РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ИТОГИ НАУКИ • ЮГ РОССИИ

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ
Выпуск 11

В. Б. Коротков

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДОВ

Москва
2017

ББК 22.16
УДК 517.983+517.968.25
К68

Ответственный редактор:
д. ф.-м. н., профессор В. Д. Степанов

Рецензенты:
д. ф.-м. н., профессор М. Л. Гольдман,
к. ф.-м. н., доцент И. М. Новицкий

Редакторы серии:
д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев

Исследование проведено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

Издается в соответствии с распоряжением президиума Российской академии наук от 24 октября 2017 г. № 10106-765 по представлению Отделения математических наук РАН и распространяется бесплатно.

Коротков В. Б.

Линейные функциональные и интегральные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов / Отв. ред. В. Д. Степанов; ЮМИ ВНЦ РАН. — Москва: РАН, 2017. — 106 с. — (Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 11).

Книга состоит из двух частей. В первой части исследуются свойства операторов, порождаемых интегральными и функциональными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов. Во второй части разрабатываются редукционные методы решения общих интегральных и функциональных уравнений 1-го, 2-го и 3-го родов.

Книга рассчитана на математиков и физиков, интересующихся теорией интегральных операторов и теорией интегральных уравнений.

Korotkov V. B.

Linear Functional and Integral Equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd Kinds / Ed. V. D. Stepanov; SMI VSC RAS. — Moscow: RAS, 2017. — 106 p.

Book consists of two parts. In part 1 we investigate the properties of operators, generated by integral and functional equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd kinds. In part 2 we develop reduction methods for solving general integral and functional equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd kinds.

Book is intended for mathematicians, which are interested in theory of integral operators and theory of integral equations.

ISBN 978-5-906906-51-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге предлагаются методы решения функциональных уравнений

$$Tx(s) = f(s), \tag{I}$$

$$x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \tag{II}$$

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \tag{III}$$

где правая часть f — известная функция из пространства $L_2(\mu)$ μ-измеримых функций с суммируемым квадратом, решение x ищется в $L_2(\mu)$, коэффициент $a(s)$ — известная μ-измеримая ограниченная функция, T — линейный непрерывный оператор в $L_2(\mu)$, λ — числовой параметр. Если T — интегральный оператор, то функциональные уравнения (I), (II), (III) становятся интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов. По аналогии с интегральными уравнениями уравнение (I) называется уравнением 1-го рода, уравнение (II) — уравнением 2-го рода, уравнение (III) — уравнением 3-го рода.

Относительно оператора T в (I), (II), (III), кроме его линейности и непрерывности, мы предполагаем, что нуль является точкой Вейля сопряженного к T оператора T^*, т. е. существует ортонормированная последовательность, которую T^* отображает в сходящуюся к 0 последовательность. Пусть B_0 — класс всех таких операторов. К классу B_0 при широких предположениях относительно меры μ принадлежат все действующие в $L_2(\mu)$ интегральные операторы, компактные, почти компактные, компактные по мере операторы и многие другие операторы.

Предложенные в книге методы решения уравнений (I), (II), (III) с операторами из класса B_0 заключаются в редукции этих уравнений с помощью явных обратимых линейных непрерывных преобразований к эквивалентным линейным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными или ядерными операторами либо к эквивалентным линейным интегральным уравнениям 2-го рода с ядрами простого вида, которые мы называем квазивырожденными карлемановскими ядрами. К получающимся после этой редукции интегральным уравнениям применимы точные и приближенные методы решения, в частности приближенные методы, разработанные в § 6.3.

Книга состоит из двух частей: часть I — Операторы — и часть II — Уравнения. В части I (главы 1, 2) исследуются свойства операторов, порождаемых уравнениями (I), (II), (III). Полученные здесь результаты применяются в части II при построении методов решения уравнений (I), (II), (III).

В главе 1 изучаются метрические и алгебраические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p.

В главе 2 устанавливаются алгебраические, спектральные и характеристические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2. Доказываются теоремы о необходимых и достаточных условиях приводимости унитарным преобразованием линейных операторов и семейств линейных операторов в L_2 к интегральному виду. На этих теоремах основаны представленные в части II (главы 3–6) методы линейной редукции уравнений (I), (II), (III) и систем уравнений (I), (II), (III) к известным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода.

В главе 3 рассматриваются уравнения (I) с операторами из введенного выше класса B_0, системы аналогичных уравнений, общие интегральные уравнения и системы 1-го рода в L_2. Даются методы сведения этих уравнений и систем к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными или ядерными операторами.

Глава 4 посвящена линейным функциональным и интегральным уравнениям 2-го рода в L_2, а также системам таких уравнений. При условии, что операторы в них принадлежат классу B_0, указанные уравнения и системы редуцируются к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Для решения этих уравнений в § 6.3 разработаны приближенные методы.

В главе 5 изучаются линейные функциональные и интегральные уравнения 3-го рода в L_2 и системы таких уравнений. При широких предположениях относительно коэффициентов и операторов эти уравнения и системы приводятся либо к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода в L_2 с ядерными операторами, либо к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода в L_2 с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К последним уравнениям применимы приближенные методы из § 6.3. Третий параграф главы 5 посвящен функциональным и интегральным уравнениям 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 с неограниченными операторами.

В главе 6 рассматриваются линейные функциональные уравнения 1-го и 2-го родов в L_p с почти компактными операторами. Совокупность этих уравнений охватывает все интегральные уравнения 1-го и 2-го родов с произвольными интегральными операторами в L_p. Уравнения 1-го рода сводятся к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными операторами, а уравнения 2-го рода — к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами, для которых в заключительном третьем параграфе предложены приближенные методы решения.

Книга написана на основе результатов работ автора [12–31].

Все операторы, уравнения и системы в книге рассматриваются в комплексных пространствах L_p и L_2 (в вещественном случае построения полностью аналогичны).

Автор глубоко благодарен доценту И. М. Новицкому и профессору В. Д. Степанову за сделанные ими ценные замечания, а также сотрудникам Вычислительного центра ДВО РАН М. Г. Насыровой, Д. В. Прохорову, И. В. Седовой и Е. П. Ушаковой за подготовку рукописи к печати.

Часть I. Операторы

Глава 1. Интегральные и родственные им операторы в L_p

§ 1.1. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы в L_p

Приведем определения основных понятий, которые используются в главе 1.

Пусть X — непустое множество. Множество Σ подмножеств X, содержащее пустое множество $\varnothing$, дополнение относительно X каждого множества из Σ и объединение любого счетного множества множеств из Σ, называется *σ-алгеброй* подмножеств множества X. Отображение $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ называется *положительной мерой*, если $\mu(\varnothing) = 0$ и для любой последовательности $\{e_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из Σ имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\, e_n.$$

Множества из Σ называются измеримыми.

Пространством с мерой называется множество X с σ-алгеброй Σ его подмножеств и мерой $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$. Пространство с мерой будем обозначать (X, Σ, μ) или короче (X, μ).

Мера $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ называется *конечной*, если $\mu X < \infty$, и *σ-конечной*, если существует последовательность множеств $X_n \in \Sigma$ такая, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{и} \quad \mu X_n < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Мера μ называется *полной*, если из $e \in \Sigma$, $e_1 \subset e$ и $\mu\, e = 0$ следует, что $e_1 \in \Sigma$. Всюду далее будем рассматривать пространства с полными конечными или σ-конечными мерами.

Атомом меры μ называется множество $e \in \Sigma$ такое, что $\mu\, e > 0$ и, если $e_1 \in \Sigma$ и $e_1 \subset e$, то либо $\mu\, e_1 = 0$, либо $\mu\, e_1 = \mu\, e$. Если мера μ не имеет атомов, то она называется *неатомической*. Примером неатомической меры может служить мера Лебега измеримых по Лебегу множеств евклидова пространства. Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если существует множество $e \in \Sigma$ такое, что $0 < \mu\, e < \infty$ и e не содержит атомов меры μ.

На каждом множестве e, не содержащем атомов меры μ, эта мера непрерывна, т. е. для любого измеримого множества $e_1 \subseteq e$ существует измеримое подмножество $e_2 \subseteq e_1$ такое, что $\mu\, e_2 = \frac{1}{2}\mu\, e_1$. Это обстоятельство позволяет построить для каждого измеримого множества, не содержащего атомов меры, обобщенные функции Радемахера [44], которые будут существенно использованы далее.

Пусть измеримое множество e $(0 < \mu\, e < \infty)$ не содержит атомов. Разобьем множество e на два непересекающихся множества $e_i^{(1)}$ $(i = 1, 2)$, каждое из которых имеет меру $\frac{1}{2}\mu\, e$, и положим

$$r_{1,e}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu\, e}}\,, & \text{если } s \in e_1^{(1)}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mu\, e}}\,, & \text{если } s \in e_2^{(1)}, \\ 0, & \text{если } s \in X \setminus e. \end{cases}$$

Разобьем каждое из множеств $e_i^{(1)}$ $(i = 1, 2)$ на два непересекающихся множества $e_{k,i}^{(2)}$ $(k = 1, 2)$, каждое из которых имеет меру $\frac{1}{4}\mu\, e$, положим

$$r_{2,e}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu\, e}}\,, & \text{если } s \in e_{1,i}^{(2)},\ i = 1, 2, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mu\, e}}\,, & \text{если } s \in e_{2,i}^{(2)},\ i = 1, 2, \\ 0, & \text{если } s \in X \setminus e. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс, получим равномерно ограниченную ортонормированную в $L_2(X, \mu)$ последовательность обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$ с носителями в e. Отметим, что $|r_{n,e}(s)| = \frac{1}{\sqrt{\mu\, e}}\chi_e(s)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $s \in X$ (здесь χ_e — характеристическая функция множества $e : \chi_e(s) = 1$, если $s \in e$, и $\chi_e(s) = 0$, если $s \in X \setminus e$).

Пусть (X, Σ, μ) или короче (X, μ) — пространство с мерой. Через $L_0(X, \mu)$ обозначим совокупность всех μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0).

Через $L_p(X, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначим пространство всех элементов $f \in L_0(X, \mu)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Интеграл здесь и всюду далее понимается в смысле Лебега.

Назовем меру μ *сепарабельной*, если все пространства $L_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, сепарабельны.

Через $L_\infty(X,\mu)$ обозначим пространство всех элементов $g \in L_0(X,\mu)$ с конечной нормой

$$\|g\|_\infty = \inf_N \sup_{t \in X\setminus N} |g(t)|,$$

где N пробегает совокупность всех множеств меры 0.

Определение 1.1.1. *Множество* в $L_0(X,\mu)$ называется *компактным по мере*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры.

Определение 1.1.2 [33]. *Линейный оператор* $T : L_p(Y,\nu) \to L_0(X,\mu)$ называется *компактным по мере*, если он каждое ограниченное множество из $L_p(Y,\nu)$ отображает в множество, компактное по мере.

Напомним, что линейный оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_{p_1}(X,\mu)$ $(1 \leqslant p, p_1 \leqslant \infty)$ называется компактным, если T отображает каждое ограниченное множество из $L_p(Y,\nu)$ в относительно компактное множество в $L_{p_1}(X,\mu)$. При $1 < p < \infty$ линейный оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_{p_1}(X,\mu)$ компактен тогда и только тогда, когда он отображает каждую слабо сходящуюся последовательность из $L_p(Y,\nu)$ в сходящуюся по норме $L_{p_1}(X,\mu)$ последовательность.

Определение 1.1.3. *Линейный оператор* $T : L_p(Y,\nu) \to L_0(X,\mu)$ называется *почти компактным*, если найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что все операторы $P_nT : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ компактны; здесь $P_nf = \chi_{X_n}f$, $f \in L_p(X,\mu)$, χ_E — характеристическая функция множества E.

Теорема 1.1.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y,\nu) \to L_0(X,\mu)$ — почти компактный оператор, последовательность $\{f_m\} \subset L_p(Y,\nu)$ слабо сходится к $f \in L_p(Y,\nu)$. Тогда $\{Tf_m\}$ сходится к Tf по мере на каждом множестве конечной меры.*

$\lhd$ Пусть b_n — норма компактного оператора $P_nT : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$. Оператор

$$\widetilde{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(b_n+1)}\, P_nT$$

действует из $L_p(Y,\nu)$ в $L_p(X,\mu)$ и компактен. Следовательно, $\widetilde{T}f_m$ сходится к $\widetilde{T}f$ по норме $L_p(X,\mu)$, и поэтому $\widetilde{T}f_m$ сходится к $\widetilde{T}f$ по мере на любом множестве конечной меры. Рассмотрим функцию

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n + 1)\chi_{X_n}.$$

Тогда последовательность $Tf_m = b\widetilde{T}f_m$ сходится к $b\widetilde{T}f = Tf$ по мере на каждом множестве конечной меры. $\rhd$

Следствие 1.1.1. *При $1 < p < \infty$ каждый почти компактный линейный оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_0(X,\mu)$ компактен по мере.*

$\lhd$ Справедливость следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.1.1 и слабой компактности любого ограниченного множества в $L_p(Y,\nu)$ при $1 < p < \infty$. $\rhd$

Теорема 1.1.2. *Пусть $1 < p < \infty$. Для того чтобы линейный оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_1(X,\mu)$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы T был ограниченным и компактным по мере.*

$\lhd$ *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть $\{g_n\} \subset L_p(Y,\nu)$ слабо сходится к $g \in L_p(Y,\nu)$. Тогда Tg_n слабо сходится в $L_1(X,\mu)$ к Tg. Выберем из компактного по мере множества $\{Tg_n\}$ подпоследовательность Tg_{n_k}, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры к некоторой функции $f \in L_0(X,\mu)$. Пусть G — произвольное множество конечной меры, для которого $\chi_G f \in L_1(X,\mu)$. Так как $\chi_G Tg_{n_k} \to \chi_G Tg$ слабо в $L_1(G,\mu)$, то в силу следствий IV.8.10, IV.8.11 из [7]

$$\lim_{\mu E \to 0} \sup_k \int\limits_E |\chi_G Tg_{n_k}|\, d\mu = 0.$$

Отсюда и из сходимости $\chi_G Tg_{n_k}$ к $\chi_G f \in L_1(X,\mu)$ по мере на G получим

$$\left\|\chi_G Tg_{n_k} - \chi_G f\right\|_1 \longrightarrow 0,$$

здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(X,\mu)$. Так как $\chi_G Tg_{n_k} \to \chi_G Tg$ слабо в $L_1(X,\mu)$, то $\chi_G Tg = \chi_G f$. Следовательно, $f = Tg$. Таким образом, $Tg_{n_k} \to Tg$ слабо в $L_1(X,\mu)$ и $Tg_{n_k} \to Tg$ по мере на любом множестве конечной меры. Тогда по теореме IV.8.12 из [7] $\|Tg_{n_k} - Tg\|_1 \to 0$. $\rhd$

Следствие 1.1.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y,\nu) \to L_1(X,\mu)$ — почти компактный оператор. Тогда T — компактный оператор.*

$\lhd$ Пусть $h_m \to h$ по норме $L_p(Y,\nu)$ и $Th_m \to g$ по норме $L_1(X,\mu)$. Так как по теореме 1.1.1 Th_m сходится к Th по мере на каждом множестве конечной меры, то $g = Th$ и по теореме о замкнутом графике оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_1(X,\mu)$ ограничен. Отсюда в силу теоремы 1.1.2 и следствия 1.1.1 теоремы 1.1.1 оператор T компактен. $\rhd$

Итак, при $1 < p < \infty$ каждый почти компактный оператор $T : L_p(Y,\nu) \to L_0(X,\mu)$ компактен по мере. Обратное утверждение верно не всегда, как показывает следующий пример 1.1.1. В этом примере через $\|\cdot\|_p$ обозначена норма в $L_p(0,1)$.

Пример 1.1.1. Пусть $2 < p < \infty$, $X = (0,1)$, μ — мера Лебега, $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера, $\{\chi_n\}$ — ортонормированная система Хаара. Определим оператор $T_0 : L_p \to L_2$ равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\chi_n\right\|_p^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 f r_n \, dt \right) \chi_n.$$

Тогда T_0 — компактный по мере оператор, но для любого множества $e \subset (0,1)$ положительной меры найдется последовательность $n_j \to \infty$ такая, что $\lim_{n_j\to\infty} \|P_e T_0 r_{n_j}\|_p = \infty$, поэтому $P_e T_0$ не компактен как оператор из L_p в L_p.

$\lhd$ Так как $\|\chi_n\|_p^{-\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, то T_0 компактен как оператор, действующий из L_2 в L_2, и, следовательно, компактен по мере как оператор из L_p в L_0.

Покажем справедливость второго утверждения. Пусть $e \subset (0,1)$ — произвольное замкнутое множество положительной меры. Рассмотрим его дополнение $Ce = (0,1) \setminus e$. Множество Ce открыто и поэтому является объединением конечного или счетного семейства $\{\sigma_j\}$ попарно не пересекающихся интервалов. Обозначим через $\Delta_n^+ (\Delta_n^-)$ максимальный интервал, на котором функция Хаара χ_n положительна (отрицательна). Положим $\Delta_n = \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \cup \{t_n\}$, где t_n — правый конец интервала Δ_n^+. Тогда Δ_n — интервал, называемый двоичным. Если Ce есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся интервалов, то в e содержится некоторый интервал Δ, поэтому существует возрастающая к ∞ последовательность индексов $\{n,1\}$ такая, что двоичные интервалы $\Delta_{n,1}$ содержатся в Δ. Имеем при $n,1 \to \infty$

$$\begin{aligned} \left\|P_e T_0 r_{n,1}\right\|_p &= \left\|\chi_{n,1}\right\|_p^{-\frac{1}{2}} \left\|P_e \chi_{n,1}\right\|_p \geqslant \\ &\geqslant \left\|\chi_{n,1}\right\|_p^{-\frac{1}{2}} \left\|P_{\Delta_{n,1}} \chi_{n,1}\right\|_p = \left\|\chi_{n,1}\right\|_p^{\frac{1}{2}} \to \infty. \end{aligned}$$

Пусть Ce — объединение счетного множества попарно не пересекающихся интервалов σ_j, $j = 1, 2, \ldots$ Выберем номер M так, чтобы

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \mu\,\sigma_j < \frac{1}{2}\,\mu\, e,$$

и рассмотрим последовательность $\{\Delta_{n,2}\}$ всех двоичных интервалов, не содержащихся в $\bigcup_{j=1}^{M}\sigma_j$. Покажем, что из $\{\Delta_{n,2}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\Delta_{n_m}\}$ так, чтобы $n_m\to\infty$ при $m\to\infty$ и для всех $m=1,2,\ldots$

$$\mu(Ce\cap\Delta_{n_m})=\mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty}\sigma_j\right)\cap\Delta_{n_m}\right)\leqslant\mu(e\cap\Delta_{n_m}). \tag{1.1.1}$$

Предположим противное. Тогда для двоичных интервалов $\Delta_{n,2}$, за исключением конечного числа двоичных интервалов, выполняется противоположное неравенство

$$\mu(Ce\cap\Delta_{n,2})=\mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty}\sigma_j\right)\cap\Delta_{n,2}\right)>\mu(e\cap\Delta_{n,2}). \tag{1.1.2}$$

Пусть $k=0,1,2,\ldots$ Двоичные интервалы $\Delta_k^i=\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right)$, $i=1,2,\ldots,2^k$, называются интервалами k-й пачки. Интервалы каждой k-й пачки попарно не пересекаются, и их объединение вместе с внутренними концевыми точками совпадает с $(0,1)$. Пусть $\Delta_{k_1}^{i_1},\ldots,\Delta_{k_m}^{i_m}$ — все интервалы, для которых не выполняется неравенство (1.1.2), и пусть $l=\max(k_1,\ldots,k_m)$. Тогда для всех интервалов Δ_ν^i, $\nu=l+1,l+2,\ldots$, не принадлежащих $\widetilde{\sigma}=\bigcup_{j=1}^{M}\sigma_j$, выполняется неравенство (1.1.2). Выберем достаточно большой номер $s>l$ так, чтобы

$$\sum_i{}'\mu\big(e\cap\Delta_s^i\big)>\frac{2}{3}\,\mu\, e,$$

где сумма $\sum_i'$ берется по всем индексам i, для которых интервал Δ_s^i не принадлежит $\widetilde{\sigma}$. Пусть $\sigma=\bigcup_{j=M+1}^{\infty}\sigma_j$. Тогда в силу выбора M и неравенства (1.1.2)

$$\frac{1}{2}\,\mu\, e>\mu\sigma\geqslant\sum_i{}'\mu\big(\sigma\cap\Delta_s^i\big)>\sum_i{}'\mu\big(e\cap\Delta_s^i\big)>\frac{2}{3}\,\mu\, e.$$

Полученное противоречие показывает, что существует последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_{n_m}\}$ такая, что для всех $m=1,2,\ldots$ выполняется неравенство (1.1.1), при этом $n_m\to\infty$ при $m\to\infty$.

Положим $h_m=\|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}}\chi_{n_m}$. Так как функция $|h_m|$ эквивалентна постоянной на Δ_{n_m}, то в силу (1.1.1) для всех $m=1,2,\ldots$

$$\big\|\chi_{n_m}\big\|_p^{\frac{p}{2}}=\int\limits_{\Delta_{n_m}}|h_m|^p\,dt=\int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}}|h_m|^p\,dt+\int\limits_{Ce\cap\Delta_{n_m}}|h_m|^p\,dt\leqslant 2\int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}}|h_m|^p\,dt.$$

Следовательно, для всех $m = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\, dt \geqslant \frac{1}{2}\, \|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}},$$

поэтому при $m \to \infty$

$$\|P_e T_0 r_{n_m}\|_p^p = \left\|P_e \chi_{n_m} \|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}}\right\|_p^p = \int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\, dt \geqslant \frac{1}{2}\, \|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}} \to \infty,$$

и справедливость доказываемого утверждения вытекает из того, что любое множество положительной меры из $(0, 1)$ содержит замкнутое множество положительной меры. $\triangleright$

Определение 1.1.4. *Линейный оператор* $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times Y$ $(\mu \times \nu)$-измеримая $(\mu \times \nu)$-почти всюду конечная функция $K(s, t)$ такая, что для всех $f \in L_p(Y, \nu)$

$$Tf(s) = \int\limits_Y K(s, t)\, f(t)\, d\nu(t) \tag{1.1.3}$$

для μ-почти всех $s \in X$. Функция $K(s, t)$ называется *ядром интегрального оператора*. Будем говорить, что ядро $K(s, t)$ порождает интегральный оператор по формуле (1.1.3). *Интегральный оператор* $T : L_p(Y, \nu) \to L_p(X, \mu)$ называется *регулярным*, если интегральный оператор

$$|T|f(s) = \int\limits_Y |K(s, t)|\, f(t)\, d\nu(t)$$

определен на всем $L_p(Y, \nu)$ и действует в $L_p(X, \mu)$.

Имеет место следующая теорема о компактной регулярной факторизации произвольных интегральных операторов, действующих из $L_p(Y, \nu)$ в $L_0(X, \mu)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда T можно представить в виде $T = AB$, где $B : L_p(Y, \nu) \to L_p(X, \mu)$ — регулярный компактный интегральный оператор, A — оператор умножения на функцию $a(s) \geqslant 1$: $Ah(s) = a(s)h(s)$, $h \in L_p(X, \mu)$,*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{X_n}(s), \quad \lambda_n \geqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$\{X_n\}$ — разбиение X на попарно не пересекающиеся измеримые множества с конечными мерами.

Эта теорема при $p = 2$ сформулирована и по существу доказана в совместной работе автора и В. Д. Степанова [32, с. 66]. Для $1 < p \leqslant \infty$ теорема 1.1.3 доказана автором [18, 19]. Для $1 < p < \infty$ близкое к теореме 1.1.3 утверждение доказано другим методом В. Шахермайером и Л. Вайсом [52].

Следствие 1.1.3. *При $1 < p \leqslant \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ почти компактен.*

Следствие 1.1.4. *При $1 < p < \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ отображает слабо сходящиеся в $L_p(Y, \nu)$ последовательности в последовательности, сходящиеся по мере на любом множестве конечной меры.*

Следствие 1.1.5. *При $1 < p < \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ компактен по мере.*

Следствие 1.1.6. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \to L_1(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда T компактен.*

Справедливость следствия вытекает из следствия 1.1.3 и следствия 1.1.2 теоремы 1.1.2.

Таким образом, при $1 < p \leqslant \infty$ любой интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \to L_0(X, \mu)$ почти компактен. Следующий пример 1.1.2 показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример 1.1.2. Пусть $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. Для любого $1 < p < \infty$ оператор

$$T_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, r_n) r_n, \quad f \in L_p(0, 1), \tag{1.1.4}$$

где все μ_n вещественны, $\mu_n \to 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 = \infty, \quad (f, r_n) = \int\limits_0^1 f r_n \, dt,$$

компактен как оператор, действующий из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, но для любого множества $e \subset [0, 1]$ положительной лебеговой меры оператор $P_e T_1$ не является интегральным. Здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(0, 1)$.

$\lhd$ Пусть $2 \leqslant p < \infty$. Так как для любой функции $f \in L_p(0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl|(f, r_n)\bigr|^2 < \infty,$$

то в силу неравенства Хинчина ряд (1.1.4) сходится по норме $L_p(0,1)$, при этом для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\left\|T_1 f - \sum_{n=1}^{m} \mu_n(f, r_n) r_n\right\|_p = \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n\right\|_p \leqslant C_p \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n\right\|_2 =$$
$$= C_p \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\mu_n|^2 \, |(f, r_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \, \|f\|_2 \leqslant C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \, \|f\|_p.$$

Отсюда

$$\|T_1 - S_m\| \leqslant C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \longrightarrow 0$$

при $m \to \infty$; здесь

$$S_m f = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(f, r_n) r_n$$

— конечномерный оператор в $L_p(0,1)$. Следовательно, оператор $T_1 : L_p(0,1) \to L_p(0,1)$ компактен при $2 \leqslant p < \infty$.

Пусть теперь $1 < p < 2$ и $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда $2 < q < \infty$. Рассмотрим в $L_q(0,1)$ оператор

$$\widehat{T}_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n.$$

По доказанному $\widehat{T}_1$ — компактный оператор в $L_q(0,1)$. Так как T_1 — сопряженный к $\widehat{T}_1$ оператор, то T_1 — компактный оператор в $L_p(0,1)$.

Докажем, что $P_e T_1$ — неинтегральный оператор. Предположим противное: пусть $P_e T_1$ — интегральный оператор и $K_e(s,t)$ — его ядро. Имеем

$$\int_0^1 \big|K_e(s,t)\big| \, dt < \infty$$

для почти всех $s \in (0,1)$. Для почти всех $s \in (0,1)$ и всех $n, m = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 K_e(s,t) \, r_n(t) \, dt = P_e T_1 r_n(s) = \mu_n \chi_e(s) r_n(s),$$

$$\int_0^1 K_e(s,t) \, r_m^{\perp}(t) \, dt = P_e T_1 r_m^{\perp}(s) = 0,$$

где $\{r_m^{\perp}\}$ — любой ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{r_m\}$, состоящий из ограниченных функций. Отсюда в силу [11, с. 154] при подходящем $s \in e$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \chi_e(s)\,|r_n(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 8\int_0^1 \bigl|K_e(s,t)\bigr|\,dt < \infty,$$

что противоречит условию $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 = \infty$. $\rhd$

Из приведенного доказательства следует, что даже сужения операторов $P_e T_1$ на $L_\infty(0,1)$ не являются интегральными операторами, т. е. операторы $P_e T_1$ — не частично интегральные операторы в смысле определения I.3.1 из [19].

В заключение докажем теорему, из которой вытекает, что все линейные непрерывные в L_2 компактные по мере и, следовательно, все почти компактные операторы в L_2 и все интегральные операторы в L_2 принадлежат классу B_0, введенному в предисловии.

Определение 1.1.5. Число 0 называется *точкой Вейля* линейного оператора $Q : L_r(X,\mu) \to L_r(Y,\nu)$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, если найдется слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{\varphi_n\} \subset L_r(X,\mu)$, $\|\varphi_n\|_r = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|Q\varphi_n\|_r \to 0$ при $n \to \infty$; здесь $\|\cdot\|_r$ — норма в $L_r(Y,\nu)$. При $L_r(Y,\nu) = L_r(X,\mu)$ точка Вейля 0 называется точкой предельного спектра $\sigma_c(Q)$ оператора Q.

Теорема 1.1.4. *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ не является чисто атомической, $T : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ — линейный непрерывный компактный по мере оператор. Тогда 0 является точкой Вейля сопряженного оператора T^*.*

$\lhd$ Пусть e, $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ. Рассмотрим оператор $P_e T$, где $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(X,\mu)$. По теореме 1.1.2 оператор $P_e T : L_p(Y,\nu) \to L_1(X,\mu)$ компактен. Следовательно, сопряженный оператор $T^* P_e : L_\infty(X,\mu) \to L_q(Y,\nu)$ компактен (здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{g_n\} \subset L_q(X,\mu)$ с носителями в e. По теореме Римана — Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n f\, d\mu = 0$$

для любой функции $f \in L_1(X,\mu)$. Таким образом, $\{g_n\}$ сходится к 0 в $\sigma(L_\infty, L_1)$-топологии и сходится слабо к 0 в $L_q(X,\mu)$. Следовательно, $\|T^* g_n\|_q = \|T^* P_e g_n\|_q \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из $\|g_n\|_q > a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, вытекает, что 0 — точка Вейля оператора T^*. $\rhd$

Следствие 1.1.7. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ — линейный непрерывный оператор, множество e, $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ. Если $P_e T$ компактен по мере, либо почти компактен, либо является интегральным оператором, то 0 — точка Вейля оператора T^*.*

§ 1.2. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p

В этом параграфе мы рассмотрим классы операторов, тесно связанных с функциональными и интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p. Всюду в параграфе (X, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой μ, $L_p(\mu) := L_p(X, \mu)$, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(\mu)$, $B(L_p(\mu))$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_p(\mu)$ в $L_p(\mu)$, с операторной нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1.2.1. Оператор $Tf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где $a(s) \in L_\infty(\mu)$, $D \in B(L_p(\mu))$ — интегральный оператор, называется *интегральным оператором 3-го рода* [42, с. 5]. Если $a(s) = \alpha \neq 0$ для почти всех $s \in X$, то T называется *интегральным оператором 2-го рода*; если $a(s) = 0$ для почти всех $s \in X$, то T называется *интегральным оператором 1-го рода*. Совокупность всех интегральных операторов 3-го рода (2-го рода, 1-го рода) обозначим через $I_{p,3}$ (соответственно через $I_{p,2}$, $I_{p,1}$).

Определение 1.2.2. Пусть $B_{p,1}$ — множество всех компактных по мере операторов из $B(L_p(\mu))$. Множество операторов вида $Tf(s) = a(s)f(s)+ Lf(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,3}$. Совокупность операторов вида $\alpha\mathbf{1} + L$, где α — произвольное число, $\mathbf{1}$ — тождественный оператор, L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,2}$.

Определение 1.2.3. Пусть $C_{p,1}$ — множество всех почти компактных операторов из $B(L_p(\mu))$, $C_{p,2}$ — совокупность операторов вида $\alpha\mathbf{1} + K$, где α — произвольное число, K — любой оператор из $C_{p,1}$. Через $C_{p,3}$ обозначим множество операторов вида $a(s)f(s)+Kf(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, K — произвольный оператор из $C_{p,1}$.

Отметим, что в определении множеств $B_{p,2}$, $C_{p,2}$ число α может равняться 0, так что $B_{p,2}$ является объединением всех компактных по мере операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$, а $C_{p,2}$ является объединением всех почти компактных операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$.

Из определений 1.2.2, 1.2.3 следует, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ множества $B_{p,1}$, $B_{p,2}$, $B_{p,3}$, $C_{p,1}$, $C_{p,2}$, $C_{p,3}$ являются алгебрами и $B_{p,1} \subset B_{p,2} \subset B_{p,3} \subset B(L_p(\mu))$, $C_{p,1} \subset C_{p,2} \subset C_{p,3}$, $C_{p,1} \subset B_{p,1}$, $C_{p,2} \subset B_{p,2}$, $C_{p,3} \subset B_{p,3}$. Кроме того, $B_{p,1}$ и $C_{p,1}$ являются правыми идеалами алгебры $B(L_p(\mu))$.

Теорема 1.2.1. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $B_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.*

$\lhd$ Пусть $Q_n \in B_{p,1}$, $Q \in B(L_p(\mu))$ и $\lim_{n\to\infty} \|Q_n - Q\| = 0$. Покажем, что $Q \in B_{p,1}$. Для любого e, $0 < \mu\, e < \infty$, при $n \to \infty$

$$\sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \|P_e Q - P_e Q_n\|_1 \leqslant (\mu\, e)^{\frac{1}{q}} \|Q - Q_n\| \longrightarrow 0,$$

где $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В силу теоремы 1.1.2 операторы $P_e Q_n : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$ компактны. Следовательно, $P_e Q : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$ компактен. Значит, $Q \in B_{p,1}$. $\rhd$

Теорема 1.2.2. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,3}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая с алгеброй $B(L_p(\mu))$.*

$\lhd$ Покажем замкнутость алгебры $B_{p,3}$. Будем предполагать, что $L_p(\mu)$ — комплексное пространство (случай вещественного $L_p(\mu)$ рассматривается аналогично). Пусть $\tau \in B_{p,3}$. Тогда $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, $a \in L_\infty(\mu)$, $Q \in B_{p,1}$. Пусть α — какое-нибудь существенное значение функции $a(s)$, т. е.

$$\mu\big\{s \bigm| s \in X, |a(s) - \alpha| < \varepsilon\big\} > 0 \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0.$$

Покажем, что для любой сходящейся к 0 последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел найдется последовательность функций f_n с попарно не пересекающимися носителями такая, что

$$\|f_n\|_q = 1, \quad \big\|\big(\overline{a(s)} - \overline{\alpha}\big) f_n\big\|_q \leqslant \varepsilon_n, \quad \|Q^* f_n\|_q \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.1}$$

где Q^* — сопряженный к Q оператор, $\|\cdot\|_q$ — норма в $L_q(\mu)$. Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $\{e_n\}$ с конечными положительными мерами так, чтобы $|a(s) - \alpha| \leqslant \varepsilon_n$ для всех $s \in e_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Зафиксируем индекс n и рассмотрим ортонормированную последовательность $\{r_{m,e_n}\}_{m=1}^\infty$ обобщенных функций Радемахера с носителями, совпадающими с e_n (определение этих функций см. в начале § 1.1). Мы имеем

$$|r_{m,e_n}| = \frac{1}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \chi\, e_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Положим

$$g_{n,m} = (\mu\, e_n)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} r_{m,e_n}.$$

Тогда $\|g_{n,m}\|_q = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ Так как в силу теоремы 1.1.2 $P_{e_n} Q : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$ — компактный оператор, то $Q^* P_{e_n}$ компактен как оператор, действующий из $L_\infty(\mu)$ в $L_q(\mu)$, поэтому последовательность $\{Q^* g_{n,m}\}_{m=1}^\infty = \{Q^* P_{e_n} g_{n,m}\}_{m=1}^\infty$ компактна в $L_q(\mu)$. Кроме того, для любой функции $h \in L_p(\mu)$ по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_X h\, \overline{Q^* g_{n,m}}\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{e_n} Q\, h\, g_{n,m}\, d\mu = 0.$$

Следовательно, $\lim_{m\to\infty} \|Q^* g_{n,m}\|_q = 0$. Выберем номер m_n так, чтобы $\|Q^* g_{n,m_n}\|_q \leqslant \varepsilon_n$. Тогда последовательность $f_n = g_{n,m_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, искомая. При этом носитель каждой функции f_n совпадает с e_n. Из (1.2.1) получим

$$|\alpha| = \|\alpha f_n\|_q \leqslant \big\|(\tau^* - \overline{\alpha}1) f_n\big\|_q + \|\tau^* f_n\|_q \leqslant$$
$$\leqslant \big\|\big(\overline{a(s)} - \overline{\alpha}\big) f_n\big\|_q + \|Q^* f_n\|_q + \|\tau^*\| \leqslant 2\varepsilon_n + \|\tau^*\|.$$

Отсюда $|\alpha| \leqslant \|\tau^*\|$ для любого существенного значения α функции $a(s)$. Значит, $\|a\|_\infty \leqslant \|\tau^*\|$ и

$$\|a\|_\infty \leqslant \|\tau\|. \tag{1.2.2}$$

Пусть $T_n = A_n + Q_n$, где $A_n f = a_n f$, $f \in L_p(\mu)$, $a_n \in L_\infty(\mu)$, Q_n — компактный по мере оператор в $L_p(\mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Покажем, что $T \in B_{p,3}$. В силу (1.2.2) имеем $\|a_n - a_m\|_\infty \leqslant \|T_n - T_m\|$. Поэтому найдется функция $a \in L_\infty(\mu)$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_\infty = 0$. Так как $\|Q_n - Q_m\| \leqslant \|a_n - a_m\|_\infty + \|T_n - T_m\|$, то существует оператор Q в $L_p(\mu)$ такой, что $\lim_{n\to\infty} \|Q - Q_n\| = 0$. Тогда $T = A + Q$, где A — оператор умножения на a, при этом по теореме 1.2.1 $Q \in B_{p,1}$. Следовательно, $T \in B_{p,3}$. Таким образом, $B_{p,3}$ — банахова алгебра.

Докажем, что $B_{p,3}$ не совпадает с $B(L_p)$. Так как мера μ по условию теоремы не имеет атомов, то можно считать, не ограничивая общности, что $L_p = L_p(0,1)$, μ — мера Лебега. Рассмотрим при $p \geqslant 2$ оператор

$$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f r_n \, dt \right) r_n, \quad f \in L_p,$$

где $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. В силу неравенства Хинчина $P \in B(L_p)$. Кроме того, $P = P^2$. Покажем, что $P \notin B_{p,3}$. Предположим противное, тогда $P = A + C$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, $C \in B_{p,1}$. Следовательно, $Pf = P^2 f = a^2 f + C_1 f$, $f \in L_p$, где $C_1 \in B_{p,1}$. Отсюда $A + C = A^2 + C_1$, $A - A^2 + C - C_1 = 0$, и в силу (1.2.2) получим $\|a^2 - a\|_\infty \leqslant \|0\| = 0$ и $a(a-1) = 0$. Но тогда $a = 0 \cdot \chi_{e_0} + \chi_{e_1}$, где e_0 — множество, на котором функция a обращается в 0, e_1 — множество, на котором a равна 1. По теореме 1.1.2 имеем $\|Cr_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда

$$\chi_{e_0} r_n = \chi_{e_0} P r_n = \chi_{e_0} a r_n + \chi_{e_0} C r_n = \chi_{e_0} C r_n \to 0$$

при $n \to \infty$ по норме L_1. Значит,

$$\mu\, e_0 = \|\chi_{e_0} r_n\|_1 = \|\chi_{e_0} C r_n\|_1 \to 0$$

при $n \to \infty$, здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в L_1. Таким образом, $\mu\, e_0 = 0$. Поэтому $a(s) = 1$ почти всюду, и $P = \mathbf{1} + C$. Пусть $\{v_n\} = \{w_n\} \setminus \{r_n\}$, где $\{w_n\}$ — ортонормированная система Уолша. Тогда $0 = Pv_n = v_n + Cv_n$ для всех n. Следовательно, $1 = \|v_n\|_1 = \|Cv_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что $P \notin B_{p,3}$ при $p \geqslant 2$.

Пусть теперь $1 < q < 2$. Рассмотрим операторы $P \in B(L_p)$ и $P^* \in B(L_q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Так как $P = P^2$, то $P^* = (P^*)^2$. Предположив, что $P^* \in B_{q,3}$, будем иметь, подобно предыдущему, $P^* = \mathbf{1} + D$, где $D \in B_{q,1}$. Для любой функции $h \in L_p$ и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 h\,\overline{P^* v_n}\,dt = \int_0^1 Ph\,v_n\,dt = 0,$$

поэтому $P^* v_n = 0$ для всех n. Отсюда $1 = \|v_n\|_1 = \|Dv_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $P^* \notin B_{q,3}$ при $1 < q < 2$. $\rhd$

Следствие 1.2.1. *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ не имеет атомов и пусть $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, Q — компактный по мере оператор из $B(L_p(\mu))$. Тогда каждое существенное значение функции $\overline{a(s)}$ (или функции $a(s)$, если $L_p(\mu)$ — вещественное пространство) является точкой предельного спектра оператора τ^*.*

$\lhd$ Так как построенная в ходе доказательства теоремы 1.2.2 последовательность $f_n = g_{n,m_n}$ слабо сходится к 0 в $L_q(\mu)$, $\|f_n\|_q = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, некомпактна и в силу (1.2.1) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\tau^* - \overline{\alpha}\,\mathbf{1})f_n\right\|_q = 0,$$

то $\overline{\alpha}$ принадлежит предельному спектру оператора τ^*. $\rhd$

Следствие 1.2.2. *Для оператора τ из следствия* 1.2.1 *выполняется неравенство*

$$\|a\|_\infty \leqslant \|\tau\|. \tag{1.2.3}$$

$\lhd$ Это неравенство получено при доказательстве теоремы 1.2.2 (см. неравенство (1.2.2)). $\rhd$

Следствие 1.2.3. *Представление оператора $T \in B_{p,3}$ в виде $Tf = af + Lf$, где $a \in L_\infty$, $L \in B_{p,1}$, является единственным.*

$\lhd$ Действительно, если $Tf = a_1 f + L_1 f$, где $a_1 \in L_\infty$, $L_1 \in B_{p,1}$, то $(a_1 - a)f + (L_1 - L)f = 0$ для всех $f \in L_p$. Но $0 \in B_{p,3}$, отсюда и из (1.2.3) получим $\|a_1 - a\|_\infty \leqslant 0$. Значит, $a_1 - a = 0$, $a_1 = a$ и, следовательно, $L_1 = L$. $\rhd$

Теорема 1.2.3. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,2}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая ни с $B_{p,1}$, ни с $B_{p,3}$.*

$\lhd$ Замкнутость алгебры $B_{p,2}$ следует из включения $B_{p,2} \subset B_{p,3}$ и доказательства теоремы 1.2.2. Из $\mathbf{1} \in B_{p,2} \setminus B_{p,1}$ следует $B_{p,2} \neq B_{p,1}$. Покажем, что $B_{p,2} \neq B_{p,3}$. Возьмем множество e положительной меры с дополнением ce положительной меры и рассмотрим оператор $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$. Имеем $P_e \in B_{p,3}$. Докажем, что $P_e \notin B_{p,2}$. Предположим противное. Тогда

$P_e = \alpha\mathbf{1} + K$, где $K \in B_{p,1}$. Если $\alpha = 0$, то $K = P_e$, что в силу неатомичности меры μ невозможно. Если $\alpha = 1$, то $K = -P_{ce}$, что также невозможно. Пусть $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Спектр оператора P_e есть множество $\{0; 1\}$. Следовательно, $K = P_e - \alpha\mathbf{1}$ имеет обратный $K^{-1} \in B(L_p(\mu))$. Но тогда $\mathbf{1} = KK^{-1}$ компактен по мере, что также невозможно. $\triangleright$

Теорема 1.2.4 [54]. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $C_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.*

$\triangleleft$ Приведем доказательство этого результата, следуя [54]. Пусть сначала $\mu X < \infty$. В этом случае $T \in C_{p,1}$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $X_\varepsilon \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и оператор $P_\varepsilon T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ компактен (здесь $P_\varepsilon f = \chi_{X_\varepsilon} f$, $f \in L_p(\mu)$). Пусть $T_n \in C_{p,1}$ и $\|T_n - T\| \to 0$. Выберем X_n так, чтобы $\mu(X \setminus X_n) \leqslant \varepsilon/2^n$ и операторы $P_n T$ были компактными ($P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p(\mu)$). Положим $X_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty X_n$. Тогда $\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и операторы $P_\varepsilon T_n$, $n = 1, 2, \ldots$, компактны. Следовательно, $P_\varepsilon T$ компактен.

Случай $\mu X = \infty$ сводится к рассмотренному, если ввести изометрию $\rho : L_p(X, \mu) \to L_p(X, gd\mu)$, где $\rho(f) = g^{-\frac{1}{p}} f$, g — строго положительная функция из $L_1(X, \mu)$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_X g\, d\mu = 1.$$

Тогда оператор T принадлежит $C_{p,1}$, если и только если оператор $\rho T \rho^{-1} : L_p(X, gd\mu) \to L_p(X, gd\mu)$ почти компактен. $\triangleright$

Теорема 1.2.5. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,3}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая с $B(L_p(\mu))$.*

$\triangleleft$ $C_{p,3} \subset B_{p,3} \neq B(L_p(\mu))$. Докажем замкнутость $C_{p,3}$. Пусть $T_n \in C_{p,3}$, $T \in B(L_p(\mu))$ и $\|T_n - T\| \to 0$. Имеем $T_n = A_n + Q_n$, где $Q_n \in C_{p,1}$, $A_n f = a_n f$, $f \in L_p(\mu)$. Так как $T_n \in B_{p,3}$, то по теореме 1.2.2 найдутся $a_n \in L_\infty(\mu)$ и $Q \in B(L_p(\mu))$ такие, что $\|a_n - a\|_\infty \to 0$, $\|Q_n - Q\| \to 0$. В силу теоремы 1.2.4 $Q \in C_{p,1}$. Значит, $T \in C_{p,3}$. $\triangleright$

Теорема 1.2.6. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,2}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая ни с $C_{p,1}$, ни с $C_{p,3}$.*

$\triangleleft$ Из включения $C_{p,2} \subset C_{p,3}$ и доказательства предыдущей теоремы вытекает замкнутость $C_{p,2}$. Так как $\mathbf{1} \in C_{p,2}$ и по теореме 1.2.3 имеем $\mathbf{1} \notin B_{p,1} \supset C_{p,1}$, то $C_{p,2} \neq C_{p,1}$. Покажем, что $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. Оператор P_e из доказательства теоремы 1.2.3 принадлежит $C_{p,3}$, но не принадлежит $B_{p,2} \supset C_{p,2}$. Следовательно, $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. $\triangleright$

Теорема 1.2.7 [54]. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $\overline{I_{p,1}} = C_{p,1}$ (здесь и далее черта означает замыкание по операторной норме).*

Теорема 1.2.8. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и мера* μ *не имеет атомов. Тогда* $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$, $\overline{I_{p,3}} = C_{p,3}$.

$\triangleleft$ Имеем $I_{p,3} \subset C_{p,3}$. Значит, $\overline{I_{p,3}} \subset \overline{C_{p,3}} = C_{p,3}$. Пусть $T \in C_{p,3}$. Тогда $T = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, $a \in L_\infty(\mu)$, $Q \in C_{p,1}$. По предыдущей теореме найдутся $Q_n \in I_{p,1}$ такие, что $\|Q_n - Q\| \to 0$. Следовательно, $T_n = A + Q_n \in I_{p,3}$ и $\|T_n - T\| \to 0$. Поэтому $T \in \overline{I_{p,3}}$ и $C_{p,3} \subset \overline{I_{p,3}}$. Равенство $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$ доказывается аналогично. $\triangleright$

В заключение параграфа рассмотрим некоторые свойства интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов.

1) Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $I_{p,1} \subset I_{p,1} \cup I_{p,2} \subset I_{p,3}$, и если мера μ не имеет атомов, то $I_{p,1} \neq I_{p,2}$, $I_{p,1} \neq I_{p,3} \neq I_{p,2}$.

Действительно, $1 \in I_{p,2} \setminus I_{p,1}$ и $P_e \in I_{p,3} \setminus (I_{p,1} \cup I_{p,2})$, где P_e — оператор из доказательства теоремы 1.2.3.

2) Множество $I_{p,1}$ в случае неатомичности меры μ не является алгеброй: в [38; 39, теорема I.4.18] В. Д. Степанов для любого $1 < p < \infty$ построил интегральный оператор свертки в $L_p(-\infty, \infty)$, квадрат которого не является интегральным оператором. В [17; 19, теорема I.8.2] построены два компактных интегральных оператора из $B(L_2(0,1))$, произведение которых не является интегральным оператором. В теореме 2.1.3 главы 2 приведен компактный оператор $S \in B(L_2(0,1))$ со свойствами: 1) S — интегральный оператор; 2) S^2 — неинтегральный оператор; 3) $S^3 = 0$. Приведенные результаты дают отрицательный ответ на вопрос, образуют ли интегральные операторы в L_2 алгебру, поставленный в монографии П. Халмоша и В. Сандера [42]. Множества $I_{p,1} \cup I_{p,2}$, $I_{p,3}$, по-видимому, также не являются алгебрами (для $p = 2$ это доказано в теореме 2.1.4 главы 2).

3) Задача об условиях интегральности произведений двух интегральных операторов и более общая задача об условиях интегральности операторных произведений, в которых один или несколько сомножителей — интегральные операторы, изучались в книге [23].

4) Необходимые и достаточные условия представимости линейных операторв в интегральной форме найдены в 1970-х годах А. В. Бухваловым [3], С. И. Ждановым [9], Л. Лесснером [47]. Характеристику интегральных операторов 3-го рода дает приведенная ниже теорема 1.2.9. Нам понадобятся следующие определение и лемма.

Определение 1.2.4. Оператор $A \in B(L_p(\mu))$ называется *оператором умножения на функцию* $a \in L_\infty(\mu)$, если $(Af)(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_p(\mu)$.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\mu X < \infty$. *Оператор* $M \in B(L_p(\mu))$ *является оператором умножения на функцию* $a \in L_\infty(\mu)$ *тогда и только тогда, когда для любого измеримого множества* $e \subset X$ *выполняется равенство* $P_e M P_{X \setminus e} = 0$; *здесь* $P_E f = \chi_E f$, $f \in L_p(\mu)$.

◁ *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Для любого $e \subset X$ получим $P_e M(1-P_e)=0$. Следовательно, $P_e M = P_e M P_e$. Пусть φ_0 — функция, тождественно равная 1, и пусть $a = M\varphi_0$. Имеем $\chi_e a = \chi_e M \chi_e$. Пусть $s \in e$, тогда $(M\chi_e)(s) = \chi_e(s)a(s)$. Так как $P_{X\setminus e} M P_e = 0$, то $MP_e = P_e M P_e$. Пусть $s \in X\setminus e$. Отсюда вытекает, что $(M\chi_e)(s) = 0$. Значит, $(M\chi_e)(s) = a(s)\chi_e(s)$ для всех $s \in X$.

Покажем, что $a \in L_\infty(\mu)$. Если $M = 0$, то $a = 0$. Пусть $M \neq 0$. Предположим противное: $a \notin L_\infty(\mu)$. Тогда найдется множество E, $\mu E > 0$, такое, что $|a(s)| \geqslant 2\|M\|$ для всех $s \in E$. Поэтому

$$\|M\| \geqslant \left\| M \, \frac{\chi_E}{(\mu\, E)^{\frac{1}{p}}} \right\| \geqslant 2\, \|M\| \left\| \frac{\chi_E}{(\mu\, E)^{\frac{1}{p}}} \right\| = 2\, \|M\|.$$

Значит, $\|M\| = 0$, что невозможно.

Пусть ω — ступенчатая функция:

$$\omega(t) = \sum_n \alpha_n \chi_{e_n}(t).$$

Так как $M\chi_e = a\chi_e$, то $M\omega = a\omega$. Для произвольной функции φ из $L_p(\mu)$ найдется последовательность ступенчатых функций $\{\omega_m\}$, сходящаяся к φ по норме $L_p(\mu)$. Имеем при $m \to \infty$

$$\|M\varphi - a\varphi\| \leqslant \|M\|\, \|\varphi - \omega_m\| + \|a\|_\infty \|\omega_m - \varphi\| \to 0.$$

Следовательно, $M\varphi = a\varphi$. ▷

Используемое в формулировке следующей теоремы понятие модуля оператора см. в [4, с. 46].

Теорема 1.2.9. *Пусть мера μ конечна и не имеет атомов, $1 < p < \infty$. Оператор $T \in B(L_p(\mu))$ принадлежит $I_{p,3}$ тогда и только тогда, когда найдется интегральный оператор $Z\colon L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ с неотрицательным ядром $Z(s,t)$ такой, что для любого множества e, $\mu\, e > 0$, оператор $P_e T P_{X\setminus e}$ регулярен как оператор из $L_p(\mu)$ в $L_0(\mu)$ и $|P_e T P_{X\setminus e}| \leqslant Z$.*

◁ *Необходимость*. Пусть $Tf = Af + Kf$, $f \in L_p(\mu)$, где $Af = af$, $a \in L_\infty(\mu)$, $K : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ — интегральный оператор с ядром $K(s,t)$. В качестве Z можно выбрать интегральный оператор с ядром $|K(s,t)|$.

Достаточность. Рассмотрим квадрат $X \times X$. Разбив его основание X на два не пересекающихся множества Δ и δ с равными мерами, получим два диагональных квадрата $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$ и два недиагональных квадрата $\Delta \times \delta$ и $\delta \times \Delta$. Разбивая аналогично основания Δ и δ диагональных квадратов $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$, получим четыре диагональных квадрата и четыре недиагональных квадрата. Продолжая неограниченно процедуру разбиения оснований всех диагональных квадратов, получим последовательность попарно непересекающихся недиагональных квадратов $e_i \times g_i$, $i = 1, 2, \ldots$, со свойствами

$$(\mu \times \mu)\left\{X \times X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(e_i \times g_i)\right\} = 0, \quad e_i \cap g_i = \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots;$$

здесь $\varnothing$ — пустое множество.

Пусть $\tau_i : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots$, — линейные операторы. Будем говорить, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i$ σ-слабо сходится к оператору $\tau_0 : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$, если найдется разбиение множества X на попарно непересекающиеся измеримые множества G_j, $j = 1, 2, \ldots$, такое, что для всех $i, j = 1, 2, \ldots$ отображения $P_{G_j}\tau_0 : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $P_{G_j}\tau_i : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ суть линейные непрерывные операторы и для всех $j = 1, 2, \ldots$ и всех $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\lim_{m\to\infty}\left(P_{G_j}\sum_{i=1}^{m}\tau_i f, g\right) = (P_{G_j}\tau_0 f, g),$$

здесь

$$(u, v) = \int_X u(t)\,\overline{v(t)}\,d\mu(t), \quad u \in L_p(\mu),\ v \in L_q(\mu).$$

Так как $Z : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ — интегральный оператор, то в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 найдется разбиение множества X на попарно непересекающиеся измеримые множества G_j, $j = 1, 2, \ldots$, такое, что $P_{G_j}Z : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — линейный непрерывный оператор для любого $j = 1, 2, \ldots$ Так как при этом для $(\mu \times \mu)$-почти всех (s, t)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{e_i}(s)\,\chi_{g_i}(t) = 1,$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла по $X \times X$ с мажорирующей функцией

$$\chi_{G_j}(s)Z(s,t)\,|f(t)|\,|g(s)|$$

следует, что для любого $j = 1, 2, \ldots$ и любых $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$

$$\lim_{m\to\infty}\left(P_{G_j}\sum_{i=1}^{m}P_{e_i}ZP_{g_i}f, g\right) = (P_{G_j}Zf, g).$$

Таким образом, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}ZP_{g_i}$ σ-слабо сходится к Z.

Поскольку $|P_{e_i}TP_{g_i}| \leqslant P_{e_i}ZP_{g_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, то по теореме 4.2.9 из [5] $P_{e_i}TP_{g_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, — интегральный оператор, причем его ядро обращается в 0 вне $e_i \times g_i$. Отсюда и из σ-слабой сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}ZP_{g_i}$ следует, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |P_{e_i}TP_{g_i}|$ σ-слабо сходятся, при этом

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |P_{e_i}TP_{g_i}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}ZP_{g_i} = Z.$$

Отсюда и из [5, теорема 4.2.9] вытекает интегральность оператора

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P_e(T-K)P_{X\setminus e} &= P_eTP_{X\setminus e} - P_eKP_{X\setminus e} = P_eTP_{X\setminus e} - \\ - P_e\left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}\right)P_{X\setminus e} &= P_eTP_{X\setminus e} - \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}P_eTP_{X\setminus e}P_{g_i}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

По условию теоремы $|P_eTP_{X\setminus e}| \leqslant Z$. Следовательно, по теореме 4.2.9 из [5] оператор $P_eTP_{X\setminus e}$ интегральный. Пусть K_e — его ядро. Так как для $(\mu \times \mu)$-почти всех (s, t)

$$K_e(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{e_i}(s)\chi_{g_i}(t)\chi_e(s)\chi_{X\,\setminus\,e}(t)K_e(s,t),$$

то из (1.2.4) следует, что для всех e, $\mu\, e > 0$, будет

$$P_e(T-K)P_{X\setminus e} = 0. \tag{1.2.5}$$

В силу того, что $K : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ — интегральный оператор, по теореме 1.1.3 существует разбиение $\{E_j\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_{E_j}K : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — компактный интегральный оператор при каждом $j = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $T - K$ — оператор умножения на функцию из $L_\infty(\mu)$. В силу (1.2.5) имеем

$$P_e(P_{E_j}T - P_{E_j}K)P_{X\setminus e} = 0$$

для любого измеримого множества e. Отсюда и из того, что $P_{E_j}(T-K) \in B(L_p(\mu))$, получим по лемме, что $P_{E_j}(T-K)f = a_jf$, $f \in L_p(\mu)$ для всех $j = 1, 2, \ldots$ Положим $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\chi_{E_j}$ и покажем, что $a \in L_\infty(\mu)$. Предположим противное. Тогда найдется множество E_0, $\mu E_0 > 0$, такое, что $|a(s)| \geqslant 3\|T\|$ для всех $s \in E_0$. Пусть j_0 — индекс такой, что

$\mu(E_0 \cap E_{j_0}) > 0$. Положим $e_0 = E_0 \cap E_{j_0}$ и рассмотрим систему $\{r_{n,e_0}\}$ обобщенных функций Радемахера, носители которых совпадают с e_0 (определение этих функций см. в начале § 1.1). Положим $\varphi_n = (\mu\, e_0)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} r_{n,e_0}$. По теореме Римана — Лебега $\varphi_n \to 0$ слабо в $L_p(\mu)$. Поскольку $P_{e_0}K : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — компактный оператор, то $\|P_{e_0}K\varphi_n\| \to 0$. Следовательно, найдется номер n_0 такой, что $\|P_{e_0}K\varphi_n\| \leqslant \|T\|$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда для всех $n \geqslant n_0$

$$\|T\| \geqslant \|T\varphi_n\| \geqslant \|P_{e_0}a\varphi_n + P_{e_0}K\varphi_n\| \geqslant$$
$$\geqslant \|a\varphi_n\| - \|P_{e_0}K\varphi_n\| \geqslant 3\,\|T\| - \|T\| = 2\,\|T\|,$$

что невозможно. Итак, $a \in L_\infty(\mu)$ и $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, — линейный непрерывный оператор в $L_p(\mu)$. Следовательно, $T = A + K$ — линейный непрерывный интегральный оператор 3-го рода в $L_p(\mu)$. $\triangleright$

§ 1.3. О подобии линейных операторов в L_p интегральным операторам 1-го или 2-го рода

Пусть (X, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой μ, $L_p := L_p(X, \mu)$, $\|\cdot\|$ — норма в L_p. Через $B(L_p)$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из L_p в L_p, через $\mathbf{1}$ обозначим тождественный оператор в L_p.

Определение 1.3.1. Интегральный оператор $T \in B(L_p)$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_X |K(s,t)|^q d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

для почти всех $s \in X$.

Определение 1.3.2. Оператор $W \in B(L_p)$ называется *изоморфизмом*, если существует обратный $W^{-1} \in B(L_p)$. Изоморфизм $U \in B(L_2)$ такой, что $U^{-1} = U^*$ называется *унитарным оператором*, здесь U^* — сопряженный к U оператор. Замкнутые подпространства G, F пространства L_p называются *изоморфными*, если найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, отображающий G на F.

Определение 1.3.3. Говорят, что 1) $T_1 \in B(L_p)$ *подобен* $T_2 \in B(L_p)$, если имеется изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $WT_1W^{-1} = T_2$; 2) $R_1 \in B(L_2)$ *унитарно эквивалентен* $R_2 \in B(L_2)$, если $UR_1U^{-1} = R_2$ для некоторого унитарного оператора $U \in B(L_2)$.

Напомним еще, что по определению 0 принадлежит предельному спектру $\sigma_c(Q)$ оператора $Q \in B(L_r)$, если в L_r существует слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{\psi_n\}$, $\|\psi_n\|_r = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, которую Q отображает в последовательность, сходящуюся к 0 по норме L_r.

В [49] Дж. фон Нейман доказал, что самосопряженный оператор S в $L_2(a,b)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_c(S)$. В [14, теорема 1; 19, теорема IV.3.6; 53, теорема 7.3] показано, что если L_2 сепарабельно, мера μ не является чисто атомической (т. е. в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ), то $T \in B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору в том и только в том случае, когда $0 \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда следует вывод [23, с. 61, теорема 11]: если L_2 — комплексное сепарабельное пространство, то любой оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору вида $\lambda\mathbf{1} + C$, где C — карлемановский интегральный оператор. Из [16, с. 754; 19, теорема 1.2.12] вытекает, что всякий интегральный оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору. В [21, следствие 1; 22, с. 123, теорема 8] установлено, что каждый интегральный оператор 3-го рода $Mf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$ из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору $\alpha 1 + L$, где L — карлемановский интегральный оператор, α — любое существенное значение функции $a(s)$.

Все эти результаты будут доказаны в главе 2, посвященной характеристическим и спектральным свойствам интегральных операторов в L_2. В связи с приведенными выше результатами возникает вопрос: возможно ли построение аналогичной теории для линейных операторов в L_p при $p \neq 2$ с заменой унитарной эквивалентности операторов подобием операторов? В частности:

1) Будет ли каждый интегральный оператор 3-го рода из $B(L_p)$ при $p \neq 2$ подобен карлемановскому интегральному (или хотя бы интегральному) оператору 1-го или 2-го рода?

2) Можно ли всякое линейное интегральное уравнение 3-го рода в L_p ($p \neq 2$) привести линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в L_p?

3) Возможна ли характеризация произвольных интегральных и карлемановских интегральных операторов из $B(L_p)$, $p \neq 2$, в терминах спектра и его компонент?

Следующие теоремы 1.3.1, 1.3.2 и их следствия дают отрицательные ответы на эти и другие вопросы.

Напомним, что оператор $K \in B(L_p)$ называется почти компактным, если существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что $P_n K : L_p \to L_p$, $n = 1, 2, \ldots$, — компактные операторы; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$, χ_E — характеристическая функция множества E.

Теорема 1.3.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ и в $X \setminus e$ есть подмножество положительной меры без атомов меры μ. Пусть $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Z \in B(L_p)$ —*

произвольный компактный оператор. Тогда оператор $\tau = A + Z$ не подобен никакому оператору вида $\alpha\mathbf{1} + K$, где $K \in B(L_p)$ — почти компактный оператор, α — число.

$\lhd$ Предположим противное: найдется изоморфизм $V \in B(L_p)$ такой, что $V\tau V^{-1} = \alpha 1 + K$. Рассмотрим всевозможные случаи: (1) $\alpha = 0$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

(1) Пусть $\alpha = 0$. Тогда $VA = KV - VZ$. Положим $B = KV - VZ$. Имеем $BL_p(e) = VAL_p(e) = VL_p(e)$. Так как $V \in B(L_p)$ — изморфизм, то $H := VL_p(e) = BL_p(e)$ — замкнутое подпространство L_p, изоморфное $L_p(e)$. Поскольку B — почти компактный оператор, найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что $P_n B : L_p \to L_p$ — компактный оператор для любого n; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$. Из замкнутости $L_p(X_n) = P_n L_p$ и принципа открытости отображения [7, теорема II.2.1] следует, что $H_n := P_n H$ — замкнутые подпространства L_p. Далее, $H_n = P_n BL_p(e)$, так что компактные операторы $P_n B$ отображают замкнутое подпространство $L_p(e)$ на замкнутые подпространства H_n. Зафиксируем n. Пусть S_e — открытый шар в $L_p(e)$. В силу принципа открытости отображения $P_n BS_e$ содержит шар. Так как этот шар относительно компактен, по теореме Ф. Рисса H_n конечномерно. Имеем $H = l_p(H_n)$, где $l_p(H_n)$ — подпространство L_p, состоящее из всех $f \in L_p$, представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad f_n \in H_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Итак, $VL_p(e) = H = l_p(H_n)$, $\dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, носители всех функций из H_n содержатся в X_n, $n = 1, 2, \ldots$ Получим отсюда противоречие.

Рассмотрим сначала случай $p > 2$. Пользуясь тем, что в e нет атомов меры μ, выберем равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{y_m\}$ с носителями в e (в качестве $\{y_m\}$ можно взять систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,e}\}$ с носителями в e (определение $\{r_{m,e}\}$ см. в начале § 1.1)). По теореме Римана — Лебега $\{y_m\} \to 0$ слабо в L_p. Положим $x_m = Vy_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Для любой подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$ и всех n имеем

$$n^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\|_2 \leqslant (\mu\, e)^{\gamma} \left\| V^{-1} \right\| \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\|, \tag{1.3.1}$$

где $\gamma = \frac{p-2}{2p}$, $\| \cdot \|_2$ — норма в L_2. Так как для любого n оператор $P_n V : L_p(e) \to H_n$ конечномерный, то он представим в виде

$$P_n V f = \sum_{j=1}^{m_n} (f, v_{j,n}) w_{j,n}, \quad m_n < \infty,$$

где $v_{j,n} \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $w_{j,n} \in L_p(X_n)$, $j = 1, \ldots, m_n$. Покажем, что $\{x_m\}$ сходится к 0 почти всюду. Из слабой сходимости $\{y_m\}$ к 0 получим для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$P_n x_m(s) = P_n V y_m(s) = \sum_{j=1}^{m_n} (y_m, v_{j,n}) w_{j,n}(s) \longrightarrow 0$$

для почти всех $s \in X_n$.

Докажем, что из $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| \leqslant C^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.3.2}$$

Поскольку $\{x_m\} \to 0$ почти всюду, по теореме Егорова найдется возрастающая к X последовательность множеств F_j, $j = 1, 2, \ldots$, с конечными положительными мерами такая, что $\{x_m\} \to 0$ равномерно на каждом F_j. Построим подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, удовлетворяющую (1.3.2), по аналогии с построениями в доказательтве теоремы 3 главы XII в [45, с. 201]. Положим $x_{i_1} = x_1$, $s_1 = x_{i_1}$. Пусть номер j_1 такой, что

$$\int\limits_{X \setminus F_{j_1}} |s_1|^p d\mu \leqslant 1.$$

Пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на F_{j_1}, выберем x_{i_2} так, чтобы

$$\int\limits_{F_{j_1}} |s_1 + x_{i_2}|^p d\mu \leqslant \int\limits_{F_{j_1}} |s_1|^p d\mu + 1.$$

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}$, $F_{j_1}, \ldots, F_{j_{n-1}}$ найдены так, что

$$\int\limits_{X \setminus F_{j_{m-1}}} |s_{m-1}|^p d\mu \leqslant 1, \quad m = 2, \ldots, n, \tag{1.3.3}$$

$$\int\limits_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2} + x_{i_{m-1}}|^p d\mu \leqslant \int\limits_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2}|^p d\mu + 1, \quad m = 3, \ldots, n,$$

где $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_{i_k}$. Снова, пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на $F_{j_{n-1}}$, выберем x_{i_n} так, чтобы

$$\int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu \leqslant \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu + 1. \tag{1.3.4}$$

В силу (1.3.4), неравенства Гёльдера и (1.3.3)

$$\|s_n\|^p = \|s_{n-1} + x_{i_n}\|^p = \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu + \int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu + 1 + \left[\left(\int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |x_{i_n}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \leqslant$$

$$\leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + [1+M]^p,$$

где $M = \sup_{m=1,2,\ldots} \|x_m\|$. Пусть $C = 1 + [1+M]^p$, тогда $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + C$. Отсюда $\|s_n\|^p \leqslant Cn$, $n = 1,2,\ldots$, и неравенство (1.3.2) доказано. Так как неравенства (1.3.1) и (1.3.2) несовместимы при $p > 2$, получаем противоречие.

Пусть $1 < p < 2$. Как показано выше, $L_p(e)$ изоморфно $l_p(H_n)$, $\dim H_n < \infty$, $n = 1,2,\ldots$, и носители всех функций из H_n содержатся в X_n, $n = 1,2,\ldots$ В силу предложения С.4.2 из [37, с. 30] $(l_p(H_n))^* = l_q(H_n^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, при этом $\dim H_n^* = \dim H_n < \infty$, $n = 1,2,\ldots$, и носители всех функций из H_n^* содержатся в X_n, $n = 1,2,\ldots$ (здесь звездочка означает переход к сопряженному пространству). Следовательно, $L_q(e) = (L_p(e))^*$ изоморфно $l_q(H_n^*)$, $q > 2$, что по доказанному невозможно.

(2) Пусть $\alpha = 1$. Имеем $VA = V + B$ и $V(\mathbf{1} - A) = -B$. Положив $A_1 f = (\mathbf{1} - A)f = \chi_{X\setminus e} f$, $f \in L_p$, получим $VA_1 = -B$. Пусть $g \subset X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$, и в g нет атомов меры μ. Тогда $VL_p(g) = VA_1 L_p(g) = -BL_p(g)$, и доказательство завершается повторением доказательства в случае (1.3.1).

(3) Имеем $V\tau = \alpha V + KV$. Отсюда $VA + VZ = \alpha V + KV$ и $V(A - \alpha\mathbf{1}) = KV - VZ = B$. Спектр $A = \{0; 1\}$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поэтому $A - \alpha\mathbf{1}$ изоморфизм, следовательно $V(A - \alpha\mathbf{1})$ — изоморфизм. Значит, B — изоморфизм. Поскольку B — почти компактный оператор, все операторы $P_n B$ компактны. Выберем номер j и множество $E \subset X_j$ так, чтобы $0 < \mu E < \infty$ и E не содержало атомов меры μ. Рассмотрим равномерно ограниченную ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E. По теореме Римана — Лебега $\{r_{m,E}\} \to 0$ слабо в L_q. Так как $P_j B : L_p \to L_p$ — компактный оператор, то

$$\|B^* r_{m,E}\|_q = \|B^* P_j r_{m,E}\|_q \longrightarrow 0$$

при $m \to \infty$; здесь $\|\cdot\|_q$ — норма в L_q. Но $\|r_{m,E}\|_q = (\mu E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$, $m = 1,2,\ldots$, поэтому B^* и B не являются изоморфизмами. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ▷

Теорема 1.3.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество e удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1, $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Y \in B(L_p)$ — произвольный почти компактный оператор, $\widetilde{\tau} = A + Y$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\widetilde{\tau} W$ не может быть представлен в виде $\alpha\mathbf{1} + K$, где K — почти компактный оператор.*

$\lhd$ Допустим, что существует изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $\widetilde{\tau} W = \alpha\mathbf{1} + K$. Тогда $AW = \alpha\mathbf{1} + K - YW$. Положим $V = W^{-1}$. Имеем $A = \alpha V + KV - Y$. Пусть $\widetilde{B} = KV - Y$. Оператор $\widetilde{B}$ почти компактен, следовательно, найдется разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что все операторы $P_n\widetilde{B} : L_p \to L_p$ компактны; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$. Рассмотрим случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. В первом случае $L_p(e) = AL_p(e) = \widetilde{B}L_p(e)$. Выберем номер j так, чтобы $\mu(e \cap X_j) > 0$. Положим $E = e \cap X_j$ и рассмотрим систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E. Имеем $\|r_{m,E}\| = (\mu E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$, $m = 1, 2, \ldots$ С другой стороны, $r_{m,E} = P_j r_{m,E} = P_j A r_{m,E} = P_j \widetilde{B} r_{m,E} \to 0$ по норме L_p при $m \to \infty$, так как $P_j\widetilde{B} : L_p \to L_p$ — компактный оператор и $\{r_{m,E}\} \to 0$ слабо в L_p по теореме Римана — Лебега. Перейдем ко второму случаю. Пусть $g \subset X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$ и в g нет атомов меры μ. Тогда $VL_p(g) = \frac{1}{\alpha}(A - \widetilde{B})L_p(g) = -\frac{1}{\alpha}\widetilde{B}L_p(g)$, что также невозможно (это следует из доказательства предыдущей теоремы, случай (2)).

Следствие 1.3.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $W\tau W^{-1}$ не представим в виде $\alpha\mathbf{1} + R$, где R — интегральный оператор.*

Следствие 1.3.1 непосредственно вытекает из теоремы 1.3.1, так как любой интегральный оператор из $B(L_p)$ почти компактен в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3.

Следствие 1.3.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\widetilde{\tau} W$ не представим в виде $\alpha\mathbf{1} + R$, где R — интегральный оператор.*

$\lhd$ Следует из теоремы 1.3.2. $\rhd$

Следствие 1.3.3. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ и $\widetilde{\tau} = A + Q$, где $Q \in B(L_p)$ — интегральный оператор. Тогда интегральное уравнение 3-го рода $(A + Q)x = f \in L_p$ не может быть сведено заменой $y = Wx$, где $W \in B(L_p)$ — изоморфизм, к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_p 1-го или 2-го рода. Если Q — компактный интегральный оператор, аналогичное утверждение справедливо для замены $y = Wx$, $h = Wf$.*

$\lhd$ Вытекает из следствий 1.3.1 и 1.3.2. $\rhd$

Следствие 1.3.4. *При $p \neq 2$ невозможна характеризация интегральных и карлемановских интегральных операторов из $B(L_p)$ в терминах спектра и его компонент.*

В самом деле, положив в теореме 1.3.1 $Z = 0$, получим в силу следствия 1.3.1, что A не подобен никакому интегральному оператору, хотя

$$\mathrm{Ker} A = L_p(X \setminus e, \mu), \quad \mathrm{Ker} A^* = L_q(X \setminus e, \mu).$$

Замечание 1.3.1. Условие неатомичности меры μ существенно: в противном случае каждый оператор из $B(L_p(\mu))$ является карлемановским интегральным оператором.

Замечание 1.3.2. Если X не имеет атомов меры μ (например, X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега), в качестве e в теоремах 1.3.1, 1.3.2 и следствиях 1.3.1–1.3.4 можно выбрать любое множество ненулевой меры с дополнением ненулевой меры.

Глава 2. Интегральные операторы в L_p

§ 2.1. Алгебраические, спектральные и характеристические свойства интегральных операторов в L_p

В книге важную роль играют карлемановские интегральные операторы.

Определение 2.1.1. Интегральный оператор $T : D_T \subset L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Карлемана [46]

$$\int\limits_Y |K(s,t)|^2 d\nu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$. Имеет место следующий критерий.

Теорема 2.1.1 [12, 19]**.** *Для того чтобы оператор $K : D_K \subset L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ был карлемановским интегральным оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Lambda \in L_0(X,\mu)$ такая, что для всех $f \in D_K$*

$$|Kf(s)| \leqslant \Lambda(s)\|f\|$$

для почти всех $s \in X$.

Лемма 2.1.1 (о правом умножении [48])**.** *Пусть*

$$T : D_T \subset L_2(\nu) := L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$$

— карлемановский интегральный оператор и $A \in B\big(L_2(\nu)\big)$. Тогда TA — карлемановский интегральный оператор.

$\lhd$ Для любого $f \in D_{TA}$ имеем при почти всех $s \in X$

$$|TAf(s)| \leqslant \Lambda(s)\|Af\| \leqslant \Lambda(s)\|A\|\,\|f\|. \rhd$$

Эта лемма впервые была сформулирована и доказана (другим методом) в [48].

Определение 2.1.2. Обозначим через K_1 совокупность всех карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$. Через K_2 обозначим множество операторов из $B(L_2(\mu))$, представимых в виде $\alpha\mathbf{1} + L$, где L — произвольный оператор из K_1, α — произвольное число. Через K_3 обозначим совокупность всех операторов из $B(L_2(\mu))$ вида $a(s)f(s) + Lf(s)$,

$f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, L — произвольный оператор из K_1.

Теорема 2.1.2. *Множества K_1, K_2, K_3 являются алгебрами.*

Справедливость утверждения теоремы непосредственно следует из леммы о правом умножении.

В отличие от алгебр K_1, K_2, K_3 множества $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$ интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в $L_2(\mu)$, введенные в определении 1.2.1 из § 1.2, не являются алгебрами. Чтобы показать это, докажем следующую теорему.

Теорема 2.1.3. *Пусть мера μ не является чисто атомической. Тогда в $L_2(\mu)$ найдется компактный интегральный оператор S такой, что $S^3 = 0$, операторы S^2, $F_\lambda = S(S - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, F_λ^2 неинтегральные для любого $\lambda \neq 0$.*

$\triangleleft$ Пусть E $(\mu E > 0)$ — подмножество X, не содержащее атомов меры μ. Разобъем E на попарно не пересекающиеся множества e, e_1, e_2 с положительными мерами.

Напомним, что ортонормированная система $\{\psi_n\}$ называется системой абсолютной сходимости для l_2 [35], если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \psi_n(s)|$$

сходится почти всюду для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$, причем множество сходимости ряда зависит от $\{a_n\}$.

Пусть все функции ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$ имеют носители в e_2, сама последовательность $\{\varphi_n\}$ является системой абсолютной сходимости для l_2 и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|^2 = \infty$$

для всех $s \in E_0 \subset e_2$, $\mu E_0 > 0$. Тогда найдутся множество $E_1 \subset E_0$, $\mu E_1 > 0$, и стремящаяся к 0 последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n(s)|^2 = \infty \tag{2.1.1}$$

для всех $s \in E_1$.

Рассмотрим компактный оператор S в $L_2(\mu)$, определяемый равенством

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} (f, r_{n,e}) \frac{\chi_{g_n}}{\sqrt{\mu g_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \left(f, \frac{\chi_{g_n}}{\sqrt{\mu g_n}}\right) \varphi_n;$$

здесь $\{r_{n,e}\}$ — ортонормированная система обобщенных функций Радемахера с носителями в e (определение этих функций см. в § 1.1), $\{g_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств $g_n \subset e_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ с положительными мерами. Так как множества g_n попарно не пересекаются и $\{\varphi_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2, то для любой функции $f \in L_2(\mu)$ для почти всех $s \in X$

$$\int\limits_X \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \frac{\chi_{g_n}(s)}{\sqrt{\mu g_n}}\, r_{n,e}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \varphi_n(s) \frac{\chi_{g_n}(t)}{\sqrt{\mu g_n}} \right| |f(t)|\, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \frac{\chi_{g_n}(s)}{\sqrt{\mu g_n}} \frac{1}{\sqrt{\mu e}} \int\limits_e |f(t)|\, d\mu(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} |\varphi_n(s)| \int\limits_X |f(t)| \frac{\chi_{g_n}(t)}{\sqrt{\mu g_n}}\, d\mu(t) < \infty.$$

Следовательно, S — интегральный оператор.

Покажем, что S^2 — неинтегральный оператор. Мы имеем

$$S^2 f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, r_{n,e})\, \varphi_n.$$

Если бы S^2 был интегральным оператором (с ядром $K_2(s,t)$), то для всех n и почти всех $s \in X$

$$\int\limits_X K_2(s,t)\, r_{n,e}(t)\, d\mu(t) = (S^2 r_{n,e})(s) = \lambda_n \varphi_n(s),$$

$$\int\limits_X K_2(s,t)\, R_n(t)\, d\mu(t) = (S^2 R_n)(s) = 0,$$

где $\{R_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{r_{n,e}\}$, состоящий из ограниченных функций. Отсюда и из [11, с. 154] следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n(s)|^2 < \infty \quad \text{для почти всех} \quad s \in X,$$

что противоречит (2.1.1). Итак, S^2 — неинтегральный оператор.

Имеем $S^3 = 0$, поэтому спектральный радиус $r_\sigma(S) = \lim_{n\to\infty}(\|S^n\|)^{\frac{1}{n}}$ равен 0. Следовательно, спектр S есть $\{0\}$. Из $S^3 = 0$ вытекает также, что для всех $\lambda \neq 0$

$$R_\lambda := (S - \lambda \mathbf{1})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} + \frac{S}{\lambda} + \frac{S^2}{\lambda^2}\right),$$

$$F_\lambda = SR_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(S + \frac{S^2}{\lambda}\right).$$

Если бы оператор F_λ (резольвента Фредгольма оператора S) был интегральным, то и оператор $-S^2/\lambda$ был бы интегральным, что невозможно. Так как $F_\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2} S^2$, то F_λ^2 — неинтегральный оператор. $\triangleright$

Итак, множество $I_{2,1}$ всех интегральных операторов в $L_2(\mu)$ не является алгеброй.

Теорема 2.1.4. *Множества $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ и $I_{2,3}$ не являются алгебрами.*

$\triangleleft$ Покажем, что множество $I_{2,3}$ всех интегральных операторов 3-го рода в $L_2(\mu)$ — не алгебра. Предположим противное и возьмем оператор S из теоремы 2.1.3. Имеем $S \in I_{2,3}$ и $S^2 f(s) = a(s)f(s) + Lf(s)$ для всех $f \in L_2(\mu)$, где L — интегральный оператор, $a \in L_\infty(\mu)$. Из доказательства теоремы 2.1.3 следует, что спектр оператора S^2 есть $\{0\}$. Следовательно, спектр $(S^2)^*$ есть $\{0\}$. Отсюда в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 получим $a(s) = 0$. Следовательно, $S^2 = L$. Но по теореме 2.1.3 оператор S^2 неинтегральный, что противоречит интегральности L.

Аналогично доказывается, что $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ не является алгеброй. $\triangleright$

В алгебре $B(L_2(\mu))$ имеется естественная инволюция $J : T \to T^*$. Однако все ее подмножества K_1, K_2, K_3, $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$ и введенные в определениях 1.2.2, 1.2.3 из § 1.2 множества $C_{2,1}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{2,3}$ не инвариантны относительно этой инволюции, как показывает следующий пример.

Пример 2.1.1. Пусть $\{\omega_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$, состоящий из функций Уолша, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из $(0,1)$ с положительными мерами, μ — мера Лебега. Определим оператор $T_0 \in B(L_2(0,1))$ равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

Оператор T_0 принадлежит множеству K_1 — самому узкому из всех перечисленных выше подмножеств, в то время как T_0^* не принадлежит самому широкому — $B_{2,3}$.

$\triangleleft$ Так как e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ попарно не пересекаются, то T_0 — карлемановский интегральный оператор, т. е. $T_0 \in K_1$.

Покажем, что $T_0^* \notin B_{2,3}$. Предположим противное. Тогда найдутся $a \in L_\infty(\mu)$ и компактный по мере оператор $M \in B(L_2(0,1))$ такие, что $T_0^* f = af + Mf$, $f \in L_2(0,1)$. Так как $\|T_0 f\| = \|f\|$ для всех $f \in L_2(0,1)$, то $0 \notin \sigma_c(T_0)$. Поэтому в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 нуль не является существенным значением функции a. Значит, $\frac{1}{a} \in L_\infty(0,1)$ и $\frac{1}{a} M$ — компактный по мере оператор. Мы имеем

$$\frac{1}{a}\, T_0^* = 1 + \frac{1}{a}\, M,$$

$$\frac{1}{a}\,\omega_n = \frac{1}{a}\,T_0^*\,\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} + \frac{1}{a}\,M\,\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

По теореме 1.1.2

$$\left\|\frac{1}{a}\,M\,\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right\|_1 \longrightarrow 0.$$

Кроме того, $\|\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\,\|_1 \to 0$. С другой стороны, для всех n имеем $\left\|\frac{1}{a}\,\omega_n\right\|_1 = \left\|\frac{1}{a}\right\|_1 \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\triangleright$

Перейдем к описанию унитарных моделей введенных выше множеств операторов.

Определение 2.1.3. Будем говорить, что λ *принадлежит предельному спектру* $\sigma_c(H)$ *оператора* H в $L_2(\mu)$, если в области определения оператора H найдется ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\|(H-\lambda 1)h_n\| \to 0$.

Определение 2.1.4. Операторы T_1 и T_2 в $L_2(\mu)$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарный оператор $U \in B(L_2(\mu))$ такой, что $UT_1U^{-1} = T_2$.

В 1935 году Дж. фон Нейман [49] установил следующий фундаментальный результат.

Теорема 2.1.5. *Пусть T — самосопряженный оператор в $L_2(a,b)$ и $0 \in \sigma_c(T)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.*

На несамосопряженный случай этот результат был обобщен автором [13, 14] и И. Вайдманом [53].

Теорема 2.1.6. *Пусть T — плотно определенный в сепарабельном пространстве $L_2(\mu)$ замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.*

Эта теорема будет доказана в следующем параграфе (см. теоремы 2.2.2, 2.2.3).

Из теоремы 2.1.6 получаем три важных следствия.

Следствие 2.1.1. *Пусть $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$ и $\lambda \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору $\overline{\lambda}1 + L$, где L — карлемановский интегральный оператор.*

Отметим, что утверждения теоремы 2.1.6 и ее следствия 2.1.1 справедливы и в случае, когда $L_2(\mu)$ — вещественное пространство.

Следствие 2.1.2. *Пусть $L_2(\mu)$ — комплексное сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

Это следствие непосредственно вытекает из следствия 2.1.1, так как предельный спектр $\sigma_c(T^*)$ не пуст.

Следствие 2.1.3. *Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $T: H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Тогда T унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

Теорема 2.1.7. *Пусть мера μ сепарабельна и не имеет атомов. Тогда каждый оператор из $B_{2,3}$ унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

$\triangleleft$ Если $L_2(\mu)$ — комплексное пространство, справедливость теоремы вытекает из следствия 2.1.2 теоремы 2.1.6.

Пусть $L_2(\mu)$ — вещественное пространство, $T \in B_{2,3}$. Тогда $Tf = af + Lf$, $f \in L_2(\mu)$, где a — вещественная функция из $L_\infty(\mu)$, $L \in B_{2,1}$. Пусть λ — какое-нибудь существенное значение функции a. В силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 имеем $\lambda \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда и из следствия 2.1.1 теоремы 2.1.6 вытекает справедливость теоремы 2.1.7. $\triangleright$

Теорема 2.1.8. *Каждый оператор из $C_{2,3}$, $I_{2,3}$, $B_{2,2}$, $C_{2,2}$, $I_{2,2}$ унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

Действительно, все перечисленные в этой теореме множества содержатся в $B_{2,3}$.

Теорема 2.1.9. *Пусть мера μ сепарабельна и не является чисто атомической. Тогда каждый оператор из $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $I_{2,1}$ унитарно эквивалентен оператору из K_1.*

$\triangleleft$ Пусть $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$ и в e нет атомов меры μ. Возьмем произвольный оператор $T \in B_{2,1} \supset C_{2,1} \supset I_{2,1}$. В силу теоремы 1.1.2 оператор $P_eT : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ компактен. Следовательно, $T^*P_e : L_\infty(\mu) \to L_2(\mu)$ компактен. Рассмотрим ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$, носители которых совпадают с e. Тогда $\|T^*r_{n,e}\| = \|T^*P_er_{n,e}\| \to 0$. Значит, $0 \in \sigma_c(T^*)$ и по теореме 2.1.6 оператор T унитарно эквивалентен оператору из K_1. $\triangleright$

Рассмотрим еще одну задачу о характеристических свойствах операторов, восходящую к работе Б. Мизры, Д. Шпайзера, Д. Таргонского [48]. В этой работе ими было введено понятие сильного карлемановского оператора.

Определение 2.1.5 [48]. Оператор $T \in B(L_2(\mu))$ называется *сильным карлемановским интегральным оператором*, если для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ оператор UTU^{-1} также является карлемановским интегральным оператором.

Характеристическое свойство таких операторов устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1.10 [48]. *Пусть мера μ не является чисто атомической. Для того чтобы оператор $T \in B(L_2(\mu))$ был сильным карлемановским интегральным оператором, необходимо и достаточно, чтобы T был интегральным оператором Гильберта — Шмидта, т. е. его ядро $K(s,t)$ удовле-*

творяло условию Гильберта — Шмидта

$$\int\limits_X \int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) \, d\mu(s) < \infty.$$

Если обозначить через K_1^s совокупность всех сильных карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$, а через C_2 — множество всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, то теорема 2.1.10 допускает краткую запись: $K_1^s = C_2$.

Введем по аналогии с определением 2.1.5

Определение 2.1.6. Пусть $F \subset B(L_2(\mu))$. Оператор $T \in F$ назовем *сильным F-оператором*, если для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ оператор UTU^{-1} принадлежит F. Совокупность всех сильных F-операторов обозначим через F^s.

Пусть C — множество всех компактных операторов из $B(L_2(\mu))$, $\widetilde{C}$ — совокупность всех операторов вида $\alpha\mathbf{1} + L$, где α — произвольное число, L — произвольный оператор из C. Через C_2 обозначим совокупность всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, через $\widetilde{C}_2$ — множество всех операторов вида $\alpha\mathbf{1}+H$, где α — произвольное число, H — произвольный оператор из C_2.

Теорема 2.1.11. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $B_{2,3}^s = B_{2,2}^s = C_{2,3}^s = C_{2,2}^c = \widetilde{C}$.*

Теорема 2.1.12. *Пусть мера μ сепарабельна, σ-конечна и не является чисто атомической. Тогда $B_{2,1}^s = C_{2,1}^s = C$.*

Теорема 2.1.13. *Пусть мера μ сепарабельна, σ-конечна и не является чисто атомической. Тогда $I_{2,1}^s = K_1^s = C_2$.*

Теорема 2.1.14. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $I_{2,3}^s = K_3^s = (I_{2,1} \cup I_{2,2})^s = K_2^s = \widetilde{C}_2$.*

Перейдем к доказательству этих теорем.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1.11. Достаточно показать, что $B_{2,3}^s = \widetilde{C}$. Так как мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов, то в силу теоремы 3 из [41, с. 170] об изоморфизме пространств с мерами можно считать, не ограничивая общности, что $L_2 = L_2(0,1)$, μ — мера Лебега.

Пусть $T \in B_{2,3}^s$. Тогда $T = A + Q$, где $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2$, $Q \in B_{2,1}$. В силу теоремы 1.1.2 Q компактен как оператор из L_2 в L_1 (такие операторы называются далее $\langle 2,1\rangle$-компактными).

Выберем в доказательстве теоремы 1.2.2 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим ортонормированную систему $\{f_n\}$ из этого доказательства. Мы имеем $\|(\overline{a(s)} - \overline{\alpha})f_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, $\|Q^* f_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда $\|(T^* - \overline{\alpha}\mathbf{1})f_n\| \leqslant \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $K = T - \alpha\mathbf{1}$. Тогда

$\sum_{n=1}^{\infty}\|K^*f_n\|^2<\infty$. Введем оператор Гильберта — Шмидта

$$\Gamma f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,f_n)K^*f_n, \quad f\in L_2.$$

Так как $K^*f_n-\Gamma f_n=0$, $n=1,2,\ldots$, то $\operatorname{im}(K-\Gamma^*)\equiv(K-\Gamma^*)L_2\subseteq F^{\perp}$, где $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{f_n\}$. Определим унитарный оператор W в L_2 равенствами

$$Wf_n^{\perp}=r_n, \quad Wf_n=u_n, \quad n=1,2,\ldots,$$

где $\{f_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис в $F^{\perp}$, $\{r_n\}$ — ортонормированная последовательность функции Радемахера, $\{u_n\}=\{w_n\}\setminus\{r_n\}$, $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша в $L_2(0,1)$. Тогда

$$\operatorname{im}W(K-\Gamma^*)W^{-1}\subseteq WF^{\perp}=R, \tag{2.1.2}$$

где R — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{r_n\}$. По условию теоремы $WTW^{-1}=A_1+Q_1$, где $A_1f(s)=a_1(s)f(s)$, $f\in L_2$, $a_1\in L_\infty$, Q_1 — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор в L_2. Тогда $WKW^{-1}=A_1+Q_1-\alpha 1$. Так как $W(K^*-\Gamma)W^{-1}u_n=W(K^*-\Gamma)f_n=0$, $n=1,2,3,\ldots$, то

$$W\Gamma W^{-1}u_n=WK^*W^{-1}u_n=\overline{a_1(s)}\,u_n-\overline{\alpha}\,u_n+Q_1^*u_n, \quad n=1,2,\ldots$$

Но $\|W\Gamma W^{-1}u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, $\|Q_1^*u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, так как $Q_1^*:L_\infty\to L_2$ — компактный оператор, $\{u_n\}$ — ортонормированная последовательность и $|u_n(s)|=1$, $n=1,2,\ldots$, для почти всех $s\in[0,1]$. Следовательно, $\|(\overline{a_1(s)}-\overline{\alpha})u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Покажем, что $a_1(s)=\alpha$ для почти всех $s\in[0,1]$. Предположим противное. Тогда найдутся $\beta>0$ и $e\subset[0,1]$ такие, что $\mu e>0$ и $|a_1(s)-\alpha|\geqslant\beta$ для всех $s\in e$. Имеем $\|(\overline{a_1(s)}-\overline{\alpha})u_n\|\geqslant\beta\sqrt{\mu e}$, что противоречит $\|(\overline{a_1(s)}-\overline{\alpha})u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$WKW^{-1}=A_1-\alpha 1+Q_1=Q_1.$$

В силу (2.1.2) $\operatorname{im}W(K-\Gamma^*)W^{-1}\subseteq R$. Тогда $\operatorname{im}(Q_1-W\Gamma^*W^{-1})\subseteq R$. Таким образом, оператор $Q_2=Q_1-W\Gamma^*W^{-1}$ $\langle 2,1\rangle$-компактен и принимает значения в R. Покажем, что Q_2 — компактный оператор. Пусть $\{\psi_n\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность. Тогда $\{Q_2\psi_n\}$ сходится к 0 по норме $L_1(0,1)$. Так как $Q_2\psi_n\in R$, $n=1,2,\ldots$, то по неравенству Хинчина [11, с. 154] $\|Q_2\psi_n\|\leqslant 8\|Q_2\psi_n\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(0,1)$. Отсюда $\|Q_2\psi_n\|\to 0$ при $n\to\infty$ и, следовательно, Q_2 — компактный оператор. Тогда Q_1 — компактный оператор. Но $WTW^{-1}=\alpha\mathbf{1}+Q_1$, поэтому $T=\alpha\mathbf{1}+C$, где $C=W^{-1}Q_1W$ — компактный оператор. ▷

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1.12 содержится в первой части доказательства теоремы 1 из работы автора [15, с. 908–909], где использовалось лишь то, что T — сильный компактный по мере оператор.

Приведем короткое доказательство теоремы 2.1.12 в случае, когда мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Пусть $T \in B^s_{2,1} \supset C^s_{2,1}$. По теореме 2.1.11 $T = \alpha\mathbf{1} + K$, где $K \in C$. Отсюда $\sigma_c(T^*) = \{\overline{\alpha}\}$. Кроме того, в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 имеем $0 \in \sigma_c(T^*)$. Значит, $\alpha = 0$ и $T = K \in C$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1.13. Равенство $I^s_{2,1} = C_2$ было установлено автором в [15, теорема 1]. Отсюда и из $K^s_1 \subset I^s_{2,1}$ следует $K^s_1 = C_2$. $\rhd$

Другое доказательство утверждения $I^s_{2,1} = C_2$ приведено в книге П. Халмоша и В. Сандера [42].

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1.14. Достаточно показать, что $I^s_{2,3} = \widetilde{C}_2$. Пусть $T \in I^s_{2,3}$. Из $I^s_{2,3} \subset B^s_{2,3}$ и теоремы 2.1.11 следует, что $T = \alpha\mathbf{1} + K$, где $K \in C$. Так как $T \in I_{2,3}$, то $Tf = af + Lf$, $f \in L_2$, где $a \in L_\infty$, $L \in I_{2,1}$. Из следствия 1.2.3 теоремы 1.2.2 получим $a(s) = \alpha$ для почти всех s и $L = K \in C$. Для любого унитарного оператора $U \in B(L_2)$ имеем $UTU^{-1} = \alpha\mathbf{1} + ULU^{-1}$. Так как $UTU^{-1} \in I_{2,3}$, то $UTU^{-1}f = bf + Mf$, $f \in L_2$, где $b \in L_\infty$, $M \in I_{2,1}$. Отсюда, из $ULU^{-1} \in C \subset B_{2,1}$ и следствия 1.2.3 теоремы 1.2.2 получаем $b(s) = \alpha$ для почти всех s и $ULU^{-1} = M \in I_{2,1}$. Таким образом, $L \in I^s_{2,1}$. По теореме 2.1.13 $L \in C_2$. Следовательно, $T = \alpha\mathbf{1} + L \in \widetilde{C}_2$. $\rhd$

Рассмотрим еще три важных класса операторов.

Определение 2.1.7. Интегральный оператор в $L_2(\mu)$ с ядром $K(s,t)$ назовем *ахиезеровским*, если ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера [1]: существует положительная функция $\Lambda \in L_0(\mu)$ такая, что $|K(s,t)| \leqslant \Lambda(s)\Lambda(t)$ для $(\mu \times \mu)$-почти всех $(s,t) \in X \times X$. Совокупность всех ахиезеровских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$ обозначим через A_1. Через A_2 обозначим множество всех операторов вида $\alpha\mathbf{1} + M$, где α — произвольное число, M — произвольный оператор из A_1. Через A_3 обозначим совокупность всех операторов, представимых в виде $a(s)f(s) + Gf(s)$, $f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, операторы G пробегают все A_1. Через A^s_1, A^s_2, A^s_3 в соответствии с определением 2.1.6 обозначим классы сильных A_1-, A_2- и A_3-операторов.

Определение 2.1.8. Оператор из $B(L_2(\mu))$ называется *ядерным*, если он является произведением двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$. Класс всех ядерных операторов обозначим через C_1. Через $\widetilde{C}_1$ обозначим множество всех операторов $\alpha\mathbf{1} + D$, где α — произвольное число, D — произвольный оператор из C_1.

Из определения следует, что $C_1 \subset C_2$, т. е. каждый ядерный оператор является интегральным оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 2.1.15. *Пусть мера μ сепарабельна, σ-конечна и не имеет атомов. Тогда $A_1^s = C_1$.*

Эта теорема доказана в [15, теорема 2].

Теорема 2.1.16. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $A_3^s = A_2^s = \widetilde{C}_1$.*

Теорема 2.1.16 доказывается с помощью теоремы 2.1.15 так же, как теорема 2.1.14 с помощью теоремы 2.1.13.

Замечание 2.1.1. Условие неатомичности меры μ, фигурирующее в большинстве теорем этого параграфа, существенно: нетрудно проверить, что если мера μ чисто атомическая и сепарабельная, то класс A_1^s — самый узкий из всех рассмотренных в этом параграфе классов интегральных и родственных им операторов — совпадает с $B(L_2(\mu))$.

§ 2.2. Необходимые и достаточные условия унитарной эквивалентности линейных операторов интегральным операторам

В § 2.2 доказываются теоремы о приведении к интегральному виду операторов из класса B_0, введенного в предисловии. Эти теоремы играют ключевую роль в построениях части II, посвященной методам решения линейных функциональных и интегральных уравнений 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2.

Определение 2.2.1. Пусть H_i, $i = 0, 1$, — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_i$, и скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_i$. Линейный оператор $N : H_0 \to H_1$ называется *ядерным*, если существуют последовательности $\{g_n\} \subset H_0$, $\{h_n\} \subset H_1$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_0 \, \|h_n\|_1 < \infty \tag{2.2.1}$$

и для всех $g \in H_0$

$$Ng = \sum_{n=1}^{\infty} (g, g_n)_0 \, h_n. \tag{2.2.2}$$

Ядерной нормой $\|N\|_1$ называется $\inf \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_0 \, \|h_n\|_1$, где инфимум берется по всевозможным $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, удовлетворяющим (2.2.1) и фигурирующим в представлении (2.2.2).

Из определения следует, что если $N : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ — ядерный оператор, то N является интегральным оператором, ядро $N(s,t)$ которого удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int_X \int_Y |N(s,t)|^2 d\nu(t)\, d\mu(s) < \infty$$

и, следовательно, условию Карлемана

$$\int_Y |N(s,t)|^2 d\nu(t) < \infty$$

для μ-почти всех $s \in X$.

Определение 2.2.2. Пусть H_i — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_i$ $(i = 0, 1)$. Оператор $U : H_0 \to H_1$ называется *унитарным*, если $UH_0 = H_1$ и $(Uf, Ug)_1 = (f, g)_0$ для любых $f, g \in H_0$.

Определение 2.2.3. Пусть H — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$. Будем говорить, что число λ *принадлежит предельному спектру* $\sigma_c(L)$ *оператора* $L : D_L \subset H \to H$, если в D_L существует ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \big\|(L - \lambda\mathbf{1})h_n\big\|_H = 0.$$

Определение 2.2.4. Оператор $F : D_F \subset H_0 \to H_1$ называется *замкнутым*, если из $\|x_n - x\|_{H_0} \to 0$, $\{x_n\} \subset D_F$ и $\|Fx_n - y\|_{H_1} \to 0$ следует $x \in D_F$ и $y = Fx$. Оператор $G : D_G \subset H_0 \to H_1$ называется *замыкаемым*, если существует замкнутый оператор $F : D_F \subset H_0 \to H_1$ такой, что $D_G \subset D_F$ и для всех $h \in D_G$ имеет место равенство $Gh = Fh$. Известно, что оператор, сопряженный к плотно определенному замыкаемому линейному оператору, замкнут и плотно определен.

Теорема 2.2.1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$, пространство $L_2(\mu)\colon = L_2(X,\mu)$ сепарабельно и мера μ не является чисто атомической, $\{T_\delta : D_{T_\delta} \subset H \to H, \delta \in \Delta\}$ — семейство плотно определенных в H замыкаемых линейных операторов. Пусть*

(i) *в H существует ортонормированный базис $\{u_n\}$ такой, что*

$$\{u_n\} \subset \bigcap_{\delta\in\Delta} D_{T^*_\delta}, \tag{2.2.3}$$

где $D_{T^*_\delta}$ — область определения сопряженного к T_δ оператора T^*_δ;

(ii) *существует подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{u_n\}$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\delta\in\Delta} \big\|T^*_\delta v_n\big\|_H = 0. \tag{2.2.4}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно построить унитарный оператор* $U: H \to L_2(\mu)$ *такой, что для любого* $\delta \in \Delta$ *оператор* $UT_\delta U^{-1}$ *представим в виде* $N_\delta + K_\delta$, *где* N_δ — *ядерный оператор в* $L_2(\mu)$ *с ядерной нормой меньшей, чем* ε, *а оператор* K_δ *является интегральным оператором с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$K_\delta(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{P_{n,\delta}(t)},$$

здесь $\{e_n\}$ — *произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из* X *с конечными положительными мерами,* $\{P_{n,\delta}\} \subset L_2(\mu)$. *Кроме того, для любого* $\delta \in \Delta$ $UT_\delta U^{-1} = A_\delta B_\delta$, *где* B_δ — *ядерный оператор в* $L_2(\mu)$, *оператор* A_δ *является оператором умножения на счетнозначную измеримую функцию* $a_\delta(s) \geqslant 1$.

$\lhd$ Пользуясь (2.2.4), выберем подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{v_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\delta\in\Delta} \left\|T_\delta^* w_n\right\|_H < \varepsilon. \tag{2.2.5}$$

Обозначим через $[w_n]$ замкнутую линейную оболочку последовательности $\{w_n\}$ и через $[w_n]^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к $[w_n]$. Будем считать без ограничения общности, что $\dim[w_n]^\perp = \infty$ (в противном случае достаточно перейти от $\{w_n\}$ к $\{w_{2n}\}$). Обозначим последовательность $\{u_n\} \setminus \{w_n\}$ через $\{z_n\}$. Мы имеем для любого $\delta \in \Delta$ и любых $f \in D_{T_\delta}$

$$\begin{aligned} T_\delta f = \sum_{n=1}^{\infty}(T_\delta f, u_n)_H\, u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, T_\delta^* u_n)_H\, u_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}(f, T_\delta^* z_n)_H z_n + \sum_{n=1}^{\infty}(f, T_\delta^* w_n)_H\, w_n. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Пусть $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$ и $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E. Имеем

$$\dim E = \dim E^\perp = \dim[w_n] = \dim[w_n]^\perp = \infty. \tag{2.2.7}$$

Положим $\chi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и обозначим через $\{\chi_n^\perp\}$ ортонормированный базис $E^\perp$. Пользуясь (2.2.7), определим унитарный оператор $U: H \to L_2(\mu)$ равенствами

$$Uz_n = \chi_n, \quad Uw_n = \chi_n^\perp, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2.8}$$

Тогда в силу (2.2.6) и (2.2.8) для любого $\delta \in \Delta$ и любого $g \in UD_{T_\delta}$

$$UT_\delta U^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty}(g, UT_\delta^* z_n)\,\chi_n + \sum_{n=1}^{\infty}(g, UT_\delta^* w_n)\,\chi_n^{\perp},$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mu)$. Введем операторы K_δ и N_δ:

$$K_\delta g = \sum_{n=1}^{\infty}(g, UT_\delta^* z_n)\,\chi_n, \quad g \in UD_{T_\delta},$$

$$N_\delta h = \sum_{n=1}^{\infty}(h, UT_\delta^* w_n)\,\chi_n^{\perp}, \quad h \in L_2(\mu).$$

Тогда $UT_\delta U^{-1} = K_\delta + N_\delta$. Так как носители e_n функций χ_n попарно не пересекаются, то K_δ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\delta(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\,\overline{UT_\delta^* z_n(t)}.$$

В силу (2.2.5) оператор N_δ ядерный и его ядерная норма меньше, чем ε. Рассмотрим для каждого $\delta \in \Delta$ оператор умножения A_δ на функцию

$$a_\delta = \chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\big(\|T_\delta^* z_n\|_H + 1\big)\chi_{e_n} \geqslant 1,$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Тогда $UT_\delta U^{-1} = A_\delta A_\delta^{-1} UT_\delta U^{-1} = A_\delta B_\delta$, где $B_\delta = A_\delta^{-1}(N_\delta + K_\delta)$ — ядерный оператор. $\rhd$

Следствие 2.2.1. *Пусть в теореме* 2.2.1 *для любого* $\delta \in \Delta$ *оператор* $T_\delta : H \to H$ *линеен и непрерывен. Тогда утверждение теоремы* 2.2.1 *останется справедливым, если в этой теореме заменить условия* (i), (ii) *более слабым условием* (iii): *существует ортонормированная последовательность* $\{v_n\}$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\delta\in\Delta}\left\|T_\delta^* v_n\right\|_H = 0. \tag{2.2.9}$$

$\lhd$ Достроим ортонормированную последовательность $\{v_n\}$ до ортонормированного базиса $\{u_n\}$ в H. Этот базис удовлетворяет условию (2.2.3), так как $\bigcap_{\delta\in\Delta} D_{T_\delta^*} = H$. Условие (2.2.4) выполняется в силу (2.2.9). $\rhd$

Рассмотрим гильбертово пространство $L_{2,m}(\mu) := L_{2,m}(X,\mu)$ вектор-функций $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$ с конечной нормой

$$\|h\|_{m,\mu} = \left(\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} |h_i|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

и скалярным произведением

$$\langle h, g\rangle = \sum_{i=1}^{m} \int_X h_i\, \overline{g_i}\, d\mu.$$

Пусть $T_{ij} : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$, $i, j = 1, \dots m$, — линейные непрерывные операторы. Определим в $L_{2,m}(\mu)$ линейный непрерывный матричный оператор $\widetilde{T}$ равенствами

$$\big((\widetilde{T}h)(s)\big)_i = \sum_{j=1}^{m} T_{ij} h_j(s), \quad i = 1, \dots m,$$

здесь $((\widetilde{T}h)(s))_i$ — i-я компонента вектор-функции $\widetilde{T}h$.

Следствие 2.2.2. *Пусть $0 \in \sigma_c(\widetilde{T}^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный матричный оператор $\widetilde{U} : L_{2,m}(\mu) \to L_{2,m}(\mu)$ такой, что $\widetilde{U}\widetilde{T}\widetilde{U}^{-1} = \widetilde{N} + \widetilde{K}$, где $\widetilde{N}$ — ядерный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε, $\widetilde{K}$ — интегральный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским матричным ядром*

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\, K_n(t),$$

где для любого n первая строка $(m \times m)$-матрицы $K_n(t)$ при почти всех $t \in X$ есть $\Big\{(\overline{\widetilde{U}\widetilde{T}^*\widetilde{z}_n(t)})_1, \dots, (\overline{\widetilde{U}\widetilde{T}^*\widetilde{z}_n(t)})_m\Big\}$, а остальные ее строки равны 0 для всех $t \in X$, $\{\widetilde{z}_n\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(\mu)$.

$\lhd$ В силу $0 \in \sigma_c(\widetilde{T}^*)$ существует ортонормированная система $\{\widetilde{f}_n\} \subset L_{2,m}(\mu)$ такая, что $\widetilde{T}^*\widetilde{f}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем подпоследовательность $\{\widetilde{\omega}_n\} \subset \{\widetilde{f}_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\|\widetilde{T}^*\widetilde{\omega}_n\big\|_{m,\mu} < \varepsilon.$$

Искомый унитарный оператор $\widetilde{U}$ определяется по аналогии с (2.2.8) равенствами

$$\widetilde{U}\widetilde{z}_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\, h_0, \quad \widetilde{U}\widetilde{\omega}_n = \widetilde{\chi}_n^{\perp}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{\widetilde{z}_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{\widetilde{\omega}_n\}$, $\{\widetilde{\chi}_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\widetilde{\chi}_n = \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\, h_0$, $n = 1, 2, \dots,$

здесь h_0 — вектор-столбец, первая компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны нулю. Доказательство следствия 2.2.2 завершается повторением доказательства теоремы 2.2.1 в ситуации, когда $H = L_{2,m}(\mu)$, а операторное семейство состоит из одного оператора $\widetilde{T}$. $\rhd$

Теорема 2.2.2. *Пусть H, $L_2(X,\mu)$ и μ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1, $T : D_T \subset H \to H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $U : H \to L_2(\mu)$ такой, что $UTU^{-1} = N+K$, где N — ядерный оператор в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε, K — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром.*

$\lhd$ Так как $0 \in \sigma_c(T^*)$, то найдется ортонормированная система $\{h_n\} \subset D_{T^*}$ такая, что $\|T^*h_n\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{h_n\}$ так, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*v_n\|_H < \varepsilon$, и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, v_n)_H T^* v_n, \quad h \in H,$$

и замкнутый оператор $Q = T^* - \Gamma$ с областью определения $D_Q = D_{T^*}$. Тогда $Qv_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $V^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке V последовательности $\{v_n\}$ и $P^\perp$ — ортопроектор на $V^\perp$. В силу замкнутости Q имеем $V \subset D_Q$, поэтому $P^\perp D_Q \subset D_Q$. Обозначив через $\overline{F}$ замыкание множества $F \subset H$ по норме, получим $V^\perp \supseteq \overline{V^\perp \cap D_Q} \supseteq \overline{P^\perp D_Q} = \overline{P^\perp D_{T^*}} = V^\perp$, так как $\overline{D_{T^*}} = H$. Таким образом, $\overline{V^\perp \cap D_Q} = V^\perp$, т. е. $V^\perp \cap D_Q$ плотно в $V^\perp$. Пусть $\{v_n^\perp\}$ — любой ортонормированный базис подпространства $V^\perp$, состоящий из элементов D_Q. Рассмотрим ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства H, являющийся объединением $\{v_n\}$ и $\{v_n^\perp\}$. Имеем $\{u_n\} \subset D_Q = D_{T^*}$ и $\|T^*v_n\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для семейства, состоящего из одного оператора T, выполнены все условия теоремы 2.2.1. $\rhd$

Следствие 2.2.3. *Пусть H, $L_2(X,\mu)$ и мера μ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1, $T : D_T \subset H \to L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и существует ортонормированная последовательность $\{\varphi_n\} \subset D_{T^*}$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T^* \varphi_n \right\|_H = 0.$$

Тогда найдется унитарный оператор $W : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ такой, что $WT = AB$, где $B : H \to L_2(\mu)$ — ядерный оператор, A — оператор умножения на счетнозначную измеримую функцию $a(s) \geqslant 1$.

$\lhd$ Пусть $Z : L_2(\mu) \to H$ — произвольный унитарный оператор, $T_1 := TZ$. Имеем $\|T_1^*\varphi_n\| = \|Z^*T^*\varphi_n\| = \|T^*\varphi_n\|_H \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $0 \in \sigma_c(T_1^*)$. Отсюда в силу теоремы 2.2.2 и заключительной части доказательства теоремы 2.2.1 следует, что существует унитарный оператор $W : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ такой, что $WT_1W^{-1} = AB_1$, где $B_1 : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — ядерный оператор, A — оператор умножения на счетнозначную функцию $a(s) \geqslant 1$. Тогда $AB_1 = WT_1W^{-1} = WTZW^{-1}$. Отсюда $WT = AB_1WZ^{-1} = AB$, где $B = B_1WZ^{-1}$ — ядерный оператор. $\triangleright$

Из теоремы 2.2.2 следует, что влючение $0 \in \sigma_c(T^*)$ представляет собой достаточное условие унитарной эквивалентности оператора T карлемановскому интегральному оператору. Покажем, что это условие является и необходимым.

Теорема 2.2.3. *Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с ядром $K(s,t)$.*

1) *Пусть в множестве E, $0 < \mu E < \infty$, нет атомов меры μ. Если*

$$\int\limits_X \left(\int\limits_E |K(s,t)|\, d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) < \infty, \tag{2.2.10}$$

то $0 \in \sigma_c(T^*)$.

2) *Если ядро K удовлетворяет условию Карлемана*

$$\Lambda(s) := \int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \tag{2.2.11}$$

для почти всех $s \in X$, то $0 \in \sigma_c(T^*)$.

$\triangleleft$ 1) Покажем, что интегральный оператор T_E с ядром $\chi_E(s)K(s,t)$ определен на всем $L_2(X,\mu)$. Действительно, для любого $f \in L_2(\mu)$

$$\int\limits_X \int\limits_X \chi_E(s)\, |K(s,t)|\, |f(t)|\, d\mu(t)\, d\mu(s) = \int\limits_X |f(t)| \int\limits_E |K(s,t)|\, d\mu(s)\, d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \left(\int\limits_X \left(\int\limits_E |K(s,t)|\, d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Следовательно, для почти всех $s \in X$

$$\int\limits_X \chi_E(s)\, |K(s,t)|\, |f(t)|\, d\mu(t) < \infty.$$

Таким образом, $T_E : L_2(X,\mu) \to L_0(X,\mu)$ — интегральный оператор. В силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 оператор T_E почти компактен. Значит, в E найдется множество e, $\mu e > 0$, такое, что оператор

$T_e = P_e T_E : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ компактен; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(\mu)$. Будем говорить, что оператор $T_2 : D_{T_2} \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ является расширением оператора $T_1 : D_{T_1} \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$, если $D_1 \subseteq D_{T_2}$ и $T_1 h = T_2 h$ для любого $h \in D_{T_1}$. Условимся писать в этом случае $T_1 \subseteq T_2$. Мы имеем $P_e T \subseteq T_e$. Отсюда $T_e^* \subseteq (P_e T)^* = T^* P_e$. Но $T_e^* : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — компактный оператор. Следовательно, $T^* P_e = T_e^*$ и $T^* P_e$ определен на всем $L_2(\mu)$, действует в $L_2(\mu)$ и компактен. Поэтому для любой ортонормированной последовательности функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, с носителями в e получим $\|T^* f_n\| = \|T^* P_e f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $0 \in \sigma_c(T^*)$.

2) Из (2.2.11) следует, что существуют постоянная C и множество $e \subset E$, $\mu e > 0$, такие, что $\Lambda(s) \leqslant C$ для всех $s \in e$. Тогда

$$\int\limits_e \int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) \, d\mu(s) = \int\limits_e \Lambda(s) \, d\mu(s) \leqslant C\mu e.$$

Отсюда

$$\int\limits_X \left(\int\limits_e |K(s,t)| \, d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) \leqslant \int\limits_X \mu e \int\limits_e |K(s,t)|^2 \, d\mu(s) \, d\mu(t) =$$

$$= \mu e \int\limits_e \int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) \, d\mu(s) \leqslant \mu e \, C \mu e = C(\mu e)^2 < \infty.$$

Таким образом, ядро K удовлетворяет условию типа (2.2.10) и по уже доказанному $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\rhd$

Следствие 2.2.4. *Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор. Если существует не содержащее атомов меры μ множество E, $0 < \mu E < \infty$, такое, что оператор $P_E T$ продолжается до определенного на всем $L_2(\mu)$ и действующего в $L_0(\mu)$ почти компактного оператора, то $0 \in \sigma_c(T^*)$. Здесь $P_E f = \chi_E f$, $f \in L_2(\mu)$.*

Справедливость следствия вытекает из доказательства первого утверждения теоремы 2.2.3.

Для непрерывных операторов имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2.2.4. *Пусть мера μ не является чисто атомической, $T : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — линейный непрерывный оператор. Если для множества E, $0 < \mu E < \infty$, не содержащего атомов меры μ, оператор $P_E T$ компактен по мере, то $0 \in \sigma_c(T^*)$.*

$\lhd$ По теореме 1.1.2 $P_E T : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ компактен. Следовательно, $T^* P_E : L_\infty(\mu) \to L_2(\mu)$ — компактный оператор. Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную систему функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, с носителями в E. По теореме Римана — Лебега

$$\int\limits_E \varphi_n f d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для любой функции $f \in L_1(\mu)$. Отсюда и из компактности $T^*P_E : L_\infty(\mu) \to L_2(\mu)$ следует $\|T^*\varphi_n\| = \|T^*P_E\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\rhd$

Теоремы 2.2.1, 2.2.2 показывают, что операторы из введенного в предисловии класса B_0 приводятся унитарными преобразованиями к интегральному виду с карлемановскими ядрами простой структуры. Из теорем 2.2.3, 2.2.4 следует, что класс B_0 очень широк. В частности, он включает в себя все компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы в L_2. Более того, классу B_0 принадлежат все операторы, отдельные левосторонние срезки которых являются перечисленными операторами.

В дополнение к теоремам 2.2.1, 2.2.2 и их следствиям отметим, что если мера μ сепарабельна, σ-конечна и чисто атомическая, то любой линейный непрерывный оператор $T : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ является карлемановским интегральным оператором с квазивырожденным карлемановским ядром. Действительно, в этом случае $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, где X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — попарно не пересекающиеся множества с конечными положительными мерами. Положим $\delta_n = \chi_{X_n}/\sqrt{\mu X_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\{\delta_n\}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(\mu)$. Следовательно, для любого $f \in L_2(\mu)$

$$Tf = \sum_{n=1}^\infty (Tf, \delta_n)\delta_n = \sum_{n=1}^\infty (f, T^*\delta_n)\delta_n.$$

Так как X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ попарно не пересекаются, то T — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^\infty \delta_n(s)\,\overline{T^*\delta_n(t)}.$$

Рассмотрим теперь задачу об условиях унитарной эквивалентности линейных операторов интегральным операторам в несепарабельном случае.

Теорема 2.2.5. *Пусть $L_2(\mu)$ — несепарабельное пространство, $T : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда*

1) *если T унитарно эквивалентен интегральному оператору $\widetilde{T}$, то образ T сепарабелен;*

2) *если образ оператора T сепарабелен, то T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору с квазивырожденным карлемановским ядром.*

$\lhd$ 1) В силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 интегральный оператор $\widetilde{T}$ почти компактен. Следовательно, его образ сепарабелен. Значит, образ T сепарабелен.

2) Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в образе оператора T, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Возьмем

любой унитарный оператор $W : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$, отображающий f_n в $\chi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Для каждого $f \in L_2(\mu)$ получим

$$WTW^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(WTW^{-1}f, \chi_n\right) \chi_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, WT^*W^{-1}\chi_n\right) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, WT^*f_n\right) \chi_n.$$

Отсюда следует, что WTW^{-1} — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{WT^*f_n(t)}. \quad \rhd$$

Теорема 2.2.6. *Пусть $L_2(\mu)$ — несепарабельное пространство, мера μ σ-конечна, $T : D_L \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — замыкаемый плотно определенный линейный оператор.*

1) *Если T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору L, то образ оператора T сепарабелен.*

2) *Если образ оператора T сепарабелен, то замыкание $\overline{T}$ оператора T унитарно эквивалентно карлемановскому интегральному оператору с квазивырожденным карлемановским ядром.*

$\lhd$ 1) Имеем

$$Lf(s) = \int_X L(s,t) f(t)\, d\mu(t), \quad f \in D_L,$$

где

$$\Lambda(s) := \left(\int_X |L(s,t)|^2\, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{2.2.12}$$

для почти всех $s \in X$. В силу (2.2.12) найдутся разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся множества с конечными мерами и последовательность постоянных $\{K_n\}$ такие, что $\Lambda(s) \leqslant K_n$ для почти всех $s \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим для каждого n оператор P_nL, где $P_nf = \chi_{X_n} f$, $f \in L_2(\mu)$. Пусть $\{z_m\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность из D_L. Тогда для почти всех $s \in X$

$$\left|P_nLz_m(s)\right| \leqslant K_n \chi_{X_n}(s) \sup_{m=1,2,\ldots} \|z_m\|.$$

Кроме того, в силу (2.2.12) последовательность $P_nLz_m(s)$ сходится к 0 при $m \to \infty$ для почти всех $s \in X$. Следовательно, $\|P_nLz_m\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Отсюда вытекает, что P_nL является сужением на D_L компактного оператора, действующего из $L_2(X,\mu)$ в $L_2(X,\mu)$. Значит, для каждого n образ оператора P_nL сепарабелен. Но тогда образ оператора L сепарабелен. Следовательно, образ T сепарабелен.

2) С помощью полярного разложения [10, с. 421] представим замыкание $\overline{T}$ оператора T в виде $\overline{T} = SP$, где S — самосопряженный оператор в $L_2(\mu)$, оператор P частично изометрический. Тогда $S = \overline{T}P^*$. Следовательно, образ $\operatorname{im} S$ оператора S сепарабелен. Не ограничивая общности, считаем $\dim \operatorname{im} S = \infty$. Пользуясь самосопряженностью S и спектральной теоремой, выберем в $\operatorname{im} S$ ортонормированный базис $\{h_n\}$, состоящий из элементов области определения D_S оператора S. Рассмотрим унитарный оператор $V : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$, отображающий h_n в $\chi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств с конечными положительными мерами. Тогда для любого $f \in VD_S$

$$\begin{gathered} VSV^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \big(VSV^{-1}f, \chi_n\big)\, \chi_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \big(SV^{-1}f, h_n\big)\, \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(f, VSh_n\big)\, \chi_n. \end{gathered} \tag{2.2.13}$$

Поскольку $\overline{T} = SP$, то для всех $f \in VD_{\overline{T}}$ в силу (2.2.13) и равенства $T^* = \overline{T}^* = P^*S$ получим

$$V\overline{T}V^{-1}f = VSV^{-1}VPV^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \big(VPV^{-1}f, VSh_n\big)\, \chi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(PV^{-1}f, Sh_n\big)\, \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(f, VP^*Sh_n\big)\, \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(f, VT^*h_n\big)\, \chi_n.$$

Отсюда следует, что $V\overline{T}V^{-1}$ — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$M(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\, \overline{VT^*h_n(t)}. \quad \triangleright$$

В заключение отметим, что унитарные операторы в теоремах 2.2.1, 2.2.2, 2.2.5, 2.2.6, приводящие операторы и семейства операторов к интегральному виду, строятся явно и ядра получающихся интегральных операторов также имеют явный вид.

Часть II. Уравнения

В части II изучаются линейные функциональные уравнения и системы 1-го, 2-го и 3-го родов при широких предположениях относительно операторов в них. Эти уравнения и системы всюду далее рассматриваются в комплексных пространствах. Случай вещественных пространств рассматривается аналогично.

Глава 3. Функциональные уравнения и системы 1-го рода в L_2

§ 3.1. Теорема Пикара. Почти компактные операторы. Метод компактной факторизации

Определение 3.1.1. Пусть H_0, H_1 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_0$, $(\cdot,\cdot)_1$ и нормами $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, F — конечное или счетное множество индексов, $\{g_n\}_{n\in F}\subset H_0$, $\{h_n\}_{n\in F}\subset H_1$ — ортонормированные множества, $\{\lambda_n\}_{n\in F}$ — ограниченное множество ненулевых чисел. Оператор

$$Tz=\sum_{n\in F}\lambda_n(z,g_n)_0h_n,\quad z\in H_0, \tag{3.1.1}$$

называется *квазидиагональным*. В случае $H_0=H_1$, $g_n=h_n$ для всех $n\in F$ оператор T называется *диагональным*.

Важным примером квазидиагонального оператора является произвольный компактный оператор $C: H_0\to H_1$ [37]. Отметим, что $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ для любого компактного оператора могут быть найдены методом И. М. Новицкого [36].

Теорема 3.1.1 (Э. Пикар). *Пусть $T: H_0\to H_1$ — квазидиагональный оператор, определяемый равенством* (3.1.1), *T^* — сопряженный оператор.*

Для того чтобы уравнение 1-го рода $Tz = h \in H_1$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

1) $(h, u)_1 = 0$ *для любого* u, *удовлетворяющего условию* $T^*u = 0$;

2) $\sum\limits_{n\in F} \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(h, h_n)_1|^2 < \infty$.

При выполнении условий 1), 2) *все решения уравнения* $Tz = h$ *имеют вид*

$$z = z_0 + \sum_{n\in F} \frac{1}{\lambda_n} (h, h_n)_1 g_n,$$

где z_0 — *произвольное решение однородного уравнения* $T\xi = 0$.

$\triangleleft$ Всюду в доказательстве теоремы вместо $\sum_{n\in F}(\cdot)$ будем писать $\sum_n(\cdot)$.

Необходимость. Пусть $Tx = h$. Для любого u такого, что $T^*u = 0$, имеем $(h, u)_1 = (Tx, u)_1 = (x, T^*u)_0 = 0$. Докажем необходимость второго условия теоремы. Из $Tx = h$ следует

$$\sum_n \lambda_n (x, g_n)_0 h_n = h.$$

Тогда $(h, h_k)_1 = \lambda_k (x, g_k)_0$ и в силу неравенства Бесселя

$$\sum_n \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(h, h_n)_1|^2 = \sum_n |(x, g_n)_0|^2 \leqslant \|x\|_0^2 < \infty.$$

Достаточность. Пусть h удовлетворяет условиям 1), 2). Рассмотрим элемент

$$g = \sum_n (h, h_n)_1 h_n.$$

Положим $f = h - g$ и покажем, что $T^*f = 0$. Так как для любого $v \in H_0$

$$Tv = \sum_n \lambda_n (v, g_n)_0 h_n,$$

то, пользуясь определением сопряженного оператора и ортогональностью множеств $\{g_n\}_{n\in F}$, $\{h_n\}_{n\in F}$, получим для любого $w \in H_1$

$$T^*w = \sum_n \overline{\lambda_n} (w, h_n)_1 g_n.$$

Тогда

$$T^*f = \sum_n \overline{\lambda_n} \left(h - \sum_k (h, h_k)_1 h_k,\ h_n \right)_1 g_n = \sum_n \overline{\lambda_n} \left[(h, h_n)_1 - (h, h_n)_1 \right] g_n = 0.$$

Поэтому из условия 1) имеем $(h, f)_1 = 0$. Следовательно,

$$0 = (h, f)_1 = \left(\sum_n (h, h_n)_1 h_n + f,\ f \right)_1 =$$

$$= \sum_n (h, h_n)_1 (h_n, f)_1 + \|f\|_1^2 = \sum_n (h, h_n)_1 \left(\frac{1}{\lambda_n}\, T g_n, f \right)_1 + \|f\|_1^2 =$$

$$= \sum_n (h, h_n)_1 \left(\frac{1}{\lambda_n}\, g_n, T^* f \right)_0 + \|f\|_1^2 = \|f\|_1^2.$$

Таким образом, $f = 0$ и

$$h = \sum_n (h, h_n)_1 h_n.$$

Рассмотрим элемент

$$\widetilde{z} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}\, (h, h_k)_1 g_k.$$

В силу ортонормированности множества $\{g_n\}_{n \in F}$

$$T\,\widetilde{z} = \sum_n \lambda_n \left(\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\, (h, h_k)_1\, g_k,\ g_n \right)_0 h_n = \sum_n \lambda_n \frac{1}{\lambda_n}\, (h, h_n)_1 h_n = h.$$

Следовательно, $\widetilde{z}$ — частное решение уравнения $Tz = h$. Тогда все решения этого уравнения даются формулой

$$z = z_0 + \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\, (h, h_n)_1 g_n,$$

где z_0 — произвольное решение однородного уравнения $T\xi = 0$. $\rhd$

Определение 3.1.2. Линейный оператор $T : H_0 \to L_2(X, \mu)$ называется *почти компактным*, если существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_n T : H_0 \to L_2(X, \mu)$ — компактный оператор для любого n; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_2(X, \mu)$, χ_e — характеристическая функция множества e.

Теорема 3.1.2. *Пусть $T : H_0 \to L_2(X, \mu)$ — почти компактный оператор. Тогда уравнение $Tx = f \in L_2(X, \mu)$ может быть сведено к эквивалентному уравнению 1-го рода с компактным оператором.*

$\lhd$ Из почти компактности оператора T следует, что он замкнут и по теореме о замкнутом графике ограничен. Умножив обе части уравнения $Tx = f$ на функцию $\sigma = \sum_n 2^{-n} \chi_{X_n}$, получим эквивалентное уравнение $T_\sigma x = \sigma f$ с компактным оператором $T_\sigma = \sum_n 2^{-n} P_n T$, так что к уравнению $T_\sigma x = \sigma f$ применима теорема Пикара. $\rhd$

Теорема 3.1.3. *Пусть $T : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ — интегральный оператор. Тогда существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что интегральное уравнение 1-го рода $Tx = f$ умножением обеих его частей на функцию $\sigma = \sum_n 2^{-n}\chi_{X_n}$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению 1-го рода с компактным интегральным оператором.*

$\lhd$ Справедливость утверждения теоремы непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3. $\rhd$

Отметим, что в [22, с. 91–93] приведено явное построение разбиения $\{X_n\}$ для любого интегрального оператора, действующего из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(X,\mu)$.

§ 3.2. C_1-ядра. Сведение функциональных уравнений 1-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с C_1-ядрами

Определение 3.2.1. Пусть (Y,ν), (X,μ) — пространства с σ-конечными положительными мерами, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{u_n\} \subset L_2(Y,\nu)$. Функция

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{u_n(t)}$$

называется *квазивырожденным карлемановским ядром.*

Определение 3.2.2. Ядро

$$L(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s)\, \overline{q_n(t)},$$

удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|p_n\|_{L_2(\mu)} \|q_n\|_{L_2(\nu)} < \infty,$$

назовем *C_1-ядром.*

Интегральный оператор с C_1-ядром $L(s,t)$ называется ядерным и является компактным карлемановским оператором, действующим из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(X,\mu)$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $L_2(X,\mu)$ — несепарабельное пространство, образ $\operatorname{im} T$ линейного непрерывного оператора $T : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ сепарабелен. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2(X,\mu)$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с квазивырожденным карлемановским C_1-ядром.*

$\lhd$ Будем считать, без ограничения общности, что $\dim \operatorname{im} T = \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в $\operatorname{im} T$, $[f_n]$ — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{f_n\}$, $[f_n]^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $[f_n]$, $\{f_\xi^{\perp}, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис в $[f_n]^{\perp}$. Выберем произвольную последовательность попарно не пересекающихся множеств $e_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$, с конечными положительными мерами и рассмотрим унитарный оператор V в $L_2(X,\mu)$, определяемый равенствами

$$Vf_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad Vf_\xi^{\perp} = e_\xi^{\perp}, \quad \xi \in \Xi,$$

где $\{e_\xi^{\perp}, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке E ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu\, e_n}\}$. Тогда $VTh \in E$ для любого $h \in L_2(Y,\nu)$. Следовательно,

$$VTx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(VTx, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}} \right) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, T^* f_n)_0 \, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}} = Vf.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(Y,\nu)$, и $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(X,\mu)$. Это уравнение записывается в виде

$$\int\limits_Y K(s,t)x(t)\, d\nu(t) = Vf(s), \tag{3.2.1}$$

где

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \, \overline{T^* f_n(t)}. \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим функцию

$$b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{e_n}(s) + \chi_{e_0}(s),$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Умножив обе части уравнения (3.2.1) на функцию $b(s)$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода

$$\int\limits_Y C(s,t)x(t)\, d\nu(t) = b(s)Vf(s) \in L_2(X,\mu) \tag{3.2.3}$$

с квазивырожденным карлемановским C_1-ядром

$$C(s,t) = b(s)K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{T^* f_n(t)}. \quad \triangleright$$

Отметим, что уравнения $Tx = f$ и (3.2.3) имеют одни и те же решения и для вычисления Vf и ядра $C(s,t)$ не требуется знания V на $f_\xi^\perp$, $\xi \in \Xi$. Кроме того, функция $b(s)$ не зависит от уравнения $Tx = f$.

Следствие 3.2.1. *Утверждение теоремы* 3.2.1 *имеет место, если T — почти компактный оператор.*

Это следствие непосредственно вытекает из того, что образ каждого почти компактного оператора сепарабелен.

Следствие 3.2.2. *Утверждение теоремы* 3.2.1 *справедливо, если T — интегральный оператор.*

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор почти компактен.

Теорема 3.2.2. *Пусть $L_2(X,\mu)$, $L_2(Y,\nu)$ — сепарабельные пространства, мера μ не является чисто атомической, $T : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ — линейный непрерывный оператор и существует ортонормированная система $\{\varphi_n\} \subset L_2(X,\mu)$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|T^*\varphi_n\|_{L_2(\nu)} = 0$. Тогда уравнение $Tx = f \in L_2(X,\mu)$ эквивалентно интегральному уравнению* 1*-го рода с C_1-ядром.*

$\triangleleft$ В силу следствия теоремы 2.2.2 найдется унитарный оператор $W : L_2(X,\mu) \to L_2(X,\mu)$ такой, что $WT = AB$, где $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2(X,\mu)$, $a(s) \geqslant 1$, $B : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ — ядерный интегральный оператор с C_1-ядром $H(s,t)$. Умножив обе части уравнения $WTx = Wf$ на функцию $\frac{1}{a(s)}$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода с C_1-ядром $H(s,t)$. $\triangleright$

Следствие 3.2.3. *Утверждение теоремы* 3.2.2 *справедливо, если найдется множество $e \subset X$, $0 < \mu\, e < \infty$, такое, что*

(i) *существует равномерно ограниченная ортонормированная система функций $\varphi_n \in L_2(X,\mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, с носителями в e;*

(ii) *множество $P_e T S_2$ компактно по мере* (*здесь S_2 — единичный шар в $L_2(Y,\nu)$, $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(X,\mu)$*).

$\triangleleft$ Из условия (ii) и теоремы 1.1.2 следует, что оператор $P_e T : L_2(Y,\nu) \to L_1(X,\mu)$ компактен. Тогда $T^* P_e : L_\infty(X,\mu) \to L_2(Y,\nu)$ — компактный оператор. Поэтому $\|T^*\varphi_n\|_{L_2(\nu)} = \|T^* P_e \varphi_n\|_{L_2(\nu)} \to 0$ при $n \to \infty$. $\triangleright$

Замечание 3.2.1. Условие (i) в следствии 3.2.3 выполняется, если в e нет атомов меры μ: в качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать равномерно ограниченную ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e'}\}$ с носителями в $e' \subseteq e$ (определение этих функций см. в начале § 1.1).

Замечание 3.2.2. Условие (ii) в следствии 3.2.3 выполняется, если $P_e T$ — интегральный оператор (см. следствие 1.1.5 теоремы 1.1.3). Таким образом, если мера μ не является чисто атомической, из теорем 3.2.1, 3.2.2 следует, что любое интегральное уравнение 1-го рода в L_2 эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с C_1-ядром. К такому уравнению применимы теорема Пикара и различные известные приближенные методы решения.

Замечание 3.2.3. Если $P_{e'}TS_2$ — относительно компактное множество в $L_2(X,\mu)$ для некоторого $e' \subseteq e$, то в качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать любую ортонормированную систему функций с носителями в e'.

Замечание 3.2.4. Относительная компактность $P_{e'}TS_2$ в $L_2(X,\mu)$ будет иметь место для некоторого $e' \subseteq e$, если $T : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ — почти компактный оператор.

Замечание 3.2.5. В § 5.3 (теорема 5.3.1) предложен метод сведения к интегральному уравнению 1-го рода с C_1-ядром уравнения $Tx = f$ с линейным неограниченным плотно определенным замыкаемым оператором T, удовлетворяющим условию $\|T^*\varphi_n\| \to 0$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система из области определения оператора T^*.

§ 3.3. Системы функциональных уравнений 1-го рода

Пусть (X,μ), (Y,ν) — пространства с σ-конечными положительными мерами, E_m — евклидово пространство размерности m, $L_{2,m}(X,\mu)$ — гильбертово пространство вектор-функций $f : X \to E_m$ с компонентами $f_i \in L_2(X,\mu)$, $i = 1,\ldots,m$, нормой

$$\|f\|_{m,\mu} = \left(\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} |f_i|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.1}$$

и скалярным произведением

$$\langle f,h\rangle_{m,\mu} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_X f_i \, \overline{h_i} \, d\mu, \tag{3.3.2}$$

$L_{2,k}(Y,\nu)$ — аналогичное пространство с нормой $\|\cdot\|_{k,\nu}$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{k,\nu}$.

Рассмотрим систему

$$T_i x = f_i \in L_2(X,\mu), \quad i = 1,\ldots,m, \tag{3.3.3}$$

где решение x ищется в гильбертовом пространстве H_0, $T_i : H_0 \to L_2(X,\mu)$, $i = 1,\dots,m$, — линейные непрерывные операторы.

Теорема 3.3.1. *Система* (3.3.3) *с почти компактными операторами* $T_i : H_0 \to L_2(X,\mu)$, $i = 1,\dots,m$, *эквивалентна уравнению* 1*-го рода с компактным оператором.*

$\lhd$ Так как T_i, $i = 1,\dots,m$, — почти компактные операторы, найдется общее разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1,2,\dots$, такое, что $P_{X_n}T_i : H_0 \to L_2(X,\mu)$ — компактные операторы для всех $i = 1,\dots,m$ и $n = 1,2,\dots$ (здесь $P_{X_n}g = \chi_{X_n}g$, $g \in L_2(X,\mu)$). Умножив обе части уравнений системы (3.3.3) на функцию $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_{X_n}$ и положив $f = \{f_1,\dots,f_m\}$, получим эквивалентное системе (3.3.3) уравнение 1-го рода $(\tau x)(s) = \sigma(s)f(s) \in L_{2,m}(X,\mu)$ с компактным оператором

$$(\tau h)(s) = \bigl\{\sigma(s)(T_1h)(s),\dots,\sigma(s)(T_mh)(s)\bigr\}, \quad h \in H_0. \quad \rhd$$

Теорема 3.3.2. *Пусть* $T_i : H_0 \to L_2(X,\mu)$, $i = 1,\dots,m$, — *линейные непрерывные операторы. Определим оператор* $Th = \{T_1h,\dots,T_mh\}$, $h \in H_0$. *Система* (3.3.3) *эквивалентна уравнению* 1*-го рода с ядерным оператором, если пространства* H_0, $L_2(X,\mu)$ *сепарабельны, мера* μ *не является чисто атомической и существует ортонормированная система* $\{\varphi_n\} \subset L_{2,m}(X,\mu)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \bigl\|T^*\varphi_n\bigr\|_{H_0} = 0,$$

здесь $\|\cdot\|_{H_0}$ — *норма в* H_0.

$\lhd$ Пространство вектор-функций $L_{2,m}(X,\mu)$ можно отождествить с пространством скалярных функций $L_2(\widetilde{X},\widetilde{\mu})$, где $\widetilde{X} = X \times \{1,\dots,m\}$, $\widetilde{\mu} = \mu \times \mu_0$, где считающая мера μ_0 определена на всех подмножествах множества $\{1,\dots,m\}$ и на каждом непустом подмножестве E множества $\{1,\dots,m\}$ равна числу элементов E. Тогда $T : H_0 \to L_2(\widetilde{X},\widetilde{\mu})$. Отсюда, пользуясь следствием теоремы 2.2.2 и повторяя доказательство теоремы 3.2.2 (с заменой $L_2(Y,\nu)$ на H_0), получим справедливость доказываемой теоремы. $\rhd$

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений

$$\int\limits_Y H(s,t)\,y(t)\,d\nu(t) = f(s) \in L_{2,m}(X,\mu), \tag{3.3.4}$$

где неизвестная вектор-функция $y(t)$ ищется в $L_{2,k}(Y,\nu)$, ядро $H(s,t)$ — $(m \times k)$-матрица с $(\mu \times \nu)$-измеримыми элементами $h_{ij}(s,t)$, определенными на $X \times Y$. Будем предполагать, что интегральный оператор

$$H\varphi(s) = \int\limits_Y H(s,t)\,\varphi(t)\,d\nu(t), \quad \varphi \in L_{2,k}(Y,\nu), \tag{3.3.5}$$

определен на всем $L_{2,k}(Y,\nu)$, действует в $L_{2,m}(X,\mu)$ и ограничен.

Теорема 3.3.3. *Существует счетнозначная измеримая функция $0 < \sigma(s) \leqslant 1$ такая, что система* (3.3.4) *эквивалентна системе*

$$\int\limits_Y \sigma(s) H(s,t)\,y(t)\,d\nu(t) = \sigma(s) f(s) \in L_{2,m}(X,\mu)$$

с компактным оператором $H_\sigma\varphi(s) = \sigma(s)H\varphi(s)$, $\varphi \in L_{2,k}(Y,\nu)$, действующим из $L_{2,k}(Y,\nu)$ в $L_{2,m}(X,\mu)$.

$\lhd$ Так как интегральные операторы H_{ij} с ядрами $h_{ij}(s,t)$ действуют из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(X,\mu)$, то в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 они почти компактны. Следовательно, найдется общее разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что все операторы $P_{X_n} H_{ij} : L_2(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ компактны. Тогда $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{X_n}$ — искомая функция. $\rhd$

Теорема 3.3.4. *Пусть $L_2(Y,\nu)$, $L_2(X,\mu)$ — сепарабельные пространства, мера μ не является чисто атомической. Тогда система* (3.3.4) *эквивалентна системе*

$$\int\limits_Y \Gamma(s,t)\,y(t)\,d\nu(t) = g(s) \in L_{2,m}(X,\mu) \tag{3.3.6}$$

с $(m\times k)$-матричным ядром $\Gamma(s,t)$, все элементы $\gamma_{ij}(s,t)$ которого являются C_1-ядрами, а интегральный оператор с ядром $\Gamma(s,t)$ является ядерным оператором, действующим из $L_{2,k}(Y,\nu)$ в $L_{2,m}(X,\mu)$.

$\lhd$ Выберем множество e, $0 < \mu\, e < \infty$, не содержащее атомов меры μ. Пусть $\{\varphi_n\} \subset L_2(X,\mu)$ — какая-нибудь равномерно ограниченная ортонормированная система функций с носителями в e. Положим $\widetilde{\varphi}_n = h_0\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где столбец $h_0 = \{1, 0, \ldots, 0\}$ принадлежит евклидову пространству E_m. Рассмотрим ограниченные интегральные операторы

$$H_{ij}h(s) = \int\limits_Y h_{ij}(s,t)\,h(t)\,d\nu(t), \quad h \in L_2(Y,\nu),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, k,$$

действующие из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(X,\mu)$. Пользуясь (3.3.1), (3.3.2), получим

$$\left\|H^*\widetilde{\varphi}_n\right\|_{k,\nu} = \sup_{\|f\|_{k,\nu}\leqslant 1} \left|\langle f, H^*\widetilde{\varphi}_n\rangle_{k,\nu}\right| = \sup_{\|f\|_{k,\nu}\leqslant 1} \left|\langle Hf, \widetilde{\varphi}_n\rangle_{m,\mu}\right| =$$

$$= \sup_{\|f\|_{k,\nu}\leqslant 1} \left| \sum_{j=1}^{k} \int\limits_X \int\limits_Y h_{1j}(s,t)\, f_j(t)\,d\nu(t)\,\overline{\varphi_n(s)}\,d\mu(s)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left\|H_{1j}^*\varphi_n\right\|_{L_2(\nu)}.$$

В силу следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3 интегральные операторы H_{1j}, $j=1,\dots,k$, компактны по мере. Отсюда и из доказательства следствия 3.2.1 теоремы 3.2.2 получим $H_{1j}^*\varphi_n \to 0$ при $n\to\infty$ для каждого $j=1,\dots,k$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|H^*\widetilde{\varphi}_n\right\|_{k,\nu} = 0. \tag{3.3.7}$$

Представим $L_{2,m}(X,\mu)$ в виде $L_2(\widetilde{X},\widetilde{\mu})$, где $\widetilde{X}=X\times\{1,\dots,m\}$, $\widetilde{\mu}=\mu\times\mu_0$, μ_0 — считающая мера на $\{1,\dots,m\}$. Пусть $L_2(\widetilde{Y},\widetilde{\nu})$ — аналогичное пространство. Тогда интегральный оператор $H : L_{2,k}(Y,\nu) \to L_{2,m}(X,\mu)$ с матричным ядром $H(s,t)$ оказывается обычным интегральным оператором $\widetilde{H}$, действующим из $L_2(\widetilde{Y},\widetilde{\nu})$ в $L_2(\widetilde{X},\widetilde{\mu})$. При этом в силу (3.3.7) $\widetilde{H}^*$ отображает ортонормированную систему $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ в сходящуюся к 0 по норме последовательность. Отсюда получим по теореме 3.2.2, заменяя в ней T на $\widetilde{H}$, $L_2(Y,\nu)$ на $L_2(\widetilde{Y},\widetilde{\nu})$, $L_2(X,\mu)$ на $L_2(\widetilde{X},\widetilde{\mu})$, что система (3.3.4) эквивалентна системе $\Gamma y = g$ с ядерным оператором $\Gamma : L_{2,k}(Y,\nu)\to L_{2,m}(X,\mu)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, введем проекторы $Q_i : L_{2,m}(X,\mu)\to L_{2,m}(X,\mu)$, $i=1,\dots,m$, и $R_j : L_{2,k}(Y,\nu)\to L_{2,k}(Y,\nu)$, $j=1,\dots,k$. Проектор Q_i ставит в соответствие элементу $\{v_1(t),\dots,v_m(t)\}\in L_{2,m}(X,\mu)$ элемент из $L_{2,m}(X,\mu)$, i-я компонента которого равна $v_i(t)$, а остальные компоненты равны 0. Проектор R_j определяется аналогично. Отождествим ядерные операторы $Q_i\Gamma R_j$ с действующими из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(X,\mu)$ ядерными операторами. Эти операторы являются интегральными операторами с C_1-ядрами $\gamma_{ij}(s,t)$. Тогда ядерный оператор $\Gamma=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k Q_i\Gamma R_j$ представим в виде

$$\Gamma w = \int_Y \Gamma(s,t)\,w(t)\,d\nu(t), \quad w\in L_{2,k}(Y,\nu),$$

где $\Gamma(s,t)$ — $(m\times k)$-матрица с элементами $\gamma_{ij}(s,t)$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,k$. $\triangleright$

К уравнениям и системам 1-го рода с компактными или ядерными операторами, к которым сводятся рассмотренные в главе 3 функциональные и интегральные уравнения и системы 1-го рода, применимы как точные методы решения (например, теорема Пикара), так и различные приближенные регуляризационные методы решения. Отметим еще, что преобразования, приводящие исходные уравнения и системы к уравнениям и системам с компактными (ядерными) операторами, строятся в главе 3 в явном виде.

Глава 4. Функциональные уравнения и системы 2-го рода в L_2

Всюду в этой и следующих главах через $B(L_2(\mu))$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2(\mu)$ в $L_2(\mu)$, где $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$.

§ 4.1. Сведение уравнений 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Уравнения в гильбертовом пространстве

Теорема 4.1.1. *Пусть пространство $L_2(\mu)$ несепарабельно, образ оператора $T \in B(L_2(\mu))$ сепарабелен. Тогда уравнение 2-го рода*

$$\alpha x - \lambda T x = f \in L_2(\mu) \tag{4.1.1}$$

эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\lhd$ Применив к обеим частям уравнения (4.1.1) унитарный оператор V из доказательства теоремы 3.2.1, получим эквивалентное уравнение

$$\alpha V x(s) - \lambda V T x(s) = V f(s).$$

Как в доказательстве теоремы 3.2.1 это уравнение записывается в виде

$$\alpha V x(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \overline{T^* f_n(t)}\, x(t)\, d\mu(t) = V f(s).$$

Сделав в последнем уравнении замену $y = Vx$, придем к эквивалентному интегральному уравнению

$$\alpha y(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \overline{V T^* f_n(t)}\, y(t) d\,\mu(t) = V f(s)$$

с квазивырожденным карлемановским ядром. $\rhd$

Теорема 4.1.2. *Пусть пространство* $L_2(\mu)$ *сепарабельно, мера* μ σ*-конечна и не является чисто атомической,* $T \in B(L_2(\mu))$ *и* $0 \in \sigma_c(T^*)$. *Тогда уравнение 2-го рода*

$$\alpha x - \lambda T x = f \in L_2(\mu) \tag{4.1.2}$$

эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\triangleleft$ По теореме 2.2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $U \in B(L_2(\mu))$ такой, что $UTU^{-1} = N + K$, где N — ядерный оператор с ядерной нормой $\|N\|_1$ меньшей, чем ε, $K \in B(L_2(\mu))$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{w_n(t)}, \quad \{w_n\} \subset L_2(\mu). \tag{4.1.3}$$

Применим к обеим частям уравнения (4.1.2) оператор U. Имеем $\alpha U x - \lambda U T x = U f$. Сделав в этом уравнении замену $y = Ux$, получим эквивалентное интегральное уравнение

$$\alpha y(s) - \lambda U T U^{-1} y(s) = U f(s).$$

Пользуясь равенством $UTU^{-1} = N + K$ и (4.1.3), запишем это уравнение в виде

$$\alpha\Big(\mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha}\, N\Big) y(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{w_n(t)}\, y(t)\, d\mu(t) = U f(s). \tag{4.1.4}$$

Выберем ε так, чтобы $\frac{|\lambda|}{|\alpha|}\, \|N\|_1 < \mathbf{1}$. Тогда оператор $F_\lambda := \mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha} N$ имеет обратный $F_\lambda^{-1} \in B(L_2(\mu))$. Сделав в уравнении (4.1.4) замену $z = F_\lambda y$, придем к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\alpha z(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{(F_\lambda^{-1})^* w_n(t)}\, z(t)\, d\mu(t) = U f(s). \quad \triangleright$$

Следствие 4.1.1. *Утверждения теорем* 4.1.1, 4.1.2 *справедливы, если* T *— почти компактный оператор.*

В самом деле, образ почти компактного оператора сепарабелен и по теореме 2.2.4 $0 \in \sigma_c(T^*)$.

Следствие 4.1.2. *Утверждения теорем* 4.1.1, 4.1.2 *справедливы, если* T *— интегральный оператор.*

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор почти компактен.

Теорема 4.1.2 допускает следующее обобщение.

Теорема 4.1.3. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ-конечна и не является чисто атомической, $T : D_T \subset H \to H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$.*

Тогда уравнение 2-го рода в H $\alpha x - \lambda T x = f \in H$ эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\lhd$ По теореме 2.2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $U : H \to L_2(\mu)$ такой, что $UTU^{-1} = N + K$, где N — ядерный оператор в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой, меньшей, чем ε, K — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром. Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4.1.2. $\rhd$

В связи с доказанными в этом параграфе теоремами заметим, что в § 6.3 предложены приближенные методы решения интегральных уравнений 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами.

§ 4.2. Сведение систем 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Разрешающие ядра

Всюду в этом параграфе предполагается, что $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ-конечна и не является чисто атомической. Рассмотрим пространство $L_{2,m}(\mu)$ вектор-функций $f(s) = \{f_1(s), \dots, f_m(s)\}$, $f_i \in L_2(\mu)$, $i = 1, \dots, m$, со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_X \sum_{j=1}^m f_j \, \overline{g_j} \, d\mu$$

и нормой

$$\|f\|_{m,\mu} = \left(\int\limits_X \sum_{j=1}^m |f_j|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $B_{ij} \in B(L_2(\mu))$, $i, j = 1, \dots, m$. Определим в $L_{2,m}(\mu)$ оператор B равенствами

$$(Bf(s))_i = \sum_{j=1}^m B_{ij} f_j(s), \quad i = 1, \dots, m, \tag{4.2.1}$$

здесь $(Bf(s))_i$ — i-я компонента вектор-функции $Bf \in L_{2,m}(\mu)$.

Важным примером оператора B может служить карлемановский интегральный оператор $C : L_{2,m}(\mu) \to L_{2,m}(\mu)$:

$$(Cf(s))_i = \int\limits_X \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(s,t) f_j(t)\, d\mu(t), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.2.2}$$

где ядра $c_{ij}(s,t)$ удовлетворяют условию Карлемана

$$\int\limits_X |c_{ij}(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех} \quad s \in X.$$

Теорема 4.2.1. *Пусть $0 \in \sigma_c(B^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $\widetilde{U}$ в $L_{2,m}(\mu)$ такой, что система 2-го рода в $L_{2,m}(\mu)$*

$$\alpha x - \lambda B x = f \tag{4.2.3}$$

заменой $g = \widetilde{U} f$, $y = \widetilde{U} x$ приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений 2-го рода

$$\alpha y - \lambda\big(\widetilde{N} + \widetilde{K}\big) y = g, \tag{4.2.4}$$

здесь $\widetilde{N}$ — ядерный интегральный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε, $\widetilde{K}$ — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным матричным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{K_n(t)}, \tag{4.2.5}$$

где для каждого n и $t \in X$ первая строка $(m \times m)$-матрицы $K_n(t)$ есть $\{v_{n,1}(t), \ldots, v_{n,m}(t)\} := v_n(t) \in L_{2,m}(\mu)$, а остальные строки равны 0.

$\lhd$ Замена $y = \widetilde{U} x$, $g = \widetilde{U} f$, где $\widetilde{U}$ — унитарный оператор из следствия 2.2.2 теоремы 2.2.1, приводит систему (4.2.3) к искомой системе (4.2.4). $\rhd$

Следствие 4.2.1. *Утверждение теоремы* 4.2.1 *справедливо, если все операторы B_{ij} компактны по мере.*

Следствие 4.2.2. *Утверждение теоремы* 4.2.1 *справедливо, если все операторы B_{ij} почти компактны.*

Следствие 4.2.3. *Утверждение теоремы* 4.2.1 *справедливо, если все операторы B_{ij} интегральные.*

Следствия 4.2.1–4.2.3 вытекают из теоремы 2.2.4, так как все почти компактные и все интегральные операторы компактны по мере.

Теорема 4.2.2. *Система* (4.2.4) *эквивалентна линейному интегральному уравнению в* $L_2(\mu)$ *с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{q_n(t)}, \quad \{q_n\} \subset L_2(\mu).$$

◁ Запишем систему (4.2.4) в виде

$$\alpha\Big(\mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha}\, \widetilde{N}\Big)y - \lambda \widetilde{K} y = g \tag{4.2.6}$$

и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\frac{|\lambda|}{|\alpha|}\, \|\widetilde{N}\|_1 < 1$. Тогда оператор $F_\lambda = \mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha}\, \widetilde{N}$ имеет обратный оператор. Сделав в (4.2.6) замену $z = \big(\mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha}\, \widetilde{N}\,\big)y$, получим эквивалентную систему

$$\alpha z - \lambda \widetilde{K} F_\lambda^{-1} z = g$$

с квазивырожденным карлемановским матричным ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{M_n(t)},$$

где для каждого n и $t \in X$ первая строка $(m \times m)$-матрицы $M_n(t)$ есть $\{w_{n,1}(t), \ldots, w_{n,m}(t)\} = w_n(t)$; здесь $w_n(t) = (F_\lambda^{-1})^* v_n(t)$, вектор-функции $v_n(t)$ входят в определение ядра $K_n(t)$ в (4.2.5), остальные строки матрицы $M_n(t)$ равны 0. Мы имеем

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \sum_{j=1}^{m} z_j(t)\, \overline{w_{n,j}(t)}\, d\mu(t) = g_1(s),$$

$\alpha z_2 = g_2, \ldots, \alpha z_m = g_m$, где g_k — k-я компонента вектор-функции g, z_i — i-я компонента решения z. Отсюда

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \bigg(z_1(t)\, \overline{w_{n,1}(t)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=2}^{m} g_j(t)\, \overline{w_{n,j}(t)} \bigg) d\mu(t) = g_1(s).$$

Положив $q_n = w_{n,1}$, будем иметь

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, z_1(t)\, \overline{q_n(t)}\, d\mu(t) = g_1(s) + g_0(s),$$

где

$$g_0(s) = \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \langle \widetilde{g}, w_n \rangle, \quad \widetilde{g} = \{0, g_2, \ldots, g_m\}.$$

Пусть $\beta_n := \langle \widetilde{g}, w_n \rangle$. Тогда $\beta_n = \langle \widetilde{g}, (F_\lambda^{-1})^* v_n \rangle = \langle F_\lambda^{-1} \widetilde{g}, v_n \rangle$. В силу следствия 2.2.2 теоремы 2.2.1, из которого вытекает теорема 4.2.1, $v_n = \widetilde{U} B^* \widetilde{z}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{\widetilde{z}_n\}$ — ортонормированная система, $\widetilde{U}$ — унитарный оператор. Значит,

$$\beta_n = \left\langle F_\lambda^{-1} \widetilde{g}, v_n \right\rangle = \left\langle F_\lambda^{-1} \widetilde{g}, \widetilde{U} B^* \widetilde{z}_n \right\rangle = \left\langle B \widetilde{U}^{-1} F_\lambda^{-1} \widetilde{g}, \widetilde{z}_n \right\rangle.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n|^2 < \infty$. Поэтому $g_0 \in L_2(\mu)$ и $g_1 + g_0 \in L_2(\mu)$. $\triangleright$

В связи с доказанной теоремой см. также теорему 5.2.1 (случай $a(s) \equiv I$, где I — единичная матрица).

Заметим еще, что к интегральному уравнению 2-го рода для z_1 с квазивырожденным карлемановским ядром применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Итак, по теореме 4.2.1 система (4.2.3) эквивалентна системе $\alpha y - \lambda C y = g$ с карлемановским интегральным оператором $C : L_{2,m}(\mu) \to L_{2,m}(\mu)$. Далее, без ограничения общности, будем считать, что $\alpha = 1$. Остальная часть этого параграфа посвящена системе

$$y - \lambda C y = g. \tag{4.2.7}$$

Теорема 4.2.3. *Если $1/\lambda$ не принадлежит спектру определяемого равенством (4.2.2) карлемановского интегрального оператора $C : L_{2,m}(\mu) \to L_{2,m}(\mu)$, то для любой правой части $g \in L_{2,m}(\mu)$ система (4.2.7) имеет, и притом единственное, решение $y \in L_{2,m}(\mu)$. Это решение определяется равенством*

$$y(s) = g(s) + \lambda \int\limits_X \Gamma(s,t;\lambda)\, g(t)\, d\mu(t), \tag{4.2.8}$$

где элементы $\Gamma_{ij}(s,t;\lambda)$, $i,j = 1,\ldots,m$, разрешающего матричного ядра $\Gamma(s,t;\lambda)$ удовлетворяют условию Карлемана

$$\int\limits_X |\Gamma_{ij}(s,t;\lambda)|^2\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех} \quad s \in X.$$

Если, кроме того, для всех $i,j = 1,\ldots,m$,

$$\int\limits_X |c_{ij}(s,t)|^2 d\mu(s) < \infty \quad \text{для почти всех} \quad t \in X, \tag{4.2.9}$$

то разрешающее ядро удовлетворяет для почти всех $(s,t) \in X \times X$ двум равенствам

$$\Gamma(s,t;\lambda) - \lambda \int\limits_X C(s,\tau)\, \Gamma(\tau,t;\lambda)\, d\mu(\tau) = C(s,t), \tag{4.2.10}$$

$$\Gamma(s,t;\lambda)-\lambda\int\limits_X \Gamma(s,\sigma;\lambda)\,C(\sigma,t)\,d\mu(\sigma)=C(s,t). \tag{4.2.11}$$

Здесь $C(s,t)$ — матричное ядро карлемановского оператора C с элементами $c_{ij}(s,t)$, $i,j=1,\ldots,m$.

$\lhd$ Воспользуемся следующим аналогом леммы о правом умножении из § 2.1.

Лемма 4.2.1. *Пусть $C: L_{2,m}(\mu)\to L_{2,m}(\mu)$ — карлемановский интегральный оператор, $B: L_{2,m}(\mu)\to L_{2,m}(\mu)$ — линейный ограниченный оператор. Тогда CB — карлемановский интегральный оператор.*

Обозначим через $c_i(s,t)$ i-ю строку матрицы оператора C и через $(a)_i$ i-ю компоненту столбца a. Для любого $i=1,\ldots,m$ и $h\in L_{2,m}(\mu)$ имеем

$$(CBh)_i=\langle Bh,\overline{c_i}\,\rangle=\langle h,B^*\overline{c_i}\,\rangle,$$

где оператор B^* применяется к $\overline{c_i(s,t)}$ как к вектор-функции $\overline{c_i(s,t)}$ переменного $t\in X$, принадлежащей $L_{2,m}(\mu)$ при почти всех $s\in X$. Из полученного равенства следует, что CB — интегральный оператор с матричным ядром, i-я строка которого равна $\overline{B^*\overline{c_i}}$, откуда вытекает, что CB — карлемановский интегральный оператор.

Продолжим доказательство теоремы 4.2.3. Пусть ξ — произвольная точка из резольвентного множества $\rho(C)$ оператора C, $R_\xi:=(C-\xi\mathbf{1})^{-1}$ — резольвента оператора C, $\Gamma_\xi:=-\xi CR_\xi$ — резольвента Фредгольма оператора C. По доказанной лемме $\Gamma_\xi: L_{2,m}(\mu)\to L_{2,m}(\mu)$ — карлемановский интегральный оператор. Так как $\frac{1}{\lambda}\in\rho(C)$, то отсюда следует, что для любой функции $e\in L_{2,m}(\mu)$

$$\Gamma_{1/\lambda}e(s)=\int\limits_X \Gamma(s,t;\lambda)\,e(t)\,d\mu(t), \tag{4.2.12}$$

где все элементы $\Gamma_{ij}(s,t;\lambda)$ матричного ядра $\Gamma(s,t;\lambda)$, называемого разрешающим, удовлетворяют условию Карлемана

$$\int\limits_X |\Gamma_{ij}(s,t;\lambda)|^2 d\mu(t)<\infty \quad \text{для почти всех} \quad s\in X.$$

По условию $1/\lambda\in\rho(C)$, следовательно, оператор $(C-\frac{1}{\lambda}\,\mathbf{1})^{-1}$ определен на $L_{2,m}(\mu)$, действует в $L_{2,m}(\mu)$ и непрерывен. Запишем систему (4.2.7) в виде $(\mathbf{1}-\lambda C)y=g$. Тогда $y=-\frac{1}{\lambda}\,R_{1/\lambda}g$ является, и притом единственным, решением системы (4.2.7). Но $-\frac{1}{\lambda}\,R_{1/\lambda}=\mathbf{1}+\lambda\Gamma_{1/\lambda}$. Значит,

$$y(s)=(\mathbf{1}+\lambda\Gamma_{1/\lambda})g(s)=g(s)+\lambda\int\limits_X \Gamma(s,t;\lambda)\,g(t)\,d\mu(t).$$

Докажем, что для $\Gamma(s,t;\lambda)$ выполнено равенство (4.2.10). Имеем $(\mathbf{1}-\lambda C)\Gamma_{1/\lambda}=C$. Поэтому для любой функции $h\in L_{2,m}(\mu)$

$$\begin{aligned}\int\limits_X \Gamma(s,t;\lambda)\,\overline{h(t)}\,d\mu(t)-\lambda\int\limits_X C(s,\tau)\int\limits_X \Gamma(\tau,t;\lambda)\,\overline{h(t)}\,d\mu(t)\,d\mu(\tau)=\\ =\int\limits_X C(s,t)\,\overline{h(t)}\,d\mu(t).\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

Из (4.2.9) следует, что C^* — карлемановский интегральный оператор. Отсюда и из $1/\overline{\lambda}\in\rho(C^*)$ и $R_{1/\overline{\lambda}}(C^*)=(R_{1/\lambda})^*$ вытекает, что $\Gamma_{1/\overline{\lambda}}(C^*)=(\Gamma_{1/\lambda}(C))^*$. Тогда для почти всех $(s,t)\in X\times X$

$$\gamma\big(s,t;\overline{\lambda}\,\big)=\overline{\Gamma'(t,s;\lambda)},\tag{4.2.14}$$

где $\gamma(s,t;\overline{\lambda}\,)$ — разрешающее матричное ядро оператора C^* и A' — матрица, транспонированная к матрице A. Поэтому для почти всех $t\in X$

$$\begin{aligned}\Gamma(t,\lambda):=\left(\sum_{i,j=1}^m\int\limits_X\big|\Gamma_{ij}(s,t;\lambda)\big|^2\,d\mu(s)\right)^{\frac12}=\\ =\left(\sum_{i,j=1}^m\int\limits_X\big|\gamma_{ij}\big(t,s;\overline{\lambda}\,\big)\big|^2\,d\mu(s)\right)^{\frac12}<\infty.\end{aligned}$$

В силу σ-конечности меры μ найдется возрастающая к X последовательность измеримых множеств $\{X_k\}$ такая, что $\mu X_k<\infty$, $k=1,2,\ldots$ Пусть

$$G_k=\big\{t\;\big|\;t\in X_k,\,\Gamma(t,\lambda)\leqslant k\big\}.$$

Тогда $\mu\big(X\setminus\bigcup_{k=1}^\infty G_k\big)=0$ и $\mu G_k<\infty$, $k=1,2,\ldots$ Для $(m\times m)$-матрицы D с элементами d_{ij} положим $\|D\|=\big(\sum_{i,j=1}^m|d_{ij}|^2\big)^{\frac12}$ и обозначим через $\|\cdot\|_m$ норму в евклидовом пространстве E_m. Имеем для любого $h\in L_{2,m}(\mu)$

и $k = 1, 2, \ldots$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_X \int\limits_X \|C(s,\tau)\| \, \|\Gamma(\tau,t;\lambda)\| \, \chi_{G_k}(t) \, \|h(t)\|_m \, d\mu(t) \, d\mu(\tau) = \\
= \int\limits_X \int\limits_X \|C(s,\tau)\| \, \|\Gamma(\tau,t;\lambda)\| \, d\mu(\tau) \, \chi_{G_k}(t) \, \|h(t)\|_m \, d\mu(t) \leqslant \\
\leqslant \int\limits_X \left(\int\limits_X \|C(s,\tau)\|^2 \, d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_X \|\Gamma(\tau,t;\lambda)\|^2 \, d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
\times \chi_{G_k}(t) \, \|h(t)\|_m \, d\mu(t) = \\
= \left(\int\limits_X \|C(s,\tau)\|^2 \, d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_X \Gamma(t,\lambda) \, \chi_{G_k}(t) \, \|h(t)\|_m \, d\mu(t) \leqslant \\
\leqslant k \left(\int\limits_X \|C(s,\tau)\|^2 \, d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{G_k} \|h(t)\|_m \, d\mu(t) < \infty.
\end{gathered} \tag{4.2.15}
$$

Обозначим через δ_r вектор-столбец из E_m, r-я компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны 0. Пусть $\{e_j(t)\}$ — счетное всюду плотное в $L_2(\mu)$ множество. Тогда в силу (4.2.13) и счетности $\{e_j(t)\}$ найдется множество X_0, $\mu(X \backslash X_0) = 0$, такое, что для всех $s \in X_0$, $k, j = 1, 2, \ldots$, $r = 1, \ldots, m$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_X \Gamma(s,t;\lambda) \, \chi_{G_k}(t) \, \delta_r \overline{e_j(t)} \, d\mu(t) - \\
- \lambda \int\limits_X C(s,\tau) \int\limits_X \Gamma(\tau,t;\lambda) \, \chi_{G_k}(t) \, \delta_r \, \overline{e_j(t)} \, d\mu(t) \, d\mu(\tau) = \\
= \int\limits_X C(s,t) \chi_{G_k}(t) \, \delta_r \, \overline{e_j(t)} \, d\mu(t).
\end{gathered}
$$

Пользуясь (4.2.15) и теоремой Фубини, поменяем в этих равенствах порядок интегрирования. Мы получим для всех $s \in X_0$, $k, j = 1, 2, \ldots$, $r = 1, \ldots, m$

$$
\int\limits_X \left[\Gamma(s,t;\lambda) - \lambda \int\limits_X C(s,\tau) \, \Gamma(\tau,t;\lambda) \, d\mu(\tau) - C(s,t) \right] \chi_{G_k}(t) \, \delta_r \, \overline{e_j(t)} \, d\mu(t) = 0.
$$

Отсюда и из произвольности k, j, r следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю для почти всех $t \in X$. Таким образом, равенство (4.2.10) имеет место для почти всех $(s,t) \in X \times X$.

Докажем равенство (4.2.11). Так как $(\overline{\lambda})^{-1} \in \rho(C^*)$, то, применив доказанное равенство (4.2.10) к сопряженной системе

$$u(s) - \overline{\lambda} \int\limits_X \overline{C'(t,s)}\, u(t)\, d\mu(t) = f(s),$$

получим

$$\gamma\big(s,t;\overline{\lambda}\big) - \overline{\lambda} \int\limits_X \overline{C'(\sigma,s)}\, \gamma\big(s,t;\overline{\lambda}\big)\, d\mu(\sigma) = \overline{C'(t,s)}.$$

Переходя к транспонированным матрицам и учитывая (4.2.14), будем иметь для п. в. $(s,t) \in X \times X$

$$\Gamma(t,s;\lambda) - \lambda \int\limits_X \Gamma(t,\sigma;\lambda)\, C(\sigma,s)\, d\mu(\sigma) = C(t,s).$$

Поменяв местами t и s, получим (4.2.11). $\triangleright$

Замечание 4.2.1. Задача о разработке методов отыскания разрешающих ядер интегральных уравнений 2-го рода с произвольными карлемановскими операторами была поставлена в [23, Дополнение, § 5, задача 4]. Существенное продвижение в решении этой задачи получено недавно в работе И. М. Новицкого [51].

Замечание 4.2.2. По лемме о правом умножении из § 2.1 для любой регулярной точки ξ карлемановского интегрального оператора C резольвента Фредгольма $\Gamma_\xi = -\xi C R_\xi = -\xi C(C - \xi\mathbf{1})^{-1}$ является интегральным оператором. Для произвольных интегральных операторов в $L_2(\mu)$ аналогичное утверждение неверно: в теореме 2.1.3 построен непрерывный линейный интегральный оператор в $L_2(\mu)$, резольвента Фредгольма которого не является интегральным оператором ни в одной его регулярной точке.

Глава 5. Функциональные уравнения и системы 3-го рода в L_2

§ 5.1. Сведение функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода

В рассмотрениях этого параграфа нам потребуется следующая теорема.

Теорема 5.1.1. *Пусть $L_2(\mu) := L_2(X,\mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ не является чисто атомической, $N_i \in B(L_2(\mu))$, $i = 0,1$, и существует ортонормированная система $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\psi_n\right\| = 0, \quad i = 0,1. \tag{5.1.1}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что

$$WN_iW^{-1} = \alpha_i\mathbf{1} + K_i + \Gamma_i, \quad i = 0,1,$$

где Γ_i — ядерные операторы с ядерной нормой меньшей, чем ε, K_i — интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами

$$K_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\,\overline{p_{n,i}(t)}, \quad i = 0,1. \tag{5.1.2}$$

Здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{p_{n,i}\}$ — ограниченные в $L_2(\mu)$ последовательности.

$\triangleleft$ Пользуясь (5.1.1), выберем для $\varepsilon > 0$ подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n\right\| < \varepsilon, \quad i = 0,1, \tag{5.1.3}$$

и рассмотрим ядерные операторы

$$D_if = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n, \quad f \in L_2(\mu), \quad i = 0,1.$$

Введем операторы $Q_i = N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1} - D_i$. Так как $Q_i\varphi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1$, то $\operatorname{im} Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$, где $[\varphi_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu\, e_n}\}$, $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E. Мы имеем

$$\dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \dim E = \dim E^\perp = \infty.$$

Пусть $\{\varphi_n^\perp\}$ — ортонормированный базис $[\varphi_n]^\perp$ и $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис $E^\perp$. Определим унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ равенствами

$$W\varphi_n^\perp = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu\, e_n}, \quad W\varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.1.4}$$

Тогда для любого $h \in L_2(\mu)$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$, кроме того,

$$D_i^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \big(h, (N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n\big)\varphi_n.$$

Следовательно,

$$W(N_i - \alpha_i\mathbf{1})W^{-1}h = W(Q_i^* + D_i^*)W^{-1}h =$$
$$W\sum_{n=1}^{\infty} \big(Q_i^* W^{-1}h, \varphi_n^\perp\big)\varphi_n^\perp + W\sum_{n=1}^{\infty} \big(W^{-1}h, (N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n\big)\varphi_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(h, WQ_i\varphi_n^\perp\big)\,\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(h, W(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n\big)e_n^\perp.$$

Положим $p_{n,i} = WQ_i\varphi_n^\perp = W(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1} - D_i)\varphi_n^\perp = W(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n^\perp$ и

$$K_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\,\overline{p_{n,i}(t)}. \tag{5.1.5}$$

Тогда

$$WN_iW^{-1} = \alpha_i\mathbf{1} + W(N_i - \alpha_i\mathbf{1})W^{-1} = \alpha_i\mathbf{1} + K_i + \Gamma_i,$$

где K_i — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами (5.1.5), Γ_i — ядерные операторы с C_1-ядрами (определение C_1-ядра см. в § 3.2)

$$\Gamma_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(s)\overline{W(N_i^* - \overline{\alpha_i}\,\mathbf{1})\varphi_n(t)}.$$

В силу (5.1.3) ядерные нормы операторов Γ_i меньше, чем ε. $\triangleright$

Определение 5.1.1. Пусть $a(s)$ — определенная на X μ-измеримая μ-почти всюду конечная функция. Число α называется ее *существенным значением*, если $\mu\{s \in X : |a(s) - \alpha| < \varepsilon\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что если X — замыкание открытого множества евклидова пространства, μ — мера Лебега и $a(s)$ — непрерывная функция на X, то любое конечное значение этой функции является ее существенным значением.

Теорема 5.1.2. *Пусть функция $a(s)$ принадлежит $L_\infty(\mu)$, α — какое-нибудь ее существенное значение, $\{\varepsilon_n\}$ — сходящаяся к 0 последовательность положительных чисел, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами такая, что $|a(s) - \alpha| < \varepsilon_n$ для почти всех $s \in E_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, мера μ не имеет атомов в E_0, $T \in B(L_2(\mu))$ и множества $P_{E_n}TS_2$, $n = 1, 2, \ldots$, компактны по мере, здесь S_2 — единичный шар в $L_2(\mu)$, $P_{E_n}h = \chi_{E_n}h$, $h \in L_2(\mu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что уравнение 3-го рода*

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s) \in L_2(\mu) \tag{5.1.6}$$

заменой $y = Wx$, $g = Wf$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} &\alpha y(s) + \int\limits_X \big[G(s,t) + R(s,t)\big]\, y(t)\, d\mu(t) - \\ &- \lambda \int\limits_X \big[H(s,t) + S(s,t)\big]\, y(t)\, d\mu(t) = g(s), \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

где

$$G(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{p_n(t)}, \tag{5.1.8}$$

$$H(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{q_n(t)}, \tag{5.1.9}$$

$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ — ограниченные в $L_2(\mu)$ последовательности, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с положительными мерами, C_1-ядра $R(s,t)$, $S(s,t)$ порождают ядерные операторы R, S в $L_2(\mu)$ с ядерными нормами меньшими, чем ε.

$\lhd$ Зафиксируем индекс n. Пусть $\{\varphi_{n,k}\}$ — какая-нибудь равномерно ограниченная ортонормированная система функций с носителями в E_n. По теореме 1.1.2 оператор $P_{E_n}T : L_2(\mu) \to L_1(E_n, \mu)$ компактен. Тогда $T^*P_{E_n} : L_\infty(E_n, \mu) \to L_2(\mu)$ компактен. Поэтому

$$\big\|T^*\varphi_{n,k}\big\| = \big\|T^*P_{E_n}\varphi_{n,k}\big\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Выберем k_n так, чтобы $\|T^*\varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon_n$. Пусть $\psi_n := \varphi_{n,k_n}$. Носители функций ψ_n содержатся в E_n, и множества E_n, $n = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Значит, $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система. При этом

$$\big\|T^*\psi_n\big\| < \varepsilon_n, \quad \big\|(A^* - \overline{\alpha}\,\mathbf{1})\psi_n\big\| < \varepsilon_n,$$

где $Ah(s) = a(s)h(s)$, $h \in L_2(\mu)$. Положим в теореме 5.1.1 $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Так как $\varepsilon_n \to 0$, то выполняется условие (5.1.1), поэтому по теореме 5.1.1 существует не зависящий от λ и f унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что $WAW^{-1} = \alpha\mathbf{1} + G + R$, $WTW^{-1} = H + S$, где G, H — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами (5.1.8), (5.1.9), R, S — ядерные операторы с C_1-ядрами $R(s,t)$, $S(s,t)$ и ядерной нормой меньшей, чем ε. Следовательно, замена $y = Wx$, $g = Wf$ приводит уравнение (5.1.6) к эквивалентному интегральному уравнению (5.1.7). $\triangleright$

Замечание 5.1.1. Множества $P_{E_n}TS_2$ компактны по мере, если $P_{E_n}T$ — интегральные операторы.

Справедливость этого утверждения вытекает из следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3.

Замечание 5.1.2. Если в (5.1.6) $a(s) = \alpha$ почти всюду (т. е. если (5.1.6) является уравнением 1-го или 2-го рода), то $A - \alpha\mathbf{1} = 0$. Тогда $G + R = 0$, и первое интегральное слагаемое в (5.1.7) будет отсутствовать.

Проиллюстрируем теоремы 5.1.1, 5.1.2 и их доказательства на примере интегрального уравнения 3-го рода в $L_2([a,b],\mu)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, μ — мера Лебега:

$$a(s)x(s) - \lambda \int\limits_a^b K(s,t)\,x(t)\,d\mu(t) = f(s), \tag{5.1.10}$$

в котором $(\mu \times \mu)$-измеримое ядро $K(s,t)$ порождает интегральный оператор $T \in B(L_2([a,b]))$, функция $a(s)$ непрерывна и ограничена на $[a,b]$. Пусть α — произвольное ее значение. Для $\varepsilon > 0$ выберем попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\Delta_n = (a_n, b_n)$ так, чтобы $|a(s) - \alpha| < \varepsilon/2^n$ при всех $s \in \Delta_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\big\|(a(s) - \alpha)\chi_{\Delta_n}(s)h(s)\big\| < \varepsilon/2^n,$$

если $\|h\| \leqslant 1$. Пусть $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — любая из двух ортонормированных равномерно ограниченных систем, являющихся базисами в $L_2(\Delta_n)$:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|\Delta_n|}}\,\chi_{\Delta_n}(t)\sin\pi k\,\frac{t-a_n}{b_n-a_n}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}\,\chi_{\Delta_n}(t)\,\omega_k\!\left(\frac{t-a_n}{b_n-a_n}\right)\right\}_{k=1}^{\infty},$$

где $|\Delta_n| = b_n - a_n$, $\{\omega_k\}$ — ортонормированная система Уолша. Так как T — интегральный оператор, то

$$\|T^*\varphi_{n,k}\| = \|T^*\chi_{\Delta_n}\varphi_{n,k}\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Выберем k_n так, чтобы $\|T^*\varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $\varphi_n = \varphi_{n,k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Тогда имеют место неравенства (5.1.3). Повторяя доказательства теорем 5.1.1, 5.1.2, получим эквивалентное интегральному уравнению (5.1.10) интегральное уравнение вида (5.1.7) с ядрами вида (5.1.8), (5.1.9) и C_1-ядрами $R(s,t)$, $S(s,t)$, порождающими ядерные операторы в $L_2([a,b])$ с ядерными нормами, меньшими, чем ε. При этом в качестве $\{\varphi_m^\perp\}$ в (5.1.4) можно взять приведенное выше ортонормированное семейство $\{\varphi_{n,k}\}_{n,k=1}^\infty$, из которого удалена ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ и к которому добавлена ортонормированная система $z_j = \chi_\Delta u_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\{u_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\Delta)$, $\Delta = (a,b) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$. В качестве $\{e_n\}$ удобно выбрать произвольные попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset (a,b)$. Ортонормированную систему $\{e_m^\perp\}$ в (5.1.4) можно построить следующим образом. Возьмем ортонормированное семейство $h_{n,k} = \chi_{\delta_n}\eta_{n,k}$, $n, k = 1, 2, \ldots$, где $\{\eta_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta_n)$ такой, что $\eta_{n,1} = \chi_{\delta_n}/\sqrt{|\delta_n|}$, $|\delta_n| = \beta_n - \alpha_n$. Тогда $\{e_m^\perp\}$ получается из $\{h_{n,k}\}$ удалением ортонормированной системы $\{\eta_{n,1}\}$ и добавлением ортонормированной системы $\xi_j = \chi_\delta v_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\{v_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta)$, $\delta = (a,b) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \delta_n$. Если δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбраны так, что их объединение, дополненное внутренними концами, совпадает с (a,b), то необходимость в $\{\xi_j\}$ отпадает.

Напомним, что оператор $Z \in B(L_2(\mu))$ называется изоморфизмом, если существует обратный $Z^{-1} \in B(L_2(\mu))$.

Теорема 5.1.3. *Пусть в уравнении* (5.1.7) $\alpha \neq 0$. *Тогда для любого* $\lambda \neq 0$ *существует изоморфизм* $F_\lambda = \mathbf{1} - D_\lambda$ *с ядерным оператором* D_λ *такой, что замена* $z = F_\lambda y$ *приводит* (5.1.7) *к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода*

$$\alpha z(s) + \int_X L_\lambda(s,t) z(t)\, d\mu(t) = g(s) \tag{5.1.11}$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \left[\overline{c_{n,\lambda}(t)} - \lambda\, \overline{d_{n,\lambda}(t)}\right]. \tag{5.1.12}$$

◁ Пользуясь тем, что в уравнении (5.1.7) ядра $R(s,t)$, $S(s,t)$ порождают ядерные операторы R, S с ядерной нормой, меньшей, чем ε, выберем ε так, чтобы

$$\frac{1}{|\alpha|}\,\|R\|_1 + \frac{|\lambda|}{|\alpha|}\,\|S\|_1 < 1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма. Положим $D_\lambda = \frac{\lambda}{\alpha}S - \frac{1}{\alpha}R$. Тогда $\|D_\lambda\| \leqslant \|D_\lambda\|_1 < 1$. Следовательно, оператор $F_\lambda = \mathbf{1} - D_\lambda$ имеет обратный

$$F_\lambda^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_\lambda^n = \mathbf{1} + H_\lambda, \tag{5.1.13}$$

где ряд в (5.1.13) сходится абсолютно по операторной норме и $H_\lambda = D_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} D_\lambda^n$ — ядерный оператор. Запишем (5.1.7) в виде

$$\alpha F_\lambda y(s) + \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \Big(\overline{p_n(t)} - \lambda\,\overline{q_n(t)}\Big) y(t)\, d\mu(t) = g(s).$$

Сделав в этом уравнении замену $z = F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода

$$\alpha z(s) + \int\limits_X L_\lambda(s,t) z(t)\, d\mu(t) = g(s) \tag{5.1.14}$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu\, e_n}} \Big[\,\overline{(\mathbf{1} + H_\lambda^*)(p_n(t) - \overline{\lambda} q_n(t))}\,\Big]. \quad \triangleright \tag{5.1.15}$$

К уравнению (5.1.14) с ядром (5.1.15) применимы приближенные методы решения, предложенные в § 6.3.

§ 5.2. Сведение систем функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода

Пусть E_m — евклидово пространство размерности m с нормой $\|\cdot\|_m$ и пусть $L_{2,m}(Y,\nu)$ — пространство всех вектор-функций $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ с компонентами $f_i \in L_2(Y,\nu)$, $i = 1, \dots, m$, и конечной нормой

$$\|f\|_{m,\nu} = \left(\int\limits_Y \|f(s)\|_m^2\, d\nu(s)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_Y \sum_{j=1}^{m} |f_j(s)|^2 d\nu(s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $L_{2,m}(Y,\nu)$.

Рассмотрим в $L_{2,m}(Y,\nu)$ общую систему линейных функциональных уравнений 3-го рода

$$a(s)x(s) - \lambda Dx(s) = f(s) \in L_{2,m}(Y,\nu), \tag{5.2.1}$$

где неизвестная вектор-функция $x(s)$ ищется в $L_{2,m}(Y,\nu)$, все элементы $(m \times m)$-матрицы $a(s)$ определены на Y, почти всюду конечны и измеримы, $D = (D_{ij})$ — $(m \times m)$-матричный оператор, все элементы D_{ij} которого являются линейными непрерывными операторами, действующими из $L_2(Y,\nu)$ в $L_2(Y,\nu)$. Систему (5.2.1) будем называть общей системой 2-го рода, если $a(s) = \alpha I$ при почти всех $s \in Y$ для некоторого $\alpha \neq 0$ (здесь I — единичная матрица), и общей системой 1-го рода, если $a(s) = 0$ для почти всех $s \in Y$.

Мы будем рассматривать систему (5.2.1) при следующих дополнительных условиях:

(A) все элементы $a_{ij}(s)$ матрицы $a(s)$ принадлежат $L_\infty(Y,\nu)$;

(B) все операторы D_{ij} компактны по мере.

Так как в силу следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3 всякий интегральный оператор в $L_2(Y,\nu)$ компактен по мере, то общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода в $L_2(Y,\nu)$ с ограниченными измеримыми элементами матричного коэффициента является системой (5.2.1), удовлетворяющей условиям (A), (B).

Целью настоящего параграфа является редукция системы (5.2.1) с помощью явной линейной непрерывной обратимой замены к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 либо 1-го, либо 2-го рода, к которому можно применить известные методы решения.

Напомним определения понятий, фигурирующих в формулировке основного результата параграфа — теоремы 5.2.1.

Будем называть число β существенным собственным значением матрицы $a(s)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\nu\left\{s \in Y : |\det(a(s) - \beta I)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Отметим, что если Y — замыкание открытого множества евклидова пространства, ν — мера Лебега и все элементы матрицы $a(s)$ непрерывны на Y, то любое собственное значение этой матрицы является ее существенным собственным значением.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_1}$. Линейный оператор $T : H \to H_1$ называется унитарным, если область значений T есть все H_1 и $\|Th\|_{H_1} = \|h\|_H$ для каждого $h \in H$.

Теорема 5.2.1. *Пусть $L_2(X,\mu)$, $L_2(Y,\nu)$ — комплексные сепарабельные пространства, меры μ, ν σ-конечны, ν не имеет атомов, μ не является чисто атомической. Пусть α — какое-нибудь существенное собственное значение матрицы $a(s)$ в системе (5.2.1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $V : L_{2,m}(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ такой, что замена $y = Vx$, $g = Vf$ приводит систему (5.2.1), удовлетворяющую условиям (A), (B), к эквивалентному интегральному уравнению в $L_2(X,\mu)$*

$$\begin{gathered}\alpha y(\eta) + \int\limits_X \big[\Gamma_1(\eta,\xi) + K_1(\eta,\xi)\big]\, y(\xi)\, d\mu(\xi) - \\ - \lambda \int\limits_X \big[\Gamma_2(\eta,\xi) + K_2(\eta,\xi)\big]\, y(\xi)\, d\mu(\xi) = g(\eta),\end{gathered} \tag{5.2.2}$$

где ядра Γ_i $(i = 1,2)$ порождают ядерные операторы в $L_2(X,\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε, ядра K_i $(i = 1,2)$ — квазивырожденные карлемановские ядра

$$K_i(\eta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{p_{n,i}(\xi)}.$$

Здесь $\{p_{n,i}\}$ — ограниченные в $L_2(X,\mu)$ последовательности, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами.

$\lhd$ Как известно [6, с. 239], каждая $(m \times m)$-матрица представляется в виде произведения унитарной $(m \times m)$-матрицы на верхнюю треугольную $(m \times m)$-матрицу. Пользуясь этим, запишем для каждого $s \in Y$ матрицу $a^*(s) - \overline{\alpha} I$ в виде $u(s)\, b(s)$, где $a^*(s)$ — сопряженная к $a(s)$ матрица, $u(s)$ — унитарная матрица, $b(s)$ — верхняя треугольная матрица. Так как $|\det b(s)| = |\det(a^*(s) - \overline{\alpha} I)|$ и 0 является существенным значением $|\det(a^*(s) - \overline{\alpha} I)|$, то 0 будет существенным значением хотя бы одного диагонального элемента $b_{rr}(s)$ матрицы $b(s)$. Будем считать без ограничения общности, что $r = 1$. Тогда найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств Δ_j с конечными положительными мерами и монотонно убывающая к нулю последовательность чисел ε_j такие, что

$$|b_{11}(s)| < \varepsilon_j \quad \text{для почти всех} \quad s \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.2.3}$$

Рассмотрим для каждого j равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(Y,\nu)$ с носителями в Δ_j. Существование такой последовательности вытекает из того, что в Y нет атомов меры ν. В качестве $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{k,\Delta_j}\}_{k=1}^{\infty}$, носители которых совпадают с Δ_j (определение этих функций см. в § 1.1). Пусть

h_0 — координатный столбец $(1,0,\ldots,0) \in E_m$. Введем вектор-функции $\varphi_{k,j} = h_0 g_{k,j}$. Их носители лежат в Δ_j и $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(Y,\nu)$. Пользуясь унитарностью матриц $u(s)$ и тем, что $b(s)$ — верхние треугольные матрицы, получим для почти всех $s \in Y$ в силу (5.2.3)

$$\begin{aligned} \big\|(a^*(s) - \overline{\alpha} I)\varphi_{k,j}(s)\big\|_m &= \big\|u(s)b(s)\varphi_{k,j}(s)\big\|_m = \\ &= \big\|b(s)\varphi_{k,j}(s)\big\|_m = \big|b_{11}(s)g_{k,j}(s)\big| < \varepsilon_j\big|g_{k,j}(s)\big|, \end{aligned}$$

здесь $\|\cdot\|_m$ — норма в E_m. Отсюда для любых k, j

$$\big\|(a^*(s) - \overline{\alpha} I)\varphi_{k,j}(s)\big\|_{m,\nu} < \varepsilon_j \left(\int\limits_Y |g_{k,j}|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_j. \tag{5.2.4}$$

Зафиксируем j и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|D^*\varphi_{k,j}\|_{m,\nu} = 0, \tag{5.2.5}$$

где D^* — сопряженный к D оператор. Имеем

$$\begin{aligned} \big\|D^*\varphi_{k,j}\big\|_{m,\nu}^2 &= \big\langle D^*\varphi_{k,j}, D^*\varphi_{k,j}\big\rangle = \big\langle DD^*\varphi_{k,j}, \varphi_{k,j}\big\rangle = \\ &= \big\langle \chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}, \chi_{\Delta_j}\varphi_{k,j}\big\rangle \leqslant \int\limits_{\Delta_j} |h_k g_{k,j}|\, d\nu \leqslant C_j \int\limits_{\Delta_j} |h_k|\, d\nu, \end{aligned}$$

где

$$C_j = \sup_{k=1,2,\ldots} \|g_{k,j}\|_{L_\infty(\Delta_j,\nu)} < \infty,$$

h_k — первая компонента вектор-функции $\chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}$. Ортонормированная последовательность $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(Y,\nu)$. Значит, $\{\chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(Y,\nu)$. Но тогда $\{h_k\}$ слабо сходится к 0 в $L_2(\Delta_j,\nu)$ и, следовательно, в $L_1(\Delta_j,\nu)$. При этом для любого измеримого множества $e \subset \Delta_j$

$$\int\limits_e |h_k|\, d\mu \leqslant K_j\sqrt{\nu\, e}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$K_j = \sup_{k=1,2,\ldots} \left(\int\limits_{\Delta_j} |h_k|^2 d\nu\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Кроме того, последовательность $\{h_k\}$ компакта по мере. Отсюда и из слабой сходимости $\{h_k\}$ к 0 в $L_1(\Delta_j,\nu)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Delta_j} |h_k|\, d\nu = 0.$$

Таким образом, равенство (5.2.5) доказано.

Из (5.2.5) вытекает, что для каждого j найдется номер k_j такой, что

$$\|D^*\varphi_{k_j,j}\|_{m,\nu} < \varepsilon_j. \tag{5.2.6}$$

Положим $\psi_j = \varphi_{k_j,j}$. Так как $\|\psi_j\|_{m,\nu} = 1$, носитель функции ψ_j содержится в Δ_j и множества Δ_j попарно не пересекаются, то $\{\psi_j\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(Y,\nu)$, для которой в силу (5.2.4), (5.2.6) выполняются неравенства

$$\|D^*\psi_j\|_{m,\nu} < \varepsilon_j, \quad \left\|(a^*(s) - \overline{\alpha}I)\psi_j\right\|_{m,\nu} < \varepsilon_j, \quad j = 1,2,\dots \tag{5.2.7}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем, пользуясь (5.2.7), подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|D^*\varphi_n\|_{m,\nu} < \varepsilon, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|(a^*(s) - \overline{\alpha}I)\varphi_n(s)\right\|_{m,\nu} < \varepsilon. \tag{5.2.8}$$

Введем оператор $Ah(s) = (a(s) - \alpha I)h(s)$, $h \in L_{2,m}(Y,\nu)$, и рассмотрим ядерные операторы в $L_{2,m}(Y,\nu)$

$$P_1 h = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h, \varphi_n\rangle A^*\varphi_n, \quad P_2 h = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h, \varphi_n\rangle D^*\varphi_n. \tag{5.2.9}$$

В силу (5.2.8) их ядерные нормы меньше, чем ε. Рассмотрим еще операторы $Q_1 = A^* - P_1$, $Q_2 = D^* - P_2$. Так как для всех n $Q_i\varphi_n = 0$ $(i = 1,2)$, то $\operatorname{im} Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$, где $[\varphi_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной системы $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu\, e_n}\}$ и $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E. Тогда $\dim E = \dim E^\perp = \dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \infty$.

Пусть $\{\varphi_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $[\varphi_n]^\perp$, а $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $E^\perp$. Определим унитарный оператор $V : L_{2,m}(Y,\nu) \to L_2(X,\mu)$ равенствами

$$V\varphi_n^\perp = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}}, \quad V\varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1,2,\dots \tag{5.2.10}$$

Для любого $h \in L_{2,m}(Y,\nu)$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$ $(i = 1,2)$ и

$$P_1^* h = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h, A^*\varphi_n\rangle\varphi_n, \quad P_2^* h = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h, D^*\varphi_n\rangle\varphi_n.$$

Обозначив через $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(X,\mu)$, получим для любого $z \in L_2(X,\mu)$

$$VAV^{-1}z = V\big(Q_1^* + P_1^*\big)V^{-1}z =$$
$$= V\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle Q_1^*V^{-1}z, \varphi_n^{\perp}\big\rangle\,\varphi_n^{\perp} + V\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle V^{-1}z, A^*\varphi_n\big\rangle\,\varphi_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big(z, VQ_1\varphi_n^{\perp}\big)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty}(z, VA^*\varphi_n)e_n^{\perp}.$$

Аналогично

$$VDV^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty}\big(z, VQ_2\varphi_n^{\perp}\big)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu\, e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(z, VD^*\varphi_n\big)e_n^{\perp}.$$

Положим

$$p_{n,1} = VQ_1\varphi_n^{\perp} = V(A^* - P_1)\varphi_n^{\perp} = VA^*\varphi_n^{\perp},$$
$$p_{n,2} = VQ_2\varphi_n^{\perp} = V(D^* - P_2)\varphi_n^{\perp} = VD^*\varphi_n^{\perp},$$
$$K_i(\eta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\,\overline{p_{n,i}(\xi)}, \quad i = 1,2.$$

Тогда $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, где K_1 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_1(\eta,\xi)$, оператор Γ_1 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε, и ядром

$$\Gamma_1(\eta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}e_n^{\perp}(\eta)\,\overline{VA^*\varphi_n(\xi)}.$$

Аналогично $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, где K_2 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_2(\eta,\xi)$ и Γ_2 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε, и ядром

$$\Gamma_2(\eta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}e_n^{\perp}(\eta)\,\overline{VD^*\varphi_n(\xi)}.$$

Записав систему (5.2.1) в виде $\alpha x + Ax - \lambda Dx = f$ и сделав замену $y = Vx$, получим

$$\alpha V^{-1}y + AV^{-1}y - \lambda DV^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям оператор V, придем к эквивалентному уравнению

$$\alpha y + VAV^{-1}y - \lambda VDV^{-1}y = Vf.$$

Учитывая, что $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, получим уравнение (5.2.2). $\triangleright$

Замечание 5.2.1. Если $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in X$, то $A = 0$. Следовательно, $K_1 + \Gamma_1 = 0$, и первое интегральное слагаемое в (5.2.2) будет отсутствовать.

Замечание 5.2.2. В случае $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in Y$ утверждение теоремы 5.2.1 останется верным, если в ее формулировке заменить условие компактности по мере всех D_{ij} более широким условием: существует множество $e \subset Y$, $0 < \nu e < \infty$, такое, что все $P_e D_{ij}$ компактны по мере, здесь $P_e\varphi = \chi_e\varphi$, $\varphi \in L_2(Y,\nu)$.

Действительно, подобно (5.2.5),

$$\lim_{k\to\infty} \|D^* h_0 g_k\|_{m,\mu} = 0,$$

где $\{g_k\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций из $L_2(Y,\nu)$ с носителями в e. Отсюда и из $A = 0$ получим справедливость утверждения теоремы 5.2.1, применяя доказательство теоремы 5.2.1 к последовательности $\{h_0 g_k\}$.

Замечание 5.2.3. Отметим три важных варианта условий теоремы 5.2.1: 1) $X = Y$, $\mu = \nu$; 2) X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега; 3) $X = (a,b)$, μ — мера Лебега. В последнем случае в качестве e_n, $n = 1, 2, \ldots$, удобно выбрать конечные попарно не пересекающиеся интервалы (длины 1, если (a,b) — бесконечный интервал).

Следствие 5.2.1. *При $\alpha = 0$ уравнение (5.2.2) умножением обеих его частей на не зависящую от системы (5.2.1) и унитарного оператора V функцию*

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_{e_n},$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с ядерным оператором.

Следствие 5.2.2. *При $\alpha \neq 0$ уравнение 2-го рода (5.2.2) сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$K_\lambda(\eta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\,\overline{p_{n,\lambda}(\xi)},$$

где $\{p_{n,\lambda}\}$ — ограниченная последовательность в $L_2(X,\mu)$ и функции $p_{n,\lambda}$ выражаются через $p_{n,i}$ $(i = 1,2)$ в явном виде.

Следствие 5.2.2 непосредственно вытекает из теоремы 5.1.3.

Следствие 5.2.3. *Утверждение теоремы* 5.2.1 *справедливо, если все операторы D_{ij} почти компактны.*

Следствие 5.2.4. *Утверждение теоремы* 5.2.1 *справедливо, если все операторы D_{ij} интегральные.*

Действительно, все почти компактные в $L_2(Y,\nu)$ операторы и все интегральные в $L_2(Y,\nu)$ операторы компактны по мере.

Приведем приложение теоремы 5.2.1. Рассмотрим систему линейных уравнений в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij}x_j = g_i \quad (i = 1,\dots,m), \tag{5.2.11}$$

где $g_i \in H$ $(i = 1,\dots,m)$, элементы x_j $(j = 1,\dots,m)$ решения ищутся в H. Пусть линейные непрерывные операторы $B_{ij} : H \to H$ $(ij = 1,\dots,m)$ удовлетворяют условию: существуют числа λ_{ij} $(i,j = 1,\dots,m)$ и ортонормированная система $\{u_n\} \subset H$ такие, что для всех $i,j = 1,\dots,m$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(B_{ij}^* - \overline{\lambda_{ij}}\,\mathbf{1}\right)u_n \right\|_H = 0. \tag{5.2.12}$$

Тогда в силу следствия 2.2.1 теоремы 2.2.1 можно построить в явном виде унитарный оператор $W : H \to L_2(X,\mu)$ такой, что операторы $K_{ij} = W(B_{ij} - \lambda_{ij}\mathbf{1})W^{-1}$ $(i,j = 1,\dots,m)$ являются карлемановскими интегральными операторами в $L_2(X,\mu)$. Сделав в (5.2.11) замены $y_j = Wx_j$ $(j = 1,\dots,m)$, $f_i = Wg_i$ $(i = 1,\dots,m)$, получим эквивалентную систему линейных интегральных уравнений 3-го рода

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}y_j + \sum_{j=1}^{m} K_{ij}y_j = f_i \quad (i = 1,\dots,m),$$

к которой применимы теорема 5.2.1 и ее следствия.

Отметим, что условие типа (5.2.12) выполняется для любого линейного непрерывного оператора $B : H \to H$, так как предельный спектр сопряженного оператора B^* не пуст. Таким образом, уравнение $Bx = h \in H$ может быть сведено к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 с карлемановским интегральным оператором.

Итак, удовлетворяющая условиям (A), (B) система 3-го рода (5.2.1), общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода и система (5.2.11) с условием (5.2.12) могут быть редуцированы либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с компактным (и даже ядерным) оператором (к этому уравнению применима теорема Пикара из § 3.1), либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром (к такому уравнению применимы приближенные методы решения, предложенные в § 6.3).

Отметим еще, что определяемый равенствами (5.2.10) унитарный оператор V, приводящий систему (5.2.1) к эквивалентному интегральному уравнению (5.2.2), строится в явном виде и ядра Γ_1, Γ_2, K_1, K_2 в (5.2.2) также имеют явный вид.

В связи с теоремой 5.2.1 отметим очень интересную теорему И. М. Новицкого [50], в которой доказывается эквивалентность общего линейного интегрального уравнения 3-го рода в $L_2(Y,\nu)$ с биинтегральным оператором интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в $L_2(-\infty,\infty)$ с бесконечно дифференцируемым ядром, исчезающим на бесконечности вместе со всеми производными и обладающим, кроме того, рядом других важных аналитических свойств.

В заключение заметим, что бесконечные системы линейных интегральных уравнений 3-го рода с диагональными матричными коэффициентами изучались в диссертации О. Д. Максимовой [34].

§ 5.3. Функциональные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов с неограниченными операторами

Теорема 5.3.1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$, $L_2(\mu) := L_2(X,\mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ-конечна и не является частично атомической, $T : D_T \subset H \to L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и в D_{T^*} существует ортонормированная последовательность $\{\varphi_n\}$ такая, что $\|T^*\varphi_n\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2(\mu)$ эквивалентно уравнению 1-го рода с ядерным оператором.*

$\lhd$ В силу следствия теоремы 2.2.2 найдется унитарный оператор $W : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ такой, что $WT = AB$, где $Ah = \big(\sum_{n=1}^\infty \mu_n \chi_{X_n}\big)h$, $h \in L_2(\mu)$, $\mu_n \geqslant 1$, $n = 1,2,\dots$, множества $X_n \subset X$ попарно не пересекаются, $\mu X_n > 0$, $n = 1,2,\dots$, и $B : H \to L_2(\mu)$ — ядерный оператор. Умножив обе части уравнения $WTx = ABx = Wf$ на функцию $b = \sum_{n=1}^\infty \mu_n^{-1}\chi_{X_n} + \chi_{X_0}$, где $X_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, получим эквивалентное уравнение 1-го рода $Bx = bWf$ с ядерным оператором. $\rhd$

Теорема 5.3.2. *Пусть H, $L_2(\mu)$ сепарабельны, мера μ σ-конечна и не является чисто атомической, $T : D_T \subset H \to H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда уравнение 2-го рода $\alpha x - \lambda Tx = f \in H$, $\alpha \neq 0$, эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.*

Теорема 5.3.2 доказана в § 4.1 (см. теорему 4.1.3) и приведена здесь для полноты изложения.

Рассмотрим функциональное уравнение 2-го рода

$$x - \lambda Sx = f \in L_2(\mu) \tag{5.3.1}$$

с самосопряженным оператором S, где λ^{-1} — точка спектра S.

Теорема 5.3.3. *Пусть $S : D_S \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — самосопряженный оператор, $L_2(\mu)$ сепарабельно и мера μ не является чисто атомической. Пусть $1/\lambda$ принадлежит спектру оператора S. Тогда*

1) *если $1/\lambda \in \sigma_c(S)$, то уравнение* (5.3.1) *эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором,*

2) *если $1/\lambda \notin \sigma_c(S)$, то уравнение* (5.3.1) *эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с вырожденным эрмитовым ядром.*

$\lhd$ 1) Имеем $0 \in \sigma_c(\mathbf{1} - \lambda S)$, и справедливость первого утверждения вытекает из теоремы 5.3.1.

2) В этом случае 0 является собственным значением оператора $\mathbf{1} - \lambda S$ конечной кратности m, изолированным от остального спектра оператора $\mathbf{1} - \lambda S$. В силу спектральной теоремы $\mathbf{1} - \lambda S = 0 \cdot D + C$, где D — ортопроектор на $\ker(\mathbf{1} - \lambda S)$ и C — самосопряженный обратимый оператор на ортогональном дополнении к $\ker(\mathbf{1} - \lambda S)$. Поэтому уравнение (5.3.1) эквивалентно уравнению 2-го рода

$$x - Dx = C^{-1} f, \tag{5.3.2}$$

где D — самосопряженный конечномерный интегральный оператор с вырожденным ядром

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(s)\,\overline{a_k(t)}. \quad \rhd$$

Замечание 5.3.1. Утверждения теоремы 5.3.3 справедливы и в случае, когда оператор S нормальный ($SS^* = S^*S$).

Замечание 5.3.2. Решение уравнения (5.3.2) с вырожденным ядром сводится к решению системы m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными (см. [40, II.2.3]).

Перейдем к функциональным уравнениям 3-го рода с неограниченными операторами. Рассмотрим в $L_2(\nu) := L_2(Y, \nu)$ уравнение

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \tag{5.3.3}$$

где $f \in L_2(\nu)$, линейный оператор T плотно определен в $L_2(\nu)$ и действует в $L_2(\nu)$, функция $a(s)$, называемая коэффициентом, принадлежит пространству $L_0(\nu) := L_0(Y, \nu)$ всех ν-измеримых ν-почти всюду конечных функций на Y, решение $x(s)$ ищется в пересечении области определения D_T оператора T и области определения D_A максимального оператора умножения на функцию $a := a(s)$:

$$Ah = ah, \quad h \in D_A := \bigl\{v \bigm| v \in L_2(\nu),\, av \in L_2(\nu)\bigr\}. \tag{5.3.4}$$

Теорема 5.3.4. *Пусть меры μ, ν сепарабельны и не являются чисто атомическими, $T : D_T \subset L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор, продолжаемый до линейного почти компактного оператора $\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_0(\nu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \to L_2(\mu)$ такой, что замена $y = Ux$, $g = Uf$ приводит уравнение (5.3.3) к эквивалентному интегральному уравнению*

$$\begin{aligned} \alpha y(\eta) + \int\limits_X \left[B(\eta,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{\varphi_n(\xi)}\right] y(\xi)\, d\mu(\xi) - \\ - \lambda \int\limits_X \left[N(\eta,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e}}\, \overline{\psi_n(t)}\right] y(\xi)\, d\mu(\xi) = g(\eta), \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

где α — не зависящее от ε существенное значение функции $a(s)$, ядра $B(\eta,\xi)$, $N(\eta,\xi)$ порождают ядерные интегральные операторы в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{\varphi_n\} \subset L_2(\mu)$, $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$.

$\lhd$ Так как $\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_0(\nu)$ — почти компактный оператор, существует разбиение $\{Y_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с конечными положительными мерами такое, что $P_{Y_n}\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактные операторы для любого n; здесь $P_{Y_n}h = \chi_{Y_n}h$, $h \in L_2(\nu)$. Обозначим через $\{Z_n\}$ разбиение множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $\chi_{Z_n}a \in L_\infty(\nu)$ для любого n. Тогда найдется разбиение $\{F_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $\chi_{F_n}a \in L_\infty(\nu)$ и $P_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактный оператор, $n = 1, 2, \ldots$; здесь $P_nh = \chi_{F_n}h$, $h \in L_2(\nu)$. Кроме того, так как мера ν не является чисто атомической, можно считать без ограничения общности, что множество F_1 не содержит атомов меры ν.

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(s)$ на F_1. Рассмотрим на F_1 функцию $a_0(s) = a(s) - \alpha$. Тогда 0 — существенное значение этой функции. Поэтому найдутся монотонно убывающая к 0 числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ с $\varepsilon_1 > \|a_0\|_{L_\infty(F_1,\nu)}$ и разбиение $\{F_{1n}\}$ множества F_1 на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такие, что $|a_0(s)| < \varepsilon_n$ для почти всех $s \in F_{1n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$|a(s) - \alpha| = |a_0(s)| < \varepsilon_n \quad \text{для почти всех} \quad s \in F_{1n},\ n = 1, 2, \ldots \tag{5.3.6}$$

Положим $Q_n = P_{F_{1n}}$, где $P_{F_{1n}} h = \chi_{F_{1n}} h$, $h \in L_2(\nu)$, и рассмотрим операторы $Q_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$. Так как $Q_n\widetilde{T} = Q_n P_1 \widetilde{T}$, где $P_1 h = \chi_{F_1} h$, $h \in L_2(\nu)$, и оператор $P_1\widetilde{T}$ компактен, то все операторы $Q_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ компактны. Следовательно, $(Q_n\widetilde{T})^* : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактные операторы. Пусть $\{\widetilde{p}_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(F_{1n}, \nu)$. Введя функции $p_{nk} = \chi_{F_{1n}} \widetilde{p}_{nk}$, получим ортонормированную последовательность $\{p_{nk}\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(\nu)$ функций с носителями в F_{1n}. Пусть T_1, T_2 — линейные операторы в $L_2(\nu)$ с областями определения D_{T_1}, D_{T_2}. Будем писать $T_1 \subseteq T_2$, если $D_{T_1} \subseteq D_{T_2}$ и для любого $h \in D_{T_1}$ имеет место равенство $T_1 h = T_2 h$. Так как $Q_n T \subseteq Q_n\widetilde{T}$, то

$$\big(Q_n\widetilde{T}\big)^* \subseteq (Q_n T)^* = T^* Q_n.$$

Но $(Q_n\widetilde{T})^* \in B(L_2(\nu))$. Следовательно, $T^* Q_n = (Q_n\widetilde{T})^*$. Отсюда вытекает, что $p_{nk} \in D_{T^*}$ для всех k, n. Кроме того,

$$T^* p_{nk} = T^* Q_n p_{nk} = \big(Q_n\widetilde{T}\big)^* p_{nk} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

поскольку $(Q_n\widetilde{T})^*$ — компактный оператор. Выберем k_n так, чтобы

$$\|T^* p_{nk_n}\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.3.7}$$

При этом в силу (5.3.6)

$$\big\|(A^* - \overline{\alpha}\,\mathbf{1}) p_{nk_n}\big\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.3.8}$$

Пусть $\{\widetilde{q}_{mj}\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(F_m, v)$, $m = 2, 3, \ldots$ Введем функции $q_{mj} = \chi_{F_m} \widetilde{q}_{mj}$. Покажем, что все функции q_{mj} принадлежат D_{T^*}. Действительно, подобно предыдущему,

$$T^* q_{mj} = T^* P_m q_{mj} = \big(P_m \widetilde{T}\big)^* q_{mj},$$

где $P_m h = \chi_{F_m} h$, $h \in L_2(\nu)$. Рассмотрим семейство

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_{nk}\}_{n=1}^{\infty}\right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} \{q_{mj}\}\right).$$

В силу того, что множества F_{1n}, F_m, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 2, 3, \ldots$, попарно не пересекаются, это семейство ортонормированное. Записав его в виде последовательности $\{u_n\}$, получим ортонормированный базис $L_2(\nu)$, принадлежащий пересечению областей определения операторов $A^* - \overline{\alpha}\,\mathbf{1}$ и T^*. При этом базис $\{u_n\}$ содержит подпоследовательность $\{p_{nk_n}\}$, удовлетворяющую (5.3.7), (5.3.8). Отсюда по теореме 2.2.1, примененной к семейству из двух операторов $A-\alpha\mathbf{1}$ и T, получим, что найдется не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \to L_2(\mu)$ такой, что

$$U(A-\alpha\mathbf{1})U^{-1} = B + C, \quad UTU^{-1} = N + D, \tag{5.3.9}$$

где B, N — ядерные интегральные операторы из $B(L_2(\mu))$ с ядрами $B(\eta,\xi)$ и $N(\eta,\xi)$ соответственно и ядерной нормой меньшей, чем ε,

$$\begin{aligned} Ch(\eta) &= \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{\varphi_n(\xi)}\, h(\xi)\, d\mu(\xi), \\ Dh(\eta) &= \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{\psi_n(\xi)}\, h(\xi)\, d\mu(\xi), \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

$\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$. Записав уравнение (5.3.3) в виде

$$\alpha x + (A-\alpha\mathbf{1})x - \lambda Tx = f$$

и сделав замену $y = Ux$, получим уравнение

$$\alpha U^{-1}y + (A-\alpha\mathbf{1})U^{-1}y - \lambda TU^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям этого уравнения оператор U, придем к уравнению

$$\alpha y + U(A-\alpha\mathbf{1})U^{-1}y - \lambda UTU^{-1}y = Uf.$$

Отсюда, пользуясь (5.3.9), (5.3.10), получим интегральное уравнение (5.3.5), эквивалентное уравнению (5.3.3). $\triangleright$

Замечание 5.3.3. Условие теоремы 5.3.4 выполняется, если T — интегральный оператор и для его ядра $K(s,t)$ найдется положительная функция $b \in L_0(\nu)$ такая, что

$$\int\limits_Y |K(s,t)|\, b(s)\, d\nu(s) \in L_2(\nu).$$

Действительно, в силу следствия 6.9 теоремы I.6.2 из [19] ядро $K(s,t)$ порождает интегральный оператор, определенный на всем $L_2(\nu)$. Этот оператор является продолжением оператора T и по теореме 1.1.3 почти компактен.

Теорема 5.3.5. *Пусть меры μ, ν сепарабельны и не являются чисто атомическими, коэффициент a в уравнении (5.3.3) принадлежит $L_\infty(\nu)$, линейный оператор T в (5.3.3) плотно определен и замыкаем и существует не содержащее атомов меры ν множеств E, $\nu E > 0$, такое, что оператор $P_E T$ продолжается до линейного почти компактного оператора $\tau : L_2(\nu) \to L_0(\nu)$. Тогда справедливо утверждение теоремы 5.3.4.*

◁ Найдется множество $E_1 \subset E$, $\nu E_1 > 0$, такое, что $P_{E_1}\tau : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактный оператор. Как в доказательстве теоремы 5.3.4, получим $T^* P_{E_1} = (P_{E_1} T)^* = (P_{E_1}\tau)^*$. Значит, $T^* P_{E_1} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактный оператор.

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(s)$ на E_1. Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $E_{1n} \subset E_1$ с положительными мерами такую, что

$$|a(s) - \alpha| < \varepsilon_n \quad \text{для почти всех} \quad s \in E_{1n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.3.11}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пользуясь компактностью оператора $T^* P_{E_1}$, найдем для каждого n функцию y_n, $\|y_n\| = 1$, с носителем в E_{1n} так, чтобы

$$\|T^* y_n\| = \|T^* P_{E_1} y_n\| < \varepsilon_n.$$

Отсюда и из (5.3.11) имеем

$$\|T^* y_n\| < \varepsilon_n, \quad \|(A^* - \overline{\alpha}\,\mathbf{1}) y_n\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.3.12}$$

Выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{y_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* v_n\| < \infty,$$

и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, v_n) T^* v_n, \quad h \in L_2(\nu),$$

и замкнутый оператор $Q = T^* - \Gamma$ с областью определения $D_Q = D_{T^*}$. Тогда $Q v_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $V^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке V последовательности $\{v_n\}$ и P — ортопроектор на $V^\perp$. В силу замкнутости Q имеем $V \subset D_Q$, поэтому $P D_Q \subset D_Q$. Обозначив через $\overline{F}$ замыкание множества $F \subset L_2(\nu)$ по норме, получим

$$V^\perp \supseteq \overline{V^\perp \cap D_Q} \supseteq \overline{P D_Q} = \overline{P D_{T^*}} = V^\perp,$$

так как $\overline{D_{T^*}} = L_2(\nu)$. Таким образом, $\overline{V^\perp \cap D_Q} = V^\perp$. Следовательно, множество $V^\perp \cap D_Q$ плотно в $V^\perp$. Пусть $\{v_n^\perp\}$ — любой ортонормированный базис подпространства $V^\perp$, состоящий из элементов D_Q. Рассмотрим ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства $L_2(\nu)$, являющийся объединением $\{v_n\}$ и $\{v_n^\perp\}$. Имеем $\{u_n\} \subset D_Q = D_{T^*}$, и $\{u_n\}$ принадлежит области определения оператора $A^* - \overline{\alpha}\mathbf{1}$, совпадающей в силу $a \in L_\infty(\nu)$ с $L_2(\nu)$. Кроме того, из (5.3.12) следует, что $T^* v_n \to 0$, $(A^* - \overline{\alpha}\mathbf{1}) v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, как в доказательстве теоремы 5.3.4, получим по теореме 2.2.1 справедливость доказываемой теоремы. ▷

Теорема 5.3.6. 1) *Если в уравнении* (5.3.5) $\alpha = 0$, *то это уравнение умножением обеих его частей на функцию*

$$d = \chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \bigl(\|\varphi_n\| + \|\psi_n\| + 1\bigr)^{-1} \chi_{e_n},$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, *приводится к эквивалентному интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором.*

2) *Если в* (5.3.5) $\alpha \neq 0$, *то уравнение* (5.3.5) *заменой* $z = G_\lambda y$, *где* G_λ — *обратимый линейный непрерывный оператор в* $L_2(\mu)$, *приводится к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$K_\lambda(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu\, e_n}}\, \overline{b_{n,\lambda}(\xi)}, \quad \{b_{n,\lambda}\} \subset L_2(\mu).$$

$\triangleleft$ Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) доказывается так же, как теорема 5.1.3. $\triangleright$

К получающемуся в случае 2) уравнению применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Глава 6. Функциональные уравнения 1-го и 2-го родов в L_2

§ 6.1. Уравнения 1-го рода в L_p с почти компактными операторами

Теорема 6.1.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ — почти компактный линейный оператор. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_p(X,\mu)$ эквивалентно уравнению 1-го рода с компактным оператором.*

$\triangleleft$ Так как T — почти компактный оператор, существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_nT : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ — компактный оператор для любого n; здесь $P_nf = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p(X,\mu)$. Умножив обе части уравнения $Tx = f$ на функцию $d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_{X_n}$, получим эквивалентное уравнение 1-го рода $T_dx(s) = d(s)f(s)$ с компактным оператором $T_d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}P_nT$. $\triangleright$

Теорема 6.1.2. *Пусть $1<p<\infty$, $K : L_p(Y,\nu) \to L_p(X,\mu)$ — интегральный оператор. Тогда интегральное уравнение 1-го рода $Kx=f\in L_p(X,\mu)$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с компактным оператором.*

$\triangleleft$ Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3. $\triangleright$

В связи с теоремами 6.1.1, 6.1.2 отметим, что к уравнению 1-го рода в L_p с компактными операторами применима обобщенная теорема Пикара из работы Е. Н. Доманского и А. Н. Пличко [8].

§ 6.2. Сведение уравнений 2-го рода в L_p с почти компактными операторами к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами

Определение 6.2.1. Заданная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-почти всюду конечная функция $K(s,t)$ называется *карлемановским ядром*, если для почти всех $s \in X$

$$\int\limits_X |K(s,t)|^q d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ядро $K(s,t)$ назовем *квазивырожденным карлемановским ядром*, если найдутся последовательность $\{g_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами и последовательность $\{u_n\} \subset L_q(X,\mu)$ такие, что

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_n}(s)}{(\mu g_n)^{1/p}} \overline{u_n(t)}. \tag{6.2.1}$$

Лемма 6.2.1 [43]. *Пусть (Z,ξ) — пространство с конечной положительной мерой ξ, B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, вектор-функция $x : Z \to B$ сильно измерима. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и ξ-почти всех $\sigma \in Z$ выполняется неравенство*

$$\left\| x(\sigma) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{F_n}(\sigma) \right\|_B < \varepsilon,$$

где $\{x_n\}$ — плотная в множестве значений функции x последовательность, $E_n = \bigl\{\sigma : \|x(\sigma) - x_n\|_B < \varepsilon; \sigma \in S_0\bigr\}$, $S_0 = \{\sigma : \|x(\sigma)\|_B > 0\}$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{k<n} E_k$.

Лемма является фрагментом доказательства теоремы 3.5.3 из [43].

Обозначим через $B(L_p(\mu))$ совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из $L_p(\mu) := L_p(X,\mu)$ в $L_p(\mu)$.

Теорема 6.2.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $T \in B(L_p(\mu))$ — почти компактный оператор. Тогда функциональное уравнение 2-го рода*

$$y - \lambda T y = f \in L_p(\mu) \tag{6.2.2}$$

эквивалентно линейному интегральному уравнению в $L_p(\mu)$ 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\lhd$ Зафиксируем $\lambda \neq 0$. Так как T — почти компактный оператор, существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся множества X_m с конечными положительными мерами такое, что $P_m T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — компактные операторы для любого m; здесь $P_m f = \chi_{X_m} f$, $f \in L_p(\mu)$. Тогда для каждого m в силу [37, п. 10.2.3] найдется конечномерный линейный ограниченный оператор $T_m : L_p(\mu) \to L_p(X_m,\mu)$ такой, что

$$\bigl\| P_m T - P_m T_m \bigr\| < \bigl(2\,|\lambda|\,2^m\bigr)^{-1}. \tag{6.2.3}$$

Оператор $P_m T_m$ может быть представлен в виде

$$P_m T_m f = \sum_{n=1}^{M_m} (f, v_{m,n}) w_{m,n}, \quad f \in L_p(\mu),\ M_m < \infty,$$

где

$$(f, v_{m,n}) = \int\limits_X f(t)\,\overline{v_{m,n}(t)}\,d\mu(t), \quad v_{m,n} \in L_q(\mu), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \quad w_{m,n} \in L_p(\mu)$$

и носители функций $w_{m,n}$ содержатся в X_m, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, \ldots, M_m$. Следовательно, $P_m T_m$ — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_m(s,t) = \sum_{n=1}^{M_m} w_{m,n}(s)\,\overline{v_{m,n}(t)}.$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$C(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{X_m}(s) K_m(s,t), \tag{6.2.4}$$

векторную функцию $\varphi(s) = \overline{C(s,\cdot)}$ со значениями в $L_q(\mu)$ и интегральный оператор $C : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ с ядром $C(s,t)$. Покажем, что $C \in B(L_p(\mu))$. В силу (6.2.3) для всех h из единичной сферы $L_p(\mu)$ имеем, обозначив через $\|\cdot\|_p$ норму в $L_p(\mu)$,

$$\big\|(T - C)h\big\|_p = \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (P_m T - P_m C)h \right\|_p =$$
$$= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (P_m T - P_m T_m)h \right\|_p \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|P_m T - P_m T_m\| < \frac{1}{2|\lambda|}.$$

Стало быть, $C \in B(L_p(\mu))$ и $\|T - C\| < \frac{1}{2|\lambda|}$.

Зафиксируем m и рассмотрим определенную на X_m векторную функцию $\varphi_m(s) = \overline{K_m(s,\cdot)}$. Эта функция принимает значения в конечномерном подпространстве пространства $L_q(\mu)$ и поэтому сильно измерима. Следовательно, и функция $\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{X_m}(s)\varphi_m(s)$ сильно измерима. По лемме 6.2.1 найдутся разбиение $\{g_{n,m}\}_{n=1}^{\infty}$ множества X_m на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами и последовательность $\{\psi_{n,m}\}_{n=1}^{\infty} \subset L_q(\mu)$ такие, что для всех n и почти всех $s \in g_{n,m}$

$$\big\|\varphi_m(s) - \psi_{n,m}\big\|_q < \left[2\,|\lambda|(\mu X_m)^{\frac{1}{p}}\, 2^{\frac{m}{p}}\right]^{-1}. \tag{6.2.5}$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$D(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{g_{n,m}}(s)\,\overline{\psi_{n,m}(t)}, \tag{6.2.6}$$

векторную функцию $\psi(s)=\overline{D(s,\cdot)}$ и интегральный оператор $D: L_p(\mu)\to L_0(\mu)$ с ядром $D(s,t)$. В силу (6.2.5) для всех h из единичной сферы $L_p(\mu)$ имеем

$$\big\|(C-D)h\big\|_p=\left(\int\limits_X \big|(h,\varphi(s)-\psi(s))\big|^p\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_X \big\|\varphi(s)-\psi(s)\big\|_q^p\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{X_m}\big\|\varphi(s)-\psi(s)\big\|_q^p\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2|\lambda|}.$$

Следовательно, $D\in B(L_p(\mu))$ и $\|C-D\|<\frac{1}{2|\lambda|}$. Таким образом, $\|T-D\|<\frac{1}{|\lambda|}$ и $\|\lambda(T-D)\|<\mathbf{1}$. Поэтому оператор $F_\lambda=\mathbf{1}-\lambda(T-D)$ имеет обратный $F_\lambda^{-1}\in B(L_p(\mu))$. Запишем уравнение (6.2.2) в виде $F_\lambda y-\lambda Dy=f$. Положив $z=F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода $z-\lambda DF_\lambda^{-1}z=f$, где DF_λ^{-1} — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_\lambda(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{g_{n,m}}(s)\,\overline{\varphi_{n,m,\lambda}(t)}, \tag{6.2.7}$$

здесь $\varphi_{n,m,\lambda}=(F_\lambda^{-1})^*\psi_{n,m}$, $(F_\lambda^{-1})^*$ — сопряженный к F_λ^{-1} оператор. Так как множества $g_{n,m}$ попарно не пересекаются, двойные ряды (6.2.6), (6.2.7) можно записать в виде (6.2.1). Таким образом, ядра $D(s,t)$, $K_\lambda(s,t)$ являются квазивырожденными карлемановскими ядрами.

В случае $\mu X<\infty$ доказательство упрощается: в силу того, что функция $\varphi(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{X_m}(s)\varphi_m(s)$ сильно измерима и $\mu X<\infty$, по лемме 6.2.1 найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств $g_n\subset X$ с положительными мерами и последовательность $\{v_n\}\subset L_q(\mu)$ такие, что для почти всех $s\in X$

$$\left\|\varphi(s)-\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{g_n}(s)v_n\right\|_q<\left[2\,|\lambda|(\mu X)^{\frac{1}{p}}\right]^{-1}.$$

Положим $u_n=(\mu g_n)^{\frac{1}{p}}v_n$ и рассмотрим квазивырожденное карлемановское ядро

$$D_0(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{g_n}(s)}{(\mu g_n)^{\frac{1}{p}}}\,\overline{u_n(t)},$$

векторную функцию $\eta(s)=\overline{D_0(s,\cdot)}$ и интегральный оператор $D_0: L_p(\mu)\to L_0(\mu)$ с ядром $D_0(s,t)$. Тогда для всех h из единичной сферы $L_p(\mu)$

$$\big\|(C-D_0)h\big\|_p = \left(\int\limits_X \big|(h,\varphi(s)-\eta(s))\big|^p\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X \big\|\varphi(s)-\eta(s)\big\|_q^p\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2|\lambda|}.$$

Таким образом, $D_0 \in B(L_p(\mu))$, $\|T-D_0\| < \frac{1}{|\lambda|}$, и доказательство завершается повторением предыдущего доказательства с заменой в нем D на D_0. $\triangleright$

Следствие 6.2.1. *Общее линейное интегральное уравнение 2-го рода в $L_p(\mu)$, $1<p<\infty$, эквивалентно линейному интегральному уравнению 2-го рода в $L_p(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.*

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор в $L_p(\mu)$ почти компактен.

Замечание 6.2.1. К интегральному уравнению 2-го рода в L_p с квазивырожденным карлемановским ядром применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Замечание 6.2.2. Теорема 6.2.1 и ее следствие показывают, что любое линейное функциональное уравнение 2-го рода в L_p $(1<p<\infty)$ с почти компактным (и тем более с интегральным) оператором может быть приведено линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_p с карлемановским интегральным оператором. Возникает вопрос: справедливо ли аналогичное утверждение для линейного функционального уравнения 3-го рода в L_p? В § 5.1 при $p=2$ был дан положительный ответ на этот вопрос. К сожалению, для любого $1<p<\infty$, $p\neq 2$, ответ на поставленный вопрос, вообще говоря, отрицательный: в § 2.3 для любого $p\neq 2$ построен пример линейного интегрального уравнения 3-го рода в L_p, которое не может быть приведено никакой линейной обратимой непрерывной заменой к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в L_p.

§ 6.3. Приближенные методы решения интегральных уравнений 2-го рода в L_p с квазивырожденными карлемановскими ядрами

В этом параграфе предлагаются два приближенных метода решения интегрального уравнения 2-го рода в $L_p(\mu)$ $(1<p<\infty)$ с квазивырожденным карлемановским ядром

$$z(s) - \lambda\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\,\overline{b_n(t)}\,z(t)\,d\mu(t) = g(s) \in L_p(\mu), \tag{6.3.1}$$

где $\{b_n\} \subset L_q(\mu)$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Решение этого уравнения будем искать в линейном многообразии

$$D_K := \left\{ h \;\middle|\; h \in L_p(\mu),\ \sum_{n=1}^{\infty} |(h, b_n)|^p < \infty \right\}$$

— максимальной области определения интегрального оператора K, порожденного ядром уравнения (6.3.1).

Введем интегральные уравнения в $L_p(\mu)$ с вырожденными ядрами

$$z(s) - \lambda_m \int\limits_X \sum_{n=1}^{m} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\, \overline{b_n(t)}\, z(t)\, d\mu(t) = g(s). \tag{6.3.2}$$

Как известно [40, II.2.3], решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Выберем $\lambda_m \to \lambda$ так, чтобы уравнения (6.3.2) имели решения $z_m \in L_p(\mu)$. Тогда в силу (6.3.2) для всех m и почти всех $s \in X$

$$z_m(s) = \lambda_m \sum_{n=1}^{m} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\, (z_m, b_n) + g(s). \tag{6.3.3}$$

Будем считать, без ограничения общности, что эти равенства выполняются для всех $s \in X$. Пусть последовательность $\{z_m\}$ ограничена в $L_p(\mu)$, $\xi_i = z_{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, — любая слабо сходящаяся в $L_p(\mu)$ ее подпоследовательность. Обозначим через z предел подпоследовательности $\{\xi_i\}$. Функции $\xi_i(s)$ равны $g(s)$ для каждой точки $s \in e_0 := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ и для каждой точки $s \in e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\xi_i(s) = \lambda_{m_i} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\, (\xi_i, b_n) + g(s).$$

Кроме того, при $i \to \infty$ имеем $(\xi_i, b_n) \to (z, b_n)$ для всех n. Таким образом, для любого $s \in X$ при $i \to \infty$

$$\xi_i(s) \to \xi(s) := \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\, (z, b_n) + g(s). \tag{6.3.4}$$

Так как $\{\chi_{e_n}\xi_i\}$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ сходится при $i \to \infty$ к $\chi_{e_n}\xi$ по норме $L_p(\mu)$, то $\{\chi_{e_n}\xi_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n}\xi$ при $i \to \infty$. Но $\{\chi_{e_n}\xi_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n} z$ при $i \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда $\chi_{e_n} z = \chi_{e_n}\xi$, и из произвольности $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем $z(s) = \xi(s)$ для почти всех $s \in X$. Следовательно, $\xi \in L_p(\mu)$ и в силу (6.3.4) для всех $s \in X$

$$\xi(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}\, \overline{b_n(t)}\, \xi(t)\, d\mu(t) = g(s).$$

Таким образом, ξ является решением уравнения (6.3.1). При этом

$$|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |(\xi, b_n)|^p = \|\xi - g\|^p < \infty,$$

так что ξ и z принадлежат D_k. Отметим, что функции $z_{m_i}(s) = \xi_i(s)$ сходятся к решению $\xi(s)$ не только слабо в $L_p(\mu)$, но и в каждой точке $s \in X$, причем поточечная сходимость на любом множестве e_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ равномерна. Отметим еще, что аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда ограничена по норме не вся последовательность $\{z_m\}$, а лишь некоторая ее подпоследовательность.

Итак, если последовательность $\{z_m\}$ (или ее подпоследовательность) ограничена в $L_p(\mu)$, то любая слабо сходящаяся их подпоследовательность сходится слабо и поточечно к решению уравнения (6.3.1). Покажем, что ограниченность последовательности норм резольвент интегральных операторов, порожденных ядрами интегральных уравнений (6.3.2), обеспечивает сходимость всей последовательности $\{z_m\}$ по норме $L_p(\mu)$ и с регулятором к решению уравнения (6.3.1). Напомним, что последовательность функций $\{f_m(s)\}$ сходится на X к функции $f(s)$ с регулятором $r(s)$, если для всех m и всех $s \in X$ выполняется неравенство $|f_m(s) - f(s)| \leqslant r(s)\varepsilon_m$, где $\varepsilon_m \to 0$.

Пусть K — максимальный интегральный (не обязательно ограниченный) оператор в $L_p(\mu)$, порожденный ядром интегрального уравнения (6.3.1), K_m — интегральные операторы в $L_p(\mu)$, порожденные ядрами интегральных уравнений (6.3.2). Выберем $\lambda_m \to \lambda$ так, чтобы точка λ_m^{-1} не являлась точкой спектра конечномерного оператора K_m, $m = 1, 2, \dots$ Предположим, что

$$\left\|(\mathbf{1} - \lambda_m K_m)^{-1}\right\| \leqslant C, \quad m = 1, 2, \dots \tag{6.3.5}$$

Пусть $S := \mathbf{1} - \lambda K$, $S_m := \mathbf{1} - \lambda_m K_m$, $z_m = S_m^{-1} g$, $m = 1, 2, \dots$ Тогда $\|z_m\| \leqslant \|S_m^{-1}\|\,\|g\| \leqslant C\|g\|$ для всех m. Отсюда по доказанному выше следует, что уравнение (6.3.1) имеет решение $z \in L_p(\mu)$. Покажем, что $\|z - z_m\| \to 0$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\left\|z - z_m\right\| &= \left\|z - S_m^{-1} g\right\| = \left\|S_m^{-1} S_m z - S_m^{-1} g\right\| \leqslant \left\|S_m^{-1}\right\| \left\|S_m z - g\right\| \leqslant \\ &\leqslant C\,\|S_m z - g\| = C\,\|z - \lambda_m K_m z - g\| = C\,\|\lambda K z - \lambda_m K_m z\| \leqslant \\ &\leqslant C\big(|\lambda|\,\|(K - K_m)z\| + |\lambda - \lambda_m|\,\|K_m z\|\big) \leqslant \\ &\leqslant C\big(|\lambda|\,\|\chi_{E_m} K z\| + |\lambda - \lambda_m|\,\|K z\|\big),\end{aligned}$$

где $E_m = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} e_n$. Из полученной оценки, $E_m \downarrow \varnothing$ и $|\lambda_m - \lambda| \to 0$ при $m \to \infty$ следует $\|z - z_m\| \to 0$.

Покажем, что при выполнении условия (6.3.5) последовательность $\{z_m(s)\}$ сходится с регулятором

$$r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu\, e_n)^{1/p}}$$

к определяемому равенством (6.3.4) решению $\xi(s)$, отличающемуся от решения $z(s)$ лишь на множестве меры 0. При этом мы считаем, как раньше, что равенства (6.3.3) выполнены для всех m и $s \in X$. Для любого $s \in e_n$ $(n = 1, 2, \dots)$

$$|\xi(s) - z_m(s)| = \frac{1}{(\mu\, e_n)^{1/p}} \, \|\chi_{e_n}(z - z_m)\| \leqslant \frac{1}{(\mu\, e_n)^{1/p}} \, \|z - z_m\|.$$

Кроме того, $|\xi(s) - z_m(s)| = 0$ для всех $s \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Таким образом, для всех s $|\xi(s) - z_m(s)| \leqslant r(s)\|z - z_m\|$. Если $\mu X = \infty$ и $\mu\, e_n \geqslant \gamma > 0$, $n = 1, 2, \dots$, то сходимость $z_m(s)$ к $\xi(s)$ будет равномерной.

Условие (6.3.5) выполняется, если $K : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — компактный оператор и $1/\lambda$ не является точкой спектра оператора K. В этом случае

$$\lim_{m\to\infty} \big\|(\mathbf{1} - \lambda K) - (\mathbf{1} - \lambda_m K_m)\big\| = 0.$$

Имеем

$$S_m^{-1} = \big[S - (S - S_m)\big]^{-1} = \big\{S\,\big[\mathbf{1} - S^{-1}(S - S_m)\big]\big\}^{-1}.$$

Выберем M так, чтобы для всех $m > M$

$$\big\|S^{-1}\big\|\,\big\|S - S_m\big\| < \beta < 1.$$

Тогда при $m > M$

$$\|S_m^{-1}\| \leqslant \Big\|\big[\mathbf{1} - S^{-1}(S - S_m)\big]^{-1}\Big\|\,\Big\|S^{-1}\Big\| \leqslant \frac{\big\|S^{-1}\big\|}{1 - \beta},$$

что доказывает (6.3.5).

Второй метод (с очевидными изменениями) применим, когда вместо условия (6.3.5) имеет место ограниченность какой-нибудь последовательности $\{\|(\mathbf{1} - \lambda_{m_k} K_{m_k})^{-1}\|\}$.

В заключение отметим, что при выполнении указанных выше условий оба метода работают для любого λ, в том числе когда λ^{-1} принадлежит спектру оператора K, при этом K может быть как ограниченным, так и неограниченным оператором.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.* Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. — 1947. — Т. 2, вып. 5. — С. 93–132.
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1966.
3. *Бухвалов А. В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Исследование по линейным операторам и теории функций. V, Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Л., 1974. — Т. 47. — С. 5–14.
4. *Бухвалов А. В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, вып. 6. — С. 37–83.
5. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г. и др.* Векторные решетки и интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1992.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1967.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
8. *Доманский Е. Н., Пличко А. Н.* К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Докл. АН СССР. — 1985.–Т. 280, № 4. — С. 781–784.
9. *Жданов С. И.* О некоторых вопросах общей теории линейных систем // Оптимизация. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1973. — Вып. 12. — С. 52–76.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
11. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. — М.: Физматгиз, 1958.
12. *Коротков В. Б.* Об интегральных операторах с ядрами Карлемана // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 165, № 4. — С. 748–751.
13. *Коротков В. Б.* О характеристических свойствах интегральных операторов с ядрами карлемановского типа // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 1. — С. 103–127.
14. *Коротков В. Б.* Классификация и характеристические свойства карлемановских операторов // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 6. — С. 1274–1277.
15. *Коротков В. Б.* О сильных интегральных операторах // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 6. — С. 907 — 912.
16. *Коротков В. Б.* О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 217, № 4. — С. 752 — 754.
17. *Коротков В. Б.* К задачам Халмоша — Сандера об интегральных операторах в L_2 // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 214–216.
18. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. — 1982. — Т. 32, № 5. — С. 601 — 606.
19. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.

20. *Коротков В. Б.* О системах интегральных уравнений // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 3. — С. 121–133.
21. *Коротков В. Б.* О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 3. — С. 149–151.
22. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1988.
23. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. — Владивосток: «Колорит», 2000.
24. *Коротков В. Б.* Об одной алгебре линейных непрерывных операторов // Сиб. мат. журн. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 310–314.
25. *Коротков В. Б.* Компактные по мере, почти компактные операторы и линейные функциональные уравнения в L_p // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 610–619.
26. *Коротков В. Б.* О линейных функциональных уравнениях 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1294–1303.
27. *Коротков В. Б.* О подобии линейных операторов в L_p интегральным операторам 1-го или 2-го рода // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55, № 1. — С. 124–130.
28. *Коротков В. Б.* О системах линейных функциональных уравнений третьего рода в L_2 // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 3. — С. 549–556.
29. *Коротков В. Б.* Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 373–387.
30. *Коротков В. Б.* О частично компактных по мере неограниченных линейных операторах // Владикавк. мат. журн. — 2016. — Т. 18, вып. 1. — С. 36–41.
31. *Коротков В. Б.* Интегральные уравнения третьего рода с неограниченными операторами // Сиб. мат. журн. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 333–343.
32. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1979. — С. 64–68.
33. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
34. *Максимова О. Д.* Свойства интегральных операторов в идеальных пространствах и абсолютно интегральные операторы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Новосибир. гос. ун-т., 1987.
35. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, вып. 6. — С. 129–191.
36. *Новицкий И. М.* О минорах Фредгольма для вполне непрерывных операторов // Дальневост. мат. сб. — 1999. — Вып. 7. — С. 103–122.
37. *Пич А.* Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
38. *Степанов В. Д.* Об одной проблеме Халмоша и Сандера // Докл. АН СССР. — 1984. Т. 278, № 2. — С. 296 — 298.
39. *Степанов В. Д.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки. — Владивосток: Дальнаука, 2000.
40. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
41. *Халмош П.* Теория меры. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.
42. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. — М.: Наука, 1985.

43. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
44. *Aronszajn N., Szeptycki P.* On general integral transformations // Math. Ann. — 1966. — Vol. 163, № 2. — P. 127–154.
45. *Banach S.* Théorie des Opérations Linéaires. — N. Y.: Chelsea Publ. Company, 1955.
46. *Carleman T.* Sur les Équations Intégrales Singulières á Noyau Réel et Symétrique. — Uppsala: A.–B. Lundequistska Bokhandeln, 1923.
47. *Lessner L.* A lattice theoretic characterization of an integral operator // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 53, № 2. — P. 391–395.
48. *Misra B., Speiser D., Targonski G.* Integral operators in the theory of scattering // Helv. Phys. Acta. — 1963. — Vol. 36, № 7. — P. 963–980.
49. *Neumann J.* Charakterisierung des spektrums eines integraloperators // Actualitiés Sci. et Ind. Paris. — 1935. — № 229. — P. 38–55.
50. *Novitskii I. M.* A Kernel smoothing method for general integral equations // Dal'nevost. Mat. Zh. — 2012. — Vol. 12, № 2. — P. 255–261.
51. *Novitskii I. M.* Some properties of the resolvent kernels for integral equations with bi-Carleman kernels // Dal'nevost. Mat. Zh. — 2016. — Vol. 16, № 2. — P. 186–208.
52. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 81, № 4. — P. 595–599.
53. *Weidmann J.* Carlemanoperatoren // Manuscripta Math. — 1970. — Vol. 2, № 1. — P. 1–38.
54. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. — 1982. — Vol. 31, № 1. — P. 83–96.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 11

Коротков Виталий Борисович

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДОВ

Научное издание

Ответственный редактор В. Д. Степанов

Редакторы серии:
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 6,16. Уч.-из. л. 5,18
Тираж 300 экз.
Заказ №__

Российская академия наук
119991, Москва, Ленинский проспект, 14
www.ras.ru

Верстка Южного математического
института — филиала ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22.
www.smath.ru

Корректура ООО «Нюанс»
Москва, ул. Дмитрия Ульянова, д. 26 а, стр. 2

Отпечатано в цифровой типографии ООО «Буки Веди»
115093, Москва, Партийный пер., д. 1, корп. 58
www.bukivedi.com