omega$  – мгновенная угловая скорость вращения твердого тела. Вычисление момента инерции относительно мгновенной оси вращения, которая в общем случае подвижна и зависит от движения тела, представляет определенные сложности.

**Целью** работы является: получение точного уравнения для расчета кинетической энергии вращающихся твердых тел без определения положения мгновенной оси вращения для динамического анализа механизмов с развитой структурой, таких как роботы-манипуляторы.

Рассмотрим вращение тела в плоскости  $x$ – $y$  относительно неподвижного полюса  $P(\alpha_p, \beta_p)$  в пространстве переменных Лагранжа [13]. При обозначениях текущих координат  $x_i \in (x, y, z)$  будем использовать для переменных Лагранжа  $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$  начальные координаты частиц  $\alpha_p = x_p|_{t=0}$ . Исходное положение произвольной точки  $M(\alpha, \beta)$  определим углом наклона  $(\theta_z)_0$  прямой  $PM$  по отношению к оси  $x$  и расстоянием между точками  $|PM| = L = \text{const}$

$$\alpha = \alpha_p + L \cos(\theta_z)_0, \quad \beta = \beta_p + L \sin(\theta_z)_0. \quad (2)$$

После поворота прямой  $PM$  на угол  $\Delta\theta_z = \theta_z - (\theta_z)_0$  координаты точки  $M(x, y)$  можно определить по аналогичным соотношениям

$$x = \alpha_p + L \cos \theta_z = \alpha_p + L \cos[(\theta_z)_0 + \Delta\theta_z], \quad y = \beta_p + L \sin[(\theta_z)_0 + \Delta\theta_z].$$

Исключая из этих уравнений длину  $L$  и начальное значение угла  $(\theta_z)_0$  с помощью уравнений (2), получаем систему уравнений движения

$$\begin{aligned} x &= \alpha_p + (\alpha - \alpha_p) \cos \Delta\theta_z - (\beta - \beta_p) \sin \Delta\theta_z, \\ y &= \beta_p + (\alpha - \alpha_p) \sin \Delta\theta_z + (\beta - \beta_p) \cos \Delta\theta_z, \\ z &= \gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

и соответствующие им скорости

$$x_t = -\theta_{z,t}(y - \beta_p), \quad y_t = \theta_{z,t}(x - \alpha_p), \quad z_t = 0. \quad (4)$$

Нижний индекс  $t$  при обозначении координат  $x_{i,t}$  и углов поворота  $\theta_{i,t}$  соответствует дифференцированию соответствующих функций по времени  $dx_i/dt \equiv x_{i,t}$ ,  $d\theta_i/dt \equiv \theta_{i,t}$ .

Для плоскопараллельных движений в других плоскостях уравнения могут быть получены с помощью круговой подстановки:

– при вращении относительно оси  $x$

$$\begin{aligned} x &= \alpha, & x_t &= 0, \\ y &= \beta_p + (\beta - \beta_p) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_p) \sin \Delta\theta_x, & y_t &= -\theta_{x,t}(z - \gamma_p), \\ z &= \gamma_p + (\beta - \beta_p) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_p) \cos \Delta\theta_x, & z_t &= \theta_{x,t}(y - \beta_p); \end{aligned} \quad (5)$$

– при вращении относительно оси  $y$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_p + (\alpha - \alpha_p) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_p) \sin \Delta\theta_y, & x_t &= \theta_{y,t}(z - \gamma_p), \\ y &= \beta, & y_t &= 0, \\ z &= \gamma_p + (\gamma - \gamma_p) \cos \Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_p) \sin \Delta\theta_y, & z_t &= -\theta_{y,t}(x - \alpha_p). \end{aligned} \quad (6)$$

Нижний индекс при обозначении угла поворота тела  $\theta_i$  указывает направление оси вращения, проходящей через полюс  $P$  параллельно осям системы координат наблюдателя, относительно которой происходит вращение тела. Уравнения (3)–(6) будут использованы как исходные для всех дальнейших преобразований.

Для пространственных движений системы типа (6) можно получить с помощью принципа суперпозиции [14], который позволяет рассматривать их как одновременную реализацию нескольких плоскопараллельных движений. Если переменные Эйлера и Лагранжа совпадают в исходном состоянии  $x_i(\alpha_p, t = 0) = \alpha_i$ , совмещение движений сводится к замене переменных Лагранжа внешнего движения  $x_i^{ex} = x_i^{ex}(\alpha_p, t)$  на выражения для соответствующих переменных Эйлера внутреннего движения  $x_i^{in} = x_i^{in}(\alpha_p, t)$ . Уравнения совмещенного движения  $x_i = x_i(\alpha_p, t)$  при последовательном или одновременном их протекании совпадают с уравнениями внешнего движения после замены переменных Лагранжа соответствующими уравнениями для переменных Эйлера внутреннего движения

$$x_i(\alpha_p, t) = x_i^{ex}(x_i^{in}(\alpha_p, t), t). \quad (7)$$

Внешние и внутренние движения аналогичны переносным и относительным в классической механике, но отличаются обязательным использованием единой системы координат. Принцип допускает многократное его применение без нарушения правила геометрического сложения скоростей и ускорений совмещаемых движений в каждой точке и в каждый момент времени [14–16].

Например, чтобы получить уравнения движения с вращением относительно подвижного полюса, следует наложения на вращения (3)–(6) поступательное перемещение полюса  $P$

$$x = \alpha + x_p(t) - \alpha_p, \quad y = \beta + y_p(t) - \beta_p, \quad z = \gamma + z_p(t) - \gamma_p. \quad (8)$$

В результате первое слагаемое (лагранжева координата) в каждом из уравнений (3)–(6) заменяется на текущую (эйлерову) координату

$$\begin{aligned} x &= x_p + (\alpha - \alpha_p) \cos \Delta\theta_z - (\beta - \beta_p) \sin \Delta\theta_z, \\ y &= y_p + (\alpha - \alpha_p) \sin \Delta\theta_z + (\beta - \beta_p) \cos \Delta\theta_z, & z &= \gamma + z_p - \gamma_p, \\ x &= \alpha + x_p - \alpha_p, & y &= y_p + (\beta - \beta_p) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_p) \sin \Delta\theta_x, \\ z &= z_p + (\beta - \beta_p) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_p) \cos \Delta\theta_x, \end{aligned} \quad (9)$$

$$x = x_p + (\alpha - \alpha_p) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_p) \sin \Delta\theta_y, \quad y = \beta + y_p - \beta_p,$$

$$z = z_p + (\gamma - \gamma_p) \cos \Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_p) \sin \Delta\theta_y.$$

Каждая система из трех уравнений соответствует движению с четырьмя степенями свободы: три поступательных перемещения (8) вдоль координатных осей полюса  $P$  и поворот тела  $\Delta\theta_i$  относительно соответствующей оси.

**Кинетическая энергия при произвольном вращении твердого тела.** Уравнений (3)–(9) достаточно для определения любых кинематических характеристик движения абсолютно твердых тел, в том числе кинетической энергии, которую по определению для тела с объемом  $V$ , плотностью  $\rho$  и массой  $m$  определяет интеграл [11, 12]

$$E_k = 0.5\rho \int_V v^2 \delta V = 0.5 \int_m v^2 \delta m = 0.5 \int_m (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \delta m. \quad (10)$$

С учетом разной природы аргументов при описании движения в форме Лагранжа, в уравнении (10) и ниже для обозначения бесконечно малых приращений аргументов и функций в пространстве переменных Лагранжа использован оператор  $\delta$ , в том числе при интегрировании по массе  $\delta m$ . Оператор  $d$  характеризует бесконечно малые изменения функций во времени, как использовано выше для компонент скорости  $dx_i/dt \equiv x_{i,t}$ .

Точное интегрирование уравнения (10) можно выполнить при плоскопараллельном движении с вращением относительно одной оси, например  $z$ , когда по всему объему тела  $z_i = 0$ . С учетом уравнений движения (9) преобразуем правую часть к виду

$$E_k = 0.5m \left[ (x_t)_P^2 + (y_t)_P^2 \right] - \theta_{z,t} \int_m \left[ (x_t)_P (y - y_P) - (y_t)_P (x - x_P) \right] \delta m +$$

$$+ 0.5\theta_{z,t}^2 \int_m \left[ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \right] \delta m. \quad (11)$$

Для интегрирования во втором слагаемом воспользуемся понятием центра масс  $C(x_C, y_C)$  [11, 12]

$$x_C m = \int_m x \delta m, \quad y_C m = \int_m y \delta m, \quad (12)$$

координаты которого можно вынести за знак интеграла и вместо (11) записать

$$E_k = 0.5m \left[ (x_t)_P^2 + (y_t)_P^2 \right] - \theta_{z,t} m \left[ (x_t)_P (y_C - y_P) - (y_t)_P (x_C - x_P) \right] +$$

$$+ 0.5\theta_{z,t}^2 \int_m \left[ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \right] \delta m. \quad (13)$$

Оставшийся в правой части интеграл в механике твердого тела называют моментом инерции при вращательном движении тела, по аналогии с массой  $m$  при поступательном движении [11, 12]. Принимая во внимание особенности более общего случая движения, в настоящей статье будем его называть, по аналогии с терминологией теории упругости [15, 16], полярным моментом инерции, как более полно отражающим его геометрический смысл, при сохранении принятого в механике твердого тела обозначения  $J_P$

$$J_P^z = \int_m \left[ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \right] \delta m. \quad (14)$$

В результате вместо (13) получаем

$$E_k = 0.5m \left( x_t^2 + y_t^2 \right)_P + 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z - \theta_{z,t} m \left[ (x_t)_P (y_C - y_P) - (y_t)_P (x_C - x_P) \right]. \quad (15)$$

Положение центра масс зависит от конфигурации тела и определяется по уравнениям (12). Положение полюса можно выбрать произвольно. Если в качестве полюса

выбрать центр масс, последнее слагаемое обращается в ноль и формула (15) принимает простейший вид

$$E_k = 0.5m(x_t^2 + y_t^2)_C + 0.5\theta_{z,t}^2 J_C^z. \quad (16)$$

Уравнение (16) можно распространить на любое пространственное поступательное движение с вращением относительно одной оси, т.к. компонента  $z_t$  для всех частиц тела одинакова

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5 \int_m (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) \delta m = 0.5 \left[ \int_m (x_t^2 + y_t^2) \delta m + \int_m (z_t^2)_C \delta m \right] = \\ &= 0.5mv_C^2 + 0.5\theta_{z,t}^2 J_C^z. \end{aligned}$$

Результат можно записать в инвариантной форме для любой оси

$$E_k = 0.5mv_C^2 + 0.5\theta_{i,t}^2 J_C^i, \quad (17)$$

что совпадает с уравнением (1), т.к. ось вращения совпадает с мгновенной.

Получить точную аналитическую зависимость кинетической энергии при пространственном движении твердого тела без определения положения мгновенной оси вращения позволяет представление интеграла (10) в виде суммы трех интегралов, в каждом из которых подынтегральные функции представляют сумму одноименных компонент скорости совмещаемых плоскопараллельных движений

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5 \int_m v^2 \delta m = 0.5 \int_m (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) \delta m = \\ &= 0.5 \int_m (x_t' + x_t'' + x_t''')^2 \delta m + 0.5 \int_m (y_t' + y_t'' + y_t''')^2 \delta m + 0.5 \int_m (z_t' + z_t'' + z_t''')^2 \delta m, \end{aligned} \quad (18)$$

где штрихами обозначены компоненты скорости от трех вращений: один штрих – относительно оси  $x$ , два штриха – относительно оси  $y$ , три штриха – относительно оси  $z$ . Это соответствует правилу геометрического сложения скоростей при совмещении движений, оно выполняется при используемом принципе суперпозиции (7) [14].

Для сокращения математических записей рассмотрим сначала вращение тела относительно трех координатных осей, проходящих через неподвижный полюс  $P(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$  и к полученному результату добавим энергию поступательного движения тела вместе с полюсом (8), как это предусмотрено в теореме Кенига [11, 12].

Из уравнений (3)–(6) следует, что в каждом интеграле из уравнения (18) одно из слагаемых обращается в ноль

$$E_k = 0.5 \int_m (x_t'' + x_t''')^2 \delta m + 0.5 \int_m (y_t' + y_t''')^2 \delta m + 0.5 \int_m (z_t' + z_t'')^2 \delta m. \quad (19)$$

Для первого интеграла с компонентами скорости вдоль оси  $x$  с учетом уравнений (3)–(6) получаем (верхний индекс при обозначении  $E_k^i$  показывает направление компоненты скорости в данном интеграле)

$$E_k^x = 0.5 \int_m \left\{ \theta_{z,t}^2 (y - \beta_P)^2 + \theta_{y,t}^2 (z - \gamma_P)^2 - 2\theta_{y,t} \theta_{z,t} (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \right\} \delta m. \quad (20)$$

Так как угловые скорости  $\theta_{i,t}$  одинаковы для всех частиц тела, их можно вынести за знак интеграла

$$E_k^x = 0.5\theta_{z,t}^2 \int_m (y - \beta_P)^2 \delta m + 0.5\theta_{y,t}^2 \int_m (z - \gamma_P)^2 \delta m - \theta_{y,t} \theta_{z,t} \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \delta m. \quad (21)$$

Оставшиеся в правой части интегралы относятся к осевым  $(I_i^j)_P$  и центробежным  $(I_{ij})_P$  моментам инерции [15, 16]

$$\left(I_y^z\right)_P = \int_m (y - \beta_P)^2 \delta m, \quad \left(I_z^y\right)_P = \int_m (z - \gamma_P)^2 \delta m, \quad (I_{yz})_P = \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \delta m. \quad (22)$$

Для большей определенности верхний индекс у осевых моментов инерции  $(I_i^j)_P$  указывает направление нормали к соответствующей плоскости, которая совпадает с осью вращения, указанной индексом угловой скорости  $\theta_{i,t}$  в рассматриваемом слагаемом. Для центробежных моментов инерции, у которых множителями являются две угловые скорости, верхний индекс отсутствует. Строчные нижние индексы при моментах инерции  $(I_{ij})_P$  в уравнениях (22) и далее указывают переменные в соответствующих подынтегральных функциях. Уравнение (21) принимает вид

$$E_k^x = 0.5\theta_{z,t}^2 \left(I_y^z\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2 \left(I_z^y\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{z,t} (I_{yz})_P. \quad (23)$$

Для двух других интегралов уравнения (19), преобразуя их с помощью уравнений (5) и (6) к виду (20), находим

$$E_k^y = 0.5\theta_{z,t}^2 \left(I_x^z\right)_P + 0.5\theta_{x,t}^2 \left(I_z^x\right)_P - \theta_{x,t}\theta_{z,t} (I_{xz})_P, \quad (24)$$

$$E_k^z = 0.5\theta_{x,t}^2 \left(I_y^x\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2 \left(I_x^y\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{x,t} (I_{xy})_P. \quad (25)$$

Суммируя правые части уравнений (23)–(25), получаем

$$E_k = 0.5\theta_{z,t}^2 \left(I_x^z + I_y^z\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2 \left(I_x^y + I_z^y\right)_P + 0.5\theta_{x,t}^2 \left(I_y^x + I_z^x\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{z,t} (I_{yz})_P - \theta_{x,t}\theta_{z,t} (I_{xz})_P - \theta_{y,t}\theta_{x,t} (I_{xy})_P, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \left(I_x^y\right)_P &= \left(I_x^z\right)_P = \int_m (x - \alpha_P)^2 \delta m, & \left(I_y^x\right)_P &= \left(I_y^z\right)_P = \int_m (y - \beta_P)^2 \delta m, \\ \left(I_z^x\right)_P &= \left(I_z^y\right)_P = \int_m (z - \gamma_P)^2 \delta m, \\ \left(I_{xy}\right)_P &= \int_m (x - \alpha_P)(y - \beta_P) \delta m, & \left(I_{yz}\right)_P &= \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \delta m, \\ \left(I_{zx}\right)_P &= \int_m (x - \alpha_P)(z - \gamma_P) \delta m. \end{aligned} \quad (27)$$

Сумма осевых моментов инерции (27) в первых трех слагаемых уравнения (26) определяет квадраты расстояний между проекциями точки и полюса в разных плоскостях. При вращении твердого тела они остаются, как это следует из уравнений движения (3)–(6), постоянными и получаемые в результате полярные моменты инерции не изменяются, например

$$J_P^z = \int_m \left[ (x - \alpha_P)^2 + (y - \beta_P)^2 \right] \delta m = \int_m \left[ (\alpha - \alpha_P)^2 + (\beta - \beta_P)^2 \right] \delta m = \text{const}. \quad (28)$$

При использовании общепринятых в механике твердого тела обозначений (14)

$$\begin{aligned} \left(I_y^z\right)_P + \left(I_x^z\right)_P &= \int_m \left[ (x - \alpha_P)^2 + (y - \beta_P)^2 \right] \delta m = J_P^z, \\ \left(I_z^y\right)_P + \left(I_x^y\right)_P &= \int_m \left[ (x - \alpha_P)^2 + (z - \gamma_P)^2 \right] \delta m = J_P^y, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(I_y^x\right)_P + \left(I_z^x\right)_P = \int_m \left[ (z - \gamma_P)^2 + (y - \beta_P)^2 \right] \delta m = J_P^x,$$

вместо (26) получаем

$$E_k = 0.5 \left( \theta_{z,t}^2 J_P^z + \theta_{y,t}^2 J_P^y + \theta_{x,t}^2 J_P^x \right) - \theta_{y,t} \theta_{z,t} \left( I_{yz} \right)_P - \theta_{x,t} \theta_{z,t} \left( I_{xz} \right)_P - \theta_{y,t} \theta_{x,t} \left( I_{xy} \right)_P. \quad (30)$$

Верхний индекс у моментов инерции  $J_P^i$  соответствует оси, относительно которой он должен быть определен. Нижний индекс указывает точку, через которую должна проходить ось вращения  $i \in (x, y, z)$ .

Уравнение (30) не содержит никаких ограничений и применимо для любых вариантов пространственного движения тел с произвольным вращением. Последние слагаемые с центробежными моментами инерции  $(I_{ij})_P$ , в отличие от полярных моментов инерции  $J_P^i$  в первых трех слагаемых, изменяются при вращении тела и влияют на значения кинетической энергии.

Чтобы оценить возможный диапазон изменения центробежных моментов инерции в уравнении (30), воспользуемся начальными значениями осевых и центробежных моментов инерции, которые остаются неизменными в процессе движения тела. Их значения следуют из уравнений (27), если текущие координаты  $x_i \in (x, y, z)$  приравнять начальным  $\alpha_P \in (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\begin{aligned} \left(I_\alpha^z\right)_P = \left(I_\alpha^y\right)_P &= \int_m (\alpha - \alpha_P)^2 \delta m, & \left(I_\beta^x\right)_P = \left(I_\beta^z\right)_P &= \int_m (\beta - \beta_P)^2 \delta m, \\ \left(I_\gamma^x\right)_P = \left(I_\gamma^y\right)_P &= \int_m (\gamma - \gamma_P)^2 \delta m; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left(I_{\alpha\beta}\right)_P &= \int_m (\alpha - \alpha_P)(\beta - \beta_P) \delta m, & \left(I_{\beta\gamma}\right)_P &= \int_m (\beta - \beta_P)(\gamma - \gamma_P) \delta m, \\ \left(I_{\gamma\alpha}\right)_P &= \int_m (\alpha - \alpha_P)(\gamma - \gamma_P) \delta m. \end{aligned} \quad (32)$$

Для нижних индексов в левой части уравнений (31)–(32) использованы переменные Лагранжа  $\alpha_P \in (\alpha, \beta, \gamma)$ , чтобы отличить моменты инерции в исходном состоянии от текущих (27).

Полярные моменты инерции (29) остаются неизменными при повороте тела. Используя уравнения движения (3)–(6), систему (27) для центробежных моментов инерции  $(I_{ij})_P$  преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \left(I_{xy}\right)_P &= \int_m (x - \alpha_P)(y - \beta_P) \delta m = \\ &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_z) \int_m \left[ (\alpha - \alpha_P)^2 - (\beta - \beta_P)^2 \right] \delta m + \cos(2\Delta\theta_z) \int_m (\alpha - \alpha_P)(\beta - \beta_P) \delta m, \\ \left(I_{yz}\right)_P &= \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \delta m = \\ &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_x) \int_m \left[ (\beta - \beta_P)^2 - (\gamma - \gamma_P)^2 \right] \delta m + \cos(2\Delta\theta_x) \int_m (\beta - \beta_P)(\gamma - \gamma_P) \delta m, \\ \left(I_{zx}\right)_P &= \int_m (x - \alpha_P)(z - \gamma_P) \delta m = \\ &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_y) \int_m \left[ (\gamma - \gamma_P)^2 - (\alpha - \alpha_P)^2 \right] \delta m + \cos(2\Delta\theta_y) \int_m (\alpha - \alpha_P)(\gamma - \gamma_P) \delta m, \end{aligned}$$

или, с учетом обозначений для начальных значений (31)–(32),

$$\begin{aligned}(I_{xy})_P &= \int_m (x - \alpha_P)(y - \beta_P) \delta m = 0.5 \sin(2\Delta\theta_z) \left[ (I_\alpha^z)_P - (I_\beta^z)_P \right] + \cos(2\Delta\theta_z) (I_{\alpha\beta})_P, \\ (I_{yz})_P &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_x) \left[ (I_\beta^x)_P - (I_\gamma^x)_P \right] + \cos(2\Delta\theta_x) (I_{\beta\gamma})_P, \\ (I_{zx})_P &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_y) \left[ (I_\gamma^y)_P - (I_\alpha^y)_P \right] + \cos(2\Delta\theta_y) (I_{\gamma\alpha})_P.\end{aligned}\quad (33)$$

Полученные уравнения совпадают с известными соотношениям для изменения центробежных моментов инерции твердых тел при повороте осей координат [15, 16]. Следовательно, три последних слагаемых в уравнении (30) учитывают изменение центробежных моментов инерции относительно осей системы координат наблюдателя за счет поворота тела. На долю кинетической энергии, определяемую слагаемыми с центробежными моментами инерции (33), влияют особенности вращения относительно всех осей. Если вращение происходит относительно только двух осей, например  $y$  и  $z$ , уравнение (30) принимает вид

$$E_k = 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z + 0.5\theta_{y,t}^2 J_P^y - \theta_{y,t}\theta_{z,t} (I_{yz})_P, \quad (34)$$

где за счет  $\Delta\theta_x = 0$  оставшийся центробежный момент  $(I_{yz})_P$  не изменяется при повороте тела, как и полярные моменты инерции (29),

$$(I_{yz})_P = \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P) \delta m = \int_m (\beta - \beta_P)(\gamma - \gamma_P) \delta m.$$

Если вращение происходит относительно только одной оси, уравнение (30) преобразуется к виду (15) для неподвижного полюса (первое и третье слагаемые обращаются в ноль)

$$E_k = 0.5\theta_{z,t}^2 (I_x^z + I_y^z)_P = 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z. \quad (35)$$

При вращении относительно трех осей следует использовать уравнение (30) с центробежными моментами (33).

Если совместить полюс  $P$  с центром масс  $C$ , уравнение (30) принимает вид

$$E_k = 0.5 \left( \theta_{z,t}^2 J_C^z + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{x,t}^2 J_C^x \right) - \theta_{y,t}\theta_{z,t} (I_{yz})_C - \theta_{x,t}\theta_{z,t} (I_{xz})_C - \theta_{y,t}\theta_{x,t} (I_{xy})_C, \quad (36)$$

где для полярных моментов инерции вместо (29) получаем

$$\begin{aligned}J_C^z &= \int_m \left[ (x - \alpha_C)^2 + (y - \beta_C)^2 \right] \delta m, & J_C^y &= \int_m \left[ (x - \alpha_C)^2 + (z - \gamma_C)^2 \right] \delta m, \\ J_C^x &= \int_m \left[ (y - \beta_C)^2 + (z - \gamma_C)^2 \right] \delta m.\end{aligned}\quad (37)$$

Для центробежных моментов вместо (33) справедливы уравнения

$$\begin{aligned}(I_{xy})_C &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_z) \left[ (I_\alpha)_C - (I_\beta)_C \right] + \cos(2\Delta\theta_z) (I_{\alpha\beta})_C, \\ (I_{yz})_C &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_x) \left[ (I_\beta)_C - (I_\gamma)_C \right] + \cos(2\Delta\theta_x) (I_{\beta\gamma})_C, \\ (I_{zx})_C &= 0.5 \sin(2\Delta\theta_y) \left[ (I_\gamma)_C - (I_\alpha)_C \right] + \cos(2\Delta\theta_y) (I_{\alpha\gamma})_C,\end{aligned}\quad (38)$$

где вместо (31)–(32) для центральных моментов инерции в исходном состоянии имеем

$$(I_\alpha^z)_C = (I_\alpha^y)_C = \int_m (\alpha - \alpha_C)^2 \delta m, \quad (I_\beta^x)_C = (I_\beta^z)_C = \int_m (\beta - \beta_C)^2 \delta m,$$

$$\begin{aligned} (I_{\gamma}^x)_C &= (I_{\gamma}^y)_C = \int_m (\gamma - \gamma_C)^2 \delta m, \\ (I_{\alpha\beta})_C &= \int_m (\alpha - \alpha_C)(\beta - \beta_C) \delta m, \quad (I_{\beta\gamma})_C = \int_m (\beta - \beta_C)(\gamma - \gamma_C) \delta m, \\ (I_{\gamma\alpha})_C &= \int_m (\alpha - \alpha_C)(\gamma - \gamma_C) \delta m. \end{aligned}$$

Для расчета кинетической энергии с учетом поступательного движения центра масс уравнения (30) и (36), в соответствии с теоремой Кенига, преобразуются к виду

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5v_P^2 m + 0.5(\theta_{z,t}^2 J_P^z + \theta_{y,t}^2 J_P^y + \theta_{x,t}^2 J_P^x) - \theta_{y,t} \theta_{z,t} (I_{yz})_P - \\ &\quad - \theta_{x,t} \theta_{z,t} (I_{xz})_P - \theta_{y,t} \theta_{x,t} (I_{xy})_P, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5v_C^2 m + 0.5(\theta_{z,t}^2 J_C^z + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{x,t}^2 J_C^x) - \theta_{y,t} \theta_{z,t} (I_{yz})_C - \\ &\quad - \theta_{x,t} \theta_{z,t} (I_{xz})_C - \theta_{y,t} \theta_{x,t} (I_{xy})_C. \end{aligned} \quad (40)$$

Полярные моменты инерции  $J_P^i$  определяют уравнения (29) или (37), центробежные  $(I_{ij})_P$  – (33) или (38).

**Пример применения уравнений.** Рассмотрим применение полученных уравнений на примере робота-манипулятора с двумя вращательными и одной винтовой кинематическими парами для перемещения груза массой  $m$  [1, 6]. Структурная схема робота с тремя независимыми приводами и вращением звеньев относительно пересекающихся осей представлена на рис. 1.

Звено 1 закреплено на стойке с помощью вращательной кинематической пары, которая позволяет звену вращаться относительно оси  $z$ , проходящей через начало координат. Частицы звена изменяют положение в пространстве наблюдателя в соответствии с уравнениями (3), которые с учетом принятой системы координат и положения полюса принимают вид

$$x = \alpha \cos \Delta\theta_z - \beta \sin \Delta\theta_z, \quad y = \alpha \sin \Delta\theta_z + \beta \cos \Delta\theta_z, \quad z = \gamma. \quad (41)$$

Звено 2 вращается относительно оси  $y_1$ , используя привод в кинематической паре с точкой  $A(\alpha_A = 0, 0, \gamma_A = H)$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_A + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y, \quad y = \beta, \\ z &= \gamma_A + (\gamma - \gamma_A) \cos \Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y. \end{aligned} \quad (42)$$

Звенья 2 и 3 соединены винтовой кинематической парой в точке  $B(\alpha_B = L_1, 0, \gamma_B = H)$ . Привод обеспечивает поступательное и вращательное движения звена 3 относительно звена 2

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x_B - \alpha_B, \quad y = \beta_B + (\beta - \beta_B) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B) \sin \Delta\theta_x, \\ z &= \gamma_B + (\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x. \end{aligned} \quad (43)$$

Поступательное перемещение  $u$  определяет шаг винтовой пары  $h$  и угол поворота звена  $\Delta\theta_x$

$$x_B - \alpha_B = u = h\Delta\theta_x / (2\pi).$$

В соответствии с уравнением (7), для уравнений совмещенного движения звена 2 при внешнем движении звена 1 следует переменные Лагранжа в уравнениях (41) заменить соответствующими уравнениями (42)

$$(x)_2 = [\alpha_A + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y] \cos \Delta\theta_z - \beta \sin \Delta\theta_z,$$

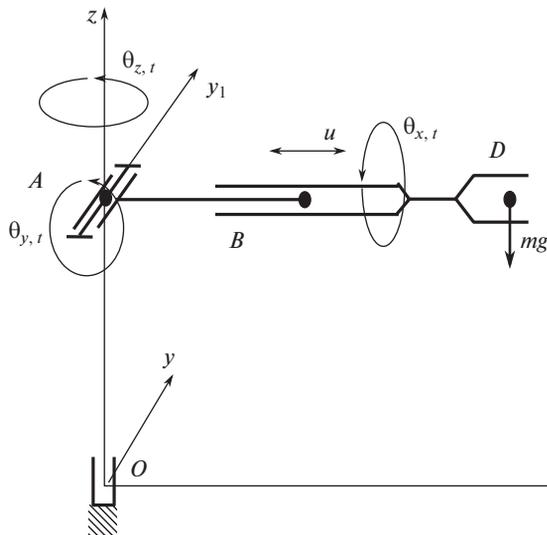


Рис. 1. Структурная схема трехзвенного робота с двумя вращательными и одной винтовой кинематическими парами в исходном положении.

$$(y)_2 = [\alpha_A + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y] \sin \Delta\theta_z + \beta \cos \Delta\theta_z, \quad (44)$$

$$(z)_2 = \gamma_A + (\gamma - \gamma_A) \cos \Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y.$$

Производные по времени определяют компоненты скорости частиц

$$(x_t)_2 = -\theta_{z,t} \{[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y] \sin \Delta\theta_z + \beta \cos \Delta\theta_z\} - \theta_{y,t} [(\alpha - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y - (\gamma - \gamma_A) \cos \Delta\theta_y] \cos \Delta\theta_z,$$

$$(y_t)_2 = \theta_{z,t} \{[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y] \cos \Delta\theta_z - \beta \sin \Delta\theta_z\} - \theta_{y,t} \{[(\alpha - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y - (\gamma - \gamma_A) \cos \Delta\theta_y] \sin \Delta\theta_z\}, \quad (45)$$

$$(z_t)_2 = -\theta_{y,t} [(\gamma - \gamma_A) \sin \Delta\theta_y + (\alpha - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y].$$

Используя повторно правило суперпозиции (7), с учетом внутреннего движения (43) и внешнего (44) при равенстве координат  $\beta_A = \beta_B$  и  $\gamma_A = \gamma_B$  получаем для звена 3 вращение относительно трех осей

$$(x)_3 = \{\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + [(\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_y\} \cos \Delta\theta_z - [\beta_B + (\beta - \beta_B) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B) \sin \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_z, \quad (46)$$

$$(y)_3 = \{\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + [(\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_y\} \sin \Delta\theta_z + [\beta_B + (\beta - \beta_B) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B) \sin \Delta\theta_x] \cos \Delta\theta_z,$$

$$(z)_3 = \gamma_A + [(\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x] \cos \Delta\theta_y - (\alpha + u - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y.$$

После дифференцирования по времени находим компоненты скорости, например, для  $(x_t)_3$

$$\begin{aligned}
 (x_t)_3 = & u_t \cos \Delta\theta_y \cos \Delta\theta_z - \theta_{y,t}(\alpha + u - \alpha_A) \sin \Delta\theta_y \cos \Delta\theta_z + \\
 & + \theta_{x,t} [(\beta - \beta_B) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B) \sin \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_y \cos \Delta\theta_z + \\
 & + \theta_{y,t} [\gamma_B + (\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x - \gamma_A] \cos \Delta\theta_y \cos \Delta\theta_z - \\
 & - \theta_{z,t} \{ \alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A) \cos \Delta\theta_y + \\
 & + [(\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_y \} \sin \Delta\theta_z + \\
 & + \theta_{x,t} [(\beta - \beta_B) \sin \Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B) \cos \Delta\theta_x] \sin \Delta\theta_z - \\
 & - \theta_{z,t} [\beta_B + (\beta - \beta_B) \cos \Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B) \sin \Delta\theta_x] \cos \Delta\theta_z.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Другие компоненты скорости для звена 3 не приведены для сокращения объема статьи. Правильность записи уравнений движения (44) и (46) можно проверить по условию отсутствия деформации [13]

$$R = \delta V / \delta V_0 = |x_{i,\alpha_p}| = 1, \quad x_{i,\alpha_p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p.$$

Уравнения движения частиц переносимого груза в точке  $D$  зависят от особенностей его закрепления на звене 3. Для зажимных захватов уравнения совпадают с уравнением (46) для звена 3, но требуют конкретизации начальных координат рассматриваемой точки, например, для определения координат центра массы груза  $C_m(\alpha_{Cm}, \beta_{Cm}, \gamma_{Cm})$ .

Зная компоненты скорости (45) и (47), кинетическую энергию звеньев можно найти численными способами [4–6], однако удобнее воспользоваться аналитическими зависимостями (39)–(40). Частицы звена 1 совершают плоскопараллельное движение, кинетическую энергию звена определяет уравнение (35). Частицы звена 2 вращаются относительно двух осей  $\theta_{y,t} \neq \theta_{z,t} \neq 0$ ,  $\theta_{x,t} = 0$ , кинетическую энергию определяет уравнение (34). Звено 3 с подвижным полюсом  $B$  вращается относительно трех осей, кинетическую энергию определяет уравнения (39) или (40).

Для расчета требуемой мощности приводов и сил в кинематических парах целесообразно использовать анализ энергетических потоков, как в рычажных механизмах с замкнутыми кинематическими цепями [17]. Сумма скоростей изменения кинетической  $W_k = dE_k/dt$  и потенциальной  $W_p = dE_p/dt$  энергии движущихся тел на рассматриваемом участке механизма должна быть равна мощности  $W_e$ , поступающей от внешних источников

$$W_e = W_k + W_p.$$

Выбор полюса в уравнении (46) однозначно определен на этапе кинематического анализа, т.к. уравнения (3)–(6) предполагают его движение известным. Он должен принадлежать кинематическим парам, соединяющим ведомое и ведущее звенья. Однако при расчете обобщенных сил удобнее использовать уравнение (40) с кинематическими характеристиками центра масс [17]. Например, для звена 3 требуемую мощность внешних сил определяет уравнение

$$(W_e)_B = (W_k)_{C3} + (W_p)_{C3} + (W_k)_D + (W_p)_D,$$

где

$$\begin{aligned}
 (W_k)_{C3} = & m(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt})_{C3} + (\theta_{x,t} \theta_{x,tt} J_{C3}^y + \theta_{y,t} \theta_{y,tt} J_{C3}^y + \theta_{z,t} \theta_{z,tt} J_{C3}^z) - \\
 & - d \{ \theta_{y,t} \theta_{z,t} (J_{yz})_{C3} + \theta_{x,t} \theta_{z,t} (J_{xz})_{C3} + \theta_{y,t} \theta_{x,t} (J_{xy})_{C3} \} / dt,
 \end{aligned}$$

$$(W_p)_{C3} = m_{C3}g(z_t)_{C3}.$$

Это наиболее громоздкая формула для динамического анализа рассматриваемого робота, но при ее использовании трудоемкость расчета существенно ниже по сравнению с матричными вариантами. Такая методика обеспечивает выполнение закона сохранения энергии на любой части механизма в любой момент времени.

**Заключение.** Уравнения (39) и (40) определяют кинетическую энергию твердого тела в самом общем случае пространственного движения с произвольным вращением относительно любых осей, не требуют определения положения мгновенной оси вращения и их можно использовать для динамического анализа механизмов любой сложности при известной информации о геометрических особенностях звеньев, позволяющих определить осевые, полярные и центробежные моменты инерции, а также о текущих значениях линейных и угловых скоростей [17].

Принимая во внимание, что осевые  $(I_i^j)_p$  и центробежные  $(I_{ij})_p$  моменты инерции для исходного состояния тела (31)–(32) при движении не изменяются, можно утверждать, что текущие значения центробежных моментов (38) в зависимости от угла поворота тела  $\Delta\theta_i$  изменяются по модулю, например для момента инерции  $(I_{xy})_C$  от исходного значения  $(I_{\alpha\beta})_C$  до половины разности осевых моментов инерции (в исходном состоянии)  $[(I_{\alpha}^z)_C - (I_{\beta}^z)_C]/2$ .

Для тел с равными главными моментами инерции, например для шара, когда  $(I_{\alpha})_C = (I_{\beta})_C = (I_{\gamma})_C$  и любые две ортогональные оси, проходящие через центр тяжести, являются главными центральными осями инерции, кинетическая энергия при неизменных угловых скоростях не изменяется. В противном случае первые слагаемые в уравнениях (38) за счет разности главных центральных моментов инерции приведут к циклическим изменениям кинетической энергии, возможному проявлению прецессии и нутации, амплитуда которых зависит от угловых скоростей вращения тела.

Структура полученных уравнений не позволяет предложить альтернативную методику аналитического определения момента инерции относительно мгновенной оси вращения  $J_C$  в уравнении (1). Момент инерции можно определить только экспериментально [11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев Ю.Г.* Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики. М.: КНОРУС, 2015. 560 с.
2. *Подураев Ю.В.* Мехатроника: основы, методы, применение. М.: Машиностроение, 2006. 256 с.
3. Механика промышленных роботов. Т. 1: Кинематика и динамика / Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1989. 383 с.
4. *Корендяев А.И.* Теоретические основы робототехники. М.: Наука, 2006. 376 с.
5. *Li D.-Q., Hong H.J., Jiang X.L.* Dynamics Modeling, Control System Design and Simulation of Manipulator Based on Lagrange Equation // Mechanism and Machine Science. 2016. P. 1129.
6. *Лукинов А.П.* Проектирование мехатронных и робототехнических устройств. М.: Лань, 2012. 608 с.
7. *Liu X.-J., Wang Q.-M.* Kinematics, Dynamics and Dimensional Synthesis of a Novel 2-DoF Translational Manipulator // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2004. V. 41. № 4. P. 205.
8. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. М.: Физматлит, 2011. 192 с.
9. *Hwang Y.-L., Cheng J.-K., Truong V.-T.* Dynamic Analysis and Control of Industrial Robotic Manipulators. Applied Mechanics and Materials. ISSN: 1662-7482. 2018. V. 883. P. 30.

- 
10. Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Малафеев О.А. Динамический анализ исполнительской системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 39.
  11. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: МФТИ, 2008. 304 с
  12. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1987. 344 с.
  13. Алюшин Ю.А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа. М.: Машиностроение, 2012. 192 с.
  14. Алюшин Ю.А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 3. С. 13.
  15. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Изд. 10-е, перераб. и доп. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 577 с.
  16. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
  17. Алюшин Ю.А., Вержанский П.М. Структурный, кинематический и динамический анализ рычажных механизмов. М.: МИСиС, 2015. 104 с.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.01,62-231.3,621.83,531.8

**РОБОТЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КРУГОВОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ:  
СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР КИНЕМАТИЧЕСКИХ СХЕМ,  
МЕТОДОВ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА**© 2022 г. С. В. Киселев<sup>1</sup>, А. В. Антонов<sup>1</sup>, А. С. Фомин<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**\*e-mail: alexey-nvkz@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

В статье представлен обзор различных схем роботов параллельной структуры с круговой направляющей, обеспечивающих неограниченный поворот выходного звена вокруг одной из осей. Рассмотрены известные методы и алгоритмы проведения структурного и параметрического синтеза и анализа, исследования особых положений и построения рабочих зон таких роботов. Выполненное исследование позволяет не только оценить текущее состояние изученности проблем синтеза и анализа роботов данного типа, но и указывает на возможные направления дальнейших исследований в этой области.

*Ключевые слова:* механизм, манипулятор, робот параллельной структуры, круговая направляющая, кинематическая цепь, степень свободы, структурный синтез и анализ, рабочая зона, особые положения, параметрический синтез

**DOI:** 10.31857/S0235711922010059

Необходимость решения новых технологических задач, повсеместная автоматизация технологий и процессов требуют создания более совершенных исполнительных устройств с продвинутыми функциональными свойствами. В настоящее время все большее распространение в технике получают робототехнические системы, построенные с параллельной структурой. Робот параллельной структуры – это автоматизированная механическая система, в которой выходное звено управляется несколькими кинематическими цепями, имеющими, как правило, отдельные приводы. Определяющими преимуществами роботов параллельной структуры являются повышенная точность позиционирования, повышенная жесткость, возможность получения больших скоростей и ускорений выходных звеньев, а также способность манипулирования большими нагрузками.

Постоянное совершенствование структуры уже существующих и разработка принципиально новых роботов параллельной структуры привели к возникновению их отдельных типов и классов. Это в свою очередь поспособствовало появлению новых методов их синтеза и анализа, которые имеют весьма существенные отличия для отдельных представителей таких роботов. Особый интерес с точки зрения возможности реализации новых функциональных свойств представляют роботы параллельной структуры с круговой направляющей. Их уникальность заключается в обеспечении неограниченного поворота выходного звена вокруг одной из осей. Данное свойство значительно расширяет возможности практической реализации таких роботов во многих областях, в том числе в аддитивных технологиях, роботохирургии, измери-

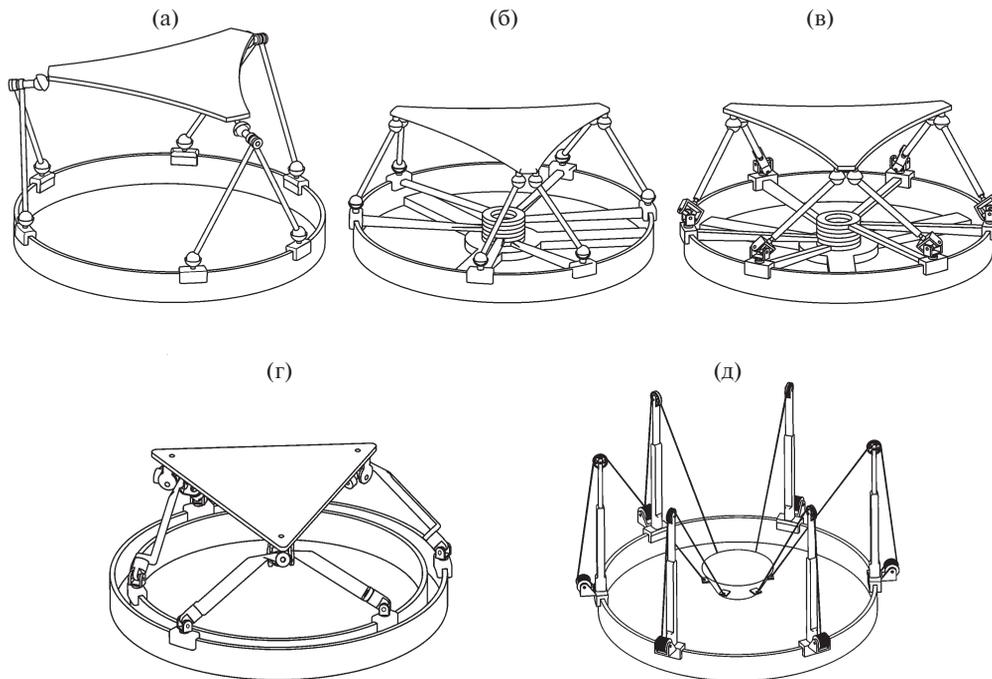


Рис. 1. Модели шестиподвижных роботов параллельной структуры с круговой направляющей и шестью кинематическими цепями.

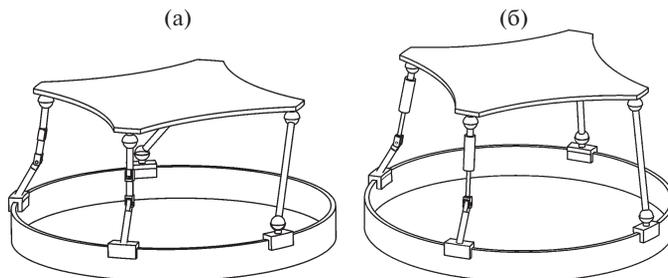
тельных и испытательных устройствах, обучающих системах, авто- и авиатренажерах, космически-инспирированных системах и ряде других важных приложений.

Настоящее исследование направлено на проведение аналитического обзора известных архитектур роботов параллельной структуры с круговой направляющей, применяемых для выполнения различных технологических операций, и на систематизацию методов их синтеза и анализа.

**Известные модели роботов с круговой направляющей. Модели роботов с шестью степенями свободы.** Обратимся к систематическому обзору известных схем роботов параллельной структуры с круговой направляющей, в которых обеспечивается возможность неограниченного поворота вокруг одной из осей координат. Начнем с рассмотрения систем, имеющих шесть степеней свободы.

**Модели роботов с шестью кинематическими цепями.** Роботы такого типа отличаются не только по числу степеней свободы, но и по числу кинематических цепей, расположенных между стойкой и выходным звеном. Первой шестиподвижной системой с шестью кинематическими цепями, синтезированной в этом направлении, является манипулятор [1], приведенный на рис. 1а. В манипуляторе каждая из шести кинематических цепей имеет ведущее звено в виде каретки. В роботе имеются три пассивные подвижности звеньев, расположенных при платформе, возникающие за счет того, что центры вращательных шарниров смежных штанг и верхних сферических шарниров лежат на одной прямой.

Следующим роботом, созданным в этом направлении, является ротопод, показанный на рис. 1б [2]. Здесь шесть степеней свободы выходного звена контролируются шестью каретками, которые совершают вращение вокруг центра круговой направляющей.



**Рис. 2.** Модели шестиподвижных роботов параллельной структуры с круговой направляющей и четырьмя кинематическими цепями.

щей. Имеют место шесть пассивных подвижностей за счет поворота штанг вокруг их продольных осей. Устранить данные подвижности можно путем замены нижнего сферического шарнира на карданный в каждой кинематической цепи. В таком случае робот имеет структуру 6-*RUS* [3] (рис. 1в).

Также известен робот с двумя круговыми направляющими (рис. 1г) [4]. Его применение связано с микропозиционированием. Шесть цепей, установленных между стойкой и платформой, образуют три точки соединения с платформой. При этом структура робота сформирована исключительно вращательными шарнирами.

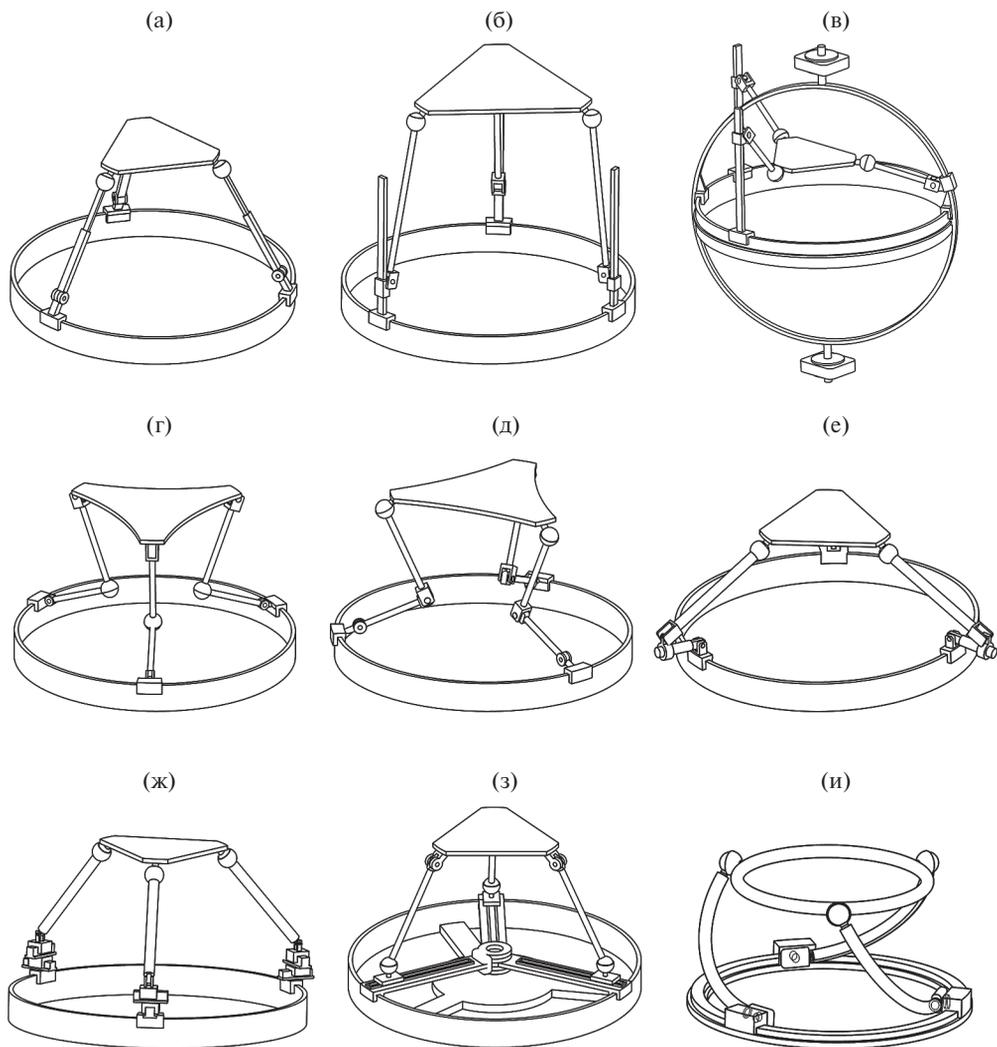
На рис. 1д представлен робот с круговой направляющей с тросовыми звеньями [5]. В нем на каждой каретке установлено два привода. Первый контролирует смещение каретки вдоль круговой направляющей, а второй обеспечивает натяжение троса.

**Модели роботов с четырьмя кинематическими цепями.** Рассмотрим известные модели шестиподвижных роботов параллельной структуры с круговой направляющей, где выходное звено соединяется с основанием четырьмя цепями. На рис. 2 представлены две модели таких роботов. Первая образована цепями 2-*RRRS* и 2-*RSS* (рис. 2а) [6], вторая – цепями 2-*RRPS* и 2-*RSS* (рис. 2б) [7]. Кроме приводных звеньев – кареток, в каждой цепи *RRRS* (рис. 2а) или *RRPS* (рис. 2б) установлено еще по одному приводу. Отметим, что в каждом механизме существуют две пассивные подвижности, возникающие за счет поворота штанг со сферическими шарнирами вокруг собственных продольных осей.

**Модели роботов с тремя кинематическими цепями.** Далее рассмотрим известные модели шестиподвижных роботов с тремя кинематическими цепями. Одним из первых роботов такого типа является 3-*RRPS* робот (рис. 3а) [8]. В каждой цепи приводными звеньями являются каретка и шток, управляющие движением платформы.

Другим примером робота с тремя кинематическими цепями является “Eclipse” – робот, имеющий структуру 3-*RPRS* (рис. 3б) [9]. Такое строение робота обеспечивает высокопроизводительную обработку различных элементов. Робот такого типа включает восемь приводных звеньев при шести степенях свободы выходного звена. Наличие дополнительных приводов позволяет исключить особые положения. Приводы установлены на каждой каретке и ползуне, перемещающемся по вертикальной штанге, а также на двух шатунах, соединяемых с выходным звеном. В [10] представлены вариации данного робота с избыточными приводами.

Позже данный робот был модернизирован до модели “Eclipse II” (рис. 3в) [11] с целью применения в качестве тренажера. В отличие от предыдущей модели в таком роботе третья вертикальная штанга заменена на кольцо, имеющее возможность неограниченного поворота вокруг вертикальной оси. Робот включает шесть приводных звеньев: три каретки, сопряженные с круговой направляющей, и три пол-

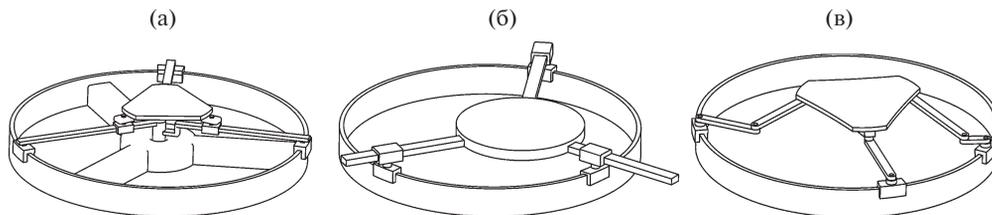


**Рис. 3.** Модели шестиподвижных роботов параллельной структуры с круговой направляющей и тремя кинематическими цепями.

зуна, установленные на вертикальных направляющих (двух линейных и одной криволинейной).

Другими примерами шестиподвижных роботов с тремя кинематическими цепями являются  $3\text{-RRSR}$  и  $3\text{-RRRS}$  (рис. 3г, д) [12]. Конструкции данных роботов обеспечивают относительно большую рабочую зону. В частности, для  $3\text{-RRRS}$  она больше, чем объем самого робота.

Рассмотренные роботы с тремя кинематическими цепями были усовершенствованы для увеличения параметров рабочих зон и углов наклона выходных звеньев путем введения в каждую из цепей по дополнительному приводному звену. На рис. 3е, ж представлены  $3\text{-RRPRS}$  [13] и  $3\text{-RPPRS}$  роботы [14], имеющие девять приводов.



**Рис. 4.** Модели роботов параллельной структуры с круговой направляющей, обеспечивающие плоское движение выходного звена.

На рис. 3з приведен робот, имеющий структуру  $3-RPSR$  [15]. В нем ведущими являются шесть звеньев: три горизонтальных рычага, совершающие вращение вокруг центра круговой направляющей, и три ползуна, смещающиеся вдоль данных рычагов.

Принципиально новый дизайн  $3-RRRS$  робота с круговой направляющей представлен на рис. 3и [16]. Он выполнен складным, т.е. с возможностью трансформации из плоской конфигурации в пространственные. Дизайн робота способствует увеличению вертикального габарита рабочей зоны.

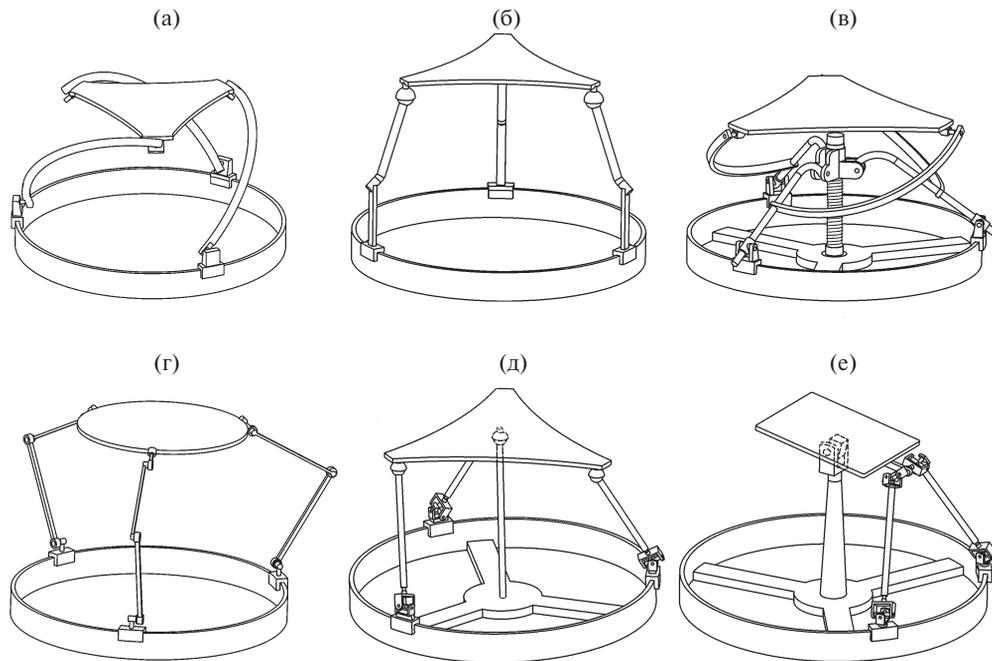
**Модели роботов с тремя и двумя степенями свободы.** Далее рассмотрим известные схемы роботов параллельной структуры с круговой направляющей, имеющие число степеней свободы менее шести (*lower-mobility robots*). Насколько известно авторам данной статьи, на текущий момент времени в литературе отсутствуют примеры пяти- и четырехподвижных роботов параллельной структуры с круговой направляющей, поэтому далее будут рассмотрены трех- и двухподвижные системы.

**Модели роботов с плоским движением выходного звена.** Рассмотрим модели роботов, в которых выходное звено совершает плоское движение. На рис. 4а, б представлены трехподвижные роботы с кинематическими цепями  $3-RPR$  [17] и  $3-RRP$  [18]. В них приводными звеньями являются каретки.

Схожая схема показана на рис. 4в [19]. Такой робот имеет структуру  $2-RRRR$  и  $1-RRR$  и имеет дополнительные приводы: кроме трех кареток, в движение приводится по одному звену из крайних трехзвенных цепей. Кинематические цепи  $2-RRRR$  позволяют увеличить размеры рабочей зоны данного робота.

**Модели роботов со сферическим движением выходного звена.** Далее обратимся к известным моделям роботов, в которых выходное звено совершает сферическое движение. На рис. 5а представлен сферический  $3-RRR$  робот [20], в котором платформа движется по поверхности сферы с центром в точке пересечения осей вращательных шарниров кинематических цепей. Приводными звеньями являются каретки. Также в работе [20] представлен сферический  $3-RRS$  робот. В нем сферические шарниры обеспечивают упрощенную сборку конструкции. Робот служит основой для создания комбинированных систем. Например, в [21] представлен пятиподвижный манипулятор параллельно-последовательной (гибридной) структуры, в котором трехподвижная параллельная часть дополнена двухподвижной цепью последовательной структуры. Еще один вариант дизайна сферического  $3-RRS$  робота представлен на рис. 5б [22]. В отличие от модели, приведенной в [20], здесь оси промежуточных вращательных шарниров наклонены, т.е. лежат не в горизонтальной плоскости.

На рис. 5в показана реконфигурируемая модель  $3-RRR$  робота [23]. В ней в центре круговой направляющей расположен винт, сопряженный с каретками и сферическими штангами посредством дополнительных рычагов. Суть реконфигурации состоит в том, что при вращении винта платформа имеет возможность вертикального смеще-



**Рис. 5.** Модели роботов параллельной структуры с круговой направляющей, обеспечивающие сферическое движение выходного звена.

ния. То есть начальное положение платформы можно установить независимо. Соответственно, в работе такой конструкции есть возможность изменения рабочей зоны.

Другой вариант сферического робота представлен на рис. 5г с цепями  $3\text{-RRRRR}$  [24]. В нем между звеньями каждой из трех цепей установлена плоская диада  $BBB$ . Это позволяет роботу иметь увеличенную рабочую зону и обеспечивает выход из некоторых особых положений.

Другая модель сферического робота с круговой направляющей представлена на рис. 5д со структурой  $3\text{-RUS}$  и  $1\text{-S}$  [25]. Здесь центральная цепь накладывает ограничения на движение платформы, оставляя ей только вращения вокруг трех осей. Приводными звеньями являются каретки.

Двухподвижный аналог такого робота представлен на рис. 5е [26], он имеет структуру  $2\text{-RRUU}$  и  $1\text{-RR}$ . Здесь также центральная цепь допускает только вращения платформы вокруг перпендикулярных осей.

В контексте проведенного исследования также можно отметить несколько роботов параллельной структуры с круговой направляющей, в которых нельзя добиться неограниченного поворота выходного звена, однако есть возможность поворота на достаточно большой угол. К таким роботам относятся: шестиподвижные системы по типу [27, 28], где максимальный угол поворота вокруг вертикальной оси может достигать  $60^\circ$ ; двухподвижная система [29], где выходному звену обеспечиваются вращения вокруг перпендикулярных осей; одноподвижные системы по типу [30, 31], где пространственное движение выходного звена с изменением до шести координат обеспечивается за счет единственного привода.

**Структурный синтез и анализ роботов с круговой направляющей.** Структурный синтез состоит в определении общей компоновки строения робота, т.е. в выборе типов и

количества шарниров и звеньев, а также способов их соединения друг с другом. Анализ, в свою очередь, заключается в определении числа степеней свободы робота и типов реализуемых им движений. Для систем параллельной структуры известны разные методы структурного синтеза и анализа, основанные на применении структурных формул, теории графов, теории групп, методах винтового исчисления и др. [32].

Несмотря на большое разнообразие методов структурного синтеза, большинство схем роботов параллельной структуры с круговой направляющей являются развитием и/или модификациями известных систем параллельного типа. Насколько известно, на текущий момент времени нет каких-либо исследований, в которых был бы продемонстрирован систематический подход к структурному синтезу таких роботов.

Вопросы структурного анализа роботов параллельной структуры с круговой направляющей также представлены в небольшом количестве работ. Так, классические структурные формулы были использованы для определения числа степеней свободы 3-RRRS робота [33], манипулятора Беликова [34, 35] и сферического робота [26]. Исследования [20, 22, 25] демонстрируют применение методов винтового исчисления для структурного анализа других сферических роботов.

Ограниченное количество работ, посвященных структурному анализу и в особенности структурному синтезу роботов параллельной структуры с круговой направляющей, позволяет сделать выводы о том, что данные вопросы изучены не до конца и их развитие является перспективным направлением дальнейших исследований.

**Исследование особых положений роботов с круговой направляющей.** Особые положения представляют собой такие конфигурации робота, в которых он может терять или приобретать степени свободы или даже изменять тип своего движения [36]. Определение особых положений является важной задачей, и известны различные подходы к ее решению, как геометрические, так и численные [37]. Большинство известных подходов к определению особых конфигураций систем параллельной структуры можно адаптировать и к анализу роботов с круговой направляющей. Далее остановимся именно на таких исследованиях.

И.А. Бонев с соавторами в работе [38] провели анализ особых положений плоского трехподвижного робота геометрическим методом и установили, что у робота такой конструкции отсутствуют особые положения. Другой плоский робот с круговой направляющей был исследован Н. Ракотомангой и И.А. Боневым в работе [39], в которой авторы применили геометрический подход для определения областей особых конфигураций и рассмотрели возможности использования одного типа особых положений для прохождения через другие. Геометрический подход был также использован И.А. Боневым и К. Госсленом [3] при анализе особых положений пространственного шестиподвижного 6-RUS робота. Кроме того, в данной работе авторы получили аналитическое выражение для поверхности особых положений в случае неизменной ориентации выходного звена. Впоследствии такой подход был применен для вариации робота с двумя круговыми направляющими [4], однако часть особых положений определялась численными методами. Аналитические выражения, определяющие границы областей особых положений, также были получены Ш. Баем и М.Р. Хансеном [40] для сферического робота с круговой направляющей на основе решения обратной задачи о положениях. Исследование было продолжено Г. Ву и др. в работах [23, 41], в которых определение особых положений проводилось путем анализа вырожденности матриц Якоби робота численными методами. Особые положения сферического робота с круговой направляющей также были исследованы численными методами в работе [42]: авторы рассчитывали значения определителя матрицы Якоби робота и определяли области особых положений. Х. Азулай с соавторами [14] использовали аналогичный подход для анализа особых положений шестиподвижного 3-RPRS робота. В данной работе авторы устанавливали тип особых положений в зависимости от полученного значения определителя матрицы Якоби. Схожий подход был применен в работах [9, 11, 43]

для нахождения особых конфигураций роботов “Eclipse” и “Eclipse II”: анализ проводился на основе расчета числа обусловленности матриц Якоби по всем точкам рабочей зоны роботов. В работах [44–46] авторы рассмотрели вопросы использования дополнительных (избыточных) приводов для исключения особых положений. Число обусловленности матрицы Якоби использовалось для анализа особых конфигураций и других роботов с круговой направляющей: плоского 3-*RPR* [17] и пространственного 3-*RRRS* [33]. В работе [33] авторы дали геометрическую трактовку некоторых особых положений. Также известно применение геометрического подхода для анализа особых положений тросового робота параллельной структуры с круговой направляющей [47].

Таким образом, можно видеть, что как численные, так и геометрические подходы находят широкое применение при анализе особых положений роботов параллельной структуры с круговой направляющей. Хотя численные методы позволяют определять области особых положений строгим, формальным образом, геометрические подходы часто дают возможность быстро выявить отдельно взятые особые положения и установить поведение робота в данных конфигурациях.

**Методы построения рабочих зон роботов с круговой направляющей.** Системам параллельной структуры присущи различные типы рабочих зон (РЗ) [36], классифицируемых: по положениям, по углам, максимальная, эффективная и др. Для определения РЗ используются различные методы, которые можно систематизировать в три группы [37]: геометрические, численные дискретные и численные без использования дискретизации.

Такие подходы были успешно применены для анализа типов РЗ различных роботов параллельной структуры с круговой направляющей. Так, используя геометрический подход, И.А. Боневым и др. [38] были построены РЗ по положениям, а также эффективная РЗ для плоского трехподвижного робота с круговой направляющей. Д. Глозман и М. Шохам в работе [12] построили РЗ по положениям для пространственных шестиподвижных 3-*RRRS* и 3-*RRSR* роботов при помощи дискретного метода. В этой работе авторы также провели сравнение полученных результатов с РЗ двух других роботов с круговой направляющей: робота Р. Ализаде [8] и “Eclipse” [48]. В работе [48] был использован аналогичный подход к построению максимальной РЗ и РЗ по углам, а в [8] анализ РЗ был проведен с помощью геометрических методов. К.-Ж. Лю с соавторами [49] построили РЗ по положениям на основе геометрического подхода и соотношений обратной кинематики. Схожий подход был использован в [23] при определении максимальной РЗ трехподвижного сферического робота с круговой направляющей. Для построения РЗ другого сферического робота в работе [22] был применен дискретный подход. Метод дискретизации также использовался Й. Шигой и др. в работе [15] при анализе РЗ по положениям и по углам для 3-*RSPR* робота.

В перечисленных работах при оценке РЗ учитывались в основном только ограничения в шарнирах. Другие исследования также рассматривали дополнительные факторы, влияющие на форму и размеры РЗ. Например, Ф. Жанаби-Шарифи и Б. Щёкин в работах [34, 35] при анализе РЗ по положениям и по углам дискретным методом учитывали возможность пересечения звеньев друг с другом. Пересечение звеньев было также учтено при анализе РЗ роботов с круговой направляющей “Eclipse” [9, 43] и “Eclipse II” [11, 46]. И.А. Боневым и К. Госсленом [3] была построена РЗ по положениям с учетом областей особых положений. Предложенный подход впоследствии был использован для определения РЗ робота с двумя круговыми направляющими [4]. Г.В. Рашоян и др. в работе [50] использовали дискретный метод для построения РЗ по положениям 6-*RSS* робота с круговой направляющей. Авторами была учтена возможность пересечения звеньев, вырожденность матрицы Якоби робота, а также расположение проекции центра масс системы. А. Вольф и Д. Глозман [33] определили РЗ без особых положений для робота, представленного ранее в работе [12]. М. Ансоном и

соавторами в работе [47] была найдена РЗ для плоского тросового робота параллельной структуры с учетом сил натяжения тросов. Аналогичное исследование для шести-подвижного тросового робота представлено в работе [5]. Также известны работы, посвященные построению РЗ по углам без особых положений для сферических роботов с круговой направляющей [40, 41].

Проведенный анализ показывает, что для построения РЗ роботов параллельной структуры с круговой направляющей используются преимущественно геометрические и дискретные методы. Последние позволяют при анализе РЗ также учитывать дополнительные ограничения, влияющие на форму и размеры РЗ, которые было бы сложно учесть, применяя геометрические подходы.

**Параметрический синтез роботов с круговой направляющей.** Параметрический синтез робота заключается в определении его параметров (прежде всего геометрических), способствующих выполнению требуемых задач наиболее эффективным образом. В качестве критериев оценки эффективности робота могут выступать параметры рабочей зоны (габариты, форма, объем), жесткость, точность, близость к особым положениям и другие (представляемые в числовом виде) характеристики [37], на основе расчета которых можно сформулировать задачу параметрического синтеза, в том числе задачу оптимизации.

Вопросам параметрического синтеза роботов параллельной структуры с круговой направляющей посвящено немного работ. Т. Сео с соавторами [17] исследовали плоский трехподвижный робот и получили график зависимости габаритов РЗ, свободной от особых положений, от соотношения размеров основания и выходного звена. Схожая задача определения рабочей зоны робота с минимальным числом особых положений была решена Х. Хошнуди и др. [42] для сферического робота с круговой направляющей. Для оптимизации геометрических параметров робота авторы использовали генетический алгоритм. Аналогичный алгоритм был также использован в двухкритериальной оптимизации параметров другого сферического робота [51]. К.-Ж. Лю и др. в работе [49] рассмотрели 6-*RUS* робот и построили графики зависимостей объема РЗ и различных глобальных чисел обусловленности, характеризующих точность и нагрузочные способности робота, от его геометрических параметров. На основе полученных графиков авторы выбрали соотношения между длинами звеньев робота, наилучшим образом удовлетворяющие нескольким критериям. Ф. Жанаби-Шарифи и Б. Щёкин [34] провели параметрический синтез шестиподвижного робота и определили геометрические параметры, соответствующие наибольшему объему РЗ по положениям. Позднее в [35] авторы продолжили свое исследование и провели оптимизацию параметров для получения максимальных углов наклона выходного звена робота. Зависимость углов от размеров звеньев была также изучена Х. Азулаем и др. в [14] на примере 3-*RPRS* робота. В данной работе дополнительно был проведен анализ статической и динамической жесткости робота с использованием соответствующих матриц жесткости. Авторы провели расчеты для различных геометрических параметров робота и представили сравнительный анализ полученных результатов с архитектурами роботов “Eclipse” [9], Р. Ализаде [8] и Д. Глозмана [12]. Анализ жесткости робота “Eclipse”, в том числе его вариаций с избыточными приводами, и его параметрический синтез по соответствующему критерию также можно найти отдельно в работах [9, 10, 43].

Помимо приведенных работ, известны исследования, в которых задача параметрического синтеза в явном виде не решалась, но было получено распределение параметров, характеризующих точность, жесткость и другие свойства роботов, по их рабочим зонам. Например, И.А. Бонев и др. [38] получили распределение коэффициента маневренности по РЗ плоского трехподвижного робота с круговой направляющей. Аналогичное исследование проведено в работах [23, 40, 41] для сферических систем. В работе М. Люсеса и др. [52] подробно рассмотрены анализ динамической жесткости и

определение оптимальных конфигураций 3-*PPRS* робота, а в работе М. Ансона и др. [47] исследованы схожие вопросы для тросового робота с круговой направляющей.

Как видно из проведенного обзора, среди всего многообразия различных схем роботов параллельной структуры с круговой направляющей, на текущий момент вопросы параметрического синтеза рассмотрены лишь для ограниченного количества структур. Таким образом, проведение подобных исследований для остальных схем можно считать весьма перспективным.

**Выводы.** В настоящей статье был проведен обзор известных схем роботов параллельной структуры с круговой направляющей, а также методов их структурного анализа и синтеза, приемов построения рабочих зон и алгоритмов параметрического синтеза. Перечисленные вопросы были рассмотрены для роботов с различным числом степеней свободы и кинематических цепей.

Рассмотренные в настоящей статье проблемы анализа и синтеза являются одними из важнейших при проектировании робототехнических систем. Тем не менее, нельзя не отметить и другие проблемы. Прежде всего, это кинематический анализ роботов, включающий решение задач о положениях и скоростях. Такие задачи составляют основу для последующего исследования рабочих зон, определения особых положений и параметрического синтеза, и их решение приведено в большинстве работ. В направлении кинематического анализа отметим следующие работы. В исследовании [53] отдельно приведено решение прямой задачи о положениях для шестиподвижного 3-*RPRS* робота, а в [24] – решение обратной задачи для сферического 3-*RRRRR* робота. Исследования [54, 55] посвящены анализу скоростей 6-*RSS* и 3-*RRS* роботов.

Известны также исследования в области динамического анализа роботов с круговой направляющей, в ходе которого определяются возникающие в шарнирах усилия и моменты в приводах, необходимые для реализации заданного движения выходного звена. Полученные данные имеют важное значение при проектировании элементов конструкций роботов, а также при энергетическом расчете и последующем подборе двигателей. Примеры анализа динамики различных роботов параллельной структуры с круговой направляющей можно найти в работах [26, 51, 56]. В [56] также рассмотрен вопрос динамического управления роботом.

В заключение настоящего обзора отметим перспективные направления исследований роботов параллельной структуры с круговой направляющей. Прежде всего, это формирование систематического подхода к структурному синтезу таких систем. Также весьма важным является изучение вопросов параметрического синтеза, которые на данный момент рассмотрены для ограниченного количества роботов. Наконец, исследование динамики роботов с круговой направляющей и развитие методов их динамического управления является одной из центральных проблем, обеспечивающих разработку реальных систем.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-18-50398.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беликов В.Т., Власов Н.А., Заблонский К.И., Корытин А.М., Щёкин Б.М. Манипулятор. Патент SU 1049244, 1983.
2. Yau C.L. Systems and methods employing a rotary track for machining and manufacturing. Patent US 6,196,081, 1999.

3. *Bonev I.A., Gosselin C.M.* Geometric algorithms for the computation of the constant-orientation workspace and singularity surfaces of a special 6-RUS parallel manipulator // Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. V. 5: 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference. 2002. P. 505.
4. *Coulombe J., Bonev I.A.* A new rotary hexapod for micropositioning // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2013. P. 877.
5. *Chen T., Qian S., Li Y., Yi Z.* Mechanism design and analysis for an automatical reconfiguration cable-driven parallel robot // Proceedings of the 2nd International Conference on Cybernetics, Robotics and Control. 2017. P. 45.
6. *Бюшгенс А.Г., Глазунов В.А., Григорьев Е.Н., Зайчик Л.Е., Попов Д.А., Скворцов С.А.* Пространственный механизм с шестью степенями свободы. Патент РФ 133044, 2013.
7. *Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Ращоян Г.В., Скворцов С.А., Шевченко Е.Ф.* Пространственный механизм с шестью степенями свободы. Патент РФ 160612, 2015.
8. *Alizade R.I., Tagiyev N.R., Duffy J.* A forward and reverse displacement analysis of a 6-DOF in-parallel manipulator // Mechanism and Machine Theory. 1994. V. 29 (1). P. 115.
9. *Ryu S.-J., Kim J.W., Hwang J.C., Park C., Cho H.S., Lee K., Lee Y., Cornel U., Park F.C., Kim J.* Eclipse: an overactuated parallel mechanism for rapid machining. In: Boër C.R., Molinari-Tosatti L., Smith K.S. (eds) Parallel Kinematic Machines. 1999. P. 441.
10. *Shin H., Kim S., Jeong J., Kim J.* Stiffness enhancement of a redundantly actuated parallel machine tool by dual support rims // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2012. V. 13 (9). P. 1539.
11. *Kim J., Hwang J.C., Kim J.S., Iurascu C.C., Park F.C., Cho Y.M.* Eclipse II: a new parallel mechanism enabling continuous 360-degree spinning plus three-axis translational motions // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. V. 18 (3). P. 367.
12. *Glozman D., Shoham M.* Novel 6-DOF parallel manipulator with large workspace // Robotica. 2009. V. 27 (6). P. 891.
13. [Электронный ресурс]: <https://cimlab.mie.utoronto.ca/parallel-kinematics-mechanism/deisng-of-new-mmt/>
14. *Azulay H., Mahmoodi M., Zhao R., Mills J.K., Benhabib B.* Comparative analysis of a new 3×PPRS parallel kinematic mechanism // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. V. 30 (4). P. 369.
15. *Shiga Y., Tanaka Y., Goto H., Takeda H.* Design of a six degree-of-freedom tripod parallel mechanism for flight simulators // International Journal of Automation Technology. 2011. V. 5 (5). P. 715.
16. *Фомин А.С., Киселев С.В.* Складной механизм с шестью степенями свободы. Патент РФ 2720270, 2020.
17. *Seo T., In W., Kim J.* A new planar 3-DOF parallel mechanism with continuous 360-degree rotational capability // Journal of Mechanical Science and Technology. 2009. V. 23. P. 3088.
18. *Scheidegger A., Liechti R.* Positioning device. US Patent 6,622,586, 2003.
19. *Jeong H., Yu J., Lee D.* Calibration of in-plane center alignment errors in the installation of a circular slide with machine-vision sensor and a reflective marker // Sensors. 2020. V. 20. P. 5916.
20. *Li Q., Chen Q., Wu C., Hu X.* Two novel spherical 3-DOF parallel manipulators with circular prismatic pairs // Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2006. P. 325.
21. *Veliev E.I., Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Parallel and sequential structures of manipulators in robotic surgery // Doklady Physics. 2019. V. 46 (3). P. 106.
22. *Fang H.R., Chen Z.H., Fang Y.F.* A novel spherical parallel manipulator with circular guide // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 325–326. P. 1014.
23. *Wu G., Dong H., Wang D., Bai S.* A 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages // Proceedings of the International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots. 2018.
24. *Laryushkin P.A., Zakharov M.N., Erastova K.G., Glazunov V.A.* Spherical manipulator with parallel structure // Russian Engineering Research. 2017. V. 37 (7). P. 585.
25. *Zhao J., Feng Z., Chu F., Ma N.* Chapter 14 – Kinematic synthesis of spatial mechanisms // Advanced Theory of Constraint and Motion Analysis for Robot Mechanisms. 2014. P. 429.

26. Xu C.C., Xue C., Duan X.C. A novel 2R parallel mechanism for alt-azimuth pedestal // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 428. P. 012053.
27. Hudgens J.C., Tesar D. Analysis of a fully-parallel six degree-of-freedom micromanipulator // Proceedings of IEEE Fifth International Conference on Advanced Robotics "Robots in Unstructured Environments". 1991. P. 814.
28. Fomin A., Antonov A., Glazunov V., Rodionov Y. Inverse and forward kinematic analysis of a 6-DOF parallel manipulator utilizing a circular guide // Robotics. 2021. V. 10 (1). P. 31.
29. Song Y., Qi Y., Dong G., Sun T. Type synthesis of 2-DoF rotational parallel mechanisms actuating the inter-satellite link antenna // Chinese Journal of Aeronautics. 2016. V. 29 (6). P. 1795.
30. Fomin A., Glazunov V., Terekhova A. Development of a novel rotary hexapod with single drive. In: Arakelian V., Wenger P. (eds) ROMANSY 22 – Robot Design, Dynamics and Control. 2019. P. 141.
31. Fomin A., Glazunov V. A novel rotary positioner with single drive: structural analysis and kinematic design. In: Lenarčič J., Parenti-Castelli V. (eds) Advances in Robot Kinematics. 2019. P. 364.
32. Ye W., Li Q. Type synthesis of lower mobility parallel mechanisms: a review // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2019. V. 32. P. 38.
33. Wolf A., Glazman D. Singularity analysis of large workspace 3RRRS parallel mechanism using line geometry and linear complex approximation // Journal of Mechanisms and Robotics. 2011. V. 3 (1). P. 011004.
34. Janabi-Sharifi F., Shchokin B. A rotary parallel manipulator: modeling and workspace analysis // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2004. V. 4. P. 3671.
35. Shchokin B., Janabi-Sharifi F. Design and kinematic analysis of a rotary positioner // Robotica. 2007. V. 25 (1). P. 75.
36. Merlet J.-P. Parallel Robots. Dordrecht: Springer, 2nd ed., 2006.
37. Rosyid A., El-Khasawneh B., Alazzam A. Review article: performance measures of parallel kinematic manipulators // Mechanical Sciences. 2020. V. 11. P. 49.
38. Bonev I.A., Yu A., Zsombor-Murray P. XY-Theta positioning table with parallel kinematics and unlimited theta rotation // Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics. 2006. V. 4. P. 3113.
39. Rakotomanga N., Bonev I.A. A 3-RPR parallel mechanism with singularities that are self-motions // Journal of Mechanisms and Robotics. 2010. V. 2 (3). P. 034502.
40. Bai S., Hansen M.R. Evaluation of workspace of a spherical robotic wrist // Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 2007.
41. Wu G., Bai S. Design and kinematic analysis of a 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2019. V. 56. P. 55.
42. Khoshnoodi H., Hanzaki A.R., Talebi H.A. Kinematics, singularity study and optimization of an innovative spherical parallel manipulator with large workspace // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2018. V. 92. P. 309.
43. Kim J., Park F.C., Ryu S.J., Kim J., Hwang J.C., Park C., Iurascu C.C. Design and analysis of a redundantly actuated parallel mechanism for rapid machining // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2001. V. 17 (4). P. 423.
44. Kim J., Cho Y.M., Park F.C., Lee J.M. Design of a parallel mechanism platform for simulating six degrees-of-freedom general motion including continuous 360-degree spin // CIRP Annals. 2003. V. 52 (1). P. 347.
45. Kim S.H., Shin H.P., In W.S., Kim J. Design of a 6 D.O.F. flight simulator based on a full spinning parallel mechanism platform // AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. 2005.
46. Kim S.H., Jeon D., Shin H.P., In W., Kim J. Design and analysis of decoupled parallel mechanism with redundant actuator // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2009. V. 10 (4). P. 93.
47. Anson M., Alamdari A., Krovi V. Orientation workspace and stiffness optimization of cable-driven parallel manipulators with base mobility // Journal of Mechanisms and Robotics. 2017. V. 9 (3). P. 031011.
48. Ceccarelli M., Ottaviano E. A workspace evaluation of an eclipse robot // Robotica. 2002. V. 20 (3). P. 299.

49. *Liu X.-J., Wang J., Gao F., Wang L.-P.* Mechanism design of a simplified 6-DOF 6-RUS parallel manipulator // *Robotica*. 2002. V. 20 (1). P. 81.
50. *Rashoyan G.V., Lastochkin A.B., Glazunov V.A.* Kinematic analysis of a spatial parallel structure mechanism with a circular guide // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. V. 44 (7). P. 626.
51. *Wu G., Caro S., Bai S., Kepler J.* Dynamic modeling and design optimization of a 3-DOF spherical parallel manipulator // *Robotics and Autonomous Systems*. 2014. V. 62 (10). P. 1377.
52. *Luces M., Boyraz P., Mahmoodi M., Keramati F., Mills J.K., Benhabib B.* An emulator-based prediction of dynamic stiffness for redundant parallel kinematic mechanisms // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2016. V. 8 (2). P. 021021.
53. *Nag A., Mohan S., Bandyopadhyay S.* Forward kinematic analysis of the 3-RPRS parallel manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. 2017. V. 116. P. 262.
54. *Aleshin A.K., Glazunov V.A., Shai O., G.V. Rashoyan, S.A. Skvortsov, Lastochkin A.B.* Infinitesimal displacement analysis of a parallel manipulator with circular guide via the differentiation of constraint equations // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016. V. 45 (5). P. 398.
55. *Glazunov V.A., Filippov G.S., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A., Antonov A.V., Terekhova A.N.* Velocity analysis of a spherical parallel robot // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1260. P. 112012.
56. *Mohan S., Corves B.* Inverse dynamics and trajectory tracking control of a new six degrees of freedom spatial 3-RPRS parallel manipulator // *Mechanical Sciences*. 2017. V. 8. P. 235.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.01

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННОГО МЕХАНИЗМА  
С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ****© 2022 г. С. В. Хейло<sup>1,\*</sup>, О. А. Гарин<sup>2</sup>, А. Н. Терехова<sup>1</sup>,  
В. Е. Прохорович<sup>3</sup>, А. В. Духов<sup>4</sup>**<sup>1</sup> *Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),  
Москва, Россия*<sup>2</sup> *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*<sup>3</sup> *Национальный исследовательский университет ИТМО (Институт точной механики и оптики),  
Санкт-Петербург, Россия*<sup>4</sup> *Институт машиноведения им. А.А. Благодрава РАН, Москва, Россия**\*e-mail: sheilo@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.

После доработки 12.08.2021 г.

Принята к публикации 24.08.2021 г.

В статье рассмотрены механизмы параллельной структуры с шестью степенями свободы, с шестью линейными двигателями, установленными на основании таким образом, что оси двигателей параллельны осям неподвижной системы координат. Особенностью таких механизмов является то, что при одинаковом перемещении двух двигателей, оси которых параллельны одной оси, передаточное отношение от двигателей к выходному звену равно единице. Представлен кинематический анализ, а также определены силовые винты, передаваемые со стороны кинематических цепей на выходное звено с учетом моментов этих силовых винтов относительно осей подвижной системы координат. Показано решение прямой задачи динамики для некоторого положения механизма.

*Ключевые слова:* пространственные механизмы, динамический анализ, винтовое исчисление

**DOI:** 10.31857/S0235711921060109

Одним из эффективных средств решения многих технических задач, возникающих в технологических, измерительных, транспортных системах, являются механизмы параллельной структуры [1–6]. При исследовании таких устройств важное значение имеет кинематический и динамический анализ [7–9].

Одним из подходов к определению свойств механизмов параллельной структуры является винтовое исчисление, которое позволяет получить качественные характеристики, не прибегая к сложным математическим выкладкам [10–14].

Механизмы параллельной структуры обладают свойством кинематической и динамической связанности между приводами. Любое простое движение, например, по прямой линии, требует согласованного движения во всех кинематических цепях, при этом усилие в каждом приводе зависит от положения скорости и ускорения во всех других приводах механизма. Указанное свойство затрудняет управление этими устройствами, понижает их динамическую точность. Кроме того, что передаточное отношение между каждым приводом и выходным звеном также переменное и зависит от положения.

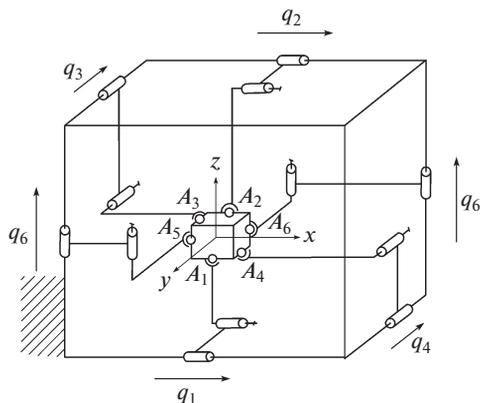


Рис. 1. Механизм 6PRRS.

Для того чтобы устранить указанные недостатки были предложены различные технические решения. В частности, К. Конгом и К. Госленом был предложен механизм, обладающий свойством изоморфности [15]. В таком механизме имеет место постоянное передаточное отношение равное единице между любым приводом и выходным звеном. Этот механизм обладает тремя степенями свободы, и выходное звено может перемещаться по трем координатам только с постоянной ориентацией.

При синтезе механизмов с шестью степенями свободы проблема развязки приобретает особое значение [16, 17]. Ряд оригинальных решений был получен К. Миановски [18]. Он использовал подход, когда вращательные и поступательные двигатели установлены на основании с совмещением их осей. Таким образом, мы получаем две схемы механизмов с тремя степенями свободы в каждом.

Чтобы повысить функциональные возможности такого механизма И. Боневым с соавторами был предложен механизм, в котором имеет место шесть кинематических цепей расположенных попарно противоположно друг другу [19]. При одинаковых скоростях в приводах кинематических цепей имеет место поступательное движение выходного звена. Если скорости не равны, то движение вращательное.

В настоящей статье рассматриваются новые механизмы (рис. 1, 2). Для этих механизмов были установлены кинематические свойства и решена задача о положении [20].

В работе ставится задача определения силовых винтов, действующих на выходное звено со стороны кинематических цепей. Этот анализ необходим для решения кинематических и динамических задач. Кроме того, решается задача определения моментов силовых винтов относительно главных центральных осей инерции выходного звена. Этот анализ необходим в тех случаях, когда имеет место вращательное движение выходного звена.

Центр неподвижной системы координат  $Oxyz$  поместим в точке пересечения диагоналей параллелепипеда, вдоль ребер которого расположены приводы. Центр связанной с выходным звеном подвижной системы координат  $O^m\xi\zeta$  совпадает с точкой пересечения главных центральных осей инерции выходного звена. Примем, что в начальном положении центры подвижной и неподвижной систем координат совпадают. Координаты центров сферических шарниров, расположенных на выходном звене:  $A_1(0, a, -a)$ ;  $A_2(0, -a, a)$ ;  $A_3(-a, 0, a)$ ;  $A_4(a, 0, -a)$ ;  $A_5(-a, a, 0)$ ;  $A_6(a, -a, 0)$ .

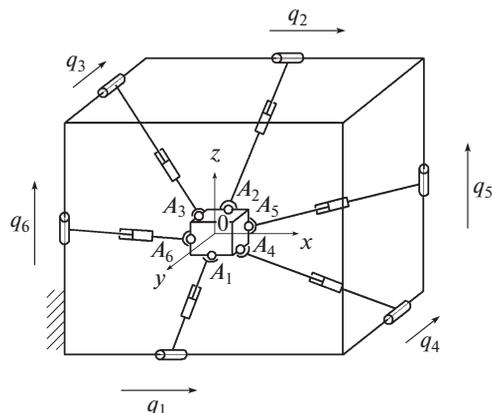


Рис. 2. Механизм 6RPRPS.

Усилия, создаваемые приводами, направлены параллельно осям неподвижной системы координат и передаются кинематическими цепями без изменения модуля и направления на выходное звено.

Каждый из моментов внешних сил, действующих на выходное звено, можно найти как произведение модуля усилия, передаваемого со стороны приводов и относительного момента единичного силового винта и орта оси мобильной системы координат, приведенных к общему центру.

Для нахождения относительных моментов решим задачу о положениях, используя метод Денавита–Хартенберга. Пусть некоторое текущее положение выходного звена задано углами поворота  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  системы координат выходного звена  $O^m\xi\eta\zeta$  относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  системы координат основания соответственно и координатами точки  $O^m(x; y; z)$  в системе  $Oxyz$ .

Координаты точек  $A_1, A_2, \dots, A_6$  – центров сферических пар на выходном звене выражены в подвижной системе координат и имеют вид

$$A_1^m = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3^m = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4^m = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_5^m = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_6^m = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты точек выходного звена в системе координат основания равны

$$A_1^b = M_{bm} \cdot A_1^m, \quad A_2^b = M_{bm} \cdot A_2^m, \quad A_3^b = M_{bm} \cdot A_3^m, \\ A_4^b = M_{bm} \cdot A_4^m, \quad A_5^b = M_{bm} \cdot A_5^m, \quad A_6^b = M_{bm} \cdot A_6^m.$$

Здесь  $M_{bm} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица Денавита–Хартенберга;  $R = R_\gamma \cdot R_\beta \cdot R_\alpha$  матрица поворотов, где

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad R_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицы поворотов, описывающих вращение выходного звена относительно осей  $Ox$ ,

$Oy$ ,  $Oz$  соответственно;  $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – матрица перемещения.

Далее следует определить плюккеровы координаты силовых винтов  $\mathbf{R}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i^0)$ , передаваемых на выходное звено. Векторы силовых винтов первой и второй кинематических цепей действуют вдоль оси  $Ox$ , третьей и четвертой кинематических цепей вдоль оси  $Oy$ , векторы силовых винтов пятой и шестой кинематических цепей действуют вдоль оси  $Oz$ . Таким образом, координаты векторных частей силовых винтов можно представить как

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Плюккеровы координаты моментной части силовых винтов представляют собой векторное произведение радиус-вектора  $\mathbf{r}_{A_i}$  точки  $A_i$  на соответствующий вектор силового винта  $\mathbf{r}_i^0$ , которые выражены в системе координат основания

$$\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_{A_i} \cdot \mathbf{r}_i.$$

Далее найдем плюккеровы координаты  $(\xi, \xi^0)$ ,  $(\eta, \eta^0)$ ,  $(\zeta, \zeta^0)$  ортов осей подвижной системы координат в системе координат основания и относительные моменты единичных силовых винтов и ортов осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Каждая из кинематических цепей передает усилие  $P_i$ , задаваемое в  $i$ -м приводе, в точку крепления выходного звена  $A_i$ . Моменты сил  $P_i$  относительно осей подвижной системы координат найдем как относительные моменты вектора  $\mathbf{r}_i$  единичного силового винта  $\mathbf{R}_i$ , задающего направление  $\mathbf{P}_i$ , и ортов осей подвижной системы координат, приведя их к началу неподвижной системы отсчета

$$\begin{aligned} \text{mom}(\mathbf{R}_i, \xi) &= \mathbf{r}_i \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \xi; & \text{mom}(\mathbf{R}_i, \eta) &= \mathbf{r}_i \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \eta; \\ \text{mom}(\mathbf{R}_i, \zeta) &= \mathbf{r}_i \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \zeta; & (i = 1, 2, \dots, 6), \end{aligned}$$

где  $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \xi)$ ,  $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \eta)$ ,  $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \zeta)$  – относительные моменты единичных силовых винтов  $\mathbf{R}_i$  и ортов осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

Движение рассматриваемых механизмов описываются динамическими уравнениями Ньютона–Эйлера

$$\begin{aligned} J_\xi \cdot \ddot{\phi}_\xi + \dot{\phi}_\eta \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\eta) &= M_\xi^E, & J_\eta \cdot \ddot{\phi}_\eta + \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\xi) &= M_\eta^E, \\ J_\zeta \cdot \ddot{\phi}_\zeta + \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\eta (J_\eta - J_\xi) &= M_\zeta^E, & m\ddot{x} &= R_x^E, & m\ddot{y} &= R_y^E, & m\ddot{z} &= R_z^E, \end{aligned}$$

где  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  – моменты инерции выходного звена относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно;  $\ddot{\phi}_\xi$ ,  $\ddot{\phi}_\eta$ ,  $\ddot{\phi}_\zeta$  – проекции углового ускорения выходного звена на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно;  $\dot{\phi}_\xi$ ,  $\dot{\phi}_\eta$ ,  $\dot{\phi}_\zeta$  – проекции угловой скорости выходного звена на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно;  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$  – проекции линейного ускорения выходного звена на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $m$  – масса выходного звена;  $M_\xi^E$ ,  $M_\eta^E$ ,  $R_\zeta^E$  – проекции главного момента внешних сил на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $R_x^E$ ,  $R_y^E$ ,  $R_z^E$  – проекции главного вектора внешних сил на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

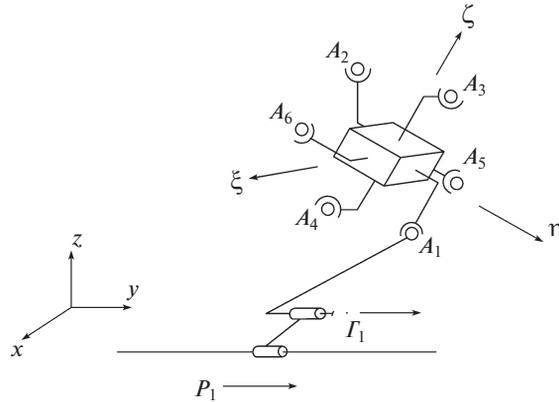


Рис. 3. Схема первой кинематической цепи.

Динамические уравнения Ньютона–Эйлера запишем в виде

$$J_{\xi} \cdot \ddot{\phi}_{\xi} = P_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \xi) + P_2 (\mathbf{r}_2 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \xi) + P_3 (\mathbf{r}_3 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \xi) + \\ + P_4 (\mathbf{r}_4 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \xi) + P_5 (\mathbf{r}_5 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \xi) + P_6 (\mathbf{r}_6 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \xi) - \dot{\phi}_{\eta} \cdot \dot{\phi}_{\zeta} (J_{\zeta} - J_{\eta}),$$

$$J_{\eta} \cdot \ddot{\phi}_{\eta} = P_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \eta) + P_2 (\mathbf{r}_2 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \eta) + P_3 (\mathbf{r}_3 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \eta) + \\ + P_4 (\mathbf{r}_4 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \eta) + P_5 (\mathbf{r}_5 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \eta) + P_6 (\mathbf{r}_6 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \eta) - \dot{\phi}_{\xi} \cdot \dot{\phi}_{\zeta} (J_{\zeta} - J_{\xi}),$$

$$J_{\zeta} \cdot \ddot{\phi}_{\zeta} = P_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \zeta) + P_2 (\mathbf{r}_2 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \zeta) + P_3 (\mathbf{r}_3 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \zeta) + \\ + P_4 (\mathbf{r}_4 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \zeta) + P_5 (\mathbf{r}_5 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \zeta) + P_6 (\mathbf{r}_6 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \zeta) - \dot{\phi}_{\xi} \cdot \dot{\phi}_{\eta} (J_{\eta} - J_{\xi}),$$

$$m\ddot{x} = P_{1x} + P_{2x}, \quad m\ddot{y} = P_{3y} + P_{4y}, \quad m\ddot{z} = P_{5z} + P_{6z}.$$

Относительные моменты являются коэффициентами, зависящими от положения и ориентации выходного звена.

Используя представленный алгоритм, рассмотрим на конкретном примере решение прямой задачи динамики для рассматриваемых механизмов. На рис. 3 представлена схема первой кинематической цепи механизма. Пусть масса выходного звена  $m = 1$  кг; линейные размеры выходного звена вдоль осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  равны 0.1 м, определяющие координаты точек  $A_1, A_2, \dots, A_6$ ; перемещение выходного звена задано значениями:  $\alpha = \pi/6$  рад;  $\beta = \pi/6$  рад;  $\gamma = \pi/6$  рад,  $x = 0.1$  м;  $y = 0.15$  м;  $z = 0.2$  м; усилия в приводах:  $P_1 = P_2 = 1$  Н,  $P_3 = P_4 = 2$  Н,  $P_5 = P_6 = 3$  Н; проекции угловых скоростей:  $\dot{\phi}_{\xi} = 3$  рад/с,  $\dot{\phi}_{\eta} = 2$  рад/с,  $\dot{\phi}_{\zeta} = 1$  рад/с.

Координаты точек крепления приводов на выходном звене в системе координат выходного звена представим как

$$A_1^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3^m = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4^m = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5^m = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_6^m = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты точек выходного звена в абсолютной системе координат имеют вид

$$A_1^b = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 0.259 \\ 0.168 \end{pmatrix}, \quad A_2^b = \begin{pmatrix} 0.184 \\ 0.041 \\ 0.232 \end{pmatrix}, \quad A_3^b = \begin{pmatrix} 0.088 \\ 0.085 \\ 0.325 \end{pmatrix},$$

$$A_4^b = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.215 \\ 0.075 \end{pmatrix}, \quad A_5^b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.194 \\ 0.293 \end{pmatrix}, \quad A_6^b = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.106 \\ 0.107 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы силовых винтов направлены параллельно осям координат, а моментные части найдены как векторные произведения

$$\mathbf{r}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.168 \\ -0.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.232 \\ -0.04 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3^0 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0 \\ 0.068 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_4^0 = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0 \\ 0.113 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_5^0 = \begin{pmatrix} 0.194 \\ -0.003 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_6^0 = \begin{pmatrix} 0.106 \\ -0.19 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Плюккеровы координаты ортов осей системы координат выходного звена  $O^{m\xi}\eta\zeta$  в неподвижной системе координат  $Oxyz$  можно представить как

$$\xi = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.43 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.2 \\ -0.07 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -0.21 \\ -0.87 \\ 0.43 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ -0.087 \\ 0.12 \end{pmatrix},$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.217 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad \zeta^0 = \begin{pmatrix} 0.156 \\ 0.05 \\ -0.11 \end{pmatrix}.$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\xi$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_1, \xi) = 0.041; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_2, \xi) = -0.041; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_3, \xi) = -0.088;$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_4, \xi) = 0.088; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_5, \xi) = 0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_6, \xi) = -0.041.$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\eta$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_1, \eta) = -0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_2, \eta) = 0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_3, \eta) = 0.022;$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_4, \eta) = -0.022; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_5, \eta) = 0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_6, \eta) = -0.075.$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\zeta$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_1, \zeta) = -0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_2, \zeta) = 0.075; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_3, \zeta) = -0.088;$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_4, \zeta) = 0.088; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_5, \zeta) = 0.0069; \quad \text{mom}(\mathbf{R}_6, \zeta) = -0.0069.$$

Модули линейного и углового ускорений и их проекций

$$a = 7.483 \text{ м/с}^2, \quad \ddot{x} = 2 \text{ м/с}^2, \quad \ddot{y} = 4 \text{ м/с}^2, \quad \ddot{z} = 6 \text{ м/с}^2;$$

$$\dot{\phi} = 3.539 \text{ рад/с}^2, \quad \dot{\phi}_\xi = 1.2 \text{ рад/с}^2, \quad \dot{\phi}_\eta = 2.4 \text{ рад/с}^2, \quad \dot{\phi}_\zeta = 2.308 \text{ рад/с}^2.$$

**Выводы.** Таким образом, в настоящей статье представлены различные аспекты анализа механизмов параллельной структуры с линейными двигателями, устанавливаемыми на основании, причем оси линейных двигателей параллельны осям неподвижной системы координат. Это обусловлено тем, что оси силовых винтов, передаваемых со стороны кинематических цепей на выходное звено, параллельны осям линейных двигателей.

Для получения уравнения динамики, связанные с вращательными движениями выходного звена, необходимо дополнительно определить моменты силовых винтов, передаваемых на выходное звено. Для решения такой задачи эффективным подходом оказалось определение относительного момента между соответствующей осью подвижной системы координат, связанной с выходным звеном, и силовым винтом.

Представлено решение прямой задачи динамики, когда в произвольном положении известны абсолютные и обобщенные скорости, а также действующие в приводах силы. Найдены ускорения выходного звена.

Полученные зависимости позволяют исследовать динамические свойства механизмов и решать задачу управления.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 3.
2. Ганиев Р.Ф. О современном состоянии и перспективах развития ИМАШ РАН. Проблемы механики машин и прорывных технологий // М. Проблемы машиностроения и надежности машин 2014. № 3. С. 11.
3. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Kluwer Academic Publishers, 2004. 412 p.
4. Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A. Structural Synthesis of Spatial 1-Coordinate Mechanisms with Additional Links for Technological Robots // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Т. 902. С. 683.
5. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С. Перспективные малоинвазивные роботохирургические комплексы параллельной структуры // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 91.
6. Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A. Structural Synthesis of Spatial 1-Coordinate Mechanisms with Additional Links for Technological Robots // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. V. 902. P. 683.
7. Glazunov V., Kheylo S. Dynamics and control of planar, translational, and spherical parallel manipulators. In: Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots. Springer, 2016. P. 365.

8. *Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A.* Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematic Mechanism. In: *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators*, Springer, 2018. P. 125.
9. *Antonov A., Aleshin A., Glazunov V., Rashoyan G., Skvortsov S., Shalyukhin K., Kovaleva N., Chernetsov R.* Dynamics of a New Parallel Structure Mechanism with Motors Mounted on the Base outside the Working Area // *Proceedings of 14<sup>th</sup> International Conference on Electomechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*, 2019. P. 183.
10. *Rashoyan G.V., Shalyukhin K.A., Gaponenko E.V.* Development of structural schemes of parallel structure manipulators using screw calculus // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. V. 327 (4). 042090.
11. *Veliev E.I., Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Parallel and sequential structures of manipulators in robotic surgery // *Doklady Physics*. 2019. T. 64. № 3. С. 106.
12. *Глазунов В.А., Борисов В.А.* Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и четырьмя кинематическими цепями // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2017. № 5. С. 3.
13. *Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K.* On the Maximization of Joint Velocities and Generalized Reactions in the Workspace and Singularity Analysis of Parallel Mechanisms // *Robotica*. 2019. V. 37. № 4. P. 675.
14. *Глазунов В.А.* Структура пространственных механизмов. Группа винтов и структурные группы // *Справочник. Инженерный журнал. Приложение № 3*. 2010. № 4.
15. *Kong X., Gosselin C.M.* Type synthesis of linear translational parallel manipulators // *Advances in Robot Kinematics – Theory and Applications*, Boston: Kluwer Academic Publishers. 2002. P. 411.
16. *Глазунов В.А., Данилин П.О., Левин С.В., Тывес Л.И., Шалюхин К.А.* Разработка механизмов параллельной структуры с кинематической и динамической развязкой // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2010. № 4. С. 23.
17. *Рашоян Г.В., Шалюхин К.А., Аleshин А.К.* Анализ кинематики механизма параллельной структуры со свойствами кинематической развязки // *Вестник научно-технического развития*. 2018. № 1 (125). С. 32.
18. *Mianovski K.* Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom // *12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18–21, 2007*. P. 126.
19. *Seward N., Bonev I.A.* A new 6-DOF parallel robot with simple kinematic model, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Hong-Kong, China, 2, May 31–June 7, 2014. P. 4061.
20. *Kheylo S.V., Tsarkov A.V., Garin O.A.* Kinematic analysis of novel 6-dof robot // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. V. 1126. P. 442.

---

---

## НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

---

---

УДК 621.01:531.8

### АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРАМИ ПРОЧНОСТИ, РЕСУРСА И РИСКАМИ БЕЗОПАСНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЭНЕРГОУСТАНОВОК С РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ

© 2022 г. Н. А. Махутов<sup>1,\*</sup>, М. М. Гаденин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: safety@imash.ru

Поступила в редакцию 27.07.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Научный анализ условий перехода объектов энергетики (тепловой, гидравлической, атомной) от штатных к аварийным и катастрофическим ситуациям показывает, что важное значение для обеспечения и повышения условий безопасной эксплуатации энергоустановок в рамках действующих концепций, стратегий, норм и регламентов имеет уровень научно-практического обоснования прогнозируемых и приемлемых рисков, характеризующих штатные и предельные состояния таких объектов. Стратегия решения названных для объектов энергетики проблем в рассматриваемом направлении определяет и закрепляет переход на анализ и управление рисками, как на основополагающую систему обеспечения безопасных условий эксплуатации в дополнение к существующим и развиваемым подходам, базирующимся в основном на параметрах прочности и ресурса.

*Ключевые слова:* прочность, ресурс, риск, безопасность, предельные состояния, аварии, катастрофы, вероятность, ущерб

DOI: 10.31857/S0235711922010060

**Постановка проблем.** Наряду с ключевой проблемой достижения энергоэффективности вопросы научных исследований и прикладных разработок в области прочности и ресурса энергоустановок занимали видное место в длительном, многовековом развитии энергетики. С этой целью шло непрерывное совершенствование состава энергоносителей (твердых, жидких, газообразных, ядерных), конструкций энергоустановок, используемых конструкционных материалов и технологий производственных процессов добычи, хранения, транспортировки, преобразования и использования энергоресурсов и энергоустановок. На такой научно-технической базе в течение многих десятилетий повышался коэффициент полезного действия энергоустановок, увеличивались их единичные установленные мощности, снижалась стоимость производства тепловой и электрической энергии. В свою очередь, указанные тенденции развития энергетики предъявляли все новые требования к объектам энергетического машиностроения – их энерговооруженности, работоспособности, прочности и сроков службы.

В настоящее время в нашей стране (как и в других промышленно и энергетически развитых странах) сформировался определенный состав энергетического потенциала: 1) традиционные тепловые электростанции и теплоэнергоцентрали (ТЭС, ТЭЦ) с установленной мощностью 165 ГВт (66%, 24%); на угле, нефти, мазуте (3%); газе (73%), торфе (0.1%); 2) гидроэлектростанции (ГЭС) с установленной мощностью

30 ГВт (11.5%); 3) возобновляемая энергетика (ВЭЭ) (ветровая, геотермальная, солнечная) с выработкой электроэнергии в 0.2%.

Максимальные единичные мощности энергоустановок России составляют для ТЭЦ и АЭС – 1.2 млн кВт, ГЭС – 6.4 млн кВт.

Магистральные трубопроводы (МТ) для транспортировки газообразных и жидких теплоносителей имели все возрастающие давления (от 0.7 до 1.0 МПа) и диаметры (от 400 до 1400 мм) с их общей протяженностью более 200 тысяч км; объем резервуаров для хранения (РХ) энергоносителей увеличивался от  $10^4$  до  $2 \times 10^5$  м<sup>3</sup>.

Сроки службы функционирующих энергоустановок достигли 30–50 лет и более, а проектные сроки перспективных ГЭС и АЭС увеличиваются до 60–80 лет и более. При их проектировании в традиционных нормативных расчетах запасы прочности по пределам текучести  $n_y$  составляли 1.5–2.2, а по пределам прочности  $n_u$  – 2.5–3.5 с их постоянным снижением на 2–3% в год. Пределы текучести  $\sigma_y$  и прочности  $\sigma_u$  конструкционных, преимущественно металлических материалов, по мере совершенствования технологий повышаются соответственно на 4.5–5.0 МПа и 3.0–3.5 МПа в год.

Вместе с тем, совершенствование методов расчета, создания материалов, технологий производства и эксплуатации не позволили исключить не только эксплуатационные повреждения и отказы, но и аварии и катастрофы на энергоустановках всех типов, как в нашей стране, так и за рубежом.

Возникавшие тяжелые аварийные и катастрофические ситуации на АЭС (Чернобыльская – в СССР, ТМА – в США, Фукусима – в Японии), ГЭС (Саяно-Шушенская – в России, Бангиао – в Китае, Шрисайлам – в Индии, Итайлу – в Бразилии, Таум Сок – в США), на ТЭЦ (Костромская – в СССР, Норильская – в России, Аризонская – в США, Тевельская – во Франции) сопровождались гибелью людей, разрушением самих станций и прилегающих гражданских и промышленных объектов, загрязнением окружающей среды.

Экономические ущербы от таких аварий и катастроф измерялись сотнями миллионов и десятками миллиардов долларов, обессточиванием жилищ десятков миллионов человек.

С учетом сказанного, в Стратегии национальной безопасности Российской Федерации [1], в Энергетической стратегии России [2], в Основах государственной политики Российской Федерации в области обеспечения и повышения ядерной и радиационной [3], промышленной [4] безопасности, а также защиты от чрезвычайных ситуаций [5] на ближайшие годы и дальнейшую перспективу предусмотрены фундаментальные и прикладные исследования, конструкторско-технологические и контрольно-надзорные мероприятия по снижению во времени  $\tau$  энергетических и социально-экономических рисков  $R(\tau)$  до приемлемого (допускаемого) уровня [ $R(\tau)$ ]. Научно-методической основой реализации этих мероприятий в экономике страны становится риск-ориентированный подход [1]. Целый ряд базовых положений по нему отражен в многотомном издании, выпускаемом по рекомендации Совета Безопасности, РАН, МЧС России, Российских Фонда и Общества “Знание” [6].

Фундаментальные исследования возникновения и развития тяжелых аварий и катастроф на сложных объектах инженерной инфраструктуры и объектах обеспечения жизнедеятельности осуществляют Российская академия наук, Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления (ОЭММПУ РАН) и его институты (ИМАШ, ИВТАН, ИПМех, ИПМАШ). Так как эти катастрофы имеют существенную многофакторность и исследуются в междисциплинарной постановке для человека, природы и техносферы, то условия их инициирования и развития на всех стадиях жизненного цикла являются предметом научных разработок по всем фундаментальным направлениям (механика, физика, химия, математика, экономика, социология, биология, география). Это обстоятельство структурно отражено на рис. 1.



Рис. 1. Научные основы обеспечения безопасности объектов энергетики на основе теории катастроф.

Институт машиноведения в составе АН СССР и РАН около семидесяти лет проводил и проводит систематические исследования и разработки по решению прямых задач прочности, ресурса, надежности, живучести, безопасности и рисков [7] энергоустановок ТЭС, ТЭЦ, ГЭС, АЭС совместно с ведущими институтами Минэнерго, Минэнергомашина, Минпрома, Минатома, Росатома, Росэнергоатома (ЦКТИ, ВТИ, ЦНИИТМАШ, Гидропроект, ВНИИГАЗ, НИИ “Транснефть”, НИКИЭТ, ОКБ ГП, ВНИИАЭС, ОКБМ, ИАЭ-НИЦ КИ).

В последние годы наукой и государством во главу поставлены новые задачи, когда требования к безопасности и рискам формируют требования к живучести, надежности, ресурсу и прочности [1–9].

**Прямые и обратные задачи исследований и разработок.** В рамках фундаментальной математической теории катастроф возникновение чрезвычайных ситуаций происходит в точке бифуркации состояния системы, характеризующей мгновенный ее переход из неопасного (докритического) в закритическое (катастрофическое) при бесконечно малом изменении параметров такой функционирующей системы. Реальные катастрофы сложных технических систем, включая энергетические установки, развиваются во времени  $\tau$ , начиная от долей секунд и заканчивая минутами и часами. При этом стадии формирования накапливаемых повреждений, отказов и аварийных ситуаций могут протекать во временах, превышающих указанные выше времена катастроф на несколько порядков.

В соответствии с общей теорией безопасности и риск-ориентированными подходами [6–9] под рисками  $R(\tau)$  на заданной стадии  $\tau$  (числе лет) жизненного цикла энергетического объекта понимается их функциональная связь между вероятностью (ча-

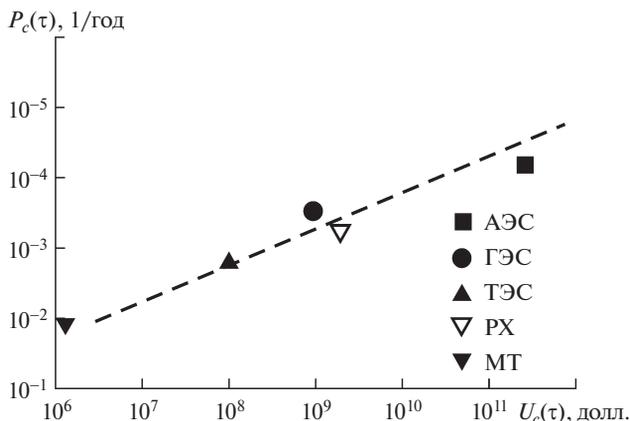


Рис. 2. Характеристики максимальных (критических) ущербов  $U_c(\tau)$  и частот  $P_c(\tau)$  возникновения тяжелых аварий и катастроф на объектах энергетики.

стойкой)  $P(\tau)$  возникновения данного опасного состояния и ущербами (потерями)  $U(\tau)$ , сопутствующими проявлению этого состояния

$$R(\tau) = F_R\{P(\tau), U(\tau)\}. \quad (1)$$

Между параметрами рисков  $P(\tau)$  и  $U(\tau)$  существует связь, близкая к степенной

$$U(\tau) = K_P P(\tau)^{m_P}, \quad (2)$$

где  $K_P$  – параметр, зависящий от вида энергоносителя и типа энергоустановки;  $m_P$  – характеристика опасности энергетического объекта.

Для наиболее тяжелых аварий и катастроф на АЭС, ГЭС, ТЭС, РХ, МТ в нашей стране и за рубежом, имевших место в последние четыре десятилетия, предельные величины ущербов  $U_c(\tau)$  от них и частоты (вероятности)  $P_c(\tau)$  возникновения по данным [6, 7] представлены на рис. 2.

Для тяжелых аварий и катастроф величина  $m_P$  в выражении (2) составляет 0.4–0.45. Для определенного типа объектов (например, АЭС) при варьировании видов аварийных ситуаций (отказы важных систем, разрушения, аварии) этот показатель может изменяться в более широких пределах 0.35–0.5.

Обобщенная диаграмма для анализа рисков по выражению (1) на основе [7] представлена на рис. 3.

Для различных по тяжести опасных  $i$ -ситуаций на диаграмме (рис. 3) показаны границы критических рисков  $R_c(\tau)$  с учетом данных рис. 2 с параметрами  $P_c(\tau)$ ,  $U_c(\tau)$ , приемлемых рисков  $[R(\tau)]$  с параметрами  $[P(\tau)]$ ,  $[U(\tau)]$ , пренебрежимых рисков  $R_n(\tau)$  с параметрами  $P_n(\tau)$ ,  $U_n(\tau)$ . Эти границы определяют три основные области функционирования объектов – неприемлемых, приемлемых и пренебрежимых рисков.

Область приемлемых (допускаемых) рисков устанавливается на основе введения в рассмотрение запасов  $n_R$  по критическим рискам и их параметрам (рис. 1, 2)

$$[R(\tau)] = \frac{R_c(\tau)}{n_R}. \quad (3)$$

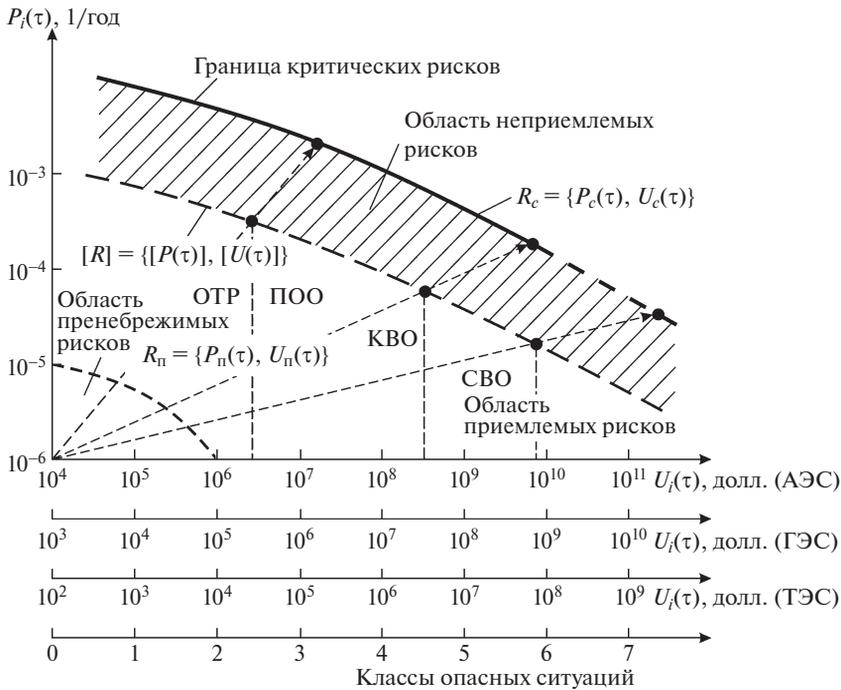


Рис. 3. Обобщенная диаграмма для анализа областей приемлемых и неприемлемых рисков по классам опасностей и типам объектов энергетики.

Величины  $n_R$  по опыту анализа безопасности [6, 7] назначаются в пределах  $3 \leq n_R \leq 5$ . Для пренебрежимых рисков величины запасов  $n_R$  должны быть увеличены не менее чем на порядок.

По приведенной диаграмме (рис. 3) для объектов техносферы устанавливаются: 1) классы опасных ситуаций от 1 до 7 (1 – локальные, 2 – объектовые, 3 – местные, 4 – региональные, 5 – национальные, 6 – глобальные, 7 – планетарные); 2) категории опасности объектов (объекты технического регулирования ОТР с числом более  $10^6$  – элементы, детали, узлы энергоустановок; потенциально опасные объекты ПОО с числом более  $10^5$  – крупные компоненты энергоустановок и установки малой мощности; критически важные объекты КВО с числом более  $10^3$  – крупные ТЭС, ТЭЦ, МТ, РХ; стратегически важные объекты СВО с числом более  $10^2$  – уникальные ГЭС и АЭС).

При прямом решении задач безопасности и рисков  $R(\tau)$  и  $[R(\tau)]$  для сложных технических объектов с учетом стадий развития опасных ситуаций на основе механики, физики, химии и математики катастроф (рис. 1) в первую очередь анализируются динамика опасных процессов, инициирующие факторы и собственно процессы развития этих ситуаций [6, 7, 10–12]. В большинстве случаев авариям и катастрофам предшествуют нарушения условий прочности, когда в несущих элементах напряжения  $\sigma$  и деформации  $e$  достигают предельных величин, определяющих сопротивление разрушению [7]

$$\sigma_{\sigma} = f\{Q^s, \tau^s, N^s, t^s, d^s\} \leq \left\{ \left( \frac{\sigma_u}{n_u}, \frac{\sigma_y}{n_y}, \frac{e_c}{n_e}, \frac{\tau_c}{n_{\tau}}, \frac{N_c}{n_N}, \frac{l_c}{n_l} \right) f(m) \right\}, \quad (4)$$

где  $Q^s$  – внешние и внутренние эксплуатационные воздействия;  $\tau^s$  – время достижения предельного состояния в эксплуатации;  $t^s$  – экстремальная температура;  $d^s$  – накопленное повреждение;  $\sigma_u$  и  $\sigma_y$  – пределы прочности и текучести материала;  $e_c$  – критическая деформация;  $\tau_c$  – время возникновения разрушения;  $N_c$  – число циклов до разрушения;  $l_c$  – критический размер трещин;  $n$  – соответствующие запасы ( $1.2 \leq n \leq 10$ );  $m$  – показатель степени для уравнений кривых деформирования в упругопластической области, кривых длительной и циклической прочности и трещиностойкости ( $0.05 \leq m \leq 0.25$ ).

Допускаемые напряжения  $[\sigma]$  и деформации  $[e]$  при этом составляют  $[\sigma] = \sigma_c/n_\sigma$ ,  $[e] = e_c/n_e$ . Для конструкционных материалов характеристики прочности ( $\sigma_u$ ,  $\sigma_y$ ), пластичности ( $e_c$ ), временного и циклического ресурса ( $\tau_c$ ,  $N_c$ ) и трещиностойкости ( $l_c$ ) связаны со временем эксплуатации ( $\tau^s$ ,  $N^s$ ) степенными зависимостями, а с температурой  $t^s$  – экспоненциальными [7–10, 14].

В процессе эксплуатации в несущих элементах (в их критических сечениях и точках) происходит накопление эксплуатационных повреждений  $d^s$ , оцениваемое через отношения соответствующих параметров прочности, пластичности, ресурса и трещиностойкости

$$d^s = \left\{ \frac{\sigma^s}{\sigma_u, \sigma_y}, \frac{e^s}{e_c}, \frac{\tau^s}{\tau_c}, \frac{N^s}{N_c} \right\} = \left\{ \frac{1}{n_u, n_y}, \frac{1}{n_e}, \frac{1}{n_\tau}, \frac{1}{n_N}, \frac{1}{n_l} \right\}. \quad (5)$$

В практике инженерных расчетов и в нормативных документах допускаемый ресурс  $[\tau] = \tau_c/n_\tau$  обычно исчисляется во временных параметрах (секундах, часах, годах). При этом параметр времени эксплуатации объекта  $\tau^s$  линейно связан с числом циклов его нагружения  $N^s$  через частоту приложения эксплуатационной циклической нагрузки. Циклический ресурс в этом случае будет равен  $[N] = N_c/n_N$ . В соответствии с этим накопленные эксплуатационные повреждения составят

$$d^s = d(\tau^s) = 1/n_{\tau^s}. \quad (6)$$

При увеличении  $\tau^s$  от 0 до  $\tau_c$  накопленные повреждения  $d^s$  возрастают от нуля до критического значения  $d_c$ , принимаемого равным единице ( $d_c = 1$ ), т.е.

$$0 \leq d^s(\tau) \leq 1. \quad (7)$$

Все параметры в выражениях (4)–(6) являются случайными величинами, в связи с чем, в общем случае расчеты прочности, ресурса, трещиностойкости становятся вероятностными (рис. 4, пунктирные линии) с функциями плотности вероятности  $f(\tau)$  и вероятности  $P(\tau)$ . На каждом из  $i$ -режимов эксплуатации ( $i = 1, 2, \dots$ ) с приращением времени нагружения на  $\Delta\tau_i$  используется правило линейного суммирования повреждений

$$d^s = \sum_i \frac{\Delta\tau_i}{\tau_c} = 1. \quad (8)$$

Каждой стадии эксплуатации  $\tau^s$  ( $0 \leq \tau^s \leq \tau_c$ ) и каждой величине накапливаемых повреждений  $d^s$  соответствуют свои опасности и риски  $R(\tau^s)$ , зависящие от вероятности  $P(\tau)$  по выражению (1). В технической литературе, когда не учитываются величини

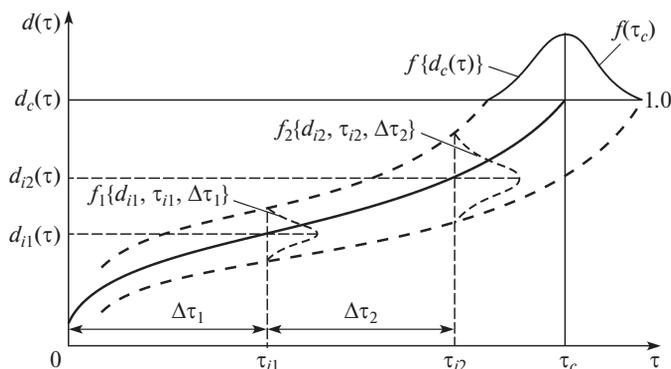


Рис. 4. Диаграмма вероятностного процесса накопления повреждений.

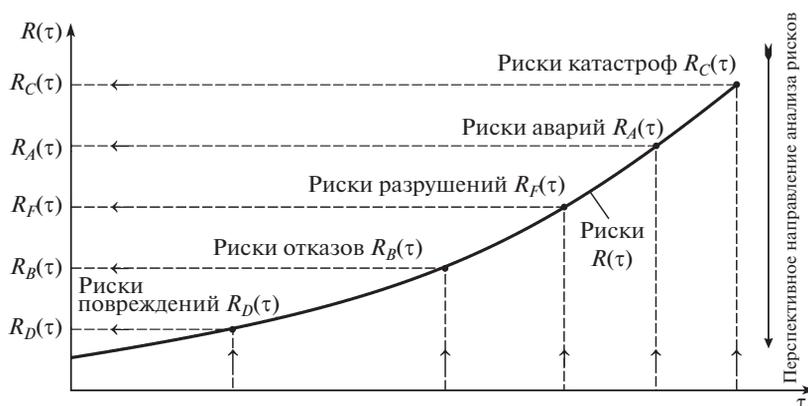


Рис. 5. Риски опасных состояний объектов и определяющие их параметры.

ны ущербов  $U(\tau)$ , в качестве технического риска принимается [7, 13] величина  $R_T(\tau)$ , определяемая как

$$R_T(\tau) = 1 - P(\tau^s). \tag{9}$$

В такой трактовке эти риски связаны с надежностью объекта в эксплуатации. Повышению надежности объектов при  $P(\tau^s) \rightarrow 1$  соответствует снижение технических рисков  $R_T(\tau^s) \rightarrow 0$ . Для реально функционирующих объектов при  $\tau^s > 0$  величины  $d(\tau^s) > 0$ ,  $P(\tau^s) < 1$  и  $R_T(\tau) > 0$ .

По мере накопления повреждений  $d(\tau^s)$  в объектах возникают опасные состояния – отказы и разрушения, ведущие к отказам, авариям и катастрофам. Если при этом учитывать экономические ущербы (затраты)  $U(\tau^s)$ , связанные с необходимостью диагностики технических состояний, проведения регламентных ремонтно-восстановительных работ, заменой поврежденных элементов, аварийными остановками оборудования, а также предельно высокие (критические) ущербы  $U_c(\tau)$  при возможных тяжелых

катастрофах, то по аналогии с рис. 4 можно построить кривую нарастающих экономических рисков (рис. 5).

Начальная стадия повреждений объекта характеризуется их малыми величинами  $d(\tau^s) \ll 1/n$ . Отказам соответствует образование локального разрушения (трещин)  $l$  с размерами на уровне допустимых или превышающих размеры, определяемые по нормам контроля. Дальнейшая эксплуатация может сопровождаться локальными или полными разрушениями не критических элементов объекта, когда уже не выполняются нормативные требования к прочности и ресурсу по выражению (4). Возникающие при этом разрушения ведут к опасным аварийным ситуациям (разрушениям узлов, компонентов объектов, пожарам, взрывам). В наиболее опасных случаях аварийные ситуации переходят в катастрофические с полным разрушением объектов, гибелью операторов, персонала и населения, с повреждением природной среды [7, 9].

Катастрофам соответствуют переходы рисков в последовательности  $R_D(\tau) \rightarrow R_B(\tau) \rightarrow R_F(\tau) \rightarrow R_A(\tau) \rightarrow R_C(\tau)$ . Риски катастроф  $R_C(\tau)$  для наиболее опасных объектов (КВО, СВО) определяют критические риски  $R_c(\tau)$  в выражении (3) и границы критических рисков. Введение в этом случае запасов по рискам  $n_R$  дает возможность построить области неприемлемых  $R_c(\tau)$  и приемлемых  $[R(\tau)]$  рисков по рис. 3.

Безопасность  $S(\tau^s)$  всех типов объектов (ОТР, ПОО, КВО, СВО), включая объекты энергетики, можно оценить по величинам рисков для данной стадии эксплуатации или жизненного цикла

$$S(\tau^s) = \frac{[R(\tau^s)]}{R(\tau^s)}. \quad (10)$$

Согласно (10) если  $R(\tau^s) < [R(\tau^s)]$ , то  $S(\tau^s) \geq 1$  и безопасность анализируемого объекта обеспечена. При  $S(\tau^s) < 1$  необходима разработка комплекса мероприятий, для достижения условий эксплуатации объекта в области приемлемых рисков.

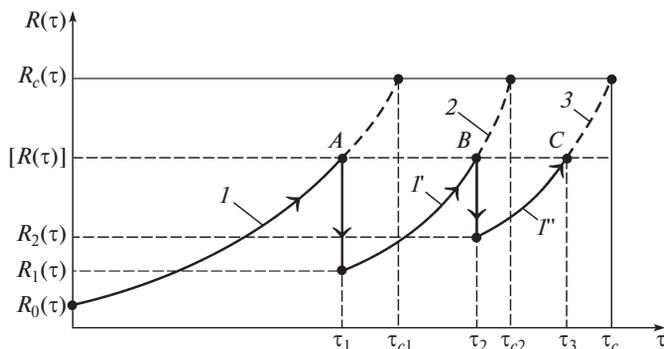
Необходимые экономические затраты  $Z_R(\tau)$  на снижение текущих рисков  $R(\tau^s)$  до приемлемого уровня  $[R(\tau^s)]$  можно оценить расчетом по выражению

$$Z_R(\tau^s) = \frac{1}{m_Z} \{ R(\tau^s) - [R(\tau^s)] \}, \quad (11)$$

где  $m_Z$  – коэффициент эффективности затрат на достижение заданного уровня безопасности объекта в области приемлемых рисков. Этот коэффициент при надлежащем обосновании рисков, проведении диагностических и мониторинговых работ можно принять на уровне  $m_Z = 5-10$ .

Для крупных энергетических объектов (КВО, СВО) атомной, гидравлической энергетики, морских платформ критические риски  $R_c(\tau)$  с учетом данных рис. 2, 3 могут достигать величин порядка  $10^7$  долл/год. Если принять в выражении (3) величину запаса по рискам  $n_R$  не менее 5–10, то приемлемыми можно считать риски на уровне  $R(\tau^s) = 10^6$  долл/год. При величине  $m_Z$  на уровне 5 затраты на снижение рисков до приемлемого уровня согласно выражению (11) составят  $1.8 \times 10^6$  долл/год для АЭС, и  $1.8 \times 10^5$  долл/год для ГЭС.

Одним из важнейших мероприятий в области повышения безопасности по критериям рисков  $R(\tau^s)$  и  $[R(\tau^s)]$  можно считать [7, 14, 15] проведение мероприятий по научно-обоснованному продлению ресурса безопасной эксплуатации объекта (рис. 6).



**Рис. 6.** Диаграмма изменения рисков  $R(\tau)$  в эксплуатации при реализации мероприятий по их снижению и продлению ресурса безопасной эксплуатации.

Проведение проектных расчетов ресурса по нормам прочности на основе (4) и расчетно-экспериментальной оценки повреждений по (5)–(8) и рис. 4, а также рисков по рис. 5, позволяет осуществлять продлеваемую эксплуатацию на временах  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$  при сохранении уровней приемлемых рисков  $[R(\tau^s)]$ . При этом экономический эффект от применения технологии продленного ресурса будет существенно (на порядки) превышать затраты  $Z_R(\tau)$  на переход к риск-ориентированному подходу в соответствии с современными требованиями [1]. С учетом этих требований в ближайшей (до 2025 г.) и отдаленной (до 2030–2035 гг.) перспективе на повестку будет поставлен вопрос о решении обратных задач обеспечения безопасности  $S(\tau)$  по критериям рисков  $R(\tau)$  и  $[R(\tau)]$ . Определяемые на основе научных разработок параметры  $S(\tau)$  и  $R(\tau)$  и назначаемые государственными органами в качестве ключевых параметры  $[R(\tau)]$  потребуют выполнения углубленных исследований, разработок и норм расчетов по новой последовательности: “Безопасность  $S(\tau) \rightarrow$  Риски  $R(\tau), [R(\tau)] \rightarrow$  Временной и циклический ресурс  $[\tau], [N] \rightarrow$  Прочность  $[\sigma], [e]$ ”. Это обстоятельство нашло свое отражение как в новой постановке рассматриваемых задач [1–5], так и в применяемых и развиваемых методах их решения [6–15].

**Заключение.** Определение характеристик прочности и ресурса по условиям обеспечения безопасности и рисков при эксплуатации энергоустановок и оборудования тепловой, гидравлической и атомной энергетики должно осуществляться на основе использования силовых и деформационных критериев образования и развития разрушения. Параметрами таких критериев являются данные о типах конструкционных материалов, о стандартных и специальных характеристиках их механических свойств, данные о конструктивных формах рассматриваемых элементов и об их эксплуатационной нагруженности. При этом построение общей системы уравнений для оценки опасных и безопасных состояний энергоустановок для описания взаимосвязи их текущих повреждений, внешних воздействий и реакций на них должно осуществляться на базе концепции учета изменения свойств материалов на всех стадиях жизненного цикла. Использование для достижения поставленной цели на стадиях проектирования и эксплуатации критериев риска, в состав ключевых параметров которых входят характеристики прочности и ресурса, позволяет применять их в качестве комплексного риск-ориентированного подхода, как к определению условий безопасной эксплуатации энергооборудования, так и управлять разработкой и реализацией новых проек-

тов, с учетом мероприятий по снижению опасных уровней рисков до приемлемых на всех стадиях жизненного цикла.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-58-00019)

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратегия национальной безопасности Российской Федерации. Утверждена Указом Президента Российской Федерации от 02.07.2021 г. № 400.
2. Энергетическая стратегия Российской Федерации до 2035 года. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 09.06.2020 г. № 1523-р.
3. Основы государственной политики в области обеспечения и ядерной и радиационной безопасности Российской Федерации на период до 2025 года и дальнейшую перспективу. Утверждены Указом Президента РФ от 13 октября 2018 г., № 585.
4. Основы государственной политики Российской Федерации в области промышленной безопасности на период до 2025 года и дальнейшую перспективу. Утверждены Указом Президента РФ от 6 мая 2018 г., № 198.
5. Основы государственной политики Российской Федерации в области защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций на период до 2030 года и дальнейшую перспективу. Утверждены Указом Президента РФ от 11 января 2018 г., № 12.
6. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Безопасность средств хранения и транспорта энергоресурсов / Научный руководитель Н.А. Махутов. М.: МГОФ “Знание”, 2019. 928 с.
7. *Махутов Н.А.* Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука. 2017. 724 с.
8. Стратегические риски России. Оценка и прогноз / Под общ. ред. Ю.Л. Воробьева. М.: Деловой экспресс, 2005. 385 с.
9. *Воробьев Ю.Л., Акимов В.А., Соколов Ю.И.* Комплексная безопасность человека. М.: ВНИИ ГОЧС, 2011. 360 с.
10. *Ганиев Р.Ф.* Фундаментальные и прикладные проблемы нелинейной волновой механики и машиностроения. Прорывные волновые технологии и волновое машиностроение // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 6. С. 3.  
<https://doi.org/10.1134/S0235711919060051>
11. *Сайфуллин И.Ш.* Информационная система по свойствам углеводородов и их производных (ИСУП) // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 4. С. 4.
12. *Хасьянова Д.У.* Условия обеспечения эксплуатационной надежности и герметичности термомеханических соединений трубопроводов муфтами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 31.  
<https://doi.org/10.31857/S023571192002008X>
13. Probability, Combinatorics and Control. Edited by Andrey Kostogryzov and Victor Korolev. London: IntechOpen, 2020. 322 p.  
<https://doi.org/10.5772/intechopen.79802>
14. Nuclear Materials / Ed. by P. Tsvetkov. London: IntechOpen, 2021. 138 p.  
<https://doi.org/10.5772/intechopen.83315>
15. Multiscale Solid Mechanics. Strength, Durability, and Dynamics / Ed. by H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov / Springer Nature Switzerland AG, Cham. 2021. 499 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2>

---

---

## НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

---

---

УДК 620.1+539.3/6

### ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА ДЛЯ СЖАТОГО ГАЗА

© 2022 г. А. Н. Полилов<sup>1,\*</sup>, Д. Д. Власов<sup>1</sup>, О. Ю. Склемина<sup>1</sup>, Н. А. Татусь<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: polilovan@mail.ru

Поступила в редакцию 01.04.2021 г.

После доработки 06.10.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Для оценки прочности композитных сосудов давления предложено применение послойного метода расчета окружных и осевых напряжений в симметричных парах слоев, для которых справедливы простые критерии разрушения при двухосном растяжении. Согласно ромбической модели элемента композита с симметричным армированием допустимые напряжения ограничиваются тремя прямыми линиями, для построения которых достаточно определить всего два значения прочности при одноосном растяжении труб с намоткой (0) и ( $\pm 45^\circ$ ). Значения критических напряжений на сторонах образуемого прямоугольника определяют условия либо растрескивания матрицы, либо разрыва волокон, что важно для процедуры учета деградации свойств по мере накопления повреждений. Предельную поверхность в пространстве напряжений удобно представить в виде наклонного эллипса, параметры которого можно найти по экспериментальным точкам методом наименьших квадратов. Для многослойных намоточных баллонов поставлена задача оптимального проектирования по критерию равенства коэффициентов запаса прочности для всех пар слоев.

*Ключевые слова:* композитный материал с полимерной матрицей, критерии прочности, намоточный баллон для сжатого газа, метод расчета для симметричных пар слоев, предельная поверхность прочности, метод наименьших квадратов, коэффициент запаса по несущей способности

DOI: 10.31857/S0235711922010084

Применение в баллонах для сжатых газов волокнистых композитов с полимерной матрицей позволяет: существенно (в три раза) снизить вес, обеспечить безосколочное разрушение при аварии или пожаре, добиться рациональной, равнонапряженной структуры армирования в условиях сложного напряженного состояния.

Эти преимущества делают сосуды давления одними из массовых объектов эффективного применения композитов, поэтому расчетам композитных баллонов посвящено большое число работ [1–3]. Значительное внимание уделяется критериям прочности композитов [1, 4], в том числе, учитывающим направленные виды разрушения [5, 6].

Настоящая статья ставит целью обоснование упрощенного метода оценки несущей способности композитных труб и сосудов давления, намотанных симметричными парами перекрестных слоев. Особенность используемого метода состоит в том, что расчет напряжений проводится не по монослоям [1, 4–6], а по симметричным парам слоев (*pair of layers*) с ориентацией  $\pm\alpha$ , для которых обоснованы простые критерии прочности [7–10]. Пара слоев  $\pm\alpha$  ортотропна относительно продольной оси баллона, и двухосное растяжение, возникающее под действием внутреннего давления, не вызывает сдвиговых деформаций, поэтому достаточно рассчитывать не шесть констант

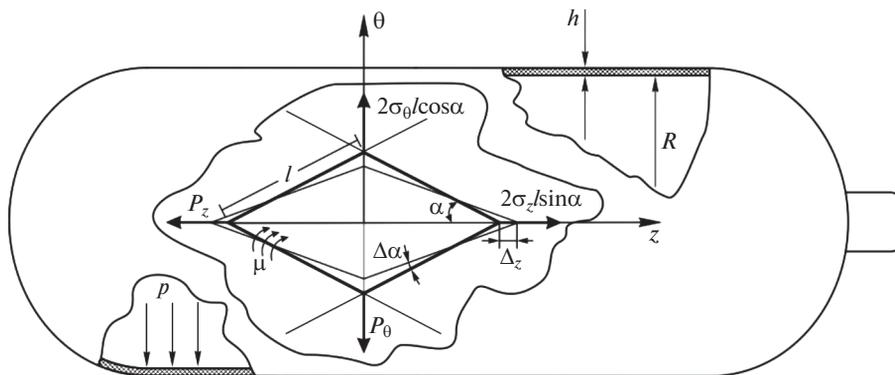


Рис. 1. Схемы баллона и ромбического элемента косоугольно армированной композитной трубы при двухосном растяжении под действием внутреннего давления  $p$ .

упругости, а всего три. Также не нужно пересчитывать напряжения в каждом монослое вдоль и поперек волокон, а достаточно знать осевое и окружное напряжения для каждой пары слоев. Прочность симметрично намотанных, ортотропных труб определяется корректно [11–13], в то время как для определения параметров прочности монослоев используется не вполне корректное растяжение однонаправленных образцов под углом к оси армирования. Все это делает предпочтительным предлагаемый метод расчета по парам слоев по сравнению с традиционным послойным методом.

**Нитяная модель для расчета сосудов давления.** Приближенные оценки необходимого числа слоев заданной ориентации можно получить по так называемой “нитяной модели”, допущения которой состоят в том, что всю нагрузку несут равнонапряженные (!) волокна, и условием разрушения считается достижение вдоль волокон критического напряжения  $\sigma_0$ .

Средние по всему пакету слоев напряжения в композитной конструкции находятся из численного МКЭ-решения соответствующей краевой задачи для однородного аналога. Ниже, с целью иллюстрации послойного метода будем использовать инженерные формулы для средних осевых  $\bar{\sigma}_z$  и окружных  $\bar{\sigma}_\theta$  напряжений в цилиндрической части баллона (рис. 1)

$$\bar{\sigma}_z = \frac{pR}{2h}; \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{pR}{h}, \quad (1)$$

где  $p$  – внутреннее давление;  $R$ ,  $h$  – средний радиус и толщина стенки баллона. Для оценки необходимого числа слоев воспользуемся двумя соотношениями, следующими из нитяной модели и представляющими собой уравнения равновесия для осевого и окружного направлений

$$\sigma_z h = \frac{pR}{2} = \sigma_0 h_0 \sum_{i=1}^m n_i \cos^2 \alpha_i; \quad \sigma_\theta h = pR = \sigma_0 h_0 \sum_{i=1}^m n_i \sin^2 \alpha_i, \quad (2)$$

где  $h_0$  – толщина пары монослоев;  $n_i$  – число симметричных пар слоев с ориентацией  $\pm\alpha_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $m$  – число различных углов ориентации.

Для  $m = 1$  из уравнений (2) получаем известный оптимальный угол намотки  $\alpha^* = 54^\circ 44' \approx 55^\circ$ , поэтому при выборе равнонапряженных схем намотки с двумя или более углами ориентации нужно, чтобы часть из них была больше, а часть меньше, чем  $\alpha^*$ . Например, допустимо (по нитяной модели):  $(0/90^\circ)$ ;  $(\pm 30^\circ/\pm 60^\circ)$ ;  $(\pm 45^\circ/90^\circ)$ ,

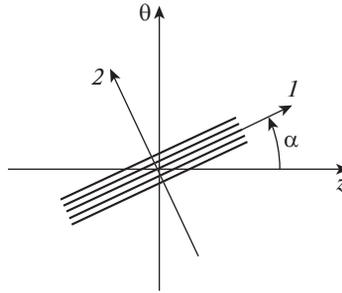


Рис. 2. Схема поворота системы координат.

но не рационально:  $(0/\pm 30^\circ)$ ;  $(\pm 60^\circ/90^\circ)$ . В последних случаях требование равнонапряженности приводит к необходимости сжимающих напряжений в одном из семейств волокон, т.к. формальное решение уравнений (2) определяет отрицательную толщину одного из семейств. Для всех проектов, удовлетворяющих условиям (2), число пар слоев, т.е. суммарная толщина стенки (и масса) оказываются одинаковыми  $h = h_0 \sum_{i=1}^m n_i = \frac{3pR}{2\sigma_0}$ .

**Послойный метод для пар слоев (pair of layers).** Прямая задача послойного расчета ставится следующим образом.

**Известны:** форма, размеры и условия нагружения композитной детали (трубы, сосуда давления).

Структура армирования задается углами  $\pm\alpha_i$  укладки и числами  $n_i$  пар слоев:  $(\pm\alpha_{1n_1}/\pm\alpha_{2n_2}/\dots/\pm\alpha_{mn_m})$ . Общее число монослоев  $N = 2\sum_{i=1}^m n_i$ , и расчеты можно проводить традиционно – в напряжениях, относя нагрузку к толщине, а можно, относя общую нагрузку к числу слоев, которое точно задано, в то время как толщина может меняться из-за различия в усилиях прессования, наличия зон с избыточным содержанием связующего и т.п.

**Требуется:** рассчитать осевое и окружное напряжения в каждой паре слоев и выяснить, при каком давлении начнется разрушение и какое предельное давление выдержит баллон.

Для начала расчетов необходимо из экспериментов или из оценок эффективных модулей [1, 10] найти четыре независимые, технические упругие константы для монослоя или однонаправленного композита (помеченные индексом  $^0$ ) в осях 1–2, связанных с направлением волокон (рис. 2): модули Юнга  $E_1^0$ ,  $E_2^0$ , модуль сдвига  $G_{12}^0$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^0$ ,  $\nu_{21}^0 = \nu_{12}^0 E_2^0 / E_1^0$ .

**Первый этап** состоит в пересчете технических констант монослоя в компоненты тензора модулей упругости и матрицы податливостей, чтобы применять известные формулы преобразования при повороте системы координат:

$$E_{11}^0 = \frac{E_1^0}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}; \quad E_{12}^0 = \frac{E_1^0 \nu_{21}^0}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}; \quad E_{22}^0 = \frac{E_2^0}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}; \quad E_{66}^0 = G_{12}^0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^0 &= \frac{E_{22}^0}{E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_1^0}; & S_{22}^0 &= \frac{E_{11}^0}{E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_2^0}; \\
S_{12}^0 &= -\frac{E_{12}^0}{E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2} = -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} = -\frac{\nu_{21}^0}{E_2^0}; & S_{66}^0 &= \frac{1}{E_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}^0}.
\end{aligned} \tag{4}$$

В (3), (4) и далее используется обычная замена пары индексов на один, чтобы четырехвалентный тензор модулей представить в виде матрицы, а тензора напряжений и деформаций второго ранга – в виде псевдовекторов:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2; 12 \rightarrow 6$ .

На *втором этапе* для каждой пары слоев с углами  $\pm\alpha_i$  между осью  $z$  и осью  $l$ , направленной вдоль волокон (рис. 2), рассчитываются компоненты тензора модулей упругости и матрицы податливостей в осях  $z - \theta$ , связанных с деталью

$$\begin{aligned}
E_{zzzz} &= E_{zz}(\alpha) = E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2, \\
E_{zz\theta\theta} &= E_{z\theta}(\alpha) = (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4), \\
E_{\theta\theta\theta\theta} &= E_{\theta\theta}(\alpha) = E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\
S_{zz}(\alpha) &= S_{11}^0 c^4 + S_{22}^0 s^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2, \\
S_{z\theta}(\alpha) &= (S_{11}^0 + S_{22}^0 - S_{66}^0) s^2 c^2 + S_{12}^0 (s^4 + c^4), \\
S_{\theta\theta}(\alpha) &= S_{11}^0 s^4 + S_{22}^0 c^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

В (5), (6) приняты обозначения  $c = \cos \alpha_i$ ;  $s = \sin \alpha_i$ . Для наклонного монослоя, не обладающего ортотропной симметрией, число компонент в (5), (6) увеличится до шести.

На *третьем этапе* рассчитываются компоненты тензора упругих модулей для всего пакета слоев в предположении, что в тонкостенной трубе деформации всех пар слоев одинаковы и равны средним деформациям  $\bar{\varepsilon}_z, \bar{\varepsilon}_\theta$

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = zz, \theta\theta. \tag{7}$$

Матрица эффективных податливостей для всего пакета слоев находится по формулам (4)

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \Delta^{-1}; \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \Delta^{-1}; \quad S_{z\theta}^0 = -\bar{E}_{z\theta} \Delta^{-1}; \quad \Delta = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2. \tag{8}$$

При симметричных укладках пакет в целом является ортотропным, поэтому в матрицах модулей и податливостей остаются по четыре независимых компоненты, а в случае двухосного растяжения – важны лишь три из них.

*Четвертый этап* состоит в вычислении средних деформаций по известным средним напряжениям (1) и рассчитанным податливостям (8)

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_\theta; \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_\theta. \tag{9}$$

*Пятый этап* – это расчет осевых и окружных напряжений в каждой паре слоев

$$\begin{aligned}
\sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{z\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta, \\
\sigma_\theta(\alpha_i) &= E_{z\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{\theta\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

На *шестом этапе* применяют критерии прочности, и увеличивают внутреннее давление с выбранным шагом, пока в одной из пар слоев точка на плоскости  $\sigma_z - \sigma_\theta$ , соответствующая рассчитанным напряжениям (10), не выйдет на предельную поверхность в пространстве напряжений  $\sigma_z - \sigma_\theta$ .

**Седьмой** (итерационный) *этап* – состоит в анализе последовательных разрушений в парах слоев. Процедуры учета деградации свойств по мере роста нагрузки описаны в работах [14–17].

Если принимать за условие выхода из строя всей детали первое нарушение критерия прочности хотя бы в одном слое (“*first ply criterion*”), то оценка получается слишком консервативной, т.к. обеспечивает завышенный запас прочности. Для повышения точности предсказания несущей способности следует провести анализ последовательного накопления повреждений, но для этого критерии прочности должны учитывать различные механизмы разрушения. Если в паре слоев достигнуто условие разрыва волокон, то эта пара выключается из работы, потому что ей приписывают сильно пониженные упругие свойства. Если произошло разрушение матрицы, то в этих слоях значительно снижают лишь модули сдвига и Юнга поперек волокон, а далее еще раз, итерационно, проводится послойный расчет с измененной матрицей жесткости. Если разрушений больше не происходит, пошагово добавляют внутреннее давление, и так до тех пор, пока весь пакет слоев не выйдет из строя. Процедура оценки критического давления не требует много итераций: прочность определяется основными несущими слоями, но итерации нужны, чтобы не реагировать на первое растрескивание матрицы, которое может начаться задолго до полного исчерпания несущей способности.

**Критерий прочности по модели ромба.** Для косоугольно армированных труб в [14, 15] была предложена модель элементарной ячейки в виде ромба с длиной стороны  $l$  из недеформируемых волокон (рис. 1). Изменению угла ромба  $\alpha$  при двухосном растяжении силами  $P_z = 2\sigma_z l \sin \alpha$ ,  $P_\theta = 2\sigma_\theta l \cos \alpha$ , пропорциональными длинам диагоналей ромба, препятствует матрица, создающая при сдвиге суммарный момент  $M = 2\mu l^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , пропорциональный площади ромба и распределенному моменту  $\mu$ .

При смещениях вершин ромба  $\Delta_z = (2l \cos \alpha)' d\alpha = -2l \sin \alpha d\alpha$ ;  $\Delta_\theta = 2l \cos \alpha d\alpha$  с изменением угла  $d\alpha$  силы  $P_z$ ,  $P_\theta$ , приложенные к вершинам, совершают работу, которую можно приравнять к работе суммарного момента

$$|P_z \Delta_z + P_\theta \Delta_\theta| = M d\alpha. \quad (11)$$

Условию разрушения соответствует некоторое критическое значение распределенного момента  $\mu^*$ , соответствующее предельному состоянию матрицы, и его можно связать с прочностью  $\sigma_z^*(45) = \sigma_{45}$  на растяжение трубы с намоткой  $\pm 45^\circ$ . Критерий (11) для приложенных напряжений  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  примет вид, приводящий в координатах  $\sigma_z - \sigma_\theta$  к уравнениям двух прямых линий 1, 2 с одинаковым углом наклона  $\beta^* = \arctg \operatorname{tg}^2 \alpha$

$$\begin{aligned} & |\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_{45} \Rightarrow \\ 1. \quad & \sigma_\theta = t^2 \sigma_z + t \sigma_{45}; \quad \text{при } \sigma_z < \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta; \quad \operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg}^2 \alpha = t^2 \\ 2. \quad & \sigma_\theta = t^2 \sigma_z - t \sigma_{45}; \quad \text{при } \sigma_z > \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta; \quad \operatorname{tg} \beta^* = \sigma_\theta / \sigma_z. \end{aligned} \quad (12)$$

Прямые скобки в верхнем уравнении (12) означают модуль величины, а знак минус связан с тем, что напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  “мешают” друг другу, стремясь исказить ромб в противоположных направлениях, т.е. увеличивая или уменьшая угол  $\alpha$ .

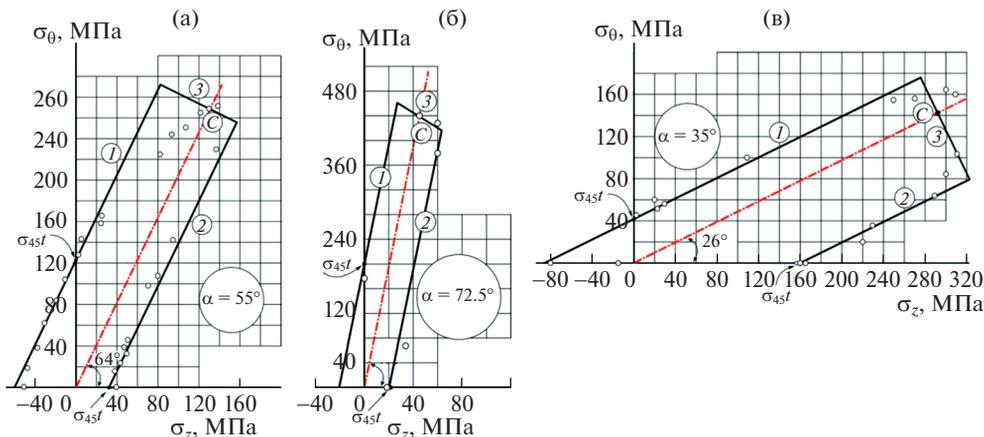


Рис. 3. Предельные поверхности при двухосном нагружении стеклопластиковых труб: с намоткой  $\pm 55^\circ$  – (а);  $\pm 72.5^\circ$  – (б);  $\pm 35^\circ$  – (в). Экспериментальные данные (кружки) из [12, 13].

Для одноосного растяжения трубы с намоткой ( $\pm\alpha$ ) из условий перекашивания ромба (12) и разрыва волокон находятся прочности в осевом  $\sigma_z^*(\alpha)$  или в окружном  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  направлениях

$$\sigma_z^*(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha; & \alpha > \alpha_0 \\ \approx \sigma_0; & \alpha \leq \alpha_0 \end{cases}; \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha; & \alpha < 90^\circ - \alpha_0 \\ \approx \sigma_0; & \alpha \geq 90^\circ - \alpha_0 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45}.$$

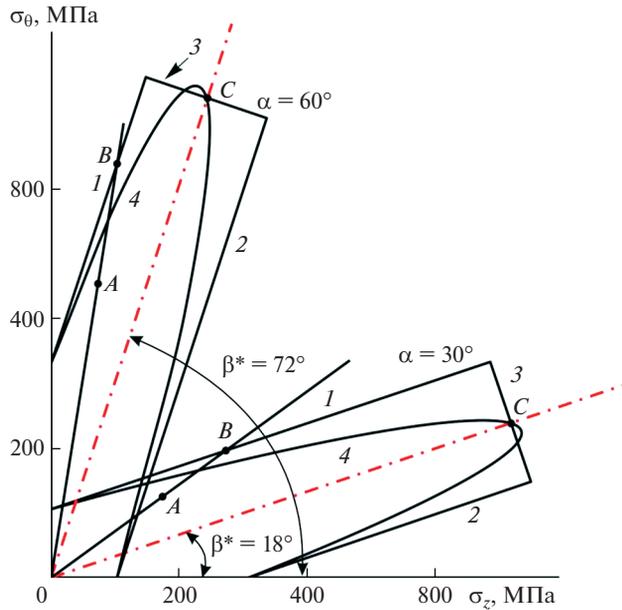
Если необходимо учесть прочность при растяжении трубы с окружной намоткой  $\sigma_z^*(90) = \sigma_{90}$ , то можно в (13) использовать чуть более сложные зависимости

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90}; \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{90}. \quad (14)$$

Построение для пары слоев ( $\pm\alpha$ ) в осях  $\sigma_z - \sigma_\theta$  части предельной поверхности, связанной с разрушением матрицы, состоит в проведении через точки  $\sigma_z^*(\alpha)$ ,  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  на осях под оптимальным углом  $\beta^* = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 \alpha$  двух прямых линий 1, 2, соответствующих уравнениям (13) или (14).

**Критерий разрыва волокон в паре слоев.** При двухосном нагружении пары слоев в “оптимальном” направлении, вдоль луча 0, обозначенного на рис. 3, 4, 5 штрихпунктирной линией, когда  $\sigma_\theta / \sigma_z = \operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg}^2 \alpha$ , выражение в прямых скобках в (12) обращается в ноль и перекашивание ромба с разрушением матрицы становится невозможным. При этом все усилия воспринимаются только волокнами (“нитяная модель”), и разрушение возможно в виде разрыва волокон при достижении в них предела прочности на растяжение вдоль волокон  $\sigma_z^*(0) = \sigma_0$ . Проекции напряжений  $\sigma_{zC}$ ;  $\sigma_{\theta C}$  в точке C (рис. 3), соответствующей разрыву волокон при  $\sigma_\theta / \sigma_z = \operatorname{tg} \beta^*$ , определяются из нитяной модели (2)

$$\sigma_{zC} = \sigma_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 (1 + t^2)^{-1}; \quad \sigma_{\theta C} = \sigma_0 \sin^2 \alpha = \sigma_0 t^2 (1 + t^2)^{-1}. \quad (15)$$



**Рис. 4.** Схема определения коэффициента запаса для предельных прямоугольников (12), (16) – 1–2–3 и эллипсов (19) – 4 для  $\alpha = \pm 30^\circ$  и  $\alpha = \pm 60^\circ$  (при  $\sigma_{45} = 300$  МПа и  $\sigma_0 = 1000$  МПа). 1, 2 – условия перекашивания ромба при двухосном растяжении, 3 – условие разрыва волокон;  $\text{tg } \beta^* = \text{tg}^2 \alpha$ .

Прямая линия 3 (рис. 3), соответствующая условию разрыва волокон и проходящая через точку C, перпендикулярна лучу 0 ( $\sigma_\theta = t^2 \sigma_z$ , из (12))

$$t^2 \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma_0 (1 + t^4) (1 + t^2)^{-1}, \tag{16}$$

и проходит на осях  $\sigma_z$ ;  $\sigma_\theta$  через точки

$$\sigma_z^0 = \sigma_0 (1 + t^4) (1 + t^2)^{-1}; \quad \sigma_\theta^0 = \sigma_0^0 t^{-2}; \quad (= \sigma_0 \text{ при } \alpha = \pm 45^\circ). \tag{17}$$

**Описание опытных данных тремя отрезками.** Самый простой способ обработки экспериментальных данных состоит в проведении через точки на осях двух прямых линий под оптимальным углом  $\beta^*$ , а через точку C на оптимальном луче – перпендикулярного оптимальному лучу отрезка. Так и сделано на рис. 3 для экспериментальных данных из [12, 13]. Применение метода наименьших квадратов не дает существенного уточнения положения прямых 1–2–3.

При изменении масштаба по одной из осей (рис. 3б), зрительная перпендикулярность прямых 1 и 3 нарушается, но все соотношения (15)–(17) остаются в силе.

**Построение предельного эллипса по трем точкам.** Эллиптическая аппроксимация предельной поверхности в пространстве напряжений может быть удобнее в компьютерных расчетах, чем использование кусочно-линейной аппроксимации, хотя она не позволяет так же однозначно судить о смене механизма разрушения. Используя те же две базовые прочности  $\sigma_{45}$ ;  $\sigma_0$ , можно составить уравнение предельного эллипса 4 (рис. 4), согласующегося с прямоугольником 1–2–3.

$$A \sigma_z^2 + B \sigma_\theta^2 + C \sigma_z \sigma_\theta = 1. \tag{18}$$

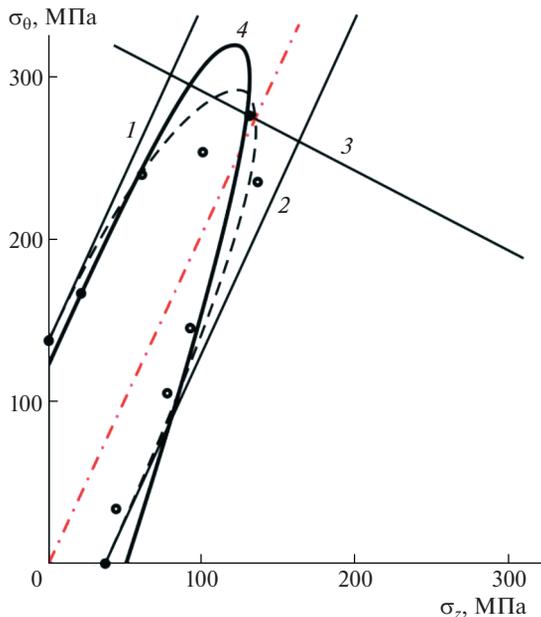


Рис. 5. Сравнение описания экспериментальных данных с рис. 3 для  $\pm 55^\circ$ : тремя отрезками 1–2–3; эллипсом по трем точкам (по двум значениям прочности  $\sigma_{45}$ ;  $\sigma_0$ ) – штриховая линия; эллипсом 4 по МНК – сплошная линия.

Для двухосного растяжения трубы с намоткой ( $\pm\alpha$ ) напряжениями  $\sigma_z$  и  $\sigma_\theta$  предельный эллипс в координатах  $\sigma_z - \sigma_\theta$  должен проходить через две точки на осях, соответствующие прочностям (13) или (14) при одноосном нагружении  $\sigma_z^*(\alpha) = 1/\sqrt{A}$ ,  $\sigma_\theta^*(\alpha) = 1/\sqrt{B}$ , и через одну точку  $C$  на “оптимальном луче нагружения”, соответствующую достижению прочности вдоль волокон  $\sigma_0 = \sigma_z^*(0)$ . Из простейших критериев (13) и (15) находятся параметры уравнения (18)

$$t^2\sigma_z^2 + t^{-2}\sigma_\theta^2 - \sigma_z\sigma_\theta \left( 2 - \frac{\sigma_{45}^2(1+t^2)^2}{t^2\sigma_0^2} \right) = \sigma_{45}^2; \quad t = \operatorname{tg} \alpha. \quad (19)$$

**Почему вершина эллипса не лежит на “оптимальном” луче.** При построении предельных эллипсов (рис. 5) по уравнению (19) получается интересный результат: максимальная прочность, соответствующая вершине эллипса, реализуется не на “оптимальном” луче, на котором все возникающие в баллоне усилия распределяются только на волокна. Причина невозможности “попасть вершиной” на оптимальный луч объясняется следующим. В уравнении эллипса (18) оставлено лишь три свободных параметра, с помощью которых невозможно одновременно удовлетворить четырем условиям: 1, 2 – двум заданным на осях прочностям при одноосном осевом и окружном растяжении; 3 – достижению заданного предела прочности  $\sigma_0$  в точке  $C$  при нагружении вдоль “оптимального” луча; 4 – повороту оси эллипса на заданный угол  $\beta^* = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 \alpha)$ .

Для одновременного удовлетворения указанным четырем условиям необходимо добавить в каноническое уравнение повернутого эллипса (18) еще хотя бы один феноме-

нологический параметр, например, произвольные координаты центра эллипса, не совпадающие с началом координат. Уточнение (рис. 4, 5) окажется незначительным, а усложнение аналитических выкладок и расчетных процедур – неоправданно высоким. Простейший вариант удовлетворения требования попадания вершины эллипса в точку  $C$  на луче  $O$  (условия 3 и 4) состоит в отказе от одного или двух требований 1–2. При этом одну из одноосных прочностей (13) надо считать неизвестной.

Интересно отметить, что требование попадания вершины эллипса на оптимальный луч при упрощенных предположениях (12), (13) приводит к тому, что уравнение эллипса (18) становится “расщепляющимся”, и оно описывает не кривую второго порядка, а две прямые линии (12). При этом вершина эллипса уходит в бесконечность, что соответствует ситуации, когда в уравнении второго порядка  $ax^2 + by^2 + cxy = 1 \rightarrow a = b; c = -2a$  и уравнение можно выразить в виде  $a(x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow |x - y| = a^{-1/2}$ .

**Метод наименьших квадратов для предельного эллипса.** Для нахождения параметров эллипса “наилучшего соответствия” (*best-fit-curve*) на плоскости  $\sigma_z - \sigma_\theta$  методом наименьших квадратов сформулируем задачу минимизации для уравнения (18), в котором для сокращения записи обозначим  $\sigma_z = x; \sigma_\theta = y$

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1 \Leftrightarrow F = \sum (Ax^2 + By^2 + Cxy - 1)^2 = \min. \quad (20)$$

Считаем, что в процессе экспериментального определения прочности композитных труб при различных отношениях осевых и окружных напряжений (рис. 3)  $\sigma_z/\sigma_\theta$  получены  $n$  экспериментальных точек с координатами  $x_i; y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), “через” которые надо провести эллипс (20), параметры которого  $A, B$  и  $C$  минимизируют сумму квадратов отклонений эллипса от точек  $x_i; y_i$ .

Равенство нулю производных по параметрам, обеспечивающее минимум (20), дает систему из трех линейных уравнений (21), решение которой определяет параметры  $A, B$  и  $C$  “эллипса наилучшего соответствия”

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dA} = 0 &\Rightarrow Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = d_1; \quad a_1 = \sum x_i^4; \quad b_1 = a_2 = \sum x_i^2 y_i^2 = c_3; \\ \frac{dF}{dB} = 0 &\Rightarrow Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = d_2; \quad c_1 = \sum x_i^3 y_i = a_3; \quad d_1 = \sum x_i^2; \quad b_2 = \sum y_i^4; \\ \frac{dF}{dC} = 0 &\Rightarrow Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 = d_3; \quad d_2 = \sum y_i^2; \quad d_3 = \sum x_i y_i; \quad c_2 = b_3 = \sum x_i y_i^3; \\ A \times \Delta &= d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 d_3 - c_3 d_2) + c_1 (b_3 d_2 - b_2 d_3); \\ B \times \Delta &= a_1 (c_3 d_2 - c_2 d_3) + d_1 (a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_1 (a_2 d_3 - a_3 d_2); \\ C \times \Delta &= a_1 (b_2 d_3 - b_3 d_2) + b_1 (a_3 d_2 - a_2 d_3) + d_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2); \\ \Delta &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Требование прохождения эллипса (18) через три точки позволяет точно найти значения трех параметров. Для большего числа точек необходимо воспользоваться решением (21). На рис. 5 сравнены предельный эллипс, построенный по трем точкам, как на рис. 4, и эллипс, построенный по уравнениям (21) с учетом большого числа экспериментальных точек взятых из рис. 3. Как видно, расхождение результатов несущественное, что позволяет использовать простейший способ построения предельной поверхности для пары слоев в виде прямоугольника или эллипса, используя всего две базовые экспериментальные прочности  $\sigma_0; \sigma_{45}$ .

**Коэффициент запаса для пары слоев.** С помощью послойного метода (для выбранного внутреннего давления) для каждой пары слоев рассчитывают напряжения  $\sigma_z; \sigma_\theta$ ,

соответствующие точке  $B$  в пространстве напряжений  $\sigma_z - \sigma_\theta$  (рис. 4). Когда точка  $B$  находится внутри предельного эллипса 4 или прямоугольника со сторонами 1, 2, 3, прочность этой пары слоев сохраняется. При увеличении внутреннего давления луч  $OB$  пересечет предельный эллипс 4 или одну из прямых 1, 2, 3 в какой-то точке  $A$ . Попадание точки  $A$  на одну из прямых определяет характер разрушения: либо разрушение матрицы (прямые 1, 2), либо разрыв волокон (прямая 3). Для эллипса определение вида разрушения проблематично, что затрудняет применение алгоритмов учета накопления повреждений.

Отношение длин отрезков  $k_{si} = OA/OB$  (рис. 4) определяет коэффициент запаса по внутреннему давлению для  $i$ -й пары симметричных слоев.

**Рациональное проектирование.** Обратная задача “равнопрочного” проектирования структуры армирования состоит в том, чтобы значения коэффициентов запаса для разных пар слоев были равны друг другу. Она сводится к подбору структуры армирования и к решению серии прямых задач, желательного сопровождаемому процедурой учета деградации свойств по мере роста давления [14–17]. Минимаксный критерий минимизации функции цели, принятой в виде максимального отклонения от среднего значения одного из коэффициентов запаса (для наиболее нагруженной пары слоев), сводит задачу оптимального проектирования к задаче нелинейного программирования, решаемой методом штрафных функций.

**Выводы. 1.** Послойный метод для симметричных пар слоев имеет явные преимущества по простоте и надежности перед традиционным методом для монослоев. **2.** Простая модель ромбической ячейки приводит к кусочно-линейной предельной поверхности, хорошо согласующейся с экспериментами. **3.** Предлагаемый подход позволяет решать задачу рационального проектирования структуры армирования по условию равенства коэффициентов запаса для всех пар слоев.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Серия “Библиотека расчетчика”. М.: “Машиностроение”, 1984. 264 с.
2. Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y. Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks // Composites Part B: Engineering. 2016. V. 85. P. 41. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.023>
3. Grogan D.M., Ó Brádaigh C.M., McGarry J.P., Leen S.B. Damage and permeability in tape-laid thermoplastic composite cryogenic tanks // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2015. V. 78. P. 390. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2015.08.037>
4. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // Journal of Composite Materials. 1971. V. 2. № 1. P. 191. <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>
5. Rotem A., Hashin Z. Failure modes of angle-ply laminates // J. of Composite Materials. 1975. V. 9. № 1. P. 58. <https://doi.org/10.1177/002199837500900209>

6. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. 1980. V. 47. P. 329. <https://doi.org/10.1115/1.3153664>
7. Работнов Ю.Н. О прочности композитов, армированных в двух направлениях // Механика полимеров. 1978. № 5. С. 832.
8. Полилов А.Н. Схема расчета прочности косоугольно армированных композитов при плоском напряженном состоянии // Механика композитных материалов. 1980. № 2. С. 221.
9. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестник ПНИПУ (Пермский национальный исследовательский политехнический университет). “Механика”. 2012. № 2. С. 140.
10. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015. 320 с.
11. Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н., Соколова Т.В., Карнейкин И.С., Вайнберг М.В. Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе // Механика полимеров. 1978. № 2. С. 219.
12. Eckold G.C., Leadbetter D., Soden P.D., Griggs P.R. Lamination theory in the prediction of failure envelopes for filament wound materials subjected to biaxial loading // Composites. 1978. V. 9. № 4. P. 243. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(78\)90176-3](https://doi.org/10.1016/0010-4361(78)90176-3)
13. Soden P.D., Leadbetter D., Griggs P.R., Eckold G.C. The strength of a filament wound composites under biaxial loading // Composites. 1978. V. 9. № 4. P. 247. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(78\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0010-4361(78)90177-5)
14. Lapczyk I., Hurtado J.A. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials // Compos. Part A-Appl. S. 2007. V. 3. P. 2333. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.01.017>
15. Kozlov M.V., Sheshenin S.V. Modeling the progressive failure of laminated composites // Mech. Compos. Mater. 2016. V. 51. P. 695. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9540-0>
16. Hoos K., Iarve E.V., Braginsky M., Zhou E., Mollenhauer D.H. Static strength prediction in laminated composites by using discrete damage modeling // J. Compos. Mater. 2017. V. 51. P. 1473. <https://doi.org/10.1177/0021998316651986>
17. Zhu H., Guo Z.X., Zhu M., Cui J.J., He Q., Li Y.C. A progressive FE failure model for laminates under biaxial loading // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 56. P. 207. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09873-7>

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ,  
ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 621.923

**ПЕРЕНОС МАТЕРИАЛА АБРАЗИВНОГО ИНСТРУМЕНТА НА ПОВЕРХНОСТЬ  
ТИТАНОВОГО СПЛАВА В РАЗЛИЧНЫЕ ПЕРИОДЫ ШЛИФОВАНИЯ  
КРУГОМ ИЗ КАРБИДА КРЕМНИЯ**© 2022 г. В. А. Носенко<sup>1,\*</sup>, Н. Д. Сердюков<sup>1</sup>, А. В. Фетисов<sup>1</sup><sup>1</sup>*Волгоградский государственный технический университет, Волжский, Россия**\*e-mail: vladim.nosenko2014@yandex.ru*

Поступила в редакцию 08.04.2021 г.

После доработки 11.10.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Морфологию и химический состав поверхности титанового сплава исследовали на различных этапах шлифования абразивным инструментом из карбида кремния на керамической связке. Установлено, что шлифование сопровождается переносом продуктов износа шлифовального круга на обработанную поверхность. Продукты, внедренные в обработанную поверхность, являются кристаллами карбида кремния и керамической связки. Интенсивность переноса оценивали по концентрации кремния. Установлено, что наибольший перенос происходит на первом этапе шлифования непосредственно после правки абразивного инструмента.

*Ключевые слова:* титановый сплав, шлифование, карбид кремния, перенос материала, шаржирование, морфология, химический состав

DOI: 10.31857/S0235711922010072

Титановые сплавы являются наиболее востребованными конструкционными металлами для изделий, работающих в экстремальных условиях эксплуатации [1, 2]. Поэтому качеству поверхности при обработке титановых сплавов на финишных операциях, в частности, при шлифовании уделяется особое внимание [3, 4].

В процессе шлифования титановый сплав налипает на вершины зерен абразивного инструмента, что увеличивает силу резания и износ инструмента. Налипание металла обусловлено высокой адгезионной активностью титана к абразивному материалу [4–6]. Из классических абразивных материалов меньшей адгезионной активностью во взаимодействии с титановыми сплавами имеет карбид кремния. Инструмент из карбида кремния по сравнению, например, с корундом обеспечивает бесприжоговое шлифование, износостойкость карбида кремния почти на порядок больше. Поэтому карбид кремния рекомендован к использованию на операциях шлифования титановых сплавов [7–9].

В наших первых работах (1983–1984 гг.) на основе результатов микрорентгеноспектрального анализа показана возможность переноса химических элементов абразивного материала на поверхность титанового сплава при шлифовании без охлаждения кругами из карбида кремния на бакелитовой связке. На основе результатов анализа предложен критерий оценки интенсивности адгезионного взаимодействия обрабатываемого материала с абразивным инструментом в условиях шлифования по содержанию химических элементов абразивного материала, перенесенных на обработанную поверхность.

Дана классификация  $d$ -переходных металлов по интенсивности адгезионного взаимодействия с инструментом из карбида кремния [9–11].

Кристаллы абразивного инструмента, внедренные в обработанную поверхность, являются концентраторами напряжений, снижающие усталостную прочность материала [12, 13]. Поэтому исследование переноса материала абразивного инструмента на обрабатываемую поверхность при шлифовании в последнее время уделяется особое внимание. Перенос абразивного материала в процессе шлифования возможен при обработке различных сталей и сплавов [14–16].

Перенос продуктов износа абразивного инструмента происходит в результате скалывания микро- и макрообъемов абразивного материала и связки, вырывания зерна из связки круга. Одним из факторов, который оказывает существенное влияние на перенос материала абразивного инструмента и шаржирование обработанной поверхности кристаллическими продуктами износа, является правка шлифовального круга. Убедительным доказательством существенного влияния правки на перенос продуктов износа абразивного инструмента является шлифование с постоянной правкой [4, 17]. Следует ожидать, что при маятниковом шлифовании с периодической правкой перенос материала абразивного инструмента на обработанную поверхность титанового сплава в начальный период обработки будет более интенсивным.

**Цель работы** – исследование переноса материала абразивного инструмента на поверхность титанового сплава в различные периоды шлифования.

**Методика исследований. Методика шлифования.** В качестве обрабатываемого материала использовали двухфазный  $\alpha + \beta$  титановый сплав марки ВТ9. Образцы для исследований получены из проката круглого профиля методомковки с последующим двойным отжигом. Содержание  $\beta$ -фазы после двойного отжига около 10%. Размер  $\alpha$ -колоний 25–30 мкм, толщина  $\alpha$ -пластин около 3 мкм. Окончательный размер заготовки  $100 \times 50 \times 10$  мм, в целях исключения переноса на обработанную поверхность кристаллов карбида кремния, получали шлифованием с выхаживанием алмазным инструментом. Размер обрабатываемой поверхности  $100 \times 10$  мм, допуск по длине 60 мкм, по ширине – 20 мкм, параметр шероховатости  $Ra$  не более 0.75 мкм. Исследования проводили на станке с ЧПУ модели CHEVALIER Smart–B1224 III. Режим обработки: скорость шлифования  $v = 30$  м/с, скорость подачи стола станка  $v_s = 12$  м/мин, радиальная подача (подача на глубину)  $S_r = 0.005$  мм/ход, припуск на обработку – 0.5 мм. Тип, размер и характеристика шлифовального круга согласно ГОСТ Р 52781-2007 – 1 350  $\times$  20  $\times$  127 64CF80L7V. Образцы из титанового сплава шлифовали с охлаждением СОЖ Волтес-151, расход жидкости – 14 л/мин. Рабочую поверхность шлифовального круга правили алмазной иглой марки 3908–0031, ГОСТ 607-80. Режим правки:  $v = 30$  м/с,  $S_r = 0.01$  мм/ход; припуск на радиус – 0.1 мм (10 проходов); осевая подача  $S_o = 0.12$  мм/об. Составляющие силы резания плоского врезного шлифования  $P_z$  и  $P_y$  измеряли силоизмерительным комплексом Amti. Составляющая  $P_z$  параллельна направлению скорости подачи стола,  $P_y$  – перпендикулярна.

**Исследования морфологии и химического состава обработанной поверхности.** Электронно-микроскопические исследования проводили на растровом электронном микроскопе Versa 3D DualBeam. Для исследования подготавливали образцы из титанового сплава ВТ9, размер обрабатываемой поверхности  $10 \times 8$  мм. Образцы для микроскопа вырезали из основного образца с последующим шлифованием выхаживанием алмазным кругом. Непосредственно перед опытом основной образец и образцы для исследований морфологии и химического состава закрепляли в тисках и выравнивали до обеспечения полного контакта обрабатываемых поверхностей с рабочей поверхностью шлифовального круга по всей длине образца. После этого с образцов дополнительно снимали припуск 0.02 мм с последующим выхаживанием.

При проведении опыта заданную величину припуска снимали с основного образца (обрабатываемая поверхность  $100 \times 10$  мм). Затем шлифовали образец для исследования на микроскопе. Образец 1 обрабатывали непосредственно после правки абразивного инструмента, остальные образцы 2–5 – после заданного количества проходов. Основной образец и образцы для исследования на микроскопе шлифовали на одном режиме. Припуск, снимаемый с образцов – 0.02 мм, количество проходов на образце – 4, что соответствует приведенной наработке –  $0.2 \text{ мм}^2$ .

Химический состав объектов определяли методом рентгеноспектрального микроанализа. Размер площадки сканирования  $800 \times 1200$  мкм, количество площадок на одном образце – не менее девяти, количество точечных измерений на одной площадке – 400, диаметр электронного зонда – 50 нм.

Фотографии поверхности получали во вторичных и обратно рассеянных электронах. Метод получения изображения во вторичных электронах обеспечивает наибольшее пространственное разрешение. Изображение в обратно рассеянных электронах дают информацию о распределении электронной плотности атомов и позволяют сделать качественную оценку химического состава.

**Результаты исследования и обсуждение.** Периоды времени, в привязке к которым исследовали морфологию и химический состав обработанной поверхности, определяли по характерным участкам работы абразивного инструмента. В общем случае за период стойкости абразивного инструмента в производственных условиях выделяют этап приработки инструмента после правки и этап стабильного (относительно стабильного) шлифования. Этап приработки во многом определяется методом правки, правящим инструментом, режимом правки и характеристикой шлифовального круга. Этап стабильной работы и его протяженность определяются требованиями к качеству обработанной поверхности. В процессе правки, в результате контакта с правящим инструментом, формируется рельеф рабочей поверхности абразивного инструмента. В процессе шлифования происходит формирование нового рельефа, отвечающего условиям взаимодействия рабочей поверхности абразивного инструмента с обрабатываемым материалом.

Одним из наиболее востребованных динамических показателей шлифования, используемых для оценки состояния процесса, является мощность или сила резания (составляющие силы резания).

**Исследование составляющих силы резания.** Закономерности изменения составляющих силы резания за период шлифования одинаковы. Поэтому в качестве примера на рис. 1 приведена только составляющая  $P_y$ . На этапе приработки составляющая силы резания  $P_y$  (вертикальная составляющая) возрастает, затем, снижается (рис. 1). Значительный рост составляющей силы резания наблюдается на 1–5 проходах.

Максимальное значение  $P_y$  на пятом проходе превышает 80 Н. В интервале проходов 5–25 составляющие силы резания снижаются в среднем на 25%, на проходах 25–37 – практически не изменяются, затем, начинают возрастать. К проходам 75–81  $P_y$  возрастает на 5–9% относительно участка стабильных сил резания. Рост силы резания свидетельствует о работе шлифовального круга в режиме преимущественного затупления. На последних 20-ти проходах составляющие силы резания изменяются незначительно. Работа абразивного инструмента осуществляется в смешанном режиме равновероятного затупления–самозатачивания. На встречной подаче  $P_y$  на 9–12% больше, чем на попутной. Возможными причинами различных значений составляющих силы резания на встречной и попутной подачах являются кинематика резания и условия транспортировки СОЖ в зону резания, зависящие от направления подачи.

**Исследование морфологии обработанной поверхности.** Морфологию и химический состав поверхности титанового сплава исследовали для наиболее характерных периодов работы шлифовального круга. В соответствии с рис. 1 выделены следующие про-

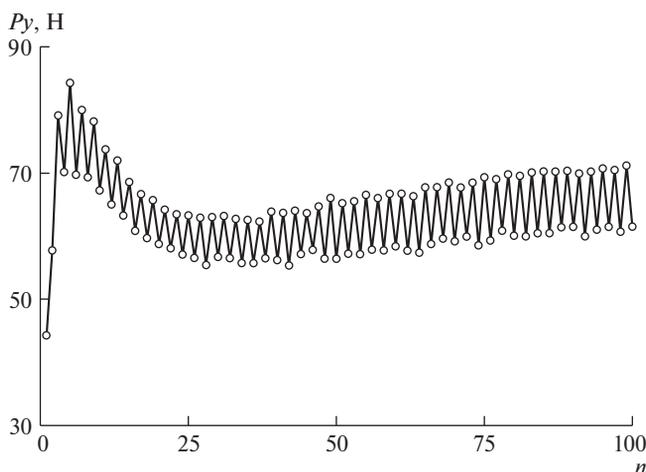


Рис. 1. Составляющая силы резания  $P_y$  в зависимости от числа проходов  $n$ .

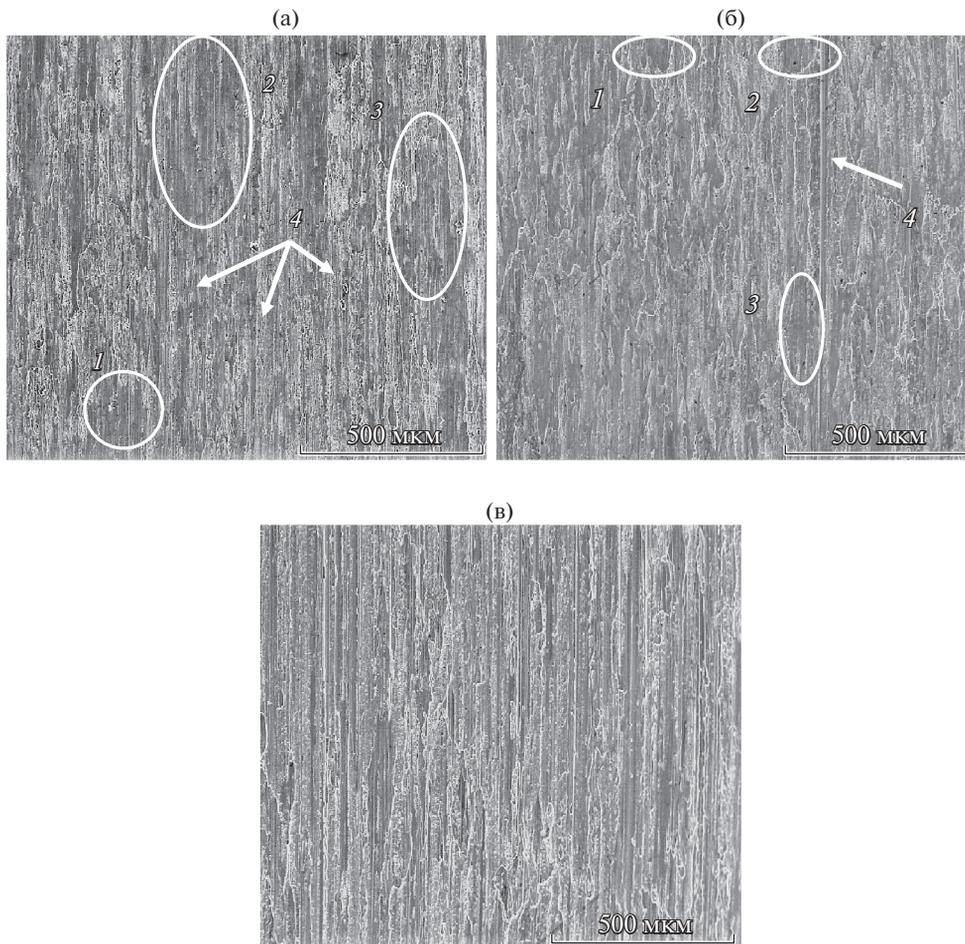
ходы: 1, 5, 25, 51, 99. Морфология обработанной поверхности после прохода 1 свидетельствует о достаточно высоком адгезионном взаимодействии титанового сплава с абразивным инструментом (рис. 2а).

Тем не менее, на поверхности можно выделить более чистые участки, например 1, 2, 3 и др. Достаточно много царапин, оставленных относительно чистыми вершинами зерен, например, царапины, выделенные стрелками 4. Проход 5 выбран также на этапе приработки и соответствует максимальному значению силы резания, после которого наступает существенное снижение. Инструмент переходит в другой режим работы с преимущественным самозатачиванием. Состояние обработанной поверхности на проходе 5 (рис. 2б) свидетельствует о более высокой интенсивности взаимодействия пары титановый сплав—абразивный инструмент по сравнению проходом 1. Практически вся поверхность образца на проходе 5 покрыта размазанным металлом с единичными царапинами, оставленными более чистыми вершинами зерен. Более чистые участки поверхности уменьшены в размерах, например, 1–3. Редко встречаются различимые царапины, оставленные относительно чистыми вершинами зерен, например, 4.

На проходе 25 получена минимальная сила резания (рис. 1). Морфология обработанной поверхности свидетельствует о снижении интенсивности адгезионного взаимодействия металла с абразивным инструментом (рис. 2в). На поверхности возрастает число царапин, оставленных более чистыми вершинами зерен и участков обработанной поверхности без налипшего металла.

Начиная с проходов 41–43, составляющие силы резания возрастают (рис. 1), что свидетельствует о переходе инструмента из режима равновероятного затупления-самозатачивания в режим более выраженного затупления. Проход 51 находится в середине этапа затупления, где наблюдается небольшой рост силы резания. Состояния обработанных поверхностей, сформированных на проходах 51 и 25, отличаются не столь существенно. Тем не менее, можно говорить о тенденции к увеличению адгезионного взаимодействия, что сопровождается увеличением налипания металла на вершины зерен рабочей поверхности круга и более выраженным переносом металла с вершин зерен на обработанную поверхность.

После прохода 70 начинается вторая стабилизация силы резания, продолжающаяся вплоть до завершения обработки. В связи с тем, что исследования морфологии прове-



**Рис. 2.** Морфология обработанной поверхности в различные периоды шлифования: (а) – проход 1; (б) – проход 5; (в) – проход 25.

дены для поверхностей, полученных на нечетных проходах, поверхность последнего образца также сформирована на предпоследнем 99 проходе стола при относительно стабильных значениях составляющих силы резания. Существенных отличий в морфологии поверхностей, полученных на проходах 51 и 99 не установлено.

**Шаржирование обработанной поверхности продуктами износа абразивного инструмента.** В процессе исследования морфологии шлифованной поверхности титанового сплава обнаружены посторонние включения, внедренные в металл, например, рис. 3а. Химический состав включений определяли методом рентгеноспектрального анализа в точке 1.

На спектрограмме получены пики линий рентгеновского характеристического излучения шести химических элементов: С, Al, Si, Zr, Mo, Ti (рис. 3б). По оси ординат дана интенсивность спектра характеристического рентгеновского излучения  $N$ , по оси абсцисс – энергия активации  $E$ . Для определения химической формулы объекта внедрения химический состав представлен в атомных процентах (рис. 3в). Наиболь-

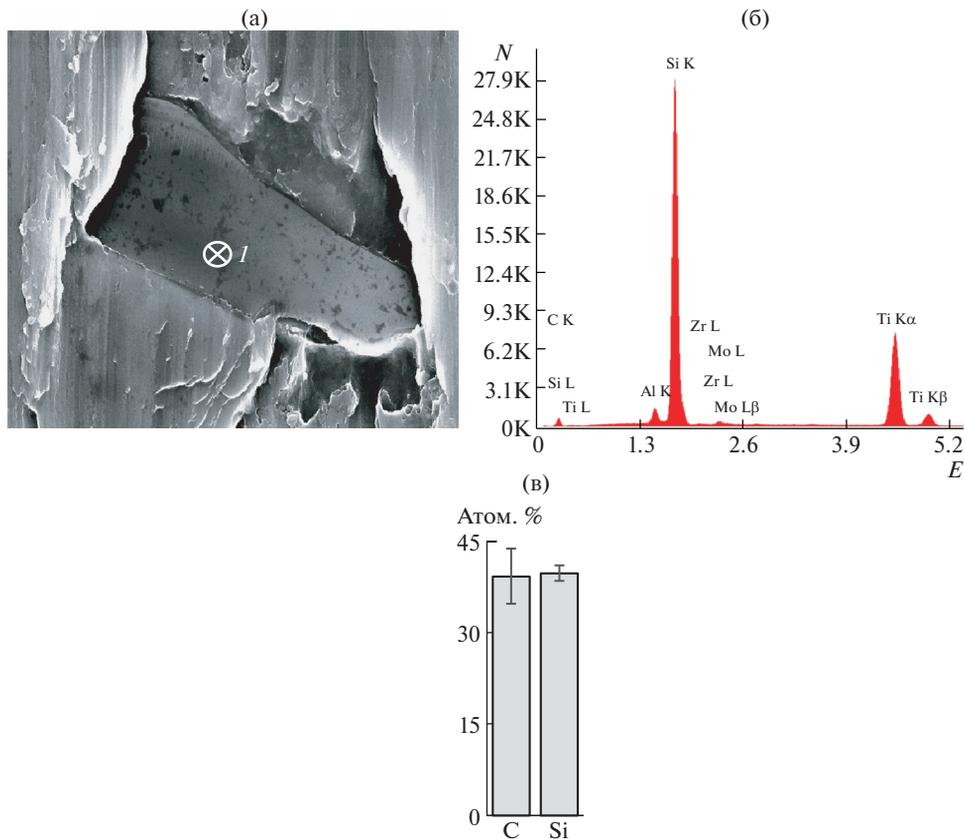


Рис. 3. Кристалл карбида кремния (а), спектрограмма (б) и химический состав (в).

шую долю имеют атомы углерода и кремния, соответственно,  $39.2 \pm 4.5$  атом. % и  $39.7 \pm 1.3$  атом. %. С учетом доверительных интервалов средние атомные доли углерода и кремния можно считать одинаковыми (различие незначимо), что соответствует химической формуле абразивного материала шлифовального круга – SiC (карбид кремния).

Третьим элементом по содержанию атомов является титан:  $2.0 \pm 0.4$  атом. %. В небольших количествах присутствуют атомы Al, Zr и Mo, относящихся к числу основных легирующих элементов титанового сплава ВТ9 (ГОСТ 19807-91). Присутствие титана и основных легирующих элементов на кристалле карбида кремния свидетельствует о переносе титанового сплава на поверхность абразивного материала, что в данном случае вполне обосновано.

Изображение объектов на рис. 4а получено в обратно рассеянных электронах. Коэффициент отражения электронов прямо пропорционален среднему атомному номеру матрицы, поэтому более светлые области на изображении соответствуют фазам с большим средним атомным номером. На светлом фоне титанового сплава (основной элемент титан, атомный номер 22) выделяется группа объектов темно-серого и почти черного цветов. Фотография свидетельствует о существенной разнице атомных номеров титанового сплава и продуктов внедрения, состоящих из химических элементов с меньшим атомным номером.

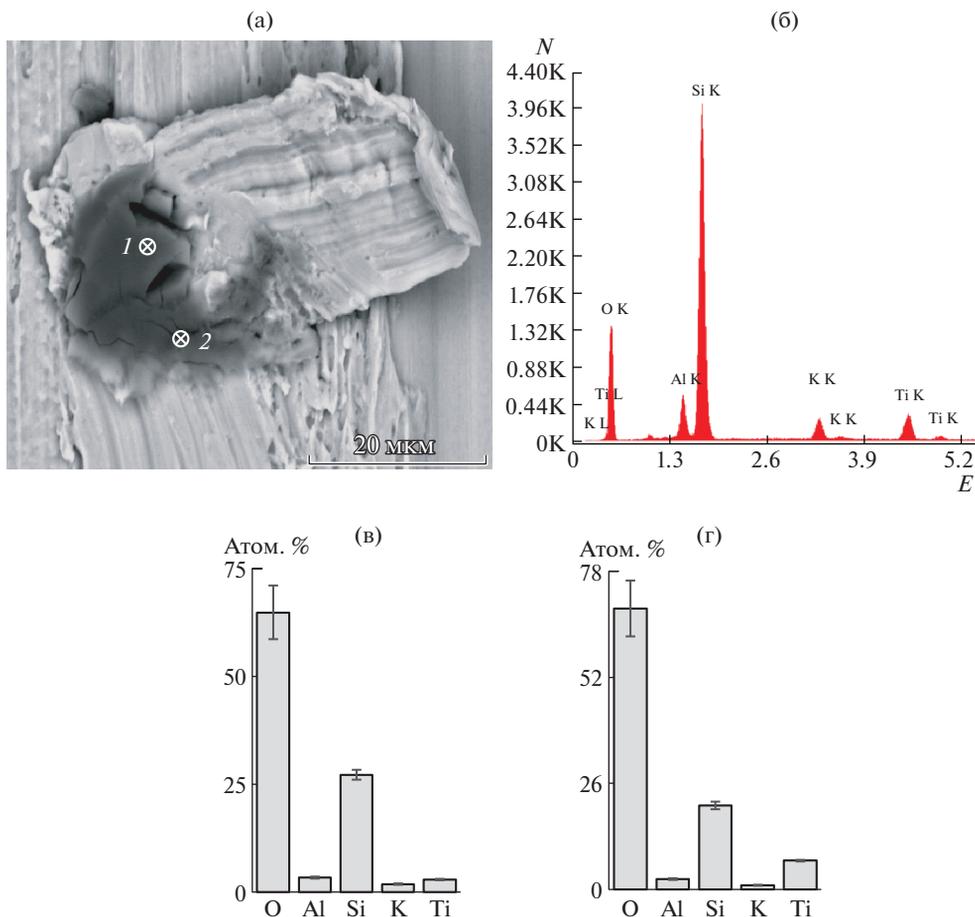


Рис. 4. Внедренный фрагмент связки шлифовального круга (а), спектрограмма (б) и диаграммы химических составов в точках 1 (в) и 2 (г).

Основными продуктами износа рассматриваемого абразивного инструмента являются карбид кремния, керамическая связка и их сочетание. Атомные номера химических элементов карбида кремния: Si – 14 и C – 6; средний атомный номер – 10. Атомные номера основных химических элементов керамической связки K10: O – 8; Si – 14; Al – 13; K – 19. Средний атомный номер связки с учетом атомной доли основных химических элементов – 11. Темный цвет объектов внедрения согласуется со средними атомными номерами предполагаемых объектов внедрения (рис. 4а).

Химический состав объектов определяли в точках 1 и 2. Спектрограммы свидетельствуют о наличии в составе объектов кислорода, кремния, алюминия и калия (на рис. 4б в качестве примера приведена одна спектрограмма). Концентрация атомов O, Si и K в точках 1 и 2 соответствует их содержанию в связке. В табл. 1 приведен химический состав по основным химическим элементам компонентов связки [18], представленный в атомных долях.

**Количественная оценка интенсивности переноса материала абразивного инструмента на обработанную поверхность.** Учитывая возможность влияния переноса продуктов

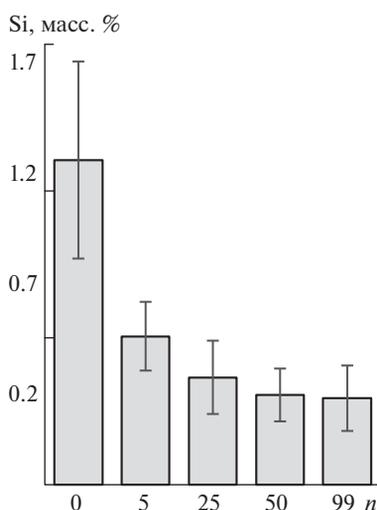
**Таблица 1.** Химический состав связки марки К10 (фрагмент), Атом. %

О	Si	Al	К	В	Na	Остальные
56.2–68.5	20.4–22.2	6.2–10.0	2.0–3.8	1.8–2.8	1.2–2.2	1.1–1.5

износа абразивного инструмента на свойства поверхности титанового сплава в результате различных форм взаимодействия (адгезионное, химическое, диффузионное, механическое), дана оценка суммарному переносу. Суммарный перенос оценивали по содержанию наиболее значимого и удобного с методической точки зрения химического элемента. При шлифовании инструментом из SiC в качестве такого элемента целесообразно использовать кремний [11, 17]. Массовая доля атомов кремния в абразивном материале (карбид кремния) около 70%, в связке абразивного инструмента – около 28%. В титановом сплаве массовая доля кремния не более 0.35% (ГОСТ 19807-91).

Массовую долю атомов кремния на обработанной поверхности определяли в различные периоды шлифования в зависимости от числа проходов (рис. 5). Наибольшая концентрация кремния получена на первом проходе – 1.3 масс. %, по мере увеличения числа проходов стола массовая доля атомов кремния снижается. В диапазоне проходов 1–5 концентрация снизилась в 1.8 раза, от 5 к 25 проходу – еще на 25%. Массовые доли кремния на 25 и 51 проходах отличаются незначимо. Незначимо различие средних концентраций массовых долей кремния на 51 и 99 проходах.

Основная причина наиболее существенного роста массовой доли кремния на первом проходе обусловлена влиянием правки шлифовального круга. При механическом воздействии алмазной иглы на вершины зерен шлифовального круга происходит скалывание части кристалла карбида кремния. В оставшейся части возможно образование трещин, снижающих прочность абразивного материала. Образование трещин возможно и в материале связки, соединяющей зерно с абразивным инструментом. При последующем контакте такого зерна с обрабатываемым материалом происходит скалывание поврежденных фрагментов кристаллов абразивного инструмента и связки, или вырывание зерна из связки. Подобная закономерность наблюдается на операции глубинного шлифования с непрерывной правкой шлифовального круга алмаз-



**Рис. 5.** Изменение массовой доли атомов кремния Si от числа проходов *n*.

ным роликом [4, 17]. Сколовшиеся части абразивных зерен или вырванные зерна внедряются в обрабатываемую поверхность заготовки. В результате контакта отделившегося абразивного материала и связки с другими вершинами зерен шлифовального круга возможно вдавливание кристаллов в обрабатываемый металл и дополнительное их дробление.

После начального этапа приработки инструмента, на котором происходит отделение поврежденных зерен, перенос материала абразивного инструмента снижается, достигая минимальных значений на этапе относительно стабильной работы абразивного инструмента в режиме затупления или частичного самозатачивания. Минимальная концентрация кремния в рассмотренном примере на 30% выше максимальной концентрации, установленной ГОСТ 19807-91.

Учитывая, что кристаллы абразивного материала и стекловидной связки, внедренные в обработанную поверхность, являются концентраторами напряжений, снижающими усталостную прочность материала, особенно, при эксплуатации изделий в условиях знакопеременных нагрузок [12], результаты исследований необходимо учитывать при разработке технологического процесса шлифования ответственных деталей из титановых сплавов.

**Выводы. 1.** Морфология обработанной поверхности после первого прохода свидетельствует об интенсивном адгезионном взаимодействии титанового сплава с абразивным инструментом. На проходе 5 при максимальном значении составляющих силы резания интенсивность адгезионного взаимодействия возрастает. На проходе 25, где составляющие силы резания по сравнению с проходом 5 снижаются на 25%, и инструмент начинает работать в режиме равновероятного затупления—самозатачивания, интенсивность адгезионного взаимодействия титанового сплава с абразивным инструментом снижается. Увеличение составляющих силы резания на 5–9% в интервале до 80 прохода и последующая вторая стабилизация силы резания не оказали значимого влияния на морфологию обработанной поверхности. **2.** На поверхности титанового сплава после шлифования кругом из карбида кремния на керамической связке обнаружены посторонние включения. Методом точечного рентгеноспектрального анализа установлено, что посторонние включения являются продуктами износа абразивного инструмента — кристаллами карбида кремния и керамической связкой. Продукты износа абразивного инструмента частично или полностью вдавлены в обработанную поверхность. **3.** Наибольший перенос материала абразивного инструмента происходит непосредственно после правки на первом проходе. Средняя массовая доля атомов кремния достигает 1.3%. На проходе 5, где сила резания максимальна, содержание кремния снижается почти в 1.8 раза, на проходе 25 — еще на 25%. Концентрации кремния на последующих проходах не отличаются от концентрации, полученной на 25-м проходе.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каширин В.В., Бурханова А.А., Филатов А.А.* Опыт и перспективы применения титановых сплавов в инновационных разработках ОАО “ОКБ Сухого” // Титан. 2012. № 1 (35). С. 42.
2. *Gialanella S., Malandrucolo A.* Aerospace Alloys. Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering. Cham, Switzerland, 2020. 570 p.
3. *Клауч Д.Н., Овсенко А.Н., Овумян Г.Г. и др.* Технологические методы повышения качества изготовления и ресурса работы турбинных лопаток // Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. Магнитогорск. 2008. № 4. С. 49.

4. Носенко С.В., Носенко В.А., Кременецкий Л.Л. Влияние правки абразивного инструмента на состояние рельефа обработанной поверхности титанового сплава при встречном глубинном шлифовании // Вестник машиностроения. 2014. № 7. С. 64.
5. Garbacz H., Wieceński P., Kuczyńska D., Kubacka D., Kurzydłowski K.J. The effect of grain size on the surface properties of titanium grade 2 after different treatments // Surface and Coatings Technology. 2018. V. 335. P. 13.
6. Zhao T., Yaoyao S., Laakso S., Jinming Z. Investigation of the Effect of Grinding Parameters on Surface Quality in Grinding of TC4 Titanium Alloy // Procedia Manufacturing. 2017. V. 11. P. 2131.
7. Справочник технолога / Под общ. ред. А.Г. Суслова. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 800 с.
8. Biao Z., Wenfeng D., Yi Z., Honghua S., Jiuhua X. Effect of grain wear on material removal behaviour during grinding of Ti-6Al-4V titanium alloy with single aggregated cBN grain // Ceramics International. 2019. V. 45. P. 14842.
9. Klocke F., Soo S., Karpuschewski B.D., Elfizy A., Tönissen S. Abrasive machining of advanced aerospace alloys and composites // CIRP Annals. 2018. V. 64 (2). P. 581.
10. Носенко В.А. К вопросу об интенсивности контактного взаимодействия *d*-переходных металлов с карбидом кремния при шлифовании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 5. С. 78.
11. Носенко В.А., Фетисов А.В., Сердюков Н.Д. Морфология и химический состав поверхности титанового сплава после шлифования кругом из карбида кремния // Научные технологии в машиностроении. 2019. № 12 (102). С. 22.
12. Dwyer-Joyce R.S. The life cycle of a debris particle // Tribol. Lett. 2005. V. 307. P. 681.
13. Fowler G., Shipway P.H., Pashby I.R. A technical note on grit embedment following abrasive water-jet milling of a titanium alloy // Journal of Materials Processing Technology. 2005. V. 159. P. 356.
14. Niranjana C.A., Srinivas S., Ramachandra M. Experimental investigations on depth of penetration and surface integrity in AZ91/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nano-composites cut by abrasive water jet // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2020. V. 107. P. 747.
15. Quing M., Wenfeng D., Yulong G., Jiuhua X. Comparative investigation on wear behavior of brown alumina and microcrystalline alumina abrasive wheels during creep feed grinding of different nickel-based superalloys // Wear. 2019. V. 426–427. P. 1624.
16. Novovic D., Aspinwall D.K., Dewes R.C., Bowen P., Griffiths B. The effect of surface and subsurface condition on the fatigue life of Ti-25V-15Cr-2Al-0.2C %wt alloy // CIRP Annals-Manufacturing Technology. 2016. V. 65. P. 523.
17. Nosenko S.V., Nosenko V.A., Koryazhkin A.A. The effect of the operating speed and wheel characteristics on the surface quality at creep-feed grinding titanium alloys // Solid State Phenomena. 2018. V. 284. P. 369.
18. Гаршин А.П., Федотова С.М. Абразивные материалы и инструменты. Технология производства / Под общ. ред. А.П. Гаршина. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 1009 с.

---

---

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 54.03;54.05

**ПОЛУЧЕНИЕ НАНОЧАСТИЦ КРАХМАЛА  
С ПОМОЩЬЮ ИНТЕНСИФИЦИРУЮЩИХ ВОЛНОВЫХ  
РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ****© 2022 г. С. Р. Ганиев<sup>1</sup>, В. П. Касилов<sup>1</sup>, О. Н. Кислогубова<sup>1,\*</sup>,  
О. А. Бутикова<sup>1</sup>, Н. Е. Кочкина<sup>1,2</sup>**<sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благодрава РАН, Москва, Россия*<sup>2</sup>*Институт химии растворов им. Г.А. Крестова РАН, Иваново, Россия**\*e-mail: kobjakovinka@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.08.2021 г.

После доработки 07.10.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

В настоящей статье наночастицы крахмала получены методом осаждения, интенсифицированным с помощью волновых резонансных воздействий. Образование наночастиц крахмала подтверждено данными динамического рассеяния света, сканирующей электронной микроскопии и рентгенофазового анализа. Показано, что сформированные наночастицы крахмала имеют сферическую форму и диаметр от 28 до 160 нм. Полученные результаты можно использовать при создании новых энерго- и ресурсосберегающих методов формирования функциональных наночастиц крахмала.

*Ключевые слова:* волновые воздействия, наночастицы крахмала, метод осаждения

**DOI:** 10.31857/S0235711922010035

Наночастицы крахмала (НЧК) представляют собой функциональный материал, для получения которого в качестве источника сырья используют экологически чистый, широкодоступный, биосовместимый и возобновляемый природный биополимер [1]. НЧК находят применение в пищевой промышленности в качестве стабилизаторов эмульсий [2, 3], для получения биоразлагаемых упаковочных материалов в качестве наполнителей [4], улучшающих их барьерные свойства, способность к биодegradации и физико-механические характеристики [5–8], в косметологии и медицине для повышения биодоступности слаборастворимых биологически активных веществ [9–12]. Функциональные свойства НЧК во многом определяются их размерами, которые в свою очередь существенно зависят от способа получения НЧК.

Существует ряд методов получения НЧК, которые подразделяются на подходы “top-down” и “bottom-up”. Технология “top-down” включает в себя различные способы расщепления крахмальных гранул, например, путем их кислотного, щелочного или ферментативного гидролиза, а также механоиницируемой деструкции. Наиболее распространенным способом получения НЧК является кислотный гидролиз, который заключается в двухстадийной обработке крахмала разбавленным раствором серной кислоты [13]. Метод требует больших временных затрат (до 40 суток) [14], обеспечивает низкий процент выхода получаемых наночастиц, а также оказывает негативное влияние на окружающую среду, поэтому имеет ограниченное практическое применение. Более экологически чистым способом получения НЧК является ферментативная дegradация крахмальных гранул. Процесс аналогичен кислотному гидро-

лизу, но имеет меньшую продолжительность и отсутствие высокоагрессивных сред. Одним из основных недостатков этого метода является получение наночастиц с широким распределением по размерам, а также использование дорогостоящих ферментных препаратов [15, 16].

Недорогими, простыми в реализации и пригодными для промышленного применения считаются физические методы получения наночастиц крахмала. Эти подходы являются альтернативным решением для сокращения процесса получения НЧК, увеличения выхода НЧК и исключения этапов их очистки от продуктов гидролиза, оказывающих негативное воздействие на окружающую среду. К таким методам относятся ультразвуковая обработка [17, 18],  $\gamma$ -излучение [19], высокоскоростное измельчение с помощью шаровой мельницы [20], методы гомогенизации под высоким давлением [21] и экструзии [22]. Однако, энергозатраты при измельчении частиц с помощью чисто механических воздействий резко возрастают с повышением дисперсности полученного продукта. Поэтому получение НЧК такими методами требует применения дорогостоящего энергоемкого оборудования.

Более высокая эффективность получения полисахаридных НЧК достигается при использовании подходов “bottom-up”. Эти подходы представляют собой щадящую химическую обработку гелей крахмала, для проведения которой не требуются токсичные растворители и дополнительные энергозатраты. К ним относятся метод микроэмульсий [23] и наноосаждения [24, 25].

Процесс наноосаждения впервые описан в работе [26] и основан на постепенном добавлении разбавленного раствора полимера к осадителю или наоборот, осадителя в раствор полимера при непрерывном перемешивании, в результате чего происходит образование наноразмерных частиц полимера. Для получения НЧК в качестве осадителя чаще всего используют этанол путем его медленного прикапывания в разбавленный раствор клейстеризованного крахмала при непрерывном механическом перемешивании. Данный способ позволяет осуществлять контроль за размером формируемых НЧК путем варьирования скорости перемешивания системы дисперсия крахмала/этанол [27, 28].

Повысить эффективность процесса получения НЧК с требуемыми характеристиками позволяет сочетание методов химических и физических воздействий [29]. В частности, авторами [30] показано, что совмещение наноосаждения с ультразвуковой обработкой при формировании НЧК позволяет существенно сократить количество используемого химического реагента-осадителя.

**Цель** работы заключалась в изучении возможности формирования НЧК методом осаждения с использованием осадителя – этилового спирта при наложении волновых воздействий.

Известно [31, 32], что волновые эффекты, проявляющиеся при сформированных за счет волновых воздействий режимах течений в обрабатываемых средах в волновых аппаратах и установках, существенно интенсифицируют процессы массопереноса в жидкофазных системах, способствуют увеличению площади контакта поверхностей фаз и их взаимному проникновению.

В статье впервые проведена оценка влияния волновой обработки (волнового перемешивания) на эффективность получения НЧК, их размер и морфологию.

**Экспериментальная часть.** В исследовании применяли картофельный крахмал (ГОСТ Р 53876-2010) и этиловый спирт марки (ГОСТ 33881-2016).

На первом этапе готовили клейстер крахмала (1 масс. %) путем смешения 0.3 г крахмала с 30 мл дистиллированной воды. Затем смесь догревали до 90°C и выдерживали при заданной температуре в течение 20 мин. По истечении этого времени смесь охлаждали до комнатной температуры и далее медленно (~1 мл в мин) прикапывали к ней этанол в соотношении 1:1 при непрерывном механическом перемешивании на разработанном в НЦ НВМТ РАН волновом смесителе ВМ-58 (рис. 1) с электромеха-



**Рис. 1.** Экспериментальная установка волнового смешивания VM-58.

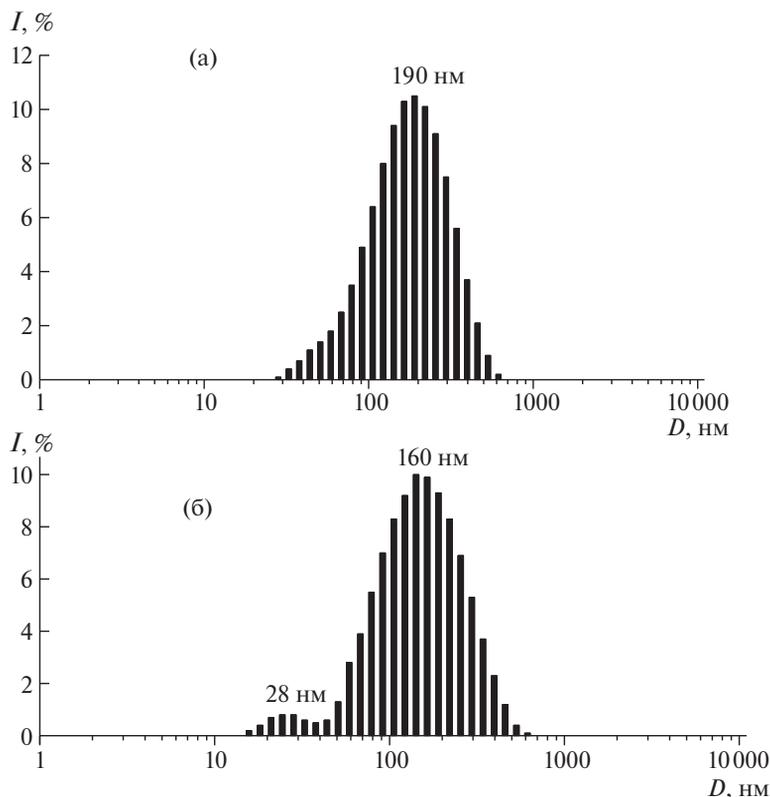
ническим резонансным генератором колебаний [33, 34], который обеспечивал формирование в обрабатываемой среде значительных знакопеременных сдвиговых напряжений, создаваемых сочетанием волн сдвиговых деформаций с циркуляционным течением среды. Такая установка позволяет осуществлять процесс смешения в реакторах с различной геометрией в зависимости от поставленных задач и физических свойств обрабатываемой среды. Настоящий эксперимент проводился в расположенном под наклоном  $45^\circ$  рабочем реакторе с гладкими стенками в режиме вращения с наложением крутильных колебаний.

Режим волновой обработки был следующим: частота колебаний 63.54 Гц; амплитуда колебаний на границе формирования волны 5.5 мм; напряжение 120 В; ток 10.5 А; мощность 420 Вт; частота вращения рабочей емкости 1.56 Гц (46 об/мин). Для сравнения были получены образцы НЧК с использованием лабораторной лопастной мешалки ER 10 при скорости вращения 1000 об/мин. НЧК выделяли центрифугированием при 6000 об/мин в течение 10 мин. Образовавшийся супернатант удаляли, а наночастицы отделяли в виде осадка и сушили методом лиофилизации. Для этого образцы предварительно замораживали при температуре  $-45^\circ\text{C}$  в течение 48 часов, а затем подвергали лиофильной сушке под давлением 6 Па и температуре  $-52^\circ\text{C}$  в течение 48 часов.

Размер НЧК определяли методом динамического рассеяния света (ДРС) (длина волны излучения 633 нм) на приборе Zetasizer Nano ZS (Malvern Instruments Ltd, UK).

Морфологию образцов НЧК оценивали по фотографиям, полученным с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) Quattro S (Thermo Fisher Scientific, Чехия).

Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили на дифрактометре Bruker D2 Phaser (Bruker-AXS GmbH, Германия), с излучением  $\text{CuK}\alpha 1$  ( $\lambda = 1.5406 \text{ \AA}$ ) при комнатной температуре ( $23 \pm 1^\circ\text{C}$ ).



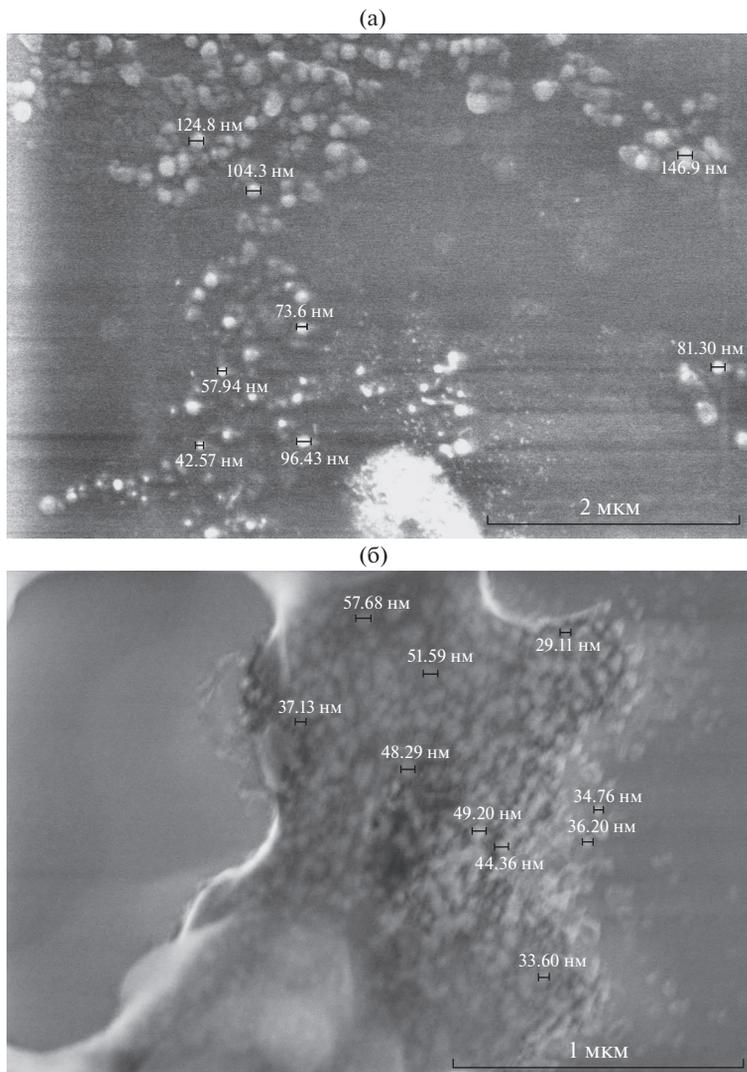
**Рис. 2.** Распределение по размерам НЧК, полученных традиционным способом с помощью лопастной мешалки (а) и с использованием волновых резонансных воздействий (б).

**Обсуждение результатов.** На рис. 2 представлены результаты исследования образцов НЧК методом ДРС.

Как видно, распределение по размерам НЧК, полученных методом осаждения с помощью механической мешалки ER 10 является мономодальным. Модальное значение диаметра НЧК составляет 190 нм (рис. 2а). Применение интенсифицирующих волновых воздействий на стадии прикапывания этанола к клейтеризованной крахмальной суспензии приводит к уменьшению размера формируемых НЧК. Рассматриваемый образец характеризуется бимодальным распределением по диаметрам частиц с модами соответствующими гидродинамическим диаметрам 28 и 160 нм (рис. 2б).

Фотографии НЧК, полученные методом СЭМ представлены на рис. 3. Они демонстрируют, что НЧК в обоих образцах имеют сферическую форму. Размеры НЧК, определенные по результатам СЭМ-анализа, хорошо согласуются с данными ДРС.

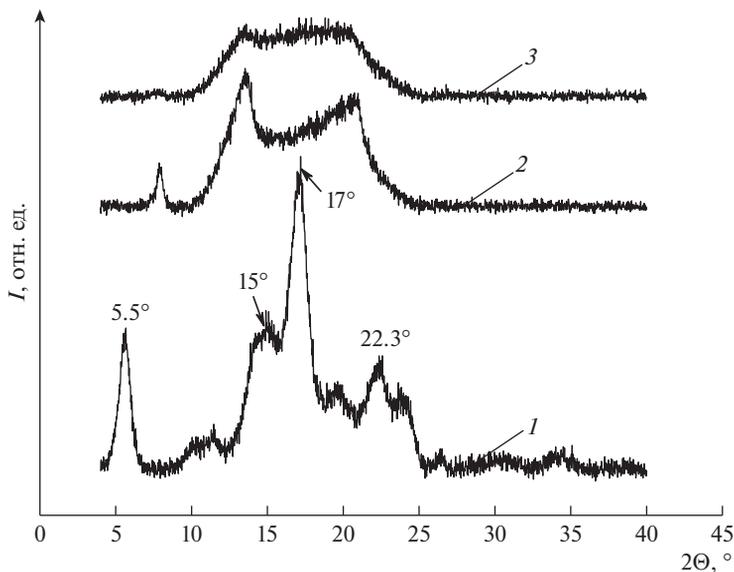
На рис. 4 показаны рентгенограммы полученных образцов НЧК. Диффрактограмма исходного крахмала (рис. 4, кривая 1) имеет набор пиков при углах  $2\theta = 5.5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $17^\circ$  и  $22.3^\circ$  [35, 36], характерных для кристаллической структуры (тип В) данного биополимера. Отличительными чертами рентгенограмм НЧК являются исчезновение максимумов при  $2\theta = 5.5^\circ$  и  $22.3^\circ$ , а также существенное снижение интенсивности и уширение дифракционных пиков при  $2\theta = 15^\circ$  и  $17^\circ$  (рис. 4, кривые 2, 3). Полученные



**Рис. 3.** Сканирующая электронная микроскопия образцов НЧК, полученных традиционным способом с помощью лопастной мешалки (а) и с использованием волновых резонансных воздействий (б).

результаты хорошо согласуются с данными рентгенофазового анализа НЧК, представленными в работах [37, 38].

Таким образом, в статье впервые показана возможность получения НЧК путем осаждения этанолом с использованием волновой технологии [32, 33]. Сформированные НЧК охарактеризованы методами ДРС, СЭМ и РФА. Установлено, что в результате использования волновых воздействий в ходе формирования НЧК наблюдается уменьшение размера последних в сравнении с НЧК, полученных путем непрерывного механического перемешивания системы крахмал/этанол с помощью лопастной мешалки. Представленные результаты являются отправной точкой разработки нового волново-



**Рис. 4.** Рентгенограммы картофельного крахмала (1) и НЧК, полученных традиционным способом с помощью лопастной мешалки (2) и с использованием волновых резонансных воздействий (3).

го высокоэффективного, ресурсо- и энергосберегающего способа получения НЧК, в том числе в промышленных масштабах.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Центру коллективного пользования научным оборудованием "Верхневолжский региональный центр физико-химических исследований" за анализ образцов НЧК.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rodrigues A., Emeje M.* Recent applications of starch derivatives in nanodrug delivery // *Carbohydr. Polym.* 2012. V. 87. P. 987.
2. *Lu X., Xiao J., Huang Q.* Pickering emulsions stabilized by media-milled starch particles // *Food Res. Int.* 2018. V. 105. P. 140.
3. *Shao P., Zhang H., Niu B. et al.* Physical stabilities of taro starch nanoparticles stabilized pickering emulsions and the potential application of encapsulated tea polyphenols // *Int. J. Biol. Macromol.* 2018. V. 118. P. 2032.
4. *Shi A., Wang L., Li D. et al.* Characterization of starch films containing starch nanoparticles: Part 1: Physical and mechanical properties // *Carbohydr. Polym.* 2013. V. 96. № 2. P. 593.
5. *Dai L., Qiu C., Xiong L. et al.* Characterisation of corn starch-based films reinforced with taro starch nanoparticles // *Food Chemistry.* 2015. V. 174. P. 82.
6. *Simi C.K., Abraham T.E.* Hydrophobic grafted and cross-linked starch nanoparticles for drug delivery // *Bioprocess and Biosystems Engineering.* 2007. V. 30. № 3. P. 173.

7. *Santana J.S., Costa K. de Carvalho, Rodrigues P.R. et al.* Morphological, barrier, and mechanical properties of cassava starch films reinforced with cellulose and starch nanoparticles // *J. Appl. Polym. Sci.* 2019. V. 136. P. 1.
8. *Oliveira A.V., da Silva A.P.M., Barros M.O. et al.* Nanocomposite films from mango kernel or corn starch with starch nanocrystals // *Starch/Staerke.* 2018. V. 70. P. 1.
9. *Caldonazo A., Almeida S.L., Bonetti A.F. et al.* Pharmaceutical applications of starch nanoparticles: A scoping review // *Int. J. Biol. Macromol.* 2021. V. 181. P. 697.
10. *Moorthy S.N., Rajasekharan K.N.* Preparation of cassava starch nanoparticles and their application as a carrier system for curcumin delivery // *Int. J. Nanotechnol. Appl.* 2011. V. 5. P. 193.
11. *Santander-Ortega M.J., Stauner T., Loretz B. et al.* Nanoparticles made from novel starch derivatives for transdermal drug delivery // *Journal of Controlled Release.* 2010. V. 141. P. 85.
12. *El-Feky G.S., El-Rafie M., El-Sheikh M. et al.* Utilization of crosslinked starch nanoparticles as a carrier for indomethacin and acyclovir drugs // *Journal of Nanomedicine & Nanotechnology.* 2015. № 6 (1). P. 1.
13. *Shahrodin N.S., Rahmat A.R., Arsad A.* Synthesis and characterisation of cassava starch nanocrystals by hydrolysis method // *Adv. Mater.* 2015. V. 1113. P. 446.
14. *Le Corre D., Bras J., Dufresne A.* Starch nanoparticles: A review // *Biomacromolecules.* 2010. V. 11. № 5. P. 1139.
15. *Le Corre D., Vahanian E., Dufresne A. et al.* Enzymatic pretreatment for preparing starch nanocrystals // *Biomacromolecules.* 2012. V. 13. № 1. P. 132.
16. *Lin X., Sun S., Wang B. et al.* Structural and physicochemical properties of lotus seed starch nanoparticles // *Int. J. Biol. Macromol.* 2020. V. 157. P. 240.
17. *Haaj S.B., Magnin A., Périer C. et al.* Starch nanoparticles formation via high power ultrasonication // *Carbohydr. Polym.* 2013. V. 92. № 2. P. 1625.
18. *Kim J., Han D., Kweon J. et al.* Effect of ultrasonic treatments on nanoparticle preparation of acid-hydrolyzed waxy maize starch // *Carbohydr. Polym.* 2013. V. 93. № 2. P. 582.
19. *Lamanna M., Morales N.J., Garcia N.L. et al.* Development and characterization of starch nanoparticles by gamma radiation: Potential application as starch matrix filler // *Carbohydr. Polym.* 2013. V. 97. № 1. P. 90.
20. *Chen C.J., Shen Y.C., Yeh A.I.* Physico-chemical characteristics of media-milled corn starch // *J. Agric. Food Chem.* 2010. V. 58. № 16. P. 9083.
21. *Liu D., Wu Q., Chen H. et al.* Transitional properties of starch colloid with particle size reduction from micro- to nanometer // *Journal of Colloid and Interface Science.* 2009. V. 339. № 1. P. 117.
22. *Song D., Thio Y.S., Deng Y.* Starch nanoparticle formation via reactive extrusion and related mechanism study // *Carbohydr. Polym.* 2011. V. 85. № 1. P. 208.
23. *Chin S.F., Azman A., Pang S.C.* Size controlled synthesis of starch nanoparticles by a microemulsion method // *Journal of Nanomaterials.* 2014. V. 2014. № 9. P. 9.
24. *Tan Y., Xu K., Li L. et al.* Fabrication of size-controlled starch-based nanospheres by nanoprecipitation // *ACS Applied Materials Interfaces.* 2009. V. 1. № 4. P. 956.
25. *Chin S.F., Pang S.C., Tay S.H.* Size controlled synthesis of starch nanoparticles by a simple nanoprecipitation method // *Carbohydr. Polym.* 2011. V. 86. № 4. P. 1817.
26. *Fessi H., Puisieux F., Devissaguet J.P. et al.* Nanocapsule formation by interfacial polymer deposition following solvent displacement // *Int. J. Pharm.* 1989. V. 55. № 1. P. R1.
27. *Qin Y., Liu C., Jiang S. et al.* Characterization of starch nanoparticles prepared by nanoprecipitation: influence of amylose content and starch type // *Ind. Crop. Prod.* 2016. V. 87. P. 182.
28. *Ge Sh., Xiong L., Li M. et al.* Characterizations of Pickering emulsions stabilized by starch nanoparticles: Influence of starch variety and particle size // *Food Chemistry.* 2017. V. 234. P. 339.
29. *Manal A.E.-S.* New technique in starch nanoparticles synthesis // *Carbohydr. Polym.* 2017. V. 176. P. 214.
30. *Hedayati S., Niakousari M., Mohsenpour Z.* Production of tapioca starch nanoparticles by nanoprecipitation-sonication treatment // *Int. J. Biol. Macromole.* 2020. V. 143. P. 136.
31. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. М.: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 712 с.
32. *Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р., Касилов В.П., Пустовгар А.П.* Волновые технологии в инновационном машиностроении. М.: Институт компьютерных исследований, 2014. 106 с.

33. *Касилов В.П., Курмев Д.В.* Волновые технологические машины и аппараты с электромеханическими резонансными генераторами колебаний и волн. В книге: *Машины, технологии и материалы для современного машиностроения. Сборник тезисов конференции.* 2018. С. 76.
34. *Касилов В.П.* Электромеханические резонансные генераторы колебаний. Анализ рабочего процесса // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2016. № 2. С. 33.
35. *Cheetham N.W.H., Tao L.* Variation in crystalline type with amylose content in maize starch granules: an X-ray powder diffraction study // *Carbohydr. Polym.* 1998. V. 36. P. 277.
36. *Jane J.-L., Wong K.-S., Andrew E.* Branch-structure difference in starches of A- and B-type X-ray patterns revealed by their naegeli dextrans // *Carbohydr. Res.* 1997. V. 300. № 3. P. 219.
37. *Wu J., Huang Y., Yao R. et al.* Preparation and characterization of starch nanoparticles from potato starch by combined solid-state acid-catalyzed hydrolysis and nanoprecipitation // *Starch/Stärke.* 2019. V. 71. P. 1900095.
38. *Kim H.Y., Lee J.H., Kim J.Y. et al.* Characterization of nanoparticles prepared by acid hydrolysis of various starches // *Starch/Stärke.* 2012. V. 64. P. 367.

---

---

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 678.09

**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛЕТЕННЫХ СЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
АВИАКОСМИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**© 2022 г. С. А. Самипур<sup>1,\*</sup>, В. В. Батраков<sup>2</sup><sup>1</sup>*Университет имени Шахида Бехешти, Тегеран, Иран*<sup>2</sup>*Казанский национальный исследовательский технологический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия**\*e-mail: s\_samipour@sbu.ac.ir*

Поступила в редакцию 30.08.2021 г.

После доработки 08.10.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

В статье обсуждается аналитический расчет свойств жесткости плетеной сетчатой структуры для достижения двух целей. Первая – получить исходные данные для дальнейших расчетов с использованием МКЭ; вторая – предварительный выбор параметров плетеной сетчатой конструкции. Для достижения этих целей разработаны аналитические модели. Модели будут анализировать микроструктурное поведение плетеных композитов для оценки их механических свойств. Таким образом, модели можно проверить на экспериментальных данных. Этот подход основан на первичном предположении о периодическом распределении волокон в композите в двух масштабах, чтобы связать механические свойства композита с отдельными фазами. Первая шкала относится к ровнице, который представляет собой однонаправленный армированный волокном композит. Мы определяем механические свойства ровницы в этом масштабе. Вторая шкала относится к единичной ячейке в оплетке, поэтому окончательные механические свойства композита получаются в этой шкале. Далее описаны микромеханические и мезомеханические модели. Эти модели разработаны для анализа плетеных композитов и определения механических свойств зон переплетения сетчатых конструкций.

*Ключевые слова:* аэрокосмическая конструкция, композиционный материал, сетчатая структура, радиальное плетение

**DOI:** 10.31857/S0235711922010096

В работах многих авторов, в том числе С.В. Ломова [1] подробно разработаны экспериментальные и теоретические исследования моделирования плетеных композитов. Механические свойства плетеных композитов сильно зависят от геометрии плетения. Кривизна ровницы влияет на ударпрочность, жесткость и стабильность размеров композитных плетеных конструкций [2]. Микромеханическое моделирование необходимо для описания процесса разрушения из-за существенной взаимосвязи между геометрией переплетения, жесткостью, прочностью и поглощением энергии при ударе [3]. Ф.Т. Пирс [4] предложил простую модель, в которой ровницы имеют круглое поперечное сечение. В работе [5] разработано геометрическое описание, более подходящее для плетеных конструкций. L. Chen и др. [6] рассчитали эффективные упругие свойства трехмерных плетеных композитов с использованием метода конечных многофазных элементов. J.L. Li и др. [7] предложили геометрическую модель

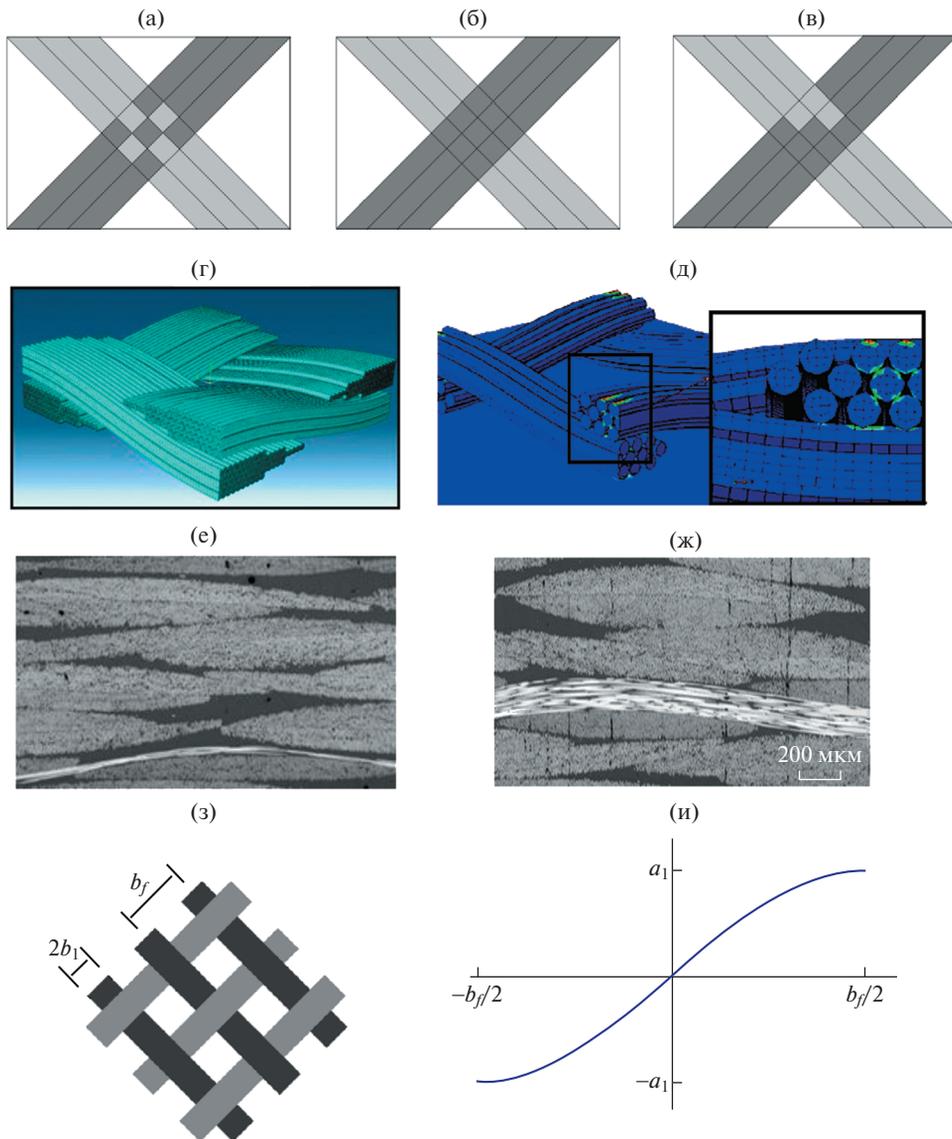


Рис. 1. Алгоритм определения конструктивных параметров СК.

структуры волокна в современных композитах и сравнили поведение при сжатии, растяжении и изгибе. R.K. Gideon и др. [8] проверили поведение композитных труб с трехмерной оплеткой на осевое сжатие с различными углами оплетки. Z.Y. Tian и др. [9] теоретически исследовали механизм разрушения трехмерных плетеных композитов при двухосном растяжении и сжимающей нагрузке. H.L. Wang и др. [10] показали влияние температуры и угла плетения на повреждение при продольном сжатии. G.D. Fang и др. [11] использовали многомасштабный метод плетения для изучения поведения прогрессирующего повреждения трехмерных плетеных композитов.

На рис. 1 представлен алгоритм определения расчетных параметров сетчатой структуры. Подходы к намотанной и плетеной конструкциям различаются из-за областей переплетения: в плетеных структурах ровницы заплетены (рис. 2а), а в намотанных – наложены друг на друга (рис. 3б, в).

Предварительно сформированная сетчатая конструкция производится путем регулярного переплетения двух групп ровниц: тех, которые всегда остаются прямыми при



**Рис. 2.** Зона переплетения трех ровниц СК: (а) – при плетении; (б), (в) – при намотке; уровни масштабирования: (г) – мезо-; (д) – микроуровень; микроскопические изображения структуры СК с объемным содержанием волокон: (е) – 54%; (ж) – 57%; (з) – параметры единичной ячейки; (и) – центральная линия ровницы.

прохождении над другими ровницами или под ними, и тех, которые изгибаются при переходе от верхней к нижней части других ровниц. Это верно лишь отчасти для плотняного переплетения, когда ровницы согнуты по длине. Кривизна ровницы – основная причина, по которой плетеный композит имеет более низкие механические свойства, чем однонаправленный. Геометрию плетения можно идеализировать с помощью полиномиальных функций: эллиптической [12], дуги [13], синуса [14].

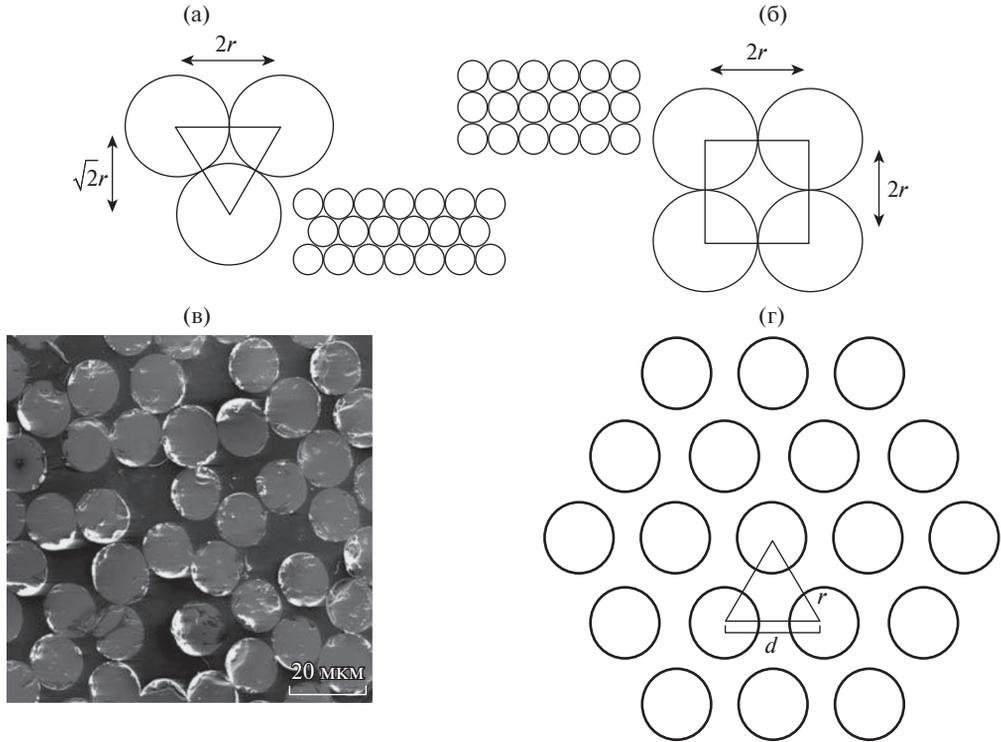


Рис. 3. Расположение волокна в ровнице: (а) – по “треугольнику”; (б) – по “квадрату”; (в) – поперечное сечение волокон КМ; (г) – идеализованная модель.

Во-первых, необходимо описать поперечное сечение, чтобы разработать аналитическую модель. Поперечное сечение ровниц зависит от объемной доли волокна и является линзовидным или уплощенным [15–17]. В нашем случае ровницы имеют одинаковые механические свойства и геометрию. Для получения гибридных композитов можно комбинировать различные свойства и материалы. Геометрию ровницы можно определить или оценить на основании изображений оптического микроскопа (рис. 2е–ж).

Рассматривается моделирование плетеной композитной единичной ячейки (ЭЯ) и моделирование отдельных ровниц, чтобы определить механические свойства СК и объемную долю волокна. Для построения полной геометрической модели ровницы используется синусоидальная функция [18]. Элементарная ячейка двухосной тканой заготовки показана на рис. 2з.

Уравнение  $y(x) = A \sin(Bx)$  описывает ось ровницы в плетеной преформе, где  $A$  и  $B$  постоянны и определяются соответствующими граничными условиями. Таким образом, его можно вычислить при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 y(x) \Big|_{x=-\frac{b_f}{2}} = -a_1; \quad y(x) \Big|_{x=\frac{b_f}{2}} = a_1; \quad \frac{\partial y(x)}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{b_f}{2}} = \frac{\partial y(x)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{b_f}{2}} = 0; \\
 y(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{b_f} x\right),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $b_f$  – расстояние между центрами ровниц;  $a_1$  – малая полуось поперечного сечения ровницы. Геометрию ровницы можно легко определить на рис. 2и.

Объемное содержание волокна в КМ – это отношение объема арматуры на элементарную ячейку к ее общему объему, которое определяется по формуле

$$v_f = \frac{4b_1}{\pi b_f} \sqrt{(a_1)^2 + (\varphi)^2} \xi \left( \frac{\pi}{b_f} \left| \frac{1}{1 + \left(\frac{\varphi}{a_1}\right)^2} \right. \right) v_{\text{fiber}}, \quad (2)$$

где  $\varphi = \frac{b_f}{\pi \cos \alpha}$ ;  $\xi$  – эллиптический интеграл второго рода;  $b_1$  – большая полуось поперечного профиля ровницы;  $\alpha$  – угол армирования;  $v_{\text{fiber}}$  – объемное содержание волокна в ровнице.

Определяется максимально возможная объемная доля волокна в монослое с помощью уравнения (2). При больших давлениях ровничные волокна могут быть распределены в виде треугольника (рис. 3а), тогда пустоты занимают только 9.31% ровницы. С учетом мезоструктур наибольшая объемная доля волокна в однослойном композите является

$$v_f = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) = 57.73\%. \quad (2.3)$$

Таким образом, это конечная объемная доля волокна, т.е. теоретически сложно добиться объемной доли волокна выше 57.73% в области переплетения.

Микроструктурное моделирование базируется на том, что, во-первых, поперечное сечение волокон является круговым, а во-вторых – схема расположения волокон не всегда является “треугольником” и “квадратом” (рис. 3в), поэтому предложена симметричная модель (рис. 3г).

В уравнении (2)  $v_{\text{fiber}}$  – неустановленный параметр. Объемная доля волокна в ровнице формируется как соотношение объема волокна к общему объему ровницы. Применяя известные свойства ровницы,  $K$  – количество волокон в ровнице, объемную долю волокна можно рассчитать как

$$v_{\text{fiber}} = K \frac{\pi^2 r_f^2}{8 a_1 b_1}, \quad (4)$$

где  $r_f$  – радиус волокна. Затем определяется объемная доля волокон в ровнице, чтобы определить расстояние между волокнами

$$v_{\text{fiber}} = \frac{\frac{\pi}{2} r_f^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} d^2} = 3.6276 \left( \frac{r_f}{d} \right)^2, \quad (5)$$

где  $d$  – расстояние между центрами волокон.

Уравнения (4) и (5) использованы для определения межосевого расстояния волокна в идеализированной модели ровницы:  $d = 1.7148 \sqrt{\frac{a_1 b_1}{K}}$ .

Есть два способа получить исходные данные, поскольку волокна расположены в ровнице случайным образом, а поперечное сечение ровницы зависит от объемной доли волокна: 1) с использованием составных изображений микроструктуры; 2) расчетным путем с учетом того, что 50% волокон имеют “треугольное” расположение, а 50%

Таблица 1

Параметры	Волокно T700S	Смола T-26
Модуль Юнга, ГПа	230	3.1
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	1800	1170

волокон имеют “квадратное” расположение в ровнице. Тогда с помощью уравнения (5):  $v_{\text{fiber}} = 0.846$ .

Далее расстояние между центрами волокон устанавливают по уравнению (5). Затем определяются размеры идеализированной волоконной модели и модули упругости однонаправленного композита с использованием комбинированной модели и плетеного композита.

В качестве примера возьмем комбинацию углеродного волокна T700S и смолы T-26. Их механические свойства приведены в таблице 1.

Взаимозависимость продольных и поперечных модулей упругости композита для однонаправленного строения от параметра  $v_{\text{fiber}}$ :  $v_{\text{fiber}} = 0.7$ ;  $E_1$ , ГПа – 162;  $E_2$ , ГПа – 7.4.

На рис. 4а представлена модель волокна, состоящего из одного волокна и смолы вокруг него. Используется энергетический метод для определения перемещения:  $X_1 = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial f} dx$ , где  $I$  – момент инерции сечения консольной балки;  $E$  – модуль упругости;  $f$  – сила, действующая на консольной балке;  $M$  – изгибающий момент (рис. 4в).

Перемещения относительно осей  $x$  и  $y$  определим как

$$\delta_x = \int_{\frac{-b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial f} \sin(\gamma) dx; \quad \delta_y = \int_{\frac{-b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial f} \cos(\gamma) dx,$$

где  $M = f(a_1 - y)$ ;  $y = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{b_f} x\right)$ ;  $I = 0.06a_t^4$  – момент инерции; где  $a_t$  – размер шестиугольника;  $\gamma = \arctg\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \arctg\left(\frac{a_1 \pi}{b_f} \cos\left(\frac{\pi}{b_f} x\right)\right)$ .

Перемещение под действием аксиальной силы определяется как

$$\Delta_x = \int_{\frac{-b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \frac{f \cos(\gamma)}{AE} \cos(\gamma) dx; \quad \Delta_y = \int_{\frac{-b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \frac{f \cos(\gamma)}{AE} \sin(\gamma) dx.$$

Модуль упругости модели изогнутого волокна определяется выражением

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{f/A}{(\delta_x + \Delta_x)/l} = \frac{fl}{(\delta_x + \Delta_x)A},$$

$$E_x = \frac{fl}{A \int_{\frac{-b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \left( \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial f} \sin(\gamma) + \frac{f \cos(\gamma)}{AE} \cos(\gamma) \right) dx}. \tag{6}$$

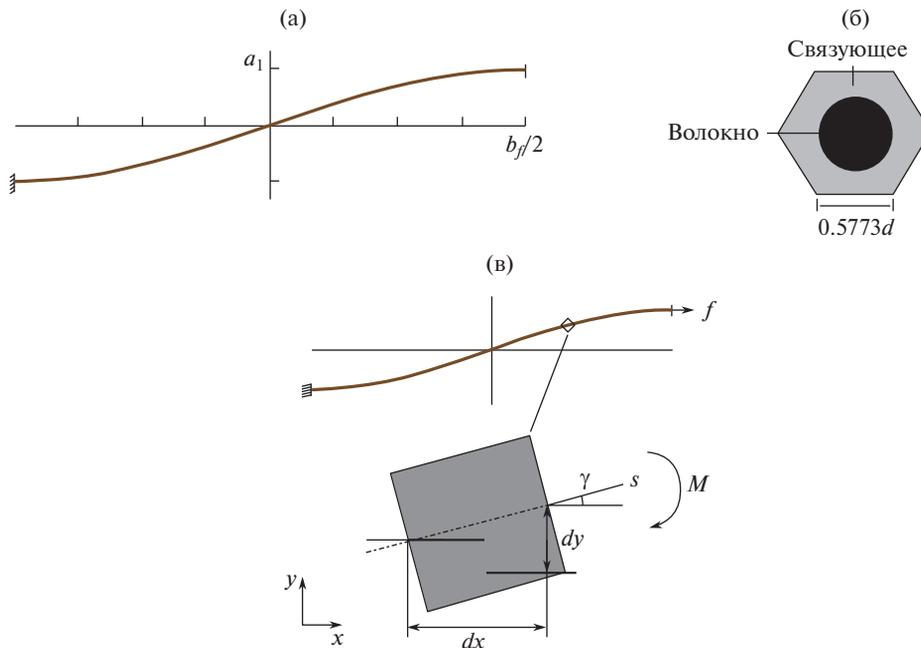


Рис. 4. Волоконная модель: (а) – идеализированная волоконная модель; (б) – ее поперечное сечение; (в) – сила и изгиб, действующий на модель волокна.

Таким образом, разработана аналитическая модель для определения модуля упругости плетеного композита. Это дает возможность определять упругие свойства областей переплетения сетчатых конструкций.

Рассмотрим аналитический метод определения модуля упругости единичной ячейки сетчатых конструкций с плетеной арматурой.

Модули упругости по осям для двухосного плетения  $\eta$  и  $\xi$  выражают как

$$E_{\eta} = E_{\eta}^f v_f + (1 - v_f) E_m; \quad E_{\xi} = E_{\xi}^f v_f + (1 - v_f) E_m,$$

где  $E_{\eta}^f$ ,  $E_{\xi}^f$  – модули упругости плетеного КМ по осям  $\eta$  и  $\xi$ , которые получаются следующим образом [16]:

$$\frac{1}{E_{\eta}^f} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{1}{E_{\xi}^f} = \frac{\sin^4 \alpha}{E_1} + \frac{\cos^4 \alpha}{E_2} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  – представляют собой аксиальный и нормальный модули упругости тканого композита, установленные по формуле (5);  $G_{12}$  – модуль сдвига;  $\nu_{12}$  – коэффициент Пуассона.

Модули упругости для трехосного плетения по осям  $\eta$  и  $\xi$  находим как

$$E_{\eta} = E_{\eta}^f v_f + (1 - v_f) E_m = E_{\eta_1}^f v_{f_1} + E_{\eta_2}^f v_{f_2} + E_{\eta_3}^f v_{f_3} + (1 - v_f) E_m,$$

$$E_{\xi} = E_{\xi}^f v_f + (1 - v_f) E_m = E_{\xi_1}^f v_{f_1} + E_{\xi_2}^f v_{f_2} + E_{\xi_3}^f v_{f_3} + (1 - v_f) E_m, \quad (7)$$

**Таблица 2**

Источник	Волокно	Смола	$\alpha$	$v_f, \%$	$E_B, \text{ГПа}$	$E_T, \text{ГПа}$	$Err, \%$
[19]	M46J	RTM-6	$0, \pm 15$	40	152.90	156.18	4.11
[20]	M46J	RTM-6	$0, \pm 45$	55	91.99	93.65	1.81

где  $E_{\eta_1}^f, E_{\eta_3}^f$  и  $E_{\xi_1}^f, E_{\xi_3}^f$  – модули упругости спиральных волокон по осям  $\eta$  и  $\xi$ ;  $E_{\eta_2}^f, E_{\xi_2}^f$  – модули упругости продольных волокон по осям  $\eta$  и  $\xi$ ;  $v_{f_2}$  – объемное содержание продольных волокон;  $v_{f_1}, v_{f_3}$  – объемное содержание спиральных волокон. Спиральные волокна расположены под углом  $\alpha$ , поэтому:

$$E_{\eta_1}^f = E_{\eta_3}^f = E_{\eta}^f; \quad E_{\eta_2}^f = E_1.$$

Как показано в табл. 2, результаты аналитического расчета модуля упругости  $E_T$  продемонстрировали высокую сходимость с результатами численных и экспериментальных исследований  $E_B$ , выполненных другими авторами. Все расчеты производились в MATLAB.

Следовательно, на основании микромеханики была разработана аналитическая модель для вычисления упругих свойств композиционных сетчатых конструкций. Использование этой модели для микромеханического анализа однонаправленных областей и областей переплетения сетчатых конструкций, можно определить упругие свойства плетеных композитов на основе волокна, смолы и угла плетения.

Здесь предлагается метод выбора конструктивных параметров СК. Вводится система уравнений для описания веса, геометрии и механических свойств плетеного СК: уравнение массы, уравнение геометрии и уравнение упругих свойств. Рис. 5 демонстрирует геометрию СК. Масса конструкции определяется как

$$m_s = 2 \frac{L}{\cos \phi} t_r h_r \rho_m \frac{L}{a_r} \sin \phi + 2\pi r L \rho_m \frac{t_a}{a_a} h_a = 2\pi r L \rho_m \left( 2 \frac{t_r h_r}{a_r} + \frac{t_a h_a}{a_a} \right), \quad (8)$$

где  $L, r$  – длина и радиус конструкции, соответственно;  $\phi$  – угол между спиральными и продольными ребрами;  $t_{r(a)}, h_{r(a)}, a_{r(a)}$  – ширина, толщина и расстояние между спиральными и продольными ребрами, соответственно.

Уравнение массы конструкции является целевой функцией, т.е. цель состоит в том, чтобы минимизировать вес конструкции с учетом геометрии и механических свойств. На рис. 6а показана структура с областями переплетения с двойным и тройным перекрытием ровницы в схеме трехосного плетения. На рис. 6б показана структура с областями переплетения в схеме двухосного плетения. Отличие состоит в том, что толщина областей переплетения в конструкции с тройным перекрытием ровницы в три раза больше толщины областей с однонаправленным материалом, что приводит к более значительному изгибу ровниц. Эта особенность плетеной структуры снижает механические свойства композита, поэтому это необходимо учитывать в процессе проектирования.

Для определения геометрии СК без областей переплетения с тройным перекрытием ровниц установим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{a_r}{\cos \phi} \geq \left( t_a + \frac{t_r}{\cos \phi} \right).$$

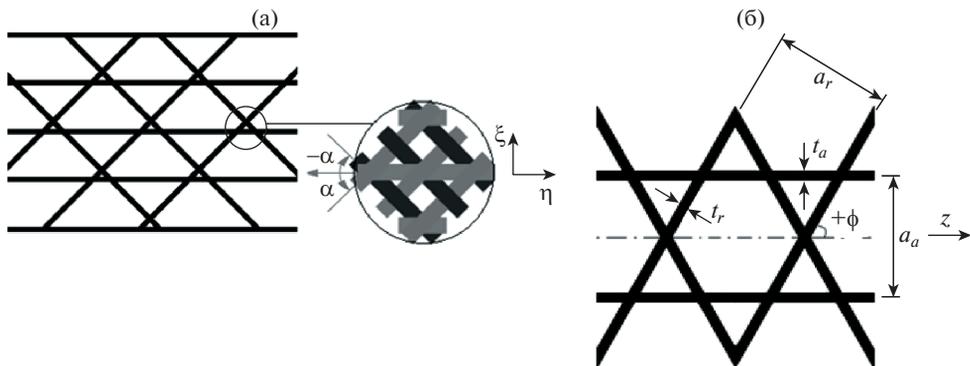


Рис. 5. (а) – Фрагмент СК с продольными ребрами; (б) – геометрические параметры СК.

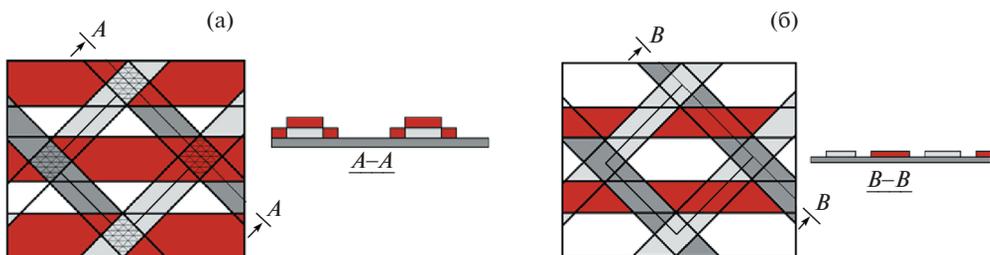


Рис. 6. Схема зон переплетений СК: (а) – зоны тройного наложения; (б) – зоны двойного наложения.

При  $a_r = 2(t_a \cos \phi + t_r)$  коэффициент покрытия получается как

$$k = 1 - \left(1 - \frac{t_r}{a_r}\right)^2 + \left(\frac{t_a}{a_r}\right)^2 \frac{2 \sin 2\phi}{\operatorname{tg} \phi}. \quad (9)$$

Это наименьший коэффициент покрытия для сетчатых конструкций без областей трехосного переплетения. Для сетчатых структур устанавливается следующее неравенство:  $0 < k < 1$ .

Если расстояние между ребрами в  $n_a$  раз больше ширины ребер, то коэффициент покрытия определяется следующим образом:  $k = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_a}\right)^2$ .

Таким образом, коэффициент покрытия может связывать механические свойства и технологические параметры производства трубчатых конструкций со сплошной стенкой со свойствами сетчатой структуры. Иными словами, конструкции с известным весом, но с различными коэффициентами покрытия, отличаются механическими свойствами, т.е. вес конструкции и конкретные механические свойства можно оптимизировать с использованием коэффициента покрытия.

**Выводы.** С помощью (3) определяется объемная доля волокна в зонах переплетения. Затем тип волокна и смолы, а также угол оплетки определяются на основании расчета упругих свойств СК с использованием (7) с учетом технологических свойств и требований к конструкции, таких как жесткость и размеры деталей. Начальные конструктивные параметры, такие как толщина, ширина и расстояние между спиральными

ребрами, можно установить с помощью уравнений (8) и (9). Кроме того, эти параметры использованы в расчетах МКЭ.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lomov S.V., Nakai A., Parnas R.S., Bandyopadhyay S., Ghosh I.* Verpoest Experimental and theoretical characterisation of the geometry of flat two- and three-axial braids // *Textile Research Journal*. 2002. V. 72. № 1. P. 706.
2. *Carey J., Fahim A., Munro M.* Predicting elastic constants of 2D-braided fiber rigid and elastomeric-polymeric matrix composites // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2004. V. 23. P. 1845.
3. *Ayranci C., Carey J.P.* Predicting the longitudinal elastic modulus of braided tubular composites using a curved unit-cell geometry // *Composites Part B: Engineering*. 2010. V. 41. P. 229.
4. *Pierce F.T.* The geometry of cloth structure // *Journal of Textile Inst.* 1937. V. 28. P. 45.
5. *Carey J., Munro M., Fahim A.* Regression-based model for elastic constants of 2D braided/woven open mesh angle-ply composites // *Polymer Composites*. 2005. V. 26. P. 152.
6. *Chen L., Tao X.M., Choy C.L.* Mechanical analysis of 3-D braided composites by the finite multi-phase element method *Compos // Sci. Technol.* 1999. V. 59. P. 2383.
7. *Li J.L., Jiao Y.N., Sun Y., Wei L.M.* Experimental investigation of cut-edge effect on mechanical properties of three-dimensional braided composites // *Materials & Design* 2007. V. 28 (9). P. 2417.
8. *Gideon R.K., Zhou H.L., Li Y., Sun B.Z., Gu B.H.* Quasi-static compression and compression-compression fatigue characteristics of 3D braided carbon/epoxy tube // *J. Text. Inst.* 2016. V. 107 (7). P. 938.
9. *Tian Z.Y., Yan Y., Li J., Hong Y., Guo F.L.* Progressive damage and failure analysis of three-dimensional braided composites subjected to biaxial tension and compression // *Composite Structures* 2018. V. 185. P. 496.
10. *Wang H.L., Sun B.Z., Gu B.H.* Numerical modeling on compressive behaviors of 3-D braided composites under high temperatures at microstructure level // *Composite Structures* 2017. V. 160. P. 925.
11. *Fang G.D., Liang J., Wang Y., Wang B.L.* The effect of yarn distortion on the mechanical properties of 3D four-directional braided composites // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2009. V. 40 (4). P. 343
12. *Ayranci C., Carey J.P.* Experimental validation of a regression-based predictive model for elastic constants of open mesh tubular diamond-braid composites // *Polymer Composites*. 2011. V. 32. P. 243.
13. *Fang G., Liang J.A.* Review of numerical modeling of three-dimensional braided textile composites // *Journal of Composite Materials*. 2011. V. 45. P. 2415.
14. *Ivey M.A., Carey J.P.R., Ayranci C.* Braid reinforced polymeric rebar production and characterization // Presented at International SAMPE Technical Conference, 2014.
15. *Vasiliev V.V., Rain A.F.* Anisogrid Composite Lattice Structures for Spacecraft and Aircraft Applications // *Composite Structures*. 2006. V. 76. P. 182.
16. *Vasiliev V.V., Pichkhadze G.P.* Composite shells and plates with spatial reinforcement // *Design, analysis and testing of composite structures*. 1982. V. 9. P. 83.
17. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Mechanics and analysis of composite materials // Elsevier, 2001.
18. *Vasiliev V.V., Lopatin A.V.* Theory of lattice and stiffened composite shells // *Mechanics of composite structures*. Novosibirsk: Nauka, 1984. P. 31.
19. *Samipour S.A., Khaliulin V.I., Batrakov V.V.* Development of the Technology of Manufacturing Aerospace Composite Tubular Elements by Radial Braiding // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. V. 47 (3). P. 284.
20. *Samipour S.A., Khaliulin V.I., Batrakov V.V.* Manufacturing Technology of Aerospace Braided Lattice Structures // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. V. 49. № 9. P. 787.

---

---

**АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 681.5

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ  
ГИПЕРДЕЛЬТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

© 2022 г. Я. Н. Гусеница

*Военный инновационный технополис “ЭРА”, Анапа, Россия  
e-mail: yaromir226@gmail.com*Поступила в редакцию 02.12.2020 г.  
После доработки 08.08.2021 г.  
Принята к публикации 24.08.2021 г.

Статья посвящена методу определения весовой функции динамической системы на основе гипердельтной аппроксимации автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов с произвольными законами распределения, а также преобразования Лапласа. Полученные результаты можно использовать при выполнении непараметрической идентификации динамических систем в условиях наличия ограничений на вычислительные ресурсы, а также при проведении измерений входных и выходных сигналов.

*Ключевые слова:* динамическая система, случайные процессы, непараметрическая идентификация, уравнение Фредгольма, гипердельтная аппроксимация, преобразование Лапласа, формула Алфрея

**DOI:** 10.31857/S0235711921060092

Современный этап развития науки и техники многие теоретики и практики связывают с широким использованием робототехнических систем и интеллектуальных процессов, миниатюризацией элементной базы изделий, интеграцией информационных систем, применением новых физических принципов.

Такая тенденция сопровождается значительным усложнением самых разнообразных по устройству и назначению технических систем, для исследования которых приходится прибегать к использованию моделей. Поэтому вопросы, связанные с идентификацией, являются весьма актуальными.

Идентификация представляет собой получение или уточнение математической модели исследуемой системы по ее измеряемым входным и выходным сигналам [1].

В зависимости от наличия априорной информации об исследуемой системе различают структурную, параметрическую и непараметрическую идентификацию (рис. 1) [2].

Структурная идентификация предполагает построение модели “черного ящика” с неизвестными структурой и параметрами системы. Поскольку структурная идентификация представляет собой сложную проблему, то в настоящее время по данному направлению отсутствуют четко формализованные методы ее решения. Вместе с тем, в аспекте проблематики структурной идентификации развиваются методы, основанные на свойстве сложности систем. Основная идея таких методов заключается в идентификации системы так, чтобы обеспечить ограниченную сложность ее модели при заданной точности [3].

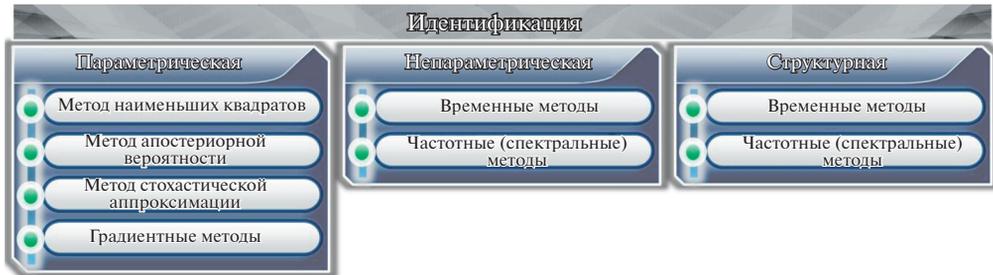


Рис. 1. Методы идентификации.

Параметрическая идентификация предполагает построение модели “серого ящика” с известной структурой, но неизвестными параметрами. В основе этой модели лежат передаточные функции, а также алгебраические, дифференциальные или интегродифференциальные уравнения, которые функционально связывают входные и выходные сигналы системы. Наиболее известными методами параметрической идентификации являются: метод наименьших квадратов, метод апостериорной вероятности, метод стохастической аппроксимации, градиентные методы [1, 4–7].

Непараметрическая идентификация направлена на построение модели весовой (импульсной передаточной) функции. Построение такой модели представляет собой довольно трудоемкий процесс, включающий описание структуры модели идентифицируемой системы, решение уравнения идентификации, обработку результатов, получение оценок параметров модели, анализ этих оценок и проверку адекватности модели [1].

Важное место среди перечисленных этапов отводится решению уравнения непараметрической идентификации, которое при наличии по одному входному и выходному случайным сигналам в общем виде выглядит как

$$K_{yx}(t) = \int_0^{\infty} K_{xx}(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где  $\tau$  – момент подачи входного  $x(t)$  сигнала относительно начала отсчета;  $K_{yx}(t)$  – взаимно-корреляционная функция входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов;  $K_{xx}(t)$  – автокорреляционная функция входного  $x(t)$  сигнала;  $h(t)$  – неизвестная весовая функция, позволяющая при произвольной  $x(t)$  определять  $y(t)$ .

Выражение (1) представляет собой частный вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(z, s)\varphi(s)ds = f(z),$$

где  $\lambda$  – параметр;  $K(z, s)$  – ядро уравнения;  $f(z)$  – свободный член уравнения;  $\varphi(s)$  – искомая функция.

В уравнении идентификации (1)  $\lambda = 1$ , искомой функцией является весовая функция  $h(t)$ , а ядром – автокорреляционная функция  $K_{xx}(t)$  входного  $x(t)$  сигнала.

Для решения уравнения (1) можно использовать различные временные и частотные (спектральные) методы [8–13]. Вместе с тем, эти методы имеют ограниченные условия применения. Одни методы оказываются непригодными для идентификации динамических систем, входные и выходные сигналы которых имеют вероятностный характер. Другие методы требуют исчерпывающей информации о входных и выходных сигналах и существенных затрат вычислительных ресурсов.

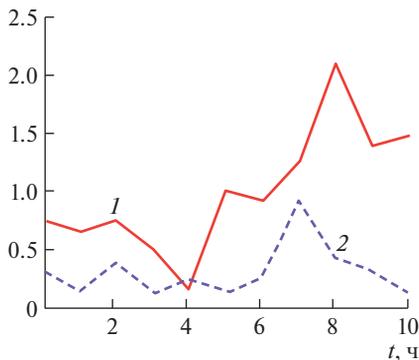


Рис. 2. Сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ : 1 –  $x(t)$ ; 2 –  $y(t)$ .

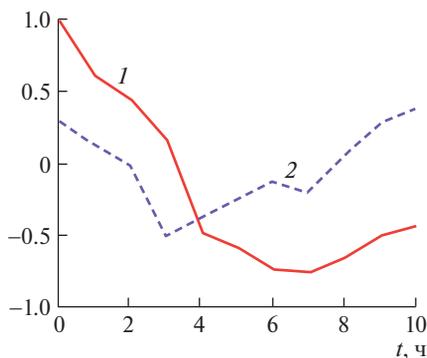


Рис. 3. Сигналы  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$ : 1 –  $K_{xx}(t)$ ; 2 –  $K_{yx}(t)$ .

В связи с этим предлагается оригинальный метод решения уравнения непараметрической идентификации динамической системы, который лишен указанных выше недостатков.

Рассмотрим применение метода на примере.

Пусть в течение десяти часов проведены измерения входного  $x(t)$  и выходного случайных сигналов  $y(t)$ . Сигнал  $x(t)$  подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием  $m_x = 1$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_x = 0.5$ . В свою очередь, сигнал  $y(t)$  подчиняется показательному закону распределения с математическим ожиданием  $m_y = 2$  (рис. 2).

Вычислим автокорреляционную функцию  $K_{xx}(t)$  входного  $x(t)$  сигнала и взаимнокорреляционную функцию  $K_{yx}(t)$  входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов (рис. 3).

Перенесем функции  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$  на положительную ось. Для этого сначала необходимо найти минимальные значения функций  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$ , а затем добавить их абсолютные значения к каждому значению функций. В результате получим функции  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ , представленные на рис. 4.

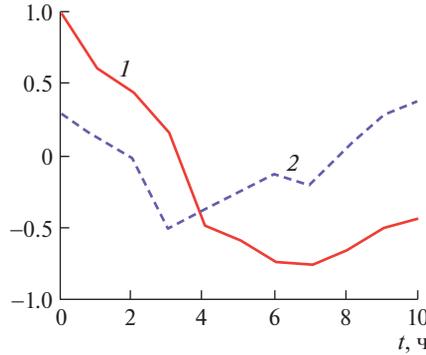


Рис. 4. Положительные функции  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ : 1 –  $K_{xx}^+(t)$ ; 2 –  $K_{yx}^+(t)$ .

Проведем нормирование функций  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ , чтобы представить их в вероятностной форме. Для этого воспользуемся формулами:

$$F_{xx}(t) = \frac{K_{xx}^+(t)}{\int_0^T K_{xx}^+(\tau) d\tau}, \quad F_{yx}(t) = \frac{K_{yx}^+(t)}{\int_0^T K_{yx}^+(\tau) d\tau},$$

где  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$  – аналоги функций распределения.

Вычислим для  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$  приближенное представление плотностей распределения на основе гипердельтовой аппроксимации, которую можно применять для произвольных функций распределений [14].

Сущность гипердельтовой аппроксимации заключается в представлении произвольной плотности распределения сосредоточенной на временной оси, приближенно в виде

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \delta(t - T_i), \quad (2)$$

где  $C_i$  – вероятности, удовлетворяющие условию  $\sum_{i=1}^n C_i = 1$ ;  $T_i$  – постоянные параметры;  $\delta$  – дельта-функция Дирака.

В случае  $n > 2$ , значения  $C_i$  и  $T_i$  определяются численно. Если  $n = 2$ , то

$$C_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{3v_2v_1 - v_3 - 2v_1^3}{\sqrt{v_3^2 - 6v_3v_2v_1 - 3v_2^2v_1^2 + 4v_3v_1^3 + 4v_2^3}} \right),$$

$$T_{1,2} = \frac{v_3 - v_2v_1 \mp \sqrt{v_3^2 - 6v_3v_2v_1 - 3v_2^2v_1^2 + 4v_3v_1^3 + 4v_2^3}}{2(v_2 - v_1^2)},$$

где  $v_i$  –  $i$ -й начальный момент случайной величины, распределенной с плотностью вероятности  $f(t)$ .

Для приближенного представления по методу моментов воспользуемся тремя начальными моментами. В результате получим аппроксимированные плотности вероятностей распределения  $f_{\Delta xx}(t)$  и  $f_{\Delta yx}(t)$ .

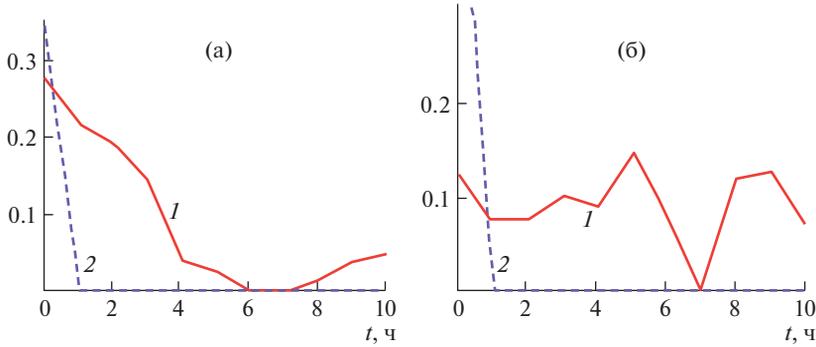


Рис. 5. Графики функций распределения: (а): 1 –  $F_{xx}(t)$ ; 2 –  $F_{\Delta xx}(t)$ . (б): 1 –  $F_{yx}(t)$ ; 2 –  $F_{\Delta yx}(t)$ .

На основе плотностей вероятностей распределения  $f_{\Delta xx}(t)$  и  $f_{\Delta yx}(t)$  найдем их функции распределения

$$F_{\Delta xx}(t) = \int_{-\infty}^t f_{\Delta xx}(\tau) d\tau; \quad F_{\Delta yx}(t) = \int_{-\infty}^t f_{\Delta yx}(\tau) d\tau.$$

Графики получившихся аппроксимированных функций распределения  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$  представлены на рис. 5.

Аппроксимированные функции  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$ , в отличие от  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$ , удовлетворяют условию Липшица–Гельдера всюду на оси  $t > 0$  даже в точках, где имеются разрывы первого рода. Поэтому для  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$  можно получить изображения Лапласа

$$F_{\Delta xx}^*(s) = \int_0^{\infty} F_{\Delta xx}(t) \cdot e^{-st} dt, \quad F_{\Delta yx}^*(s) = \int_0^{\infty} F_{\Delta yx}(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Следовательно, уравнение (1), используя изображения Лапласа  $F_{\Delta xx}^*(s)$ ,  $F_{\Delta yx}^*(s)$  и  $h^*(s)$ , можно представить как

$$F_{\Delta yx}^*(s) = F_{\Delta xx}^*(s)h^*(s),$$

где  $h^*(s)$  – изображение Лапласа весовой функции  $h(\tau)$ .

$$\text{Откуда } h^*(s) = \frac{F_{\Delta yx}^*(s)}{F_{\Delta xx}^*(s)}.$$

Для получения выражения весовой функции  $h(\tau)$  во временной области необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Однако достичь ожидаемых результатов достаточно затруднительно из-за сложности прямого изображения Лапласа искомой весовой функции и вычислительных трудностей. Поэтому переход от изображений  $h^*(s)$  к оригиналу  $h(t)$  проведем, применяя приближенный способ обращения преобразования Лапласа с использованием формулы Алфрея. Эта формула вытекает из формулы Уайдера на основе свойства фильтрации преобразования Лапласа с помощью дельта-функции. Она имеет вид [15]  $h(\tau) \approx sh^*(s)$  при  $s = 1/\tau$ .

Полученная весовая функция является одномерной моделью системы, позволяющей определить реакцию системы на произвольное входное воздействие.

При заданных исходных данных график искомой весовой функции будет выглядеть так, как это показано на рис. 6.

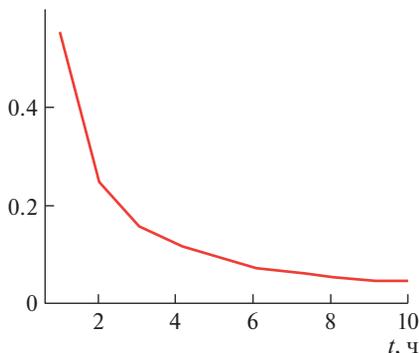


Рис. 6. График весовой функции  $h(t)$ .

Таким образом, разработанный метод позволяет определять весовую функцию динамической системы на основе гипердельтной аппроксимации автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов с произвольными законами распределения, а также преобразования Лапласа.

Применение рассмотренного метода обеспечит выполнение непараметрической идентификации динамических систем в условиях наличия ограничений на вычислительные ресурсы, а также проведение измерений входных и выходных сигналов.

Вместе с тем, вопрос оценки точности предлагаемого метода остается открытым и требует дальнейшего экспериментального исследования при идентификации технических систем, отличающихся устройством, функциональностью и назначением. Для повышения точности результатов количество начальных моментов для автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов может быть увеличено.

Дальнейшее направление развития метода можно связать с разработкой частных методик непараметрической идентификации многомерных систем различного назначения.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Статья выполнена в рамках научной исследовательской работы по оценке перспектив развития робототехнических комплексов и технологий робототехники, запланированной в Федеральном государственном автономном учреждении «Военный инновационный технополис «ЭРА».

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Главному управлению научно-исследовательской деятельности и технологического сопровождения передовых технологий (инновационных исследований) Министерства обороны Российской Федерации за поддержку в проведении работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джинчелашвили Г.А., Мкртычев О.В., Ковальчук О.А. и др. Идентификация расчетных моделей при динамических воздействиях. М.: Лира софт, 2018. 300 с.
2. Оморов Т.Т., Осмонова Р.Ч. Краткий обзор методов идентификации управляемых динамических систем // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2018. № 1 (45). С. 46.

3. Соколов С.В., Ковалев С.М., Кучеренко П.А., Смирнов Ю.А. Методы идентификации нечетких и стохастических систем. М.: Издательская фирма “Физико-математическая литература”, 2018. 432 с.
4. Граничин О.Н. Поисквые алгоритмы стохастической аппроксимации с рандомизацией на входе // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 43.
5. Гринкевич В.А. Идентификация устройства на основе элемента Пельтье методом наименьших квадратов // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2020. № 1–2 (46–47). С. 17.
6. Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Лун Ци. Градиентная идентификация параметров математической модели электрогидравлического следящего привода // Гидравлика. 2020. № 10. С. 64.
7. Сандлер Е.А., Сандлер И.Л. Рекуррентный алгоритм параметрической идентификации асинхронных электродвигателей при наличии автокоррелированных ошибок измерений методом стохастической аппроксимации // Вестник транспорта Поволжья. 2018. № 4 (70). С. 84.
8. Антонова Т.В. Методы идентификации параметра в ядре уравнения первого рода типа свертки на классе функций с разрывами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2015. Т. 18. № 2. С. 107.
9. Воскобойников Ю.Е., Крысов Д.А. Непараметрическая идентификация динамической системы при неточном входном сигнале // Автоматика и программная инженерия. 2017. № 4 (22). С. 86.
10. Гарькина И.А., Данилов А.М., Тюкалов Д.Е. Сложные системы: идентификация динамических характеристик, возмущений и помех // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1–1. С. 88.
11. Корнеева А.А., Чернова С.С., Шишкина А.В. Непараметрические алгоритмы восстановления взаимно неоднозначных функций по наблюдениям // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18. № 3. С. 510.
12. Шатов Д.В. Идентификация запаздывания одномерных линейных объектов конечно-частотным методом // Проблемы управления. 2015. № 3. С. 2.
13. Яреценко Д.И. О непараметрической идентификации частично-параметризованного дискретно-непрерывного процесса // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21. № 1. С. 47.
14. Смагин В.А., Филимоныхин Г.В. О моделировании случайных процессов на основе гипердельного распределения // АВТ. 1990. № 1. С. 25.
15. Смагин В.А. Немарковские задачи теории надежности. Л.: МО СССР, 1982. 268 с.

---

---

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.  
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

---

---

УДК 620.178.152.34

**ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИАГРАММ ВНЕДРЕНИЯ  
ТОПОКОМПОЗИТОВ НА ПОДАТЛИВОЙ ПОДЛОЖКЕ**

© 2022 г. Н. А. Воронин

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
e-mail: voroninn@inbox.ru*Поступила в редакцию 01.04.2021 г.  
После доработки 06.10.2021 г.  
Принята к публикации 20.10.2021 г.

Проведен качественный анализ экспериментальных диаграмм внедрения топокомпози́тов, демонстрирующих кривые разгрузки с линейным и нелинейным участками конца кривой разгрузки и характеризующие межфазное расслоение по границе раздела покрытие–подложка. Показано, что отслаивание в обоих топокомпози́тах реализует линейную зависимость между нагрузкой и глубиной внедрения. По ширине гистерезисных петель установлена более высокая демпфирующая способность покрытия нитрида алюминия по сравнению с покрытием из нитрида титана. Показана актуальность исследования влияния структуры покрытий на деформационное поведение и повреждаемость топокомпози́тов при высоких контактных давлениях.

*Ключевые слова:* инструментальное индентирование, диаграмма внедрения, топокомпози́ты, податливость, отслаивание, межфазное разрушение, гистерезис

DOI: 10.31857/S0235711922010114

**Состояние вопроса.** Инструментальное индентирование сегодня стало одним из незаменимых инструментов в научных или инженерных дисциплинах. В машиностроении последнее время внимание сосредоточено на контактном зондировании функциональных поверхностей топокомпози́тов триботехнического назначения. Современная приборная техника позволяет измерять твердость, модуль упругости, пластичность, адгезионную прочность, вязкость разрушения и другие характеристики покрытий в широком диапазоне толщин [1, 2]. Результаты испытаний на вдавливание алмазной пирамиды в исследуемую твердую поверхность представляются в виде диаграмм внедрения – кривой нагружения и кривой разгрузки. В связи с многообразием структур материалов подложки и покрытия, несовершенств строения материалов в области, подвергаемой контактному воздействию индентора, разной геометрией и точностью изготовления индентора, а так же разными режимами нагружения и разными состояниями исследуемой поверхности, интерпретация характера деформирования и видов повреждения покрытий топокомпози́тов по диаграммам внедрения чрезвычайно затруднительна, но является актуальной задачей, т.к. метод индентирования относится к неразрушающим методам контроля свойств материалов. Характер деформирования, повреждения и разрушения материала в поверхностном объеме исследуемого образца проявляется на кривых нагружения и разгрузки в виде специфических изменений кривых (наклонов, скачков, разрывов и т.п.) диаграммы внедрения. Это в первую очередь относится к кривым нагружения и разгрузки диаграмм внедрения поверхностно слоистых систем (топокомпози́тов), вид которых чувствителен к наличию в исследуе-

мом под индентором объеме “дефектов” – крупных, в виде границы раздела между покрытием и подложкой, средне- и маломасштабных, в виде изменений в структуре и составе компонентов слоистой среды [1, 2].

В исследованиях по вдавливанию сферических и пирамидальных инденторов в тонкие твердые покрытия часто встречается эффект межфазного расслаивания, который не сопровождается разрушением покрытия с образованием поверхностных трещин [2–6]. При этом у кривых разгрузки диаграмм внедрения отмечается заметный характерный линейный или нелинейный участок разгрузки с резко отличающимся наклоном, по отношению к тому наклону кривой разгрузки, который наблюдается на начальном участке кривой разгрузки.

В диаграммах внедрения [3, 5, 6], полученных для покрытий на упругих подложках, отслаивание покрытия от основы проявляется в виде линейного участка на кривой разгрузки. Линейное восстановление кривой разгрузки связано с упругим восстановлением отслоившегося покрытия из-за потерь связи покрытия с подложкой под вершиной индентора. При этом считается, что покрытие остается прикрепленным по краю контакта и по мере снятия нагрузки с индентора покрытие распрямляется, как плоская упругая мембрана. Количественная оценка адгезионной прочности по методу упругой круглой мембраны с закрепленным краем на периферии, хорошо согласуется с результатами оценки адгезионной прочности другими экспериментальными методами.

В диаграммах внедрения [4, 5], полученных для твердых покрытий на податливых подложках отслаивание покрытия от основы проявляется в виде сильно нелинейного участка на кривой разгрузки. Такой вид кривой разгрузки характеризует упругое межфазное расслоение на границе раздела слоистой системы не только под вершиной индентора, но и на некотором расстоянии от центра приложения нагрузки, достигающем до 2–3-х кратной величины диаметра контактного отпечатка. Для описания зарождения и распространения трещины в механике сплошных сред и слоистых систем используется модель когезионного зонного разрушения [4, 7, 8]. Рассчитанные значения прочности межфазного разрушения для таких слоистых систем показали завышенные оценки, отличающиеся от результатов экспериментальных исследований аналогичных покрытий другими методами, по меньшей мере, на порядок [4, 5, 8].

В настоящей статье предпринята попытка установления механизма отслаивания и вклада податливости подложки в обеспечение межфазного расслаивания в топокомпозициях с нелинейным участком кривой разгрузки диаграмм внедрения.

Решение предлагается искать путем качественного анализа диаграмм внедрения, полученных при единичных и повторных циклах нагружения, для топокомпозиций двух вариантов: первый, дающий кривую разгрузки с линейным участком, и второй – с нелинейным участком, с привлечением известных сведений о поведении материалов покрытия в условиях деформирования, в том числе пирамидальным индентором.

**Материалы и методики исследований.** В статье приведены экспериментальные исследования на двух модельных образцах топокомпозиций, для которых были получены диаграммы внедрения. Оба модельных образца изготовлены из алюминийевого сплава марки Д16Т в состоянии поставки после закалки и естественного старения. На плоскую поверхность одного образца было нанесено покрытие нитрида титана (TiN), на поверхность второго – покрытие нитрида алюминия (AlN). Технология получения покрытий – магнетронное напыление на установке МИР-2 путем распыления чистого металла (алюминия или титана) в среде смеси газов – аргона и азота. Толщина покрытий составляла  $5 \pm 0.2$  мкм. Покрытие из нитрида титана имело плотную мелкодисперсную структуру столбчатого вида с кристаллитами размером 80–200 нм. Электронографическим анализом установлено, что покрытие состоит из нитрида титана с ГЦК-решеткой и соответствует стехиометрическому составу. Покрытие из нитрида алюминия имело кристаллическую решетку типа вюрцита гексагональной сингонии и

**Таблица 1.** Основные характеристики материалов покрытий и основы

Индекс материала	Материал топокомпозиата		$E$ , ГПа	$E_1/E_2$	$H$ , ГПа	$H_1/H_2$	$E_0/E_1$ ; $E_0/E_2$	$H_1/H_0$ ; $H_2/H_0$
1	покрытие	AlN	320	1.52	36	2	0.28	36.7
2	покрытие	TiN	210		18		0.42	18.4
0	основа	Д16Т	93		0.98			

Примечание.  $E$  – модуль упругости;  $H$  – нанотвердость

соответствовало стехиометрическому составу. Покрытие представляет собой мелко-дисперсную структуру из кристаллитов размером 100–150 нм. Электронографические исследования показали наличие текстуры в покрытии с ориентацией кристаллитов плоскостью (0001) параллельно поверхности подложки.

Основные механические характеристики компонентов исследуемых топокомпозиатов представлены в табл. 1.

Измерение нанотвердости и модуля упругости компонентов топокомпозиата проводилось по результатам анализа диаграмм внедрения, полученных на нанотвердомере НаноСкан4D. Индентором служила трехгранная алмазная пирамида Берковича. Для анализа использовались от пяти до десяти диаграмм внедрения. Шероховатость и вид индентов изучались с помощью 3D-оптического микроскопа Sneox (SENSOFAR). Шероховатость поверхности не превышала  $Ra = 0.32$  мкм.

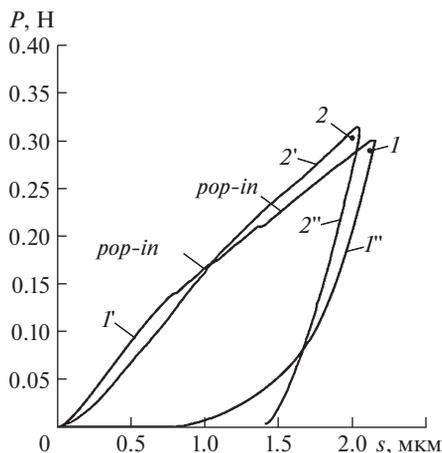
Построение модельных (теоретических) диаграмм внедрения проводилось по методике, описанной в работе [9]. Экспериментальные исследования топокомпозиатов включали единичные испытания на вдавливание и повторные двухкратные циклы нагружения и разгружения.

**Результаты, обсуждение результатов.** Типичные экспериментальные диаграммы внедрения для двух исследуемых топокомпозиатов приведены на рис. 1. Для удобства визуального сравнения полученных диаграмм глубины внедрения индентора были выбраны близкими по величине.

Сравнивая площади диаграмм внедрения (рис. 1, кривые 1, 2) можно считать, что работы, затраченные на упругопластическое деформирование исследуемых топокомпозиатов, примерно одинаковы. Наблюдается незначительное отличие в кривых нагружения, хотя различие в значениях твердости и модуля упругости материалов покрытий существенно отличается (табл. 1). Материал покрытия из нитрида алюминия больше по модулю упругости в 1.5 раза, а по твердости в два раза, чем покрытие из нитрида титана. Значительное большее отличие наблюдается как в площадях под кривыми разгружения (рис. 1, кривые 1', 2'), так и в характере этих кривых. Если различие в углах наклона кривых разгружения в начальной части исследуемых топокомпозиатов объясняется различием модулей упругости покрытий, то сильная кривизна кривой разгружения в оставшейся (нижней) части кривой разгрузки для топокомпозиата с покрытием из нитрида алюминия объясняется обычно отслаиванием и наличием запасенной упругой деформацией слоистого тела [4].

Из результатов дополнительных исследований топокомпозиата с покрытием из нитрида алюминия в широком диапазоне конечных нагрузок внедрения [4, 10], установлено, что нелинейность кривой разгрузки возрастает с ростом величины конечной нагрузки внедрения и характеризует процесс межфазного расслоения без нарушения сплошности покрытия.

Более внимательный анализ кривых нагружения топокомпозиатов с покрытием из нитрида алюминия показывает наличие отдельных участков с неравномерным ходом кривой нагружения при возрастании нагрузки. Кратковременные периодические резкие изменения глубины внедрения при постоянной нагрузке, в научной литературе



**Рис. 1.** Диаграммы внедрения для топокомпозитов: 1 – с покрытием нитрида алюминия, 2 – с покрытием нитрида титана. Кривые нагружения – 1' и 2'; кривые разгрузки 1'' и 2''.

получили название “*pop-ins*” и отвечают различным механизмам повреждения – образованием трещин на поверхности, дислокационными перемещениями, проскальзыванием по границе зерен. Для слоистых систем с подложками из податливых материалов “скачки” чаще всего связывают с пластическим течением на границе раздела покрытие–основа [2, 4]. Для топокомпозитов с покрытием из нитрида титана таких участков на кривой нагружения не наблюдается.

Учитывая, что в исследуемых топокомпозитах материал основы один и тот же, толщина покрытия одинаковая и диаграммы внедрения по площадям под кривыми нагружения примерно одинаковые попытаемся выяснить причину различия в результатах деформирования и повреждаемости слоистых систем.

Используя методику [9], построим теоретические (модельные) диаграммы внедрения для исследуемых топокомпозитов из условия когерентной связи покрытия к основе на протяжении всего цикла нагружения–разгрузки и оценим их соответствие экспериментальным диаграммам. Модельные и экспериментальные диаграммы внедрения для исследуемых топокомпозитов представлены на рис. 2, 3. Из сравнения модельной и экспериментальной диаграмм внедрения для топокомпозита с покрытием из нитрида алюминия (рис. 2) наглядно видно, что для модельного топокомпозита для достижения глубины внедрения, равной максимальному значению глубины внедрения при экспериментальном исследовании требуется большая нагрузка и, следовательно, необходима большая работа на упругопластическое деформирование.

Снижение затрат энергии на деформирование слоистой системы в экспериментальном топокомпозите можно объяснить ослаблением или даже разрушением адгезионной связи на границе раздела покрытие–подложка. При этом нарушение адгезии происходит за счет податливого материала в результате его пластического деформирования (течения) на границе раздела подложки и не только под контактной областью, занимаемой индентором, но и на более дальнем расстоянии от размера отпечатка. Такое объяснение дается в работах [4, 8], а сильную нелинейность кривой разгрузки объясняют наличием запасенной энергии при пластическом деформировании границы раздела, которая высвобождается при разгрузке.

Из сравнения модельной и экспериментальной диаграмм внедрения для топокомпозита с покрытием из нитрида титана (рис. 3) наглядно видно, что имеет место прак-

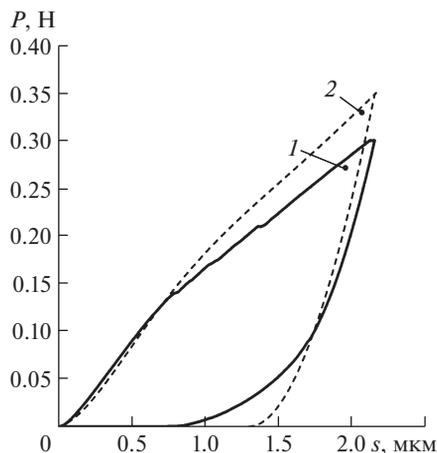


Рис. 2. Диаграммы внедрения для топокомпозита с покрытием нитрида алюминия: 1 – экспериментальная, 2 – модельная.

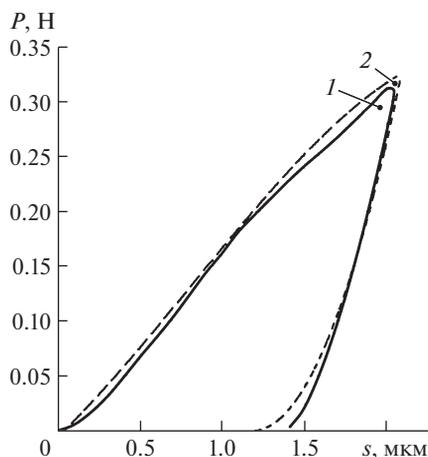
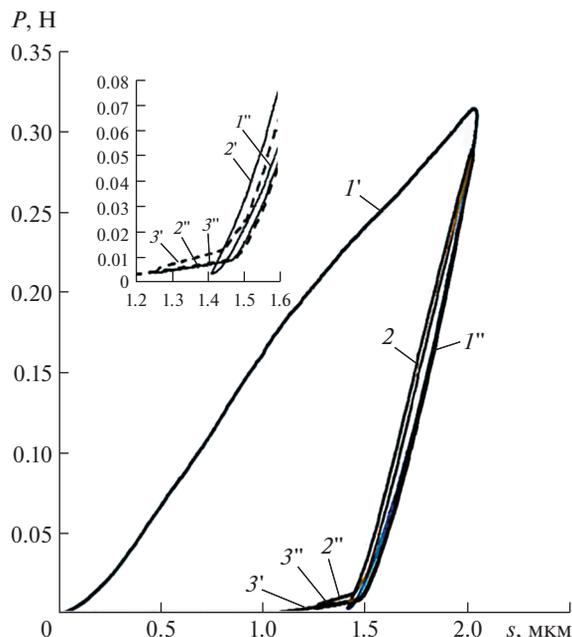


Рис. 3. Диаграммы внедрения для топокомпозита с покрытием нитрида титана: 1 – экспериментальная, 2 – модельная.

тически полное совпадение площадей под модельной и экспериментальной кривых нагружения.

Это говорит об одинаковых затратах энергии на упругопластическое деформирование слоистой системы. То же самое можно сказать и по затратам энергии на упругое деформирование слоистых систем: модельной и экспериментальной, а также на отсутствие отслоения в эксперименте с топокомпозитом с покрытием из нитрида титана.

Из сопоставления результатов анализа двух диаграмм внедрения для исследуемых топокомпозитов неясно, почему в случае использования нитрида титана в качестве покрытия при одинаковых практически глубинах внедрения и при наличии одинакового материала подложки не реализуется достаточный уровень пластического течения



**Рис. 4.** Повторные диаграммы внедрения для топокомпозиата с покрытием нитрида титана:  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  – кривые нагружения,  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  – кривые разгрузки для первого, второго и третьего цикла деформирования.

на границе раздела для появления нелинейного участка на кривой разгрузки и отслоения покрытия.

Доведем топокомполит с нитридом титана до состояния, при котором возникнет ситуация с нарушением межфазной связи на границе раздела. Превышение величины конечной нагрузки может привести к возникновению поперечных трещин в покрытии уже в процессе нагружения и мы не сможем получить достоверный результат для сравнения. Поэтому, проведем эксперименты с исследуемыми топокомполитами не выходя за пределы принятых нагрузок путем проведения повторных циклов нагружения и разгрузки. Для этого в первом цикле нагружения с разгрузкой проведем неполное разгрузку (до значения нагрузки примерно 2% значения от максимального нагружения) и вновь проведем два повторных цикла деформирования с разгрузением.

На рис. 4, 5 представлены диаграммы внедрения с повторными нагружениями для исследуемых топокомполитов. Повторное нагружение топокомполита с покрытием TiN приводит к возникновению отслаивания (рис. 4, кривая нагружения  $2'$ , кривая разгрузки  $2''$ ). Диаграмма демонстрирует известный в литературе вид диаграммы внедрения слоистой системы с отслаиванием, с линейным видом кривой разгрузки в конце разгрузки, наблюдаемый во многих экспериментах с топокомполитами, относящихся к классу слоистых систем твердое покрытие–упругая подложка.

Для количественной оценки параметров отслаивания в таких слоистых системах используют модель упругой круглой мембраны, зашечленной по краям и нагруженной в центре на оси симметрии силой. Для такой модели характерна линейная зависимость между нагрузкой и прогибом.

Линейная зависимость наблюдается у исследуемого топокомполита с покрытием из нитрида титана также в третьем цикле деформирования (рис. 4, кривая  $3''$ ). Кривые разгрузки при втором и третьем цикле деформирования в большей части своих кри-

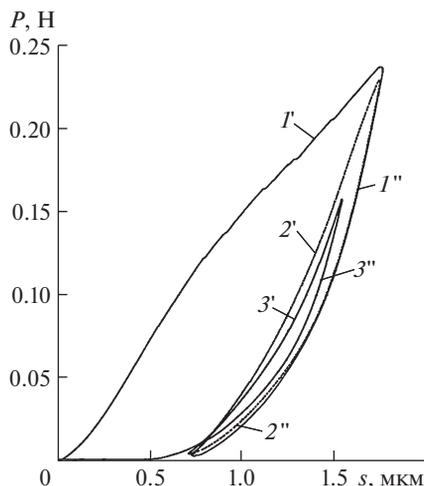


Рис. 5. Повторные диаграммы внедрения для топокомпозиата с покрытием нитрида алюминия:  $1', 2', 3'$  – кривые нагружения и  $1'', 2'', 3''$  – кривые разгрузки для первого, второго и третьего цикла деформирования.

вых практически совпадают с кривой разгрузки первого цикла деформирования (рис. 4, кривые  $2'', 3''$  и  $1''$ ). Кривые нагружения второго и третьего цикла деформирования, реализуя упругое деформирование слоистой системы, располагаются на незначительном расстоянии от кривой разгрузки первого цикла индентирования. Такое поведение топокомпозиата говорит о хорошей сохранности структуры и состава компонентов топокомпозиата (незначительной пластической деформации при повторных нагружениях) и, в первую очередь покрытия, при смене направления деформирования.

Для топокомпозиата с покрытием из нитрида алюминия (рис. 5) диаграмма внедрения с повторными циклами деформирования, также отличается от диаграммы внедрения для топокомпозиата с покрытием из нитрида титана, как на первом цикле, так и на последующих.

Второй цикл деформирования показывает кривую нагружения далеко отстоящую от кривой разгрузки первого цикла деформирования. Кривая разгрузки второго цикла деформирования совпадает по всей длине с кривой разгрузки первого цикла деформирования. Третий цикл деформирования был проведен при достижении предельной нагрузки, заведомо меньшей, чем в первом и втором циклах нагружения. Это было сделано для того, что бы избежать наложения кривых друг на друга. Кривые повторных циклов деформирования определяют потери энергии на гистерезис. Их можно представить в виде набора гистерезисных петель “веерного” вида с нижней точкой схождения всех петель в точку, соответствующей остаточной глубине внедрения. Характерной чертой этих гистерезисных петель является значительная ширина петель, немного уменьшающаяся с количеством циклов нагружения.

Вид гистерезисных петель, их изменение при последующих повторных циклах деформирования и ширина петель говорит о значительных структурных перестройках в материале топокомпозиата при каждом цикле индентирования. Ширина гистерезисных петель указывает на величину затраченной энергии для структурной перестройки материала топокомпозиата. Сравнение диаграмм внедрения исследуемых топокомпозиатов с повторными циклами деформирования показывает, что структурная перестройка происходит не в материале основы топокомпозиатов, т.к. в исследуемых топо-

композитах в качестве основы используется один и тот же материал, алюминиевый сплав. Следовательно, можно заключить, что потери энергии на гистерезис в топокомposite с покрытием из нитрида алюминия обусловлены структурными или фазовыми изменениями, в основном, в материале покрытия. Высокие механические характеристики материала покрытия топокомposite с покрытием из нитрида алюминия вообще-то не предполагают возможность фазовых или структурных превращений при пластических деформациях. Однако это не так.

Анализ литературы [11, 12] о структурообразовании в ковалентных кристаллах (алмаз и алмазоподобные фазы BN, SiC, AlN) на стадии пластической деформации и результаты испытаний на внедрение в настоящей статье позволяют утверждать, что покрытие из нитрида алюминия подвергается структурным изменениям в период индентирования.

Из результатов работы [12] по сопоставлению рельефа поверхности, внутри отпечатка пирамиды Виккерса, пленок с гексагональной (AlN) и кубической (TiN) структурами поверхности следует, что для обеих структур реализуется механизм пластической деформации путем скольжения столбчатых элементов структуры параллельно приложенной нагрузке.

Наличие скачков (“pop-ins”) на кривых нагружения в диаграммах внедрения топокомposite с покрытием из нитрида алюминия (рис. 1), значительная площадь гистерезисных петель, выявленная на повторных диаграммах деформирования (рис. 5) говорит о полиморфных твердофазных структурных превращениях материала покрытия. Покрытия из нитрида титана в исследуемом топокомposite представляют собой столбчатую структуру из кристаллитов равноосной формы кубической сингонии. При индентировании эти кристаллиты и зеренная структура нитрида титана также подвергается твердофазным структурным превращениям в виде скольжения по границам зерен. Но эта деформация проходит только в первом цикле индентирования. Это подтверждается отсутствием скачков и перегибов на кривой нагружения диаграммы внедрения (рис. 1), близким совпадением площадей под кривыми деформирования экспериментальной и модельной диаграмм внедрения (рис. 3) и узкими по ширине гистерезисными циклами (рис. 4).

Совокупность полученных результатов свидетельствует о том, что значительные энергетические потери на твердофазные структурные превращения в покрытии из нитрида алюминия, затраченные на этапе внедрения индентора в топокомposite, создают значительный запас энергии в покрытии (в виде напряжений растяжения), который реализуется в процессе разгрузки. Это приводит к появлению кривой разгрузки с сильно нелинейным участком в нижней части кривой разгрузки. Площадь фигуры под нелинейной частью кривой разгрузки, характеризующая энергию, реализуемую на диссипацию энергии от напряжений растяжения включает в себя и энергию, затрачиваемую на упругое восстановление отслаивающегося покрытия. Механизм, реализующий отслаивания покрытия, аналогичен механизму восстановления круглой упругой диафрагмы с закрепленным по периферии краем.

Дополнительным подтверждением одинакового механизма отслаивания покрытий в исследуемых топокомposite, приводящего к линейной зависимости нагрузки от глубины внедрения, являются результаты следующего эксперимента, полученного на топокомposite с покрытием из нитрида алюминия (рис. 6а).

В одном из экспериментов на вдавливание, в силу попадания индентора в точку поверхности в непосредственной близости от выступающего над поверхностью единичной микронеровности, процесс внедрения индентора проходил в условиях неравномерно распределенного напряженно-деформированного поля. Это привело к возникновению разрушения покрытия (появление поперечной трещины) в процессе разгрузки на начальном этапе разгрузки (рис. 6б). Релаксация запасенной в процессе нагружения энергии произошла мгновенно, и дальнейшая ветвь кривой разгру-

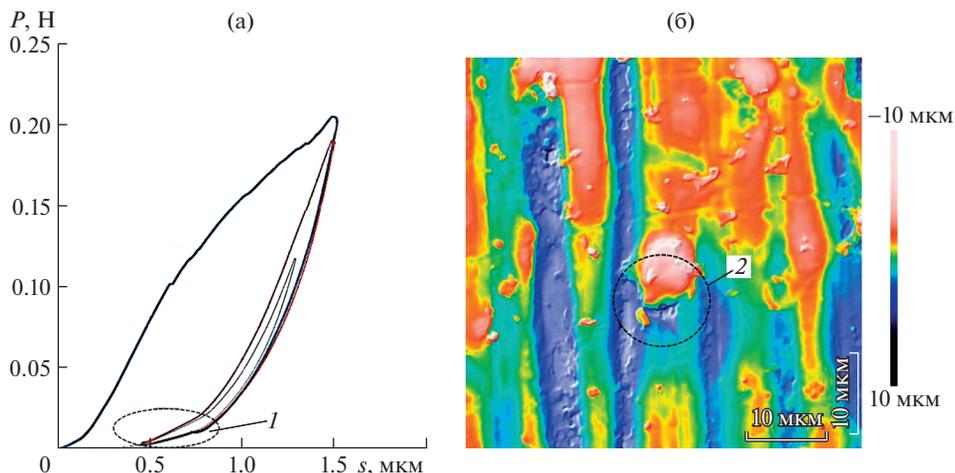


Рис. 6. (а) – повторные диаграммы внедрения для топокомпозита с покрытием нитрида алюминия; (б) – фотография индента: 1 – область линейной зависимости; 2 – место расположения индента с трещиной.

жения продемонстрировала линейную зависимость изменения нагрузки от глубины внедрения. Второй и третий цикл деформирования проходил уже с образованной в покрытии трещиной и линейный участок присутствовал в каждом цикле, что свидетельствовало об отсутствии разрушения покрытия на границе закрепления покрытия за пределами отпечатка.

**Заключение.** Проведен феноменологический анализ экспериментальных диаграмм внедрения топокомпозитов с покрытиями из нитрида титана и нитрида алюминия, имеющих подложки из одного материала – алюминиевого сплава Д16Т. Установлен различный вид кривых разгрузки диаграмм внедрения исследуемых топокомпозитов – с линейным и нелинейным участком конца кривой разгрузки, характеризующим межфазное расслоение по границе раздела покрытие–подложка. Показано, что отслаивание в обоих топокомпозитах реализует линейную зависимость между нагрузкой и глубиной внедрения. Установлена высокая демпфирующая способность покрытия нитрида алюминия (по величине ширины гистерезисных циклов), обусловленная вероятнее всего твердофазными структурными изменениями в строении покрытия при деформировании в процессе нагружения. Показана актуальность исследования влияния структуры покрытий на деформационное поведение и повреждаемость топокомпозитов при высоких контактных давлениях. Установлено, что гистерезисные потери материала покрытия являются существенным параметром, влияющим на характер отслаивания и вид кривой разгрузки. По ширине гистерезисных петель, можно судить о степени сопротивляемости топокомпозитов к межфазному расслоению. Результаты исследований можно использовать для оценки прочности межфазного разрушения в топокомпозитах с меньшей погрешностью.

#### БЛАГОДАРНОСТЬ

Благодарю научного сотрудника Кравчука К.С. за получение экспериментальных диаграмм внедрения и изображения индентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головин Ю.И. Наноиндентирование и его возможности. М.: Машиностроение, 2009. 312 с.
2. Bhushan B. Depth-sensing nanoindentation measurement techniques and applications // *Microssyst. Technol.* 2017. V. 23. P. 1595.
3. Chen J., Lin Z., Bull S.J., Phillips C.L., Bristowe P.D. Experimental and modelling techniques for assessing the adhesion of very thin coatings on glass // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2009. V. 42. 214003.
4. Abdul-Baqi A., Van der Giessen E. Delamination of a strong film from a ductile substrate during indentation unloading // *Journal of Materials Research.* 2001. V. 16. № 5. P. 1396.
5. Lu M., Xie H., Huang H. Characterization of interfacial adhesion of thin film/substrate systems using indentation-induced delamination: a focused review // *Key Engineering Materials.* 2013. V. 533. P. 201.
6. Lu M., Huang H. Interfacial energy release rates of SiN/GaAs film/substrate systems determined using a cyclic loading dual-indentation method // *Thin Solid Films.* 2015. № 589. P. 822.
7. Ruiz G., Pandolfi A., Ortiz M. Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2001. V. 52 (1–2). P. 97.
8. Hu J., Chou Y.K., Thompson R.G. Cohesive zone effects on coating failure evaluations of diamond-coated tools // *Surface & Coatings Technology.* 2008. V. 203. P. 730.
9. Воронин Н.А. Моделирование диаграммы внедрения для топокомпозитов // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2018. № 5. С. 57.
10. Voronin N.A. Effect of Substrate Material Compliance on the Character of Topocomposite Damage under Instrumental Indentation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2020. V. 49. № 10. P. 862.
11. Олейник Г.С. Структурные механизмы пластической деформации керамических материалов // *Электронная микроскопия и прочность материалов.* 2014. № 20. С. 3.
12. Штанский Д.В., Кулинич С.Л., Левашов Е.Л., Moore J.J. Особенности структуры и физико-механических свойств наноструктурных тонких пленок // *Физика твердого тела.* 2003. Т. 45. № 6. С. 1122.