СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 6, 2021 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ИНФОРМАТИКА

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 913–925

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.624

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. П. Варин

[1] *125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия*

e-mail: varin@keldysh.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
Переработанный вариант 16.12.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Рассматривается задача интерполяции рекуррентных функций, заданных в целочисленных точках. Интерполяция понимается как построение аналитической функции, принимающей заданные значения в заданных точках. В частном случае итерации аналитических функций, т.е. композиции отображений, эта задача является классической задачей о построении непрерывных итераций (композиций) отображений и считается решенной. Однако существующие методы построения таких отображений являются весьма сложными как технически, так и по привлекаемым для их доказательства средствам. Мы даем два элементарных способа решения этой задачи, которые по эффективности значительно превосходят существующие. В частности, получен простой алгоритм обращения формального ряда (формула Лагранжа), который применим и для более общих степенно-логарифмических рядов. Также рассматривается задача об асимптотике рекуррентных последовательностей. Библ. 13. Фиг. 4.

Ключевые слова: рекуррентные последовательности, непрерывные композиции отображений, асимптотики рекуррентных последовательностей, логистическое отображение.

DOI: 10.31857/S0044466921060144

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи интерполяции лежат в основе современного анализа. Это относится как к классическим интерполяционным формулам Ньютона и Лагранжа, так и к более абстрактным задачам построения функции, принимающей заданные значения в заданных точках. Достаточно вспомнить историю построения гамма-функции, интерполирующей факториал. В данной статье мы рассмотрим задачу интерполяции именно в этом более общем контексте.

Рассмотрим, например, частный случай логистического отображения

$$z_{n+1} = z_n - z_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Если $0 < z_0 < 1$, то нетрудно показать, что точка $z = 0$ является притягивающей неподвижной точкой отображения (1). Ясно также, что при таких начальных данных отображение (1) определяет семейство кривых, имеющих ось $\mathbb{R}$ в качестве асимптоты. Последний факт, впрочем, виден пока только на графике, так как в литературе мы не нашли никаких указаний ни на формулу для этих кривых, ни на их асимптотику.

Отображение (1) является весьма частным случаем итераций отображения

$$z \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}, \tag{2}$$

где $F(z)$ является голоморфной функцией в некоторой окрестности нуля или формальным рядом, и $c_0 = 1$ (данная нормировка не является ограничением).

Задача интерполяции рекуррентной последовательности $z_{n+1} = F(z_n)$ локально является классической задачей о построении *непрерывной итерации* отображения (2). А именно, рассмотрим обычную композицию (итерацию) отображения

$$F^{(n)}(z) = F \circ F \circ \ldots \circ F(z), \quad n \text{ раз}.$$

Ясно, что

$$F^{(n+m)}(z) = F^{(n)}(F^{(m)}(z)), \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Задача о непрерывной итерации состоит в обобщении этого полугруппового свойства на произвольные комплексные числа и наделения его свойствами группы, что подразумевает также следующие тождества:

$$F^{(1)}(z) = F(z), \quad F^{(0)}(z) \equiv z. \tag{4}$$

Классический пример непрерывной итерации дает отображение

$$F^{(s)}(z) = \frac{z}{1 - sz}.$$

Причина, по которой мы называем итерацию непрерывной, а не аналитической, помимо традиции (см. [1]), состоит в том, что построенные функции $F^{(x)}(z)$, $x \in \mathbb{C}$, не являются, вообще говоря, голоморфными при $x \notin \mathbb{Z}$.

Этот совершенно нетривиальный факт был, по-видимому, впервые доказан в [2] для функции $\exp(z) - 1$. А именно, в [2] была доказана гипотеза, высказанная в [3], о том, что функциональное уравнение

$$F(F(z)) = \exp(z) - 1$$

имеет решение в виде формального ряда $F(z)$, который всюду расходится. Это же справедливо, как мы увидим, и для логистического отображения (1).

Однако, как мы намерены показать (в отдельной работе), расходимость рядов, интерполирующих итерации отображения (1) (и, вероятно, (2)), не препятствует эффективной вычислимости функций на вещественной оси, так как все проблемы с расходимостью лежат в комплексной области.

Кажется интуитивно понятным, что задача о непрерывной итерации не может быть простой, так как она включает в себя как частный случай классическую формулу Лагранжа обращения степенного ряда, т.е.

$$F^{(-1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left(\frac{w}{F(w)} \right)^n \Bigg|_{w=0}.$$

Найденные нами источники подтверждают эти ожидания.

Данная задача обычно решается с помощью бесконечных матриц Жаботинского (см. [4]) и экспоненциальных полиномов Белла (см. [5]). Систематическое изложение этих методов можно найти в [6, с. 314]. Этот же подход использовался в [7].

Наиболее продвинутый алгоритм решения этой задачи (насколько нам известно) дан в статье [1], целиком посвященной этой проблеме.

В отличие от других (известных нам) работ, алгоритм в [1] легко реализуем в системах компьютерной алгебры (CAS). Поэтому мы приведем сводку формул из [1], дающих решение задачи непрерывной итерации.

Сначала в [1] даются необходимые результаты о полиномах биномиального типа, которые определяются тождеством

$$(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots)^x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \tag{5}$$

Тот факт, что $P_n(x)$ являются полиномами, легко доказуем, однако автор не приводит формул для их вычисления.

На самом деле, полиномы $P_n(x)$ вычисляются рекурсивным образом по формуле возведения ряда в произвольную степень (см., например, [8]). А именно, $P_0(x) = 1$ и

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left[x(n-m)-m\right]P_m(x)c_{n-m}, \quad n > 0, \tag{6}$$

что является, по-видимому, самым эффективным способом вычисления этих полиномов (см. разд. 2).

Далее эти полиномы используются для вычисления генератора $\omega(z)$ некоторой бесконечномерной группы Ли. А именно, пусть

$$F(z) = z(1 + a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \ldots), \quad k \geq 1, \quad a_k \neq 0.$$

Полиномы $P_n(x)$ следует вычислять для функции $F(z)/z$. Далее,

$$\omega(z) = z(b_k z^k + b_{k+1}z^{k+1} + \ldots),$$

где k – то же, что и для $F(z)$, и $b_k = a_k$. Далее (см. [1, (101)]),

$$b_n = \frac{1}{(n-k)b_k}\sum_{i=1}^{n-k}[(k+i+1)a_{k+i} - P_{k+i}(n-i+1)]b_{n-i}, \quad n > k.$$

Наконец (см. [1, (69)]),

$$F^{(s)}(z) = z + \frac{s}{1!}\omega(z) + \frac{s^2}{2!}\omega(z)\omega'(z) + \ldots + \frac{s^n}{n!}\omega_n(z) + \ldots,$$

где

$$\omega_0(z) = z, \quad \omega_1(z) = \omega(z), \quad \omega_{n+1}(z) = \omega(z)\omega_n'(z), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Эти формулы работают, однако мы не рекомендуем ими пользоваться, так как в разд. 2 мы дадим два новых способа решения задачи о непрерывной итерации. Один достаточно простой, использующий разностные уравнения и полиномы Бернулли, а другой совершенно элементарный, основанный на единственной прямой рекурсии.

Мы используем полученный алгоритм, реализованный в CAS Maple, для вычисления, как мы полагаем, беспрецедентно большого количества полиномов непрерывной итерации (300–400) для некоторых модельных функций.

Это позволило нам подтвердить данную выше информацию о расходимости рядов для дробных итераций. А также был обнаружен неизвестный ранее эффект хаотичного поведения коэффициентов формальных рядов на фоне их роста (см. разд. 2).

В разд. 3 мы рассматриваем задачу интегрирования дискретного отображения, используя в качестве модели логистическое отображение (1).

Получена общая формула для интеграла этого отображения, позволяющая не только интерполировать итерационную последовательность (1), но и вычислить ее асимптотику как при $z_n \to 0$, так и при $z_n \to \infty$.

В заключение этого вводного раздела заметим, что развитая нами техника применима не только для рекуррентных последовательностей первого порядка рекурсии. Рассмотрим, например, рекурсию 2-го порядка

$$z_{n+1} = z_n + z_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Найдем функцию (формальный ряд) $G()$ такую, что $z_n = G(z_{n+1})$. Тогда $z_{n-1} = G(z_n)$, поэтому $z_{n+1} = z_n + G^2(z_n)$. Применим функцию $G()$ к обеим частям последнего равенства. Тогда получим ($z_n \to z$) функциональное уравнение

$$z = G(z + G^2(z)),$$

откуда однозначно находим для $w = G(z)$:

$$w = z - z^2 + 4z^3 - 24z^4 + 178z^5 - 1512z^6 + 14152z^7 - 142705z^8 + 1528212z^9 + \ldots,$$

а также для $z = G^{(-1)}(w)$ получим

$$z = w + w^2 - 2w^3 + 9w^4 - 56w^5 + 420w^6 - 3572w^7 + 33328w^8 - 334354w^9 + \ldots .$$

Любопытно, что обе последовательности целых (что пока ниоткуда не следует) коэффициентов $[z^n]G(z)$ и $[w^n]G^{(-1)}(w)$ уже встречались в литературе (см. [9, A213591 и A138740]). По опубликованным данным эти ряды (вероятно) расходятся.

2. ФОРМУЛЫ НЕПРЕРЫВНОЙ ИТЕРАЦИИ

Поскольку задача уже решена, то мы знаем, что непрерывная итерация отображения (2) имеет вид

$$F^{(s)}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) z^{n+1}, \tag{7}$$

где $a_n(s)$ — однозначно определяемые полиномы степени не выше n.

Однако мы не будем пользоваться этой информацией, а найдем функции $a_n(s)$ как полиномы прямо из определения непрерывной итерации.

В силу (4), $a_n(0) = 0$, $a_n(1) = c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Запишем тождество $F^{(s+1)}(z) = F(F^{(s)}(z))$ в явном виде

$$F^{(s+1)}(z) - F^{(s)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (F^{(s)}(z))^{n+1}.$$

Положим $a_0(s) = 1$ и преобразуем это тождество к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s+1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(s) z^m \right)^{n+1}.$$

Далее, запишем тождество

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(s) z^m \right)^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{n,m}(s) z^m,$$

где $Y_{n,m}(s)$ — неизвестные пока функции.

Видно, что $Y_{n,0}(s) = a_0^{n+1}(s) = 1$. Применение формулы Эйлера возведения ряда в степень дает рекуррентную формулу

$$Y_{n,m}(s) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{k(n+2)}{m} - 1 \right] a_k(s) Y_{n,m-k}(s), \quad m > 0.$$

Таким образом, функции $Y_{n,m}(s)$ вычисляются с помощью неизвестных пока функций $a_n(s)$.

Изменив порядок суммирования и собрав подобные члены, получаем тождество

$$a_n(s+1) - a_n(s) = \sum_{m=1}^{n} c_m Y_{m,n-m}(s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

что являет собой бесконечную треугольную систему разностных уравнений.

Итак, мы видим, что функции $Y_{n,m}(s)$ выражаются через функции $a_n(s)$ и наоборот. Однако видно, что все эти рекурсии однозначно разрешимы, так как каждая из нужных функций выражается через уже известные, т.е. ранее определенные.

Таким образом, осталось решить разностное уравнение (8) с правой частью, которая по индукционному предположению является полиномом от s. Но это уравнение линейно, поэтому достаточно решить уравнение

$$P(n, s+1) - P(n, s) = s^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

а это с учетом “констант интегрирования” в точности

$$P(n, s) = \frac{B(n, s) - B(n)}{n},$$

где $B(n, s)$ – полиномы Бернулли, а $B(n) = B(n, 0)$ – числа Бернулли.

Итак, алгоритм вычисления полиномов $a_n(s)$ состоит в следующем.

Начальные значения $a_0(s) = Y_{n,0}(s) = 1$ известны. На шаге n правая часть (8) является известным полиномом, определяемым ранее найденными функциями. Поэтому, чтобы решить разностное уравнение (8), нужно каждый моном As^{n-1} в правой части (8) заменить на полином $AP(n, s)$.

Таким образом, получим

$$a_1(s) = c_1 s, \quad a_2(s) = (s^2 - s)c_1^2 + c_2 s,$$
$$a_3(s) = \left(s^3 - \frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s\right)c_1^3 + \frac{5}{2}(s^2 - s)c_1 c_2 + c_3 s,$$
$$a_4(s) = \left(s^4 - \frac{13}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{8}{3}s\right)c_1^4 + \left(\frac{13}{3}s^3 - \frac{21}{2}s^2 + \frac{37}{6}s\right)c_2 c_1^2 +$$
$$+ 3(s^2 - s)c_3 c_1 + \frac{3}{2}(s^2 - s)c_2^2 + c_4 s, \dots .$$

Мы вычислили эти полиномы в явном виде до $a_{18}(s)$ (по другому алгоритму, см. ниже). В литературе мы не нашли явных формул для этих полиномов для произвольных коэффициентов c_n в (2). Встречаются только отдельные (редкие) примеры для конкретных функций.

Предложенный способ вычисления непрерывной итерации использует только один неэлементарный (но хорошо известный) результат о решении разностных уравнений (9) в полиномах Бернулли. Появление этих полиномов также отчасти объясняет, откуда может появиться расходимость в этих рядах. Дело, вероятно, в скорости роста коэффициентов полиномов Бернулли, которая весьма высока.

Заметим, что современные CAS генерируют полиномы Бернулли автоматически, но при необходимости можно воспользоваться и явной формулой

$$B(n, x) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)B(k)x^{n-k},$$

где $B(k)$ – числа Бернулли, $C(n, k)$ – биномиальные коэффициенты.

По нашим оценкам, эффективность данного алгоритма значительно выше, чем у изложенного во Введении. Генератор $\omega(z)$ в случае необходимости вычисляется переразложением формального ряда (7) по степеням s.

Перейдем к изложению другого способа вычисления непрерывной итерации, который по эффективности оказался на несколько порядков лучше изложенных выше. Например, предложенный нами алгоритм вычислил на нашем компьютере 20 полиномов непрерывной итерации для функции $F(z) = \exp(z) - 1$ за 764.64 с, в то время как следующий алгоритм вычислил эти полиномы за 0 с, т.е. за время, которое программа не может измерить (см. также ниже).

Запишем групповое свойство непрерывной итерации (7) $F^{(t)}(F^{(s)}(z)) = F^{(t+s)}(z)$ в явном виде. После некоторых упрощений оно принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)z^n\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^n\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s + t)z^n. \quad (10)$$

У функций $a_n(s)$ не предполагается никаких свойств, кроме дифференцируемости. Продифференцируем тождество (10) по переменной s, а затем положим $s = 0$. Введем новый набор неизвестных величин

$$b_n = \frac{d}{ds}a_n(s)\bigg|_{s=0}.$$

Тогда с учетом $a_n(0) = 0$, $n > 0$, получим тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n (n+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} a_n(t)\right) z^n. \tag{11}$$

Отметим, что таким приемом мы избавились от необходимости возводить бесконечные ряды в степень, что является атрибутом всех существующих способов вычисления непрерывной итерации.

Тождество (11) преобразуется с помощью обычной конволюции рядов. Запишем его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} (m+1) a_m(t) b_{n-m}\right] z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} a_n(t)\right) z^n, \tag{12}$$

и это сразу дает бесконечную треугольную систему дифференциальных уравнений для определения функций $a_n(t)$:

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = b_n + \sum_{m=1}^{n-1} (m+1) a_m(t) b_{n-m}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Так как $a_0(t) \equiv 1$, то $b_0 = 0$, поэтому суммирование в (13) до $n-1$.

Итак, мы получили треугольную систему ОДУ первого порядка с набором неизвестных параметров b_n. Однако нам известны как начальные значения функций $a_n(t)$, т.е. $a_n(0) = 0$, так и краевые условия $a_n(1) = c_n$, поэтому система уравнений (13) однозначно разрешима в полиномах.

Видно, что $b_1 = c_1$, и $a_1(t) = c_1 t$. На шаге n получаем

$$d_n(t) = \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{n-1} (m+1) a_m(s) b_{n-m}\right] ds, \quad b_n = c_n - d_n(1), \tag{14}$$

где $d_n(t)$ – вспомогательная функция. И, окончательно,

$$a_n(t) = b_n t + d_n(t). \tag{15}$$

Напомним, что алгоритм вычисления полиномов непрерывной итерации $a_n(t)$, изложенный в [1], основан на изучении изоморфизмов некоторых групп Ли, ассоциированных с этими полиномами и с полиномами биномиального типа $P_n(x)$. Проведем еще одно сравнение между этими полиномами.

Если подставить $x \to x + y$ в формулу (5), затем продифференцировать ее по y, затем подставить $y = -x$, то получим следующую систему ОДУ для полиномов $P_n(x)$:

$$\frac{d}{dt} P_n(x) = q_n + \sum_{m=1}^{n-1} P_m(x) q_{n-m}, \quad n > 0, \tag{16}$$

где

$$q_n = \frac{d}{dx} P_n(x)\Big|_{x=0}.$$

Таким образом, единственное отличие рекуррентных формул для полиномов $P_n(x)$ и $a_n(t)$ – это наличие множителя $(m+1)$ в формулах (13) и (14), что также приводит к расходимости рядов (7) в отличие от (5).

Вычислительные эксперименты показывают, что формула (6) лишь незначительно более эффективна, чем аналог формулы (15), для вычисления полиномов $P_n(x)$.

Возникает вопрос, существует ли формула прямой рекурсии для $a_n(t)$, аналогичная формуле (6), т.е.

$$a_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} A(n,m,t) a_m(t) c_{n-m}, \quad n > 0,$$

где $A(n,m,t)$ – это полином от t? Ответ отрицательный. На третьем шаге получим $A(3,m,t)$ как рациональную функцию t.

Прежде чем перейти к вычислениям по нашим формулам, сделаем небольшое отступление, рассчитанное на пользователей CAS, так как все эти алгоритмы не предназначены для ручного счета.

Любая современная CAS состоит из ядра, написанного обычно на C++, и основной CAS, написанной уже на специфическом для данной CAS языке.

Ядро CAS состоит в основном из компилятора (точнее, интерпретатора) языка CAS, а также из некоторого набора достаточно простых процедур для работы с достаточно простыми объектами (например, процедур сложения и умножения полиномов с числовыми или символьными коэффициентами, выбора монома из полинома, подстановки одной переменной вместо другой, и т.п.).

Все эти операции обращаются непосредственно к ядру, состоящему из откомпилированных машинных кодов. Поэтому они выполняются на несколько порядков быстрее, чем процедуры, написанные на языке CAS, которые обрабатываются интерпретатором.

Таким образом, везде, где это возможно, следует пользоваться имеющимися “атомарными” операциями вместо альтернативных (и очевидных) языковых конструкций, которые не принадлежат ядру.

В нашем случае операция интегрирования в (14) заведомо не принадлежит ядру ввиду ее общности. Поэтому, чтобы проинтегрировать полином, стоящий под интегралом в (14), следует каждый моном At^n, $n \in \mathbb{N}_0$, заменить на моном $At^{n+1}/(n+1)$.

Программа, реализованная нами в системе Maple по формулам (14), (15), позволяет считать, как мы полагаем, беспрецедентное количество полиномов непрерывной итерации отображений за весьма ограниченное время. Приведем некоторую статистику.

Расчет для символьных коэффициентов c_n дал 18 полиномов $a_n(s)$ примерно за 5 мин. Далее каждый новый полином $a_n(s)$ считается дольше, чем все предыдущие, но здесь основное ограничение – это объем полученных массивов. Для числовых коэффициентов c_n расчет идет на порядки быстрее.

Например, специализированный алгоритм для решения уравнения

$$A(A(z)) = \sin z,$$

данный в [9, A048602], посчитал на нашем компьютере 200 числовых коэффициентов формального ряда $A(z)$ за 13.8 с. Наш алгоритм для непрерывной итерации посчитал 200 полиномов $a_n(s)$ за 3.3 с. Величины $a_n(1/2)$ дают решение данного уравнения. Заметим, что формальный ряд $A(z)$ расходится.

Величины $a_n(1/3)$ дают решение уравнения $A(A(A(z))) = \sin z$; а также $a_n(-1)$ дают коэффициенты разложения для $\arcsin z$, и т.п.

Отметим, что непрерывная итерация $F^{(i)}(z)$, $i^2 = -1$, для вещественных отображений (2) дает пример формальных рядов, обращение которых по формуле Лагранжа эквивалентно комплексному сопряжению их коэффициентов.

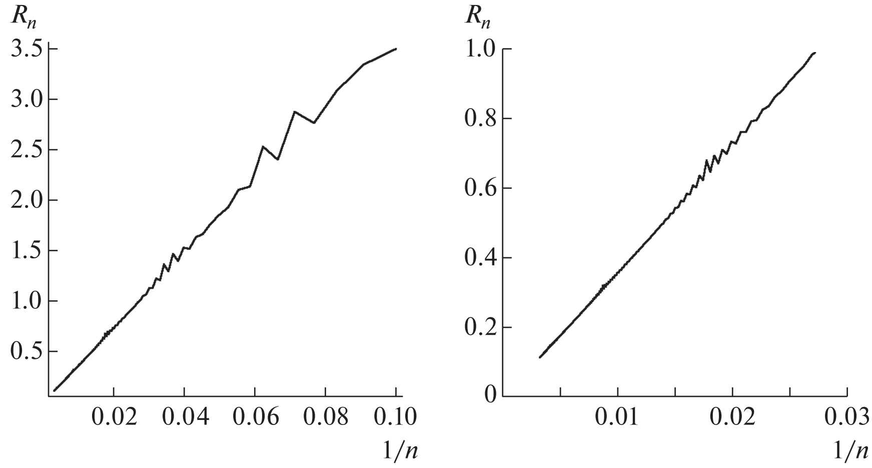
Далее в этом разделе $F_1(z) = \exp(z) - 1$ и $F_2(z) = z - z^2$ используются как модельные функции.

Для $F_1(z)$, очевидно, $c_n = 1/(n+1)!$, $n = 1, 2, \ldots$. Расчет 100 полиномов $a_n(s)$ занял 2.5 с. Следующие 50 полиномов вычислены за 8 с. Следующие 50 (т.е до 200-го) – за 23 с. Далее до 250-го – за 55 с. И, наконец, до 300-го – за 110 с, что дает ясное представление о вычислительной сложности алгоритма. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} F_1^{(s)}(z) = z + \frac{s}{2}z^2 + \left(\frac{s^2}{4} - \frac{s}{12}\right)z^3 + \left(\frac{s^3}{8} - \frac{5s^2}{48} + \frac{s}{48}\right)z^4 + \\ + \left(\frac{s^4}{16} - \frac{13s^3}{144} + \frac{s^2}{24} - \frac{s}{180}\right)z^5 + \left(\frac{s^5}{32} - \frac{77s^4}{1152} + \frac{89s^3}{1728} - \frac{91s^2}{5760} + \frac{11s}{8640}\right)z^6 + \ldots . \end{gathered} \tag{17}$$

И в частном случае $s = 1/2$:

$$F_1^{(1/2)}(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{48} + \frac{z^5}{3840} - \frac{7z^6}{92160} + \frac{z^7}{645120} + \frac{53z^8}{3440640} - \frac{281z^9}{30965760} + \ldots .$$



Фиг. 1. Диаграмма роста коэффициентов формального ряда $(\exp(z) - 1)^{(1/2)}$.

Коэффициенты последнего разложения сначала быстро убывают до члена z^9, потом остаются малы до ≈35-го коэффициента, а затем весьма быстро возрастают. Расчеты, разумеется, проводились в рациональной арифметике.

Напомним, что расходимость формального ряда $F_1^{(1/2)}(z)$ доказана в [2]. Теперь это можно увидеть на графике.

Обозначим $e_n = [z^n]F_1^{(1/2)}(z)$, т.е. e_n — это n-й коэффициент данного формального ряда. Далее пусть $R_n = 1/|e_n|^{1/n}$. Согласно классической формуле Коши–Адамара, нижний предел величин R_n, $n \to \infty$, дает радиус сходимости формального ряда.

На фиг. 1 приведены график функции $R_n(1/n)$ (слева) и его увеличенный фрагмент (справа) для 300 коэффициентов e_n. На фиг. 1 отчетливо видна расходимость этого формального ряда, так как кривые хорошо ложатся на асимптоту $y = 36x$, т.е. $R_n \to 0$.

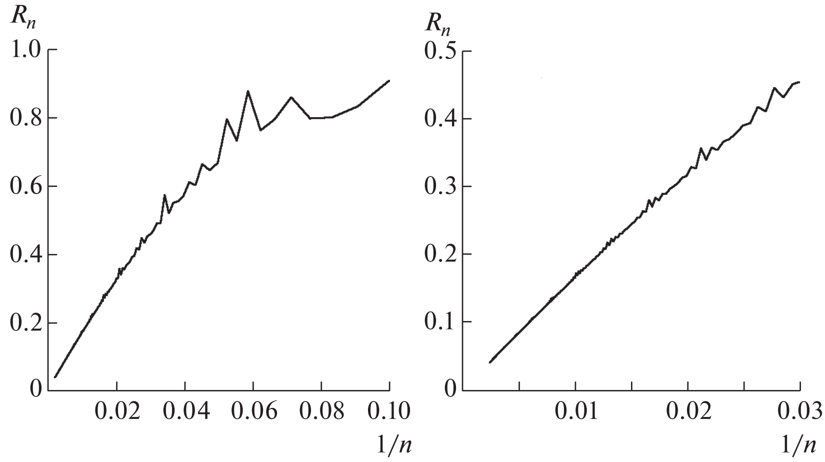
На фиг. 1 также видно одно явление, не описанное ранее в литературе (насколько нам известно). А именно, коэффициенты формального ряда, определенного вполне детерминистским образом, ведут себя хаотически, демонстрируя поведение, подобное перемежаемости. Это явление хорошо изучено в задачах гидродинамики (см., например, [10, с. 183]).

По нашим наблюдениям, такое поведение коэффициентов тейлоровских разложений достаточно сложно устроенных функций (т.е. не только для формальных рядов) может быть типичным. И если этот факт подтвердится, то речь может идти о новом виде детерминистского хаоса.

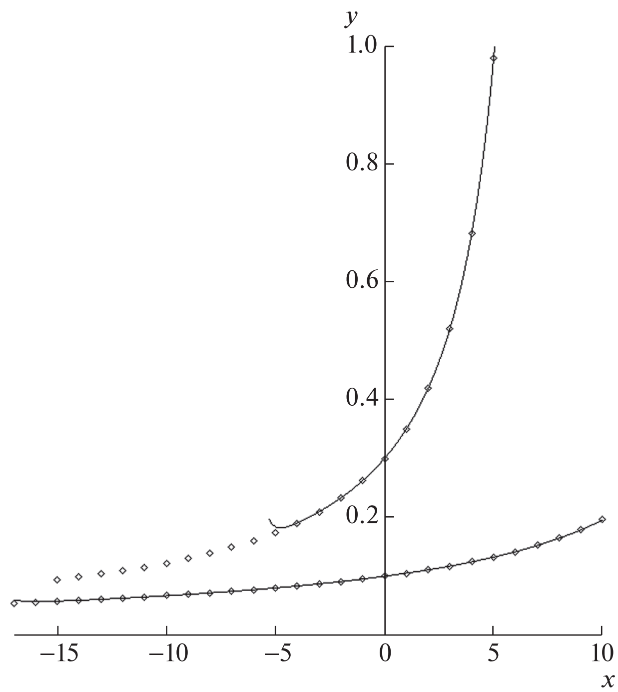
Для непрерывной итерации отображения (1), т.е. для $F_2(z)$, ситуация аналогична показанной на фиг. 1. А именно, формальный ряд $(z - z^2)^{(1/2)}$ расходится (см., например, [11]). Отличие диаграммы роста его коэффициентов (см. фиг. 2 для 400 полиномов $a_n(s)$) от диаграммы на фиг. 1 состоит в том, что величины $R_n(1/n)$ ложатся на асимптоту $y \approx 16x$.

Формальное доказательство расходимости рядов $F_{1,2}^{(1/2)}(z)$ является весьма сложным (см., например, [2]). В разд. 3 мы дадим некоторую информацию, указывающую на расходимость ряда $F_2^{(1/2)}(z)$.

Теперь мы применим полученные формулы для интерполяции рекуррентной последовательности $F_1^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Иными словами, мы будем итерировать функции $z_{n+1} = \exp(z_n) - 1$ и $z_{n+1} = \log(1 + z_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, а затем наложим полученные точки на график непрерывной итерации $y = (\exp(z_0) - 1)^{(x)}$, где $x \in \mathbb{R}$ принадлежит некоторому интервалу. Результат для начальных значений $z_0 = 0.1$ и $z_0 = 0.3$ и 20 полиномов $a_n(x)$ в разложении (17) приведен на фиг. 3.



Фиг. 2. Диаграмма роста коэффициентов формального ряда $(z - z^2)^{(1/2)}$.



Фиг. 3. Непрерывные и дискретные итерации функции $y = (\exp(z_0) - 1)^{(x)}$.

Из фиг. 3 следует, что, несмотря на расходимость формальных рядов непрерывной итерации, они могут быть использованы для интерполяции дискретных итераций.

Однако мы не можем пока утверждать, что нам удалось проинтегрировать дискретное отображение $z_n = F_1^{(n)}(z_0)$.

Во-первых, данная интерполяция носит локальный характер, т.е. сильно зависит от начального значения z_0, которое должно быть достаточно мало. Во-вторых, эта интерполяция не может быть продолжена неограниченно в обе стороны, что видно на фиг. 3. В-третьих, суммируемость расходящихся асимптотических рядов с заданной точностью не может быть гарантирована без дополнительных исследований.

3. ИНТЕГРАЛ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу интерполяции рекуррентной последовательности с более общих, т.е. глобальных, позиций.

В качестве модельной задачи мы рассмотрим отображение (1), которое является частным случаем логистического отображения

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Отображение (1) весьма удобно по двум причинам.

Во-первых, этот случай, как мы полагаем, достаточно репрезентативен. Во-вторых, логистическое отображение очень хорошо изучено, и по нему имеется обширная литература.

В частности, известно, что при $r = 1$ отображение (18) не имеет никаких хаотических режимов при $y_0 \in \mathbb{R}$. Так что, казалось бы, здесь не следует ожидать ничего необычного. Однако, как мы увидим, это совсем не так.

Рассмотрим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n - hy_n^2, \end{aligned} \tag{19}$$

где h – формально введенный малый параметр.

Очевидно, при $h = 1$, $x_0 = 0$ эта система в точности моделирует итерации отображения (1). При этом переменная $x_n = n$ служит дискретным временем в системе (19).

Найдем функцию $H(x, y)$ такую, что итерации системы (19) будут принадлежать линиям уровня $H(x, y) = C$.

Положим формально $x_n = x$, $y_n = y$ и рассмотрим тождество

$$0 = H(x + h, y - hy^2) - H(x, y) = \left(\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\right) h + O(h^2).$$

Очевидно, функция $H(x, y)$ (если существует) не единственна. Поэтому будем выбирать простейшие частные решения. Нетрудно проверить, что

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + hG(x, y) + \ldots$$

убивает член при первой степени h. Для второй степени h получим уравнение

$$0 = H(x + h, y - hy^2) - H(x, y) = \left(y + \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}\right) h^2 + O(h^3),$$

откуда находим

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + \frac{h}{2}\log y^2 + h^2 G_2(x, y) + \ldots .$$

Далее легко убедиться, что будут получаться аналогичные уравнения в частных производных, которые дают формальный ряд по y. Поэтому формальный параметр h исчерпал свою пользу, и далее положим $h = 1$. Таким образом, решение уравнения $H(x + 1, y - y^2) = H(x, y)$ будем искать в виде

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + \frac{1}{2}\log y^2 + U(y),$$

где $U(y)$ – формальный ряд. Эта подстановка после некоторых упрощений дает уравнение для $U(y)$

$$U(y) - U(y - y^2) = \frac{y}{1 - y} + \frac{1}{2}\log(1 - y)^2. \tag{20}$$

Для коэффициентов формального ряда $U(y)$ существует рекуррентное соотношение. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$U(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(-y)^n = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{13}{36}y^3 + \frac{113}{240}y^4 + \frac{1187}{1800}y^5 + \frac{877}{945}y^6 + \ldots .$$

Здесь

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=[(n+1)/2]}^{n-1} C(k, n+1-k)u_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $[x]$ – целая часть x, $C(n, m)$ – биномиальный коэффициент.

Заметим, что первый коэффициент с отрицательным знаком в разложении $U(y)$ имеет степень 11. Далее, как и следует ожидать для подобных биномиальных конволюций, коэффициенты u_n быстро растут, и данный ряд всюду расходится, демонстрируя “перемежаемость”, как на фиг. 1, 2.

Последнее утверждение можно проверить численно, как мы это сделали на фиг. 1, 2. Однако формальное доказательство расходимости ряда для $U(y)$ может быть весьма сложным.

Расходимость этого ряда устанавливается косвенным методом, т.е. можно показать, что $y = 0$ является предельной точкой для особенностей функции $U(y)$, которые лежат в комплексной области. Однако это является предметом отдельной работы.

Функциональное уравнение (20) сингулярно при $y = 1$. Упростим его, избавившись по возможности от сингулярностей на вещественной оси. Сделаем замену

$$U(y) = \frac{1}{2}\log(1-y)^2 + \frac{y}{1-y} - V(y)$$

в уравнении (20). Получим уравнение для функции $V(y)$:

$$V(y - y^2) - V(y) = \log(y^2 - y + 1) + \frac{y(1-y)}{y^2 - y + 1}. \tag{21}$$

Отметим, что уравнение (21) регулярно на всей вещественной оси, так как $y^2 - y + 1 \neq 0$ при $y \in \mathbb{R}$. Поэтому можно показать, что функция $V(y)$ однозначно вычислима на всей вещественной оси, причем с неограниченной и гарантированной точностью. Приняв пока этот факт на веру, получаем окончательно, что

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{2}\log[y^2(1-y)^2] + \frac{y^2 - y + 1}{y(1-y)} - V(y) = \text{const} \tag{22}$$

является первым интегралом логистического отображения (1), дающим его глобальную интерполяцию для вещественного времени x, а также при определенных ограничениях и для комлексных x.

Уравнение (22) можно интерпретировать как решение уравнения для непрерывной итерации $y = (z - z^2)^{(x)}$ относительно x, где $z = y_0$ играет роль константы интегрирования в (22). Например, возьмем нулевую итерацию $x = 0$, $y_0 = 0.1$. Получим $H(0, y_0) = C = 7.75116409701$. Тогда $H(1, y_1) = H(2, y_2) = \ldots = C$, а также $H(1/2, y_{1/2}) = C$, где $y_{1/2} = (y_0 - y_0^2)^{(1/2)}$. Последнее равенство выполняется с некоторой погрешностью ($\approx 10^{-12}$), которая сильно зависит от значения y_0.

Отметим, что правильное суммирование расходящихся рядов – это отдельная задача, которую мы здесь не рассматриваем (см., например, [12]).

Из уравнения (22) можно сделать некоторые выводы, даже не зная пока всех свойств функции $V(y)$. Например, найдем асимптотику отображения (1) при $0 < z_0 < 1$, обещанную во Введении.

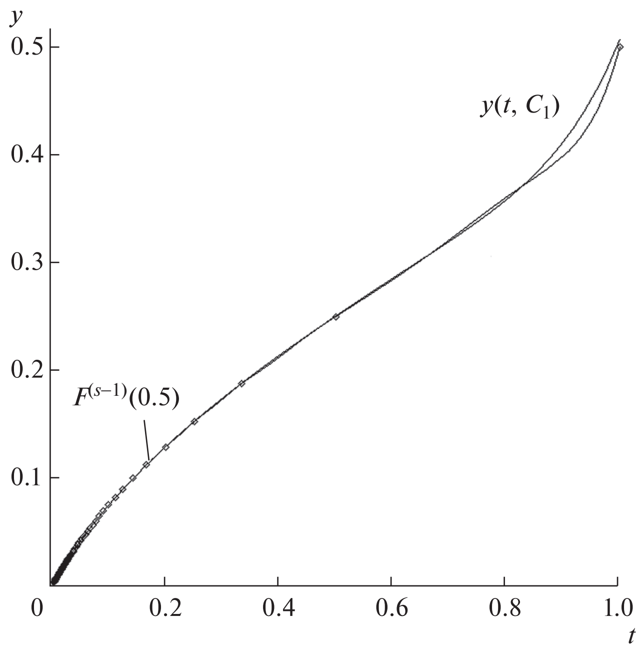
Поскольку $z_n = y_n \to 0$, то удобно взять время $t = 1/x$, как мы сделали на фиг. 1. Положим $H(x, y) = C$, тогда имеем

$$t = y + (C - \log y)\, y^2 - \left[\frac{1}{2} - (C - \log y)^2\right] y^3 + \ldots\,. \tag{23}$$

Этот ряд может быть продолжен неограниченно, так как коэффициенты $[y^n]V(y)$ известны.

Таким образом, мы получаем так называемый *пси-ряд* (см. [13, с. 249]), который к тому же заведомо расходится в силу расходимости ряда для $V(y)$.

Осталось обратить ряд (23), что можно, конечно, сделать средствами CAS. Но можно также применить алгоритм непрерывной итерации.



Фиг. 4. Асимптотика логического отображения при $0 < z_0 < 1$.

Для этого коэффициенты c_n определяем так, как будто $\log y$ – это константа. Затем вычисляем полиномы $a_n(s)$, как показано в разд. 2. Затем подставляем $s = -1$ и получаем обращение ряда $y = t + \ldots$, но с $\log y$ в правой части вместо $\log t$. Поэтому далее надо просто сделать несколько подстановок полученного ряда в себя, что обеспечит $\log t$ в правой части. В результате получим

$$y = t + (\log t - C)t^2 + \left[\log^2 t + (1 - 2C)\log t + C^2 - C + \frac{1}{2}\right]t^3 + \\ + \left[\log^3 t + \left(\frac{5}{2} - 3C\right)\log^2 t + \left(3C^2 - 5C + \frac{5}{2}\right)\log t - C^3 + \frac{5}{2}C^2 - \frac{5}{2}C + \frac{5}{6}\right]t^4 + \ldots . \tag{24}$$

Данная формула (посчитанная нами до члена t^5) используется следующим образом.

Возьмем начальные значения отображения (1): $y = y_1 = 0.5$ при времени $x = t = 1$. Тогда $H(1, 0.5) = C_1 \approx 0.77261429$ получим прямо по степенному ряду для $V(y)$ (точное значение $C_1 = 0.7679937861362$). Далее посчитаем 300 точек итерации отображения (1) и построим график массива $[1/n, y_n]$, $n = 1, 2, \ldots, 300$. Затем построим график функции (24), $y = y(t, C_1)$, и наложим графики на одну фигуру. В результате (см. фиг. 4) видим хорошее совпадение графиков, несмотря на расходимость ряда (24) и приближенное значение константы C_1.

Также на фиг. 4 показан график непрерывной итерации отображения (1) как параметризованной кривой $\{1/s, F^{(s-1)}(0.5), s \in [1, 6]\}$, $F(z) = z - z^2$, для 20 полиномов $a_n(s)$. Видно, что вначале кривая непрерывной итерации хорошо ложится на массив точек, но при $s > 5$ становится непригодной. Причем увеличение числа полиномов $a_n(s)$ здесь не поможет ввиду расходимости рядов непрерывной итерации.

Для изучения асимптотики отображения (1) при $|z_n| \to \infty$ некоторые свойства функции $V(y)$ понадобятся нам уже здесь.

Подстановка $y \to 1 - y$ в уравнение (21) показывает, что функция $V(y)$ является четной по отношению к точке $y = 1/2$. В частности, $V(0) = V(1) = 0$, $V(y) = V(1 - y)$. Поэтому (21) можно переписать в виде

$$V(y^2 - y + 1) - V(y) - \log(y^2 - y + 1) - \frac{y(1 - y)}{y^2 - y + 1} = 0.$$

Непосредственно из этого уравнения можно найти асимптотику функции $V(y)$ при $y \to \infty$. Опуская промежуточные выкладки, получаем, что при $y \to +\infty$

$$V(y) = A + 2\log y - \frac{\log\log y}{\log 2} - \frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{2\log 2\log y}\right) - \frac{1}{y^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8\log 2\log^2 y}\right) + O\left(\frac{1}{y^3}\right),$$

где A – однозначно определяемая константа, которую мы вычислим, когда научимся вычислять функцию $V(y)$ на вещественной оси.

Учитывая, что $y_n \to -\infty$ при начальном значении y_0 вне интервала $[0,1]$, а также, что $V(y) = V(1-y)$, получаем

$$n = b + \frac{\log\log|y_n|}{\log 2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|y_n|\log 2\log|y_n|} + O\left(\frac{1}{y_n^2}\right),$$

где b – некоторая константа, определяемая начальными данными. Поскольку $|y_n|$ растет очень быстро, то ограничимся первым членом этого разложения. Окончательно получаем

$$|y_n| \asymp \exp(2^{n-b}).$$

Легко проверить, что массив точек $\{n, \log\log|y_n|\}$ хорошо ложится на линейную функцию $y = (x-b)\log 2$, если констату b вычислить по данной асимптотике для 2-й или 3-й итераций отображения $y_{n+1} = y_n - y_n^2$.

Такого рода взрывной рост, когда функция растет быстрее экспоненты, но не имеет вертикальной асимптоты, может описывать увеличение популяции организмов на начальной стадии, когда внешние факторы ограничения роста еще не включились.

В заключение заметим, что асимптотики итерационных последовательностей мало изучены. Например, хорошо известно, что итерации синуса $y_{n+1} = \sin y_n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, неизбежно стремятся к нулю. Но в литературе вряд ли удастся найти информацию о том, как именно они стремятся к нулю.

Даже для логистического отображения (1) удается найти только некоторые оценки роста (убывания).

Как мы видели, эта задача весьма нетривиальна. Однако теперь, имея некоторые представления о том, как должна выглядеть такая асимптотика, ее можно, в принципе, вычислить методом неопределенных коэффициентов. Например, для итераций синуса $y_{n+1} = \sin y_n$, $y_0 > 0$, имеем

$$y_{1/t} = \sqrt{3t} + \left(A + \frac{3\sqrt{3}}{10}\log t\right)t^{3/2} + \left[\frac{79\sqrt{3}}{700} + \frac{3A}{5} + \frac{\sqrt{3}A^2}{2} + \left(\frac{9\sqrt{3}}{50} + \frac{9A}{10}\right)\log t + \frac{27\sqrt{3}}{200}\log^2 t\right]t^{5/2} + \ldots,$$

где A – некоторая константа, определяемая начальными данными, а функция $y_{1/t}$ интерполирует последовательность $[t = 1/n, y_n]$, $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Labelle G.* Sur l'Inversion et l'Iteration Continue des Series Formelles // Europ. J. Combinatorics. 1980. V. 1. P. 113–138.
2. *Baker I.N.* Zuzammensetzungen ganzer Funktionen // Math. Zeitschr. 1958. Bd. 69. S. 121–163.
3. *Thron W.J.* Entire solutions of a functional equation // Canadian J. Math. 1956. V. 8. P. 47–48.
4. *Jabotinsky E.* Analytic Iteration // Transact. Am. Math. Soc. 1963. V. 108. № 3. P. 457–477.
5. *Rota G.-C., Mullin R.* On the foundations of combinatorial theory, graph theory and applications. New York: Academic Press, 1970. P. 167–213.
6. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions (3rd ed.) Dordrecht-Holland: D. Reidel Publ. Co., 1974.
7. *Knuth D.E.* Convolution Polynomials // [arXiv:math/9207221v1]. 1992; http://arXiv.org/abs/math/9207221v1
8. *Euler L.* Introduction to the analysis of the infinite (Blanton J.D., tr.). New York: Springer, 1988, 1990.
9. Sloane online encyclopedia of integer sequences, http://oeis.org.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
11. *Levin M.* MSc. Thesis. Israel Institute of Technology, 1960.
12. *Варин В.П.* Факториальное преобразование некоторых классических комбинаторных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 59. № 6. С. 1747–1770.
13. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. New-York: John Wiley & Sons, 1976.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 926–935

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.518

МЕТОД БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ ОТ СЛОЖНЫХ ИЛИ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

О. В. Лешонков[1,*], Е. А. Соболева[2,], А. Д. Чернышов[2,***]**

[1] 394033 Воронеж, ул. Старых большевиков, 5, АО НИИЭТ, Россия

[2] 394036 Воронеж, пр-т Революции, 19, ВГУИТ, Россия

**e-mail: chernyshovad@mail.ru*

***e-mail: sobol5661@yandex.ru*

****e-mail: leekripper@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2018 г.
Переработанный вариант 16.11.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Показано, что представление непрерывной и достаточно гладкой сложной или неявно заданной функции на некотором конечном отрезке при помощи метода быстрых синус-разложений позволяет приближенно вычислять определенные интегралы с переменным верхним пределом в любой точке отрезка с высокой точностью и минимальными численными затратами на ЭВМ. Приводятся аналитические формулы квадратур и алгоритм применения метода быстрых синус-разложений, состоящий из простых операций, удобных для его реализации с примерами. Точность метода быстрых синус-разложений быстро повышается как с увеличением количества учитываемых членов в ряде Фурье, так и при повышении порядка граничной функции. Библ. 13. Табл. 4.

Ключевые слова: быстрые разложения, неявно заданная или сложная функция, определенный интеграл, переменный верхний предел, граничная функция.

DOI: 10.31857/S0044466921060065

1. ВВЕДЕНИЕ

Известны различные методы вычисления сложных интегралов в классическом смысле с переменным верхним пределом, достаточно подробно изложенные в [1]. В [2] приведены квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности, когда используются значения функции в смещенных точках по отношению к равномерно нанесенным узлам данного отрезка. В [3], [4] рассмотрены интегралы от функций с некоторыми особенностями. Для вычисления интегралов часто применяют различные разложения. Оценка погрешности разложений в L_2 приведена в [5]. В [6] используются быстрые синус-разложения, когда функцию представляют суммой граничной функции четного порядка M_{2p} специальной конструкции и рядом Фурье, исследуется сходимость ряда, дается оценка погрешности. Скорость сходимости такого ряда значительно повышается при увеличении порядка $2p$ граничной функции.

При рассмотрении более простой проблемы – вычисления интегралов с постоянными пределами, для прикладных целей чаще используется метод Симпсона, или пакет Maple. Известен также метод Ромберга, как техника, позволяющая повышать точность вычислений интегралов путем составления определенной линейной комбинации их значений, полученных на разных сетках интегрирования [7]. В методе Клиншоу–Куртиса предлагается вводить замену переменной и затем использовать классические ряды Фурье [8].

Ниже предлагается новый *метод быстрых синус-разложений* (МБСР), основанный на быстрых разложениях [6], который эффективен по своей простоте и особенно высокой точности и удобен для практического применения. Это будет видно из численных экспериментов. Метод применим для решения многомерных краевых задач, позволяет решать различные сложные краевые и нелинейные интегродифференциальные задачи [9], [10]. В методе используется поточечный способ вычисления коэффициентов Фурье.

В связи с использованием в данной работе метода коллокаций следует отметить работу [11], в которой решается одна из сложных задач для уравнений Навье–Стокса. Здесь используется комплексный метод, состоящий из следующих действий: метод коллокаций+наименьших квадратов+итерационный+вычисление поправок по методу Крылова для организации итераций. При этом используются разложения по мономам с некоторыми степенями. Каждый из перечисленных шагов улучшает конечный результат, который получается с высокой точностью. Но сравнить его с предлагаемым методом быстрых разложений не представляется возможным, так как неясно, каким образом метод из [11] можно применить для нахождения неявно заданной функции при любых $x \in [0,a]$, а также и для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом в любой точке заданного отрезка.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ ОТ ФУНКЦИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ПЕРВООБРАЗНАЯ НЕ ВЫРАЖАЕТСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЛИ СПЕЦФУНКЦИИ

Функцию $f(x)$, $x \in [0,a]$, будем называть *сложной*, если на данном отрезке первообразная в точном виде не выражается конечным образом через элементарные или спецфункции.

Пусть задана сложная функция одной переменной

$$y = f(x) \in L_2^{(2p+1)}, \quad 0 \le x \le a, \tag{1.1}$$

где p – некоторое заданное целое число. Здесь рассматриваются только непрерывные гладкие функции вместе со своими производными до порядка $(2p+1)$ включительно. Разрывы не допускаются в связи с тем, что в работе используются ряды Фурье, которые в случае разрывных функций медленно сходятся и не допускают почленное дифференцирование, что затрудняет их применение в исследованиях прикладного характера. Запишем интеграл:

$$\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,a]. \tag{1.2}$$

Полагаем, что функция $f(x)$ сложная и интеграл (1.2) невозможно представить точно в явном конечном виде через элементарные или спецфункции. Подобные интегралы являются особенно проблемными. Для решения таких задач на отрезке $x \in [0,a]$ представим $f(x)$ быстрым разложением [6] с оператором Ch_{2p}:

$$\begin{gathered} f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{2,m} \sin m\pi\frac{x}{a}, \quad M_2(x) = f(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + \\ + f''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + f''(a)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right), \end{gathered} \tag{1.3}$$

где для определенности и простоты изложения вначале положим $p = 1$, $f_{2,m}$ – коэффициенты Фурье для разности $f(x) - M_2(x)$, N – количество учитываемых членов в ряде Фурье, $M_2(x)$ – граничная функция, конструкция которой обеспечивает быструю сходимость ряда Фурье и потому N можно брать небольшим для обеспечения высокой точности вычисления интеграла.

Функция $M_{2p}(x)$ с четным индексом внизу называется *граничной*, так как ее коэффициенты определяются через значения $f(x)$ и ее производных четного порядка от 0 до $2p$ включительно на концах отрезка.

Скорость сходимости ряда Фурье в (1.3) существенно возрастает при увеличении порядка $2p$ используемой граничной функции $M_{2p}(x)$. Быстрое разложение (1.3) обладает замечательными свойствами: оно быстро сходится и его можно почленно трижды дифференцировать, ряд Фурье при этом остается сходящимся на всем отрезке $[0,a]$. Сравнение метода быстрых синус-разложений с классическим синус-разложением Фурье на примере с функцией $(1+x)^{10}$ на отрезке $[0,1]$ показывает, что при использовании МБСР для $N = 3$ погрешность будет порядка 10^{-3}, тогда как в случае рядов Фурье такая точность достигается только при $N > 2000$. Так как $f(x)$ – сложная функция, то непосредственно применить МБСР не удается из-за невозможности вычисления коэффициентов $f_{2,m}$ – их интегральными выражениями Фурье. Поэтому ниже предлагается поточечный способ вычисления $f_{2,m}$.

Для этого на отрезок $[0,a]$ нанесем равномерную сетку с N внутренними точками и быстрое разложение функции $f(x)$ из (1.3) заменим на другое

$$f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{2,m}^{*} \sin m\pi \frac{x}{a}, \tag{1.4}$$

где выражение $M_2(x)$ остается прежним, но коэффициенты $f_{2,m}^{*}$ вычисляются иным способом – поточечным из алгебраической системы, когда равенство (1.4) записывается в узлах равномерной сетки $\{x_k\}$:

$$\sum_{m=1}^{N} f_{2,m}^{*} \sin m\pi \frac{x_k}{a} = \varphi_2(x_k), \quad \varphi_2(x_k) = f(x_k) - M_2(x_k), \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1 \div N. \tag{1.5}$$

Ее решение удается представить в явном конечном виде. Для этого левую и правую части равенства (1.5) умножим на $\sin n\pi\, x_k/a$ и просуммируем по k:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(f(x_k) - M_2(x_k)\right) \sin n\pi \frac{x_k}{a} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} f_{2,m}^{*} \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a}. \tag{1.6}$$

В [12] доказано, что множество $\{\sin n\pi\, x_k/a\}$, $(n,k) = 1 \div N$ сохраняет свойство ортогональности на бесконечном отрезке, имеющее вид

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{N} \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad (m,n) = 1 \div N, \\ \sum_{k=1}^{N} \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a} = \sum_{k=1}^{N} \sin^2 n\pi \frac{x_k}{a} \quad \text{при} \quad m = n. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Можно показать, что свойство (1.7) остается верным и для конечного отрезка $x \in [0,a]$. Кроме (1.7), отметим еще одно важное предельное свойство коэффициентов $f_{2,m}^{*}$ и $f_{2,m}$ при использовании быстрых разложений и равномерном разбиении отрезка $[0,a]$ на мелкие части с N внутренними точками:

$$\lim_{N\to\infty} f_{2,m} = \lim_{N\to\infty} f_{2,m}^{*} \quad \forall m = 1 \div N. \tag{1.8}$$

Теперь из (1.6) при помощи свойства (1.7) найдем коэффициенты

$$f_{2,m}^{*} = \sum_{k=1}^{N} \left(f(x_k) - M_2(x_k)\right) \sin m\pi \frac{x_k}{a} \Bigg/ \sum_{k=1}^{N} \sin^2 m\pi \frac{x_k}{a}, \quad m = 1 \div N. \tag{1.9}$$

Свойство (1.8) позволяет предположить: если для рассматриваемых гладких функций разложение (1.3) с рядом Фурье в его правой части быстро сходится, то и разложение (1.4), где $f_{2,m}^{*}$ определяются из поточечной системы (1.9), тоже быстро сходится. Это предположение подтверждается многочисленными численными экспериментами, которые приводятся ниже. Доказательство такого свойства приводится в [13].

Представляя $f(x)$ поточечным равенством (1.4), где $f_{2,m}^{*}$ находятся по формуле (1.9), с высокой точностью получим искомое выражение для определенного интеграла (1.2) с переменным верхним пределом:

$$\begin{gathered} \int_0^x f(t)\,dt = f(0)\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + f(a)\frac{x^2}{2a} + f''(0)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6}\right) + \\ + f''(a)\left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12}\right) + \sum_{m=1}^{N} \frac{a}{m\pi} f_{2,m}^{*}\left(1 - \cos m\pi \frac{x}{a}\right), \quad x \in [0,a]. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Таблица 1

$\Delta f(x)$	$\Delta f'(x)$	$\Delta f''(x)$
$\Delta = 2.38\times10^{-3}$ $x = 1$	$\Delta = 7\times10^{-5}$ $x = 0.96$	$\Delta = 4.98\times10^{-4}$ $x = 1$

Правая часть (1.10) допускает возможность дифференцирования до второго порядка включительно. С ростом порядка производной относительная погрешность растет (см. табл. 1).

В табл. 1 приведены максимальные относительные погрешности при использовании быстрого разложения с оператором Ch_2 второго порядка при $N = 10$ для функции $f(x) = (1+x)^{10}$.

Точность вычисления интеграла (1.10) значительно повышается при использовании в быстром разложении (1.3) вместо $M_2(x)$ граничной функции $M_4(x)$ более высокого (четвертого) порядка

$$\begin{aligned} f(x) &= M_4(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{4,m}^{*} \sin m\pi\frac{x}{a}, \quad M_4(x) = f(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + \\ &+ f''(0)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right) + f''(a)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right) + \\ &+ f^{(4)}(0)\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120a}-\frac{ax^3}{18}+\frac{a^3x}{45}\right) + f^{(4)}(a)\left(\frac{x^5}{120a}-\frac{ax^3}{36}+\frac{7a^3x}{360}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Введем обозначения

$$\varphi_4(x_k) = f(x_k) - M_4(x_k), \quad \varphi_4(x_k) = \sum_{m=1}^{N} f_{4,m}^{*} \sin m\pi\frac{x_k}{a}, \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1\div N. \tag{1.12}$$

Используя обозначение $\varphi_4(x_k)$, данное в первом равенстве (1.12), коэффициенты $f_{4,m}^{*}$, подобно (1.9), можно записать в виде

$$f_{4,m}^{*} = \sum_{k=1}^{N} \varphi_4(x_k)\sin m\pi\frac{x_k}{a} \Bigg/ \sum_{k=1}^{N} \sin^2 m\pi\frac{x_k}{a}, \quad m = 1\div N. \tag{1.13}$$

Подставляя $f(x)$ и $M_4(x)$ из (1.11) в (1.2), после интегрирования будем иметь формулу для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом, когда используется БСР с оператором Ch_4:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= f(0)\left(x-\frac{x^2}{2a}\right) + f(a)\frac{x^2}{2a} + f''(0)\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right) + \\ &+ f''(a)\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right) + f^{(4)}(0)\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^6}{720a}-\frac{ax^4}{72}+\frac{a^3x^2}{90}\right) + \\ &+ f^{(4)}(a)\left(\frac{x^6}{720a}-\frac{ax^4}{144}+\frac{7a^3x^2}{720}\right) + \sum_{m=1}^{N}\frac{a}{m\pi} f_{4,m}^{*}\left(1-\cos m\pi\frac{x}{a}\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Квадратура (1.14) допускает вычисление производных до четвертого порядка включительно, но при этом растет относительная погрешность (см. табл. 2), составленной для $f(x) = (1+x)^{10}$ при $N = 10$.

Таблица 2

$\Delta f(x)$	$\Delta f'(x)$	$f''(x)$	$\Delta f'''(x)$	$\Delta f^{(4)}(x)$
$\Delta = 1.1\times 10^{-5}$ $x = 1$	$\Delta = 3.38\times 10^{-7}$ $x = 0.96$	$\Delta = 2.1\times 10^{-6}$ $x = 1$	$\Delta = 1.85\times 10^{-5}$ $x = 0.96$	$\Delta = 1.8\times 10^{-4}$ $x = 1$

Скорость сходимости ряда для квадратуры еще более повышается при использовании в (1.11) вместо $M_4(x)$ граничной функции $M_6(x)$, т.е.

$$\begin{gathered} f(x) = M_6(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{6,m} \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ M_6(x) = f(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + f''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \\ + f''(a)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + f^{(4)}(0)\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right) + \\ + f^{(4)}(a)\left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right) + f^{(6)}(0)\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!a} - \frac{ax^5}{4\times 90} + \frac{a^3x^3}{3\times 90} - \frac{4a^5x}{6!\times 3}\right) + \\ + f^{(6)}(a)\left(\frac{x^7}{7!a} - \frac{ax^5}{6!} + \frac{7a^3x^3}{36\times 60} - \frac{31a^5x}{7!\times 3}\right). \end{gathered} \tag{1.15}$$

Вспомогательную функцию $\varphi_6(x_k)$, подобно (1.12), определим равенством

$$\varphi_6(x_k) = f(x_k) - M_6(x_k), \quad \varphi_6(x_k) = \sum_{m=1}^{N} f_{6,m}^{*} \sin m\pi \frac{x_k}{a}, \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1 \div N. \tag{1.16}$$

Коэффициенты $f_{6,m}^{*}$, по аналогии с (1.13), найдем из выражения

$$f_{6,m}^{*} = \sum_{k=1}^{N} \varphi_6(x_k) \sin m\pi \frac{x_k}{a} \Bigg/ \sum_{k=1}^{N} \sin^2 m\pi \frac{x_k}{a}, \quad m = 1 \div N. \tag{1.17}$$

При использовании разложения (1.15) интеграл (1.2) с переменным верхним пределом представляется формулой

$$\begin{gathered} \int_0^x f(t)\,dt = f(0)\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + f(a)\frac{x^2}{2a} + f''(0)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6}\right) + f''(a)\left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12}\right) + \\ + f^{(4)}(0)\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{72} + \frac{a^3x^2}{90}\right) + f^{(6)}(0)\left(\frac{x^7}{7\times 6!} - \frac{x^8}{8\times 7!a} - \frac{ax^6}{24\times 90} + \frac{a^3x^4}{12\times 90} - \frac{4a^5x^2}{6\times 6!}\right) + \\ + f^{(6)}(a)\left(\frac{x^8}{8\times 7!a} - \frac{ax^6}{6\times 6!} + \frac{7a^3x^4}{36\times 240} - \frac{31a^5x^2}{6\times 7!}\right) + \\ + f^{(4)}(a)\left(\frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{144} + \frac{7a^3x^2}{720}\right) + \sum_{m=1}^{N} \frac{a}{m\pi} f_{6,m}^{*}\left(1 - \cos m\pi \frac{x}{a}\right). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Выражение квадратуры (1.18) можно дифференцировать 6 раз, при этом ряды Фурье будут оставаться сходящимися. С ростом порядка производной относительная погрешность возрастает (см. табл. 3, составленную для $f(x) = (1+x)^{10}$ при $N = 10$).

Из табл. 3 видно, что производная шестого порядка при $N = 10$ вычисляется слишком грубо, поэтому для ее вычисления необходимо брать $N > 10$.

При одинаковом значении N квадратура (1.14) более точная по сравнению с (1.10), а квадратура (1.18) еще точнее по сравнению с (1.14). То есть с ростом порядка $2p$ оператора Ch_{2p}, как и с увеличением N — числа учитываемых членов в рядах Фурье, погрешность быстро уменьшается.

Таблица 3

$\Delta f''(x)$	$\Delta f'''(x)$	$\Delta f^{(4)}(x)$	$\Delta f^{(5)}(x)$	$\Delta f^{(6)}(x)$
$\Delta = 4.15\times10^{-9}$ $x = 1$	$\Delta = 3.71\times10^{-8}$ $x = 0.96$	$\Delta = 3.12\times10^{-7}$ $x = 1$	$\Delta = 3.55\times10^{-6}$ $x = 0.96$	$\Delta = 4.93\times10^{-5}$ $x = 1$

Таблица 4

Функция	Метод		Метод		Метод	
	Симпсон	МБСР Ch_2	Симпсон	МБСР Ch_4	Симпсон	МБСР Ch_6
$\sin(0.3\pi x)$	$\Delta = 4.66\times10^{-9}$		$\Delta = 2.44\times10^{-12}$		$\Delta = 1.42\times10^{-15}$	
N	28	10	170	10	194	10
$\sin(5.3\pi x)$	$\Delta = 5.45\times10^{-4}$		$\Delta = 9.1\times10^{-5}$		$\Delta = 1.677\times10^{-5}$	
N	20	10	30	10	42	10
$(1+x)^{10}$	$\Delta = 2.381\times10^{-3}$		$\Delta = 1.1\times10^{-5}$		$\Delta = 2.548\times10^{-8}$	
N	24	10	86	10	378	10

По этой причине предложенный здесь МБСР целесообразно применять для проведения высокоточных расчетов, например, космического характера.

Для вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций в [1] предлагается пошаговый метод, когда интеграл вычисляется на всех предыдущих шагах перед данным значением переменной x. Но тогда полученная квадратура не будет допускать вычисление от нее производной второго, или более высокого порядка.

Ниже в таблицах приведено сравнение данного в работе метода быстрых синус-разложений с методом Симпсона, когда для рассматриваемой подынтегральной функции $f(x)$ существует первообразная и оба предела постоянные $[0, 1]$. Это дает возможность сравнить данные два метода с точным значением интеграла. В первом примере выбрана гладкая функция $\sin 0,3\pi x$, во втором примере быстро осциллирующая $\sin 5.3\pi x$, в третьем функция, имеющая участок резкого возрастания $(1+x)^{10}$. Сравнения сделаны для случаев, когда в быстрых разложениях используются три граничные функции четных порядков M_2, M_4, M_6. При этом количество внутренних точек бралось одинаковым и равным $N = 10$. Для метода Симпсона величина N подбиралась так, чтобы абсолютная погрешность Δ была одинаковой с методом БСР. Результаты приведены в табл. 4.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) погрешность при использовании МБСР с оператором Ch_6 на несколько порядков меньше по сравнению с методом Симпсона (более 100 раз и еще больше при использовании операторов высокого порядка);

2) с ростом порядка оператора Ch_{2p} при неизменном N погрешность быстро уменьшается;

3) с увеличением количества членов N в ряде Фурье (1.15) погрешность также быстро уменьшается.

Алгоритм нахождения определенного интеграла
от сложной функции с переменным верхним пределом

1. Считаем заданными гладкую функцию $f(x)$ и размер отрезка a.

2. Учитывая данные в таблицах или другие данные подобного характера, выберем значение порядка $2p$ граничной функции и число учитываемых членов N в ряде Фурье.

3. Внутри отрезка $[0,a]$ равномерно нанесем N внутренних точек $x_k = ak/(N+1)$, $k = 1\div N$.

4. Вычислим значения функции $\varphi_{2p}(x_k)$ во внутренних расчетных точках $x_k = ak/(N+1)$, $k = 1 \div N$. Вид функции $\varphi_{2p}(x_k)$ представлен в (1.5) при $p = 1$, в (1.12) при $p = 2$, в (1.16) при $p = 3$.

5. Коэффициенты Фурье $f^{*}_{2\mathrm{p},m}$ найдем по одной из формул (1.9), (1.13) или (1.17), в зависимости от значения порядка $2p$.

6. Определенный интеграл (1.2) вычислим по соответственной формуле (1.10), (1.14) или (1.18), имеющей явный и удобный для вычислений вид.

Численное сравнение метода БСР с методами Maple позволяют сделать следующие выводы.

1. Современные методы Maple вычисляют определенный интеграл с постоянными пределами от сложных функций с точностью до 300 знаков и более после запятой, тогда как метод БСР – с точностью до 35 и более знаков.

2. Однако столь высокая точность 300 знаков при рассмотрении прикладных задач, по-видимому, является излишней. Подавляющее большинство прикладного характера, включая и космические, не нуждаются в столь высокой точности, так как входные данные в подобных случаях (упругие постоянные, коэффициенты вязкости, теплопроводности, характеристики сил воздействия на космический корабль при запуске, или в космосе и т.д.) не могут быть определены с такой высокой точностью.

3. В случае интеграла с переменным верхним пределом методы Maple позволяют его вычислить только от элементарных или спецфункций, заложенных в его базу данных. Если же подынтегральная функция сложная, например $f(x) = x^2 \sin\left(3 + \ln\left(1 + x^2\right)\right)$, то Maple отказывается от вычисления, тогда как метод БСР легко справляется с проблемой. Лишь бы $f(x)$ была достаточно гладкой и допускала ее представление быстрым разложением.

4. Метод быстрых синус-разложений имеет еще одно важное преимущество. Если функция задана неявно, или требуется вычислить интеграл от сложной функции с переменным верхним пределом, то Maple, если сможет в соответствии со своей базой данных, выдаст ответ в сложном виде через спецфункции. Тогда как метод БСР во всех подобных случаях выдает ответ через элементарные функции с высокой точностью. Это создает существенные удобства в дальнейших исследованиях, где используются подобные интегралы.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ В ЯВНОМ “АНАЛИТИЧЕСКОМ” ВИДЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Решение поставленной здесь проблемы представляет определенный интерес при рассмотрении различных прикладных вопросов, а также при необходимости вычисления определенных интегралов с переменным верхним пределом или при проведении других исследований. На первый взгляд постановка самой задачи о вычислении подобного интеграла от неявно заданной функции является противоречивой. Ведь функция в явной форме отсутствует и потому как же можно вычислить подобный определенный интеграл, да еще и с переменным верхним пределом. В классической литературе и научных статьях данная проблема вообще не обсуждается. Вполне возможно, что здесь она рассматривается впервые. В этой связи вначале решим вспомогательную задачу о приближенном представлении неявно заданной функции в явном “аналитическом” виде при помощи метода быстрых разложений [5]. Это позволит вычислять $f(x)$ и ее производные до $(2p+1)$-го порядка включительно в любой внутренней точке и на концах отрезка $[0, a]$.

Обычно под аналитической функцией понимают функцию, которая непрерывна вместе со всеми своими производными любого конечного порядка в области определения. Ниже мы будем называть функцию *аналитической*, если она непрерывна вместе со всеми своими производными до некоторого заданного конечного m-го порядка включительно на данном отрезке $[0, a]$ и ее можно вычислить не только в узловых точках, но и при любом $x \in [0, a]$. Подобное определение необходимо в связи с применением теории быстрых разложений, так как здесь используются ряды Фурье, допускающие почленное дифференцирование некоторое ограниченное заданное число раз. Поэтому над словом «аналитическая» в дальнейшем кавычки будем опускать.

Пусть некоторая функция

$$y = f(x) \in L_2^{(2p+1)} \quad \forall x \in [0,a], \quad S^*(f) \tag{2.1}$$

задана на отрезке $x \in [0,a]$ неявной формой:

$$F(x,y) = 0, \quad F(x,y) \in C^{(2p+1)}(\Omega_{\square}), \quad (x,y) \in \Omega_{\square}, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b. \tag{2.2}$$

Здесь $2p+1$ – целое число. Под $S^*(f)$ в (2.1) будем понимать некоторое дополнительное условие, позволяющее выделить единственное из множества возможных решений уравнения $F(x_k, y_k) = 0$ относительно y_k при любом заданном $0 \le x_k \le a$. Предположим, что неявная функция (2.1), определенная зависимостью (2.2), существует, единственна и удовлетворяет требованиям, указанным в (2.1). Размеры прямоугольника $\Omega_{\square} = a \times b$ в (2.2) считаем конечными и известными. Полагая $x = 0$ в (2.2) и затем $x = a$, определим значения функции на концах отрезка $[0,a]$

$$y_0 = f(0) \quad \text{и} \quad y_a = f(a). \tag{2.3}$$

Для существования зависимости (2.1) в приближенном явном виде при использовании метода БСР необходимо наложить условия на частные производные

$$F_y(x,y) \ne 0, \quad \left| F_{\underbrace{x\ldots x}_{i},\underbrace{y\ldots y}_{j}}(x,y) \right| < \infty \quad \forall (i+j) = 0 \div 2p+1, \quad (x,y) \in \Omega_{\square}. \tag{2.4}$$

Здесь $(i+j)$ – суммарный порядок частной производной. Для возможности представления $f(x)$ быстрым разложением вычислим производную от равенства (2.2) как от сложной функции по переменной x, учитывая возможную зависимость $y = f(x)$, записанную в (2.1):

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)\,y' = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) получаем известное выражение для первой производной, что позволяет вычислить ее значения на концах отрезка, используемые при применении метода БСР:

$$\begin{gathered} y'(x) = -F_x(x,y)/F_y(x,y), \\ y'(0) = -F_x(0,y_0)/F_y(0,y_0), \quad y'(a) = -F_x(a,y_a)/F_y(a,y_a). \end{gathered} \tag{2.6}$$

После повторного дифференцирования (2.5), как сложную функцию по x, найдем $y''(x)$, необходимую для построения граничной функции $M_{2p}(x)$:

$$F_{xx}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)\,y' + F_{yy}(x,y)\,y'^2 + F_y(x,y)\,y'' = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.7) вычислим значения второй производной на концах отрезка

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\Big(F_{xx}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)\,y' + F_{yy}(x,y)\,y'^2\Big)\Big/F_y(x,y), \\ y''(0) &= -\Big(F_{xx}(0,y_0) + 2F_{xy}(0,y_0)\,y' + F_{yy}(0,y_0)\,y'^2\Big)\Big/F_y(0,y_0), \\ y''(a) &= -\Big(F_{xx}(a,y_a) + 2F_{xy}(a,y_a)\,y' + F_{yy}(a,y_a)\,y'^2\Big)\Big/F_y(a,y_a). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подобным образом находятся все четные производные $y^{(2p)}(0)$, $y^{(2p)}(a)$, используемые в конструкции граничной функции $M_{2p}(x)$.

Для построения $M_{2p}(x)$ произвольного четного порядка приведем достаточно удобную рекуррентную формулу. Для этого запишем $M_{2p}(x)$ суммой

$$M_{2p}(x) = \sum_{m=0}^{p}\Big(f^{(2m)}(0)\,P_{2m}(x) + f^{(2m)}(a)\,Q_{2m}(x)\Big), \quad x \in [0,a]. \tag{2.9}$$

Здесь $f^{(2m)}(0)$, $f^{(2m)}(a)$ – значения четных производных $2m$-го порядка функции $f(x)$ на концах отрезка $[0,a]$, $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ – полиномы, для построения которых найдем рекуррентную формулу следующим образом. Вначале запишем граничную функцию $M_0(x)$ нулевого порядка

$$M_0(x) = f(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a}, \quad P_0(x) = \left(1-\frac{x}{a}\right), \quad Q_0(x) = \frac{x}{a}. \tag{2.10}$$

В (2.10) даны полиномы $P_0(x)$ и $Q_0(x)$ нулевого порядка. Рекуррентные формулы для $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ при $m = 1 \div p$ записываются следующими интегральными выражениями: если известны полиномы $P_{2m-2}(x)$, $Q_{2m-2}(x)$, то полиномы порядка $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ вычислим через нижеприведенные неопределенные интегралы (2.11) с учетом их значений на концах отрезка $[0,a]$:

$$\begin{gathered} P_{2m}(x) = \int\left(\int P_{2m-2}(x)\,dx\right)dx, \quad P_{2m}(0) = P_{2m}(a) = 0, \\ Q_{2m}(x) = \int\left(\int Q_{2m-2}(x)\,dx\right)dx, \quad Q_{2m}(0) = Q_{2m}(a) = 0, \quad m = 1 \div p. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Теперь можно представить неявно заданную функцию $f(x)$ с оператором Ch_{2p} порядка $2p$ быстрым разложением:

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{2p,m} \sin m\pi\frac{x}{a}, \tag{2.12}$$

где $f_{2p,m}$ – коэффициенты ряда Фурье для разности $f(x) - M_{2p}(x)$, N – число учитываемых членов ряда, $M_{2p}(x)$ – граничная функция. Ее конкретный вид при $p = 1$ приводится в (1.3), в (1.11) при $p = 2$, в (1.15) при $p = 3$.

Разложение (2.12) обеспечивает быструю сходимость ряда Фурье. Хотя $f(x)$ и задана неявно, но значения всех четных производных $f^{(2m)}(0)$, $f^{(2m)}(a)$, $m = 0 \div p$, для определения $M_{2p}(x)$ можно считать найденными. При $p = 1$ данные производные представлены формулами (2.8). Для завершения построения $M_{2p}(x)$ остается найти коэффициенты Фурье $f_{2,m}$, но их интегральные выражения неизвестны, так как зависимость $f(x)$ явно не дана. Поэтому в дальнейшем используем поточечный способ.

Для решения задачи на отрезок $[0,a]$ равномерно нанесем N внутренних точек x_k :

$$x_k = ak/(N+1), \quad k = 1 \div N. \tag{2.13}$$

Будем полагать, что функция $F(x,y)$ такова, что при выполнении условий $S^*(f)$ в (2.1) неизвестные y_k найдем из алгебраических уравнений

$$F(x_k, y_k) = 0, \quad x_k = ak/(N+1), \quad k = 1 \div N. \tag{2.14}$$

Используя формулы тригонометрической интерполяции [11], выражение (2.12) заменим на следующее:

$$f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{N} f_{2,m}^{*} \sin m\pi\frac{x}{a}, \tag{2.15}$$

где коэффициенты $f_{2,m}^{*}$ определяются из линейной системы, полученной из (2.15) при $x = x_k$:

$$f(x_k) = y_k = M_2(x_k) + \sum_{m=1}^{N} f_{2,m}^{*} \sin m\pi\frac{x_k}{a}, \quad k = 1 \div N. \tag{2.16}$$

Здесь величины y_k считаем уже найденными из уравнений (2.14). Подобным же образом можно построить $M_{2p}(x_k)$ и вычислить коэффициенты $f_{2p,m}^{*}$. Затем по формуле, аналогичной формулам (1.10), (1.14), (1.18), в зависимости от величины порядка $2p$, вычисляется интеграл с переменным верхним пределом от неявно заданной функции.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Найти определенный интеграл (1.2) с переменным верхним пределом от следующей неявно заданной функции:

$$x^2 + y^2 = 2\sin(xy + 0.9) + 4, \quad x \in [0,1], \quad y \geq 0. \tag{2.17}$$

Полагая $x = x_k = k/11$, $k = 0 \div 11$, вычислим $\{y_k\}$ в (2.17).

Возьмем $2p = 6$, так как оператор Ch_6 шестого порядка дает очень высокую точность. Тогда из (2.17) надо вычислить производные $y^{(n)}(0)$, $y^{(n)}(1)$, $n = 1 \div 6$ на концах отрезка $[0, 1]$.

Из (1.15) вычислим значения $M_6(x_k)$ в точках $x = x_k$ и затем по формуле $\varphi_6(x_k) = f(x_k) - M_6(x_k)$ найдем $\varphi_6(x_k)$.

Теперь из (1.17) можно определить коэффициенты $f^*_{6,m}$. После подстановки в (1.15) значений четных производных $y^{(2n)}(0)$, $y^{(2n)}(1)$, $n = 0, 1, 2, 3$, и коэффициентов $f^*_{6,m}$ будем иметь в (2.17) неявно заданную функцию приближенно в явном виде. Оценка погрешности Δ вычислялась по формуле

$$\Delta = \sup\left| y(x) - M_6(x) - \sum_{m=1}^{10} f^*_{6,m} \sin m\pi x \right|, \quad x \in [0,1] \Rightarrow \Delta(x = 0.04) = 4.547 \times 10^{-8}, \tag{2.18}$$

где значения $y(x)$ вычислялись из выражения (2.17).

Из (1.18) получаем искомую зависимость интеграла (1.2) от переменной $x \in [0, 1]$ сразу на всем отрезке в явном виде с высокой точностью.

Приведенные численные примеры показывают очень высокую точность и быструю сходимость метода. Кроме предложенного здесь метода БСР, точно также может быть развит метод быстрых косинус-разложений (МБКР). Оба метода можно применять для решения, например, уравнений Вольтерра I и II родов, для вычисления многомерных интегралов с переменными пределами и других сложных систем интегродифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. С. 377–432.
2. *Габдулхаев Б.Г.* Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности и их приложения // Известия ВУЗов. Математика. 2007. № 7 (542). С. 28–41.
3. *Боголюбский А.И., Скороходов С.Л., Христофоров Д.В.* Быстрое вычисление эллиптических интегралов и их обобщений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 11. С. 1938–1953.
4. *Гласко А.В.* Повышение устойчивости метода вычисления коэффициентов абсолютно сходящегося ряда, приближающего функциональный интеграл // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 1. С. 30–34.
5. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* О некоторых оценках для интегрального преобразования Фурье-Бесселя в пространстве $L_2(R)$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1158–1166.
6. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
7. *Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Рушай В.Д.* Применение метода Ромберга для повышения точности вычисления кратных интегралов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 232–240.
8. *Clenshaw C.W., Curtis A.R.* A method for numerical integration in an automatic computer // Numer. Math. 1960. Bd. 2. S. 197–205.
9. *Чернышов А.Д., Попов В.М., Шахов А.С., Горяйнов В.В.* Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений // Тепловые процессы в технике. 2014. Т. 6. № 4. С. 179–191.
10. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космического корабля // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 41–47.
11. *Isaev V.I., Shapeev V.P.* High-Accuracy of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navies-Stokes Equations // Comp. Math. and Math. Phys. 2010. V. 50. № 10. P. 1670–1681.
12. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. С. 166.
13. *Чернышов А.Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области методом быстрых разложений // Инженерно-физ. ж. Минск. 2018. Т. 91. № 2. С. 456.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 936–950

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 17.929

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2021 г. М. Н. Бахшалыева[1,*], Э. Г. Халилов[1,**]

[1] AZ 1010 Баку, пр. Азадлыг 20, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Азербайджан

*e-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru

**e-mail: elnurkhalil@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.
Переработанный вариант 18.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Рассматривается криволинейное интегральное уравнение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Дан новый метод построения квадратурной формулы для сингулярного интеграла, и на основе этого метода построена квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя. В определенно выбранных точках уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливается существование и единственность решения этой системы. Доказывается сходимость решения этой системы к точному решению интегрального уравнения и указывается скорость сходимости метода. Библ. 21.

Ключевые слова: криволинейный сингулярный интеграл, метод коллокации, краевая задача Дирихле, уравнение Лапласа, метод граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0044466921030030

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L, а f – заданная непрерывная функция на L.

Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа: найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \backslash \overline{D}) \cap C(R^2 \backslash D)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в $R^2 \backslash \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \operatorname{grad} u(x)\right) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \quad x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$u(x) = f(x) \quad \text{на} \quad L.$$

Известно, что одним из методов решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа является ее приведение к криволинейному интегральному уравнению. Основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности. Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

В [1, с. 115–116] показано, что если решение $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то неизвестная нормальная производная $\rho(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}(x)}$, $x \in L$, удовлетворяет интегральному уравнению II рода

$$\rho + \tilde{K}\rho = Tf \tag{1.1}$$

и интегральному уравнению I рода

$$S\rho = -f + Kf, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$,

$$(S\rho)(x) = 2\int_L \Phi(x,y)\rho(y)dL_y, \quad (K\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\mathbf{n}(y)}\rho(y)dL_y,$$

$$(\tilde{K}\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\mathbf{n}(x)}\rho(y)dL_y, \quad (Tf)(x) = 2\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}(x)}\left(\int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\mathbf{n}(y)} f(y)dL_y\right), \quad x \in L,$$

а $\Phi(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Несмотря на разрешимости интегральных уравнений (1.1) и (1.2), эти уравнения не имеют единственного решения. Однако Бертон и Миллер (см. [2]) доказали, что интегральное уравнение II рода

$$\rho + \tilde{K}\rho - i\eta S\rho = Tf - i\eta(Kf - f), \tag{1.3}$$

полученное из линейных комбинаций уравнений (1.1) и (1.2), разрешимо единственным образом в пространстве $C(L)$, где $\eta \neq 0$ – произвольное действительное число, а через $C(L)$ обозначено пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x\in L}|\varphi(x)|$.

Запишем уравнение (1.3) в виде

$$\rho(x) + (A\rho)(x) = (Bf)(x), \tag{1.4}$$

где

$$(A\rho)(x) = (\tilde{K}\rho)(x) - i\eta(S\rho)(x), \quad (Bf)(x) = (Tf)(x) - i\eta((Kf)(x) - f(x)), \quad x \in L.$$

Известно, что внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа можно привести к различным интегральным уравнениям, приближенные решения которых исследованы, например, в [3]–[5]. Уравнение (1.4) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной в смысле равномерной сходимости решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа на L. При этом функция

$$u(x) = \int_L \left\{ f(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\mathbf{n}(y)} - \rho(y)\Phi(x,y)\right\} dS_y, \quad x \in R^2 \backslash \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле.

Отметим, что в [6] дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения (1.4) внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. А в [7] исследовано приближенное решение интегрального уравнения

$$\rho + K\rho - i\eta S\rho = 2f$$

внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца и, используя значения в определенных точках функции f, проведены численные расчеты. Кроме того, в [7] отмечено, что можно исследовать также приближенное решение уравнения (1.4) и провести численные расчеты. Однако построенный Ляпуновым контрпример показывает (см. [8, с. 89–90]), что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Поэтому вычислить значение функции $(Bf)(x)$ в определенных точках не представляется возможным. Следует указать, что в [9], рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как сильный сингулярный интеграл (см. [9, с. 115–116]), т.е. понимая интеграл в смысле конечного значения по Адамару, построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя при дополнительно налагаемом условии на плотность f (см. [9, с. 290]). Однако известно, что при этом условии выражение для нормальной производной потенциала двойного слоя может быть представлено в виде с сингулярным интегралом (см. [1, с. 68], [9, с. 100], [10]), т.е. интеграл $(Tf)(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

В настоящей работе, рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как интеграл в смысле главного значения Коши, построена квадратурная формула для $(Tf)(x)$, $x \in L$. Кроме того, с помощью построенных квадратурных формул для интегралов $(A\rho)(x)$ и $(Bf)(x)$ дано обоснование метода коллокации для уравнения (1.4).

2. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_1(b-a)/d$ равных частей: $t_k = a + \dfrac{(b-a)k}{n}$, $k = \overline{0,n}$, где $M_1 = \max\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$ (см. [11, с. 560–561]) и d – стандартный радиус (см. [11, с. 19], [12, с. 400]). В качестве опорных точек возмем $x(\tau_k)$, $k = \overline{1,n}$, где $\tau_k = a + \dfrac{(b-a)(2k-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{l=1}^{n} L_l$, где $L_k = \{x(t) : t_{k-1} \le t \le t_k\}$.

Известно, что (см. [13])

(1) $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_k(n) \sim R_k(n)$ $\left(a(n) \sim b(n) \Leftrightarrow C_1 \le \dfrac{a(n)}{b(n)} \le C_2\right.$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n), где $r_k(n) = \min\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\}$ и $R_k(n) = \max\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\}$;

(2) $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $R_k(n) \le d/2$;

(3) $\forall k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_j(n) \sim r_k(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim 1/n$, где $R(n) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} R_k(n)$, $r(n) = \min\limits_{k=\overline{1,n}} r_k(n)$.

Лемма 1 (см. [14]). *Существуют такие постоянные* $C_0' > 0$ *и* $C_1' > 0$*, не зависящие от n, для которых при* $\forall k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \ne k$, *и* $\forall y \in L_j$ *справедливы следующие неравенства*:

$$C_0' |y - x(\tau_k)| \le |x(\tau_j) - x(\tau_k)| \le C_1' |y - x(\tau_k)|. \tag{2.1}$$

Для функции $\varphi(x) \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max\limits_{\substack{|x-y|\le\tau \\ x,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Кроме того, рассмотрим матрицу $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^{n}$ с элементами

$$a_{lj} = 0 \quad \text{при} \quad l = j;$$

$$a_{lj} = 2\frac{b-a}{n}\left(\frac{\partial \Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial \mathbf{n}(x(\tau_l))} - i\eta \Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))\right)\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \quad \text{при} \quad l \ne j.$$

Теорема 1. *Выражение*

$$A_n(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \rho(x(\tau_j)) \tag{2.2}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A\rho)(x)$, *причем* (здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах)

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|A\left(x\left(\tau_l\right)\right)-A_n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Доказательство. В [13] доказано, что выражения

$$S_n\left(x(\tau_k)\right)=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\Phi\left(x(\tau_k),x(\tau_j)\right)\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right)$$

и

$$\tilde K_n\left(x(\tau_k)\right)=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\frac{\partial\Phi\left(x(\tau_k),x(\tau_j)\right)}{\partial\mathbf n\left(x(\tau_k)\right)}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\rho\left(x(\tau_j)\right)$$

в опорных точках $x(\tau_k)$, $k=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для интегралов $(S\rho)(x)$ и $(\tilde K\rho)(x)$, соответственно, причем

$$\max_{k=\overline{1,n}}\left|(S\rho)\left(x\left(\tau_k\right)\right)-S_n\left(x\left(\tau_k\right)\right)\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\max_{k=\overline{1,n}}\left|(\tilde K\rho)\left(x\left(\tau_k\right)\right)-\tilde K_n\left(x\left(\tau_k\right)\right)\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Отсюда получаем, что выражение (2.2) в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(A\rho)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|A\left(x\left(\tau_l\right)\right)-A_n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Теорема доказана.

Очевидно, что существует натуральное число n_0 такое, что

$$\sqrt{R(n)}\le\min\{1,d/2\}\quad\forall n>n_0.$$

Пусть

$$P_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n,\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|\le\sqrt{R(n)}\right\},\quad Q_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n,\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|>\sqrt{R(n)}\right\}.$$

Рассмотрим матрицу $B^n=\left(b_{lj}\right)_{l,j=1}^n$ с элементами

$$b_{ll}=\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{n}\frac{\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^4}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}-$$

$$-\frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{\left(\mathbf n\left(x\left(\tau_j\right)\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_j\right)-x\left(\tau_l\right)\right|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}+i\eta\quad\text{при}\quad l=\overline{1,n};$$

$$b_{lj}=-\frac{2(b-a)}{n}\left[\frac{\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\pi\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^4}+\right.$$

$$\left.+i\eta\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\mathbf n\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\right]\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\quad\text{при}\quad j\in P_l\quad\text{и}\quad j\ne l;$$

$$b_{lj}=-\frac{2(b-a)}{n}\left[\frac{\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\pi\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^4}-\right.$$

$$-\frac{\left(\mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right),\mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{2\pi\left|x\left(\tau_j\right)-x\left(\tau_l\right)\right|^2}+i\eta\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\Bigg]\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\quad \text{при}\quad j\in Q_l.$$

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема на L и*

$$\int_0^d \frac{\omega(\operatorname{grad} f,t)}{t}\,dt<\infty.$$

Тогда выражение

$$(Bf)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^n b_{lj} f\left(x\left(\tau_j\right)\right) \tag{2.3}$$

в опорных точках $x\left(\tau_l\right)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Bf)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Bf)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-(Bf)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left[\frac{\|f\|_\infty+\|\operatorname{grad} f\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad} f,t)}{t}\,dt\right].$$

Доказательство. В [13] доказано, что выражение

$$K_n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^n\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,f\left(x(\tau_j)\right)$$

в опорных точках $x\left(\tau_l\right)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Kf)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Kf)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-K_n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\omega(f,1/n)+\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\omega(f,1/n)\le\frac{\|\operatorname{grad} f\|_\infty}{n}, \tag{2.4}$$

получаем, что

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Kf)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-K_n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\|\operatorname{grad} f\|_\infty+\|f\|_\infty\right)\frac{\ln n}{n}.$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $(Tf)(x)$.

В [10] доказано, что

$$(Tf)(x)=T_1(x)+T_2(x),$$

где

$$T_1(x)=-\frac{2}{\pi}\int_L\frac{(x-y,\mathbf{n}(y))(x-y,\mathbf{n}(x))}{|x-y|^4}(f(y)-f(x))\,dL_y$$

и

$$T_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x))}{|x-y|^2}(f(y)-f(x))\,dL_y,\quad x\in L,$$

причем интеграл $T_2(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

Построим квадратурную формулу для интеграла $T_1(x)$. Выражение

$$T_1^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=-\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^n\frac{\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right),\mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^4}\times$$
$$\times\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\left(f\left(x(\tau_j)\right)-f\left(x(\tau_l)\right)\right) \tag{2.5}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_1(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.5). Очевидно, что

$$
\begin{gathered}
T_1(x(\tau_l))-T_1^n(x(\tau_l))=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_l}\frac{(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(y))(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-\\
-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times\\
\times\left(\operatorname{mes}L_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))-\\
-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(y))(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(x(\tau_l)))-(x(\tau_j)-x(\tau_l),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j)-x(\tau_l),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}\times\\
\times(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\left(\frac{1}{|x(\tau_l)-y|^4}-\frac{1}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\right)\times\\
\times(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-\\
-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}(f(y)-f(x(\tau_j)))dL_y.
\end{gathered}
$$

Слагаемые выражения в правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_1,x(\tau_l))$, $r_2(T_1,x(\tau_l))$, $r_3(T_1,x(\tau_l))$, $r_4(T_1,x(\tau_l))$ и $r_5(T_1,x(\tau_l))$ соответственно.

Так как функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то существует такая точка $y^*=x+\theta(y-x)$ (здесь $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ и $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$), что

$$
f(y)-f(x)=(\operatorname{grad}f(y^*),y-x),\quad x,y\in L. \tag{2.6}
$$

Тогда, применяя неравенство

$$
|(x-y,\mathbf{n}(y))|\leq M|x-y|^2
$$

и формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$
|r_1(T_1,x(\tau_l))|\leq M\|\operatorname{grad}f\|_\infty(R(n))^2.
$$

Учитывая неравенство

$$
\left|\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right|\leq MR(n)\quad\forall t\in[t_{j-1},t_j],
$$

получаем, что

$$
\begin{gathered}
\left|1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes}L_j}\right|=\frac{\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)dt\right|}{\operatorname{mes}L_j}\leq\\
\leq M\frac{\frac{b-a}{n}R(n)}{\frac{b-a}{n}m_1}\leq MR(n),
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

где $m_1 = \min\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} > 0$ (см. [11, с. 560–561]). Тогда, принимая во внимание (2.1), (2.6) и (2.7), получаем

$$\left| r_2(T_1, x(\tau_l)) \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \left(1 - \frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes} L_j} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{L_j} \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} (f(x(\tau_j)) - f(x(\tau_l)))\, dL_y \right| \le$$

$$\le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n).$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq l$. Тогда, учитывая (2.1) и (2.6), получаем

$$\left| \frac{(x(\tau_l) - y, \mathbf{n}(y))(x(\tau_l) - y, \mathbf{n}(x(\tau_l))) - (x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} \times \right.$$

$$\left. \times (f(y) - f(x(\tau_l))) \right| =$$

$$= \left| (f(y) - f(x(\tau_l))) \left(\frac{((y - x(\tau_j), \mathbf{n}(y)) + (x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(y) - \mathbf{n}(x(\tau_j))))(y - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_j)))((y - x(\tau_j), \mathbf{n}(x(\tau_l)) - \mathbf{n}(y)) + (y - x(\tau_j), \mathbf{n}(y)))}{|x(\tau_l) - y|^4} \right) \right| \le$$

$$\le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n).$$

Следовательно,

$$\left| r_3(T_1, x(\tau_l)) \right| \le M \|\operatorname{grad} \rho\|_\infty R(n).$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.6), получаем, что если $y \in L_j$ и $j \neq l$, то

$$\left| (x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_l)))(f(y) - f(x(\tau_l))) \right| \times$$
$$\times \left| \frac{1}{|x(\tau_l) - y|^4} - \frac{1}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \right| \le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty \frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|}$$

и

$$\left| \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} (f(y) - f(x(\tau_j))) \right| \le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty \frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|}.$$

Тогда

$$\left| r_4(T_1, x(\tau_l)) \right| \le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n) |\ln R(n)|$$

и

$$\left| r_5(T_1, x(\tau_l)) \right| \le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n) |\ln R(n)|.$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_j(T_1, x(\tau_l))$, $j = \overline{1,5}$, находим

$$\max_{l=\overline{1,n}} \left| T_1(x(\tau_l)) - T_1^n(x(\tau_l)) \right| \le M \|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n) |\ln(R(n))|.$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $T_2(x)$. Выражение

$$T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))) \tag{2.8}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_2(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.8). Очевидно, что

$$T_2(x(\tau_l)) - T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\times$$

$$\times\left(\operatorname{mes} L_j - \frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{L_j}\left(\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l))) - \frac{f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\right)dL_y+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\,dL_y.$$

Слагаемые выражения в правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_2,x(\tau_l))$, $r_2(T_2,x(\tau_l))$ и $r_3(T_2,x(\tau_l))$ соответственно.

Принимая во внимание (2.1), (2.6) и (2.7), получаем

$$|r_1(T_2,x(\tau_l))| = \left|\frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes} L_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{L_j}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))\,dL_y\right|\le$$

$$\le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\, R(n)\int_{\sqrt{R(n)}}^{\operatorname{diam} L}\frac{dt}{t}\le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\, R(n)|\ln R(n)|.$$

Пусть $y\in L_j$, $j\in Q_l$. Тогда

$$\left|\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l))) - \frac{f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\right|\le$$

$$\le\left|\frac{(f(y)-f(x(\tau_l)))(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\left(|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2-|x(\tau_l)-y|^2\right)}{|x(\tau_l)-y|^2|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\right|+$$

$$+\frac{|(f(y)-f(x(\tau_j)))(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}+\frac{|(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))(\mathbf{n}(y)-\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\le$$

$$\le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^2}.$$

Отсюда находим

$$\left|r_2(T_2,x(\tau_l))\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n)\int\limits_{\sqrt{R(n)}}^{\operatorname{diam}L}\frac{dt}{t^2} \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

Так как существует такая точка $\tilde{y}(l) = x(\tau_l) + \theta(y - x(\tau_l))$ (здесь $\theta = (\theta_1,\theta_2)$ и $\theta_1,\theta_2 \in (0,1)$), что

$$f(y) - f(x(\tau_l)) = (\operatorname{grad} f(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l)), \quad y \in \bigcup_{j\in P_l} L_j, \tag{2.9}$$

то выражение $r_3\ (T_3,x(\tau_l))$ можно представить в виде

$$r_3(T_3,x(\tau_l)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{(\operatorname{grad} f(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l) - y\right|^2}(\mathbf{n}(y) - \mathbf{n}(x(\tau_l)), \mathbf{n}(x(\tau_l)))\,dL_y +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{(\operatorname{grad} f(\tilde{y}(l)) - \operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l) - y\right|^2}dL_y + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{(\operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l) - y\right|^2}dL_y.$$

Пусть $y \in \partial\left(\bigcup_{j\in P_l} L_j\right)$. Очевидно, что существуют натуральные числа $s \in P_l$ и $m \in Q_l$ такие, что $y \in \partial L_s$ и $y \in \partial L_m$. Отсюда имеем

$$\left|x(\tau_l) - y\right| \le \left|x(\tau_l) - x(\tau_s)\right| + \left|x(\tau_s) - y\right| \le \sqrt{R(n)} + R(n)$$

и

$$\left|x(\tau_l) - y\right| \ge \left|x(\tau_l) - x(\tau_m)\right| - \left|x(\tau_m) - y\right| > \sqrt{R(n)} - R(n).$$

Следовательно,

$$\sqrt{R(n)} - R(n) < \left|x(\tau_l) - y\right| \le \sqrt{R(n)} + R(n) \quad \forall y \in \partial\left(\bigcup_{j\in P_l} L_j\right). \tag{2.10}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{(\operatorname{grad} f(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l) - y\right|^2}(\mathbf{n}(y) - \mathbf{n}(x(\tau_l)), \mathbf{n}(x(\tau_l)))\,dL_y\right| \le$$

$$\le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)} dt \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство (2.9), находим

$$\left|\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j}\frac{(\operatorname{grad} f(\tilde{y}(l)) - \operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l) - y\right|^2}dL_y\right| \le M\int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)}\frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t}dt.$$

Известно (см. [11, с. 19], [12, с. 400–401]), что для любой точки $x \in L$ окрестность $L_d(x) = \{y \in L\colon \left|y - x\right| < d\}$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\mathbf{n}(x)$, в единственной точке, либо вообще не пересекается, т.е. множество $L_d(x)$ однозначно проектируется на промежуток $\Omega_d(x)$, лежащий на касательной прямой $\Gamma(x)$ к L в точкеx. На куске $L_d(x(\tau_l))$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v) с началом в точке $x(\tau_l)$, где ось v направим вдоль нормали $\mathbf{n}(x(\tau_l))$, а ось u направим вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x(\tau_l))$. Известно, что при этом координаты точек $x(\tau_l)$ будут $(0,\ 0)$. Кроме того, в этих координатах окрестность $L_d(x(\tau_l))$ можно задать уравнением $v = g(u)$, $u \in \Omega_d(x(\tau_l))$, причем

$$g \in C^{(2)}(\Omega_d(x(\tau_l))) \quad \text{и} \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Через Ω_l обозначим проекцию множества $\bigcup_{j\in P_l} L_j$ на касательную прямую $\Gamma(x(\tau_l))$. Пусть $d_l = \min\limits_{\tilde y\in\partial\Omega_l} |x(\tau_l) - \tilde y|$. Так как

$$\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y = \int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(y_1 - x_1(\tau_l))\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1} + (y_2 - x_2(\tau_l))\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}}{(y_1 - x_1(\tau_l))^2 + (y_2 - x_2(\tau_l))^2} dL_y,$$

то по формуле вычисления криволинейного интеграла получаем, что

$$\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y = \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{g(u)}{u^2 + (g(u))^2}\sqrt{1 + (g'(u))^2}du + \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1 + (g'(u))^2} - 1\right)}{u^2 + (g(u))^2}du + \tag{2.11}$$

$$+ \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2 + (g(u))^2} - \frac{1}{u^2}\right)du + \int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)} \frac{\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}u + \dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}g(u)}{u^2 + (g(u))^2}\sqrt{1 + (g'(u))^2}du.$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.11) существует в смысле главного значения Коши и равно нулю. Кроме того, учитывая неравенства

$$|g'(u)| \le M|u|$$

и

$$|g(u)| = |g(u) - g(0)| \le M|u|^2,$$

имеем

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{g(u)}{u^2 + (g(u))^2}\sqrt{1 + (g'(u))^2}du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty\sqrt{R(n)},$$

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1 + (g'(u))^2} - 1\right)}{u^2 + (g(u))^2}du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n)$$

и

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2 + (g(u))^2} - \frac{1}{u^2}\right)du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n).$$

Прежде всего существует точка $\tilde y_* \in \Omega_l$ такая, что $d_l = |x(\tau_l) - \tilde y_*|$. Обозначим через $y_* \in \partial\left(\bigcup_{j\in P_l} L_j\right)$ прообраз точки $\tilde y_*$, а через $\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$ угол между векторами **a** и **b**. Применяя неравенство (2.10), получаем, что

$$\begin{gathered} d_l = |x(\tau_l) - y_*|\cos\alpha(y_* - x(\tau_l), \tilde y_* - x(\tau_l)) = |x(\tau_l) - y_*|\sqrt{1 - \cos^2\alpha(y_* - x(\tau_l), \mathbf{n}(x(\tau_l)))} \ge \\ \ge |x(\tau_l) - y_*|\sqrt{1 - M^2|x(\tau_l) - y_*|^2} \ge \left(\sqrt{R(n)} - R(n)\right)\sqrt{1 - M^2\left(\sqrt{R(n)} + R(n)\right)^2} \ge \\ \ge \left(\sqrt{R(n)} - R(n)\right)\sqrt{1 - M^2\left(2\sqrt{R(n)}\right)^2} = \left(\sqrt{R(n)} - R(n)\right)\sqrt{\left(1 - 2M\sqrt{R(n)}\right)\left(1 + 2M\sqrt{R(n)}\right)} \ge \\ \ge \left(\sqrt{R(n)} - R(n)\right)\left(1 - 2M\sqrt{R(n)}\right) \ge \sqrt{R(n)} - (1 + 2M)R(n). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Принимая во внимание неравенство (2.12) для последнего слагаемого в правой части равенства (2.11), получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)} \frac{\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}u + \dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}f(u)}{u^2+(g(u))^2}\sqrt{1+(g'(u))^2}\,du\right| \le$$

$$\le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \int\limits_{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)}^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{dt}{t} = M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \ln\frac{\sqrt{R(n)}+R(n)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)} =$$

$$= M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \ln\left(1+\frac{R(n)(2+2M)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)}\right) \le$$

$$\le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \frac{R(n)(2+2M)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)} \le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

В результате находим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\mathrm{grad}\, f(x(\tau_l)),\, y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}\,dL_y\right| \le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

Следовательно,

$$|r_3(T_2, x(\tau_l))| \le M\left[\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \sqrt{R(n)} + \int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}\,dt\right].$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_1(T_2, x(\tau_l))$, $r_2(T_2, x(\tau_l))$ и $r_3(T_2, x(\tau_l))$, имеем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_2(x(\tau_l)) - T_2^n(x(\tau_l))\right| \le M\left[\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \sqrt{R(n)} + \int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}\,dt\right].$$

В итоге, принимая во внимание построенные квадратурные формулы для интегралов $T_1(x)$, $T_2(x)$ и оценки их погрешностей, получаем, что выражение

$$(Tf)^n(x(\tau_l)) = -\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{n} \frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j), \mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times$$

$$\times\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j)) - f(x(\tau_l))) +$$

$$+\frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l} \frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)), \mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j)) - f(x(\tau_l)))$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Tf)(x)$, причем, учитывая соотношение $R(n)\sim\dfrac{1}{n}$, имеем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Tf)(x(\tau_l)) - (Tf)^n(x(\tau_l))\right| \le M\left[\frac{\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int\limits_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}\,dt\right].$$

В результате, принимая во внимание построенные квадратурные формулы для интегралов $(Kf)(x)$, $(Tf)(x)$ и оценки их погрешностей, получаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Отметим, что методом построения квадратурной формулы для интеграла $T_2(x)$ можно построить квадратурную формулу и для других сингулярных интегралов по кривой Ляпунова.

Замечание 2. Данный метод для построения квадратурной формулы для сингулярного интеграла в отличие от других известных методов (см., например, [15]–[18]) обладает тем преимуществом, что очень простым способом можно вычислить коэффициенты этой квадратурной формулы.

Замечание 3. Как видно, если $f \equiv \mathrm{const}$, то $(Tf)^n(x(\tau_l)) = 0\ \ \forall\, l = \overline{1,n}$, и по теореме Гаусса (см. [12, с. 452])

$$\int\limits_L \frac{(x-y,\mathbf{n}(y))}{|x-y|^2}dL_y = -\pi, \quad x \in L,$$

а значит, $(Tf)(x) = 0$, $x \in L$. Следовательно, в классе постоянных функций f выполняется равенство

$$(Tf)^n(x(\tau_l)) = (Tf)(x(\tau_l)) = 0 \quad \forall l = \overline{1,n},$$

т.е. построенная квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя является эффективным.

3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Пусть C^n – пространство n-мерных векторов $z^n = (z_1^n, \dots, z_n^n)^{\mathrm{T}}$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1,n}$, с нормой $\|z^n\| = \max\limits_{l=\overline{1,n}} |z_l^n|$, где запись “$a^{\mathrm{T}}$” означает транспонировку вектора a. Используя квадратурные формулы (2.2) и (2.3), интегральное уравнение (1.4) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\rho(x(\tau_l))$, $l = \overline{1,n}$, которую запишем в виде

$$(I^n + A^n)z^n = B^n f^n, \tag{3.1}$$

где I^n – единичный оператор на пространстве C^n, $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \to C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = \left(f(x(\tau_1)), \dots, f(x(\tau_n))\right)^{\mathrm{T}}$$

и называемый оператором простого сноса.

Теорема 3. *Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на L и*

$$\int\limits_0^d \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}dt < \infty.$$

Тогда уравнения (1.4) *и* (3.1) *имеют единственные решения* $\rho_* \in C(L)$ *и* $z_*^n \in C^n$ $(n \ge n_0)$ *соответственно, и* $\|z_*^n - p^n\rho_*\| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\|z_*^n - p^n\rho_*\| \le M\left[\omega(\mathrm{grad}\, f, 1/n) + \frac{\|f\|_\infty + \|\mathrm{grad}\, f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int\limits_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}dt\right].$$

Доказательство. Отметим, что здесь мы будем пользоваться теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [19]), при этом обозначения и необходимые определения и предложения возьмем из [19]. Теперь проверим выполнение условий теоремы 4.2 из [19]. В [2] доказано, что $\mathrm{Ker}(I + A) = \{0\}$, где I – единичный оператор на пространстве $C(L)$. Кроме того, операторы $I^n + A^n$ фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $p^n : C(L) \to C^n$ линейны и ограничены. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на элементарные части, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|p^n\varphi\| = \lim_{n\to\infty}\max_{l=\overline{1,n}}|\varphi(x(\tau_l))| = \max_{x\in L}|\varphi(x)| = \|\varphi\|_\infty \quad \forall\, \varphi \in C(L).$$

Следовательно, система операторов простого сноса $P = \{p^n\}$ является связывающей для пространств $C(L)$ и C^n. Тогда из теоремы 2 получаем, что по определению 1.1 из [19] $B^n f^n \xrightarrow{P} Bf$. Кроме того, из теоремы 1 получаем, что по определению 2.1 из [19] $I^n + A^n \xrightarrow{PP} I + A$. Так как по определению 3.2 из [19] $I^n \to I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из [19] осталось проверить условие компактности, которое, ввиду предложения 1.1 из [19], равносильно условию: $\forall\{z^n\}$, $z^n \in C^n$, $\left\|z^n\right\| \le M$ существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ такая, что

$$\left\|A^n z^n - p^n\left(A_n z^n\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$\left(A_n z^n\right)(x) = \left(\tilde{K}_n z^n\right)(x) - i\eta\left(S_n z^n\right)(x),$$

где

$$\left(S_n z^n\right)(x) = 2\sum_{j=1}^{n} z_j^n \int_{L_j} \Phi(x,y)\,dL_y, \quad \left(\tilde{K}_n z^n\right)(x) = 2\sum_{j=1}^{n} z_j^n \int_{L_j} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\vec{n}(x)}\,dL_y, \quad x \in L.$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in L$ такие, что $|x' - x''| = \delta < \min\{1, d\}/2$. Очевидно, что

$$\left|\left(S_n z^n\right)(x') - \left(Sz^n\right)(x'')\right| \le 2\left\|z^n\right\| \int_L \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y \le$$

$$\le 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y +$$

$$+ 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y +$$

$$+ 2\left\|z^n\right\| \int_{L_d(x')\setminus(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L\setminus L_d(x')} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y.$$

Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$\int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x' - y|}\,dL_y \le M \int_0^{\delta/2} \left|\ln t\right| dt \le M\delta\left|\ln\delta\right|,$$

$$\int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|,$$

$$\int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x'' - y|}\,dL_y \le \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x' - y|}\,dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|$$

и

$$\int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Так как для любого $y \in L_d(x')\setminus(L_{\delta/2}(x') \cup L_{\delta/2}(x''))$

$$|x' - y| \le |x' - x''| + |x'' - y| \le 3|x'' - y|,$$

$$|x'' - y| \le 3|x' - y|,$$

то

$$\left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\ln\frac{|x'' - y|}{|x' - y|}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\ln\left(1 + \frac{|x'' - y| - |x' - y|}{|x' - y|}\right)\right| \le$$

$$\le M\frac{\left||x'' - y| - |x' - y|\right|}{|x' - y|} \le M\frac{|x' - x''|}{|x' - y|} \le \frac{M\delta}{|x' - y|} \quad \forall y \in L_d(x')\setminus(L_{\delta/2}(x') \cup L_{\delta/2}(x'')),$$

а значит,

$$\int_{L_d(x')\setminus(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y \le M\delta \int_{L_d(x')\setminus(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \frac{dL_y}{|x' - y|} \le M\delta\int_\delta^d \frac{dt}{t} \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{L \setminus L_d(x')} \left|\Phi(x', y) - \Phi(x'', y)\right| dL_y \le M\delta.$$

Суммируя выше полученные оценки, находим

$$\left|\left(S_n z^n\right)(x') - \left(S_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\vec{n}(x)} = \frac{1}{2\pi}\frac{(y - x, \mathbf{n}(x))}{|x - y|^2},$$

тогда, поступая точно также, как и в доказательстве теоремы 3.1 из [20], нетрудно показать, что

$$\left|\left(\tilde{K}_n z^n\right)(x') - \left(\tilde{K}_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

В результате

$$\left|\left(A_n z^n\right)(x') - \left(A_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|, \tag{3.2}$$

а значит, $\{A_n z^n\} \subset C(L)$. Относительная компактность последовательности $\{A_n z^n\}$ следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность непосредственно вытекает из условия $\left\|z^n\right\| \le M$, а равностепенная непрерывность следует из оценки (3.2). Кроме того, поступая точно также, как и в [13], получаем, что

$$\left\|A^n z^n - p^n\left(A_n z^n\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из [19], получаем, что уравнения (1.4) и (3.1) имеют единственные решения $\rho_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ $(n \ge n_0)$ соответственно, причем

$$c_1\delta_n \le \left\|z_*^n - p^n\rho_*\right\| \le c_2\delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_{n \ge n_0}\left\|I^n + A^n\right\| > 0, \quad c_2 = \sup_{n \ge n_0}\left\|(I^n + A^n)^{-1}\right\| < \infty,$$

$$\delta_n = \max_{l = \overline{1,n}}\left|\rho_*(x(\tau_l)) + \left(A^n\rho_*\right)(x(\tau_l)) - \left(B^n f\right)(x(\tau_l))\right|.$$

Так как

$$\rho_*(x(\tau_l)) = (Bf)(x(\tau_l)) - \left(A\rho_*\right)(x(\tau_l)),$$

то, принимая во внимание оценки погрешности квадратурных формул (2.2) и (2.3), имеем

$$\delta_n = \max_{l = \overline{1,n}}\left|\left(\left(A\rho_*\right)^n(x(\tau_l)) - \left(A\rho_*\right)(x(\tau_l))\right) + \left((Bf)(x(\tau_l)) - (Bf)^n(x(\tau_l))\right)\right| \le$$

$$\le M\left(\omega\left(\rho_*, 1/n\right) + \left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n} + \frac{\|f\|_\infty + \|\operatorname{grad} f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int\limits_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t}dt\right).$$

Так как $\rho_* = (I + A)^{-1}(Bf)$, то, учитывая следствие 1 из [10], находим

$$\left\|\rho_*\right\|_\infty \le \left\|(I + A)^{-1}\right\|\left(\|Tf\|_\infty + |\eta|\,\|Kf\|_\infty + \|f\|_\infty\right) \le M\left(\|f\|_\infty + \|\operatorname{grad} f\|_\infty + \int\limits_0^{\operatorname{diam} L}\frac{\omega\left(\operatorname{grad} f, t\right)}{t}dt\right).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\omega\left(\rho_*, 1/n\right) = \omega\left(Bf - A\rho_*, 1/n\right) \le \omega\left(Bf, 1/n\right) + \omega\left(A\rho_*, 1/n\right) \le \omega\left(Tf, 1/n\right) +$$

$$+ (1 + |\eta|)\left(\omega\left(Kf, 1/n\right) + \omega\left(f, 1/n\right)\right) + \omega\left(\tilde{K}\rho_*, 1/n\right) + (1 + |\eta|)\,\omega\left(S\rho_*, 1/n\right).$$

Тогда, принимая во внимание следствие 2 из [10] и неравенства (2.4),

$$\omega\left(Kf, 1/n\right) \le M\,\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}, \quad \omega\left(S\rho_*, 1/n\right) \le M\,\left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n}, \quad \omega\left(\tilde{K}\rho_*, 1/n\right) \le M\,\left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n},$$

находим, что

$$\omega(\rho_*, 1/n) \le M\left(\|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega(\operatorname{grad} f, 1/n) + \int_o^{1/n} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt + \frac{1}{n} \int_{1/n}^{\operatorname{diam} L} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t^2} dt\right).$$

Так как (см. [21, с. 55])

$$\int_o^{1/n} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt + \frac{1}{n} \int_{1/n}^{\operatorname{diam} L} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t^2} dt \le M\omega(\operatorname{grad} f, 1/n),$$

то

$$\omega(\rho_*, 1/n) \le M\left(\|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega(\operatorname{grad} f, 1/n)\right).$$

В результате получаем

$$\delta_n \le M\left(\omega(\operatorname{grad} f, 1/n) + \frac{\|f\|_\infty + \|\operatorname{grad} f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt\right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Burton A.J., Miller G.F.* The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary–value problems // Proceed. Royal Soc. London. 1971. V. A323. P. 201–220.
3. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
4. *Мусаев Б.И., Халилов Э.Г.* О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений методом коллокации // Тр. Института математики и механики АН Азербайджана. 1998. Т. 9 (17). С. 78–84.
5. *Colton D., Kress R.* Iterative methods for solving the exterior Dirichlet problem for the Helmholtz equation with applications to the inverse scattering problem for low frequency acoustic waves // J. Math. Analys. Appl. 1980. V. 77. P. 60–72.
6. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
7. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Computer Model. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
8. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415 с.
9. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995. 521 с.
10. *Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.* О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механ. 2019. № 62. С. 38–54.
11. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 599 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
13. *Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N.* Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceed. IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. № 1. P. 155–162.
14. *Кустов Ю.А., Мусаев Б.И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНИТИ. № 4281–81. 60 с.
15. *Алиев Р.А.* Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 6. С. 803–824.
16. *Бесаева З.В., Хубежты Ш.С.* Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения с применением рядов Чебышева // Владикавказский матем. ж. 2016. Т. 18. № 4. С. 15–22.
17. *Шешко М.А., Шешко С.М.* Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на сложном контуре // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47. № 9. С. 1331–1343.
18. *Li-xia Cao.* Regularization method for complete singular integral equation with Hilbert kernel on open arcs // Proc. of the 2nd Internat. Conf. Systems Engineer. Model. (ICSEM-13). 2013. P. 0997–01000.
19. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техн. Матем. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.
20. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 7. С. 1340–1348.
21. *Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 951–965

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И ТИПА СТЕКЛОВА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2021 г. О. А. Матевосян[1,2]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 125993 Москва, Волоколомское шоссе, 4, НИУ МАИ, Россия

e-mail: hmatevossian@graduate.org

Поступила в редакцию 29.07.2020 г.
Переработанный вариант 16.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Изучаются вопросы единственности решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова во внешности компактного множества в предположении, что обобщенное решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a доказаны теоремы единственности (неединственности), и найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этой бигармонической задачи. Библ. 36.

Ключевые слова: бигармонический оператор, граничные условия Дирихле и типа Стеклова, весовой интеграл Дирихле, пространства Соболева.

DOI: 10.31857/S0044466921060089

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ – замыкание Ω, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

В Ω рассматривается задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

с условиями Дирихле на Γ_1 и условиями типа Стеклова на Γ_2

$$u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau \in C(\partial\Omega)$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$, и $\tau > 0$ на множестве $\partial\Omega$ положительной $(n-1)$-мерной меры.

Эллиптические задачи с параметрами в граничных условиях называются задачами Стеклова или типа Стеклова с момента их первого появления в [1]. Для бигармонического оператора эти условия были впервые рассмотрены в [2], [3] и [4] при изучении изопериметрических свойств первого собственного значения.

Отметим, что стандартные результаты эллиптической регулярности доступны в [5]. Монография посвящена линейным и нелинейным эллиптическим краевым задачам более высокого порядка, в основном с бигармоническим или полигармоническим оператором в качестве главной части. Что касается линейных задач, то после краткого изложения теории существования и оценок L^p и Шаудера, акцент делается на положительности. Требуемые оценки ядра также представлены подробно.

В [6] и [5] изучаются спектральные и сохраняющие положительность свойства для инверсии бигармонического оператора при граничных условиях Стеклова и типа Стеклова. Они связаны с первым собственным значением задачи Стеклова. Показано, что свойство сохранения положительности весьма чувствительно к параметру, входящему в граничное условие.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле (энергии), либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$ (см., например, [7]–[10]). Вопросы о поведении при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1) рассматривались в [11], [12], в которых при определенных условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\nabla u(x)|$ при $|x| \to \infty$.

В данной статье таким условием является ограниченность интеграла Дирихле с весом:

$$D_a(u,\Omega) \equiv \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В [13] изучается слабое решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости. При решении, используя формулу Грина, задача превращается в систему интегральных уравнений Фредгольма для неизвестных данных на другой части границы. В соответствующих пространствах Соболева установлены существование и единственность решений системы граничных интегральных уравнений. В [9] с условием конечности интеграла Дирихле на поведение решения на бесконечности изучены вопросы единственности решений задачи Дирихле для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях.

Отметим также работы [14]–[16], в которых изучены основные краевые задачи и задачи со смешанными краевыми условиями для бигармонического (полигармонического) уравнения. В частности, установлены существование и единственность решений в шаре, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для бигармонического (полигармонического) уравнения, в том числе с полиномиальной правой частью.

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) в [17]–[32] изучены вопросы единственности, а также найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди (см. [7]–[9]), в настоящей работе удалось получить критерий единственности (неединственности) решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова. Для построения решения используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Данная работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [30].

Введем обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области Ω и имеющих компактный носитель в Ω; $H^2(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ, по норме

$$\left\|u; H^2(\Omega,\Gamma)\right\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le 2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx\right)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j \ge 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; если $\Gamma = \emptyset$, то пространство $H^2(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\left\|u; H^2(G_0)\right\|$, где $G_0 \subset \bar{\Omega}$ – произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u,\Omega) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx, \quad D_a(u,\Omega) = \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx,$$

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x : |x| < R\}, \quad \partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x : |x| = R\}.$$

Под конусом K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

Пусть $\binom{n}{k}$ – биномиальный коэффициент (n,k), $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Определение 1. *Решением однородного бигармонического уравнения* (1) *в* Ω будем называть функцию $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такую, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx = 0.$$

Лемма. *Пусть* u *– решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию* $D_a(u,\Omega) < \infty$. *Тогда*

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $P(x)$ *– многочлен,* $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $\Gamma(x)$ *– фундаментальное решение уравнения* (1), $C_\alpha = \mathrm{const}$, $\beta \ge 0$ *– целое число, а для функции* $u^\beta(x)$ *справедлива оценка*

$$\left|\partial^\gamma u^\beta(x)\right| \le C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \mathrm{const},$$

для любого мультииндекса γ.

Замечание. Для фундаментального решения $\Gamma(x)$ бигармонического уравнения известно [33], что

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C|x|^{4-n}, & \text{если} \quad 4 - n < 0 \quad \text{или} \quad n \text{ нечетно},\\ C|x|^{4-n}\ln|x|, & \text{если} \quad 4 - n \ge 0 \quad \text{и} \quad n \text{ четно}. \end{cases}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \le 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \ge 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$. Продолжим функцию v на $\mathbb{R}^n$, полагая $v = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Тогда функция $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v = f,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \{x : |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $D_a(v, \mathbb{R}^n) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [34], поскольку она основывается на лемме 2 из [34], в которой никаких ограничений на знак σ нет. Следовательно, разложение

$$v(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$$

справедливо для любого a, где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $C_\alpha = \mathrm{const}$ и

$$\left|\partial^\gamma v^\beta(x)\right| \le C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \mathrm{const}.$$

Отсюда и из определения функции v следует равенство (3). Лемма доказана.

Определение 2. *Решением бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова* (1), (2) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_1) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\partial u/\partial \nu = 0$ на Γ_2, такую, что для всякой функции $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_1) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ на Γ_2, выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi dx - \int_{\Gamma_2} \tau u \varphi ds = 0. \qquad (4)$$

Обозначим через $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ пространство обобщенных решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова (1), (2), имеющих конечный интеграл Дирихле, т.е.

$$\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = \left\{ u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \tau u\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ D(u, \Omega) < \infty \right\}.$$

Положим по определению

$$\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \left\{ u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \tau u\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ D_a(u, \Omega) < \infty \right\}.$$

Через $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ обозначим размерности пространств $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ соответственно. В зависимости от значения параметра a будем вычислять $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Бигармоническая задача* (1), (2) *с условием* $D(u, \Omega) < \infty$ *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений, т.е.* $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = n + 1$.

Доказательство. Доказательство теоремы 4 приведено в [30].

Теорема 2. *Если* $-n \le a < n - 4, n > 4$, *то* $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $0 \le a < n - 4$, $n > 4$.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$, если $a \ge 0$.

Докажем, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Тогда, согласно лемме 2, решение u имеет вид (3), т.е.

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P(x) \le 1$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Легко заметить, что $D_a(P(x), \Omega) = 0$ и $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $a < n - 4$. Следовательно, $D_a(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Итак, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim\ \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Согласно теореме 4,

$$\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теперь рассмотрим случай $-n \le a < 0$, $n > 4$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, где $-n \le a < 0$. Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω имеет вид (3).

Так как $\mathrm{ord} P(x) \le 1$, то $D(P(x), \Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$ при $n > 4$. Следовательно, $D(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$.

С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, если $a < 0$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim\ \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. В силу теоремы 4, имеем

$$\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $n-4 \le a < n-2$, $n > 4$, *то* $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n$.

Доказательство.

Шаг 1. Для произвольного числа $e \neq 0$ построим обобщенное решение уравнения (1) с граничными условиями

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

и с условием

$$\chi(u_e, \Omega) \equiv \int_\Omega \left(\frac{|u_e|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e|^2}{|x|^2} + |\nabla\nabla u_e|^2\right) dx < \infty. \tag{6}$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx$$

в классе $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = e,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$ допустимых функций.

Справедливость условия (6), как следствие неравенства Харди, следует из результатов работ [7]–[9]. Согласно лемме 2, решение u_e имеет вид

$$u_e(x) = P_e(x) + R_e(x),$$

где $P_e(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P_e(x) \le 1$,

$$R_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Из условия (6) следует, что $P_e(x) \equiv 0$.

Покажем, что $C_0' \neq 0$. Предположим, что $C_0' = 0$. Умножив уравнение (1) на единицу и проинтегрировав по Ω_R, получим

$$\left(\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} + \int_{|x|=R}\right) \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Так как $C_0' = 0$, то

$$\left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n}, \quad C = \mathrm{const},$$

$$\left|\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds\right| \le \mathrm{const} \int_{|x|=R} \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| ds \le \mathrm{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = \mathrm{const}\, R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Следовательно, принимая во внимание граничные условия на Γ_2, получаем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma_2} \tau u_e ds = 0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что

$$\int_\Omega (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = -e\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на u_e и проинтегрировав по Ω_R с учетом граничных условий (5), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u_e)^2 dx = -\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds + J_1(u_e) + J_2(u_e), \tag{9}$$

где

$$J_1(u_e) = \int_{|x|=R} \Delta u_e \frac{\partial u_e}{\partial \nu} ds, \quad J_2(u_e) = -\int_{|x|=R} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds.$$

Покажем, что $J_1(u_e) \to 0$, $J_2(u_e) \to 0$ при $R \to \infty$. Так как

$$|u_e| \le C|x|^{4-n}, \quad |\Delta u_e| \le C|x|^{2-n}, \quad \left|\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{3-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{1-n},$$

то при $R \to \infty$, $n > 4$ имеем

$$|J_i(u_e)| \le C \int_{|x|=R} |x|^{5-2n} ds = \mathrm{const}\, R^{4-n} \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Переходя к пределу в равенстве (9) при $R \to \infty$, получаем требуемое равенство (8), так как $u_e|_{\Gamma_1} = e$. Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int_{\Omega} (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = -e \int_{\Gamma_2} \tau u_e ds.$$

С помощью интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = 0$$

получаем, что u_e является решением однородной задачи (1), (2), и $u_e = 0$, так как $e \neq 0$. Значит, $\Delta u_e = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (5) следует (см. [35, Гл. 2.4]), что $u_e \equiv e \neq 0$. Полученное соотношение противоречит условию (6). Таким образом, $C_0' \neq 0$.

Положим $s = e/C_0'$.

Шаг 2. Рассмотрим теперь уравнение (1) с граничными условиями

$$u_A(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1}, \quad \left.\frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1}, \quad \left.\frac{\partial u_A}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta u_A}{\partial \nu} + \tau u_A\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

где A – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, Ax обозначает стандартное скалярное произведение A и x.

Для любого ненулевого вектора A построим обобщенное решение бигармонического уравнения (1) с граничными условиями (10) и с условием

$$\chi(u_A, \Omega) < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (1), (10) строится вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1},\ \left.\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1},\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$.

Условия (11), как следствие неравенства Харди, следует из результатов [7]–[9]. Согласно лемме 2, имеет место равенство

$$u_A(x) = P_A(x) + R_A(x),$$

где $P_A(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P_A(x) \le 1$,

$$R_A(x) = C_0 \Gamma(x) + \sum_{0 < |\alpha| \le \beta} \partial^{\alpha} \Gamma(x) C_{\alpha} + u_A^{\beta}(x).$$

Из условия (11) следует, что $P_A(x) \equiv 0$.

Шаг 3. Рассмотрим функцию

$$v = (u_A(x) - Ax) - (u_e - e),$$

где $e = sC_0$, число s определено выше. Очевидно, что v — решение задачи (1), (2).

Докажем, что $D_a(v,\Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Имеем

$$u_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u_A^\beta(x), \tag{12}$$

$$u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha' + u_e^\beta(x), \tag{13}$$

причем $C_0' = e/s = sC_0/s = C_0$. Следовательно,

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha'' + u_0^\beta(x),$$

где $C_\alpha'' = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Нетрудно проверить, что $D_a(\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha',\Omega) < \infty$, $D_a(u_0^\beta,\Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Отсюда следует, что $D_a(u_A - u_e,\Omega) < \infty$ и $D_a(v,\Omega) < \infty$. Легко заметить, что $v \not\equiv 0$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору A из $\mathbb{R}^n$ отвечает ненулевое решение v_A задачи (1), (2) с условием $D_a(v_A,\Omega) < \infty$, причем

$$v_A = u_A(x) - u_e - Ax + e.$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что соответствующие решения $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$ — линейно независимы.

Пусть $\sum_{i=1}^n c_i v_{A_i} \equiv 0$, где $c_i = \mathrm{const}$. Положим $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n c_i A_i x$. Тогда

$$W_1 = \sum_{i=1}^n c_i(u_{A_i} - u_e + e), \qquad \int_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx < \infty.$$

Покажем, что $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n c_i A_i x \equiv 0$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n c_i A_i = (t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\int_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx = \int_\Omega |x|^{a-2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)dx = \infty,$$

если $T \ne 0$. Следовательно, $T = \sum_{i=1}^n c_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов $A_1, \ldots, A_n$ получим, что $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере n линейно независимых решений.

Шаг 4. Докажем, что любое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$, т.е.

$$u = \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}, \qquad C_i = \mathrm{const}.$$

Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = Ax + B + \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x),$$

где A — постоянный вектор, B — некоторое число.

Так как $A_1, \dots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, то существуют константы $C_1, \dots, C_n$ такие, что

$$A = -\sum_{i=1}^{n} C_i A_i.$$

Положим

$$u_1 \equiv u - \sum_{i=1}^{n} C_i v_{A_i}.$$

Очевидно, что функция u_1 является решением задачи (1), (2) и $D_a(u_1, \Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_1 \equiv 0$ в Ω. Имеем

$$u_1 = b + z(x),$$

где $b = B - \sum_{i=1}^{n} C_i e_i$,

$$z(x) = \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^{n} C_i [u_{A_i} - u_{e_i}],$$

т.е. $z = u_1 - b$ и

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu} + \tau z\right)\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Легко заметить, что $\chi(z, \Omega) < \infty$. Таким образом, z является решением задачи (z_b):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu} + \tau z\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z, \Omega) < \infty.$$

Кроме того, $D_a(z, \Omega) < \infty$.

Докажем, что если $e \ne 0$, то $D_a(u_e, \Omega) = \infty$, где u_e – построенное выше решение задачи (e):

$$\Delta^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \left.\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} + \tau u_e\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(u_e, \Omega) < \infty.$$

Имеем $u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + R_1(x)$, причем $C_0' \ne 0$, если $\mathbf{e} \ne 0$, и

$$R_1(x) = \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D_a(R_1(x), \Omega) < \infty$.

Так как $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$, то внутри некоторого конуса K справедливо неравенство

$$|\nabla\nabla\Gamma(x)| \ge C|x|^{2-n}.$$

Поэтому

$$D_a(C_0'\Gamma(x), \Omega) \ge C(C_0') \int\limits_{K\cap\{|x|>H\}} |x|^{2(2-n)+a} dx = \infty,$$

если $C_0' \ne 0$ и $a \ge n - 4$. Отсюда следует, что $D_a(u_e, \Omega) = \infty$ при $e \ne 0$.

Теперь докажем единственность решения u_e задачи (e). Пусть существуют два решения v_1 и v_2 такие, что

$$v_1\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta v_1}{\partial \nu} + \tau v_1\right)\right|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$v_2\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta v_2}{\partial \nu} + \tau v_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Тогда функция $v_e = v_1 - v_2$ удовлетворяет условиям

$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu} + \tau v_e\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(v_e, \Omega) < \infty.$$

Покажем, что $v_e \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральном тождестве (4) для функции v_e, подставляя функцию $\varphi = v_e\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \ge 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \le 1$, получаем

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2\theta_N(x)dx - \int\limits_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,\theta_N(x)ds = -J_1(v_e) - J_2(v_e), \tag{14}$$

где

$$J_1(v_e) = 2\int\limits_\Omega \Delta v_e \nabla v_e \nabla\theta_N(x)dx, \quad J_2(v_e) = \int\limits_\Omega \Delta v_e v_e \Delta\theta_N(x)dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского с учетом условия $\chi(v_e, \Omega) < \infty$ легко показать, что $J_1(v_e) \to 0$ и $J_2(v_e) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (14) при $N \to \infty$, получаем

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2\theta_N(x)dx - \int\limits_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,\theta_N(x)ds \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

С помощью интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2 dx - \int\limits_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,ds = 0$$

получаем, что если v_e является решением однородной задачи (1), (2), то $\Delta v_e = 0$, $x \in \Omega$.

Таким образом,

$$\Delta v_e = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu} + \tau v_e\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Из того что

$$\int\limits_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,ds = 0$$

имеем $v_e \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры. Отсюда следует [35, Гл. 2.4], что $v_e \equiv 0$ в Ω. Тем самым решение u_e задачи (e) единственно. Следовательно, $z = u_e$ при $e = -b$ и $D_a(z, \Omega) = \infty$ при $b \ne 0$.

С другой стороны, $D_a(z, \Omega) < \infty$, где $z = u_1 - b$, откуда $b = 0$. Таким образом, $u_1 = z$ является решением следующей задачи (z_0):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$z\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu} + \tau z\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z, \Omega) < \infty.$$

В силу единственности решения задачи (e) $u_1 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $n - 2 \le a < \infty$, $n > 4$, *то* $\dim \operatorname{Ker}_a(\Delta^2) = 0$.

Доказательство. Пусть $a = n - 2$, $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ и $u \not\equiv 0$.

Так как $\operatorname{Ker}_{n-2}(\Delta^2) \subset \operatorname{Ker}_{n-4}(\Delta^2)$, то в силу теоремы 4 решение u имеет вид

$$u = u_A - Ax - u_e + e, \tag{15}$$

где $e = sC_0$, а C_0 определяется из формулы (12).

Подставляя формулы (12) и (13) в (15), получаем

$$u(x) = P_0(x) + (C_0 - C_0')\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P_0(x) = -Ax + e$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C'_\alpha$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Так как $C_0' = C_0$, то $C_0 - C_0' = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x). \tag{16}$$

Докажем, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (16). Пусть $\tilde{C}_1 = 0$, тогда

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Умножив уравнение (1) на u и проинтегрировав по Ω_R, учитывая граничные условия (2), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = \int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds. \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$|u| \le C|x|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le C, \quad |\Delta u| \le C|x|^{-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n-1}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds\right| \le \text{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = \text{const}\, R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (17), получаем

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = 0.$$

Из того что

$$\int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = 0,$$

имеем $u \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры, и, значит, $\Delta u = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (2) следует [35, Гл. 2.4], что $u \equiv 0$ в Ω. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (16).

Так как $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$, то $D_a(u,\Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D_a(P_0(x),\Omega) = 0$ и $D_a(R_2(x),\Omega) < \infty$, где

$$R_2(x) = \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Тогда в силу (16) и неравенства треугольника получим $D_a((\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x),\Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$. Тогда внутри некоторого конуса K имеет место неравенство

$$|\nabla\nabla(\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x)| \ge C|x|^{1-n}.$$

Следовательно,

$$\infty > D_a((\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x),\Omega) \ge C \int_{K \cap \{|x|>H\}} |x|^{2-2n+a} dx = \infty \quad \text{при} \quad a \ge n-2.$$

Полученное противоречие означает, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Бигармоническая задача* (1), (2) *с условием* $D_a(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $k(r,n)$ *линейно независимых решений при* $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, $n > 4$, $r > 1$, *где*

$$k(r,n) = \binom{r+n}{n} - \binom{r+n-4}{n}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $\binom{r+n}{n}$ (см. [36]).

Тогда размерность всех бигармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна

$$\binom{r+n}{n} - \binom{r+n-4}{n},$$

так как бигармоническое уравнение представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $(r-4)$ в $\mathbb{R}^n$.

Если через $k(r,n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r, а через $l(r,n)$ – число линейно независимых однородных многочленов степени r, являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r,n) = \sum_{s=0}^{r} l(s,n),$$

где

$$l(s,n) = \binom{s+n-1}{n-1} - \binom{s+n-5}{n-1}, \quad s > 0.$$

Докажем сначала, что задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ при $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$ имеет $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Пусть $w_1, \ldots, w_k$ – базис в пространстве полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r. Так как $\operatorname{ord} w_i \le r$, то $D_a(w_i,\Omega) < \infty$ при $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$.

По каждому w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, построим решение v_i уравнения (1) такое, что

$$v_i\big|_{\Gamma_1} = w_i\big|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$\left(\frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu} + \tau v_i\right)\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta w_i}{\partial \nu} + \tau w_i\right)\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$D(v_i,\Omega) < \infty, \quad \int_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx$$

в классе допустимых функций $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = w,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1},\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$.

Рассмотрим разность $q_i = w_i - v_i$. Имеем

$$\Delta^2 q_i = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$q_i\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta q_i}{\partial \nu} + \tau q_i\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad D(q_i,\Omega) < \infty.$$

Докажем, что q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{k} c_i q_i = 0, \quad c_i = \text{const},$$

то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (w_i - v_i) = 0,$$

т.е.

$$W \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \equiv V,$$

следовательно, $|W|^2 = |V|^2$, $|\nabla W|^2 = |\nabla V|^2$, $|\nabla\nabla W|^2 = |\nabla\nabla V|^2$, и

$$D(W, \Omega) = D(V, \Omega) < \infty,$$

$$\int_\Omega |\nabla W|^2 |x|^{-2}\, dx = \int_\Omega |\nabla V|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty,$$

$$\int_\Omega |W|^2 |x|^{-4}\, dx = \int_\Omega |V|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Согласно лемме 2, решение V уравнения (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty \quad \text{при} \quad n > 4.$$

В силу неравенства треугольника, $D(P(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla P(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) = 0$. Пусть $\operatorname{ord} P(x) = r_1$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство

$$|P(x)| \ge C |x|^{r_1}.$$

Следовательно,

$$\infty > \int_\Omega |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx \ge C \int_{K \cap \{|x| > H\}} |x|^{(r_1 - 2)2} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{2r_1 - 4 + n} |x|^{-1}\, d|x|.$$

Так как $n > 4$, то полученный интеграл сходится только при $r_1 < 0$.

Таким образом, $P(x) \equiv 0$ и $V(x) = R(x)$, где $R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \equiv W = V(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Так как W – многочлен, то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = 0.$$

Отсюда $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, в силу того, что w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — базис в пространстве полиномиальных решений.

Таким образом, бигармоническая задача (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r, n)$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что всякое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $q_i = w_i - v_i$.

Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = [2 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, то $1 - n/2 - a/2 \le r < 2 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [2 - n/2 - a/2] = m_0$. Таким образом, $\operatorname{ord} P(x) \le r$.

Покажем, что $P(x)$ — решение уравнения (1). Имеем

$$0 = \Delta^2 u = \Delta^2 P(x) + \Delta^2 R(x),$$

причем $\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $\Delta^2 P(x)$ — многочлен и

$$\Delta^2 P(x) = -\Delta^2 R(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$

то $\Delta^2 P(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ — полиномиальное решение бигармонического уравнения (1). Следовательно, оно представляется линейной комбинацией функций w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i.$$

Докажем, что $u = \sum_{i=1}^k c_i q_i$. Положим

$$u_2 = u - \sum_{i=1}^k c_i q_i, \quad \text{т.е.} \quad u_2 = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i.$$

Тогда имеем

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

По построению решения v_i имеем $D(v_i, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Кроме того, легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $D(u_2, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Таким образом, u_2 является решением следующей задачи (u_2):

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$D(u_2, \Omega) < \infty, \quad \int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Покажем, что $u_2 \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для любой функции $\varphi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$$\varphi\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} + \tau \varphi\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

справедливо интегральное тождество (4)

$$\int_\Omega \Delta u_2 \Delta \varphi dx - \int_{\Gamma_2} \tau u_2 \varphi ds = 0.$$

Подставим $\varphi = u_2 \theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \ge 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \le 1$, получим

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2 \theta_N(x) dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2 \theta_N(x) ds = -J_1(u_2) - J_2(u_2), \tag{18}$$

где

$$J_1(u_2) = 2\int_\Omega \Delta u_2 \nabla u_2 \nabla \theta_N(x) dx, \quad J_2(u_2) = \int_\Omega \Delta u_2 u_2 \Delta \theta_N(x) dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия задачи (u_2), легко показать, что $J_1(u_2) \to 0$ и $J_2(u_2) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (18) при $N \to \infty$, получаем

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2 ds = 0.$$

Из того что

$$\int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2 ds = 0,$$

имеем $u_2 \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры, и, значит, $\Delta u_2 = 0$ в Ω. Таким образом,

$$\Delta u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [35, Гл. 2.4], что $u_2 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stekloff W.* Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. Sci. de l'E.N.S., 3e série. 1902. V. 19. P. 191–259, 455–490.
2. *Brock F.* An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM) 2001. V. 81. № 1. P. 69–71.
3. *Kuttler J.R., Sigillito V.G.* Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 23. № 1. P. 148–160.
4. *Payne L.E.* Some isoperimetric inequalities for harmonic functions // SIAM J. Math. Anal. 1970. V. 1. № 3. P. 354–359.
5. *Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G.* Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains // Lecture Notes Math. V. 1991. Springer-Verlag, 2010.
6. *Gazzola F., Sweers G.* On positivity for the biharmonic operator under Steklov boundary conditions // Arch. Rational Mech. Anal. 2008. V. 188. № 3. P. 399–427.

7. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
8. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Hardy's and Korn's inequality and their application // Rend. Mat. Appl. Serie VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
9. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 354–366.
11. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint–Venant's principle // Proc. Royal Society Edinburgh. 1983. V. 93A. P. 327–343.
12. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
13. *Cakoni F., Hsiao G.C., Wendland W.L.* On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation // Complex Variables. 2005. V. 50: (7–115). P. 681–696.
14. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
15. *Карачик В.В.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
16. *Карачик В.В.* Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 132–150.
17. *Матевосян О.А.* О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 403–418.
18. *Матевосян О.А.* О решениях внешних краевых задач для системы теории упругости в весовых пространствах // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 12. С. 25–60.
19. *Матевосян О.А.* О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. Матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 49–82.
20. *Matevosyan O.A.* On solutions of a boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2014. V. 21. № 1. P. 130–132.
21. *Matevossian H.A.* On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis Appl. 2015. V. 7. № 1. P. 74–78.
22. *Матевосян О.А.* Решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 4. С. 481–494.
23. *Матевосян О.А.* О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947.
24. *Matevosyan O.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
25. *Матевосян О.А.* О решениях одной краевой задачи для бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
26. *Matevossian H.A.* On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces // Russ. J. Math. Phys. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
27. *Matevossian H.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2017. V. 9. № 2. P. 151–157.
28. *Matevossian H.A.* On the Steklov-type biharmonic problem in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 2. P. 271–276.
29. *Matevossian H.A.* On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces // Complex Variables & Elliptic Equations. 2019. V. 64. № 1. P. 1–7.
30. *Matevossian H.A.* On the mixed Dirichlet–Steklov-type and Steklov-type biharmonic problems in weighted spaces // Math. Comput. Appl. 2019. V. 24. № 1, 25. P. 1–9.
31. *Matevossian H.A.* Mixed boundary value problems for the elasticity system in exterior domains // Math. Comput. Appl. 2019. V. 24. № 2, 58, P. 1–7.
32. *Matevossian H.A.* On the mixed Neumann–Robin problem for the elasticity system in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 2. P. 272–276.
33. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
34. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. 75–99.
35. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
36. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

MULTIZONAL INTERNAL LAYERS IN THE SINGULARLY PERTURBED EQUATION WITH A DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE[1)]

Mingkang Ni[1,2,*], Qian Yang[1]

[1] *School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai, 200062, PR China*

[2] *Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai, China*

**e-mail: 15934551791@163.com; xiaovikdo@163.com*

Поступила в редакцию 19.07.2020 г.
Переработанный вариант 18.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Многозонный внутренний переходный слой для сингулярно возмущенного уравнения с разрывной правой частью. Исследуется двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда вырожденное уравнение имеет двухкратный корень. Рассматривается новый класс задач, у которых нелинейности претерпевают разрывы, что приводит к появлению многозонных резких внутренних переходных слоев в окрестностях точек разрывов. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение и построено полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда корни вырожденного уравнения являются простыми. Библ. 30.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, внутренний переходный слой, асимптотические методы.

DOI: 10.31857/S0044466921060090

[1)] Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 967–976

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ПАРАМЕТРИКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2021 г. М. Отелбаев[1,*], А. П. Солдатов[2,3,]**

[1] 050040 Алматы, ул. Масанчи, 34\1, Междунар. ун-т информационных технологий, Казахстан

[2] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[3] 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: sadybekov@math.kz

**e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 06.08.2020 г.
Переработанный вариант 06.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Введены обобщенные интегралы с ядрами, зависящими от разности аргументов, взятые по области и гладкому контуру, границе этой области. Эти ядра возникают как параметриксы эллиптических систем первого порядка с переменными коэффициентами. С помощью указанных интегралов (с комплексной плотностью по области и вещественной по контуру) описаны представления гладких в замкнутой области вектор-функций. Установлена фредгольмовость полученного представления в соответствующих банаховых пространствах. Библ. 18.

Ключевые слова: интегралы Помпейю и типа Коши, ограниченный оператор, фредгольмовость, параметрикс, эллиптические системы.

DOI: 10.31857/S0044466921030157

1. ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОМПЕЙЮ И ТИПА КОШИ

Пусть конечная область D на комплексной плоскости ограничена гладким контуром Γ класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$. Рассмотрим в этой области $l\times l$-матрицу-функцию $A(z)\in C^{1,\nu}(\overline{D})$, собственные значения которой не вещественны для всех z. В этом случае в верхней и нижней полуплоскостях лежит одно и то же число собственных значений, соответственно, l_1 и l_2 с $l_1+l_2=l$. Случаи $l_1=l$ или $l_2=l$ не исключаются.

Удобно с каждым комплексным числом $z=x+iy$ связать матрицу $z_{[A(t)]}=x1+yA(t)$, которая, очевидно, при $z\neq 0$ обратима. Здесь и ниже 1 означает единичную матрицу, порядок которой ясен из контекста. Аналогичный смысл имеет и комплексный матричный дифференциал $dz_{[A(t)]}=1dx+A(t)dy$, который используем в криволинейных интегралах по ориентируемому контуру Γ. Для определенности последний ориентируется положительно по отношению к области D, т.е. оставляет ее слева.

Исходя из l-вектор-функций $\varphi^0\in C(\Gamma)$ и $\varphi^1\in C(\overline{D})$, введем криволинейный интеграл по контуру

$$(I\varphi^0)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t),\qquad z\in D, \tag{1.1}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Комитетом науки Минобрнауки Республики Казахстан (грант № АР 08857604).

где матричные выражения поставлены впереди l-векторов φ^0 и действуют на него по обычному правилу, и интеграл по области

$$(T\varphi^1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D (t-z)^{-1}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2t, \quad z \in D, \tag{1.2}$$

где d_2t – элемент площади. Заметим, что по отношению к единичному касательному вектору $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ к контуру Γ в точке t, направленному в соответствии с его ориентацией, матричный дифференциал $dt_{[A(t)]} = [e(t)]_{[A(t)]}d_1t$, где d_1t есть элемент длины дуги.

В случае скалярной матрицы $A = i$ интеграл $I\varphi$ представляет собой классический интеграл типа Коши (см. [1], [2]), а $T\varphi$ с точностью до множителя $-2i$ совпадает с интегралом Помпейю (см. также [4]).

Отметим, что при фиксированном $z = x + iy \in \mathbb{C}$ матрица-функция $X(\xi) = \xi^{-1}_{A(z)}$ является параметриксом (см. [5]) эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A(z)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

для вектор-функции $U = (U_1, \ldots, U_l)$. Другими словами, с точностью до положительного множителя она является фундаментальной матрицей эллиптической системы

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} - A(z)\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = 0.$$

Как и в случае классических интегралов типа Коши для точек $z = t_0 \in \Gamma$ можем ввести обобщенный сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi^0)(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1.3}$$

который понимается в смысле главного значения.

Введем еще интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \xi^{-1}_{[A(t)]}d\xi_{[A(t)]}, \quad t \in \Gamma, \tag{1.4}$$

по единичной окружности $\mathbb{T}$, ориентированной против часовой стрелки. Очевидно, матрица-функция $E(t)$ вместе с $A(t)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\Gamma)$. Ее можно рассматривать как значение скалярной аналитической вне вещественной оси функции

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} (\xi_1 + \zeta\xi_2)^{-1}(d\xi_1 + \zeta d\xi_2), \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0,$$

от матрицы $A(t)$. Очевидно, эта функция тождественно равна ± 1 в полуплоскости $\pm\operatorname{Im}\zeta > 0$. В частности, матрица $E(t) = 1$ при $l_1 = l$ и $E(t) = -1$ при $l_2 = l$. В общем случае можно лишь утверждать, что $E^2(t) = 1$. Ясно, что как функция от $t \in \Gamma$ эта матрица принадлежит $C^{1,\nu}(\Gamma)$.

Удобно интеграл $U = I\varphi^0$ записать в виде

$$(I\varphi^0)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(t; t-z, dt)\varphi^0(t), \tag{1.5}$$

где отношению к $\xi = t - z$ и $\eta = d1_1 + idt_2$, $t = t_1 + it_2 \in \Gamma$ положено

$$Q(t; \xi, \eta) = \xi^{-1}_{[A(t)]}\eta_{[A(t)]}.$$

Очевидно, по переменной t матрица-функция $Q(t; \xi, \eta)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\Gamma)$ вместе со всеми частными производными по ξ_1, ξ_2 равномерно по $\xi, \eta \in \mathbb{T}$. Заметим, что функция $Q(t; \xi, \xi)$ не зависит от ξ, поэтому по терминологии [6] интеграл $U = I\varphi^0$ с ядром Q этого типа также называем обобщенным интегралом типа Коши. Поэтому теоремы 3.8.1 и 3.8.2 из [6] приводят к следующему результату.

Теорема 1.1. *При* $0 < \mu < \nu$ *оператор* I *ограничен* $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\bar{D})$ *и* $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\bar{D})$, *причем для граничных значений функции* $U = I\varphi^0$ *справедлива формула*

$$2U^+(t) = E(t)\varphi^0(t) + (S\varphi^0)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1.6}$$

где $\phi^+(t_0) = \lim \phi(z)$ *при* $z \to t_0 \in \Gamma$.

В основе доказательства теоремы 3.8.2 лежит формула дифференцирования интеграла $U = I\varphi$, составляющая суть леммы 3.8.2 статьи [6]. Применительно к (1.5) для фиксированного $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ эта формула имеет следующий вид:

$$\left(\eta_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial U}{\partial y}\right)(z) \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} [Q_0(t;\xi,\eta)\varphi^0(t) + Q(t;\xi,\eta)(\varphi^0)'(t)]d_1 t, \tag{1.7}$$

где

$$Q_0(t;\xi,\eta) = Q_t'(t;\xi,\eta) = \{\xi^{-1}_{[A(t)]}\eta_{[A(t)]}\}_t'.$$

Здесь штрих означает производную по параметру длины дуги, отсчитываемой на контуре в положительном направлении.

В этой формуле при фиксированном η выражения $Q(t;\xi,\eta)$ и $Q_0(t;\xi,\eta)$ уже не являются ядрами Коши и по отношению к ним нужно воспользоваться теоремой 3.6.1 из [6]. На основании этой теоремы операторы, определяемые слагаемыми в правой части (1.7), ограничены $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\bar{D})$, что приводит к ограниченности оператора $I: C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\bar{D})$.

Из теоремы 1.1 следует, что сингулярный оператор S ограничен в пространствах $C^{\mu}(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Зависимость S от матрицы $A - S_{(A)}$, в частности, для скалярной матрицы $A = i$ имеем классический оператор Коши $S_{(i)}$.

Лемма 1.1. (а) *Оператор* $S_{(A)} - S_{(i)}$ *компактен в пространствах* $C^{\mu}(\Gamma)$ *и* $C^{1,\mu}(\Gamma)$. *В частности, аналогичным свойством обладает и оператор* $S_{(A)} - S_{(\bar{A})}$.

(б) *Пусть матрица-функция* $a \in C^{\mu}(\Gamma)$ *рассматривается как оператор умножения* $\varphi \to a\varphi$. *Тогда оператор* $aS - Sa$ *компактен в пространстве* $C^{\mu}(\Gamma)$. *При дополнительном предположении* $a \in C^{1,\nu}(\Gamma)$ *этот оператор компактен и в пространстве* $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Доказательство. (а) Утверждение леммы по отношению к C^{μ} будет установлено, если убедимся, что для любой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ интегральный оператор

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left[(t - t_0)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t) - \frac{dt}{t - t_0}\varphi^0(t)\right], \quad t_0 \in \Gamma_0,$$

компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma_0)$. С этой целью выберем параметризацию $\gamma \in C^{1,\nu}([0,1])$ дуги Γ_0, что в силу принятого предположения $\Gamma \in C^{1,\nu}$ возможно. Тогда оператор K можем записать в форме

$$(K\varphi)[\gamma(s_0)] = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{k(s_0,s)}{s - s_0}\varphi[\gamma(s)]ds, \quad 0 \le s_0 \le 1,$$

где положено

$$k(s_0,s) = \left[\frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0}\right]_{[A(\gamma(s))]}[\gamma'(s)]_{[A(\gamma(s))]} - \gamma'(s).$$

Видно, что функция $k(s_0,s)$ принадлежит $C^{\nu}([0,1]\times[0,1])$ и обращается в нуль при $s = s_0$. Поэтому остается воспользоваться теоремой 3.2.1 из [6], обеспечивающей компактность оператора K.

По отношению к $C^{1,\mu}$ доказательство леммы основывается на формуле дифференцирования сингулярного интеграла. Как показано в теореме 3.9.2 из [6], формула (1.7) вместе с соотношениями для граничных значений приводят к формуле дифференцирования

$$(S\varphi)' = S_0\varphi + S_1\varphi', \quad \varphi = \varphi^0, \tag{1.8}$$

с операторами

$$(S_0\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t_0)]\varphi(t)d_1t, \quad (S_1\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q[t; t - t_0, e(t_0)]\varphi(t)d_1t,$$

где $e(t_0) = e_1(t_0) + ie_2(t_0)$ – единичный касательный вектор к Γ в точке t_0, направленный в направлении выбранной ориентации контура.

На основании теорем 3.2.1 и 3.5.1 из [6], примененных к слагаемым равенства

$$(S_0\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t_0) - e(t)]\varphi(t)d_1t + \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t)]\varphi(t)d_1t,$$

оператор S_0 ограничен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Из этих же соображений аналогичный факт справедлив и для оператора S_1. Поскольку $Q[t; \xi, e(t)]d_1t = Q(t; \xi, dt)$, этот оператор можем представить в виде

$$S_1 = K_1 + S \tag{1.9}$$

с компактным оператором K_1.

Очевидно, формулы, аналогичные (1.8), (1.9), можно записать и для оператора $S_{(i)}$, отвечающего $A = i$, а также для разности $N = S_{(A)} - S_{(i)}$. С учетом первой части леммы

$$(N\varphi)' = N_0\varphi + N_1\varphi',$$

где оператор N_0 ограничен, а N_1 – компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. С помощью этой формулы компактность оператора N в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ выводится непосредственно.

Вторая часть (б) леммы доказывается аналогично.

С помощью леммы 1.1 аналогично [7] классические результаты из [1] о разрешимости сингулярных интегральных уравнений распространяются с $S_{(i)}$ на оператор $S = S_{(A)}$.

Теорема 1.2. *Оператор* $N\varphi = \operatorname{Re}(G_1\varphi + SG_2\varphi)$*, где* $l \times l$ *– матрицы-функции* $G_1, G_2 \in C^\nu(\Gamma)$*, фредгольмов в пространстве* $C^\mu(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда матрица* $G = \operatorname{Re} G_1 + i \operatorname{Im} G_2$ *обратима, и его индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} N = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_\Gamma, \tag{1.10}$$

где приращение аргумента берется на контуре в соответствии с его ориентацией.

Если дополнительно $G_1, G_2 \in C^{1,\nu}(\Gamma)$*, то любое решение* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ *уравнения* $N\varphi = f$ *с правой частью* $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ *также принадлежит классу* $C^{1,\mu}(\Gamma)$*. В частности, оператор* N *фредгольмов в пространстве* $C^{1,\mu}(\Gamma)$ *с тем же индексом.*

Рассмотрим подробнее композицию с I дифференциального оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - A(z)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Лемма 1.2. *Оператор* LI *ограничен* $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ *и, в частности, компактен*: $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$.

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы достаточно установить локально в области $D_0 \subseteq D$, примыкающей к граничной дуге $\Gamma_0 = \Gamma \cap \overline{D}$ достаточно малой длины. Пусть подобласть

$D_1 \supseteq \overline{D}_0$ и дуга Γ_1 имеют аналогичный смысл. Тогда утверждение леммы достаточно установить по отношению к оператору

$$(I_1\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(t-z)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\psi(t), \quad z\in D_0, \tag{1.12}$$

т.е. доказать, что оператор LI_1 ограничен: $C^\mu(\Gamma_1)\to C^\mu(\overline{D}_0)$.

Прямое дифференцирование (1.12) дает выражение

$$(LI_1\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}[A(t)-A(z)](t-z)^{-2}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\psi(t), \quad z\in D_0. \tag{1.13}$$

Существуют такие матрицы-функции $A_1(z,t), A_2(z,t)\in C^\nu(\overline{D}_1\times\overline{D}_1)$, что

$$A(t)-A(z) = A_1(z,t)(t-z) + A_2(z,t)(\overline{t}-\overline{z}), \quad z,t\in D_1. \tag{1.14}$$

В самом деле, это утверждение инвариантно относительно линейных преобразований плоскости, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что прямые, параллельные координатным осям, могут пересекать дугу Γ_1 не более чем в одной точке. При этом саму область D_1 можно выбрать так, чтобы ее граница состояла из Γ_1 и двух отрезков, параллельных координатным осям. В этом случае возможность разложения (1.14) достигается интегрированием от t к z по двум отрезкам этого типа.

Подстановка (1.14) в (1.13) дает выражение

$$(LI_1\psi)(z) = U_1(z,z) + U_2(z,z), \quad U_j(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}A_j(\zeta,t)Q_j(t,t-z)\psi(t)d_1t,$$

где $Q_1(t,\xi) = \xi\xi^{-2}_{[A(t)]}e(t)_{[A(t)]}$ и $Q_2(t,\xi) = \overline{\xi}\xi^{-2}_{[A(t)]}e(t)_{[A(t)]}$. К операторам U_j можно применить вторую часть теоремы 3.8.1 из [6], согласно которой функции U_j принадлежат $C^\mu(\overline{D}_0\times\overline{D}_0)$ с соответствующей оценкой C^μ-норм. В результате приходим к справедливости леммы.

Обратимся к обобщенному интегралу Помпейю (1.2).

Теорема 1.3. *Оператор T ограничен: $C^\mu(\overline{D})\to C^{1,\mu}(\overline{D})$, причем*

$$(LT\varphi^1) = E\varphi^1 - T^1\varphi^1 \tag{1.15}$$

с интегральным оператором

$$(T^1\varphi^1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D[A(t)-A(z)](t-z)^{-2}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2t, \quad z\in D,$$

который компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$.

Доказательство основано на применении теорем 3.5.1 и 3.5.3 из [6]. С этой целью покажем, что для любой полуокружности $\mathbb{T}^+$ единичной окружности $\mathbb{T}$ интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^+}\xi^{-2}_{[A(t)]}d_1\xi = 0. \tag{1.16}$$

В самом деле, этот интеграл есть значение $\chi_0(A)$ от матрицы $A = A(t)$ аналитической вне вещественной оси функции

$$\chi_0(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^+}\frac{d_1\xi}{(\xi_1+\zeta\xi_2)^2}, \quad \operatorname{Im}\zeta\neq 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что эта функция тождественно равна нулю. Очевидно,

$$\chi_0(\zeta) = \int_\alpha^{\alpha+\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta+\zeta\sin\theta)^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{(t+\zeta)^2}.$$

Следовательно, для любых вещественных ненулевых чисел a, b справедливы соотношения $\chi_0(\zeta+a) = b\chi_0(b\zeta) = \chi_0(\zeta)$, что возможно только при $\chi_0\equiv 0$.

Таким образом, применительно к ядру $Q(t,\xi) = (2\pi i)^{-1}\xi^{-2}_{[A(t)]}$ равенство (1.16) переходит в условие (3.5.1) теоремы 3.5.1 из [6]. Поэтому на основании теорем 3.5.2 и 3.5.3 из [6] оператор T ограничен: $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, причем

$$\frac{\partial(T\varphi^1)}{\partial x}(z) = -\sigma_1(z)\varphi^1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_D (t-z)^{-2}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2t,$$

$$\frac{\partial(T\varphi^1)}{\partial y}(z) = -\sigma_2(z)\varphi^1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_D A(t)(t-z)^{-2}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2t,$$

где

$$\sigma_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \xi_j\xi^{-1}_{[A(z)]}d_1\xi, \qquad j = 1,2.$$

Очевидно,

$$-\sigma_2(z) + A(z)\sigma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}[-\xi_2 + \xi_1 A(z)]\xi^{-1}_{[A(z)]}d_1\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\xi^{-1}_{[A(z)]}d\xi_{[A(z)]},$$

так что с учетом (1.4) это выражение совпадает с $E(z)$. В результате приходим к соотношению (1.15). Что касается компактности оператора T^1, то это свойство является следствием теоремы 3.2.1 из [6].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Напомним, что при каждом $z \in \overline{D}$ собственные значения матрицы $A(z)$ лежат вне действительной оси $\mathbb{R}$, суммарное число их в верхней и нижней полуплоскостях обозначено, соответственно, l_1 и l_2. Известно, что эту матрицу можно привести к специальному блочно-диагональному виду: существует такая обратимая матрица-функция $B(z) \in C^{1,\nu}(\overline{D})$, что

$$B^{-1}AB = J, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где все собственные значения матрицы $J_1(J_2)$ лежат в верхней (нижней) полуплоскости. В частности, J_k является $l_k \times l_k$-матрицей.

Для односвязных областей этот факт был установлен В.С. Виноградовым (см. [8]), в общем случае многосвязных областей М.М. Сиражутдиновым (см. [9], [10]).

Исходя из пары l-вектор-функций $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$, где φ^0 и φ^1 заданы на, соответственно, Γ и D, введем оператор

$$R\varphi = I(B\varphi^0) + T(B\varphi^1). \tag{2.2}$$

В дальнейшем этот оператор рассматриваем для комплексных вектор-функций $\varphi^1 \in C^{\mu}(\overline{D})$ и вещественных вектор-функций φ^0, указывая этот факт обозначением $\varphi^0 \in C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ или $\varphi^0 \in C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$.

Наряду с $C^{1,\mu}(\overline{D})$, введем в рассмотрение пространство $C^{\mu}_A(\overline{D})$ всех l-вектор-функций $U \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D)$, для которых $LU \in C^{\mu}(\overline{D})$. Это пространство зависит от матрицы A, определяющей дифференциальное выражение L, и снабжается нормой

$$|U| = |U|_{C^{\mu}} + |LU|_{C^{\mu}},$$

относительно которой оно банахово.

В самом деле, пусть последовательности функций $U_n \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D)$ и LU_n сходятся, соответственно, к U и V по C^{μ}-норме. Достаточно убедиться, что $U \in C^1(D)$ и $LU = V$. Очевидно, функция U является слабым решением уравнения $LU = V$, т.е. выполнено тождество

$$\int_D V(z)\varphi(z)d_2z = -\int_D U(z)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A\varphi}{\partial x}\right)d_2z,$$

справедливое для любой l-вектор-функции $\varphi \in C^1(D)$ с компактным носителем. Поэтому остается воспользоваться тем (см. [11], [12]), что для эллиптических систем любое слабое решение в области D с правой частью $V \in C^{\mu}(\overline{D})$ является классическим (и принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D}_0)$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_0 \subseteq D$).

Очевидно, оператор T ограничен: $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}_A(\overline{D})$. В силу леммы 1.2, этот факт распространяется и на $\mathbb{R}$-линейный оператор I, который ограничен: $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}_A(\overline{D})$.

Таким образом, на основании теорем 1.1, 1.3 и леммы 1.2 имеем ограниченные $\mathbb{R}$-линейные операторы

$$R:\quad C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D}), \tag{2.3а}$$

$$R:\quad C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}_A(\overline{D}). \tag{2.3б}$$

Теорема 2.1. *Каждый из операторов* (2.3) *фредгольмов и его индекс равен* $l(m-2)$*, где* m *— число связных компонент контура* Γ.

Доказательство достаточно провести для случая $l_1 = l$, $l_2 = 0$, когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости.

В самом деле, из определений (1.1), (1.2) следует, что

$$I_A(B\varphi^0) = BI_J\varphi^0, \quad T_A(B\varphi^1) = BT_J\varphi^1,$$

где указана явно зависимость операторов от матрицы A. Отсюда приходим к равенству $R_A\varphi = I_J(\varphi^0) + T_J(\varphi^1)$, согласно которому утверждение теоремы достаточно установить по отношению к блочно-диагональной матрице J или, что равносильно, по отношению к каждой из матриц $J = J_1$ и $J = J_2$ в отдельности. В последнем случае имеем очевидное соотношение

$$\overline{I_J\varphi^0} + \overline{T_J\varphi^1} = -I_{\bar J}\varphi^0 - T_{\bar J}\overline{\varphi^1},$$

где черта означает комплексное сопряжение, принята во внимание вещественность функции φ^0. Поскольку $\mathbb{R}$-линейное отображение $(\varphi^0, \varphi^1) \to (\varphi^0, \overline{\varphi^1})$ является изоморфизмом, то следует справедливость рассматриваемого предложения.

Итак, пусть все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. В этом случае матрица E в (1.4) единична, а в (2.2) можем положить $R = 1$. Покажем, что оператор

$$R^{(-1)}U = (\operatorname{Re} U^+, LU), \tag{2.4}$$

который, очевидно, ограничен: $C^{1,\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D})$ и $C^{\mu}_A(\overline{D}) \to C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D})$, является регуляризатором к оператору (2.3).

Согласно (1.6) и (1.11), для функции $U = R\varphi$ имеем соотношения

$$2U^+ = \varphi^0 + S\varphi^0 + 2T\varphi^1, \quad LU = LI\varphi^0 + \varphi^1 - T^1\varphi^1. \tag{2.5}$$

Рассмотрим оператор $N = R^{(-1)}R$, который соответственно двум случаям (2.3) и действует в прямом произведении одного из пространств $C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $C^{\mu}(\Gamma)$ на $C^{\mu}(\overline{D})$, т.е. представляет собой операторную 2×2-матрицу

$$N = \begin{pmatrix} N^{00} & N^{01} \\ N^{10} & N^{11} \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.5), элементы этой матрицы действуют по формулам

$$2N^{00}\varphi^0 = \varphi^0 + \mathrm{Re}(S\varphi^0), \quad N^{01}\varphi^1 = \mathrm{Re}(T\varphi^1)^+,$$
$$N^{10}\varphi^0 = LI\varphi^0, \quad N^{11}\varphi^1 = \varphi^1 - T^1\varphi^1.$$

Условимся для двух операторов N_1 и N_2, заданных и ограниченных в одном и том же пространстве, писать $N_1 \sim N_2$, если их разность является компактным оператором. Утверждается, что соответственно двум случаям (2.3) имеют место соотношения

$$N^{00} \sim 1, \quad N^{11} \sim 1, \quad N^{10} \sim 0, \tag{2.6а}$$

$$N^{00} \sim 1, \quad N^{11} \sim 1, \quad N^{01} \sim 0. \tag{2.6б}$$

В самом деле, поскольку

$$2\,\mathrm{Re}(S\varphi^0) = S_A\varphi^0 + \overline{S_A\varphi^0} = S_A\varphi^0 - S_{\bar{A}}\varphi^0,$$

первое соотношение вытекает из леммы 1.1(а), а второе — из теоремы 1.3. Что касается третьего соотношения, то в случае (б) оно очевидно, а в случае (а) непосредственно следует из леммы 1.2.

Соотношения (2.6) показывают, что соответственно двум случаям как 2×2-матрица оператор

$$\text{(а)}\quad N \sim \begin{pmatrix} 1 & N^{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)}\quad N \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N^{10} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица в правой части этих соотношений обратима, отсюда на основании известных свойств фредгольмовых операторов заключаем, что оператор N — фредгольмов и его индекс равен нулю.

Напомним, что ограниченный оператор $M: X \to Y$ в банаховых пространствах X и Y полуфредгольмов, если его образ $\mathrm{im}\, M = M(X)$ замкнут и одно из пространств $Y/\mathrm{im}\, M$ и $\ker M = \{x \in X, Mx = 0\}$ конечномерно. В этом случае можем ввести индекс $\mathrm{ind}\, M$, равный разности $\dim(Y/\mathrm{im}\, M) - \dim(\ker M)$, допускающий значения $\pm\infty$. Таким образом, условие конечности индекса выделяет в классе полуфредгольмовых операторов фредгольмовые операторы. Известно (см. [13]), что в банаховом пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$ всех ограниченных операторов множество полуфредгольмовых операторов открыто и индекс как функция оператора постоянна на каждой связной компоненте этого множества.

Обратимся к оператору $N = R^{(-1)}R$, который сначала рассмотрим в пространстве $C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\bar{D})$. Очевидно,

$$\mathrm{im}\, N \subseteq \mathrm{im}\, R^{(-1)}, \quad \ker R \subseteq \ker N. \tag{2.7}$$

По условию образ $\mathrm{im}\, N$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Поэтому любое подпространство, содержащее $\mathrm{im}\, N$, также обладает этим свойством. Поэтому на основании (2.7) заключаем, что операторы R и $R^{(-1)}$ полуфредгольмовы, причем их индексы противоположны и $\mathrm{ind}\, R^{(-1)} > -\infty$, $\mathrm{ind}\, R < +\infty$. При этом фредгольмовость одного из операторов R, $R^{(-1)}$ влечет фредгольмовость другого.

Напомним, что в каждой точке $z \in \bar{D}$ все собственные значения матрицы $A(z)$ лежат в верхней полуплоскости. Но тогда для любого $0 \le \tau \le 1$ аналогичным свойством обладает и матрица $A_\tau(z) = i(1-\tau) + \tau A(z)$, которая совпадает с постоянной скалярной матрицей i при $\tau = 0$. Пусть операторы I_τ и T_τ определяются как в (1.1), (1.2) по отношению к A_τ и аналогичный смысл имеют R_τ и L_τ, $R_\tau^{(-1)}$. Из определения (2.4) видно, что отображение $\tau \to R_\tau^{(-1)}$ непрерывно;

$$[0,1] \to \mathscr{L}[C^{1,\mu}(\bar{D}), C^{1,\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}(\bar{D})].$$

Поскольку по доказанному выше при каждом τ оператор $R_\tau^{(-1)}$ полуфредгольмов, его индекс не зависит от τ. Утверждается, что при $\tau = 0$ операторы R_τ и $R_\tau^{(-1)}$ фредгольмовы и их индексы

$$\mathrm{ind}\, R_0 = -\mathrm{ind}\, R_0^{(-1)} = l(2-m). \tag{2.8}$$

В самом деле, $I_0\varphi^0$ является классическим интегралом типа Коши, определяющим аналитические l-вектор-функции в области D, а $T_0\varphi^1$ – оператором Помпейю. В рассматриваемом случае оператор $T_1^1 = 0$ и равенство (1.15) переходят в $L_0T_0 = 1$. Пусть Γ_j, $1 \le j \le m$, есть связные компоненты контура Γ, причем для определенности контур Γ_m охватывает все остальные. Любая функция $U \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ единственным образом представляется в виде

$$U = T_0L_0U + I_0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{2.9}$$

где функция $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^0(t)d_1t = 0, \quad 1 \le j \le m-1. \tag{2.10}$$

Этот факт является следствием известной теоремы Н.И. Мусхелишвили (см. [1]) о представлении аналитической функции $\phi = U - L_0T_0U$ интегралом типа Коши с вещественной плотностью.

Из (2.9), в частности, следует, что $C^{1,\mu}(\overline{D}) = (\operatorname{im} R_0^{(-1)}) \oplus (i\mathbb{R}^l)$. Это представление показывает (см. [14]), что образ $\operatorname{im} R_0^{(-1)})$ замкнут, так что совместно с (2.10) отсюда следуют его фредгольмовость и формула (2.8) индекса. Поскольку, как отмечалось, индекс операторов R_τ и $R_\tau^{(-1)}$ не зависит от τ, этот индекс конечен и дается той же формулой (2.8). Тем самым утверждение теоремы для случая (а) установлено.

В случае (б) область определения $C^\mu_{A_\tau}(\overline{D})$ оператора $R_\tau^{(-1)}$ зависит от τ, и потому доказательство теоремы требует другого подхода. Достаточно убедиться, что оператор $R^{(-1)}$ фредгольмов: $C^\mu_A(\overline{D}) \to C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})$, и имеет тот же индекс æ $= l(2-m)$, что и в первом случае.

Рассмотрим решение $U \in C^\mu_A(\overline{D})$ уравнения $R_b^{(-1)}U = f$ с правой частью $f = (f^0, f^1)$, в которой $f^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Очевидно, U есть решение краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A(z)\frac{\partial U}{\partial x} = f^1, \quad \operatorname{Re} U^+ = f^0, \tag{2.11}$$

которая удовлетворяет так называемым условиям дополнительности или Шапиро–Лопатинского (см. [9], [12]). Поэтому на основании общих результатов (см. [12], [15]) о гладкости вплоть до границы ее решение U в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому остается воспользоваться следующим общим утверждением, уже встречающимся в теореме 1.2.

Пусть банаховы пространства вложены $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$, оператор N фредгольмов $X \to Y$ и $N_1x = Nx \in Y_1$ для $x \in Y_1$, причем оператор N_1 ограничен $X_1 \to Y_1$. Тогда если прообраз $N^{-1}Y_1 \subseteq X_1$, то оператор N_1 фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} N_1 = \operatorname{ind} N$.

Теореме 2.1 можно придать следующую эквивалентную формулировку.

Следствие 2.1. Существуют такие конечномерные подпространства $X_0 \subseteq C^{1,\mu}(\overline{D})$ и $Y_0 \subseteq C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})$, для которых $\dim Y - \dim X = l(m-2)$, что любая l-вектор-функция $U \in C^\mu_A(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$U = I\varphi^0 + T\varphi^1 + U_0, \quad U_0 \in X_0, \tag{2.12}$$

где вектор-функции $\varphi^0 \in C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $\varphi^1 \in C^\mu(\overline{D})$ и

$$\int_\Gamma \varphi^0(t)\psi^0(t)d_1t + \operatorname{Re}\int_D \varphi^1(z)\psi^1(z)d_2z = 0, \quad \psi = (\psi^0, \psi^1) \in Y_0. \tag{2.13}$$

Если в этом представлении $U \in C^{1,\mu}(\overline{D})$, то и $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Здесь произведения под знаком интегралов означают обычные скалярные произведения l-векторов. Кроме того, согласно теореме 2.1, можно положить

$$X_0 = C^{1,\mu}(\overline{D}) \ominus R[C^{1,\mu}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})],$$

а в качестве Y_0 можно выбрать ядро $\ker R$ оператора R.

Следствие 2.1 особенно упрощается в случае, когда матрица A постоянна.

Теорема 2.2. *Пусть матрица A постоянна и в разложении* (2.1) *матрица J треугольна* (*например, жорданова*). *Пусть Γ составлено из простых контуров Γ_j, $1 \le j \le m$, причем Γ_m охватывает все остальные контуры.*

Тогда любая l-вектор-функция $U \in C^{\mu}_{A}(\bar{D})$ единственным образом представима в виде

$$U = IB\varphi^0 + TB\varphi^1 + iB\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{2.14}$$

где вектор-функции $\varphi^0 \in C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $\varphi^1 \in C^{\mu}(\bar{D})$ и

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^0(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le j \le m-1. \tag{2.15}$$

При этом $U \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ влечет $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, не ограничивая общности, можно считать, что матрица A треугольна и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости. В этом случае в соответствии с теоремой 1.3 функция $\phi = U - TLU$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - A\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

т.е. по терминологии из [16] является A-аналитической функцией. В этом случае утверждение теоремы для ϕ установлено в [17] (см. также [18]).

Отметим, что в частном случае $A = i$ эта теорема хорошо известна и уже использовалась при доказательстве теоремы 2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1977.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. 3 изд. М.: Наука, 1977.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд. М.: Наука, 1988.
4. *Оспанов К.Н., Отелбаев М.* Об обобщенной системе Коши—Римана с негладкими коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1989. № 3. С. 48—56.
5. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
6. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 63. С. 1—179.
7. *Абаполова Е.А., Солдатов А.П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. 2010. № 5 (76). Вып. 18. С. 6—20.
8. *Виноградов В.С.* Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 1971. Т. 7. № 8. С. 1440—1448.
9. *Сиражудинов М.М.* О задаче Римана—Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 39—62.
10. *Сиражудинов М.М.* Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости // Изв. АН. Сер. мат. 1997. Т. 61. № 5. С. 137—176.
11. *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand. New York, 1965.
12. *Валевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сб. 1965. Т. 68 (110). № 3. С. 373—416.
13. *Gohberg I., Krein M.* Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators // Uspekhi Math. Nauk [Russian Math. Surveys]. 1957. V. 12. № 2 (74). P. 43—118.
14. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
15. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. // Pure and Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35—92.
16. *Солдатов А.П.* Гипераналитические функции и их приложения // Современная математика и ее приложения. Тбилиси, Ин-т кибернетики АН Грузии (ISSN 1512-1712). 2004. Т. 15. С. 142—199.
17. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР (сер. матем.). 1991. Т. 55. № 5. С. 1070—1100.
18. *Солдатов А.П.* Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису // Вестник СамГУ. Естественно-научная сер. 2008. № 8/1 (67). С. 225—234.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 977–989

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ ПРИ УСЛОВИИ ДИРИХЛЕ[1)]

© 2021 г. Р. В. Бризицкий[1,*], П. А. Максимов[2,**]

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

[2] 690950 Владивосток, ул. Суханова, 8, ДВФУ, Россия

*e-mail: mlnwizard@mail.ru

**e-mail: maksimov.pa@students.dvfu.ru

Поступила в редакцию 23.07.2020 г.
Переработанный вариант 28.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для уравнения реакции–диффузии–конвекции, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от решения. Для концентрации рассматривается неоднородное граничное условие Дирихле. При этом нелинейность, порождаемая коэффициентом реакции, не является монотонной во всей области. Доказывается разрешимость задачи управления с граничным, распределенным и мультипликативным управлениями. В случае, когда коэффициент реакции и функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе их анализа для конкретных задач управления устанавливается стационарный аналог принципа bang–bang. Библ. 27.

Ключевые слова: нелинейное уравнение реакции–диффузии–конвекции, граничное условие Дирихле, принцип максимума, задачи управления, система оптимальности, принцип bang–bang.

10.31857/S004446692106003X

1. ВВЕДЕНИЕ. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

На протяжении длительного периода не ослабевает интерес к исследованию краевых задач и задач управления для линейных и нелинейных моделей массо- и теплопереноса (см. [1]–[15]). При этом приложения задач управления не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода задачи восстановления коэффициентов рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении соответствующих краевых задач сводятся к мультипликативным задачам управления. Роль управлений в указанных задачах играют искомые коэффициенты модели (о корректности данного подхода см. [9], [15], [16]). В частности, задачи восстановления параметров среды играют важную роль в задачах тепловой и электромагнитной маскировки (см. [17] и ссылки там). Например, задачу восстановления коэффициента диффузии λ по дополнительной информации о концентрации φ можно свести к рассматриваемой в статье задаче управления, роль управления в которой играет функция λ.

Настоящая работа является продолжением и обобщением результатов [12] и [14] по исследованию разрешимости краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции. Так же данная статья дополняет результаты [12]–[15], посвященные исследованию устойчивости решений экстремальных задач путем установления новых важных свойств оптимальных решений.

[1)]Работа выполнена при поддержке первого автора в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (номер темы: 075-01095-20-00) и при поддержке второго автора Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2020-1482-1, дополнительное соглашение от 21.04.2020).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \varphi = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.1}$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объемная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, коэффициент реакции $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ нелинейно зависит от концентрации вещества φ, а также от пространственной переменной $\mathbf{x} \in \Omega$. Ниже на задачу (1.1) при заданных функциях λ, f, $\mathbf{u}$, $k(\varphi,\mathbf{x})$ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

В настоящей работе доказываются глобальная разрешимость задачи 1 и локальная единственность ее решения в случае, когда нелинейность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ не является монотонной во всей области Ω, как предполагалось в [12]. Здесь мы полагаем, что нелинейность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ монотонна лишь в конкретном подмножестве Ω, тогда как вне данного подмножества коэффициент реакции $k(\varphi,\mathbf{x})$ ограничен по норме. Это позволит расширить круг математических моделей, для которых удается доказать разрешимость краевых и экстремальных задач, включив в их число модели горения из [18]. Для концентрации φ устанавливается строгий принцип минимума и максимума, который существенно используется при исследовании свойств оптимальных решений.

Далее для задачи 1 формулируется задача управления, роль управлений в которой играют функции λ, f и ψ, и в общем виде доказывается ее разрешимость. Отдельно рассматривается двухпараметрическая задача управления в случае, когда коэффициент реакции имеет вид произведения $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$. Роль управлений в рассматриваемой задаче играют функции β и f. Представление коэффициента $k(\varphi,\mathbf{x})$ в указанном виде позволяет моделировать неоднородность среды в пространстве.

В случае, когда коэффициент реакции, а также функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе их анализа для оптимальных решений двухпараметрической задачи управления устанавливается справедливость стационарного аналога принципа bang–bang (см. о смысле этого термина ниже или в [12], [20]).

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$ соответственно. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)$ либо $\|\cdot\|_\Gamma$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Пусть $L^p_+(\Omega) = \{k \in L^p(\Omega) : k \geq 0\}$, $p \geq 3/2$, $Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$, $H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$, $s > 3/2$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(ii) $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in Z$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;

(iii) Для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v,\cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p \geq 5/3$, не зависящего от v, и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_1\|v_1 - v_2\|_{L^5(\Omega)} \quad \forall v_1, v_2 \in B_r.$$

Здесь константа L зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$.

(iv) Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$ – такая подобласть области Ω, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Положим $\Omega_2 = \Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Функция $k(\varphi,\cdot)\varphi$ является монотонной в подобласти Ω_2 в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Omega_2} \geq 0 \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega), \tag{1.2}$$

и ограниченной в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, такие, что

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega_2)} \le A_1 \|\varphi\|_{1,\Omega}^t + B_1, \quad p \ge 5/3, \quad t \ge 0. \tag{1.3}$$

В подобласти Ω_1 для функции $k(\varphi,\cdot)$ с константой $C_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_1 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Отметим, что условия (iii), (iv) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \ge 5/3$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции, как от концентрации φ, так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например,

$$k = \frac{1}{1+\varphi^2} \ \text{ в } \ \Omega_1 \quad \text{ и } \quad k = \varphi^2 \ \text{ в } \ Q \subset \Omega_2, \quad k = k_0(\mathbf{x}) \in L_+^{5/3}(\Omega_2 \setminus \overline{Q}) \ \text{ в } \ \Omega_2 \setminus \overline{Q},$$

где Q — подобласть области Ω_2.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \le 6$ и компактно при $s < 6$, и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \le C_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Замечание 1. Ниже для простоты будем писать $k(\varphi)$, вместо $k(\varphi, \mathbf{x})$ за исключением тех случаев, где зависимость от $\mathbf{x}$ также играет важную роль.

Справедливы следующие леммы (см., например, [8]).

Лемма 1. *При выполнении условий* (i), (ii), $\mathbf{u} \in Z$, $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $k_1 \in L^p_+(\Omega)$, $p \ge 5/3$, *существуют положительные константы* C_0, δ_0, γ_1, γ_1', γ_p, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *с которыми справедливы соотношения*

$$|(\lambda\nabla\varphi, \nabla\eta)| \le C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad |(k_1\varphi, \eta)| \le \gamma_p \|k_1\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi, \eta \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \eta) = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta, \varphi), \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi, \eta \in H^1_0(\Omega), \tag{1.6}$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \eta)| \le \gamma_1' \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\eta\|_{L^5(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \tag{1.7}$$

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\varphi) \ge \lambda_* \|\varphi\|^2_{1,\Omega}, \quad (\lambda\nabla\varphi, \nabla\varphi) + (k_1\varphi, \varphi) \ge \lambda_* \|\varphi\|^2_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \quad \lambda_* \equiv \delta_0\lambda_0. \tag{1.8}$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда для любой функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ *существует функция* $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ *такая, что* $\varphi_0 = \psi$ *на* Γ *и с некоторой константой* C_Γ, *зависящей от* Ω *и* Γ, *справедлива оценка* $\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \le C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma}$.

Умножим уравнение в (1.1) на $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулу Грина. Получим

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = (f, h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega), \quad \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{1.9}$$

Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (1.9), назовем слабым решением задачи 1.

Решение задачи 1 будем искать в виде $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$, где φ_0 — функция из леммы 2, а $\tilde\varphi \in H^1_0(\Omega)$ — неизвестная функция. Подставляя $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$ в (1.9), получаем

$$\begin{aligned}(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\varphi)\tilde\varphi, h)_{\Omega_1} + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0), h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) = \\ = (f, h) - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (k(\varphi)\varphi_0, h)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Прибавим к обеим частям (1.10) слагаемое $-(k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2}$, получим

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\varphi)\tilde\varphi, h)_{\Omega_1} + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) = \\ = (l, h) \equiv (f, h) - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (k(\varphi)\varphi_0, h)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - (k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.11}$$

Для доказательства разрешимости задачи (1.10) применим теорему Лере–Шаудера (см. [20]). Для этого введем билинейную форму $a(\eta, h) = (\lambda\nabla\eta, \nabla h)$ и нелинейный оператор G по формуле

$$a(G(\tilde\varphi), h) = \left\langle \tilde f(\tilde\varphi), h\right\rangle_{-1,\Omega} \equiv (k(\varphi)\tilde\varphi, h)_{\Omega_1} + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + \\ + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) - (l, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{1.12}$$

где $\tilde f(\tilde\varphi) \in H^{-1}(\Omega)$.

По теореме Лакса–Мильграма из (1.12) вытекает, что для любой функции $\tilde\varphi \in H_0^1(\Omega)$ существует единственная функция $w \in H_0^1(\Omega)$, с которой справедливо равенство

$$a(w, h) = (\lambda\nabla w, \nabla h) = \left\langle \tilde f(\tilde\varphi), h\right\rangle_{-1,\Omega} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

В таком случае оператор G, определенный формулой (1.12), действует из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ и ставит в соответствие каждой функии $\tilde\varphi \in H_0^1(\Omega)$ элемент $G(\tilde\varphi) \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда для доказательства существования решения задачи (1.10) достаточно доказать существование решения $\tilde\varphi \in H_0^1(\Omega)$ операторного уравнения

$$\tilde\varphi + G(\tilde\varphi) = 0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Пусть $\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$. Вычтем (1.12) при $\tilde\varphi = \tilde\varphi_2$ из (1.12) при $\tilde\varphi = \tilde\varphi_1$. Для этого (1.12) лучше переписать в виде

$$a(G(\tilde\varphi), h) = (k(\tilde\varphi + \varphi_0)\tilde\varphi, h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} - (k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) - (l, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Имеем

$$a(G(\tilde\varphi_1) - G(\tilde\varphi_2), h) = ((k(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0))\tilde\varphi_1, h) + (k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) + \\ + (k(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0), \varphi_0 h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.14}$$

Используя лемму 1, неравенство Гёльдера, свойство (iii) и (1.4), из (1.14) приходим к неравенству

$$|a(G(\tilde\varphi_1) - G(\tilde\varphi_2), h)| \le \gamma_p L\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + C_6\|k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} + \\ + \gamma_p L\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|\varphi_0\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_1'\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.15}$$

Полагая $h = G(\tilde\varphi_1) - G(\tilde\varphi_2)$ в (1.15), приходим в силу (1.8) и свойства (iv) к оценке

$$\|G(\tilde\varphi_1) - G(\tilde\varphi_2)\|_{1,\Omega} \le (\gamma_p L\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + C_6(A_1\|\tilde\varphi_2 + \varphi_0\|_{1,\Omega}^{r} + B_1) + \\ + \gamma_p L\|\varphi_0\|_{1,\Omega})\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)} + \gamma_1'\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)},$$

из которой в силу компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^5(\Omega)$ вытекают непрерывность и компактность оператора $G: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

Наряду с (1.13), рассмотрим операторное уравнение $\tilde\varphi_w + wG(\tilde\varphi_w) = 0$ в $H_0^1(\Omega)$, где $w \in (0,1]$, и вариационное равенство

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi_w, \nabla h) + w(k(\tilde\varphi_w + \varphi_0)\tilde\varphi_w, h)_{\Omega_1} + w(k(\tilde\varphi_w + \varphi_0)(\tilde\varphi_w + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + \\ + w(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi_w, h) = (l_w, h) \equiv w(f, h) - w(\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - w(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - \\ - w(k(\tilde\varphi_w + \varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_1} - w(k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

Применив (1.5), (1.7), с учетом свойства (iv) оценим норму функционала l_w из (1.16):

$$\|l_w\|_{-1,\Omega} \le wM_l \equiv w\|f\|_\Omega + wC_\Gamma(C_0\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p C_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \\ + w\gamma_p C_\Gamma(C_\Gamma^t A_1\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^t + B_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{1.17}$$

Полагая $h = \tilde\varphi_w$ в (1.16), в силу (1.8) и свойства (iv) приходим к оценке

$$\|\tilde\varphi_w\|_{1,\Omega} \le C_* wM_l, \quad C_* = \lambda_*^{-1}, \quad w \in (0,1], \tag{1.18}$$

из которой вытекает, что

$$\|\tilde\varphi_w\|_{1,\Omega} \le C_* M_l. \tag{1.19}$$

В таком случае в силу теоремы Лере–Шаудера существует решение $\tilde\varphi \in H_0^1(\Omega)$ задачи (1.11), для которого справедлива оценка (1.23), и слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$ задачи 1, причем

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le M_\varphi \equiv C_*(\|f\|_\Omega + C_\Gamma(C_0\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p C_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \\ + C_*\gamma_p C_\Gamma(C_\Gamma^r A_1\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^r + B_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{1.20}$$

Установим достаточные условия, при которых решение задачи (1.9) единственно. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ – два решения задачи (1.9). Тогда их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, h)_{\Omega_2} + (k(\varphi_1)\varphi, h)_{\Omega_1} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = \\ = -(k((\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_2, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.21}$$

Полагая в (1.21) $h = \varphi$, в силу условий (iii), (iv) и леммы 1 приходим к оценке

$$\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_p LM_\varphi\|\varphi\|_{1,\Omega}. \tag{1.22}$$

Из (1.22) вытекает, что при выполнении условия

$$\gamma_p LM_\varphi < \lambda_* \tag{1.23}$$

получаем $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ п.в. в Ω.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий* (i)–(iv) *существует слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *и справедлива оценка* (1.20). *Если, к тому же, выполняется условие* (1.23), *то слабое решение единственно.*

В рамках подхода [21] докажем принцип максимума и минимума для φ.

Пусть в дополнение к (i)–(iv) выполняются следующие условия:

(v) $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ, $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_{\max}$ п.в. в Ω, $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω_2 и $f = 0$ п.в. в Ω_1 (либо $\Omega_1 = \emptyset$);

(vi) $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ удовлетворяет неравенству (1.2), при этом $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где функция $k_1(\varphi) \ge 0$ непрерывно зависит от φ, $0 < a_{\min} \le a(\mathbf{x}) \le a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω, при этом $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(\varphi)\varphi)$.

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$ – неотрицательные числа, $\lambda_{\max} > \lambda_0 > 0$.

Лемма 3. *При выполнении условий* (i)–(vi) *для решения* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *справедлив следующий принцип максимума и минимума*:

$$m \le \varphi \le M \ \ \textit{п.в. в} \ \ \Omega, \quad M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \tag{1.24}$$

Здесь M_1 *и* m_1 *находятся из соотношений* $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ *и* $k_1(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ *соответственно. Если функция* $k_1(\varphi)\varphi$ *возрастает, то указанные параметры определяются однозначно.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \le M$ п.в. в Ω. С этой целью введем функцию $\tilde\varphi = \max\{\varphi - M, 0\}$. Ясно, что принцип максимума или оценка $\varphi \le M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde\varphi = 0$ п.в. в Ω. Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество области Ω, в котором $\varphi > M$. Из [22], [23] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и функция $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$. Тогда справедливы равенства

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}), (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0.$$

С учетом этого, полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (1.9), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (f, \tilde{\varphi}). \tag{1.25}$$

Ясно, что

$$(k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M), \tilde{\varphi})_{Q_M}$$

и в силу (vi) для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$0 \le (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M)M, \tilde{\varphi})_{\Omega_2} = (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_2}, \tag{1.26}$$

поскольку $\tilde{\varphi} = 0$ в $\Omega\backslash\bar{\Omega}_M$. Заметим, что если $Q_M \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $(f, \tilde{\varphi})_{Q_M} = 0$ в силу условия (v). Тогда, вычитая $(k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_2}$ из обеих частей (1.25), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_1} + (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_2} = \\ = (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_2}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Поскольку $(k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_1} \ge 0$, то в силу леммы 1 и (1.26) из (1.27) приходим к оценке

$$\lambda_* \|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \le (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M \cap \Omega_2},$$

из которой вытекает, что если M выбрано из условия (1.24), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства принципа минимума введем функцию $\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}$, $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$. Будем предполагать, что в открытом измеримом подмножестве $Q_m \subset \Omega$ справедливо неравенство $\varphi < m$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$\begin{gathered}(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{w}) + (k(\varphi, \cdot), \varphi, \tilde{w})_{Q_m \cap \Omega_1} + (k(\tilde{w} + m, \cdot)(\tilde{w} + m) - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m \cap \Omega_2} = \\ = (f - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m \cap \Omega_2},\end{gathered}$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_* \|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \le (f - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m \cap \Omega_2}.$$

Из полученной оценки вытекает, что $\tilde{w} = 0$ для m из (1.24).

Замечание 2. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, при $k(\varphi) = \varphi^2$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/3}$, $m_1 = f_{\min}^{1/3}$.

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Для постановки задачи управления разобьем множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесем функции $\mathbf{u}$ и $k(\varphi, \mathbf{x})$, и группу управлений, куда отнесем функции λ, f и ψ, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2 и K_3, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $K_2 \subset L^2(\Omega)$ и $K_3 \subset H^{1/2}(\Gamma)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Введем пространство $Y = H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, положим $u = (\lambda, f, \psi)$, $K = K_1 \times K_2 \times K_3$ и введем оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h \rangle = (\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\mathbf{x}, \varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) - (f, h),$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_\Gamma - \psi,$$

и перепишем (1.9) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2_\Omega + \frac{\mu_3}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma} \to \inf,$$
$$F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{2.1}$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (2.1) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, и K – ограниченное множество, либо $\mu_j > 0$, $j = 0, 1, 2, 3$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \left\|\varphi - \varphi^d\right\|^2_Q = \int_Q \left|\varphi - \varphi^d\right|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \left\|\varphi - \varphi^d\right\|^2_{1,Q}. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv) *и* (j), (jj), *функционал* $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *слабо полунепрерывен снизу и множество* Z_{ad} *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ *задачи* (2.1).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, u_m) \in Z_{ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) = \inf_{(\varphi,u)\in Z_{ad}} J(\varphi, u) \equiv J^*.$$

Из условия (jj) и теоремы 1 вытекают следующие оценки:

$$\|\lambda_m\|_{s,\Omega} \leq c_1, \quad \|f_m\|_\Omega \leq c_2, \quad \|\psi_m\|_{1/2,\Gamma} \leq c_3, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \leq c_4, \tag{2.3}$$

где константы $c_1, \ldots, c_3$ не зависят от m.

Из оценок (2.3) и условия (j) вытекает, что существуют слабые пределы $\lambda^* \in K_1$, $f^* \in K_2$, $\psi^* \in K_3$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{f_m\}$, $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем обозначать также через $\{\lambda_m\}$, $\{f_m\}$, $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$, причем в силу компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при $p < 6$, $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ при $s > 3/2$ можно считать, что при $m \to \infty$

$$\varphi_m \to \varphi^* \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \text{слабо в } L^6(\Omega) \text{ и сильно в } L^s(\Omega), \quad s < 6,$$
$$f_m \to f^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad \psi_m \to \psi^* \text{ слабо в } H^{1/2}(\Gamma),$$
$$\lambda_m \to \lambda^* \text{ слабо в } H^s(\Omega) \text{ и сильно в } L^\infty(\Omega), \quad s > 3/2. \tag{2.4}$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$, т.е., что

$$(\lambda^*\nabla\varphi^*, \nabla h) + (k(\varphi^*)\varphi^*, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi^*, h) = (f^*, h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega). \tag{2.5}$$

Для этого заметим, что пара функций (φ_m, u_m) удовлетворяет соотношению

$$(\lambda_m\nabla\varphi_m, \nabla h) + (k(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_m, h) = (f_m, h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega). \tag{2.6}$$

Перейдем в (2.6) к пределу при $m \to \infty$. Из (2.4) вытекает, что все линейные слагаемые в (2.6) переходят в соответствующие слагаемые в (2.5). Исследуем поведение при $m \to \infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(k(\varphi_m)\varphi_m, h)$.

Из условий (iii) вытекает, что $k(\varphi_m) \to k(\varphi^*)$ сильно в $L^{5/3}(\Omega)$. Используя (2.4), несложно показать, что $\varphi_m h \to \varphi^* h$ слабо в $L^3(\Omega)$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$. В таком случае $k(\varphi_m)\varphi_m h \to k(\varphi^*)\varphi^* h$ сильно в $L^1(\Omega)$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$ или

$$(k(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (k(\varphi^*)\varphi^*, h) \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Для слагаемого $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h). \tag{2.8}$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (2.4) получим, что $(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Применяя неравенство Гельдера, в силу (2.4) и (2.3) получаем, что

$$\left|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h)\right| \le \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_m\|_\Omega \|\nabla h\|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega) \times H^s(\Omega) \times L^6(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, то из вышесказанного следует, что $J(\varphi^*, u^*) = J^*$.

Следующим этапом в исследовании экстремальной задачи является вывод системы оптимальности, которая дает ценную информацию о дополнительных свойствах оптимальных решений. На основе ее анализа можно установить, в частности, единственность и устойчивость оптимальных решений. Например, устойчивость некоторых частных случаев задачи (2.1) была исследована в [12], [14]. Исследованию единственности и устойчивости оптимальных решений будет посвящена отдельная статья авторов.

Пусть в дополнение к (i)–(iv) выполняется следующее условие:

(vii) оператор $k(\varphi)\varphi : H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$, $q > 30/23$, непрерывно дифференцируем по Фреше по концентрации φ и его производная есть линейный непрерывный оператор $b(\varphi) : H^1(\Omega) \to L^2_+(\Omega)$.

Введем сопряженное к Y пространство $Y^* = H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi, \hat u) = (\hat\varphi, \hat\lambda, \hat f, \hat\psi)$ есть линейный оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \times K \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)(h) = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat y_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ определяются по $\hat\varphi$ и τ соотношениями

$$\langle \hat y_1, \tau \rangle = (\hat\lambda \nabla\tau, \nabla h) + (b(\hat\varphi)\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_\Gamma. \tag{2.9}$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряженный к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач из [27], введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, на который будем ссылаться как на сопряженное состояние, и введем Лагранжиан $\mathscr{L}: H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathscr{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta \rangle + \langle \zeta, F_2(\varphi, u) \rangle_\Gamma, \tag{2.10}$$

где $\langle \zeta, \cdot \rangle_\Gamma = \langle \zeta, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$.

Поскольку $b(\hat\varphi) \in L^2_+(\Omega)$, то из [8] вытекает, что для любых $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda \nabla\tau, \nabla h) + (b(\hat\varphi)\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \quad \tau|_\Gamma = \psi. \tag{2.11}$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u) : H^1(\Omega)\times K \to Y$ – изоморфизм, а из [17] вытекает

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv), (vii) *и* (j), (jj), *функционал* $I : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по* φ *в точке* $\hat\varphi$ *и локальный минимум в задаче* (2.1) *достигается в точке* $(\hat\varphi,\hat u)\in H^1(\Omega)\times K$. *Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^* = (\theta,\zeta)\in Y^*$ *такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа* $F_\varphi(\hat\varphi,\hat u)^*\mathbf{y}^* = -J_\varphi(\hat\varphi,\hat u)$ *в* $H^1(\Omega)^*$, *эквивалентное тождеству*

$$(\hat\lambda\nabla\tau,\nabla\theta) + (b(\hat\varphi)\tau,\theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau,\theta) + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2)\left\langle I'_\varphi(\hat\varphi),\tau\right\rangle \quad \forall\tau\in H^1(\Omega), \tag{2.12}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat\varphi,\hat u,\mathbf{y}^*)\le\mathcal{L}(\hat\varphi,u,\mathbf{y}^*)\ \forall u\in K$, *эквивалентный неравенствам*

$$\mu_1(\hat\lambda,\lambda-\hat\lambda)_{s,\Omega} + ((\lambda-\hat\lambda)\nabla\hat\varphi,\nabla\theta)\ge 0 \quad \forall\lambda\in K_1, \tag{2.13}$$

$$\mu_2(\hat f, f-\hat f)_\Omega - (f-\hat f,\theta)\ge 0 \quad \forall f\in K_2, \tag{2.14}$$

$$\mu_3(\hat\psi,\psi-\hat\psi)_{1/2,\Gamma} + \langle\zeta,\psi-\hat\psi\rangle_\Gamma \ge 0 \quad \forall f\in K_3. \tag{2.15}$$

3. АНАЛИЗ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УАПРАВЛЕНИЯ. СВОЙСТВО bang–bang

Ниже будем полагать, что функция $k(\varphi,\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

(viii) $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, причем нелинейность $k_0(\varphi)\varphi$ монотонна, $\beta(\mathbf{x})\in L^6_+(\Omega)$, $k_0(\varphi)\in L^2_+(\Omega)$ для всех $\varphi\in H^1(\Omega)$, удовлетворяет неравенству (1.3) при $p>2$ и в любом шаре $B_r = \{\varphi\in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega}\le r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \le L_2\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall\varphi_1,\varphi_2\in B_r. \tag{3.1}$$

Здесь константа L_2 зависит от радиуса r и не зависит от конкретных $\varphi_1,\varphi_2\in B_r$.

Несложно показать, что условия (viii) описывают частный случай функции $k(\varphi,\mathbf{x})$, удовлетворяющей (iii). Действительно, (см. также [14]):

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \le \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_1)-k_0(\varphi_2)\|_\Omega \le \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

В данном разделе будут установлены дополнительные свойства оптимального решения следующей задачи управления:

$$J(\varphi)\equiv(1/2)I(\varphi)\to\inf,\quad \mathcal{F}(\varphi,f,\beta)=0,\quad (\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4, \tag{3.2}$$

роль управления в которой играют функции f и β, которые могут изменяться в подмножествах K_2 и K_4 соответственно. Тогда как λ и ψ считаются заданными функциями. Оператор $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, F_2) : H^1(\Omega)\times K_2\times K_4\to Y$ определен формулами

$$\langle\mathcal{F}(\varphi,u),h\rangle = (\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi,h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h) - (f,h),$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_\Gamma - \psi.$$

Пусть выполняется условие

(jjj) $K_2\subset L^2(\Omega)$ и $K_4\subset L^6_+(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые и ограниченные множества.

Обозначим через $\mathcal{Z}_{ad} = \{(\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4 : \mathcal{F}(\varphi,f,\beta)=0, J(\varphi,f,\beta)<\infty\}$ множество допустимых пар для задачи (3.2) и предположим, что выполняется условие

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv), (viii) *и* (jjj), *функционал* $I : H^1(\Omega)\to R$ *слабо полунепрерывен снизу и множество* $\mathcal{Z}_{ad}$ *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4$ *задачи* (3.2).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, f_m, \beta_m) \in \mathscr{X}_{ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, f_m, \beta_m) = \inf_{(\varphi,f,\beta)\in\mathscr{X}_{ad}} J(\varphi, f, \beta) \equiv J^*.$$

Из условия (jjj) и теоремы 1 вытекают следующие оценки:

$$\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \le c_1, \quad \|f_m\|_\Omega \le c_2, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \le c_3, \tag{3.3}$$

где константы c_1, c_2, c_3 не зависят от m.

Из оценок (3.3) и условия (jjj) вытекает, что существуют слабые пределы $\beta^* \in K_4$, $f^* \in K_2$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\beta_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем обозначать также через $\{\beta_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$, причем в силу компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при $p < 6$ можно считать, что при $m \to \infty$

$$\begin{gathered} \varphi_m \to \varphi^* \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \text{слабо в } L^6(\Omega) \text{ и сильно в } L^s(\Omega), \quad s < 6, \\ f_m \to f^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad \beta_m \to \beta^* \text{ слабо в } L^6(\Omega). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $\mathscr{F}_1(\varphi^*, f^*, \beta^*) = 0$, т.е., что

$$(\lambda\nabla\varphi^*, \nabla h) + (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi^*, h) = (f^*, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Для этого заметим, что тройка $(\varphi_m, f_m, \beta_m)$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_m, h) = (f_m, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Перейдем в (3.6) к пределу при $m \to \infty$. Из (2.4) вытекает, что все линейные слагаемые в (3.6) переходят в соответствующие слагаемые в (3.5). Исследуем поведение при $m \to \infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h)$.

Справедливо равенство

$$(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) - (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) = (\beta_m(k_0(\varphi_m) - k_0(\varphi^*))\varphi_m, h) + (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h). \tag{3.7}$$

Из неравенства Гёльдера, (3.3), свойства (vii) и (3.4) вытекает, что для всех $h \in H_0^1(\Omega)$

$$|(\beta_m(k_0(\varphi_m) - k_0(\varphi^*))\varphi_m, h)| \le L_2\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}\|h\|_{L^6(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.8}$$

Поскольку $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно вложено в $H_0^1(\Omega)$, то существует последовательность $\{h_n\} \in \mathscr{D}(\Omega)$, сходящаяся к h по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Используя $\{h_n\}$, для второго слагаемого в (3.7) выводим

$$(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h) = (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n) + (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h_n). \tag{3.9}$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^6(\Omega)}$, вытекающей из (3.3), и сходимости $\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon, h)$ такой, что

$$\begin{gathered} |(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)| \le \|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi^*)\|_\Omega\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^6(\Omega)}\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \le \\ \le \varepsilon/2 \quad \forall n \ge N, \quad m \in \mathscr{N}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

В силу равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и сходимости $\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$ следует, что существует такой номер $M = M(\varepsilon, h)$, что

$$|(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h_n)| \le \|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi^*)\|_\Omega\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)}\|h_n\|_{L^{12}(\Omega)} \le \varepsilon/2 \quad \forall m \ge M, \quad n \in \mathscr{N}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) вытекает, что $(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда с учетом (3.8) получаем, что $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^6(\Omega)$, то из вышесказанного следует, что $J(\varphi^*, f^*, \beta^*) = J^*$.

Пусть для функции $k_0(\varphi)\varphi$ выполняется условие

(ix) оператор $k_0(\varphi)\varphi : H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$, $q > 30/23$, непрерывно дифференцируем по Фреше и его производная есть линейный непрерывный оператор $b_0(\varphi) : H^1(\Omega) \to L^2_+(\Omega)$.

Тогда для задачи (3.2) справедлив аналог теоремы 3, поскольку $\hat\beta b_0(\hat\varphi) \in L^{3/2}_+(\Omega)$. При этом уравнение Эйлера–Лагранжа (2.12) принимает вид

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + (\hat\beta b_0(\hat\varphi)\tau, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2)\left\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\right\rangle \quad \forall\tau\in H^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Принцип минимума для задачи (3.2) имеет вид следующих неравенств:

$$((\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) \ge 0 \quad \forall\beta\in K_4, \tag{3.13}$$

$$(f - \hat f, \theta) \le 0 \quad \forall f\in K_2. \tag{3.14}$$

Пусть вместо (jjj) выполняется более жесткое условие:

(jjj') $\beta_{\min} \le \beta \le \beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta\in K_4$ и $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω для всех $f\in K_2$, где $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$, $f_{\min}$ и $f_{\max}$ – положительные числа.

Ясно, что условия (jjj') задают частный случай выпуклых, ограниченных и замкнутых множеств K_2 и K_4, введенных в (jjj).

Покажем, что оптимальные управления $\hat\beta(\mathbf{x})$ и $\hat f(\mathbf{x})$ задачи (3.2) обладают свойством bang–bang, согласно которому они принимают одно из двух значений $\beta_{\min}$ или $\beta_{\max}$ и $f_{\min}$ или $f_{\max}$ соответственно в зависимости от знака функции $\theta(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}\in\Omega$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.1 из [20, с. 67].

Лемма 4. *При выполнении условия* (jjj') *и* $k_0(\varphi) > 0$ *неравенства* (3.13), (3.14) *эквивалентны следующим неравенствам*:

$$(\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi\theta \ge 0 \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall\beta\in K_4, \tag{3.15}$$

$$(f - \hat f)\theta \le 0 \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall f\in K_2. \tag{3.16}$$

Замечание 3. Лемма 4 может быть доказана методом от противного. Сначала покажем, что из (3.13) вытекает (3.15). Предположим, что существует функция $\beta_1\in K_4$, с которой на множестве $D\subset\Omega$, meas $D > 0$, выполняется неравенство $(\beta_1 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi\theta < 0$ п.в. в D. Рассмотрим функцию β_2 такую, что $\beta_2 = \hat\beta$, если $\mathbf{x}\notin D$ и $\beta_2 = \beta_1$, если $\mathbf{x}\in D$. Ясно, что $\beta_2\in K_4$ и для нее справедливо неравенство

$$((\beta_2 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) = ((\beta_1 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta)_D < 0,$$

противоречащее (3.13).

Рассуждая аналогично, покажем, что из (3.14) вытекает (3.16). Пусть существует функция $f_1\in K_2$, с которой на множестве $D_0\subset\Omega$, meas $D_0 > 0$, выполняется неравенство $(f_1 - \hat f)\theta > 0$ п.в. в D_0. Рассмотрим функцию f_2 такую, что $f_2 = \hat f$, если $\mathbf{x}\notin D_0$ и $f_2 = f_1$, если $\mathbf{x}\in D_0$. Ясно, что $f_2\in K_2$ и для нее справедливо неравенство $(f_2 - \hat f, \theta) = (f_1 - \hat f, \theta)_{D_0} > 0$, которое противоречит (3.14).

Следствие 1. Из лемм 4 и 3 вытекает, что функция, если функция $k_0(\varphi)\varphi$ возрастает, то (3.13) эквивалентно неравенству

$$(\beta - \hat\beta)\theta \ge 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall\beta\in K_4. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что если $\theta < 0$ п.в. в $D_1\subseteq\Omega$, то $\beta\le\hat\beta$ п.в. в D_1 для всех $\beta\in K_4$. Тогда $\hat\beta = \beta_{\max}$ п.в. в D_1. В свою очередь, $\hat\beta = \beta_{\min}$ п.в. в $D_2\subseteq\Omega$, если $\theta > 0$ п.в. в D_2.

Из (3.16) вытекает, что если $\theta < 0$ п.в. в D_1, то $\hat f = f_{\min}$ п.в. в D_1 и $\hat f = f_{\max}$ п.в. в D_2, если $\theta > 0$ п.в. в D_2.

Заметим, что $k_{01}(\varphi) = \varphi^2 > 0$ и $k_{02}(\varphi) = \varphi^2|\varphi| > 0$ п.в. в Ω в силу леммы 3, поскольку функции $k_{0i}(\varphi)\varphi$, $i = 1, 2$, возрастают.

Замечание 4. С физической точки зрения тот факт, что если на множестве $D \subset \Omega$ управление β принимает максимальное значение $\beta_{\max}$, то управление f принимает минимальное значение $f_{\min}$, означает, что управления β и f выполняют одно и то же действие – уменьшение концентрации φ. Действительно, коэффициент реакции (распада) вещества $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$ принимает максимальное значение при $\beta = \beta_{\max}$. В свою очередь, при $f = f_{\min}$ происходит минимальный приток загрязняющего вещества в область Ω. Аналогичную согласованность показывает пара $(\beta_{\min}, f_{\max})$, действие которой направлено на увеличение концентрации φ.

Обратимся к функционалам $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, введенным в (2.2). Ясно, что если $I_i(\hat\varphi) > 0$, то $\hat\varphi \neq \varphi^d$ в $Q_1 \subseteq Q$, $\operatorname{meas} Q_1 > 0$. Покажем, что при этом $\theta \neq 0$, по крайней мере, п.в. в Q_1.

Пусть $I(\varphi) = I_1(\varphi)$. Выбирая в (3.12) функцию $\tau \in H_0^1(\Omega)$ и рассуждая, как в [25], приходим к соотношению

$$-(\operatorname{div}\lambda\nabla\theta) + \hat\beta b_0(\hat\varphi)\theta - \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = -(\hat\varphi - \varphi^d)\chi_Q \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{3.18}$$

где χ_Q – характеристическая функция подобласти $Q \subset \Omega$. Из (3.18) вытекает, что $\theta \neq 0$ п.в. в Q_1. Используя (2.12), несложно показать, что аналогичный результат верен для I_2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (i)–(v), (viii), (ix) *и* (jjj'). *Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\hat\varphi, \hat f, \hat\beta) \in H^1(\Omega) \times K_2 \times K_4$ *задачи* (3.2), *которому соответствует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, *удовлетворяющий* (3.12)–(3.14). *Пусть* $I(\hat\varphi) = I_i(\hat\varphi) > 0$, $i = 1, 2$, $k_0(\varphi) > 0$ *и* $k_0(\varphi)\varphi$ *возрастает. Тогда* $\hat\beta = \beta_{\min}$, $\hat f = f_{\max}$, *если* $\theta > 0$, *и* $\hat\beta = \beta_{\max}$, $\hat f = f_{\min}$, *если* $\theta < 0$.

Следствие 2. Если $I(\hat\varphi) = I_i(\hat\varphi) > 0$, $i = 1, 2$, то оптимальное управление $\hat\beta$ задачи (3.2) не может быть внутренней точкой множества K_4, а оптимальное управление $\hat f$ не может быть внутренней точкой множества K_2.

Замечание 5. В дополнение к замечанию 4 заметим, что в случае функционалов $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi)$ увеличение концентрации φ уместно, если $\varphi < \varphi^d$. Соответственно при $\varphi > \varphi^d$ концентрацию следует уменьшать.

Наконец, отметим, что если существует подмножество $D_0 \subset \Omega$, $\operatorname{meas} D_0 > 0$, на котором $\theta = 0$, то в этом подмножестве управление $\hat\beta$ принимает значение $\beta_{\max}$ или $\beta_{\min}$, аналогично, управление $\hat f$ принимает значение $f_{\min}$ или $f_{\max}$, а свойство bang–bang для задачи (3.2) является *нестрогим*. Если $\theta \neq 0$ п.в. в Ω, то свойство bang–bang для задачи (3.2) называют *строгим*, так как не нужно уточнять поведение $\hat\beta$ и $\hat f$ при $\theta = 0$ (см. [29], [20]).

Например, если $I(\varphi) = (1/2)\|\varphi - \varphi^d\|_\Omega^2$ и вместо условия $I(\hat\varphi) > 0$ выполняется более жесткое условие: $\hat\varphi \neq \varphi^d$ п.в. в Ω, то из (3.18) вытекает, что $\theta \neq 0$ п.в. в Ω.

В заключение отметим, что интерес к свойству bang–bang вызван исследованием задач управления, в которых из практических соображений не используется регуляризация. В частности, такая постановка задач управления используется при исследовании прикладных задач тепловой и электромагнитной маскировки (см., например, [17] и ссылки там). В следующих работах на основе анализа полученных систем оптимальности будут выведены точные оценки локальной устойчивости оптимальных решений задач мультипликативного управления (см. [14], [15], [25]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Problems. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Control problems for convection–diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisat. and Calcul. of Variat. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений в теории массопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 380–394.

4. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. ИММ. 2006. Т. 16. С. 76–101.
5. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
6. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Pointwise control of the Boussinesq system // Systems Control Lett. 2011. V. 60. P. 249–255.
7. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
8. *Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции–диффузии–реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
9. *Алексеев Г.В., Левин В.А.* Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел // Докл. АН. 2016. Т. 471. № 1. С. 32–36.
10. *Brizitskii R.V., Saritskaya Z.Y., Byrganov A.I.* Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation // Sib. El. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 352–360.
11. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 2. С. 3–16.
12. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 12. С. 2042–2053.
13. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
14. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
15. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
16. *Алексеев Г.В.* Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 3. С. 366–377.
17. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 135. P. 1269–1277.
18. *Belyakov N.S., Babushok V.I., Minaev S.S.* Influence of water mist on propagation and suppression of laminar premixed // Combust. Theory and Model. 2018. V. 22. № 2. P. 394–409.
19. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
20. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.
21. *Ладыженская О.Н., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
22. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
23. *Berninger H.* Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators // Domain Decomposit. Meth. in Sci. and Enginee. XVIII. Springer, 2009. P. 169–176.
24. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
25. *Алексеев Г.В.* Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 1863–1878.
26. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
27. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1973.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 990–1018

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

KP_1 СХЕМА УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ, СОГЛАСОВАННАЯ С НОДАЛЬНЫМИ СХЕМАМИ

© 2021 г. А. М. Волощенко

125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики РАН, Россия

e-mail: volosch@kiam.ru

Поступила в редакцию 14.12.2019 г.
Переработанный вариант 18.12.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Для уравнения переноса в двумерной r, z геометрии построена KP_1 схема ускорения сходимости внутренних итераций, согласованная с нодальными Linear Discontinues и Linear Best схемами 3-го и 4-го порядков точности по пространственным переменным. Для решения P_1 системы для ускоряющих поправок предложен алгоритм, основанный на использовании метода расщепления в сочетании с методом прогонки для решения вспомогательных систем двухточечных уравнений. Рассмотрена модификация алгоритма на случай двумерной x, z геометрии. Приведены численные примеры использования KP_1 схемы для решения задач переноса излучения в двумерных r, z, x, z и r, ϑ геометриях, в том числе задач с существенной ролью анизотропии рассеяния, и при решении сильно-гетерогенных задач с преобладающей ролью рассеяния. Библ. 36. Фиг. 5. Табл. 5.

Ключевые слова: KP_1 схема ускорения, уравнение переноса, нодальные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466921060156

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм ускорения итераций по интегралу рассеяния является существенным элементом численной методики решения уравнения переноса, основанной на использовании метода дискретных ординат. Расчеты полей излучения в активной зоне и радиационной защите ядерно-технических установок в неодномерных геометриях требуют значительных затрат процессорного времени. В настоящее время такие расчеты проводятся, в основном, в 3D геометриях. Однако расчеты в 2D геометриях также являются востребованными, позволяя провести оценку радиационных полей за относительно небольшие времена с использованием мультигрупповых константных систем. Поэтому, с практической точки зрения, разработка эффективного алгоритма ускорения для 2D геометрий с использованием нодальных схем высокого порядка точности является актуальной задачей, позволяя улучшить аппроксимацию уравнения переноса и сократить время расчета типичного варианта в 3–10 и более раз. В данной работе нами будет построена KP_1 схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в 2D r, z, x, z и r, ϑ геометриях, согласованная с нодальными Linear Discontinues (LD) и Linear Best (LB) схемами 3-го и 4-го порядков точности.

Предлагаемый алгоритм представляет собой реализацию KP_1 схемы (см. [1]) (известной также как DSA (см. [2], [3]) или P_1SA схема (см. [4]–[6])) ускорения внутренних итераций для практически важного случая LD и LB схем (см. [7]–[13]) в 2D r, z, x, z и r, ϑ геометрий, позволяющих обеспечить быструю сходимость разностного решения при сгущении пространственной сетки задачи. Согласованность построенной KP_1 схемы ускорения с разностной аппроксимацией уравнения переноса, как и в случае взвешенной алмазной (WDD) схемы из [2], обеспечивает ее устойчивость и слабую зависимость эффекта ускорения от выбора пространственной сетки. Данный алгоритм реализован в 2D S_n программе КАСКАД-С-3.5 из пакета программ CNCSN (см. [14]). Он представляет собой развитие KP_1 схемы ускорения, согласованной со взвешенной алмазной (WDD) схемой, предложенной ранее в [6], [15]–[17] и реализованной в 1D, 2D и 3D

S_n программах из пакета CNCSN, а также KP_1 схемы ускорения, согласованной со взвешенной WLD-WLB схемой в 1D геометриях (см. [18], [19]).

Обзор предшествующих работ по KP_1 схеме ускорения и другим вариантам схем ускорения внутренних итераций имеется в [1], [3], [6], [16]. Построение KP_1 схемы ускорения мы проведем на примере уравнения переноса в r, z геометрии.

Последовательность изложения в данной работе следующая. В разд. 1 и 2 рассмотрено построение WLD-WLB схемы и согласованной KP_1 схемы ускорения для уравнения переноса в r, z геометрии. В разд. 3 сформулирован метод расщепления (МР) для решения P_1 системы для поправок, включая метод прогонки для решения вспомогательных двухточечных уравнений в r, z геометрии. В разд. 4 рассмотрен алгоритм оценки границ спектра радиальной ($\hat{R}$) и аксиальной ($\hat{Z}$) компонент P_1 оператора, которые используются для выбора шагов МР для уравнения переноса в r, z геометрии. В разд. 5 рассмотрен вопрос о выборе итерационных параметров циклического МР. В разд. 6 указаны изменения, которые нужно внести в алгоритм ускорения для случая x, z геометрии. Расчетные формулы для r, ϑ геометрии могут быть получены аналогично случаю r, z геометрии. В разд. 7 представлены численные примеры использования KP_1 схемы ускорения при решении задач переноса излучения в двумерных геометриях, а также приведены численные результаты, позволяющие оценить скорость сходимости DD, LD и LB схем в x, z и r, z геометриях при сгущении пространственной сетки задачи.

1. WLB-WLD СХЕМА 2–4-ГО ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ДВУМЕРНОЙ r, z ГЕОМЕТРИИ

В r, z *геометрии* уравнение переноса имеет вид

$$\mu r\frac{\partial\psi}{\partial z} + \xi\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\eta\psi) + \sigma r\psi(r, z, \mu, \varphi) = rS(r, z, \mu, \varphi), \tag{1.1}$$

где ξ, η и μ — направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ направления скорости частицы:

$$\xi = (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}_r) = \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi, \quad \eta = (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}_\vartheta) = \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi, \quad \mu = (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}_\vartheta) = \cos\theta, \tag{1.2}$$

который с учетом имеющейся в данной геометрии симметрии: $\psi(r, z, \mu, \varphi) = \psi(r, z, \mu, 2\pi - \varphi)$, изменяется в пределах четырех октантов: $-1 \le \xi, \mu \le 1$, $0 \le \eta \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$; пространственные переменные изменяются в пределах: $0 \le r_{\text{int}} \le r \le r_{\text{out}}$, $z_{\text{bot}} \le z \le z_{\text{top}}$. Правую часть уравнения (1.1), учитывая имеющуюся симметрию, можно представить в виде

$$S(r, z, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}\sigma_{s,l}\sum_{m=0}^{l}Y_l^m(\mu, \varphi)\Phi_l^m(r, z) + f(r, z, \mu, \varphi), \tag{1.3}$$

где $Y_l^m(\mu, \varphi)$ — сферические гармоники:

$$Y_l^m(\mu, \phi) = \left[(2 - \delta_{0,m})\frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!}\right]P_l^{|m|}(\mu)\begin{cases}\sin|m|\phi, & m = -l, -l+1, \ldots, -1, \\ \cos m\phi, & m = 0, 1, \ldots, l, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad |m| \le l,\end{cases}$$

$\Phi_l^m(r, z)$ — угловые моменты потока:

$$\Phi_l^m(r, z) = 2\int_0^\pi d\varphi\int_{-1}^1 d\mu Y_l^m(\mu, \varphi)\psi(r, z, \mu, \varphi).$$

Для аппроксимации интеграла рассеяния вводится квадратура, которая разбивает рассматриваемые четыре октанта $-1 \le \xi, \mu \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$ на L полос по переменной μ веса w_l, а каждая полоса l, $l = 1, 2, \ldots, L$, дополнительно еще разбивается на M_l секторов веса $w_{l,m}$, где индекс m на l-м слое пробегает значения $m = 1, 2, \ldots, M_l$. Нумерация узлов по φ на l-м слое соответствует возрастанию $\xi_{l,m}$ (убыванию $\varphi_{l,m}$):

$$\int_{-1}^1 d\mu\int_0^\pi d\varphi F(\mu, \varphi) \cong \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}w_{l,m}F(\mu_l, \varphi_{l,m}), \quad \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}w_{l,m} = 2\pi, \quad M_l = M_l^- + M_l^+, \quad \sum_{l=1}^{L}M_l = M. \tag{1.4}$$

В (1.4) M_l^- и M_l^+ задают, соответственно, число узлов с $\varphi_{l,m} \in [\pi/2, \pi]$ и $\varphi_{l,m} \in [0, \pi/2]$ на слое μ_l; угловые направления на слое нумеруются в направлении убывания φ, M – полное число узлов квадратуры. В r, z геометрии дополнительно вводятся узлы $\varphi_{l,1} = \pi$ с нулевыми весами $w_{l,1} = 0$. В r, z геометрии эти направления используются как граничные для начала расчета слоя с $\mu = \mu_l$, m =1, 2, ..., M_l.

Для граничного направления $\varphi = \pi$, используемого для организации расчета граничных ячеек в r, z геометрии, дивергентная форма уравнения (1.1) имеет вид

$$\mu r \frac{\partial \psi}{\partial z} + \xi \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) - \psi \right] + \sigma r \psi(r, z, \mu, \varphi) = rS(r, z, \mu, \varphi). \tag{1.5}$$

Уравнение баланса нулевого порядка получается путем интегрирования уравнения (1.1) по разностной ячейке $(r_{i-1/2}, r_{i+1/2}) \times (z_{k-1/2}, z_{k+1/2}) \times (\varphi_{l,m-1/2}, \varphi_{l,m+1/2}) \times (\mu_{l-1/2}, \mu_{l+1/2})$, i = 1, 2, ..., I, K = 1, 2, ..., K:

$$|\mu| v_r(\psi_T - \psi_B) + \Delta z \left[|\xi| (A^+ \psi_R - A^- \psi_L) + \frac{C}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}) \right] + \sigma V \psi = VS, \tag{1.6}$$

где

$$\alpha_{l,m+1/2} - \alpha_{l,m-1/2} = -w_{l,m}\xi_{l,m},, \quad \alpha_{l,1/2} = \alpha_{l,M_{l+1/2}} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M_l, \quad l = 1, 2, \ldots, L,$$

$$A_{i\pm 1/2} = r_{i\pm 1/2}, \quad v_{r,i} = \frac{1}{2}(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2), \quad C_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2},$$

$$\Delta z_k = v_{z,k} = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad V_{i,k} = \Delta z_k v_{r,i}, \tag{1.7}$$

$$\psi_{R(L)} \equiv \psi_r^{\pm} = \begin{cases} \psi_{i\pm 1/2,k,l,m}, \xi_{l,m} > 0, \\ \psi_{i\mp 1/2,k,l,m}, \xi_{l,m} < 0, \end{cases} \quad \psi_{T(B)} \equiv \psi_z^{\pm} = \begin{cases} \psi_{i,k\pm 1/2,l,m}, \mu_l > 0, \\ \psi_{i,k\mp 1/2,l,m}, \mu_l < 0, \end{cases} \quad A^{\pm} = \begin{cases} A_{i\pm 1/2}, \xi_{l,m} > 0, \\ A_{i\mp 1/2}, \xi_{l,m} < 0. \end{cases}$$

Здесь $\psi_{R(L)}$ и $\psi_{T(B)}$ – нулевые пространственные моменты потока на пространственных гранях ячейки.

Для построения нодальной WLB-WLD схемы 2–4-го порядков точности (см. [7], [10], [12]), кроме уравнения баланса нулевого порядка (1.6), нам потребуются также уравнения баланса первого порядка по ячейке, получаемые интегрированием уравнения (1.1) по разностной ячейке с весами $2(r - r_i - \delta_i^c)/\Delta r$ и $2(z - z_k)/\Delta z$, где δ_i^c – малое отклонение от центра ячейки, выбираемое из условия $\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} (r - r_i - \delta_i^c) r dr = 0$ (см. [9]–[11]):

$$\begin{gathered} |\mu| v_r^1(\psi_T^r - \psi_B^r) + v_z \left\{ \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) \psi_R + A^- \left(\frac{\Delta r}{2} + s_r \delta^c \right) \psi_L - v_r \psi \right] + \frac{C^r}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2}^r - \right. \\ \left. - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}^r) - \delta^c \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}) \right\} + \sigma V^r \psi^r = V^r S^r, \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\mu V \left[\frac{1}{2}(\psi_T + \psi_B) - \psi \right] + v_z^1 \left[|\xi| (A^+ \psi_R^z - A^- \psi_L^z) + \frac{C}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2}^z - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}^z) \right] + \sigma V^z \psi^z = V^z S^z, \tag{1.9}$$

где ψ – среднее значение (нулевой пространственный момент) потока в ячейке, ψ^r и ψ^z – первые пространственные моменты потока по переменным r и z:

$$\psi_{i,k,l,m}^r = \frac{1}{V_{i,k}^r} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \psi_{l,m}(r, z)(r - r_i - \delta_i^c) r dr dz, \quad \psi_{i,k,l,m}^z = \frac{1}{V_{i,k}^z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \psi_{l,m}(r, z)(z - z_k) r dr dz \tag{1.10}$$

(аналогично определяются и пространственные моменты источника S, S^r и S^z), $\psi_{R\{L\}}$ и $\psi_{T(B)}$ – нулевые, а $\psi^z_{R(L)}$ и $\psi^r_{T(B)}$ – первые пространственные моменты потока на пространственных гранях ячейки:

$$\psi^z_{R(L)} = \begin{cases} \psi^z_{i\pm1/2,k,l,m}, & \xi_{l,m} > 0, \\ \psi^z_{i\mp1/2,k,l,m}, & \xi_{l,m} < 0, \end{cases} \quad \psi^r_{T(B)} = \begin{cases} \psi^r_{i,k\pm1/2,l,m}, & \mu_l > 0, \\ \psi^r_{i,k\pm1/2,l,m}, & \mu_l < 0, \end{cases}$$

где

$$\psi^r_{i,k\pm1/2,l,m} = \frac{1}{v_r^1}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \psi_{l,m}(r, z_{k\pm1/2})(r - r_i - \delta_i^c) r dr, \quad \psi^z_{i\pm1/2,k,l,m} = \frac{1}{v_z^1}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \psi_{l,m}(r_{i\pm1/2}, z)(z - z_k) dz,$$

$\psi_{m\pm1/2}$, $\psi^r_{m\pm1/2}$ и $\psi^z_{m\pm1/2}$ – нулевой и первые пространственные моменты решения на входящей $(m-1/2)$ и выходящей $(m+1/2)$ угловой грани ячейки:

$$\begin{gathered} \psi^r_{i,k,l,m\pm1/2} = \frac{1}{C^r v_z}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \psi_{l,m\pm1/2}(r,z)(r - r_i) dr dz, \\ \psi^z_{i,k,l,m\pm1/2} = \frac{1}{C v_z^1}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \psi_{l,m\pm1/2}(r,z)(z - z_k) dr dz, \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} V = v_r v_z, \quad V^r_{i,k} = \frac{2}{\Delta r}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (r - r_i - \delta_i^c)^2 r dr dz = v_r^1 v_z, \quad V^z_{i,k} = \frac{2}{\Delta z}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (z - z_k)^2 r dr dz = v_r v_z^1, \\ v_r = \frac{1}{2}(r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}), \quad v_z = \Delta z, \quad v_r^1 = \frac{(\Delta r_i)^2}{6}(r_i - \delta_i^c), \quad v_z^1 = \frac{(\Delta z)^2}{6}, \quad C = \Delta r, \\ C^r = \frac{(\Delta r)^2}{6}, \quad \delta_i^c = \frac{(\Delta r)^2}{12 r_i}, \quad s_r = \operatorname{sign}(\xi), \quad s_z = \operatorname{sign}(\mu). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Выбор нормировочного коэффициента $V^r_{i,k}$ в уравнении (1.12) в определении первого радиального пространственного момента ψ^r (1.10) гарантирует выполнение следующего условия: дополнительное уравнение LB схемы из [9] $\psi_{i+1/2} = 2\psi^r + \psi_{i-1/2}$ по r удовлетворяется точно на линейных по r решениях вида $\psi(r) = a + br$ из [11], что улучшает аппроксимацию LB схемы.

Для получения разностной схемы к трем точным балансным уравнениям (1.6), (1.8) и (1.9) следует добавить семь дополнительных уравнений. WLB-WLD схеме соответствует следующий выбор этих уравнений (см. [7], [10], [12], [13]):

$$\begin{gathered} \psi_R = (1 - P_r)\psi + (P_r + Q_r)s_r\psi^r + P_r\psi_L, \quad \psi_T = (1 - P_z)\psi + (P_z + Q_z)s_z\psi^z + P_z\psi_B, \\ \psi^z_R = \psi^z + T_r s_r s_z \psi^r, \quad \psi^r_T = \psi^r + T_z s_r s_z \psi^z, \quad s_r = \operatorname{sign}(\xi), \quad s_z = \operatorname{sign}(\mu), \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} \psi_{m+1/2} = (1 + P_\xi)\left(\psi - \frac{2}{\Delta r}\delta^c\psi^r\right) - P_\xi\psi_{m-1/2}, \quad \psi^r_{m+1/2} = (1 + P^r_\xi)\psi^r - P^r_\xi\psi^r_{m-1/2}, \\ \psi^z_{m+1/2} = (1 + P^z_\xi)\psi^z - P^z_\xi\psi^z_{m-1/2}, \quad 0 \le P_\xi, P^r_\xi, P^z_\xi \le 1. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Веса P_t и Q_t, $t = r, z$, в уравнениях (1.13) изменяются в пределах (см. [12])

$$0 \le P_t \le 1, \quad Q_t = 1 \quad \text{или} \quad P_t = 0, \quad 1/E^- \le Q_r < 1, \quad 1/3 \le Q_z < 1 \quad \text{или} \quad P_t = 0, \quad Q_t > 1, \tag{1.15}$$

где

$$E^- = V\left(\frac{\Delta r}{2} + s\delta^c\right)\Big/V^r. \tag{1.16}$$

Случай $P_t = Q_t = 1$, $T_t = 0$ соответствует LB схеме 4-го порядка точности, случай $P_t = 0$, $Q_t = 1$, $T_t = 0$ соответствует LD схеме 3-го порядка точности.

Как и в случае 1D криволинейных геометрий дополнительное уравнение WDD схемы, связывающее входящие и выходящие радиальные пространственные моменты нулевого порядка $\psi_{m\pm 1/2}$ на гранях $\xi_{l,m\pm 1/2}$ разностной ячейки, включает член $\sim\psi^r$, позволяющий учесть различие в пространственном весовом множителе в определении ψ и $\psi_{m\pm 1/2}$. Отметим, что дополнительные уравнения (1.14) выполняются точно на постоянных по углу φ и линейных по пространственным переменным r и z решениях:

$$\psi(r,z,\mu,\varphi) = \psi + \frac{2}{\Delta r}(r - r_i - \delta_i^c)\psi^r + \frac{2}{\Delta z}(z - z_k)\psi^z. \tag{1.17}$$

В дальнейшем ограничим выбор весов P_ξ^r и P_ξ^z в экстраполяционных соотношениях для $\psi_{m+1/2}^r$ и $\psi_{m+1/2}^z$ (1.14) условием

$$P_\xi^r = P_\xi^z = 0. \tag{1.18}$$

Система дополнительных уравнений LD схемы для случая x, y геометрии была предложена в [8]. Система дополнительных уравнений WLB-WLD схемы (1.13)–(1.15) представляет собой обобщение указанной системы на случай семейства взвешенных нодальных схем в r, z геометрии. Отметим, что альтернативный вариант построения LD схемы в r, z геометрии рассмотрен в [20].

Подстановка дополнительных уравнений (1.13), (1.14) в балансные соотношения (1.6), (1.8) и (1.9) приводит к следующей системе уравнений относительно пространственных моментов решения в ячейке ψ, ψ^r и ψ^z:

$$\begin{aligned} a_{11}\psi + a_{12}\psi^r + a_{13}\psi^z &= b_1, \\ a_{21}\psi + a_{22}\psi^r + a_{23}\psi^z &= b_2, \\ a_{31}\psi + a_{32}\psi^r + a_{33}\psi^z &= b_3, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где элементы матриц A и B имеют вид

$$\begin{gathered} a_{11} = \sigma V + |\mu| v_r(1 - P_z) + |\xi| v_z A^+(1 - P_r) + \frac{C}{w} v_z \alpha_{m+1/2}(1 + P_\xi), \\ a_{12} = v_z \xi A^+(Q_r + P_r) - \delta^c \frac{2}{\Delta r}\frac{C}{w} v_z \alpha_{m+1/2}(1 + P_\xi), \\ a_{13} = v_r \mu (Q_z + P_z), \quad a_{21} = v_z\left\{\xi\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)(1 - P_r) - v_r\right] - \delta^c \frac{C}{w}\alpha_{m+1/2}(1 + P_\xi)\right\}, \\ a_{22} = |\mu| v_r^1 + |\xi| v_z A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)(Q_r + P_r) + (\delta^c)^2 \frac{2}{\Delta r}\frac{C}{w} v_z \alpha_{m+1/2}(1 + P_\xi) + \frac{C^r}{w} v_z \alpha_{m+1/2} + \sigma V^r, \\ a_{23} = \mu v_r^1 s_r T_z, \quad a_{31} = -\frac{1}{2}\mu V(1 + P_z), \quad a_{32} = \xi v_z^1 A^+ s_z T_r, \\ a_{33} = |\mu| v_r \frac{\Delta z}{2}(Q_z + P_z) + |\xi| v_z^1 A^+ + v_z^1 \frac{C}{w}\alpha_{m+1/2} + \sigma V^z, \\ b_1 = VS + |\mu| v_r(1 - P_z)\psi_B + v_z\left[|\xi|(A^- - A^+P_r)\psi_L + \frac{C}{w}(\alpha_{m-1/2} + P_\xi\alpha_{m+1/2})\psi_{m-1/2}\right], \\ b_2 = V^rS^r + |\mu| v_r^1\psi_B^r - v_z\left\{\xi\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)P_r + A^-\left(\frac{\Delta r}{2} + s_r\delta^c\right)\right]\psi_L - \right. \\ \left. - \frac{C^r}{w}\alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}^r + \delta^c\frac{C}{w}(\alpha_{m-1/2} + P_\xi\alpha_{m+1/2})\psi_{m-1/2}\right\}, \\ b_3 = V^zS^z - \mu v_r \frac{\Delta z}{2}(1 + P_z)\psi_B + v_z^1\left[|\xi| A^-\psi_L^z + \frac{C}{w}\alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}^z\right]. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Решение системы (1.19) находится по формулам Крамера.

Система балансных уравнений для граничных ячеек с $m = 1/2$ ($\xi_{l,1/2} = -\sqrt{1-\mu_l^2}$), используемых для нахождения граничных значений потока $\psi_{i,k,l,1/2}$, $\psi^r_{i,k,l,1/2}$ и $\psi^z_{i,k,l,1/2}$ по угловой переменной ξ, состоит из уравнения баланса нулевого порядка (1.5), в котором полагается

$$\psi_{i,k,l,1/2} \simeq \psi^{(0)}_{i,k,l} - \frac{2}{\Delta r}\delta^c \psi^r_{i,k,l}, \tag{1.21}$$

учитывающее линейную аппроксимацию решения в ячейке (1.17), и уравнений баланса первого порядка, которые получаются путем интегрирования уравнения (1.5) по граничной ячейке с весами $2(r - r_i - \delta_i^c)/\Delta r$ и $2(z - z_k)/\Delta z$:

$$|\mu| v_r(\psi_T - \psi_B) + \Delta z|\xi|\left[(A^+\psi_R - A^-\psi_L) + (A^- - A^+)\left(\psi - \frac{2}{\Delta r}\delta^c\psi^r\right)\right] + \sigma V\psi = VS, \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}|\mu| v_r^1(\psi^r_T - \psi^r_B) + v_z\xi\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)\psi_R + A^-\left(\frac{\Delta r}{2} + s_r\delta^c\right)\psi_L - v_r\psi + \right.\\ \left. + \delta^c C\left(\psi - \frac{2}{\Delta r}\delta^c\psi^r\right) - C^r\psi^r\right] + \sigma V^r\psi^r = V^r S^r,\end{gathered} \tag{1.23}$$

$$\mu V\left[\frac{1}{2}(\psi_T + \psi_B) - \psi\right] + v_z^1|\xi|[(A^+\psi^z_R - A^-\psi^z_L) + (A^- - A^+)\psi^z] + \sigma V^z\psi^z = V^z S^z. \tag{1.24}$$

В случае WLB-WLD схемы эти уравнения дополняются четырьмя дополнительными уравнениями (1.13). Подставляя их в балансные соотношения (1.6), (1.23) и (1.24), получаем систему вида (1.19) со следующими коэффициентами:

$$\begin{gathered}
a_{11} = \sigma V + |\mu| v_r(1 - P_z) + |\xi| v_z(A^- - P_r A^+), \quad a_{12} = v_z\xi[A^+(Q_r + P_r) + 2\delta^c], \quad a_{13} = v_r\mu(Q_z + P_z),\\
a_{21} = v_z\xi\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)(1 - P_r) - v_r + \delta^c C\right],\\
a_{22} = |\mu| v_r^1 + v_z|\xi|\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)(Q_r + P_r) - s_r(\delta^c)^2 C\frac{2}{\Delta r} - s_r C^r\right] + \sigma V^r, \quad a_{23} = \mu v_r^1 s_r T_z,\\
a_{31} = -\frac{1}{2}\mu V(1 + P_z), \quad a_{32} = \xi v_z^1 A^+ s_z T_r, \quad a_{33} = \frac{1}{2}|\mu| V(Q_z + P_z) + |\xi| v_z^1 A^- + \sigma V^z, \qquad (1.25)\\
b_1 = VS + |\mu| v_r(1 - P_z)\psi_B + |\xi| v_z(A^- - A^+P_r)\psi_L,\\
b_2 = V^r S^r + |\mu| v_r^1\psi^r_B - v_z\xi\left[A^+\left(\frac{\Delta r}{2} - s_r\delta^c\right)P_r + A^-\left(\frac{\Delta r}{2} + s_r\delta^c\right)\right]\psi_L,\\
b_3 = V^z S^z - \frac{1}{2}\mu V(1 + P_z)\psi_B + v_z^1|\xi| A^-\psi^z_L.
\end{gathered}$$

Следует отметить, что расчет ячейки с использованием WLB-WLD схемы происходит аналогично случаю WDD схемы. Сначала из решения системы вида (1.19) находятся нулевой и первые пространственные моменты решения в ячейке, а затем по явным формулам (1.13), (1.14) находятся граничные потоки и соответствующие пространственные моменты граничных потоков на выходящих гранях ячейки.

Как показывает геометрическая интерпретация WLB-WLD схемы из [12], путем соответствующего выбора весов в дополнительных уравнениях (1.13), (1.14) можно обеспечить положительность схемы.

2. ПОСТРОЕНИЕ KP_1 СХЕМЫ УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В r, z ГЕОМЕТРИИ

Перепишем уравнение баланса и систему дополнительных уравнений WLD-WLB схемы в r, z геометрии на $(n+1)$-й внутренней итерации в более удобном для последующего изложения виде:

$$\mu v_r(\psi_{k+1/2}^{n+1/2} - \psi_{k-1/2}^{n+1/2}) + v_z\left[\xi(A_{i+1/2}\psi_{i+1/2}^{n+1/2} - A_{i-1/2}\psi_{i-1/2}^{n+1/2}) + \frac{C}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2}^{n+1/2} - \alpha_{l,m-1/2}\psi_{m-1/2}^{n+1/2})\right] + \\ + \sigma_t V\psi^{n+1/2} = V\sum_{\kappa=0}^{K}\frac{2\kappa+1}{4\pi}\sigma_{s,\kappa}\sum_{\nu=0}^{\kappa}Y_\kappa^\nu(\mu,\varphi)\Phi_\kappa^{\nu,n} + VF, \tag{2.1}$$

$$v_z\left\{\xi\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right)\psi_{i+1/2} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right)\psi_{i-1/2} - v_r\psi\right] + \frac{C^r}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2}^r - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}^r) - \right. \\ \left. - \delta^c\frac{C}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2})\right\} + \mu v_r^1(\psi_{k+1/2}^r - \psi_{k-1/2}^r) + \sigma V^r\psi^r = V^r S^r, \tag{2.2}$$

$$\mu V\left[\frac{1}{2}(\psi_{k+1/2} + \psi_{k-1/2}) - \psi\right] + v_z^1\left[\xi(A_{i+1/2}\psi_{i+1/2}^z - A_{i-1/2}\psi_{i-1/2}^z) + \right. \\ \left. + \frac{C}{w}(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2}^z - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}^z)\right] + \sigma V^z\psi^z = V^z S^z. \tag{2.3}$$

Дополним их системой дополнительных уравнений

$$\psi^{r,n+1/2} = a_r^{n+1/2}\psi_{i+1/2}^{n+1/2} + b_r^{n+1/2}\psi_{i-1/2}^{n+1/2} - (a_r^{n+1/2} + b_r^{n+1/2})\psi^{n+1/2}, \\ a_r = \begin{cases}1/(Q_r + P_r), & \xi > 0,\\ P_r/(Q_r + P_r), & \xi < 0,\end{cases} \quad b_r = -\begin{cases}P_r/(Q_r + P_r), & \xi > 0,\\ 1/(Q_r + P_r), & \xi < 0,\end{cases} \\ 0 \le P_r \le 1, \quad Q_r = 1 \quad \text{или} \quad P_r = 0, \quad 0 \le Q_r < \infty, \tag{2.4}$$

$$\psi^{z,n+1/2} = a_z^{n+1/2}\psi_{k+1/2}^{n+1/2} + b_z^{n+1/2}\psi_{k-1/2}^{n+1/2} - (a_z^{n+1/2} + b_z^{n+1/2})\psi^{n+1/2}, \\ a_z = \begin{cases}1/(Q_z + P_z), & \mu > 0,\\ P_z/(Q_z + P_z), & \mu < 0,\end{cases} \quad b_z = -\begin{cases}P_z/(Q_z + P_z), & \mu > 0,\\ 1/(Q_z + P_z), & \mu < 0,\end{cases} \\ 0 \le P_z \le 1, \quad Q_z = 1 \quad \text{или} \quad P_z = 0, \quad 0 \le Q_z < \infty. \tag{2.5}$$

Веса T_t, $t = r, z$ отличны от нуля только при использовании очень редких пространственных сеток. Их введение усложняет систему дополнительных уравнений для поправок. Однако, если пространственная сетка задачи не слишком грубая, такая коррекция, как показал численный эксперимент, вообще говоря, не требуется. В данной работе вышеуказанные весовые коэффициенты полагаются равными нулю: $T_t = 0$, $t = r, z$.

Дополнительные уравнения для пространственных моментов на гранях ячейки в случае $T_r = T_z = 0$ можно записать в виде

$$\psi^{z,n+1/2} = a\psi_{i+1/2}^{z,n+1/2} + (1-a)\psi_{i-1/2}^{z,n+1/2}, \quad a = \begin{cases}1, & \xi > 0,\\ 0, & \xi < 0,\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\psi^{r,n+1/2} = c\psi_{k+1/2}^{r,n+1/2} + (1-c)\psi_{k-1/2}^{r,n+1/2}, \quad c = \begin{cases}1, & \mu > 0,\\ 0, & \mu < 0.\end{cases} \tag{2.7}$$

Дополнительное WDD уравнение по угловой переменной можно записать в виде

$$\psi_{m+1/2}^{n+1/2} = (1 + P_\xi)\psi^{n+1/2} - P_\xi\psi_{m-1/2}^{n+1/2} = \sum_{m'=1/2,1,..,m} d_{m'}^m\psi_{m'}^{n+1/2}, \quad 0 \le P_\xi \le 1. \tag{2.8}$$

К системе уравнений (2.1)–(2.8) следует также добавить граничные условия при $r = r_{1/2} = r_{\mathrm{int}} \geq 0$, $r = r_{I+1/2} = r_{\mathrm{ext}}$, $z = z_{1/2} = z_{\mathrm{bot}}$, $z = z_{K+1/2} = z_{\mathrm{top}}$:

$$\begin{aligned} \psi^{n+1/2}_{1/2,k,l,m} &= F^{\mathrm{int}}_{k,l,m} + \sum_{\xi_{l',m'}<0} w_{l',m'} R^{\mathrm{int}}_{lm,l'm'} \psi^{n+1/2}_{1/2,k,l',m'}, \quad \xi_{l,m} > 0, \\ \psi^{n+1/2}_{I+1/2,k,l,m} &= F^{\mathrm{ext}}_{k,l,m} + \sum_{\xi_{l',m'}>0} w_{l',m'} R^{\mathrm{ext}}_{lm,l'm'} \psi^{n}_{I+1/2,k,l',m'}, \quad \xi_{l,m} < 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \psi^{n+1/2}_{i,1/2,l,m} &= F^{\mathrm{bot}}_{i,l,m} + \sum_{\mu_{l'}<0} w_{l',m'} R^{\mathrm{bot}}_{lm,l'm'} \psi^{n+1/2}_{i,1/2,l',m'}, \quad \mu_l > 0, \\ \psi^{n+1/2}_{i,K+1/2,l,m} &= F^{\mathrm{top}}_{i,l,m} + \sum_{\mu_{l'}>0} w_{l',m'} R^{\mathrm{top}}_{lm,l'm'} \psi^{n}_{i,K+1/2,l',m'}, \quad \mu_l < 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для расчета весового коэффициента P_ξ в дополнительном WDD уравнении по угловой переменной используется адаптивная WDD (AWDD) схема (см. [10], [21]–[23].

Для ускорения сходимости внутренних итераций в KP_1 схеме используются линейные поправки к нулевому и первым угловым моментам решения следующего вида:

$$\psi^{\alpha,n+1} = \psi^{\alpha,n+1/2} + \frac{1}{4\pi}(f^{\alpha,0} + 3\xi f^{\alpha,r} + 3\mu f^{\alpha,z}), \quad \alpha = 0, r, z, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \psi^{\beta,n+1}_{i\pm1/2} &= \psi^{\beta,n+1/2}_{i\pm1/2} + \frac{1}{4\pi}(f^{\beta,0}_{i\pm1/2} + 3\xi f^{\beta,r}_{i\pm1/2}), \quad \beta = 0, z, \\ \psi^{\beta,n+1}_{k\pm1/2} &= \psi^{\beta,n+1/2}_{k\pm1/2} + \frac{1}{4\pi}(f^{\beta,0}_{k\pm1/2} + 3\mu f^{\beta,z}_{k\pm1/2}), \quad \beta = 0, r, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где α и β – индексы пространственных моментов. Уравнение (2.11) содержит девять поправок, уравнения (2.12) – восемь поправок.

Для получения системы уравнений для определения ускоряющих поправок $f^{\alpha,0}$, $f^{\alpha,r}$ и $f^{\alpha,z}$ воспользуемся следующей процедурой, близкой к “4-step” процедуре Ларсена (см. [3]). Прежде всего подействуем на уравнение баланса (1.11.3) операторами проектирования $\hat{L}_0$, $\hat{L}_r$, и $\hat{L}_z$:

$$\hat{L}_0\psi = 2\sum_{l,m} w_{l,m}\psi_{i,k,l,m}, \quad \hat{L}_r\psi = 2\sum_{l,m} w_{l,m}\xi_{l,m}\psi_{i,k,l,m}, \quad \hat{L}_z\psi = 2\sum_{l,m} w_{l,m}\mu_l\psi_{i,k,l,m}, \tag{2.13}$$

где интегрирование проводится по четырем октантам. В предположении, что используемая квадратура достаточно точно интегрирует соответствующие сферические гармоники, получим

$$\begin{aligned} & v_r(f^{0,z}_{k+1/2} - f^{0,z}_{k-1/2}) + v_z(A_{i+1/2}f^{0,r}_{i+1/2} - A_{i-1/2}f^{0,r}_{i-1/2}) + \sigma^{00}Vf^{0,0} = VQ^{0,0}, \\ & \frac{1}{3}v_z[(A_{i+1/2}f^{0,0}_{i+1/2} - A_{i-1/2}f^{0,0}_{i-1/2}) - Cf^{0,0}] + (\sigma^{11}V + M_rCv_z)f^{0,r} = VQ^{0,r}, \\ & \frac{1}{3}v_r(f^{0,0}_{k+1/2} - f^{0,0}_{k-1/2}) + \sigma^{11}Vf^{0,z} = VQ^{0,z}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} & v_z\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right)f^{0,r}_{i+1/2} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right)f^{0,r}_{i-1/2} - v_rf^{0,r}\right] + v^1_r(f^{r,z}_{k+1/2} - f^{r,z}_{k-1/2}) + \sigma^{00}V^rf^{r,0} = V^rQ^{r,0}, \\ & v_z\frac{1}{3}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right)f^{0,0}_{i+1/2} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right)f^{0,0}_{i-1/2} - v_rf^{0,0} - C^rf^{r,0} + C\delta^cf^{0,0}\right] - \\ & - v_z\delta^cM_rCf^{0,r} + (\sigma^{11}V^r + M^r_rC^rv_z)f^{r,r} = V^rQ^{r,r}, \\ & v^1_r\frac{1}{3}(f^{r,0}_{k+1/2} - f^{r,0}_{k-1/2}) + \sigma^{11}V^rf^{r,z} = V^rQ^{r,z}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} & V\left[\frac{1}{2}(f^{0,z}_{k+1/2} + f^{0,z}_{k-1/2}) - f^{0,z}\right] + v^1_z(A_{i+1/2}f^{z,r}_{i+1/2} - A_{i-1/2}f^{z,r}_{i-1/2}) + \sigma^{00}V^zf^{z,0} = V^zQ^{z,0}, \\ & v^1_z\frac{1}{3}\left[(A_{i+1/2}f^{z,0}_{i+1/2} - A_{i-1/2}f^{z,0}_{i-1/2}) - Cf^{z,0}\right] + (\sigma^{11}V^z + M^z_rCv^1_z)f^{z,r} = V^zQ^{z,r}, \\ & V\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(f^{0,0}_{k+1/2} + f^{0,0}_{k-1/2}) - f^{0,0}\right] + \sigma^{11}V^zf^{z,z} = V^zQ^{z,z}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$Q^{\alpha,0} = \sigma_{s,0}(\Phi^{\alpha,0,n+1/2} - \Phi^{\alpha,0,n}), \quad Q^{\alpha,r} = \sigma_{s,1}(\Phi^{\alpha,r,n+1/2} - \Phi^{\alpha,r,n}), \quad Q^{\alpha,z} = \sigma_{s,1}(\Phi^{\alpha,z,n+1/2} - \Phi^{\alpha,z,n}),$$
$$\alpha = 0, r, z, \quad \sigma^{00} = \sigma - \sigma_{s,0}, \quad \sigma^{11} = \sigma - \sigma_{s,1}, \quad \Phi^{\alpha,0}_{i,k} \equiv \Phi^{\alpha,0}_{0,i,k}, \quad \Phi^{\alpha,r}_{i,k} \equiv \Phi^{\alpha,1}_{1,i,k}, \quad \Phi^{\alpha,z}_{i,j,k} \equiv \Phi^{\alpha,0}_{1,i,j,k}, \tag{2.17}$$

$$M_r = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}\xi_{l,m}(\alpha_{l,m+1/2}\pi^r_{l,m+1/2} - \alpha_{l,m-1/2}\pi^r_{l,m-1/2}),$$
$$M^r_r = M^z_r \equiv \bar{M}_r = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}\xi_{l,m}(\alpha_{l,m+1/2}\bar{\pi}^r_{l,m+1/2} - \alpha_{l,m-1/2}\bar{\pi}^r_{l,m-1/2}). \tag{2.18}$$

Величины $\pi^r_{l,m\pm1/2}$, $\bar{\pi}^r_{l,m\pm1/2}$ в (2.18) могут быть вычислены с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\pi^r_{l,m+1/2} = (1 + P^{\xi}_{l,m})\xi_{l,m} - P^{\xi}_{l,m}\pi^r_{l,m-1/2}, \quad \pi^r_{l,1/2} = \xi_{l,1/2}, \quad \bar{\pi}^r_{l,m+1/2} = \xi_{l,m}, \quad \bar{\pi}^r_{l,1/2} = \xi_{l,1/2}. \tag{2.19}$$

В систему из девяти уравнений (2.14)–(2.16) входит 17 неизвестных величин: $f^{\alpha,0}_{i,k}$, $f^{\alpha,r}_{i,k}$, $f^{\alpha,z}_{i,k}$, $\alpha = 0, r, z$; $f^{\beta,0}_{i\pm1/2,k}$, $f^{\beta,r}_{i\pm1/2,k}$, $\beta = 0, z$; $f^{\beta,0}_{i,k\pm1/2}$, $f^{\beta,z}_{i,k\pm1/2}$, $\beta = 0, r$. Для замыкания системы (2.14) к ней необходимо добавить восемь дополнительных уравнений, а также граничные условия. Искомые дополнительные уравнения получаются применением операторов $\hat{L}_0$ и $\hat{L}_r$ к уравнениям (2.4), (2.6) и операторов $\hat{L}_0$ и $\hat{L}_z$ к уравнениям (2.5), (2.7):

$$f^{r,0} = A^{r,0}f^{0,0}_{i+1/2} + A^{r,1}f^{0,r}_{i+1/2} + B^{r,0}f^{0,0}_{i-1/2} + B^{r,1}f^{0,r}_{i-1/2} - (A^{r,0} + B^{r,0})f^{0,0} - (A^{r,1} + B^{r,1})f^{0,r},$$
$$f^{r,r} = \frac{1}{3}A^{r,1}f^{0,0}_{i+1/2} + A^{r,2}f^{0,r}_{i+1/2} + \frac{1}{3}B^{r,1}f^{0,0}_{i-1/2} + B^{r,2}f^{0,r}_{i-1/2} - \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})f^{0,0} - (A^{r,2} + B^{r,2})f^{0,r}, \tag{2.20}$$

$$f^{z,0} = A^{z,0}f^{0,0}_{k+1/2} + A^{z,1}f^{0,z}_{k+1/2} + B^{z,0}f^{0,0}_{k-1/2} + B^{z,1}f^{0,z}_{k-1/2} - (A^{z,0} + B^{z,0})f^{0,0} - (A^{z,1} + B^{z,1})f^{0,z},$$
$$f^{z,z} = \frac{1}{3}A^{z,1}f^{0,0}_{k+1/2} + A^{z,2}f^{0,z}_{k+1/2} + \frac{1}{3}B^{z,1}f^{0,0}_{k-1/2} + B^{z,2}f^{0,z}_{k-1/2} - \frac{1}{3}(A^{z,1} + B^{z,1})f^{0,0} - (A^{z,2} + B^{z,2})f^{0,z}, \tag{2.21}$$

где

$$A^{r,0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}a_r, \quad A^{r,1} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\xi_{l,m}a_r, \quad A^{r,2} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\xi^2_{l,m}a_r,$$
$$B^{r,0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}b_r, \quad B^{r,1} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\xi_{l,m}b_r, \quad B^{r,2} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\xi^2_{l,m}b_r,$$
$$A^{z,0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}a_z, \quad A^{z,1} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\mu_{l,m}a_z, \quad A^{z,2} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\mu^2_{l,m}a_z,$$
$$B^{z,0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}b_z, \quad B^{z,1} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\mu_{l,m}b_z, \quad B^{z,2} = \frac{3}{2\pi}\sum_{l,m}w_{l,m}\mu^2_{l,m}b_z, \tag{2.22}$$

$$f^{z,0} = \frac{1}{2}(f^{z,0}_{i+1/2} + f^{z,0}_{i-1/2}) + \frac{3}{4}(f^{z,r}_{i+1/2} - f^{z,r}_{i-1/2}), \quad f^{z,r} = \frac{1}{4}(f^{z,0}_{i+1/2} - f^{z,0}_{i-1/2}) + \frac{1}{2}(f^{z,r}_{i+1/2} + f^{z,r}_{i-1/2}), \tag{2.23}$$

$$f^{r,0} = \frac{1}{2}(f^{r,0}_{k+1/2} + f^{r,0}_{k-1/2}) + \frac{3}{4}(f^{r,z}_{k+1/2} - f^{r,z}_{k-1/2}), \quad f^{r,z} = \frac{1}{4}(f^{r,0}_{k+1/2} - f^{r,0}_{k-1/2}) + \frac{1}{2}(f^{r,z}_{k+1/2} + f^{r,z}_{k-1/2}). \tag{2.24}$$

Для получения граничных условий для P_1 системы для ускоряющих поправок воспользуемся следующей процедурой. Домножим уравнения (2.9), определяющие закон отражения при $r = r_{\text{int}}$ и $r = r_{\text{ext}}$, на $w_{l,m}\xi_{l,m}$ и просуммируем их по направлениям $\xi_{l,m} > 0$ и $\xi_{l,m} < 0$ соответственно. С учетом вида поправок (2.12) получим

$$l^r_0 f^{\beta,0}_{1/2,k} + 3l^r_1 f^{\beta,r}_{1/2,k} = 0, \quad m^r_0 f^{\beta,0}_{I+1/2,k} + 3m^r_1 f^{\beta,r}_{I+1/2,k} = \lambda^{\beta,r}_k, \quad \beta = 0, z, \tag{2.25}$$

где

$$l_p^r = \sum_{\xi_{l,m}>0} w_{l,m}\xi_{l,m}\left(\xi_{l,m}^p - \sum_{\xi_{l',m'}<0} w_{l',m'}\xi_{l',m'}^p R_{lm,l'm'}^{\mathrm{int}}\right), \quad m_p^r = \sum_{\xi_{l,m}<0} w_{l,m}\xi_{l,m}\left(\xi_{l,m}^p - \sum_{\xi_{l',m'}>0} w_{l',m'}\xi_{l',m'}^p R_{lm,l'm'}^{\mathrm{ext}}\right),$$
$$p = 0,1, \quad \lambda_{j,k}^{\beta,r} = 4\pi\sum_{\xi_{l,m}<0} w_{l,m}\xi_{l,m}\sum_{\xi_{l',m'}>0} w_{l',m'}R_{lm,l'm'}^{\mathrm{ext}}(\psi_{I+1/2,k,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \psi_{I+1/2,k,l',m'}^{\beta,n}). \tag{2.26}$$

Для определения граничных условий для поправок на границах $z = z_{\mathrm{bot}}$ и $z = z_{\mathrm{top}}$ домножим уравнения (2.10), определяющие закон отражения на этих границах, на $w_{l,m}\mu_l$ и просуммируем их по направлениям $\mu_l > 0$ и $\mu_l < 0$ соответственно. С учетом вида поправок (2.12) получим

$$l_0^z f_{i,1/2}^{\beta,0} + 3l_1^z f_{i,1/2}^{\beta,z} = 0, \quad m_0^z f_{i,K+1/2}^{\beta,0} + 3m_1^z f_{i,K+1/2}^{\beta,z} = \lambda_i^{\beta,z}, \quad \beta = 0, r, \tag{2.27}$$

где

$$l_p^z = \sum_{\mu_l>0} w_{l,m}\mu_l\left(\mu_l^p - \sum_{\mu_{l',m'}<0} w_{l',m'}\mu_{l'}^p R_{lm,l'm'}^{\mathrm{bot}}\right), \quad m_p^z = \sum_{\mu_l<0} w_{l,m}\mu_l\left(\mu_l^p - \sum_{\mu_{l'}>0} w_{l',m'}\mu_{l'}^p R_{lm,l'm'}^{\mathrm{top}}\right),$$
$$p = 0,1, \quad \lambda_{i,k}^{\beta,z} = 2\pi\sum_{\mu_l<0} w_{l,m}\mu_l\sum_{\mu_{l'}>0} w_{l',m'}R_{lm,l'm'}^{\mathrm{top}}(\psi_{i,K+1/2,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \psi_{i,K+1/2,l',m'}^{\beta,n}). \tag{2.28}$$

Отметим, что в уравнениях (2.25) и (2.27) величины $\lambda_{j,k}^{\beta,r}$ и $\lambda_{i,j}^{\beta,z}$ стремятся к нулю по мере сходимости итераций. По этой причине возможно использование также и упрощенных граничных условий на границах $r = r_{\mathrm{ext}}$ и $z = z_{\mathrm{top}}$, отличающихся от вышеприведенных тем, что правые части в них полагаются равными нулю:

$$\lambda_k^{\beta,r} = \lambda_i^{\beta,z} = 0. \tag{2.29}$$

Использование упрощенных граничных условий, в свою очередь, позволяет упростить постановку граничных условий в методе расщепления, используемом для нахождения решения P_1 системы для ускоряющих поправок.

Учитывая, что в 2D и 3D геометриях в задачах с существенной ролью анизотропии рассеяния, когда выполняется неравенство

$$\lambda = \mu_0 c/(1 - \mu_0 c) > 1, \quad \text{где} \quad \mu_0 = \sigma_{s1}/\sigma_{s0}, \quad c = \sigma_{s0}/\sigma_t, \tag{2.30}$$

сходимость KP_1 схемы нарушается (см. [1], [24]), для обеспечения сходимости KP_1 схемы в задачах переноса нейтрального излучения нами используется следующий простой прием (см. [6], [17]): на четных внутренних итерациях ускоряющая коррекция в соответствии с (2.12) проводится для четырех угловых моментов решения, включая нулевой, на нечетных – только для скалярного потока. Ясно, что такое решение не является оптимальным, но оно обеспечивает сходимость KP_1 схемы для широкого класса практических задач.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ P_1 СИСТЕМЫ ДЛЯ УСКОРЯЮЩИХ ПОПРАВОК В r, z ГЕОМЕТРИИ

P_1 система для KP_1 схемы в r, z геометрии состоит из девяти балансных уравнений (2.14)–(2.16) и восьми дополнительных уравнений: (2.20)–(2.24) и граничных уравнений (2.25), (2.27). Эта система может быть решена итерационно с использованием, например, метода расщепления (МР) (см. [1], [25]).

В соответствии с общим подходом МР оператор P_1 системы $\hat{A}$ для ускоряющих поправок

$$\hat{A}f = q \tag{3.1}$$

представляется в виде суммы:

$$\hat{A} = \hat{R} + \hat{Z}, \tag{3.2}$$

где $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ – компоненты оператора $\hat{A}$, определяющие изменение решения P_1 системы по переменным r и z соответственно. Более подробно о структуре операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ будет сказано ниже. Предположим также, что указанные операторы являются положительно-определенными. В МР сложился следующий конструктивный способ построения итерационной схемы. Для приближенного решения уравнения (3.1) рассмотрим неявную двухслойную итерационную схему вида (см. [1], [25])

$$B_{s+1}\frac{f^{s+1}-f^{s}}{\tau_{s+1}}+Af^{s}=q,\quad B_{s}=(E+\tau_{r}^{(s)}\hat{R})(E+\tau_{z}^{(s)}\hat{Z}),\quad s=0,1,\ldots,\tag{3.3}$$

где τ_{s+1}, $\tau_{\alpha}^{(s+1)}$, $\alpha=r,z$ — итерационные параметры, B — регуляризирующий оператор, s — номер итерации. Если операторы $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ коммутируют, имеют положительные собственные значения и итерационные параметры не зависят от номера итерации s, то достаточным условием сходимости итерационного процесса (3.3) является выполнение неравенства (см. [1], [25])

$$2\tau_{\alpha}\geq\tau>0,\quad \alpha=r,z.\tag{3.4}$$

Стандартный выбор параметров $\tau_{\alpha}=\tau/2$ обеспечивает второй порядок аппроксимации по времени (см. [25]), если рассматривать итерационный процесс (3.3) как решение на установление нестационарной задачи

$$\partial f/\partial t+Af=q.\tag{3.5}$$

Наряду с параметрами τ_{α} введем также величины $\omega_{\alpha}^{(s)}\equiv 1/\tau_{\alpha}^{(s)}$. Используя эти величины, перепишем уравнение (3.5) в виде

$$\tilde{B}_{s+1}\frac{f^{s+1}-f^{s}}{\tilde{\tau}_{s+1}}+Af^{s}=q,\quad \tilde{B}_{s}=(\omega_{r}^{(s)}E+\hat{R})(\omega_{z}^{(s)}E+\hat{Z}),\quad \tilde{z}_{s+1}=\tau_{s+1}\omega_{r}^{(s+1)}\omega_{z}^{(s+1)},\quad s=0,1,\ldots.\tag{3.6}$$

Отметим, что при $\tau_{\alpha}^{(s)}=\tau^{(s)}/2$ величина $\tilde{\tau}_{s}=2\omega^{(s)}$. Схема реализации алгоритма (3.6) имеет следующий вид (см. [1], [25], [27]):

$$(\omega_{r}^{(s+1)}E+\hat{R})\zeta^{s+1/2}=q-Af^{s},\quad (\omega_{z}^{(s+1)}E+\hat{Z})\zeta^{s+1}=\zeta^{s+1/2},\quad f^{s+1}=f^{s}+\tilde{\tau}_{s+1}\zeta^{s+1}.\tag{3.7}$$

Подчеркнем, что, исключая из оператора $\hat{A}$ с помощью дополнительных уравнений (2.20)–(2.21), (2.23)–(2.24) и граничных условий (2.25) и (2.27) поправки, относящиеся к граням ячеек, можно представить его в виде, в котором присутствуют только значения поправок, отнесенные к центру ячейки. Соответственно, в (3.7) можно считать, что единичный оператор $\hat{E}$ действует только на поправки, отнесенные к центру ячейки.

Учитывая вид поправок (2.12), используемых в KP_1 алгоритме, и применяя двухшаговую процедуру метода расщепления (3.7), получаем следующую систему для поправок на **первом шаге** $\tau_{r}^{(s+1)}$:

$$\begin{gathered}
V\omega_{r}^{(s+1)}\zeta^{0,0,s+1/2}+v_{z}(A_{i+1/2}\zeta_{i+1/2}^{0,r,s+1/2}-A_{i-1/2}\zeta_{i-1/2}^{0,r,s+1/2})+\frac{1}{2}\sigma^{00}V\zeta^{0,0,s+1/2}=VQ^{0,0}-\\
-v_{r}(f_{k+1/2}^{0,z,s}-f_{k-1/2}^{0,z,s})-v_{z}(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{0,r,s}-A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{0,r,s})-\sigma^{00}Vf^{0,0,s},\\
V\omega_{r}^{(s+1)}\zeta^{0,r,s+1/2}+\frac{1}{3}v_{z}[(A_{i+1/2}\zeta_{i+1/2}^{0,0,s+1/2}-A_{i-1/2}\zeta_{i-1/2}^{0,0,s+1/2})-C\zeta^{0,0,s+1/2}]+\left(\frac{1}{2}\sigma^{11}V+M_{r}Cv_{z}\right)\zeta^{0,r,s+1/2}=\\
=VQ^{0,r}-\frac{1}{3}v_{z}[(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{0,0,s}-A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{0,0,s})-Cf^{0,0,s}]-(\sigma^{11}V+M_{r}Cv_{z})f^{0,r,s},\\
V\omega_{r}^{(s+1)}\zeta^{0,z,s+1/2}+\frac{1}{2}\sigma^{11}V\zeta^{0,z,s+1/2}=VQ^{0,z}-\frac{1}{3}v_{r}(f_{k+1/2}^{0,0,s}-f_{k-1/2}^{0,0,s})-\sigma^{11}Vf^{0,z,s},\\
V^{r}\omega_{r}^{(s+1)}\zeta^{r,0,s+1/2}+v_{z}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}-\delta^{c}\right)\zeta_{i+1/2}^{0,r,s+1/2}+A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}+\delta^{c}\right)\zeta_{i-1/2}^{0,r,s+1/2}-v_{r}\zeta^{0,r,s+1/2}\right]+\frac{1}{2}\sigma^{00}V^{r}\zeta^{r,0,s+1/2}=\\
=V^{r}Q^{r,0}-v_{z}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}-\delta^{c}\right)f_{i+1/2}^{0,r,s}+A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}+\delta^{c}\right)f_{i-1/2}^{0,r,s}-v_{r}f^{0,r,s}\right]-v_{r}^{1}(f_{k+1/2}^{r,z,s}-f_{k-1/2}^{r,z,s})-\sigma^{00}V^{r}f^{r,0,s},
\end{gathered}\tag{3.8}$$

$$V^r\omega_r^{(s+1)}\zeta^{r,r,s+1/2} + v_z\frac{1}{3}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}-\delta^c\right)\zeta_{i+1/2}^{0,0,s+1/2} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}+\delta^c\right)\zeta_{i-1/2}^{0,0,s+1/2} - v_r\zeta^{0,0,s+1/2} - \right.$$
$$\left. - C^r\zeta^{r,0,s+1/2} + C\,\delta^c\zeta^{0,0,s+1/2}\right] - v_z\delta^c M_r C\zeta^{0,r,s+1/2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^{11}V^r + M_r^r C^r v_z\right)\zeta^{r,r,s+1/2} = V^r Q^{r,r} - \tag{3.9}$$
$$- v_z\frac{1}{3}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}-\delta^c\right)f_{i+1/2}^{0,0,s} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2}+\delta^c\right)f_{i-1/2}^{0,0,s} - v_r f^{0,0,s} - C^r f^{r,0,s} + C\delta^c f^{0,0,s}\right] +$$
$$+ v_z\delta^c M_r C f^{0,r,s} - (\sigma^{11}V^r + M_r^r C^r v_z) f^{r,r,s},$$
$$V^r\omega_r^{(s+1)}\zeta^{r,z,s+1/2} + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^r\zeta^{r,z,s+1/2} = V^r Q^{r,z} - v_r^1\frac{1}{3}(f_{k+1/2}^{r,0,s} - f_{k-1/2}^{r,0,s}) - \sigma^{11}V^r f^{r,z,s},$$

$$V^z\omega_r^{(s+1)}\zeta^{z,0,s+1/2} + v_z^1(A_{i+1/2}\zeta_{i+1/2}^{z,r,s+1/2} - A_{i-1/2}\zeta_{i-1/2}^{z,r,s+1/2}) + \frac{1}{3}\sigma^{00}V^z\zeta^{z,0,s+1/2} = V^z Q^{z,0} -$$
$$- V\left[\frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{0,z,s} + f_{k-1/2}^{0,z,s}) - f^{0,z,s}\right] - v_z^1(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{z,r,s} - A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{z,r,s}) - \sigma^{00}V^z f^{z,0,s},$$
$$V^z\omega_r^{(s+1)}\zeta^{z,r,s+1/2} + v_z^1\frac{1}{3}[(A_{i+1/2}\zeta_{i+1/2}^{z,0,s+1/2} - A_{i-1/2}\zeta_{i-1/2}^{z,0,s+1/2}) - C\zeta^{z,0,s+1/2}] + \left(\frac{1}{2}\sigma^{11}V^z + M_r^z C v_z^1\right)\zeta^{z,r,s+1/2} = \tag{3.10}$$
$$= V^z Q^{z,r} - v_z^1\frac{1}{3}[(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{z,0,s} - A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{z,0,s}) - Cf^{z,0,s}] - (\sigma^{11}V^z + M_r^z C v_z^1) f^{z,r,s},$$
$$V^z\omega_r^{(s+1)}\zeta^{z,z,s+1/2} + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^z\zeta^{z,z,s+1/2} = V^z Q^{z,z} - V\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{0,0,s} + f_{k-1/2}^{0,0,s}) - f^{0,0,s}\right] - \sigma^{11}V^z f^{z,z,s}.$$

Отметим, что в системе уравнений (3.8)–(3.10) и ниже, как и в реализации MP для WDD схемы из [17], используется симметричная декомпозиция членов $\sim\sigma^{00}$ и σ^{11} по операторам $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ (шагам $\tau_r^{(s+1)}$ и $\tau_z^{(s+1)}$). Это позволяет сохранить вид операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ подобным виду P1 оператора для ускоряющих поправок в одномерной геометрии (см. [15], [19]).

Далее мы будем говорить, что величина относится к слою s, $s+1/2$ и т.д., если она имеет соответствующий индекс. Отметим, что в рассматриваемом нами случае 2D геометрии величина ζ для дробного шага $s+1/2$ не аппроксимирует исходную нестационарную задачу (3.5) (см. [26]). Для получения граничных условий по радиальной переменной для поправок ζ отметим, что из граничных условий (2.25) для величин f в предположении (2.29), а также уравнения (3.7) следует, что

$$\begin{gathered} l_0^r\zeta_{1/2,k}^{\beta,0,s+1/2} + 3l_1^r\zeta_{1/2,k}^{\beta,r,s+1/2} = -l_0^r f_{1/2,k}^{\beta,0,s} - 3l_1^r f_{1/2,k}^{\beta,r,s}, \\ m_0^r\zeta_{I+1/2,k}^{\beta,0,s+1/2} + 3m_1^r\zeta_{I+1/2,k}^{\beta,r,s+1/2} = -m_0^r f_{I+1/2,k}^{\beta,0,s} - 3m_1^r f_{I+1/2,k}^{\beta,r,s}, \quad \beta = 0, z. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Так как на шаге $s = 0$ поправки f равны нулю, а на последующих шагах граничные соотношения для поправок f выполняются точно, можно считать, что

$$l_0^r\zeta_{1/2,k}^{\beta,0,s+1/2} + 3l_1^r\zeta_{1/2,k}^{\beta,r,s+1/2} = 0, \quad m_0^r\zeta_{I+1/2,k}^{\beta,0,s+1/2} + 3m_1^r\zeta_{I+1/2,k}^{\beta,r,s+1/2} = 0, \quad \beta = 0, z. \tag{3.12}$$

Система (3.8)–(3.10) для девяти уравнений, дополненная двумя дополнительными уравнениями для величин $\zeta^{r,0,s+1/2}$и $\zeta^{r,r,s+1/2}$, аналогичным (2.20), и двумя дополнительными уравнениями (2.23) для величин $\zeta^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta^{z,r,s+1/2}$, а также граничными условиями (3.12), может быть решена прямым методом в предположении, что величины с индексом s известны с предыдущего шага. Данная система состоит из двух подсистем, которые могут быть решены независимо методом прогонки по переменной r, а также трех уравнений – последних из подсистем уравнений (3.8)–(3.10), которые могут быть явно разрешены относительно переменных $\zeta^{0,z,s+1/2}$, $\zeta^{r,z,s+1/2}$ и $\zeta^{z,z,s+1/2}$.

Первая подсистема относительно величин $\zeta^{0,0,s+1/2}$, $\zeta^{0,r,s+1/2}$, $\zeta^{r,0,s+1/2}$, $\zeta^{r,r,s+1/2}$, $\zeta_{i\pm1/2}^{0,r,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{0,0,s+1/2}$ состоит из двух первых уравнений в подсистемах уравнений (3.8) и (3.9) (всего четыре уравнения), дополнительных уравнений (2.20) для величин $\zeta^{r,0,s+1/2}$и $\zeta^{r,r,s+1/2}$ и граничных условий (3.12). Для ее решения мы должны исключить из нее величины $\zeta^{0,0,s+1/2}$, $\zeta^{0,r,s+1/2}$, $\zeta^{r,0,s+1/2}$ и $\zeta^{r,r,s+1/2}$, чтобы получить двухточечную систему для величин $\zeta_{i\pm1/2}^{0,r,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{0,0,s+1/2}$ (см. [19]). Исключая из первых двух уравнений подсистемы (3.9) посредством дополнительных уравнений (2.20) величины $\zeta^{r,0,s+1/2}$и $\zeta^{r,r,s+1/2}$, получаем следующую систему линейных уравнений относительно $\zeta^{0,0,s+1/2}$ и $\zeta^{0,r,s+1/2}$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\zeta^{0,0} + a_{12}\zeta^{0,r} &= \sum_{j=1}^{5} c_1^j\zeta_j = c_1^1\zeta_{i+1/2}^{0,0} + c_1^2\zeta_{i-1/2}^{0,0} + c_1^3\zeta_{i+1/2}^{0,r} + c_1^4\zeta_{i-1/2}^{0,r} + c_1^5,\\
a_{21}\zeta^{0,0} + a_{22}\zeta^{0,r} &= \sum_{j=1}^{5} c_2^j\zeta_j = c_2^1\zeta_{i+1/2}^{0,0} + c_2^2\zeta_{i-1/2}^{0,0} + c_2^3\zeta_{i+1/2}^{0,r} + c_2^4\zeta_{i-1/2}^{0,r} + c_2^5,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

где

$$
a_{11} = \Sigma_r^{r,0}(A^{r,0} + B^{r,0}), \quad a_{12} = \Sigma_r^{r,0}(A^{r,1} + B^{r,1}) + V, \quad \Sigma_r^{r,0} = V^r\left(\omega_r^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{00}\right),
$$

$$
a_{21} = \frac{1}{3}\Big[\tilde{\Sigma}_r^{r,1}(A^{r,1} + B^{r,1}) + V - v_z[C^r(A^{r,0} + B^{r,0}) + C\delta^c]\Big], \quad \Sigma_r^{r,1} = V^r\left(\omega_r^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right),
$$

$$
a_{22} = \tilde{\Sigma}_r^{r,1}(A^{r,2} + B^{r,2}) - v_z\left[\frac{1}{3}C^r(A^{r,1} + B^{r,1}) - \delta^c M_r C\right], \quad \tilde{\Sigma}_r^{r,1} = \Sigma_r^{r,1} + M_r^r C^r v_z,
$$

$$
c_1^1 = \Sigma_r^{r,0}A^{r,0}, \quad c_1^2 = \Sigma_r^{r,0}B^{r,0}, \quad c_1^3 = \Sigma_r^{r,0}A^{r,1} + v_zA_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right), \quad c_1^4 = \Sigma_r^{r,0}B^{r,1} + v_zA_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right),
$$

$$
c_1^5 = -V^rQ^{r,0} + v_z\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right)f_{i+1/2}^{0,r,s} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right)f_{i-1/2}^{0,r,s} - v_rf^{0,r,s}\right] + v_r^1(f_{k+1/2}^{r,z,s} - f_{k-1/2}^{r,z,s}) + \sigma^{00}V^rf^{r,0,s},
$$

$$
c_2^1 = \tilde{\Sigma}_r^{r,1}\frac{1}{3}A^{r,1} + v_z\frac{1}{3}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right) - C^rA^{r,0}\right], \quad c_2^3 = \tilde{\Sigma}_r^{r,1}A^{r,2} - v_z\frac{1}{3}C^rA^{r,1},
$$

$$
c_2^2 = \tilde{\Sigma}_r^{r,1}\frac{1}{3}B^{r,1} + v_z\frac{1}{3}\left[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right) - C^rB^{r,0}\right], \quad c_2^4 = \tilde{\Sigma}_r^{r,1}B^{r,2} - v_z\frac{1}{3}C^rB^{r,1},
$$

$$
\begin{aligned}
c_2^5 = -V^rQ^{r,r} + v_z\frac{1}{3}\Big[A_{i+1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c\right)f_{i+1/2}^{0,0,s} + A_{i-1/2}\left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c\right)f_{i-1/2}^{0,0,s} - v_rf^{0,0,s} - C^rf^{r,0,s} + C\delta^cf^{0,0,s}\Big] -\\
- v_z\delta^cM_rCf^{0,r,s} + (\sigma^{11}V^r + M_r^rC^rv_z)f^{r,r,s}.
\end{aligned}
$$

Из системы (3.13) может быть найдена явная зависимость величин $\zeta^{0,0}$ и $\zeta^{0,r}$ от $\zeta_{i\pm1/2}^{0,r}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{0,0}$:

$$
\begin{aligned}
\zeta^{0,0} &= \sum_{j=1}^{5} x_1^j\zeta_j = d_0^+\zeta_{i+1/2}^{0,0} + d_0^-\zeta_{i-1/2}^{0,0} + d_1^+\zeta_{i+1/2}^{0,r} + d_1^-\zeta_{i-1/2}^{0,r} + d,\\
\zeta^{0,r} &= \sum_{j=1}^{5} x_2^j\zeta_j = e_0^+\zeta_{i+1/2}^{0,0} + e_0^-\zeta_{i-1/2}^{0,0} + e_1^+\zeta_{i+1/2}^{0,r} + e_1^-\zeta_{i-1/2}^{0,r} + e,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

где коэффициенты x_1^j и x_2^j, $j = \overline{1,5}$, находятся путем решения пяти систем из двух линейных уравнений для каждой пространственной ячейки расчетной области:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^j + a_{12}x_2^j &= c_1^j,\\
a_{21}x_1^j + a_{22}x_2^j &= c_2^j, \quad j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Массивы коэффициентов x_1^j и x_2^j, $j = \overline{1,5}$, хранятся. Подставляя уравнения (3.14) (отнесенных к слою $s + 1/2$) в первые два из уравнений подсистемы (3.8), получаем следующую двухточечную систему из двух уравнений для определения величин $\zeta_{i\pm1/2,k}^{0,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2,k}^{r,s+1/2}$:

$$
\zeta_{i+1/2}^{0,0,s+1/2}a^{r,\alpha} + \zeta_{i-1/2}^{0,0,s+1/2}b^{r,\alpha} + \zeta_{i+1/2}^{0,r,s+1/2}c^{r,\alpha} + \zeta_{i-1/2}^{0,r,s+1/2}d^{r,\alpha} = q^{r,\alpha}, \quad \alpha = 0, r,
\tag{3.16}
$$

где

$$
a^{r,0} = \Sigma_r^{0,0}d_0^+, \quad b^{r,0} = \Sigma_r^{0,0}d_0^-, \quad c^{r,0} = \Sigma_r^{0,0}d_1^+ + v_zA_{i+1/2}, \quad d^{r,0} = \Sigma_r^{0,0}d_1^- - v_zA_{i-1/2},
$$

$$
q^{r,0} = -\Sigma_r^{0,0}d + VQ^{0,0} - v_r(f_{k+1/2}^{0,z,s} - f_{k-1/2}^{0,z,s}) - v_z(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{0,r,s} - A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{0,r,s}) - \sigma^{00}Vf^{0,0,s},
$$

$$\begin{gathered} a^{r,r}=\tilde{\Sigma}_r^{0,1}e_0^+ +\frac{1}{3}v_z(A_{i+1/2}-Cd_0^+),\quad b^{r,r}=\tilde{\Sigma}_r^{0,1}e_0^- -\frac{1}{3}v_z(A_{i-1/2}+Cd_0^-),\\ c^{r,r}=\tilde{\Sigma}_r^{0,1}e_1^+ -\frac{1}{3}Cv_zd_1^+,\quad d^{r,r}=\tilde{\Sigma}_r^{0,1}e_1^- -\frac{1}{3}Cv_zd_1^-, \end{gathered}\tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} q^{r,r}=-\tilde{\Sigma}_r^{0,1}e+VQ^{0,r}-\frac{1}{3}v_z(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{0,0,s}-A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{0,0,s})+\frac{1}{3}Cv_z(f^{0,0,s}+d)-(\sigma^{11}V+M_rCv_z)f^{0,r,s},\\ \Sigma_r^{0,0}=V\left(\omega_r^{(s+1)}+\frac{1}{2}\sigma^{00}\right),\quad \Sigma_r^{0,1}=V\left(\omega_r^{(s+1)}+\frac{1}{2}\sigma^{11}\right),\quad \tilde{\Sigma}_r^{0,1}=\Sigma_r^{0,1}+M_rCv_z. \end{gathered}$$

Для каждого значения k система (3.16), (3.17) решается методом прогонки (см. [1], [15], [27]):

$$\zeta_{i+1/2}^0=\xi_i^0\zeta_{i-1/2}^0+\eta_i^0,\ \zeta_{i-1/2}^r=\xi_i^r\zeta_{i-1/2}^0+\eta_i^r,\tag{3.18}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{\xi}_i=\mathrm{col}\{\xi_i^0,\xi_i^r\}$ и $\boldsymbol{\eta}_i=\mathrm{col}\{\eta_i^0,\eta_i^r\}$ вычисляются посредством рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi}_i=-W_i^{-1}\mathbf{B}_i,\quad \boldsymbol{\eta}_i=W_i^{-1}\mathbf{Q}_i,\\ W_i=\begin{pmatrix} a_i^0+c_i^0\xi_{i+1}^1 & d_i^0\\ a_i^1+c_i^1\xi_{i+1}^1 & d_i^1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_i=\begin{pmatrix} b_i^0\\ b_i^1\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}_i=\begin{pmatrix} q_i^0-c_i^0\eta_{i+1}^1\\ q_i^1-c_i^1\eta_{i+1}^1\end{pmatrix}. \end{gathered}\tag{3.19}$$

К рекуррентным соотношениям (3.18), (3.19) следует также добавить граничные условия на внешней $r=r_{\text{ext}}$ и внутренней $r=r_{\text{int}}$ границах области:

$$\zeta_{I+1/2}^r=\xi_{I+1}^r\zeta_{I+1/2}^0+\eta_{I+1}^r,\quad \xi_{I+1}^r=-\frac{m_0^r}{3m_1^r},\quad \eta_{I+1}^r=0,\quad \zeta_{1/2}^0=\frac{-3l_1^r\eta_1^r}{3l_1^r\xi_1^r+l_0^r}.\tag{3.20}$$

Достаточным условием устойчивости этого алгоритма прогонки является выполнение неравенства $\left|\xi_i^0\right|<1$. После нахождения величин поправок для потоков на гранях ячейки $\zeta_{i\pm1/2}^{0,r,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{0,0,s+1/2}$, поправки $\zeta^{0,0,s+1/2}$, $\zeta^{0,r,s+1/2}$, $\zeta^{r,0,s+1/2}$ и $\zeta^{r,r,s+1/2}$ для средних значений потока вычисляются по явным формулам (3.14) и (2.20). Величины $\zeta^{0,z,s+1/2}$ и $\zeta^{r,z,s+1/2}$ находятся по явным формулам из последних двух уравнений подсистем (3.8) и (3.9):

$$\begin{gathered} \zeta^{0,z,s+1/2}=\left\{VQ^{0,z}-\frac{1}{3}v_r(f_{k+1/2}^{0,0,s}-f_{k-1/2}^{0,0,s})-\sigma^{11}Vf^{0,z,s}\right\}\Big/\Sigma_r^{0,1},\\ \zeta^{r,z,s+1/2}=\left\{V^rQ^{r,z}-v_r^1\frac{1}{3}(f_{k+1/2}^{r,0,s}-f_{k-1/2}^{r,0,s})-\sigma^{11}V^rf^{r,z,s}\right\}\Big/\Sigma_r^{r,1},\quad \Sigma_r^{r,1}=V^r\left(\omega_r^{(s+1)}+\frac{1}{2}\sigma^{11}\right). \end{gathered}\tag{3.21}$$

Вторая подсистема для величин $\zeta^{z,0,s+1/2}$, $\zeta^{z,r,s+1/2}$, $\zeta_{i\pm1/2}^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{z,r,s+1/2}$ состоит из двух первых уравнений в подсистеме уравнений (3.10), дополнительных уравнений (2.23) и граничных условий (3.12). Для ее решения исключим из нее посредством дополнительных уравнений (2.23) величины $\zeta^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta^{z,r,s+1/2}$, чтобы получить двухточечную систему для величин $\zeta_{i\pm1/2}^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{z,r,s+1/2}$:

$$\zeta_{i+1/2}^{z,0,s+1/2}a^{z,\alpha}+\zeta_{i-1/2}^{z,0,s+1/2}b^{z,\alpha}+\zeta_{i+1/2}^{z,r,s+1/2}c^{z,\alpha}+\zeta_{i-1/2}^{z,r,s+1/2}d^{z,\alpha}=q^{z,\alpha},\quad \alpha=0,r,\tag{3.22}$$

где

$$\begin{gathered} a^{z,0}=\Sigma_r^{z,0}\frac{1}{2},\quad b^{z,0}=\Sigma_r^{z,0}\frac{1}{2},\quad c^{z,0}=\Sigma_r^{z,0}\frac{3}{4}+v_z^1A_{i+1/2},\quad d^{z,0}=-\Sigma_r^{z,0}\frac{3}{4}-v_z^1A_{i-1/2},\\ q^{z,0}=V^zQ^{z,0}-V\left[\frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{0,z,s}+f_{k-1/2}^{0,z,s})-f^{0,z,s}\right]-v_z^1(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{z,r,s}-A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{z,r,s})-\sigma^{00}V^zf^{z,0,s}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a^{z,r}=\tilde{\Sigma}_r^{z,1}\frac{1}{4}+v_z^1\frac{1}{3}\left(A_{i+1/2}-C\frac{1}{2}\right),\quad b^{z,r}=-\tilde{\Sigma}_r^{z,1}\frac{1}{4}-v_z^1\frac{1}{3}\left(A_{i-1/2}+C\frac{1}{2}\right),\\ c^{z,r}=\tilde{\Sigma}_r^{z,1}\frac{1}{2}-v_z^1C\frac{1}{4},\quad d^{z,r}=\tilde{\Sigma}_r^{z,1}\frac{1}{2}-v_z^1C\frac{1}{4}, \end{gathered}\tag{3.23}$$

$$q^{z,r} = V^zQ^{z,r} - v_z^1\frac{1}{3}[(A_{i+1/2}f_{i+1/2}^{z,0,s} - A_{i-1/2}f_{i-1/2}^{z,0,s}) - Cf^{z,0,s}] - (\sigma^{11}V^z + M_r^zCv_z^1)f^{z,r,s},$$
$$\Sigma_r^{z,0} = V^z\left(\omega_r^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{00}\right),\quad \Sigma_r^{z,1} = V^z\left(\omega_r^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right),\quad \tilde{\Sigma}_r^{z,1} = \Sigma_r^{z,1} + M_r^zCv_z^1.$$

Для каждого значения k система (3.22), (3.23) решается методом прогонки (3.18) с граничными условиями (3.12). После нахождения величин поправок для потоков на гранях ячейки $\zeta_{i\pm1/2}^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta_{i\pm1/2}^{z,r,s+1/2}$, поправки $\zeta^{z,0,s+1/2}$ и $\zeta^{z,r,s+1/2}$ вычисляются по явным формулам (2.23). Величина $\zeta^{z,z,s+1/2}$ находится по явной формуле из последнего уравнения подсистемы (3.10):

$$\zeta^{z,z,s+1/2} = \left\{V^zQ^{z,z} - V\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{0,0,s} + f_{k-1/2}^{0,0,s}) - f^{0,0,s}\right] - \sigma^{11}V^zf^{z,z,s}\right\}\Big/\Sigma_r^{z,1}. \tag{3.24}$$

На втором шаге $\tau_z^{(s+1)}$ алгоритма МР решается следующая система:

$$\begin{gathered}
V\omega_z^{(s+1)}\zeta^{0,0,s+1} + v_r(\zeta_{k+1/2}^{0,z,s+1} - \zeta_{k-1/2}^{0,z,s+1}) + \frac{1}{2}\sigma^{00}V\zeta^{0,0,s+1} = V\zeta^{0,0,s+1/2},\\
V\omega_z^{(s+1)}\zeta^{0,r,s+1} + \frac{1}{2}\sigma^{11}V\zeta^{0,r,s+1} = V\zeta^{0,r,s+1/2},\\
V\omega_z^{(s+1)}\zeta^{0,z,s+1} + \frac{1}{3}v_r(\zeta_{k+1/2}^{0,0,s+1} - \zeta_{k-1/2}^{0,0,s+1}) + \frac{1}{2}\sigma^{11}V\zeta^{0,z,s+1} = V\zeta^{0,z,s+1/2},
\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}
V^r\omega_z^{(s+1)}\zeta^{r,0,s+1} + v_r^1(\zeta_{k+1/2}^{r,z,s+1} - \zeta_{k-1/2}^{r,z,s+1}) + \frac{1}{2}\sigma^{00}V^r\zeta^{r,0,s+1} = V^r\zeta^{r,0,s+1/2},\\
V^r\omega_z^{(s+1)}\zeta^{r,r,s+1} + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^r\zeta^{r,r,s+1} = V^r\zeta^{r,r,s+1/2},\\
V^r\omega_z^{(s+1)}\zeta^{r,z,s+1} + v_r^1\frac{1}{3}(\zeta_{k+1/2}^{r,0,s+1} - \zeta_{k-1/2}^{r,0,s+1}) + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^r\zeta^{r,z,s+1} = V^r\zeta^{r,z,s+1/2},
\end{gathered} \tag{3.26}$$

$$\begin{gathered}
V^z\omega_z^{(s+1)}\zeta^{z,0,s+1} + V\left[\frac{1}{2}(\zeta_{k+1/2}^{0,z,s+1} + \zeta_{k-1/2}^{0,z,s+1}) - \zeta^{0,z,s+1}\right] + \frac{1}{2}\sigma^{00}V^z\zeta^{z,0,s+1} = V^z\zeta^{z,0,s+1/2},\\
V^z\omega_z^{(s+1)}\zeta^{z,r,s+1} + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^z\zeta^{z,r,s+1} = V^z\zeta^{z,r,s+1/2},\\
V^z\omega_z^{(s+1)}\zeta^{z,z,s+1} + V\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\zeta_{k+1/2}^{0,0,s+1} + \zeta_{k-1/2}^{0,0,s+1}) - \zeta^{0,0,s+1}\right] + \frac{1}{2}\sigma^{11}V^z\zeta^{z,z,s+1} = V^z\zeta^{z,z,s+1/2}.
\end{gathered} \tag{3.27}$$

Граничные условия для системы (3.25)–(3.27) с учетом предположения (2.29) и последнего из уравнений алгоритма (3.7) имеют вид

$$l_0^z\zeta_{i,1/2}^{\beta,0,s+1} + 3l_1^z\zeta_{i,1/2}^{\beta,z,s+1} = 0,\quad m_0^z\zeta_{i,K+1/2}^{\beta,0,s+1} + 3m_1^z\zeta_{i,K+1/2}^{\beta,z,s+1} = 0,\quad \beta = 0, r. \tag{3.28}$$

Система (3.25)–(3.27) для девяти уравнений, дополненная двумя дополнительными уравнениями для величин $\zeta^{z,0,s+1}$ и $\zeta^{z,z,s+1}$, аналогичным (2.21), и двумя дополнительными уравнениями (2.24) для величин $\zeta^{r,0,s+1}$, $\zeta^{r,z,s+1}$, $\zeta^{\vartheta,0,s+1}$ и $\zeta^{\vartheta,z,s+1}$, а также граничными условиями (3.28), может быть решена прямым методом в предположении, что величины с индексом $s+1/2$ известны с предыдущего шага. Данная система состоит из двух подсистем, которые могут быть решены независимо методом прогонки по переменной z, а также трех уравнений – вторых из подсистем уравнений (3.25)–(3.27), которые могут быть явно разрешены относительно переменных $\zeta^{0,r,s+1}$, $\zeta^{r,r,s+1}$ и $\zeta^{z,r,s+1}$.

Первая подсистема относительно величин $\zeta^{0,0,s+1}$, $\zeta^{0,z,s+1}$, $\zeta^{z,0,s+1}$, $\zeta^{z,z,s+1}$, $\zeta_{k\pm1/2}^{0,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm1/2}^{0,z,s+1}$ состоит из первого и третьего уравнений в подсистемах уравнений (3.25) и (3.27) (всего четыре уравнения), дополнительных уравнений (2.21) для величин $\zeta^{z,0,s+1}$ и $\zeta^{z,z,s+1}$ и граничных условий (3.28). Для ее решения мы должны исключить из нее величины $\zeta^{0,0,s+1}$, $\zeta^{0,z,s+1}$, $\zeta^{z,0,s+1}$, $\zeta^{z,z,s+1}$, чтобы получить двухточечную систему для величин $\zeta_{k\pm1/2}^{0,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm1/2}^{0,z,s+1}$ (см. [19]). Исключая из первого и третьего уравнений подсистемы (3.27) посредством дополнительных уравнений (2.21) величины $\zeta^{z,0,s+1}$ и $\zeta^{z,z,s+1}$, получаем следующую систему линейных уравнений относительно $\zeta^{0,0,s+1}$ и $\zeta^{0,z,s+1}$:

$$\begin{aligned} a_{11}\zeta^{0,0} + a_{12}\zeta^{0,z} &= \sum_{i=1}^{5} c_1^i\zeta_i = c_1^1\zeta_{k+1/2}^{0,0} + c_1^2\zeta_{k-1/2}^{0,0} + c_1^3\zeta_{k+1/2}^{0,z} + c_1^4\zeta_{k-1/2}^{0,z} + c_1^5 \\ a_{21}\zeta^{0,0} + a_{22}\zeta^{0,z} &= \sum_{i=1}^{5} c_2^i\zeta_i = c_2^1\zeta_{k+1/2}^{0,0} + c_2^2\zeta_{k-1/2}^{0,0} + c_2^3\zeta_{k+1/2}^{0,z} + c_2^4\zeta_{k-1/2}^{0,z} + c_2^5 \end{aligned}, \tag{3.29}$$

где

$$a_{11} = \Sigma_z^{z,0}(A^{z,0} + B^{z,0}), \quad a_{12} = \Sigma_z^{z,0}(A^{z,1} + B^{z,1}) + V, \quad a_{21} = \frac{1}{3}[\Sigma_z^{z,1}(A^{z,1} + B^{z,1}) + V],$$

$$a_{22} = \Sigma_z^{z,1}(A^{z,2} + B^{z,2}), \quad c_1^1 = \Sigma_z^{z,0}A^{z,0}, \quad c_1^2 = \Sigma_z^{z,0}B^{z,0}, \quad c_1^3 = \Sigma_z^{z,0}A^{z,1} + V\frac{1}{2},$$

$$c_1^4 = \Sigma_z^{z,0}B^{z,1} + V\frac{1}{2}, \quad c_1^5 = -V^z\zeta^{z,0,s+2/3}, \quad c_2^1 = \Sigma_z^{z,1}\frac{1}{3}A^{z,1} + V\frac{1}{6},$$

$$c_2^2 = \Sigma_z^{z,1}\frac{1}{3}B^{z,1} + V\frac{1}{6}, \quad c_2^3 = \Sigma_z^{z,1}A^{z,2}, \quad c_2^4 = \Sigma_z^{z,1}B^{z,2}, \quad c_2^5 = -V^z\zeta^{z,z,s+2/3},$$

$$\Sigma_z^{z,0} = V^z\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{00}\right), \quad \Sigma_z^{z,1} = V^z\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right).$$

Из системы (3.29) может быть найдена явная зависимость величин $\zeta^{0,0}$ и $\zeta^{0,z}$ от $\zeta_{k\pm1/2}^{0,0}$ и $\zeta_{k\pm1/2}^{0,z}$:

$$\begin{aligned} \zeta^{0,0} &= \sum_{i=1}^{5} x_1^i\zeta_i = d_0^+\zeta_{k+1/2}^{0,0} + d_0^-\zeta_{k-1/2}^{0,0} + d_1^+\zeta_{k+1/2}^{0,z} + d_1^-\zeta_{k-1/2}^{0,z} + d, \\ \zeta^{0,z} &= \sum_{i=1}^{5} x_2^i\zeta_i = e_0^+\zeta_{k+1/2}^{0,0} + e_0^-\zeta_{k-1/2}^{0,0} + e_1^+\zeta_{k+1/2}^{0,z} + e_1^-\zeta_{k-1/2}^{0,z} + e, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где коэффициенты x_1^i и x_2^i, $i = \overline{1,5}$, находятся путем решения пяти систем из двух линейных уравнений для каждой пространственной ячейки расчетной области:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^i + a_{12}x_2^i &= c_1^i, \\ a_{21}x_1^i + a_{22}x_2^i &= c_2^i, \quad i = \overline{1,5}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Массивы коэффициентов x_1^i и x_2^k, $k = \overline{1,5}$, хранятся. Подставляя уравнения (3.30) (отнесенные к слою $s+1$) в первое и третье уравнения подсистемы (3.25), получаем следующую двухточечную систему из двух уравнений для определения величин $\zeta_{k\pm1/2}^{0,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm1/2}^{0,z,s+1}$:

$$\zeta_{k+1/2}^{0,0,s+1}a^{z,\alpha} + \zeta_{k-1/2}^{0,0,s+1}b^{z,\alpha} + \zeta_{k+1/2}^{0,z,s+1}c^{z,\alpha} + \zeta_{k-1/2}^{0,z,s+1}d^{z,\alpha} = q^{z,\alpha}, \quad \alpha = 0, z, \tag{3.32}$$

где

$$\begin{gathered} a^{z,0} = \Sigma_z^{0,0}d_0^+, \quad b^{z,0} = \Sigma_z^{0,0}d_0^-, \quad c^{z,0} = \Sigma_z^{0,0}d_1^+ + v_r, \quad d^{z,0} = \Sigma_z^{0,0}d_1^- - v_r, \quad q^{z,0} = -\Sigma_z^{0,0}d + V\zeta^{0,0,s+1/2}, \\ a^{z,z} = \Sigma_z^{0,1}e_0^+ + \frac{1}{3}v_r, \quad b^{z,z} = \Sigma_z^{0,1}e_0^- - \frac{1}{3}v_r, \quad c^{z,z} = \Sigma_z^{0,1}e_1^+, \quad d^{z,z} = \Sigma_z^{0,1}e_1^-, \quad q^{z,z} = -\Sigma_z^{0,1}e + V\zeta^{0,z,s+1/2}, \\ \Sigma_z^{0,0} = V\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{00}\right), \quad \Sigma_z^{0,1} = V\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right). \end{gathered} \tag{3.33}$$

Для каждого значения i система (3.32), (3.33) решается методом прогонки

$$\zeta_{k+1/2}^0 = \xi_k^0\zeta_{k-1/2}^0 + \eta_k^0, \quad \zeta_{k-1/2}^z = \xi_k^z\zeta_{k-1/2}^0 + \eta_k^z \tag{3.34}$$

с граничными условиями на границах $z = z_{\text{bot}}$ и $z = z_{\text{top}}$ области:

$$\zeta_{K+1/2}^z = \xi_{K+1}^z\zeta_{K+1/2}^0 + \eta_{K+1}^z, \quad \xi_{K+1}^z = -\frac{m_0^z}{3m_1^z}, \quad \eta_{K+1}^z = 0, \quad \zeta_{1/2}^0 = \frac{-3l_1^z\eta_1^z}{3l_1^z\xi_1^z + l_0^z}. \tag{3.35}$$

После нахождения величин поправок для потоков на гранях ячейки $\zeta_{k\pm 1/2}^{0,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm 1/2}^{0,z,s+1}$, поправки $\zeta^{0,0,s+1}$, $\zeta^{0,z,s+1}$, $\zeta^{z,0,s+1}$ и $\zeta^{z,z,s+1}$ для средних значений потока вычисляются по явным формулам (3.30) и (2.21). Величины $\zeta^{0,r,s+1}$ и $\zeta^{z,r,s+1}$ находятся по явным формулам из вторых уравнений подсистем (3.25) и (3.27):

$$\zeta^{0,r,s+1} = V\zeta^{0,r,s+1/2}\Big/\Sigma_z^{0,1}, \quad \zeta^{z,r,s+1} = V^z\zeta^{z,r,s+1/2}\Big/\Sigma_z^{z,1}, \quad \Sigma_z^{z,1} = V^z\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right). \tag{3.36}$$

Вторая подсистема для величин $\zeta^{r,0,s+1}$, $\zeta^{r,z,s+1}$, $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,z,s+1}$ состоит из первого и третьего уравнений в подсистеме уравнений (3.26), дополнительных уравнений (2.24) и граничных условий (3.28). Для ее решения исключим из нее посредством дополнительных уравнений (2.24) величины $\zeta^{r,0,s+1}$ и $\zeta^{r,z,s+1}$, чтобы получить двухточечную систему для величин $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,z,s+1}$:

$$\zeta_{k+1/2}^{r,0,s+1}a^{r,\alpha} + \zeta_{k-1/2}^{r,0,s+1}b^{r,\alpha} + \zeta_{k+1/2}^{r,z,s+1}c^{r,\alpha} + \zeta_{k-1/2}^{r,z,s+1}d^{r,\alpha} = q^{r,\alpha}, \quad \alpha = 0, z, \tag{3.37}$$

где

$$\begin{gathered}
a^{r,0} = \Sigma_z^{r,0}\frac{1}{2}, \quad b^{r,0} = \Sigma_z^{r,0}\frac{1}{2}, \quad c^{r,0} = \Sigma_z^{r,0}\frac{3}{4} + v_r^1, \quad d^{r,0} = -\Sigma_z^{r,0}\frac{3}{4} - v_r^1, \quad q^{r,0} = V^r\zeta^{r,0,s+1/2}, \\
a^{r,z} = \Sigma_z^{r,1}\frac{1}{4} + v_r^1\frac{1}{3}, \quad b^{r,z} = -\Sigma_z^{r,1}\frac{1}{4} - v_r^1\frac{1}{3}, \quad c^{r,z} = \Sigma_z^{r,1}\frac{1}{2}, \quad d^{r,z} = \Sigma_z^{r,1}\frac{1}{2}, \quad q^{r,z} = V^r\zeta^{r,z,s+1/2}, \\
\Sigma_z^{r,0} = V^r\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{00}\right), \quad \Sigma_z^{r,1} = V^r\left(\omega_z^{(s+1)} + \frac{1}{2}\sigma^{11}\right).
\end{gathered} \tag{3.38}$$

Для каждого значения индекса i система (3.37), (3.38) решается методом прогонки (3.34) с граничными условиями (3.35). После нахождения величин поправок для потоков на гранях ячейки $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,0,s+1}$ и $\zeta_{k\pm 1/2}^{r,z,s+1}$, поправки $\zeta^{r,0,s+1}$ и $\zeta^{r,z,s+1}$ вычисляются по явным формулам (2.24). Величина $\zeta^{r,r,s+1}$ находится по явной формуле из второго уравнения подсистемы (3.26):

$$\zeta^{r,r,s+1} = V^r\zeta^{r,r,s+1/2}\Big/\Sigma_z^{r,1}. \tag{3.39}$$

Для расчета величин $f_{k\pm 1/2}^{\beta,0,s+1}$ и $f_{k\pm 1/2}^{\beta,z,s+1}$, $\beta = 0, r$, в соответствии с уравнением (3.7), используются соотношения

$$f_{k\pm 1/2}^{\beta,\alpha,s+1} = f_{k\pm 1/2}^{\beta,\alpha,s} + \tilde{\tau}_{s+1}\zeta_{k\pm 1/2}^{\beta,\alpha,s+1}, \quad \beta = 0, r, \quad \alpha = 0, z. \tag{3.40}$$

Далее, согласно уравнению (3.7), вычисляются величины $f^{\alpha,s+1}$ по формулам

$$f^{\beta,\alpha,s+1} = f^{\beta,\alpha,s} + \tilde{\tau}_{s+1}\zeta^{\beta,\alpha,s+1}, \quad \beta = 0, r, z, \quad \alpha = 0, r, z. \tag{3.41}$$

Для расчета величин $f_{i\pm 1/2}^{\beta,\alpha,s+1}$, $\beta = 0, z$, $\alpha = 0, r$, используемых, в частности, на следующем шаге алгоритма МР, воспользуемся системами дополнительных уравнений (2.20) и (2.23). Для определения величин $f_{i\pm 1/2}^{0,0,s+1}$ и $f_{i\pm 1/2}^{0,r,s+1}$ решается система, следующая из дополнительных уравнений (2.20):

$$f_{i+1/2}^{0,0,s+1}a^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,0,s+1}b^{r,\alpha} + f_{i+1/2}^{0,r,s+1}c^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,r,s+1}d^{r,\alpha} = q^{r,\alpha}, \quad \alpha = 0, r, \tag{3.42}$$

где

$$\begin{gathered}
a^{r,0} = A^{r,0}, \quad b^{r,0} = B^{r,0}, \quad c^{r,0} = A^{r,1}, \quad d^{r,0} = B^{r,1}, \\
q^{r,0} = f^{r,0} + (A^{r,0} + B^{r,0})f^{0,0} + (A^{r,1} + B^{r,1})f^{0,r}, \\
a^{r,r} = \frac{1}{3}A^{r,1}, \quad b^{r,r} = \frac{1}{3}B^{r,1}, \quad c^{r,r} = A^{r,2}, \quad d^{r,r} = B^{r,2}, \\
q^{r,r} = f^{r,r} + \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})f^{0,0} + (A^{r,2} + B^{r,2})f^{0,r}.
\end{gathered} \tag{3.43}$$

Для каждой плоскости (j,k) система (3.42), (3.43) решается методом прогонки:

$$f_{i+1/2}^{0} = \xi_i^0 f_{i-1/2}^0 + \eta_i^0, \quad f_{i-1/2}^{r} = \xi_i^r f_{i-1/2}^0 + \eta_i^r. \tag{3.44}$$

К рекуррентным соотношениям (3.44) следует также добавить граничные условия на внешней $r = r_{\text{ext}}$ и внутренней $r = r_{\text{int}}$ границах области:

$$f^r_{I+1/2} = \xi^r_{I+1} f^0_{I+1/2} + \eta^r_{I+1}, \quad \xi^r_{I+1} = -\frac{m^r_0}{3m^r_1}, \quad \eta^r_{I+1} = 0, \quad f^0_{1/2} = -\frac{3l^r_1\eta^r_1}{3l^r_1\xi^r_1 + l^r_0}. \tag{3.45}$$

Для определения величин $f^{z,0,s+1}_{i\pm1/2}$ и $f^{z,r,s+1}_{i\pm1/2}$ решается система, следующая из дополнительных уравнений (2.23):

$$f^{z,0,s+1}_{i+1/2} a^{r,\alpha} + f^{z,0,s+1}_{i-1/2} b^{r,\alpha} + f^{z,r,s+1}_{i+1/2} c^{r,\alpha} + f^{z,r,s+1}_{i-1/2} d^{r,\alpha} = q^{r,\alpha}, \quad \alpha = 0, r, \tag{3.46}$$

где

$$\begin{gathered} a^{r,0} = \frac{1}{2}, \quad b^{r,0} = \frac{1}{2}, \quad c^{r,0} = \frac{3}{4}, \quad d^{r,0} = -\frac{3}{4}, \quad q^{r,0} = f^{z,0}, \\ a^{r,r} = \frac{1}{4}, \quad b^{r,r} = -\frac{1}{4}, \quad c^{r,r} = \frac{1}{2}, \quad d^{r,r} = \frac{1}{2}, \quad q^{r,r} = f^{z,r}. \end{gathered} \tag{3.47}$$

Для каждой плоскости (j,k) система (3.46), (3.47) решается методом прогонки (3.44) с граничными условиями (3.44).

Эффективность МР весьма существенно зависит от выбора параметров $\omega^{(s+1)}_r$ и $\omega^{(s+1)}_z$. В отличие от метода переменных направлений для двумерной геометрии (см. [1], [26], [27]), теоретически обоснованный оптимальный выбор этих параметров отсутствует даже для случая, когда операторы $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ являются самосопряженными, имеют положительный (отрицательный) спектр, а также перестановочны.

Однако в рассматриваемом нами общем случае гетерогенной задачи операторы $\hat{R}$ и $\hat{Z}$, вообще говоря, не перестановочны. Следовательно, результаты общей теории по выбору параметров $\omega^{(s+1)}_r$ и $\omega^{(s+1)}_z$ в данном случае будут применимы лишь приближенно. Вместе с тем можно попытаться воспользоваться для выбора указанных параметров алгоритмом, аналогичным использованному ранее в симметризованном ADI алгоритме (см. [16]), который формально применим и в рассматриваемом нами случае 2D геометрии.

В следующих разделах мы рассмотрим алгоритм для оценки минимального и максимального собственных значений операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$, используемых в этом подходе, и приведем соотношения для расчета итерационных параметров.

4. ОЦЕНКА ГРАНИЦ СПЕКТРА РАДИАЛЬНОЙ И АКСИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТ P_1 ОПЕРАТОРА В r,z ГЕОМЕТРИИ

Достаточно рассмотреть случай оператора $\hat{R}$, так как для оператора $\hat{Z}$ используется аналогичная процедура. Прежде всего, оператор $\hat{R}$ заменяется на оператор $\hat{R}_a$, полученный путем усреднения оператора $\hat{R}$ по переменной z. Для этого вычисляются средние по переменной z значения коэффициентов $a^{r,\alpha}$, $b^{r,\alpha}$, $c^{r,\alpha}$ и $d^{r,\alpha}$, $\alpha = 0, r$, из систем (3.16)–(3.17), (3.22)–(3.23) в точке $\omega_r = 0$, величин $A^{r,0}$, $A^{r,1}$, $A^{r,2}$, $B^{r,0}$, $B^{r,1}$ и $B^{r,2}$ из уравнений (2.20), величин d^+_0, d^-_0, d^+_1, d^-_1, d, e^+_0, e^-_0, e^+_1, e^-_1 и e из уравнений (3.14). Учитываются также коэффициенты дополнительных уравнений (2.23). Указанные величины определяют элементы матрицы оператора $\hat{R}_a$, который имеет блочную структуру и может быть представлен в виде

$$\hat{R}_a = \begin{pmatrix} \hat{C}_0\hat{G}^{-1}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{C}_0\hat{G}^{-1}_r & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_z\hat{G}^{-1}_z \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Здесь оператор $\hat{C}_0$ преобразует вектор $\mathbf{g}^0_{i\pm1/2} = \operatorname{col}\{g^{0,0}_{i\pm1/2}, g^{0,r}_{i\pm1/2}\}$, определенный на гранях $r_{i\pm1/2}$ ячеек, в вектор $\mathbf{q}^0_i$, состоящий из двух компонент вектора правой части $\mathbf{q}^0_i = \operatorname{col}\{q^{0,0}_i, q^{0,r}_i\}$, отнесенных к центрам ячеек $\hat{C}_0\mathbf{g}^0 = \mathbf{q}^0$. Матрица оператора $\hat{C}_0$ получается усреднением по переменной z (с весом v_z) матрицы системы (3.16). Оператор $\hat{G}_0$ преобразует вектор $\mathbf{g}^0_{i\pm1/2}$ в вектор $\mathbf{f}^0_i = \mathrm{col}\{f_i^{0,0}, f_i^{0,r}\}$, определенный в центрах ячеек: $\mathbf{f}^0 = \hat{C}_0\mathbf{g}^0$. Матрица оператора $\hat{G}_0$ состоит из усредненной по переменной z (с весом v_z) матрицы системы (3.14). Оператор $\hat{G}_r$ преобразует вектор $\mathbf{g}^0_{i\pm1/2}$ в вектор $\mathbf{f}^r_i = \mathrm{col}\{f_i^{r,0}, f_i^{r,r}\}$, определенный в центрах ячеек: $\mathbf{f}^r = \hat{C}_r\mathbf{g}^0$. Матрица оператора $\hat{G}_r$ состоит из усредненной по переменной z (с весом v_z) матрицы системы (2.20) после подстановки в уравнения (2.20) величин $f^{0,0}$ и $f^{0,r}$, определяемых из усредненной по переменной z матрицы системы (3.14).

Оператор $\hat{C}_z$ преобразует вектор $\mathbf{g}^z_{i\pm1/2} = \mathrm{col}\{g^{z,0}_{i\pm1/2}, g^{z,z}_{i\pm1/2}\}$, определенный на гранях $r_{i\pm1/2}$ ячеек, в вектор $\mathbf{q}^z_i$, состоящий из двух компонент вектора правой части $\mathbf{q}^z_i = \mathrm{col}\{q_i^{z,0}, q_i^{z,z}\}$, отнесенных к центрам ячеек: $\hat{C}_z\mathbf{g}^z = \mathbf{q}^z$. Матрица оператора $\hat{C}_z$ получается усреднением по переменной z (с весом v_z^1) матрицы системы (3.22). Оператор $\hat{G}_z$ преобразует вектор $\mathbf{g}^z_{i\pm1/2}$ в вектор $\mathbf{f}^z_i = \mathrm{col}\{f_i^{z,0}, f_i^{z,z}\}$, определенный в центрах ячеек: $\mathbf{f}^z = \hat{C}_z\mathbf{g}^z$. Матрица оператора $\hat{G}_z$ состоит из матрицы системы (2.23).

Для определения минимального и максимального собственных чисел λ_r и Λ_r оператора $\hat{R}_a$ может быть использован степенной метод (см. [26], [28]):

$$\Delta_r = \lim_{s\to\infty}\lambda'_{(s)}, \quad \lambda'_{(s+1)} = \frac{\left\|\mathbf{y}^{(s+1)}\right\|}{\left\|\mathbf{f}^{(s)}\right\|}, \quad \mathbf{y}^{(s+1)} = \hat{R}_a\mathbf{f}^{(s)}, \quad \mathbf{f}^{(s+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(s+1)}}{\left\|\mathbf{y}^{(s+1)}\right\|}, \tag{4.2}$$

$$1/\lambda_r = \lim_{s\to\infty}\lambda''_{(s)}, \quad \lambda''_{(s+1)} = \frac{\left\|\mathbf{y}^{(s+1)}\right\|}{\left\|\mathbf{f}^{(s)}\right\|}, \quad \mathbf{y}^{(s+1)} = \hat{R}_a^{-1}\mathbf{f}^{(s)}, \quad \mathbf{f}^{(s+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(s+1)}}{\left\|\mathbf{y}^{(s+1)}\right\|}, \tag{4.3}$$

где

$$\mathbf{f}_i = \mathrm{col}\{f_i^{0,0}, f_i^{0,r}, f_i^{r,0}, f_i^{r,r}, f_i^{z,0}, f_i^{z,r}\},$$

$$\|\mathbf{f}\| = \left[\sum_i v_{r,i}((f_i^{0,0})^2 + (f_i^{0,r})^2 + (f_i^{r,0})^2 + (f_i^{r,r})^2 + (f_i^{z,0})^2 + (f_i^{z,r})^2)\right]^{1/2}.$$

Начальное приближение $\mathbf{f}^{(0)}$ также предполагается нормированным: $\left\|\mathbf{f}^{(0)}\right\| = 1$. (В качестве $\mathbf{f}^{(0)}$ можно выбрать, например, $\mathbf{f}^{(0)} = \frac{\mathbf{y}^{(0)}}{\left\|\mathbf{y}^{(0)}\right\|}$, где $\mathbf{y}^{(0)}_i = \mathrm{col}\{1,1,1,1,1,1\}$).

Для обращения операторов $\hat{G}_0$, $\hat{C}_0$, $\hat{G}_r$, $\hat{C}_z$, $\hat{G}_z$, входящих в состав оператора $\hat{R}_a$, используется прямой метод, аналогичный использованному при решении систем (2.20), (3.14), (3.16); (2.23), (3.22); (2.21), (3.30), (3.32); (2.24), (3.37).

При расчете максимального собственного значения по радиальной переменной на шаге $s+1$ решается система уравнений, состоящая из двух подсистем.

Первая подсистема состоит из усредненных по переменной z уравнений (2.20), (3.14) и (3.16). При этом, поскольку решается задача на собственное значение, в уравнениях (3.14) постоянные компоненты d и e не учитываются. Исключая из уравнений (2.20) величины $f^{0,0}$ и $f^{0,r}$ посредством соотношений (3.14), получаем двухточечную систему из двух уравнений для определения величин $f^{0,0,s+1}_{i\pm1/2}$ и $f^{0,r,s+1}_{i\pm1/2}$:

$$f^{0,0,s+1}_{i+1/2}a^{r,\alpha} + f^{0,0,s+1}_{i-1/2}b^{r,\alpha} + f^{0,r,s+1}_{i+1/2}c^{r,\alpha} + f^{0,r,s+1}_{i-1/2}d^{r,\alpha} = f_i^{r,\alpha,s}/\Lambda_r^s, \quad \alpha = 0, r, \tag{4.4}$$

где

$$a^{r,0} = A^{r,0} - (A^{r,0} + B^{r,0})d_0^+ - (A^{r,1} + B^{r,1})e_0^+, \quad b^{r,0} = B^{r,0} - (A^{r,0} + B^{r,0})d_0^- - (A^{r,1} + B^{r,1})e_0^-,$$

$$\begin{gathered}
c^{r,0} = A^{r,1} - (A^{r,0} + B^{r,0})d_1^+ - (A^{r,1} + B^{r,1})e_1^+, \quad d^{r,0} = B^{r,1} - (A^{r,0} + B^{r,0})d_1^- - (A^{r,1} + B^{r,1})e_1^-, \\
a^{r,r} = \frac{1}{3}A^{r,1} - \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})d_0^+ - (A^{r,2} + B^{r,2})e_0^+, \quad b^{r,r} = \frac{1}{3}B^{r,1} - \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})d_0^- - (A^{r,2} + B^{r,2})e_0^-, \\
c^{r,r} = \frac{1}{3}A^{r,2} - \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})d_1^+ - (A^{r,2} + B^{r,2})e_1^+, \quad d^{r,r} = \frac{1}{3}B^{r,2} - \frac{1}{3}(A^{r,1} + B^{r,1})d_1^- - (A^{r,2} + B^{r,2})e_1^-,
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Система (4.4), (4.5) решается методом прогонки (3.18) с граничными условиями (3.20). После ее решения компоненты собственного вектора $f_i^{0,0,s+1}$ и $f_i^{0,r,s+1}$ находятся по явным формулам с использованием соотношения (3.16) с усредненными по переменной z коэффициентами:

$$f_i^{0,\alpha,s+1} = \left(f_{i+1/2}^{0,0,s+1}a^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,0,s+1}b^{r,\alpha} + f_{i+1/2}^{0,r,s+1}c^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,r,s+1}d^{r,\alpha}\right)\Big/v_i, \quad \alpha = 0, r. \tag{4.6}$$

Далее определяются компоненты собственного вектора $f_i^{r,0,s+1}$ и $f_i^{r,r,s+1}$ с помощью явных уравнений (2.20). В r, z геометрии для случая LD схемы для обеспечения сходимости степенного метода оценки максимального значения собственного значения оператора по радиальной переменной вес P_r полагается равным $P_r^0 = 0.01$.

Вторая подсистема состоит из уравнений (2.23) и (3.22). Соответствующая уравнениям (2.23) система из двух двухточечных уравнений для определения величин $f_{i\pm1/2}^{z,0,s+1}$ и $f_{i\pm1/2}^{z,r,s+1}$ имеет вид

$$f_{i+1/2}^{z,0,s+1}a^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,0,s+1}b^{z,\alpha} + f_{i+1/2}^{z,r,s+1}c^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,r,s+1}d^{z,\alpha} = f_i^{z,\alpha,s}/\Lambda_r^s, \quad \alpha = 0, r, \tag{4.7}$$

где

$$a^{z,0} = \frac{1}{2}, \quad b^{z,0} = \frac{1}{2}, \quad c^{z,0} = \frac{3}{4}, \quad d^{z,0} = -\frac{3}{4}, \quad a^{z,r} = \frac{1}{4}, \quad b^{z,r} = -\frac{1}{4}, \quad c^{z,r} = \frac{1}{2}, \quad d^{z,r} = \frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Система (4.7), (4.8) решается методом прогонки (3.18) с граничными условиями (3.20). После ее решения компоненты собственного вектора $f_i^{z,0,s+1}$ и $f_i^{z,r,s+1}$ находятся по явным формулам с использованием соотношения (2.23) с усредненными по переменной z коэффициентами:

$$f_i^{z,\alpha,s+1} = \left(f_{i+1/2}^{z,0,s+1}a^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,0,s+1}b^{z,\alpha} + f_{i+1/2}^{z,r,s+1}c^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,r,s+1}d^{z,\alpha}\right)\Big/v_i, \quad \alpha = 0, r. \tag{4.9}$$

При расчете минимального собственного значения по радиальной переменной на шаге $s+1$ решается система уравнений, состоящая из двух подсистем.

Первая подсистема состоит из усредненных по переменной z уравнений (3.16):

$$f_{i+1/2}^{0,0,s+1}a^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,0,s+1}b^{r,\alpha} + f_{i+1/2}^{0,r,s+1}c^{r,\alpha} + f_{i-1/2}^{0,r,s+1}d^{r,\alpha} = v_i f_i^{r,\alpha,s}\lambda_r^s, \quad \alpha = 0, r, \tag{4.10}$$

и дополнительных уравнений (2.20) и (3.14). При этом, поскольку решается задача на собственное значение, в уравнениях (3.14) постоянные компоненты d и e не учитываются. Система (4.10) решается методом прогонки (3.18) с граничными условиями (3.20). После ее решения компоненты собственного вектора $f_i^{r,0,s+1}$, $f_i^{r,r,s+1}$, $f_i^{0,0,s+1}$ и $f_i^{0,r,s+1}$ находятся с помощью уравнений (2.20) и (3.14) (без компонент d и e).

Вторая подсистема состоит из усредненных по переменной z уравнений (3.22):

$$\zeta_{i+1/2}^{z,0,s+1/3}a^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,0,s+1}b^{z,\alpha} + f_{i+1/2}^{z,r,s+1}c^{z,\alpha} + f_{i-1/2}^{z,r,s+1}d^{z,\alpha} = v_i f_i^{z,\alpha,s}\lambda_r^s, \quad \alpha = 0, r. \tag{4.11}$$

Система (4.11) решается методом прогонки (3.18) с граничными условиями (3.20). После ее решения компоненты собственного вектора $f_i^{z,0,s+1}$ и $f_i^{z,r,s+1}$ находятся с помощью уравнений (2.23).

Компоненты $f^{0,z}$, $f^{r,z}$ и $f^{z,z}$ собственных векторов, отвечающих минимальному и максимальному собственным значениям оператора $\hat{R}_a$, стремятся к нулю и их вкладом можно пренебречь.

При использовании адаптивной WLB-WLD схемы выбор весов схемы уточняется в процессе итераций. Поэтому границы спектра собственных значений операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ должны, вообще говоря, переоцениваться на каждой внутренней итерации n. В этом случае собственные значения и собственные вектора с предыдущей $n-1$-й внутренней итерации используются как начальное приближение. В итоге, среднее число итераций степенного метода при точности расчета собственных значений $\varepsilon_\lambda = 10^{-3}$ обычно не велико.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ

После оценки границ собственных значений операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ для циклического ADI метода с длиной цикла J рассчитываются следующие величины (см. [27]):

$$\begin{gathered} a = \sqrt{\frac{(\Lambda_r - \lambda_r)(\Lambda_z - \lambda_z)}{(\Lambda_r + \lambda_z)(\Lambda_z + \lambda_r)}}, \quad \eta = \frac{1-a}{1+a}, \quad b = \frac{\Lambda_z + \lambda_r}{\Lambda_r - \lambda_r} a, \\ t = \frac{1-b}{1+b}, \quad r = \frac{\Lambda_z + \Lambda_r b}{1+b}, \quad s = \frac{\Lambda_z - \Lambda_r b}{1+b}, \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\omega_{r,j} = \frac{r\kappa_j + s}{1 + t\kappa_j}, \quad \omega_{z,j} = \frac{r\kappa_j - s}{1 - t\kappa_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, J, \tag{5.2}$$

где $\kappa_j = \kappa_j(\eta, J)$ – известная функция (см. [27]) (в случае $J = 1$ $\kappa = \sqrt{\eta}$).

Величины $\omega_{r,j}$ и $\omega_{z,j}$ в уравнении (5.2) определяют искомые оптимальные значения ADI алгоритма.

В случае, когда $\lambda_r = \lambda_z = \lambda$, $\Lambda_r = \Lambda_z = \Lambda$, соотношения (5.1), (5.2) принимают вид

$$a = \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad b = 1, \quad t = 0, \quad r = \Lambda, \quad s = 0, \quad \omega_{r,j} = \omega_{z,j} = \omega_j = r\kappa_j. \tag{5.3}$$

В используемом нами для случая 2D геометрии варианте MP полагается $\omega_{r,j} = \omega_{z,j} \equiv \omega_j$ с $\lambda = \lambda_{\min} = \min(\lambda_r, \lambda_z)$ и $\Lambda = \Lambda_{\max} = \max(\Lambda_r, \Lambda_z)$, $\tilde{\tau}_j = 2\omega_j$. Такой выбор шагов, как показывает численный эксперимент, является приемлемым для достаточно широкого класса задач. В качестве мотивации использования MP с симметризованными границами спектра отметим, что в гетерогенных задачах границы спектра оцениваются приближенно для усредненных значений операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$. Использование симметризованной оценки границ спектра раздвигает эти границы, позволяя гасить более широкий спектр ошибок.

При выборе остальных параметров алгоритма: длины цикла J, критерия и точности сходимости итераций MP, точности расчета границ спектра операторов $\hat{R}$ и $\hat{Z}$ и т.д., позволяющих минимизировать время расчета варианта, использовался опыт задания аналогичных параметров для ADI метода в 2D геометрии (см. разд. 3.4 из [16]), а также результаты численного эксперимента, в котором в качестве критерия оптимизации KP_1 алгоритма выбиралось уменьшение полного времени расчета варианта. В частности, проведенное исследование показало, что использование поточечного критерия сходимости итераций MP для каждой из компонент $f^{\alpha,0}$, $f^{\alpha,r}$ и $f^{\alpha,z}$, P_1 системы является чрезмерным. Более приемлемым является критерий сходимости вида

$$\max_{\tilde{i},\tilde{k},\gamma} \left| \frac{f_{\tilde{i},\tilde{k}}^{0,\gamma,s+1} - f_{\tilde{i},\tilde{k}}^{0,\gamma,s}}{f_{\tilde{i},\tilde{k}}^{0,\gamma,s+1}} \right| < \varepsilon_{P1}, \quad f_{\tilde{i},\tilde{k}}^{0,s} = \sqrt{\sum_{i\in\tilde{i},k\in\tilde{k}} V_{i,k} (f_{i,k}^{0,\gamma,s})^2}, \quad \gamma = 0, r, z, \tag{5.4}$$

где $(\tilde{i}, \tilde{k})$ – “грубая” сетка с коэффициентом огрубления N (в 2D геометрии обычно $N = 4$) по отношению к сетке (i, k). Блок ячеек, по которому проводится суммирование в (5.4), состоит из N^2 ячеек. В уравнении (5.4) ε_{P1} – заданная точность сходимости итераций MP.

Численный эксперимент показал, что желательно использовать циклический MP с достаточно большой длиной цикла J (хорошим выбором для большого класса задач является значение $J = 16$) с возрастающей последовательностью κ_j: $\kappa_j < \kappa_{j+1}$. Известно (см. [4], [29]), что кинетическая часть итерации хорошо подавляет быстроменяющиеся по пространственной переменной компоненты в спектре ошибки. Основное назначение P_1 части итерации – это подавление медленно изменяющихся по пространственной переменной компонент спектра ошибки, что согласуется с выбором критерия сходимости итераций MP (5.4) и вышеуказанной последовательностью шагов в цикле MP.

Оптимальный выбор ε_{P1} зависит от степени монотонности используемой разностной схемы и длины цикла J. Численный эксперимент показал, что при $J \geq 8$ для LD и LB схем в 2D расчете достаточно задать $\varepsilon_{P1} = 0.4$. Использование более высоких точностей ε_{P1} может лишь незначительно уменьшить число внутренних итераций, но при этом возрастает число итераций МР и, соответственно, стоимость одной внутренней итерации и полное время расчета.

Численное исследование также показало, что приемлемая точность расчета границ спектра $\varepsilon_\lambda = 10^{-3}$. Дальнейшее повышение точности расчета границ спектра практически не влияет на число итераций МР. Выход из итерационного цикла происходит либо по достижении заданной точности, либо если число итераций степенного метода превосходит некоторое предельное значение $N^{\lambda}_{\max}$ (обычно, $N^{\lambda}_{\max} = 200$).

Если число итераций МР превосходит некоторое предельное значение $N^{\text{split}}_{\max}$ (обычно $N^{\text{split}}_{\max} = \max(32, J)$), то осуществляется корректировка выбора шагов алгоритма МР – исходная верхняя граница спектра Λ увеличивается в $10 \times 2^{n-1}$ раз, где $n = 1, 2, \ldots$ – номер корректировки границ спектра. После корректировки верхней границы спектра итерации МР продолжаются (с использованием ранее полученного приближения для поправок) до сходимости, если не возникает необходимости в дополнительной корректировке. Корректировка верхней границы спектра проводится до сходимости итераций МР, но не более 10 раз, после чего ускорение в группе отключается и используются чистые кинетические итерации.

Как показал численный эксперимент, в отличие от случая AWDD схемы, потребность в корректировке выбора шагов алгоритма МР при использовании LD или LB схем возникает только при решении специально подобранных задач.

Ускорение в группе отключается также по достижении некоторого максимально допустимого числа внутренних итераций (обычно, 50) в группе.

Для предотвращения возможных переполнений целесообразно также осуществлять проверку значения прогоночного коэффициента ξ^0 в уравнениях (3.18), (3.34) и (3.44). Если абсолютное значение этого коэффициента в некоторой ячейке существенно больше единицы (в 2D коде обычно используется критерий $\left|\xi^0\right| > 2.0$), то ускоряющая коррекция решения на текущей внутренней итерации не производится.

6. KP_1 СХЕМА УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В x, z ГЕОМЕТРИИ

Односкоростное уравнение переноса в x, z геометрии имеет вид

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial z} + \xi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sigma\psi(x,z,\xi,\mu) = S(x,z,\xi,\mu), \quad x_{\text{int}} \le x \le x_{\text{out}}, \quad z_{\text{bot}} \le z \le z_{\text{top}}. \tag{6.1}$$

Здесь ξ и μ – направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ направления скорости частицы (1.2), который с учетом имеющейся в данной геометрии симметрии: $\psi(x,z,\mu,\varphi) = \psi(x,z,\mu,2\pi-\varphi)$, изменяется в пределах полусферы $-1 \le \xi,\ \mu \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi$. Правую часть уравнения (6.1), учитывая имеющуюся симметрию, можно представить в виде

$$S(x,z,\mu,\varphi) = \sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}\sigma_{s,l}\sum_{m=0}^{l}Y_l^m(\mu,\varphi)\Phi_l^m(x,z) + f(x,z,\mu,\varphi). \tag{6.2}$$

Все расчетные формулы KR_1 схемы для x, z геометрии получаются из соответствующих формул для r, z геометрии путем замены

$$r \to x, \quad A_{i\pm1/2} \to 1, \quad C \to 0, \quad C^r \to 0, \quad \delta^c \to 0, \quad v_i \to \Delta x_i, \quad M_r \to 0, \quad \bar{M}_r \to 0. \tag{6.3}$$

7. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ KP_1 СХЕМЫ УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В 2D ГЕОМЕТРИИ

В данном разделе мы приведем численные результаты, позволяющие оценить эффективность вышеописанного варианта согласованной KP_1 схемы. Использовался поточечный критерий сходимости внутренних итераций по скалярному потоку $\varepsilon = 10^{-4}$. Для решения P_1 системы использовался циклический МР с длиной цикла $J = 16$.

Номер композиции	σ_t, $см^{-1}$	$\sigma_{s,0}$, $см^{-1}$	Источник F, $см^{-3}\,с^{-1}$
1	0.60	0.53	1.0
2	0.48	0.20	0.0
3	0.70	0.66	1.0
4	0.65	0.50	0.0
5	0.90	0.89	0.0

Фиг. 1. Сечение 2D расчетной области тестовой задачи EIR2 (см. [5]) в x, y геометрии.

Номер композиции	σ_t, $см^{-1}$	$\sigma_{s,0}$, $см^{-1}$	$\sigma_{s,1}$, $см^{-1}$	Источник F, $см^{-3}\,с^{-1}$
1 (вода)	3.3333	3.3136	0.9256	1.0
2 (вода)	3.3333	3.3136	0.9256	0.0
3 (железо)	1.3333	1.1077	0.0367	0.0

Фиг. 2. Сечение 2D железо-водной композиции (см. [5]) в x, y геометрии.

При расчете тестовых задач 1–3 использовались LD и LB схемы с весом $P_\xi = 1$ в дополнительном уравнении (1.14) по угловой переменной, WLD и WLB схемы с весом P_ξ, выбираемым посредством AWDD схемы (см. [17], [22]), обеспечивающей положительность экстраполяции по угловой переменной. Использовался следующий вариант алгоритма выбора веса P_ξ:

$$P_\xi = \begin{cases} 1, & U_\xi \le U_\xi^0, \\ P(U_\xi, \delta_\xi), & U_\xi > U_\xi^0, \end{cases} \qquad \delta_\xi = \frac{\alpha_{l,m+1/2}}{\alpha_{l,m-1/2} + \alpha_{l,m+1/2}}, \qquad U_\xi = b'_\xi |u_\xi|, \qquad u_\xi = \frac{\psi_{m-1/2} - \psi}{\psi}, \tag{7.1}$$

где величина u_ξ определялась в результате предварительного расчета ячейки с весом $P_\xi = 1$; $b'_\xi = \max(1, 2b_\xi U_\xi^0)$, где $b_\xi \ge 1$ – параметр монотонизации по переменной ξ (использовалось значение $b_\xi = 1$); корректирующая функция $P(U, \delta)$ выбиралась в виде

$$P(U, \delta) = \frac{1 - \delta}{U}, \qquad U_0 = 1 - \delta. \tag{7.2}$$

Таблица 1

Задача	Метод							
	Без ускорения				KP_1 + MP			
	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
Композиция EIR-2 в x, z геометрии, сетка 46 × 54, S_8P_0	124 (7.8-3)	135 (9.9-3)	164 (2.6-2)	163 (2.5-2)	5 [3.6] (7.8-4)	12 [11.1] (1.6-3)	12 [8] (3.4-3)	12 [12.2] (3.6-3)
Композиция EIR-2 в r, z геометрии, сетка 46 × 54, S_8P_0	127 (1.2-3)	139 (1.7-2)	167 (3.5-2)	166 (3.5-2)	6 [3.7] (1.0-3)	13 [11.2] (2.6-3)	8 [6.9] (2.6-3)	8 [11.9] (3.1-3)
Железо-водная композиция в x, z геометрии, сетка 40 × 40, S_8P_1	874 (2.7-2)	1146 (3.5-2)	1174 (5.3-2)	1175 (5.3-2)	5 [6.6] (5.2-4)	12 [9.9] (7.8-4)	9 [7.5] (1.0-3)	10 [11.9] (1.0-3)
Железо-водная композиция в r, z геометрии, сетка 40 × 40, S_8P_1	829 (2.9-2)	1115 (4.0-2)	1150 (6.2-2)	1151 (6.2-2)	5 [7.2] (5.2-4)	10 [9] (7.8-4)	8 [7.5] (1.0-3)	5 [11] (5.2-4)
Железо-водная композиция в r, ϑ геометрии, сетка 40 × 10, S_8P_1	746 (1.9-2)	938 (2.3-2)	965 (2.9-2)	965 (2.9-2)	6 [5.3] (2.6-4)	9 [6.8] (2.6-4)	7 [7] (5.2-4)	7 [9.6] (5.2-4)

Таблица 2

Метод					
Без ускорения			KP_1+MP		
AWDD	WLD	WLB	AWDD	WLD	WLB
885 (1.41-1)	885 (3.17-1)	885 (3.11-1)	102 (2.84-2)	104 (5.65-2)	102 (5.60-2)

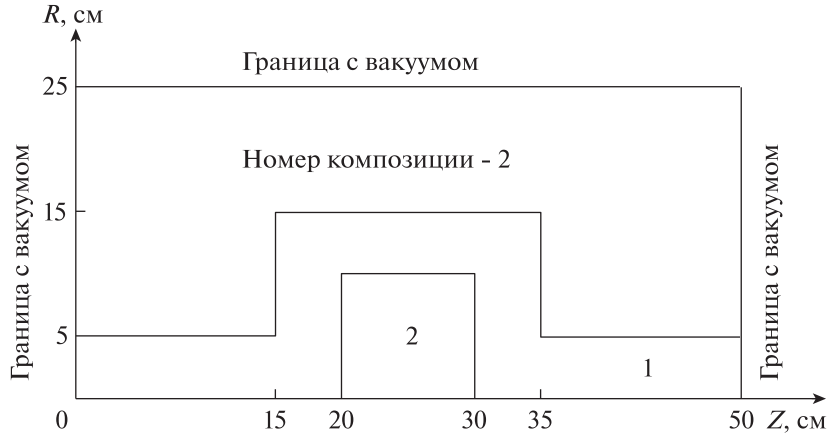
В качестве критерия сходимости итераций MP использовался поблочный критерий (5.4) с размером ребра блока $N = 4$ и $\varepsilon_{P1} = 0.4$. Расчетные времена приведены для ПК Intel Core i7-6950X.

Прежде всего, представим результаты использования KP_1 схемы для расчета двух тестовых задач из [5]. Геометрия и состав зон для этих задач для случая x, y геометрии определены на фиг. 1 (задача 1, EIR-2) и фиг. 2 (задача 2, железо-водная композиция).

В табл. 1 приведено число внутренних итераций, требуемое для решения задач 1 и 2 без ускорения и при использовании KP_1 схемы в сочетании с циклическим MP для решения P_1 системы. В квадратных и круглых скобках приведены, соответственно, среднее (по внутренним итерациям) число итераций MP и процессорное время (мин); значение параметра $n \geq 1$ показывает, что задача считалась с увеличенной в 10×2^n начальной верхней границей спектра Λ для достижения устойчивости (или повышения эффективности) MP.

В табл. 2 приведено суммарное (по 26 группам) число внутренних итераций при расчете модели быстрого реактора в r, z геометрии (задача 3) на пространственной сетке (82 × 35) в S_8P_1 приближении при точности сходимости внутренних итераций $\varepsilon = 10^{-3}$. В активной зоне был задан пространственно постоянный источник со спектром деления ^{235}U. В круглых скобках приведено процессорное время (мин).

Применим далее рассматриваемый алгоритм к решению сильно-гетерогенной задачи с малым поглощением из [30] в r, z геометрии (задача 4). Расчетная область этой задачи представляет собой гетерогенный цилиндр радиусом 25 см и высотой 50 см. Аксиальное сечение задачи изображено на фиг. 3. Внутренний цилиндрический канал заполнен материалом 1. Окружающая ка-



Фиг. 3. Аксиальное сечение тестовой задачи 4 в r, z геометрии (см. [30]).

нал среда и центральный диск внутри канала заполнены материалом 2. Плотность материала 1 существенно меньше плотности материала 2. Нижний торец канала ($z = 0$, $0 \le r \le 5$ см) облучается изотропным, радиально постоянным источником единичной интенсивности. Имеется также внутренний изотропный источник с интенсивностью 10^{-6} частиц/(см^3 с), распределенный равномерно по всей расчетной области. Для случая x, z геометрии может быть определена аналогичная задача, расчетная область которой представляет собой гетерогенный бесконечный вдоль оси Oy параллелепипед с каналом. Аксиальное сечение этого параллелепипеда в плоскости OXZ совпадает с аксиальным сечением гетерогенного цилиндра (фиг. 3).

В табл. 3 и 4 для некоторого набора значений полных сечений материалов 1 ($\sigma_{t,1}$) и 2 ($\sigma_{t,2}$), а также величин отношения сечения рассеяния к полному сечению $c = \sigma_s / \sigma_t$, приведено число внутренних итераций при решении задачи 4 в r, z и x, z геометриях на пространственной сетке 50×100 шагов, с использованием шаговой (Step), AWDD, LD и LB схем в S_6 приближении с точностью сходимости итераций 10^{-5} при точности решения P_1 системы для ускоряющих поправок $\varepsilon_{P1} = 0.5$ для Step и AWDD схем и $\varepsilon_{P1} = 0.4$ для LD и LB схем.

Как следует из результатов, приведенных в табл. 3 и 4, в r, z и x, z геометриях эффективность согласованной KP_1 схемы ускорения падает по мере увеличения отношения σ_{t2}/σ_{t1} и увеличения доли рассеяния, хотя и остается на приемлемом уровне.

В качестве следующего примера (задача 5) приведем число внутренних и внешних итераций и расчетные времена (см. табл. 5) при расчете пространственного распределения потока нейтронов и фотонов в РУ ВВЭР-1000/320 в r, z и r, ϑ геометриях, соответствующих продольному и по-

Таблица 3

r, z Геометрия		$\sigma_{t,2}$							
		10^2				10^1			
$\sigma_{t,1}$	c	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
10^{-3}	0.999	34	a*	63	138 ($n = 1$)	37	65	87	92
	0.99	16	33	36	75	32	68	52	51 ($n = 6$)
10^{-2}	0.999	27	a	53	138	26	51	54	55
	0.99	15	30	33	72	26	46	41	41($n = 5$)
10^0	0.999	8	55	18	20	9	17	11	12
	0.99	7	23	11	22	9	23	9	12

* Сходимость итераций отсутствует.

Таблица 4

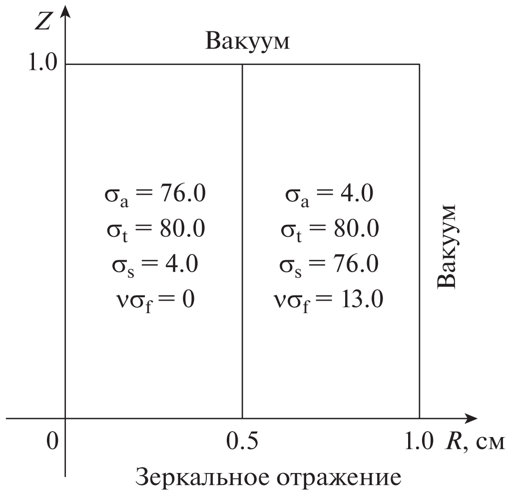
x, z Геометрия		$\sigma_{t,2}$							
		10^2				10^1			
$\sigma_{t,1}$	c	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
10^{-3}	0.999	29	259	88	289 (n = 1)	39	91	61	163
	0.99	17	32	36	127 (n = 7)	28	43	43	107 (n = 3)
10^{-2}	0.999	25	258	56	113	29	58	49	77
	0.99	16	29	31	72	23	39	36	94 (n = 5)
10^0	0.999	8	50	16	21	9	17	13	16
	0.99	7	23	12	30	9	21	10	13

Таблица 5

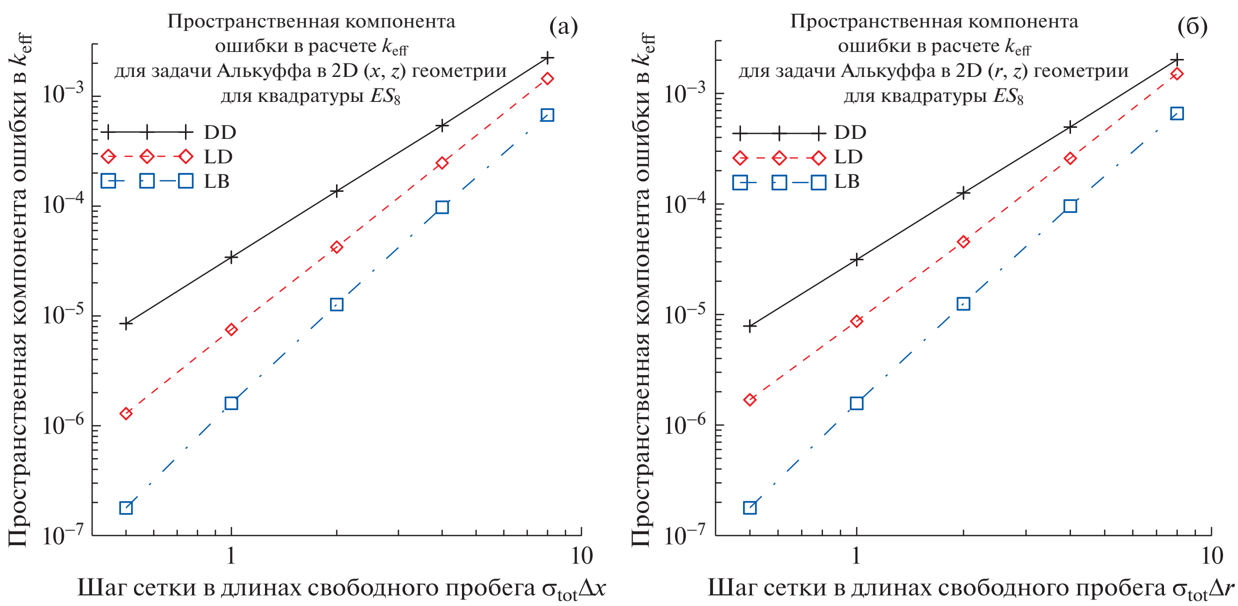
Задача	Геометрия и метод			
	r, z		r, ϑ	
Суммарное число внутренних итераций:	AWDD	WLD	AWDD	WLD
Нейтроны, группы 1–199	2014	1954	3056	1740
Нейтроны, при внешних итерациях по области термализации, группы 166–199	2170	3132	2115	2724
Фотоны, группы 200–246	231	206	501	267
Число внешних итераций по области термализации	24	25	17	17
Расчетное время, мин	10.9	24.5	5.96	11.2

перечному сечениям расчетной области в области максимума потока нейтронов с энергией $E >$ > 0.5 МэВ. Для задания исходной геометрии задачи методами комбинаторной геометрии использовался геометрический модуль программы MCU (см. [31]). Комбинаторное задание геометрии затем конвертировалось на сетку задачи с использованием метода трэйсинга (tracing) программой ConDat (см. [32]) с поддержанием локального баланса масс в пределах каждой пространственной ячейки за счет введения дополнительных смесей материалов в рамках volume fraction (VF) метода. Расчеты выполнены с использованием мультигрупповой библиотеки сечений V7-200N47G системы SCALE-6.1.2 (см. [33]) без первой группы нейтронов, доля спектра деления для которой в рассматриваемой задаче равна нулю. В качестве источника использовался потвэльный источник для первой половины 5-й кампании 3-го блока Балаковской АЭС. Расчет в r, z геометрии выполнен с пространственной сеткой 190 × 245; в r, ϑ геометрии – для сектора поворотной симметрии 60° с пространственной сеткой 190 × 120. Для нейтронов с $E > 3.0$ МэВ использовалась квадратура Лебедева $L_{12,2}$ (см. [34]), для нейтронов с $E < 3.0$ МэВ и для фотонов – квадратура $L_{8,2}$. Использовался поточечный критерий сходимости по скалярному потоку внутренних и внешних (по области термализации) итераций $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\varepsilon_{\text{upsc}} = 5\times10^{-3}$ соответственно; анизотропия рассеяния учитывалась в P_3 приближении.

Для ускорения внешних итераций по области термализации нейтронов использовалась KP_1 схема ускорения внешних итераций (см. [6], [13]). Спектральная зависимость ускоряющих поправок в этой схеме выбиралась на основе анализа Фурье основной гармоники ошибки итерационного метода Гаусса–Зейделя (см. [35]) для гомогенизированной задачи. Предложенный алгоритм решения P_1 системы для ускоряющих поправок использовался также и для решения аналогичной P_1 системы, возникающей на каждой внешней итерации в алгоритме ускорения внешних итераций. Для обеспечения поточечной сходимости внешних итераций во всех группах из области термализации нейтронов использование заданной точности сходимости внутренних итераций ε оказывается недостаточным, поэтому по достижении точности сходимости внешних итераций



Фиг. 4. Задача 6 в r, z геометрии (см. [20]). Указаны сечение поглощения σ_a, полное сечение σ_t, сечение рассеяния σ_s, $\nu\sigma_f$ по зонам.



Фиг. 5. Пространственная компонента ошибки в расчете k_{eff} при расчете модельной задачи (см. фиг. 5 из [20]) в x, z (а) и r, z (б) геометриях с квадратурой ES_8.

$\varepsilon_{\text{upsc}} < 10$ точность сходимости внутренних итераций увеличивалась до значения $a\varepsilon$, где коэффициент $a = 2\times 10^{-2}$ и $a = 2\times 10^{-4}$ для AWDD и нодальных схем соответственно.

Приведем также результаты (см. фиг. 5), показывающие скорость сходимости k_{eff} (k_{eff} определяется итерационно из решения задачи на собственное значение (см. [3], [36]) и определяет степень критичности исследуемой системы) в зависимости от выбора пространственной сетки и разностной схемы при фиксированной квадратуре ES_8 для одногрупповой двухзонной задачи из [20] в r, z геометрии, изображенной на фиг. 4 (задача 6), и ее аналога в x, z геометрии. В случае x, z геометрии на левой границе расчетной области использовалось условие зеркального отражения. Данная задача решалась на равномерной пространственной сетке из 10, 20, 40, 80 и 160 интервалов по каждой из переменных. В качестве точного использовалось значение k_{eff}, рассчитанное по LB схеме на сетке из 320 × 320 интервалов с точностью сходимости итераций 10^{-10}.

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численный эксперимент показал, что MP в сочетании с AWLD схемой обычно сходится за 5–7 итераций и это число итераций практически не зависит от номера внутренней итерации и номера группы. Это существенно лучший результат по сравнению с использованием ADI алгоритма в сочетании с адаптивной WDD (AWDD) схемой. Использование AWLD схемы позволяет существенно уменьшить разностную ошибку аппроксимации задачи по пространственным переменным, а также оценить пространственное распределение ошибки аппроксимации при решении задачи с использованием AWDD схемы.

Небольшие расчетные времена позволяют использовать разработанный алгоритм для решения практических задач радиационной защиты с использованием детального энергетического разбиения, предоставляемого мультигрупповыми библиотеками V7-200N47G системы SCALE-6.1.2 и 299n+127g системы ABBN-RF/CONSYST.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
2. *Alcouffe R.E.* Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. Eng. 1977. V. 64. № 2. P. 344.
3. *Adams M.L., Larsen E.W.* Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy. 2002. V. 40. Iss. 1. P. 3.
4. *Lorence L.J., Morel J.E., Larsen E.W.* An S_2 synthetic acceleration method for the one-dimensional S_N equations with linear discontinuous spatial differencing // Nucl. Sci. Eng. 1989. V. 101. № 2. P. 341.
5. *Khalil H.* A nodal diffusion technique for synthetic acceleration of nodal S_n calculations // Nucl. Sci. Eng. 1985. V. 90. № 3. P. 263.
6. *Voloschenko A.M.* Consistent P_1 synthetic acceleration scheme for transport equation in 3D geometries. // Proc. of Intern. Conf. on Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications. Avignon, France, September 12–15, 2005, paper 070.
7. *Voloschenko A.M.* Some Improvements in Solving of the Transport Equation by the Use of the Family of Weighted Nodal Schemes // Proc. of International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, RJ, Brazil, May 8–12, 2011.
8. *Walters W.F., O'Dell R.D.* A Comparison of Linear Nodal, Linear Discontinuous and Diamond Schemes for Solving the Transport Equation in (x, y) Geometry// TANS. 1981. V. 39. P. 465.
9. *Волощенко А.М.* Дважды консервативная схема 4-го порядка точности для уравнения переноса в криволинейных геометриях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1984. № 49.
10. *Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1986.
11. *Voloschenko A.M.* Adaptive Positive Nodal Scheme for Transport Equation in Curvilinear Geometry // Proc. of Intern. Conf. On Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analyses, April 30–May 4, 1995, Portland, Oregon, USA. V. 2. P. 989.
12. *Voloschenko A.M.* Geometrical interpretation of family of weighted nodal schemes and adaptive positive approximations for transport equation // Proc. Joint International Conference on Mathematical Methods and Supercomputing for Nuclear Applications, October 6–10, 1997, Saratoga Springs, NY USA. V. 2. P. 1517.
13. *Волощенко А.М.* Адаптивные положительные аппроксимации и согласованная KP1 схема ускорения итераций для уравнения переноса в задачах радиационной защиты. Докторская диссертация. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. http://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/voloshchenko_diss.pdf.
14. CNCSN 2009: One, Two- and Three-Dimensional Coupled Neutral and Charged Particle Discrete Ordinates Parallel Multi-Threaded Code System // 2009. RSICC code package CCC-726.
15. *Волощенко А.М., Воронков А.В., Сычугова Е.П.* Согласованная P_1SA схема ускорения внутренних и внешних итераций для уравнения переноса нейтронов и фотонов в одномерных геометриях в пакете РЕАКТОР // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1996. № 2.
16. *Волощенко А.М.* KP_1 схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в двумерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 9. С. 1379.
17. *Волощенко А.М.* KP_1 схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в трехмерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 1.
18. *Волощенко А.М., Кондратенко Е.П.* KP_1 схема ускорения внутренних итераций, согласованная с семейством WLM-WLD схем для уравнения переноса в одномерных геометриях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1986. № 197.

19. *Voloschenko A.M.* P_1SA Scheme for Acceleration of Inner Iterations Convergence Consistent with the Weighted Nodal Scheme for Transport Equation in 1D Geometries // Proc. of International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, RJ, Brazil, May 8–12, 2011.
20. *Alcouffe R.E.* A robust linear discontinuous method for the RZ S_N transport equation // Trans. Am. Nucl. Soc. 2003. V. 89. P. 363.
21. *Carlson B.G.* A method of characteristics and other improvements in solution methods for the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1976. V. 61. P. 408.
22. *Voloschenko A.M., Germogenova T.A.* Numerical solution of the time-dependent transport equation with pulsed sources // Transp. Theory and Stat. Phys. 1994. V. 23. № 6. P. 845.
23. *Alcouffe R.E.* An adaptive weigthed diamond-differencing method for three-dimensional XYZ geometry // Trans. Am. Nucl. Soc. 1993. V. 68A. P. 206.
24. *Adams M.L., Wareing T.A.* Diffusion-synthetic acceleration given anisotropic scattering, general quadratures, and multidimensions // Trans. Am. Nucl. Soc. 1993. V. 68A. P. 203.
25. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
26. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд. МФТИ, 1994.
27. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
28. *Шишков Л.К.* Методы решения диффузионных уравнений двумерного ядерного реактора. М.: Атомиздат, 1976.
29. *Morel J.E., Manteuffel T.A.* An angular multigrid acceleration technique for S_N equations with highly forward-peaked scattering // Nucl. Sci. Eng. 1991. V. 107. № 4. P. 330.
30. *Warsa J.S., Wareing T.A., Morel J.A.* Krylov iterative methods applied to multidimensional S_n calculations in the presence of material discontinuities // Proceedings of M&C 2003 – Nuclear Mathematical and Computational Sciences: A Century in Review – A Century Anew, paper No. 134, April 6–10, Gatlinburg, USA, 2003.
31. *Гуревич М.И., Шкаровский Д.А.* Расчет переноса нейтронов методом Монте-Карло по программе MCU. М.: Учебное пособие МИФИ, 2012.
32. *Гуревич М.И., Русское А.А., Волощенко А.М.* ConDat 1.0 – программа преобразования исходных данных из комбинаторной геометрии в растровую с использованием алгоритма трейсинга (tracing). Инструкция для пользователя // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. № 12.
33. SCALE: A Comprehensive Modeling and Simulation Suite for Nuclear Safety Analysis and Design // June 2011, ORNL/TM-2005/39, Version 6.1, RSICC code package CCC-785.
34. *Казаков А.Н., Лебедев В.И.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. Т. 203. С. 100.
35. *Adams B.T., Morel J.E.* A two-grid acceleration scheme for the multigroup S_n equations with neutron upscattering // Nucl. Sci. Eng. 1993. V. 115. P. 253.
36. *Белл Д., Глесстон С.* Теория ядерных реакторов. пер. с англ. М.: Атомиздат, 1974.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

КОНЕЧНО-ОБЪЕМНАЯ СХЕМА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ПРОГРАММЕ ФОКУС

И. В. Глазырин[1],*, Н. А. Михайлов[1],**

[1] *456770 Снежинск, Челябинская обл., ул. Васильева, 13, ФГУП “РФЯЦ–ВНИИТФ им. Акад. Е.И. Забабахина”, Россия*

**e-mail: i.v.glazyrin@vniitf.ru*

***e-mail: n.a.mikhaylov@vniitf.ru*

Поступила в редакцию 25.07.2019 г.
Переработанный вариант 02.12.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

В работе изложена конечно-объемная схема годуновского типа для системы уравнений идеальной многокомпонентной газовой динамики на неподвижной трехмерной неструктурированной сетке. Схема реализована в программе Фокус, предназначенной для расчетов сжимаемых неустойчивых и турбулентных течений. Потоки консервативных величин через грани ячеек вычисляются с использованием обобщенных на случай произвольной ориентации грани решателей Римана HLL и HLLC, не требующих перехода в локальную систему координат каждой грани. Для реконструкции компонент вектора скорости применяется подход, учитывающий направление течения, что улучшает описание сферически-симметричных течений. Библ. 29. Фиг. 10.

Ключевые слова: многокомпонентная газовая динамика, конечно-объемная схема годуновского типа, решатель Римана, реконструкция решения, трехмерная неструктурированная сетка, неустойчивость Рихтмайера–Мешкова, неустойчивость Рэлея–Тейлора.

DOI: 10.31857/S0044466921060041

1. ВВЕДЕНИЕ

Трехмерная программа Фокус, разрабатываемая в РФЯЦ–ВНИИТФ, предназначена для расчетов сжимаемых неустойчивых и турбулентных течений, характерных для физики высоких плотностей энергии. Численное моделирование таких течений, возникающих, например, при сжатии мишеней лазерного термоядерного синтеза, является существенным инструментом их исследования [1]–[4].

Система уравнений многокомпонентной газовой динамики в Фокус рассчитывается в рамках эйлерового подхода на неструктурированной сетке. Используются схемы годуновского типа [5]–[7]. В данной работе описывается базовая схема без выделения контактных границ в смешанных ячейках. Использование геометрического метода VOF [8] для минимизации численной диффузии будет описано в отдельной статье. Здесь основное внимание уделено двум методическим особенностям: формулировкам решателей Римана HLL и HLLC для произвольной ориентации оси без использования перехода в локальную систему координат граней ячеек и специальной реконструкции скорости, учитывающей направление течения. Ограничений на вид уравнений состояния (УРС) компонент смеси в схеме не накладывается – каждая компонента может иметь свое произвольное двухпараметрическое УРС, удовлетворяющее условию Бете–Вейля [9]. Распараллеливание рассматриваемой схемы в Фокус выполнено на распределенной памяти с помощью технологии MPI.

Среди других программ, разрабатываемых для расчетов указанного класса течений, можно отметить российские коды NUT3D [10], ЭГАК [11] и зарубежные HYDRA [12], Miranda [13], Flamenco [14].

В NUT3D используется схожая эйлерова схема для газовой динамики на кубической сетке. ЭГАК также является эйлеровой программой на кубической сетке, в которой расчетный шаг делится на два этапа: лагранжев шаг и пересчет величин на эйлерову сетку. Неструктурированная сетка в Фокус позволяет использовать адаптацию сетки под особенности течения и напрямую описывать сложные границы расчетных областей. При этом не требуются дополнительные алгоритмы, как, например, на границах уровней в методе локальной адаптации кубических сеток [15] или в методе погруженной границы [16].

Для тестирования программы выбраны представительные для физики высоких плотностей энергии задачи – задачи Римана на неструктурированной и сферической сетках, турбулентная стадия неустойчивости Рихтамайера–Мешкова, развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в волне разрежения.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассматривается следующая трехмерная система уравнений односкоростной многокомпонентной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовой системе координат (x, y, z) с изобарическим замыканием [17]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\alpha_k + \nabla\cdot(\mathbf{v}\alpha_k) = \alpha_k\nabla\cdot\mathbf{v}, \quad k = 1,\ldots,N-1,\\
\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k\varrho_k) + \nabla\cdot(\mathbf{v}\alpha_k\varrho_k) = 0, \quad k = 1,\ldots,N,\\
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\mathbf{v}) + \nabla\cdot(\mathbf{v}\varrho\mathbf{v}) + \nabla p = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho E) + \nabla\cdot(\mathbf{v}(\varrho E + p)) = 0,\\
\varrho = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varrho_k,\\
\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = 1,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\alpha_k = V_k/V$, $\varrho_k = m_k/V_k$, m_k и V_k – объемная доля, плотность, масса и объем k-й компоненты, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – скорость, $E = |\mathbf{v}|^2/2 + e$ – удельная полная энергия на единицу массы, $e = \left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varrho_k e_k\right)/\varrho$ – удельная внутренняя энергия на единицу массы, $e_k(\varrho_k, p)$ – удельная внутренняя энергия k-й компоненты на единицу массы, $p = p_k(\varrho_k, e_k)$ – давление.

Дифференциальную часть системы (1) можно записать в квазидивергентном виде:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{u} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1},\varrho_1\alpha_1,\ldots,\varrho_N\alpha_N,\varrho v_x,\varrho v_y,\varrho v_z,\varrho E)',$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}
\alpha_1 v_x & \alpha_1 v_y & \alpha_1 v_z\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{N-1}v_x & \alpha_{N-1}v_y & \alpha_{N-1}v_z\\
\varrho_1\alpha_1 v_x & \varrho_1\alpha_1 v_y & \varrho_1\alpha_1 v_z\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\varrho_N\alpha_N v_x & \varrho_N\alpha_N v_y & \varrho_N\alpha_N v_z\\
\varrho v_x^2 + p & \varrho v_x v_y & \varrho v_x v_z\\
\varrho v_y v_x & \varrho v_y^2 + p & \varrho v_y v_z\\
\varrho v_z v_x & \varrho v_z v_y & \varrho v_z^2 + p\\
(\varrho E + p)v_x & (\varrho E + p)v_y & (\varrho E + p)v_z
\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = (\alpha_1\nabla\cdot\mathbf{v},\ldots,\alpha_{N-1}\nabla\cdot\mathbf{v},0,\ldots,0,0,0,0,0)'.$$

3. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

Пусть пространственная область разбита на произвольные выпуклые многогранники (ячейки) сплошным образом без пересечения. Любая грань разделяет только две ячейки, одна из которых обозначается индексом P, вторая — N. Все величины относятся к центрам ячеек.

Интегрирование системы (2) по объему i-й вычислительной ячейки и применение теоремы Остроградского–Гаусса дает следующую систему уравнений для каждой ячейки:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_i}{\partial t} + \frac{1}{|V_i|} \sum_j \int_{S_j} (\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{i,j}) dS_j = \langle \mathbf{b} \rangle_i,$$

где $\langle \mathbf{u} \rangle_i \equiv \int_{V_i} \mathbf{u} dV / |V_i|$ — среднеинтегральное значение $\mathbf{u}$ по i-й ячейке, $|V_i|$ — объем i-й ячейки, $\mathbf{n}_{i,j}$ — вектор внешней нормали к грани j для ячейки i.

Поверхностные интегралы по граням ячеек и среднеинтегральные значения по ячейкам аппроксимируются со вторым порядком точности по формуле средней точки:

$$\int_{S_j} (\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{i,j}) dS_j \approx S_j (\mathbf{F}(\mathbf{u})_j \cdot \mathbf{n}_{i,j}) = S_j \mathbf{f}^n(\mathbf{u})_{i,j},$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_i \approx \mathbf{u}_i, \quad \langle \mathbf{b} \rangle_i \approx \mathbf{b}_i,$$

где $\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_{i,j}$ — нормальный поток в центре j-й грани для ячейки i, S_j — площадь j-й грани. Поскольку $\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_{P,j} = -\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_{N,j}$, то далее индекс ячейки в обозначении потоков опускается. Аппроксимация $\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_j \approx \mathbf{F}_j^n$ дает общий вид полудискретной схемы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{|V_i|} \sum_j S_j \mathbf{F}_j^n = \mathbf{b}_i.$$

3.1. Вычисление потоков

Для аппроксимации нормальных потоков в Фокус используется тот или иной решатель Римана [6]. Стандартным подходом для того, чтобы воспользоваться выражениями для потока из одномерного решателя Римана в случае произвольной ориентации грани, является переход в локальную систему координат, связанную с гранью, так, чтобы одна из осей была сонаправлена с нормалью к грани. Далее вычисляется поток вдоль этой оси по одномерному решателю Римана, и затем этот поток переводится в глобальную систему координат. Избежать операций перехода в локальную систему координат и обратно, связанных с матрично-векторными произведениями можно, если получить выражение потока для случая произвольной ориентации оси, вдоль которой происходит распад разрыва.

Рассмотрим решатель Римана HLL [18], [6] для одномерной гиперболической системы законов сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{u})}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Численный поток HLL определяется в виде

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{x,HLL} = \frac{a_{i+1/2}^+ \mathbf{f}^x(\mathbf{u}_{i+1/2}^-) - a_{i+1/2}^- \mathbf{f}^x(\mathbf{u}_{i+1/2}^+)}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} + \frac{a_{i+1/2}^+ a_{i+1/2}^-}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} [\mathbf{u}_{i+1/2}^+ - \mathbf{u}_{i+1/2}^-], \tag{4}$$

где

$$\mathbf{u}_{i+1/2}^- = \mathbf{p}_i(x_{i+1/2}), \quad \mathbf{u}_{i+1/2}^+ = \mathbf{p}_{i+1}(x_{i+1/2})$$

суть левосторонние и правосторонние реконструированные значения решения на грани $i+1/2$, $\mathbf{p}_i(x)$ – реконструирующий многочлен в i-й ячейке,

$$a^+_{i+1/2} = \max\left\{\lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^-_{i+1/2})\right), \lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+_{i+1/2})\right), 0\right\},$$
$$a^-_{i+1/2} = \min\left\{\lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^-_{i+1/2})\right), \lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+_{i+1/2})\right), 0\right\}$$

суть оценки для максимальной и минимальной скоростей распространения волн от распада произвольного разрыва на грани $i+1/2$, $\partial \mathbf{f}^x/\partial \mathbf{u}$ – матрица Якоби системы (3) с собственными значениями $\lambda_1 < \ldots < \lambda_K$. В случае системы уравнений газовой динамики $\lambda_1 = v_x - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{K-1} = v_x$, $\lambda_K = v_x + c$, где c – скорость звука.

Система уравнений газовой динамики (2) обладает свойством ротационной инвариантности [6], [19]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} \equiv \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{T}$ – тензор поворота глобальной системы координат к локальной системе координат грани, совмещающий ось $\mathbf{x}$ с $\mathbf{n}$. Пусть численный поток $\mathbf{F}^n(\mathbf{u})_j$ обладает этим же свойством:

$$\mathbf{F}^n(\mathbf{u})_j \equiv \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})_j. \tag{5}$$

Подстановка (4) в (5) дает

$$\mathbf{F}^{n,HLL}_j = \frac{a^+_j\mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u}^P_j) - a^-_j\mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u}^N_j)}{a^+_j - a^-_j} + \frac{a^+_j a^-_j}{a^+_j - a^-_j}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{u}^N_j - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{u}^P_j] =$$
$$= \frac{a^+_j\mathbf{f}^n(\mathbf{u}^P_j) - a^-_j\mathbf{f}^n(\mathbf{u}^N_j)}{a^+_j - a^-_j} + \frac{a^+_j a^-_j}{a^+_j - a^-_j}[\mathbf{u}^N_j - \mathbf{u}^P_j],$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{f}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = (\alpha_1 v_n, \ldots, \alpha_{N-1}v_n, \rho_1\alpha_1 v_n, \ldots, \rho_N\alpha_N v_n,\\ \varrho v_x v_n + n_x p, \varrho v_y v_n + n_y p, \varrho v_z v_n + n_z p, (\varrho E + p)v_n)',\end{gathered} \tag{6}$$

$v_n = n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z$ – проекция скорости на нормаль к грани, $\mathbf{u}^P_j$ и $\mathbf{u}^N_j$ – реконструкции решения в центре j-й грани со стороны ячейки P и N, соответственно,

$$a^+_j = \max\left\{\lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{T}\mathbf{u})}(\mathbf{T}\mathbf{u}^P_j)\right), \lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{T}\mathbf{u})}(\mathbf{T}\mathbf{u}^N_j)\right), 0\right\},$$
$$a^-_j = \min\left\{\lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{T}\mathbf{u})}(\mathbf{T}\mathbf{u}^P_j)\right), \lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{T}\mathbf{u})}(\mathbf{T}\mathbf{u}^N_j)\right), 0\right\}.$$

Поскольку собственные значения $\partial \mathbf{f}_n(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$ совпадают с собственными значениями $\partial \mathbf{f}^x(\mathbf{T}\mathbf{u})/\partial(\mathbf{T}\mathbf{u})$ (см. [6]), то

$$\begin{gathered}a^+_j = \max\left\{\lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^P_j)\right), \lambda_K\left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^N_j)\right), 0\right\}, \quad a^-_j = \min\left\{\lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^P_j)\right), \lambda_1\left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^N_j)\right), 0\right\},\\ \lambda_1 = v_n - c, \quad \lambda_K = v_n + c, \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_T + \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\varrho}{\varrho^2\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\varrho}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, HLL-аппроксимация нормального потока $\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_j$ в центре грани ячейки выражается следующим образом:

$$\mathbf{f}^n(\mathbf{u})_j \approx \mathbf{F}_j^{n,HLL} = \frac{a_j^+\mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^P) - a_j^-\mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^N)}{a_j^+ - a_j^-} + \frac{a_j^+a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}[\mathbf{u}_j^N - \mathbf{u}_j^P], \tag{8}$$

где a_j^+ и a_j^- определяются согласно (7).

Аналогичным образом получается выражение для состояния HLL в центре грани в результате распада разрыва:

$$\mathbf{u}_j^{*,HLL} = \begin{cases} \mathbf{u}_j^P, & \text{если} \quad a_j^- > 0, \\ \mathbf{u}_j^{HLL}, & \text{если} \quad a_j^- <= 0 < a_j^+, \\ \mathbf{u}_j^N, & \text{если} \quad a_j^+ <= 0, \end{cases} \tag{9}$$

где усредненное состояние

$$\mathbf{u}_j^{HLL} = \frac{a_j^+\mathbf{u}_j^N - a_j^-\mathbf{u}_j^P + \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^P) - \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^N)}{a_j^+ - a_j^-}.$$

Как можно заметить, выражение потока HLL в (8) может быть получено путем применения метода HLL для координатного направления (4) к нормальному потоку (6). Это указывает на универсальный подход к получению формулировок других решателей Римана для произвольного направления: записать их применительно к (6).

Применим данный подход для получения решателя Римана HLLC для произвольной ориентации грани. Решатель HLLC является модификацией HLL с разделением серединного состояния $\mathbf{u}^{HLL}$ на два, соответствующие контактному разрыву [20]:

$$\mathbf{F}_j^{n,HLLC} = \begin{cases} \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^P), & \text{если} \quad a_j^- > 0, \\ \dfrac{a_j^*(a_j^-\mathbf{u}_j^P - \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^P)) + a_j^- p_j^*\mathbf{d}_j^*}{a_j^- - a_j^*}, & \text{если} \quad a_j^- <= 0 < a_j^*, \\ \dfrac{a_j^*(a_j^+\mathbf{u}_j^N - \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^N)) + a_j^+ p_j^*\mathbf{d}_j^*}{a_j^+ - a_j^*}, & \text{если} \quad a_j^* <= 0 < a_j^+, \\ \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^N), & \text{если} \quad a_j^+ <= 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_j^{*,HLLC} = \begin{cases} \mathbf{u}_j^P, & \text{если} \quad a_j^- > 0, \\ \dfrac{a_j^-\mathbf{u}_j^P - \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^P) + p_j^*\mathbf{d}_j^*}{a_j^- - a_j^*}, & \text{если} \quad a_j^- <= 0 < a_j^*, \\ \dfrac{a_j^+\mathbf{u}_j^N - \mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^N) + p_j^*\mathbf{d}_j^*}{a_j^+ - a_j^*}, & \text{если} \quad a_j^* <= 0 < a_j^+, \\ \mathbf{u}_j^N, & \text{если} \quad a_j^+ <= 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$a_j^* = \frac{p^N - p^P + \varrho^P v_n^P(a_j^- - v_n^P) - \varrho^N v_n^N(a_j^+ - v_n^N)}{\varrho^P(a_j^- - v_n^P) - \varrho^N(a_j^+ - v_n^N)},$$

$$p_j^* = \frac{1}{2}(p^N + p^P + \varrho^P(a_j^- - v_n^P)(a_j^* - v_n^P) + \varrho^N(a_j^+ - v_n^N)(a_j^* - v_n^N)),$$

$$\mathbf{d}_j^* = (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, n_x, n_y, n_z, a_j^*)',$$

где a_j^+ и a_j^- определяются так же, как в решателе HLL. Подстановкой проверяется эквивалентность решателя HLLC, получаемого при использовании перехода в локальный базис грани, и (10).

Хотя использование записи решателя Римана для произвольной ориентации грани не дает заметного ускорения счета, однако упрощает алгоритм, поскольку не требуются отдельные этапы перехода в локальный базис и обратно, и сокращает количество арифметических операций с машинной точностью.

3.2. Реконструкция решения

В Фокус реконструкция решения на гранях ячеек проводится в примитивных переменных

$$\mathbf{q} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}, \rho_1\alpha_1, \ldots, \rho_N\alpha_N, v_x, v_y, v_z, p)'.$$

Используются методы кусочно-линейной TVD реконструкции двух основных типов: квазиодномерная и многомерная [21]. В данной работе рассматривается многомерная реконструкция:

$$u_j^P = u_P + \psi_P \nabla(u)_P \cdot (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_P), \quad u_j^N = u_N + \psi_N \nabla(u)_N \cdot (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_N),$$

$$\psi_i = \min_j(\psi_{ij}), \quad \psi_{ij} = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\delta u_i^{\max}}{u_j^i - u_i}\right), & \text{если} \quad u_j^i > u_i, \\ \Phi\left(\dfrac{\delta u_i^{\min}}{u_j^i - u_i}\right), & \text{если} \quad u_j^i < u_i, \\ 1, \quad \text{если} \quad u_j^i = u_i, & \end{cases}$$

$$\delta u_i^{\max} = \max_k(u_k - u_i), \quad \delta u_i^{\min} = \min_k(u_k - u_i),$$
$$u_k - \text{значения в соседних ячейках},$$

где $\mathbf{C}_P$, $\mathbf{C}_N$ и $\mathbf{C}_j$ – радиус-векторы центров ячейки P, ячейки N и грани j соответственно. В качестве функции-ограничителя используется $\Phi(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2}$ [22]. Для аппроксимации градиента в центре ячейки применяется метод, основанный на теореме Остроградского–Гаусса:

$$\nabla(u)_i \approx \frac{\sum_j \mathbf{n}_j S_j u_j}{|V_i|},$$

где значения в центрах граней аппроксимируется как $u_j \approx w_j u_P + (1 - w_j)u_N$, $w_j = \dfrac{\mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_j)}{\mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_P)}$.

Для реконструкции вектора скорости в Фокус применяется специальный алгоритм, поскольку известно, что простая покомпонентная реконструкция вектора скорости может приводить к несогласованному с течением результирующему вектору [23]–[27]. Например, в случае осесимметричных или сферически симметричных течений покомпонентно реконструированный вектор скорости может уже не удовлетворять типу течения и, как следствие, численное решение теряет симметрию. При реконструкции вектора скорости важно обеспечить инвариантность к ориентации координатных осей. Реализованный в Фокус метод является обобщением на трехмерный случай подхода [25], заключающегося в покомпонентной реконструкции вектора, но в локальном базисе для каждой ячейки, определяемом направлением течения среды.

Для реконструкции вектора скорости в i-й ячейке используется локальная декартовая система координат, базисные векторы которой определяются согласно

$$\xi_1 = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)', \quad \xi_2 = (-\xi_y, \xi_x, 0)', \quad \xi_3 = \xi_1 \times \xi_2,$$
$$\xi_x = v_x/|v_x|, \quad \xi_y = v_y/|v_y|, \quad \xi_z = v_z/|v_z|.$$

Таким образом, ξ_1 сонаправлен с вектором скорости в i-й ячейке и $\xi_1 \perp \xi_2 \perp \xi_3$. Тензоры прямого, от глобальной системы к локальной, и обратного преобразований имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \\ -\xi_x\xi_z & -\xi_y\xi_z & \xi_x^2+\xi_y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_x & -\xi_y/|A| & -\xi_x\xi_z/|A| \\ \xi_y & \xi_x/|A| & -\xi_y\xi_z/|A| \\ \xi_z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор скорости в локальном базисе выражается согласно

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Тогда многомерная реконструкция вектора скорости определяется следующим образом:

$$\psi_i = \min_j(\psi_{ij}), \quad \psi_{ij} = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\delta\mathbf{w}_i^{\max}}{\mathbf{w}_j^i - \mathbf{w}_i}\right), & \text{если} \quad \mathbf{w}_j^i > \mathbf{w}_i, \\ \Phi\left(\dfrac{\delta\mathbf{w}_i^{\min}}{\mathbf{w}_j^i - \mathbf{w}_i}\right), & \text{если} \quad \mathbf{w}_j^i < \mathbf{w}_i, \\ 1, \quad \text{если} \quad \mathbf{w}_j^i = \mathbf{w}_i, \end{cases}$$

$$\delta\mathbf{w}_i^{\max} = \max_k(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_i), \quad \delta\mathbf{w}_i^{\min} = \min_k(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_i), \quad \mathbf{w}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_k,$$

$$\mathbf{w}_j^i = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v}_i + (\nabla\mathbf{v})_i \cdot (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i)),$$

$$\Psi_i = \mathbf{A}^{-1}\psi_i\mathbf{A}, \quad \mathbf{v}_j^i = \mathbf{v}_i + (\Psi_i \cdot (\nabla\mathbf{v})_i) \cdot (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i),$$

где операции деления, применения функции ограничителя Φ, определения максимума, минимума и сравнения для векторов производятся покомпонентно. Таким образом, в результате для каждой ячейки формируется тензор ограничителей для градиента вектора скорости.

3.3. Временная дискретизация

В рассматриваемой схеме для временной дискретизации используется явный метод Рунге—Кутты второго порядка (модифицированный метод Эйлера):

$$\mathbf{u}_i^{l+1} = \mathbf{u}_i^l - \frac{\Delta t^l}{|V_i|}\sum_j S_j\mathbf{F}_j^{n,l+1/2} + \Delta t_l\mathbf{b}_i^{l+1/2}, \tag{11}$$

где l — номер временного слоя. Задача Римана решается для реконструированных состояний на временном слое $l+1/2$: $\mathbf{q}_j^{P,l+1/2}$ и $\mathbf{q}_j^{N,l+1/2}$. Эти состояния вычисляются с использованием подхода Hancock [6]:

$$\mathbf{q}_j^{P,l+1/2} = \mathbf{q}_j^{P,l} + \mathbf{q}_P^{l+1/2} - \mathbf{q}_P^l, \quad \mathbf{q}_j^{N,l+1/2} = \mathbf{q}_j^{N,l} + \mathbf{q}_N^{l+1/2} - \mathbf{q}_N^l,$$

где $\mathbf{q}_P^{l+1/2}$ и $\mathbf{q}_N^{l+1/2}$ определяются путем интегрирования системы на временном интервале $[t^l, t^{l+1/2}]$ без привлечения решения задачи Римана:

$$\mathbf{u}_i^{l+1/2} = \mathbf{u}_i^l - \frac{\Delta t^l}{2|V_i|}\sum_j S_j\mathbf{f}^n(\mathbf{u}_j^{i,l}) + \frac{\Delta t^l}{2}\mathbf{b}_i^l, \quad \mathbf{u}_i^{l+1/2} \to \mathbf{q}_i^{l+1/2}, \tag{12}$$

где $\mathbf{u}_j^{i,l}$ — реконструкция решения на временном слое l на грани j со стороны ячейки i. Дивергенция скорости в правой части (11) и (12) аппроксимируется с использованием формулы Остроградского—Гаусса:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i \approx \frac{\sum_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)S_j}{|V_i|},$$

где в качестве $\mathbf{v}_j$ в (12) используется реконструированная скорость $\mathbf{v}_j^{i,l}$, а в (11) — скорость на грани из решения задачи Римана: (9) или (10).

Шаг по времени Δt^l определяется из условия Куранта:

$$\Delta t^l \max_i \left(\frac{\sum_j (S_j \max(|a_j^{+,l-1/2}|, |a_j^{-,l-1/2}|)}{2|V_i|} \right) \leq \mathbb{C},$$

где $a_j^{+,l-1/2}$, $a_j^{-,l-1/2}$ вычисляются согласно (7) на временном слое $l - 1/2$, $\mathbb{C} < 1$ – число Куранта.

После расчета временного шага по схеме (11) давление p^{l+1} и внутренние энергии компонент e_k^{l+1} в каждой ячейке определяются путем итерационного решения алгебраической системы $N + 1$ уравнений:

$$e^{l+1}\varrho^{l+1} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{l+1}\varrho_k^{l+1}e_k^{l+1}, \quad p^{l+1} = p_k(\varrho_k^{l+1}, e_k^{l+1}), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Распараллеливание численной схемы сделано на распределенной памяти с помощью библиотеки MPI в рамках подхода геометрической декомпозиции.

3.4. Граничные условия

В программе Фокус граница каждого фрагмента сетки, рассчитываемого отдельным MPI-процессом, разделена на части, соответствующие либо физической границе, либо межпроцессной.

На каждой части физической границы значения на гранях задаются, исходя из граничного условия задачи. В случае условия Дирихле, т.е. задания непосредственно значения величины на границе, это значение используется в качестве обоих реконструированных значений на грани. В случае условия фон Неймана, т.е. задания градиента величины на границе ∇u^Γ, оно сводится к условию Дирихле:

$$u_j^\Gamma = u_P + \nabla u^\Gamma \cdot (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_P),$$

где u_P – значение величины в центре приграничной ячейки, $\mathbf{C}_P$ и $\mathbf{C}_j$ – координатные векторы центров ячейки и грани соответственно.

На межпроцессных частях границы осуществляется MPI-обмен значениями реконструируемых величин и их градиентов в одном слое приграничных ячеек.

4. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Для демонстрации работы описанной численной схемы и ее элементов рассматриваются четыре тестовых задачи. Первая – плоская задача Римана о распаде начального разрыва с двумя компонентами, имеющими разные УРС, на трехмерной неструктурированной сетке. Вторая – сферическая задача Сода [6] на сферической сетке. Третья – моделирование турбулентной стадии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова в постановке тета-группы [28]. Четвертая – расчет эксперимента на развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в волне разрежения.

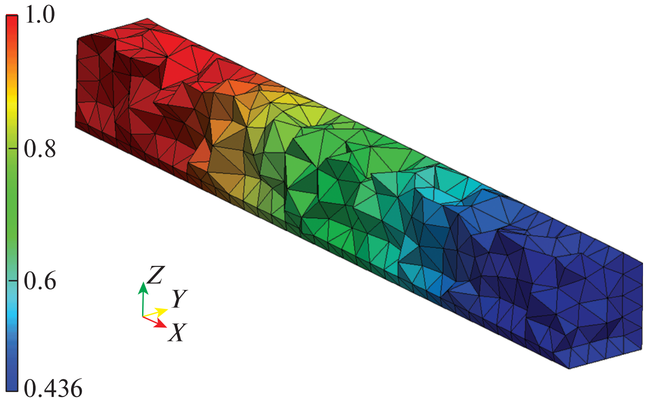
4.1. Плоская задача Римана на трехмерной неструктурированной сетке

Расчетная область: $x \in (0,1)$, $y \in (0, 0.1)$, $z \in (0, 0.1)$, $t \in (0, 0.2]$.

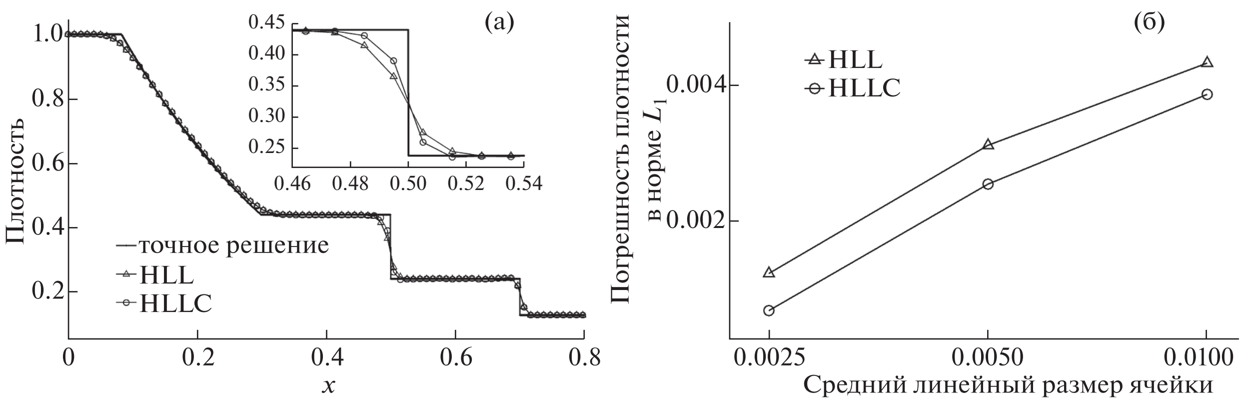
Начальные условия:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\varrho_1, \alpha_2\varrho_2, (v_x, v_y, v_z), p) = \begin{cases} (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ (-0.9014,\ 0,\ 0),\ 1) & x \in (0,\ 0.5), \\ (0,\ 1,\ 0,\ 0.125,\ (-0.9014,\ 0,\ 0),\ 0.1), & x \in [0.5,\ 1). \end{cases}$$

Начальная скорость подобрана так, что после распада разрыва контактная граница газов становится неподвижной. Граничные условия: при $x = 0$, $x = 1$ – свободный выход (нулевой градиент всех величин), остальные границы – жесткие стенки со скольжением (нулевые градиенты всех величин кроме нормальной компоненты скорости, для которой нулевое само значение). УРС: идеальные газы с $\gamma = 1.4$, $c_v = 0.83$ для первой компоненты, $\gamma = 5/3$, $c_v = 0.36$ для второй. Расчетные сетки: трехмерные неструктурированные из тетраэдров и пирамид (см. фиг. 1) со средним



Фиг. 1. Плоская задача Римана. Фрагмент сетки $x \in (0, 0.35)$, $y \in (0.05, 0.1)$, $z \in (0, 0.05)$ с распределением плотности на конечный момент времени.



Фиг. 2. Плоская задача Римана. Распределение плотности вдоль оси x на серединном срезе на конечный момент времени (а) и зависимость погрешности плотности при измельчении сетки (б).

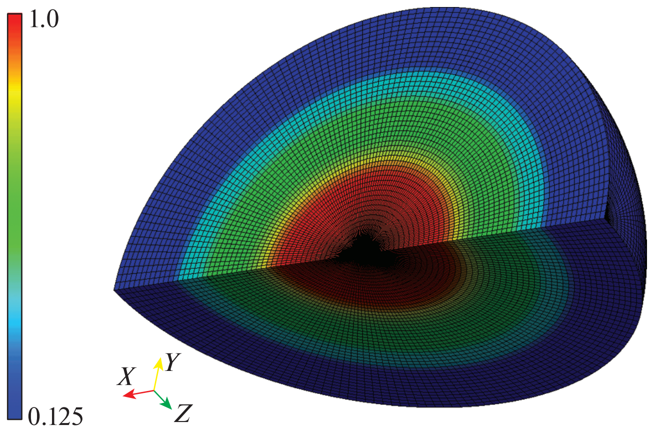
линейным размером ячеек 0.04, 0.02, 0.01. Для удобства задания начального условия сетки построены так, чтобы исходно контактная граница проходила по граням ячеек. Число Куранта $\mathbb{C} = 0.8$.

На фиг. 1 приведен фрагмент сетки с распределением плотности в волне разрежения на конечный момент. Сравнение с аналитическим решением проводится вдоль серединного среза, параллельного оси x, с равномерным распределением точек на срезе. Значения в точках на срезе получаются линейной интерполяцией из значений в центрах ячеек. Как следует из фиг. 2, численное решение согласуется с аналитическим, при этом расчет с решателем Римана HLLC дает несколько меньшую численную диффузию на неподвижном контактном разрыве. При измельчении сетки погрешность численного решения в норме L_1 убывает.

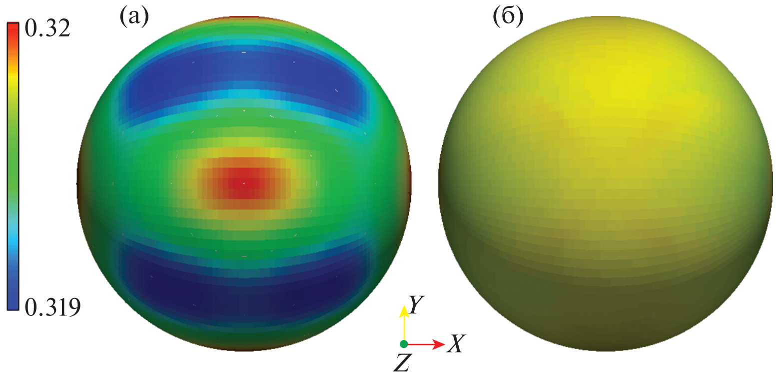
4.2. Сферическая задача Сода на сферической сетке

Цель данного однокомпонентного теста — определить влияние описанного выше специального алгоритма реконструкции вектора скорости на сохранение сферической симметрии. Для сравнения расчет задачи проводится также с простой покомпонентной реконструкцией скорости.

Расчетная область: $r = x^2 + y^2 + z^2 < 1$, $t \in (0, 0.15]$.



Фиг. 3. Сферическая задача Сода. Распределение плотности на конечный момент времени на четвертой части шара с сохранением топологии сетки.



Фиг. 4. Сферическая задача Сода. Распределение плотности на сфере радиуса 0.51 на конечный момент времени. (а) – покомпонентная реконструкция, (б) – в локальном базисе.

Начальные условия:

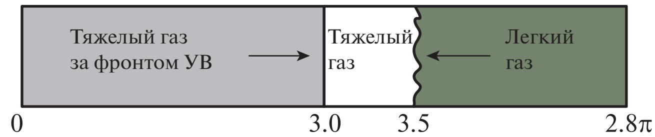
$$(\varrho,(v_x,v_y,v_z),p)=\begin{cases}(1,(0,0,0),1), & r\in(0,0.5),\\(0.125,(0,0,0),0.1), & r\in[0.5,1).\end{cases}$$

Граничные условия: при $r=1$ – свободный выход, УРС: идеальный газ с $\gamma=1.4$, $c_v=0.83$. Расчетная сетка: сферическая из 100 листов со 100 ячейками по углу и 50 по радиусу в каждом листе (см. фиг. 3). Число Куранта $\mathbb{C}=0.8$. Особенности схемы: используется решатель Римана HLL.

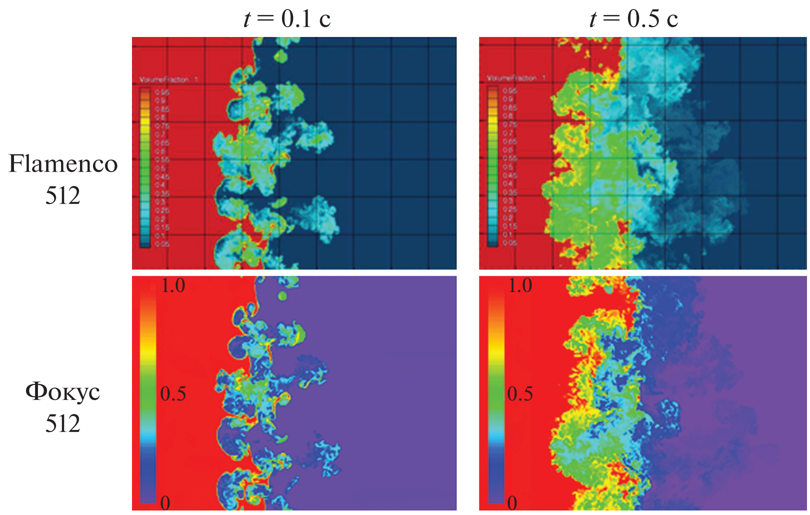
На фиг. 3 приведено распределение плотности на конечный момент времени. Для проверки симметричности решения построено рапределение плотности на сфере радиуса $r=0.51$. Как следует из фиг. 4, использование специального алгоритма реконструкции вектора скорости позволяет существенно лучше сохранять симметрию решения по сравнению с покомпонентной реконструкцией. При этом среднеквадратичное отклонение плотности на сфере радиуса $r=0.51$ составило 2.9×10^{-5} и 2.6×10^{-3} соответственно.

4.3. Турбулентная стадия неустойчивости Рихтмайера–Мешкова

Турбулентная стадия неустойчивости Рихтмайера–Мешкова (НРМ) является важным для физики высоких плотностей энергии примером сжимаемого неустойчивого течения. Недавно было проведено масштабное численное исследование НРМ по восьми программам, в том числе Flamenco и NUT3D, в рамках сотрудничества ряда научных центров мира, названного тета-груп-



Фиг. 5. HPM. Схематическое изображение начального условия.



Фиг. 6. HPM. Распределение объемной доли тяжелого газа в плоскости $z = 2\pi$ на моменты времени 0.1 и 0.5 с.

пой [28]. В результате работы тета-группы получено надежное эталонное решение для выбранной постановки задачи, которое позволяет верифицировать другие численные коды. Детали постановки задачи и описание анализируемых функционалов можно найти в [28].

Расчетная область: $x \in (0, 2.8\pi)$, $y \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, 2\pi)$, $t \in (0, 0.5]$.

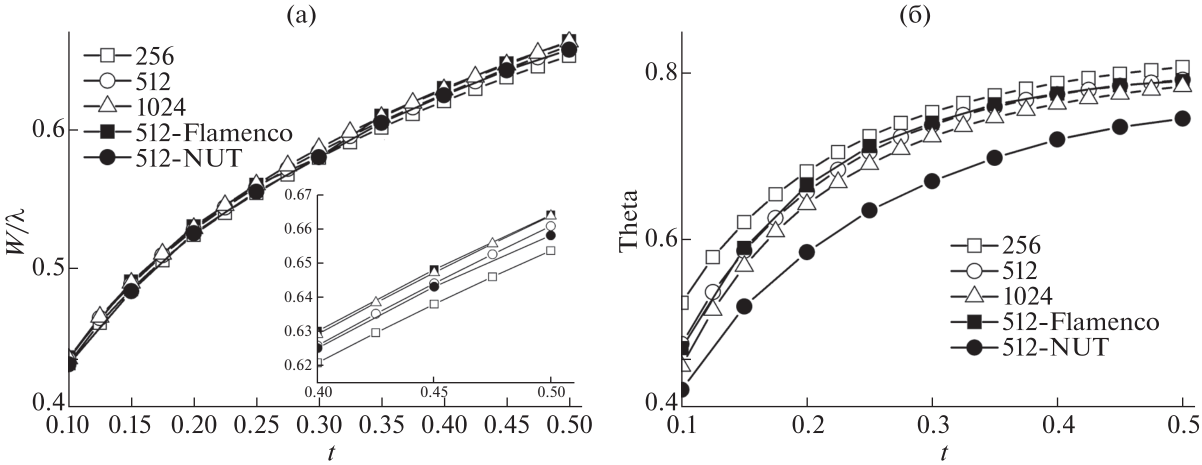
Начальные условия (см. фиг. 5):

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\varrho_1, \alpha_2\varrho_2, (v_x, v_y, v_z), p) =$$
$$= \begin{cases} (1,\ 0,\ 6.37497,\ 0,\ (-61.48754,\ 0,\ 0),\ 399995.9), & x \in (0,\ 3), \\ (1,\ 0,\ 3,\ 0,\ (-291.575,\ 0,\ 0),\ 10^5), & x \in [3, 3.5 + f(y, z)), \\ (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ (-291.575,\ 0,\ 0),\ 10^5), & x \in [3.5 + f(y, z), 2.8\pi), \end{cases}$$

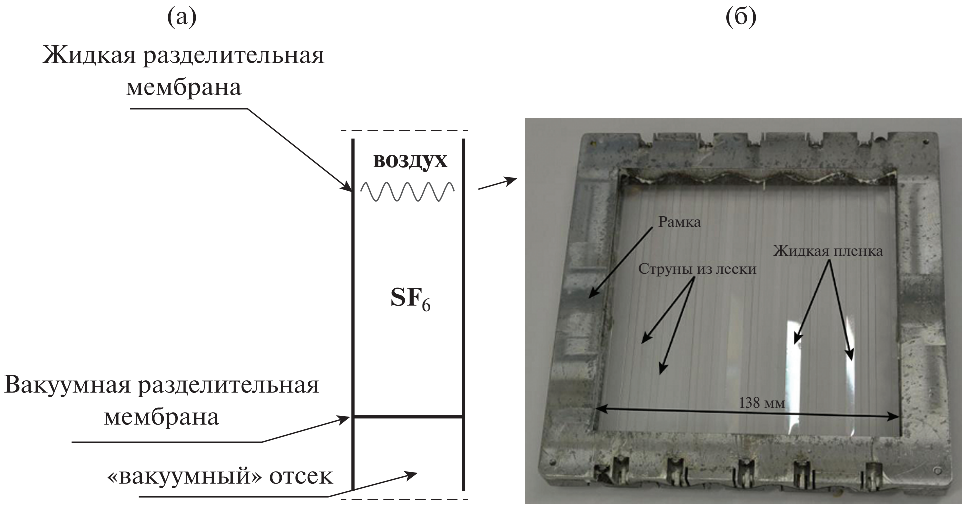
где $f(y, z)$ – начальное полигармоническое возмущение. Граничные условия: при $x = 0$, $x = 2.8\pi$ – свободный выход, остальные границы – периодические. УРС: идеальный газ с $\gamma = 5/3$, $c_v = 312.4$. Расчетные сетки: кубические с количеством ячеек в поперечном направлении 256, 512, 1024 с общим количеством ячеек ≈23.5 млн, 188 млн, 1.5 млрд соответственно. Число Куранта $\mathbb{C} = 0.8$. Особенности схемы: используется решатель Римана HLLC с дополнительной низкомаховой коррекцией из [14].

На фиг. 6 с распределением объемной доли тяжелого газа в плоскости $z = 2\pi$ на моменты времени 0.1 и 0.5 с видно качественное согласие с результатом по коду Flamenco. Как следует из фиг. 7, такие характеристики перемешивания, как интегральные ширина зоны перемешивания и коэффициент гомогенного смешивания, согласуются с полученным по кодам Flamenco и NUT3D. Наблюдается сеточная сходимость данных функционалов.

Для расчета на сетке 512 использовалось в 8 раз больше MPI-фрагментов, чем на сетке 256: в 2 раза больше по каждому направлению, т.е. на один MPI-фрагмент приходилось одинаковое количество ячеек. Счет на сетке 512 был в 1.13 раза дольше, чем на 256. Таким образом, эффективность слабого масштабирования здесь составила 88%.



Фиг. 7. НРМ. Зависимость безразмерной интегральной ширины зоны перемешивания (а) и интегрального коэффициента гомогенного смешивания (б) от времени.



Фиг. 8. НРТ в волне разрежения. (а) – схема эксперимента, (б) – фотоизображение рамки с жидкой разделительной мембраной.

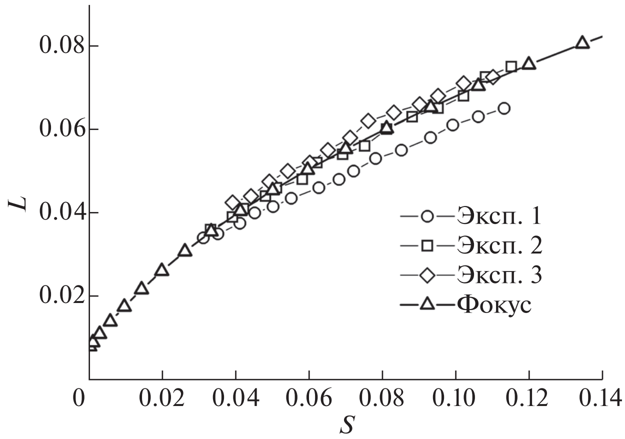
4.4. Неустойчивость Рэлея–Тейлора в волне разрежения

Неустойчивость Рэлея–Тейлора (НРТ) – столь же важный для приложений вид гидродинамической неустойчивости, как и НРМ. Результаты проводимых экспериментов с НРТ служат для проверки и настройки численных кодов. В качестве последнего теста рассматривается моделирование по коду Фокус эксперимента, проведенного в РФЯЦ–ВНИИТФ, на развитие НРТ в волне разрежения [29]. На фиг. 8 показана схема эксперимента на ударной трубе. После устранения мембраны между отсеками с “вакуумом” и газом SF6 формируется волна разрежения (ВР), двигающаяся вверх к границе отсеков с SF6 и воздухом. Газы разделены жидкой мембраной, которая натянута на лески и имеет квазиодномерную гармоническую форму. Когда ВР достигает границы, жидкая мембрана разрушается и контактная граница газов начинает ускоряться вниз, что приводит к развитию НРТ. В постановке задачи используется система единиц СИ.

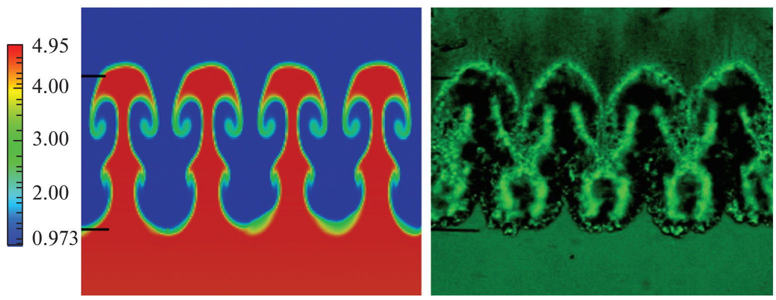
Расчетная область: $x \in (0, 0.138)$, $y \in (0, 0.138)$, $z \in (-0.9, 0.05)$, $t \in (0, 0.01]$.

Начальные условия:

$$(\alpha_{air}, \alpha_{SF6}, \alpha_{air}\varrho_{air}, \alpha_{SF6}\varrho_{SF6}, (v_x, v_y, v_z), T) =$$
$$= \begin{cases} (1, 0, 0.02, 0, (0,0,0), 298), & z \in (-0.9, -0.835), \\ (0, 1, 0, 6.04, (0,0,0), 298), & z \in [-0.835, f(x,y)), \\ (1, 0, 1.184, 0, (0,0,0), 298), & z \in [f(x,y), 0.05), \end{cases}$$



Фиг. 9. НРТ в волне разрежения. Зависимость ширины зоны перемешивания от пройденного пути.



Фиг. 10. НРТ в волне разрежения. Сравнение распределения плотности в расчете в сечении $y = 0.069$ с экспериментальным шлирен-изображением. Черные полосы слева – реперы с координатами $z = -0.0525$ и $z = -0.1025$.

где $f(x,y) = \mathrm{A}_1\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A_3\cos\left(\frac{6\pi}{\lambda}x\right) + f'(x,y)$, $A_1 = 0.0037$, $A_3 = 0.00012$, $\lambda = 0.0276$, $f'(x,y)$ – случайная добавка с амплитудой 0.0004 для моделирования отклонения от гармонической формы контактной границы в эксперименте. Граничные условия: при $z = -0.9$, $z = 0.05$ – свободный выход, остальные границы – жесткие стенки. УРС: идеальные газы с $\gamma = 1.4$ и $c_v = 717$ для воздуха, $\gamma = 1.0926$ и $c_v = 607$ для SF6. Расчетная сетка:

$$\Delta z = 0.0005, \quad \Delta x, \Delta y = \begin{cases} 0.002, & z \in (-0.9, -0.18), \\ 0.001, & z \in (-0.18, -0.17), \\ 0.005, & z \in (-0.17, 0.05). \end{cases}$$

Кубическая сетка размером 0.0005 сделана в области развития НРТ, в остальной части системы применен переход на более грубую (в 4 раза) сетку по x, y для экономии ресурсов. Общее количество ячеек в сетке – 41.944 млн. Число Куранта $\mathbb{C} = 0.8$. Особенности схемы: используется решатель Римана HLLC.

Из фиг. 9 видно воспроизведение в расчете экспериментальной зависимости ширины зоны перемешивания газов от пройденного зоной пути. Ширина зоны в расчете вычислялась как $L = h_s - h_b$, где h_s и h_b – границы зоны, определенные по 0.03 и 0.97 объемной доле SF6, усредненной в плоскости (x, y). Пройденный путь вычислен как $S = (h_s + h_b)/2$. Основные структуры зоны в расчете качественно согласуются с экспериментом, см. фиг. 10.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описана базовая эйлерова схема в программе Фокус для расчета многокомпонентных газодинамических течений на трехмерной неструктурированной сетке. Детально рассмотрены две особенности схемы: 1) формулировка решателей Римана HLL и HLLC без перехода в локальную систему координат каждой грани, 2) специальная TVD-реконструкция вектора скорости, учитывающая направление течения. Распараллеливание выполнено на распределенной памяти с помощью библиотеки MPI.

Работоспособность схемы показана на примере решения двукомпонентной задачи о распаде разрыва на трехмерной неструктурированной сетке. Эффективность специального алгоритма реконструкции вектора скорости продемонстрирована на задаче со сферически симметричным течением на сферической сетке. Проведено верификационное моделирование турбулентной стадии неустойчивости Рихтмайера—Мешкова в постановке тета-группы, на данной задаче проверена масштабируемость кода. Рассчитан эксперимент о развитии неустойчивости Рэлея—Тейлора в волне разрежения на сетке со статичной адаптацией в интересующей области течения.

Следует отметить, что приведенная схема обладает заметным недостатком – численной диффузией на контактных границах, свойственной эйлеровым схемам сквозного счета. Это может существенно снижать точность численного решения в задачах физики высоких плотностей энергии, влияя на качество моделирования дополнительных физических процессов, в том числе переноса излучения. Решение данной проблемы в программе Фокус будет рассмотрено в дальнейшем.

Авторы выражают благодарность сотрудникам РФЯЦ—ВНИИТФ М.И. Авраменко, М.Н. Чижкову за конструктивные обсуждения, Н.В. Глазыриной, С.Н. Щербаковой за помощь в проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anuchina N., Volkov V., Gordeychuk V., Es'kov N., Ilyutina O., Kozyrev O.* 3D Numerical simulation of Rayleigh-Taylor instability using MAX-3 code // Laser and Particle Beams. 2000. V. 18 (2). P. 175–181.
2. *Гуськов С.Ю., Демченко Н.Н., Змитренко Н.В., Кучугов П.А., Яхин Р.А.* Сжатие и горение термоядерной мишени при зажигании фокусирующейся ударной волной в условиях нарушения симметрии облучения лазерными пучками // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. Вып. 5. С. 889–900.
3. *Weber C.R., Clark D.S., Cook A.W., Busby L.E., Robey H.F.* Inhibition of turbulence in inertial-confinement-fusion hot spots by viscous dissipation // Phys. Ref. E. 2014. V. 89. 053106.
4. *Clark D.S., Hinkel D.E., Eder D.C., Jones O.S., Haan S.W., Hammel B.A., Marinak M.M., Milovich J.L., Robey H.F., Suter L.J., and Town R.P.J.* Detailed implosion modeling of deuterium-tritium layered experiments on the National Ignition Facility // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. 056318.
5. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
6. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 624 p.
7. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
8. *Rudman M.* Volume-tracking methods for interfacial flow calculations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1997. V. 24. P. 671–691.
9. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
10. *Лебо И.Г., Тишкин В.Ф.* Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. М.: Физматлит, 2006. 304 с.
11. *Янилкин Ю.В., Колобянин В.Ю., Чистякова И.Н., Егужова М.Ю.* Применение метода PPM в расчетах по методикам ЭГАК и ТРЭК // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2005. Вып. 4. С. 69–79.
12. *Marinak M.M., Kerbel G.D., Gentlie N.A., Jones O., Munro D., Polline S., Dittrich T.R., Haan S.W.* Three-dimensional HYDRA simulations of National Ignition Facility targets // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. № 5. P. 2275.
13. *Cook A.W.* Artificial fluid properties for large eddy simulation of compressible turbulent mixing // Phys. of Fluids 2007. V. 19. 055103.
14. *Thornber B., Mosedale A., Drikakis D., Youngs D., Williams R.J.R.* An improved reconstruction method for compressible flows with low Mach number features // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. Issue 10. P. 4873–4894.
15. *Berger M.J., Colella P.* Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics // J. Comput. Phys. 1989. V. 82. P. 64–84.
16. *Pember R.B., Bell J.B., Colella P., Crutchfield W.Y., Welcome M.L.* An adaptive Cartesian grid method for unsteady compressible flow in irregular regions // J. Comput. Phys. 1995. V. 120. Issue 2. P. 278–304.
17. *Allaire G., Clerc S., Kokh S.* A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids // J. Comp. Phys. 2002. V. 181. Issue 2. P. 577–616.

18. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review 1983. V. 25. № 1. P. 35–61.
19. *Billett S.J., Toro E.F.* On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation // J. Comput. Phys. 1997. V. 130. Issue 1. P. 1–24.
20. *Toro E.F., Spruce M., Speares W.* Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves. 1997. V. 4. P. 25–34.
21. *Berger M., Aftosmis M.J., Murman S.M.* Analysis of slope limiters on irregular grids // Paper presented at 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, United States. 2005. P. 2361–2382.
22. *Venkatakrishnan V.* On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions // AIAA Paper. 1993. Technical Rep AIAA-93-0880.
23. *Матяш С.В.* Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации // Уч. зап. ЦАГИ. 2005. Т. 36. № 3–4. С. 42–51.
24. *Luttwak G., Falcovitz J.* Slope limiting for vectors: A novel vector limiting algorithm // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2011. V. 65. P. 1365–1375.
25. *Maire P.-H., Loubere R., Vachal P.* Staggered lagrangian discretization based on cell-centered Riemann solver and associated hydrodynamics scheme // Commun. Comput. Phys. 2011. V. 10. № 4. P. 940–978.
26. *Velechovsky J., Kucharik M., Liska R., Shashkov M.* Symmetry-preserving momentum remap for ALE hydrodynamics // J. Physics: Conference Series. 2013. V. 454. 012003.
27. *Blueshields C.J., Weller H.G., Gasparini L., Reese J.M.* Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows // Int. J. Numer. Meth. in Fluids. 2009. V. 63. № 1. P. 1–21.
28. *Thornber B., Griffond J., Poujade O., Attal N., Varshochi H., Bigdelou P., Ramaprabhu P., Olson B., Greenough J., Zhou Y., Schilling O., Garside K.A., Williams R.J.R., Batha C.A., Kuchugov P.A., Ladonkina M.E., Tishkin V.F., Zmitrenko N.V., Rozanov V.B., Youngs D.L.* Late-time growth rate, mixing and anisotropy in the multimode narrowband Richtmyer-Meshkov Instability: the Theta-Group Collaboron // Phys. of Fluids. 2017. V. 29. 105107.
29. *Tiaktev A.A., Pavlenko A.V., Piskunov Yu.A., Bugaenko I.L., Mokrushin S.S.* Development of periodic pertubations at the gases interface under Rayleigh-Taylor instability // 16th Internat. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing, Marseilles, France, 2018. www.iwpctm.org

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 1034–1056

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ В РОССИИ[1)]

© 2021 г. М. В. Тарасенко[1,*], Н. В. Трусов[2,**], А. А. Шананин[2,3,4,***]

[1] 119234 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, Высшая школа бизнеса МГУ, Россия

[2] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, ВМК МГУ, Россия

[3] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[4] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: tarasenko.m12@gmail.com

**e-mail: trunick.10.96@gmail.com

***e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
Переработанный вариант 18.08.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Исследована задача оптимального управления, моделирующая экономическое поведение репрезентативного домашнего хозяйства. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина–Кларка и построен синтез оптимального управления. Модель идентифицирована по данным российской статистики. С ее помощью проанализирована проблема потребительского кредитования в России и влияния на экономическое положение домашних хозяйств в условиях пандемии COVID-19. Библ. 11. Фиг. 19. Табл. 2.

Ключевые слова: модель Рамсея, потребительский кредит, синтез оптимального управления, принцип максимума, математическое моделирование, регрессионный анализ.

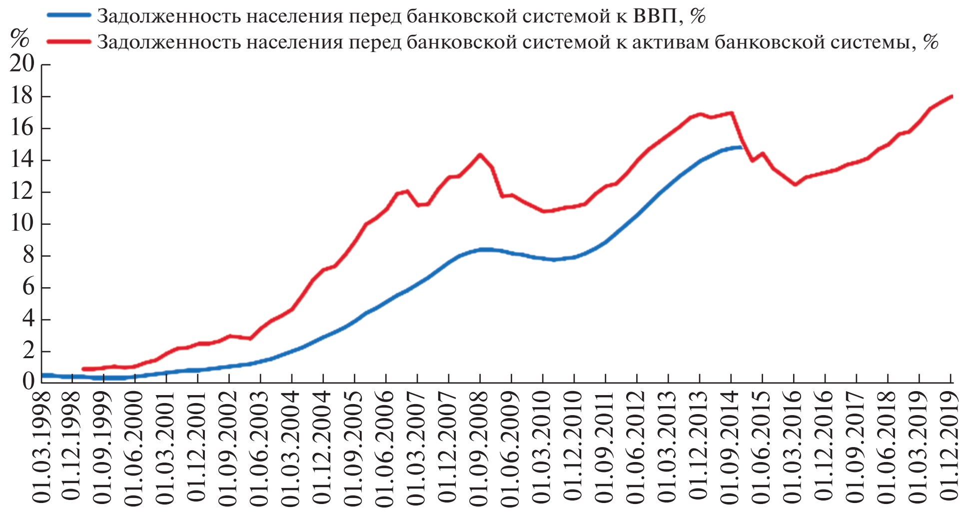
DOI: 10.31857/S0044466921060132

1. ВВЕДЕНИЕ

Потребительский кредит стал важным элементом экономических отношений в России XXI века. На фиг. 1 показана динамика отношения задолженности по потребительскому кредиту к ВВП.

В условиях низких реальных доходов основной части населения потребительский кредит стимулировал экономическую активность населения, поддерживал платежеспособный спрос домашних хозяйств и оказывал положительное влияние на темпы роста ВВП. В 2019 г. в активах консолидированного баланса коммерческих банков доля потребительского кредита, который является одним из самых доходных активов, достигла 18%. Около половины кредитной задолженности физических лиц составляет беззалоговый потребительский кредит. За период 2017–2019 гг. количество должников выросло с 34 до 40 млн человек и произошло увеличение отношения процентных требований банковской системы к совокупным доходам населения с 3 до 6%. Рост совокупной долговой нагрузки неравномерно распределен среди различных слоев населения. Имеющиеся исследования (см. [1], [2]) показывают, что различные показатели долговой нагрузки в среднем имеют наибольшие значения в первых 2-х, а также в 5-м и 6-м децилях распределения населения по доходам. Среди заемщиков из первых двух децилей преимущественно возникают просрочки по обслуживанию кредита, а в 5-м и 6-м децилях установилось высокое соотношение платежей по кредитам к доходу заемщиков. Также различна структура задолженности в различных регионах страны. В [3] был проведен пространственный анализ российских регионов через призму их кредитно-сберегательного поведения. В работе было отмечено, что склонность к заемному финансированию потребления характерна либо для регионов с высоким уровнем бедности, либо для регионов, чьи жители привыкли к высоким стандартам потребления в течение 2000-х годов. Среди регионов России второго типа отдельно выделяются Москва и

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-07-00285).



Фиг. 1. Задолженности населения.

Санкт-Петербург как регионы, в которых значительная часть населения имеет возможность совершать сбережения, а также поддерживать стандарты потребления, не подвергая себя излишней закредитованности.

Уже осенью 2019 г. в правительстве РФ (см. [4]) обсуждалась проблема потребительского кредита как актива коммерческих банков, а также меры по реструктуризации задолженности по потребительскому кредиту как условия дефолта физических лиц. Снижение реальных доходов населения, вызванные пандемией COVID-19, обостряют эту проблему. В данной работе на языке математических моделей анализируются различные аспекты этой проблемы и влияние на них кредитно-денежной политики.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ДОМАШНЕГО ХОЗЯЙСТВА С ПОМОЩЬЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАМСЕЕВСКОГО ТИПА

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств основывается на работе Ф. Рамсея (см. [5]). Модели рамсеевского типа в форме задач оптимального управления исследовались, например, в [6], [7].

Будем считать, что экономические решения, принимаемые типичным домашним хозяйством, являются ограниченно рациональными, т.е. домашнее хозяйство определяет потребительские расходы, сбережения и заимствования по потребительскому кредиту так, чтобы максимизировать дисконтированное потребление с учетом бюджетных ограничений. При этом предполагается, что домашнее хозяйство не может спрогнозировать изменения экономической конъюнктуры и принимает решения, считая, что темп инфляции, процентные ставки по депозитам и потребительскому кредиту будут оставаться на неизменном уровне. Будем предполагать, что в планах домашнего хозяйства предполагается, что его доходы S, исключая проценты по депозитам, описываются уравнением

$$\frac{dS}{dt} = \gamma S,$$

$$S(t_0) = S_0,$$

где t – момент времени, γ – темп роста доходов (положительность γ не предполагается), а индекс потребительских цен $p(t)$ растет с j темпом, т.е. $p(t) = pe^{jt}$. Обозначим через $D(t)$ сбережения в форме депозитов под процентную ставку r_D, $L(t)$ – задолженность по потребительскому кредиту под процентную ставку r_L, $C(t)$ – потребление домашнего хозяйства, $p(t)$ – индекс потребительских цен, $M(t)$ – наличные деньги и счета до востребования. Запас денег $M_0(t)$, необходимый домашнему хозяйству для потребительских расходов $p(t)C(t)$, моделируется законом Фишера

$M_0(t) = \theta p(t)C(t)$, где $1/\theta > 0$ — скорость обращения денег. Изменение запаса денег описывается балансовым уравнением

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = S(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t).$$

Здесь $H_L(t)$ — заимствования по потребительскому кредиту, $H_D(t)$ — вложения в депозиты. Отметим, что отрицательность $H_L(t)$ означает платеж по кредитной задолженности, а отрицательность $H_D(t)$ — снятие денег с депозита. Изменение кредитной задолженности описывается уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t).$$

Изменение сбережений в форме депозитов описывается уравнением

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t).$$

Отсутствие арбитража на рынке сбережений и потребительского кредита предполагает, что $r_L > r_D > 0,\ L(t) \geq 0,\ D(t) \geq 0$. Финансовое состояние домашнего хозяйства задается величиной $X(t) = M_0(t) + D(t) - L(t)$. Рациональное использование финансовых возможностей предполагает, что

$$D(t) = \max\{0, X(t) - M_0(t)\} = \left(X(t) - M_0(t)\right)_+, \quad L(t) = \left(M_0(t) - X(t)\right)_+.$$

Откуда следует, что

$$\frac{dX}{dt} = Se^{\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{\theta}M_0 + r_D(X - M_0)_+ - r_L(M_0 - X)_+.$$

Таким образом, динамика финансового состояния и доходов домашнего хозяйства описывается управляемой динамической системой

$$\frac{dX}{dt} = Se^{\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{\theta}M_0 + r_D(X - M_0)_+ - r_L(M_0 - X)_+, \quad X(t_0) = x_0.$$

Здесь запас денег $M_0 \geq 0$ является управлением, определяющим в соответствии с законом Фишера потребительские расходы. Будем считать, что домашнее хозяйство стремится максимизировать дисконтированную функцию полезности с постоянным отвращением к риску:

$$\int_{t_0}^{T} \left(C(t)\right)^{\alpha} e^{-\delta_0(t-t_0)}dt \to \max.$$

Здесь $\delta_0 > 0$ — коэффициент дисконтирования, $0 < \alpha < 1$ — параметр, определяющий коэффициент отвращения к риску, $T - t_0$ — временной горизонт. Поскольку запас денег и потребительские расходы можно увеличивать за счет потребительского кредита, то необходимо задать ограничения на размер кредитной задолженности, определив условия ликвидности финансового состояния x_0. Предположим, что $r_L > r_D > \gamma$, $\delta_0 > \max(\alpha\gamma, \alpha r_D)$. Будем считать, что финансовое состояние x_0 является ликвидным к моменту времени T, если существует управление, обеспечивающее выполнение условия $x(T) \geq 0$, т.е. условием ликвидности является

$$S + (r_L - \gamma)\,x_0 > 0, \quad T - t_0 > \left\{\frac{1}{r_L}\ln\left[\frac{S}{S + (r_L - \gamma)\,x_0}\right]\right\}_+.$$

Таким образом, будем моделировать экономическое поведение домашнего хозяйства задачей оптимального управления

$$\int_{t_0}^{T} \left(\frac{M_0(t)}{\theta p(t)}\right)^{\alpha} e^{-\delta_0(t-t_0)}dt \to \max_{M(t) \geq 0},$$

$$\frac{dX}{dt} = Se^{\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{\theta}M_0 + r_D(X - M_0)_+ - r_L(M_0 - X)_+,$$

$$X(t_0) = x_0, \quad X(T) \geq 0, \quad M_0(t) \geq 0.$$

Обозначим через $x(t) = X(t)e^{\gamma(t-t_0)}$, $M(t) = M_0(t)e^{\gamma(t-t_0)}$, $\delta = \delta_0 - \alpha j$. Без ограничения общности положим $t_0 = 0$.

Теорема 1. *Пусть*

$$S + (r_L - \gamma)x_0 > 0, \quad T > \left\{\frac{1}{r_L}\ln\left[\frac{S}{S + (r_L - \gamma)\,x_0}\right]\right\}_+.$$

Тогда задача оптимального управления

$$\int_0^T M^\alpha e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt \to \max, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M + r_D(x - M)_+ - r_L(M - x)_+, \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) \geq 0, \tag{3}$$

$$M(t) \geq 0, \tag{4}$$

имеет решение.

Доказательство. При выполнении условий

$$S + (r_L - \gamma)x_0 > 0, \quad T > \left[\frac{1}{r_L}\ln\left(\frac{S}{S + (r_L - \gamma)\,x_0}\right)\right]_+$$

управление $M(t) \equiv 0$ порождает в силу решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x + r_D(x)_+, \quad x(0) = x_0,$$

траекторию $x(t)$, удовлетворяющую всем ограничениям задачи оптимального управления. Если $x_0 \geq 0$, то из ограничений (2), (4) задачи оптимального управления следует, что

$$\frac{dx}{dt} \leq S + (r_D - \gamma), \quad x(0) = x_0.$$

По неравенству Гронуолла имеем оценку

$$x(t) \leq -\frac{S}{r_D - \gamma} + \left(x_0 + \frac{S}{r_D - \gamma}\right)e^{(r_D-\gamma)t} \leq \left((x_0)_+ + \frac{S}{r_D - \gamma}\right)e^{(r_D-\gamma)T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Случай, когда $x_0 < 0$, рассматривается аналогично и приводит к той же оценке:

$$x(t) \leq \left((x_0)_+ + \frac{S}{r_D - \gamma}\right)e^{(r_D-\gamma)T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Откуда получаем неравенство

$$x(T) - x_0 \leq ST + \left[(r_D - \gamma)T(x_0)_+ + ST\right]e^{(r_D-\gamma)T} - \frac{1}{\theta}\int_0^T M(t)dt.$$

Поскольку $x(T) \geq 0$, то

$$\frac{1}{\theta}\int_0^T M(t)dt \leq (x_0)_+ + ST + \left[(r_D - \gamma)T(x_0)_+ + ST\right]e^{(r_D-\gamma)T}.$$

Таким образом, допустимые ограничениями задачи управления равномерно ограничены в норме пространства L_1, кроме того, поскольку $0 \leq M^\alpha \leq \max\{1, M\}$ при $0 < \alpha < 1$, функционал задачи оптимального управления ограничен на множестве траекторий, удовлетворяющих ее ограничениям, и его точную верхнюю грань обозначим через A. Поэтому существует максимизирующая последовательность $\{M_i(t) | i = 1, 2, \ldots\}$ допустимых управлений:

$$\lim_{i\to+\infty}\int_0^T (M_i(t))^\alpha e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt = A.$$

По теореме Комлоша (см. [8]) из ограниченной в норме пространства L_1 последовательности функций $\{M_i(t) | i = 1, 2, \ldots\}$ можно выделить подпоследовательность $\{M_{i_n}(t) | n = 1, 2, \ldots\}$, средние по Чезаро которой сходятся почти всюду на отрезке $[0, T]$ к функции $M_{\mathrm{opt}}(t)$, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) = M_{\mathrm{opt}}(t) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T].$$

Поскольку функция M^{α} при $0 < \alpha < 1$ вогнута по M на $[0, +\infty)$, имеем

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)^{\alpha} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M_{i_k}(t)\right)^{\alpha}$$

и, значит, справедливо неравенство

$$\int_0^T\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)^{\alpha} e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left(M_{i_k}(t)\right)^{\alpha} e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt.$$

Откуда получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)^{\alpha} e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt = A.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int_0^T\left(M_0(t)\right)^{\alpha} e^{-(\delta-\alpha\gamma)t}dt = A.$$

Поскольку $M_{i_k}(t) \geq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $M_{\mathrm{opt}}(t) \geq 0$.

Определим фазовую траекторию $\{x_{\mathrm{opt}}(t) | t \in [0, T]\}$, соответствующую управлению $\{M_{\mathrm{opt}}(t) | t \in [0, T]\} \geq 0$, как решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M_0(t) + r_D\left(x - M_0(t)\right)_+ - r_L\left(M_0(t) - x\right)_+, \quad x(0) = x_0.$$

Обозначим через $x_k(t)$, $t \in [0, T]$, решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M_{i_k}(t) + r_D\left(x - M_{i_k}(t)\right)_+ - r_L\left(M_{i_k}(t) - x\right)_+, \quad x(0) = x_0.$$

По построению $x_k(T) \geq 0$. Положим $\tilde{x}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t)$. Очевидно, что $\tilde{x}_n(T) \geq 0$ и

$$\frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt} = S - \gamma\tilde{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[r_D\left(x_k(t) - M_{i_k}(t)\right)_+ - r_L\left(M_{i_k}(t) - x_k(t)\right)_+\right], \quad \tilde{x}_n(0) = x_0.$$

Поскольку $r_L > r_D$, функция $r_D(y)_+ - r_L(-y)_+$ вогнута по переменной y и, значит, справедливо неравенство

$$\frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt} \leq S - \gamma\tilde{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) + \left[r_D\left(\tilde{x}_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)_+ - r_L\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) - \tilde{x}_n(t)\right)_+\right].$$

Определим $\hat{x}_n(t)$, $t \in [0, T]$ как решение задачи Коши

$$\frac{d\hat{x}_n(t)}{dt} = S - \gamma\hat{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) + \left[r_D\left(\hat{x}_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)_+ - r_L\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) - \hat{x}_n(t)\right)_+\right], \quad \hat{x}_n(0) = x_0.$$

Поскольку $r_L > r_D > \gamma$, функция

$$S - \gamma z - \frac{1}{\theta n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) + \left[r_D\left(z - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right)_+ - r_L\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) - z\right)_+\right]$$

монотонно возрастает по переменной z. Откуда следует, что $\tilde{x}_n(t) \le \hat{x}_n(t)$ и, значит, $\hat{x}_n(T) \ge \tilde{x}_n(T) \ge 0$. Таким образом, управление

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) \,|\, t \in [0,T]\right\}$$

и соответствующая ему фазовая траектория $\tilde{x}_n(t)$ удовлетворяют всем ограничениям (2)–(4) задачи оптимального управления.

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \left| M_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right| dt = 0.$$

Откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon > 0$ такое, что при $n \ge n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\int_0^T \left| M_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t)\right| dt < \varepsilon.$$

Заметим, что функция $f(z,u) = S - \gamma z - \frac{1}{\theta}u + r_D(z-u)_+ - r_L(u-z)_+$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых z, u, w, v справедливо неравенство

$$|f(z,u) - f(w,v)| \le C\left(|z-w| + |u-v|\right).$$

Поскольку

$$\hat{x}_n(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\hat{x}_n(\tau), \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(\tau)\right) d\tau,$$

$$x_{\text{opt}} = x_0 + \int_0^t f\left(x_{\text{opt}}(\tau), M_{\text{opt}}(\tau)\right) d\tau,$$

при $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$\left|\hat{x}_n(t) - x_{\text{opt}}(t)\right| \le \int_0^t \left| f\left(\hat{x}_n(\tau), \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(\tau)\right) - f\left(x_{\text{opt}}(\tau), M_{\text{opt}}(\tau)\right)\right| d\tau \le$$

$$\le C\left(\int_0^t \left|\hat{x}_n(t) - x_{\text{opt}}(t)\right| + \int_0^t \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(\tau) - M_{\text{opt}}(\tau)\right| d\tau\right).$$

Откуда получаем, что при $t \in [0,T]$, $n \ge n_\varepsilon$ справедливо неравенство (см. [9, теорема 2.1, с. 17])

$$\left|\hat{x}_n(t) - x_{\text{opt}}(t)\right| \le \varepsilon e^{Ct}.$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{x}_n(T) = x_{\text{opt}}(T)$ и, значит, $x_{\text{opt}}(T) \ge 0$. Таким образом, управление $\{M_{\text{opt}}(t) \,|\, t \in [0,T]\} \ge 0$ и фазовая траектория $\{x_{\text{opt}}(t) \,|\, t \in [0,T]\} \ge 0$ являются решением задачи оптимального управления (1)–(4). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если* $\{x(t), M(t) \,|\, t \in [0,T]\}$ *– решение задачи оптимального управления* (1)–(4), *то* $\{\varphi(t) \,|\, t \in [0,T]\}$ *– абсолютно непрерывная функция такая, что*

1) *если* $\frac{\alpha\theta}{1+\theta r_L} > x^{1-\alpha}\varphi$, *то* $M = \left[\frac{\alpha\theta}{(1+\theta r_L)\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ *и*

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_L - \gamma)x - \frac{1+\theta r_L}{\theta}\left[\frac{\alpha\theta}{(1+\theta r_L)\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = [\delta + (1-\alpha)\gamma - r_L]\varphi, \tag{6}$$

2) *если* $\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_L} \le x^{1-\alpha}\varphi \le \left(\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_D}\right)$, *то* $M(t) = x(t)$ *и*

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1+\theta\gamma}{\theta}x, \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = [\delta + (1-\alpha)\gamma - u(t)]\varphi, \quad r_D \le u(t) \le r_L, \tag{8}$$

3) *если* $\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_D} < x^{1-\alpha}\varphi$, *то* $M = \left[\dfrac{\alpha\theta}{(1+\theta r_D)\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ *и*

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - \frac{1+\theta r_D}{\theta}\left[\frac{\alpha\theta}{(1+\theta r_L)\varphi}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = [\delta + (1-\alpha)\gamma - r_D]\varphi. \tag{10}$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности

$$x(T) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Оптимальное решение задачи оптимального управления должно удовлетворять необходимым условиям принципа максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка (см. [10, с. 115]), поскольку функция в правой части ограничения (2) является негладкой.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(t,x,p) = \sup_{M\ge 0}\left\{M^{\alpha}e^{-(\delta-\alpha\gamma)t} + p\left[S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M + r_D(x-M)_+ - r_L(M-x)_+\right]\right\},$$

оптимальное управление определяется соотношением

$$M^{\alpha-1} \in \frac{e^{\delta-\alpha\gamma}}{\alpha}\partial_M\left\{p\left[S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M + r_D(x-M)_+ - r_L(M-x)_+\right]\right\},$$

а сопряженная переменная удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dp}{dt} \in -\partial_x H(t,x,p), \quad p(T)x(T) = 0.$$

Для того чтобы значение оптимального управления $M(t)$ было конечным, необходимо выполнение условия $p(t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$. Следовательно, из условия трансверсальности следует условие $x(T) = 0$. Вводя новую переменную $\varphi = e^{\delta-\alpha\gamma}p$ и вычисляя обобщенные градиенты ∂_M, ∂_x, получаем справедливость теоремы 2.

Фазовый портрет на плоскости с координатами (x,φ) состоит из трех областей, соответствующих трем различным режимам поведения домашнего хозяйства. В первой области: $\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_L} > x^{1-\alpha}\varphi$, реализуется режим кредитования и моделируется домашнее хозяйство, которое использует потребительский кредит. Во второй области: $\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_L} \le x^{1-\alpha}\varphi \le \dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_D}$, реализуется автономный режим и моделируется домашнее хозяйство, не пользующееся потребительским кредитом и не сберегающее в форме депозитов. В третьей области: $\dfrac{\alpha\theta}{1+\theta r_D} < x^{1-\alpha}\varphi$, реализуется режим сбережения и моделируется домашнее хозяйство, сберегающее в форме депозитов. Траектория, определяемая оптимальным решением задачи (1)–(4), должна удовлетворять краевым условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$, и зависимость от значения параметров задачи r_L, r_D, γ, θ, α, δ может состоять из сочетания разных режимов. Зная траекторию, можно построить синтез оптимального управления. В пределе при $T \to +\infty$ синтез оптимального управления является стационарным, т.е. не зависит от времени. Опишем, как устроен синтез в зависимости от соотношения параметров.

Случай 1 (режим кредитования). Если $r_D < r_L < \delta - \frac{1-\alpha}{\theta}$, то синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \left[\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}\right]\left(x + \frac{S}{r_L - \gamma}\right).$$

Случай 2 (сочетание режима кредитования и автономного режима). Если $r_D < \delta - \frac{1-\alpha}{\theta} < r_L <$ $< \delta + (1-\alpha)\gamma$, то синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \begin{cases} \left[\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}\right]\left(x + \frac{S}{r_L - \gamma}\right), & \text{если} \quad x < \frac{\delta - \alpha r_L}{r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta}} \frac{S}{r_L - \gamma}, \\ x, \quad \text{если} \quad x \ge \frac{\delta - \alpha r_L}{r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta}} \frac{S}{r_L - \gamma}. \end{cases}$$

Случай 3 (сочетание режимов кредитования, автономного и сбережений). Пусть $\delta - \frac{1-\alpha}{\theta} < r_D <$ $< r_L < \delta + (1-\alpha)\gamma$. Уравнение

$$x_R - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} = \frac{S\theta(1 + r_L\theta)[\delta + (1-\alpha)\gamma - r_L]}{(r_L - \gamma)(1+\theta\gamma)(r_L\theta - \delta\theta + 1 - \alpha)} \left\{\frac{(1 + r_D\theta)}{(1 + r_L\theta)}\left[\frac{x_R(r_L\theta - \delta\theta + 1 - \alpha)(r_L - \gamma)}{S\theta(\delta - \alpha r_L)}\right]^{1-\alpha}\right\}^{\frac{1+\gamma\theta}{\theta(\delta + (1-\alpha)\gamma - r_D)}}$$

имеет решение x_R. Обозначим минимальное решение на множестве $\left[\frac{(\delta - \alpha r_L)}{\left(r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta}\right)} \frac{S}{(r_L - \gamma)}, +\infty\right)$ через $x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$.

Если $x \in [x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), +\infty)$, то уравнение

$$x + \frac{S}{r_D - \gamma} = \left[\frac{(1-\alpha)(1+\theta r_D)}{\theta(\delta - \alpha r_D)}\right] M_1 +$$
$$+ \left[\frac{\theta\delta - (1-\alpha) - \theta r_D}{\theta(\delta - \alpha r_D)} x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) + \frac{S}{r_D - \gamma}\right]\left(\frac{x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)}{M_1}\right)^{-\frac{(1-\alpha)(r_D - \gamma)}{\delta + (1-\alpha)\gamma - r_D}}$$

имеет единственное решение M_1 на множестве $[x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), +\infty)$, которое определяет дифференцируемую неявную функцию $M_1(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$. Тогда синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \begin{cases} \left[\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}\right]\left(x + \frac{S}{r_L - \gamma}\right), & \text{если} \quad x < \frac{\delta - \alpha r_L}{r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta}} \frac{S}{r_L - \gamma}, \\ x, \quad \text{если} \quad \frac{\delta - \alpha r_L}{r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta}} \frac{S}{r_L - \gamma} \le x \le x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), \\ M_1(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), & \text{если} \quad x > x_R(r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta). \end{cases}$$

Случай 4 (сочетание режимов кредитования и сбережения). Пусть $r_D < \delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$. Если $\frac{S}{\gamma - r_L} < x < \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$, то уравнение

$$x + \frac{S}{r_L - \gamma} = \frac{S(1+\theta r_L)[\delta + (1-\alpha)\gamma - r_L]}{(\delta - \alpha r_L)(1+\gamma\theta)(r_L - \gamma)}\left[\frac{M_2(1+\gamma\theta)}{S\theta}\right]^{\frac{(1-\alpha)(\gamma - r_L)}{(\delta + (1-\alpha)\gamma - r_L)}} + \left[\frac{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}{\theta(\delta - \alpha r_L)}\right] M_2 \qquad (12)$$

имеет два положительных решения относительно переменной M_2. Определим $M_2(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ как минимальное решение уравнения (12). Функция $M_2(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ – дифференцируемая функция по теореме о неявной функции.

Если $x > \dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}$, то уравнение

$$x + \frac{S}{r_D - \gamma} = \frac{S(1+\theta r_D)[\delta + (1-\alpha)\gamma - r_D]}{(\delta - \alpha r_D)(1+\gamma\theta)(r_D - \gamma)}\left[\frac{M_3(1+\gamma\theta)}{S\theta}\right]^{\frac{(1-\alpha)(\gamma - r_D)}{(\delta + (1-\alpha)\gamma - r_D)}} + \left[\frac{(1-\alpha)(1+\theta r_D)}{\theta(\delta - \alpha r_D)}\right] M_3 \tag{13}$$

имеет два положительных решения относительно переменной M_3. Определим $M_3(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ как максимальное решение уравнения (13). Подчеркнем, что по теореме о неявной функции $M_3(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ – дифференцируемая функция при $x \in \left(\dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}, +\infty\right)$.

Тогда синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \begin{cases} M_2(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), & \text{если} \quad x < \dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}, \\ M_3(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), & \text{если} \quad x \ge \dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}. \end{cases}$$

Случай 5 (сочетание режимов кредитования и сбережения). Если $\delta + (1-\alpha)\gamma < r_D < r_L$, то синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \begin{cases} M_2(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta), & \text{если} \quad x < \dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}, \\ \dfrac{\theta(\delta - \alpha r_D)}{(1-\alpha)(1+\theta r_D)}\left(x + \dfrac{S}{r_D - \gamma}\right), & \text{если} \quad x \ge \dfrac{S\theta}{1+\gamma\theta}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что рациональное репрезентативное домашнее хозяйство принимает решение, ориентируясь на сложившуюся экономическую конъюнктуру и учитывая возможности ее изменения в значениях своих поведенческих параметров (коэффициента дисконтирования доходов, коэффициента отвращения к риску $(1-\alpha)$, скорости обращения денег $1/\theta$). Построенный синтез оптимального управления $M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ позволяет моделировать по информации о динамике процентных ставок $r_L(t)$, $r_D(t)$ и доходах домашних хозяйств $\gamma(t)$ их экономическое поведение. Для этого нужно решать задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = S - \gamma(t)x(t) - \frac{1}{\theta} M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta) + \\ + r_D(t)\big(x(t) - M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta)\big)_+ - \\ - r_L(t)\big(M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta) - x(t)\big)_+, \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

из решения которой определяется динамика финансового положения домашнего хозяйства $x(t)$. Отметим, что правая часть уравнения является липшицевой по переменной x. Финансовое положение домашнего хозяйства $x(t)$ позволяет определить его потребительские расходы $\dfrac{1}{\theta} M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta)$, задолженность по потребительскому кредиту $L(t) = \big(M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta) - x(t)\big)_+$, сбережения в форме депозитов в коммерческих банках $D(t) = \big(x(t) - M(x(t); r_L(t), r_D(t), \gamma(t), \theta, \alpha, \delta)\big)_+$.

Отметим, что при идентификации модели на больших интервалах времени порядка десяти лет поведенческие характеристики домашнего хозяйства θ, δ, α могут изменяться вследствие изменения экономической конъюнктуры.

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ РОССИЙСКОЙ СТАТИСТИКИ

Модель экономического поведения домашних хозяйств, описанная выше, является незамкнутой моделью. Ее можно рассматривать как блок математической модели для среднесрочного анализа и прогнозирования динамики основных показателей экономики России. Входными

Таблица 1. Богатая группа регионов

Характеристики социального слоя	$L > 0$ (59.6%)	$L > 0$ (40.4%)	$L = 0,\ D = 0$	$L = 0,\ D > 0$	Всего
Число д/х	70 (17.24%)	30 (7.39%)	159 (39.16%)	147 (36.21%)	406 (100%)
Число человек	241 (24.82%)	76 (7.83%)	364 (37.49%)	290 (29.86%)	971 (100%)
Средняя численность человек в д/х	3.45	2.55	2.29	1.97	2.39
Средний доход на человека в группе, руб.	19118	41787	20224	27185	23708
Среднее потребление на человека в группе, руб.	22181	56994	15643	22724	22636
Совокупные доходы группы по выборке РМЭЗ, руб.	4.61×10^6 (20.03%)	3.18×10^6 (13.81%)	7.35×10^6 (31.93%)	7.88×10^6 (34.23%)	23.02×10^6 (100%)
Совокупное потребление группы по выборке РМЭЗ, руб.	5.35×10^6 (24.34%)	4.35×10^6 (19.79%)	5.69×10^6 (25.89%)	6.59×10^6 (29.98%)	21.98×10^6 (100%)
Обозначение слоя населения	1	2	3	4	

переменными модели являются процентные ставки по депозитам r_D и потребительским кредитам r_L, темп роста γ доходов домашних хозяйств, темп инфляции потребительских цен j. Выходными параметрами являются денежный агрегат M_0 (наличные деньги на руках у населения и счета до востребования) и потребительские расходы домашних хозяйств, депозиты населения, задолженность по потребительским кредитам. Латентными параметрами модели, которые определяются при идентификации модели, являются коэффициенты дисконтирования δ, параметр функции полезности α (параметр отвращения к риску), скорость обращения наличных денег $1/\theta$.

Для калибровки модели экономического поведения домашних хозяйств была использована статистика Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ (РМЭЗ) и данные Росстата. На основе анализа данных РМЭЗ регионы России были разделены на две группы: богатую и бедную, в зависимости от особенностей распределения долговой нагрузки по децилям, а также в зависимости от показателей бедности и покупательной способности среднедушевого дохода. К богатой группе регионов были отнесены Москва, Московская область, Санкт-Петербург, Казань, Новая Москва. Остальные регионы Российской Федерации были отнесены к бедным группам регионов. В каждой группе регионов выделяются слои населения с высоким и низким уровнями доходов. Слои населения с низким уровнем доходов делятся на 3 группы: заемщиков необеспеченных кредитов (слой 1), не взаимодействующих с банками (слой 3) и сберегающих в форме депозитов (слой 4). При этом уровни доходов и расходов у слоев с низким уровнем доходов не сильно отличаются. Для слоя населения с высоким уровнем доходов (слой 2) характерны также высокие расходы. Домашние хозяйства, попадающие в данный слой, классифицируются как заемщики, которые берут обеспеченный кредит.

В табл. 1 и 2 приведены данные, описывающие слои населения в двух группах регионов. Использовались данные РМЭЗ (см. [11]) за период 2015–2018 гг. Опрос домашних хозяйств РМЭЗ проводится один раз в год. Для качественной классификации были отобраны те домашние хозяйства, которые принимали участие в опросе на протяжении четырех лет (2015–2018 гг.). Домашние хозяйства отвечали на такие вопросы, как: сколько платили они по кредиту за последний месяц, удавалось ли им сберегать за последний месяц. Поскольку опрос является ежегодным, слои населения были сформированы по следующему принципу: домашние хозяйства, которые хотя бы один раз платили по кредиту в рассматриваемом периоде, классифицировались как домашние хозяйства, относящиеся к группе заемщиков. Среди оставшихся те домашние хозяйства, которые хотя бы один раз сберегали, классифицировались как домашние хозяйства, сберегающие в форме депозитов. Все остальные домашние хозяйства относились к слою населения, не взаимодействующему с банками.

Обратим внимание на типичный состав домашних хозяйств в различных слоях населения: самый большой по численности состав семьи наблюдается у заемщиков, берущих необеспеченный кредит. Напротив, самый маленький состав семьи наблюдается у сберегающего слоя населения. Можно предположить, что к заемщикам с необеспеченными кредитами относятся молодые се-

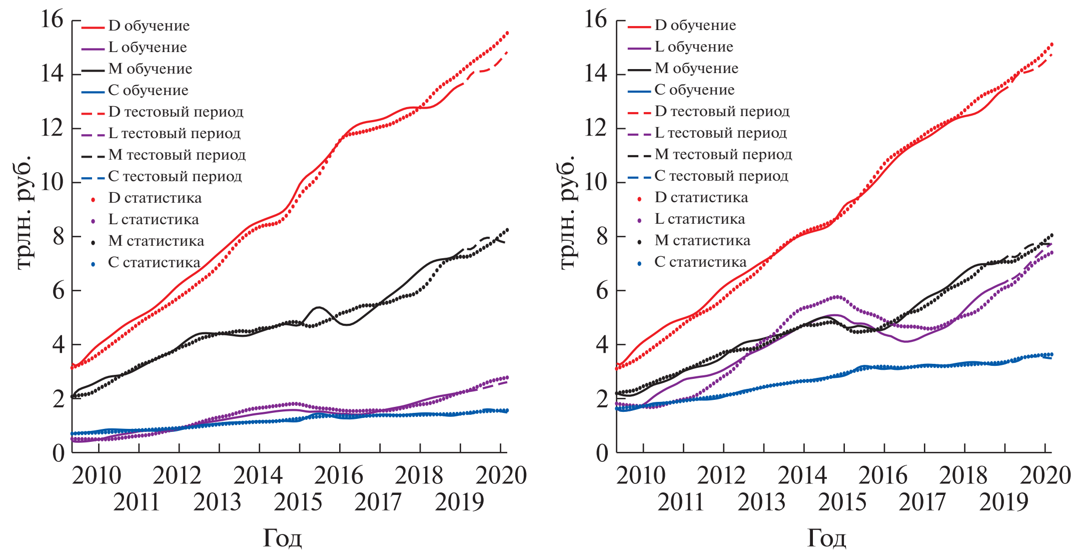
Таблица 2. Бедная группа регионов

Характеристики социального слоя	$L > 0$ (52.3%)	$L > 0$ (47.7%)	$L = 0,\ D = 0$	$L = 0,\ D > 0$	Всего
Число д/х	553 (25.3%)	237 (10.84%)	952 (43.55%)	444 (20.31%)	2186 (100%)
Число человек	1816 (32.83%)	601 (10.87%)	2194 (39.67%)	920 (16.63%)	5531 (100%)
Средняя численность человек в д/х	3.28	2.54	2.3	2.07	2.53
Средний доход на человека в группе, руб.	12497	31583	14221	19599	16440
Среднее потребление на человека в группе, руб.	15099	33391	12138	17139	16254
Совокупные доходы группы по выборке РМЭЗ, руб.	22.7×10^6 (20.03%)	18.99×10^6 (20.88%)	31.2×10^6 (34.31%)	18.04×10^6 (19.85%)	90.93×10^6 (100%)
Совокупное потребление группы по выборке РМЭЗ, руб.	27.42×10^6 (30.05%)	20.08×10^6 (22.34%)	26.63×10^6 (29.62%)	15.77×10^6 (17.54%)	89.9×10^6 (100%)
Обозначение слоя населения	1	2	3	4	

мьи с детьми, а к сберегательному слою населения относятся люди старшего поколения. Не исключено, что домашние хозяйства, попавшие в разные слои населения, могут иметь родственные связи. Данное обстоятельство подразумевает возможность трансфертов между сберегающим слоем населения и кредитуемым слоем в случае, когда расходы кредитуемого слоя населения опускаются ниже прожиточного минимума.

На основании временны́х рядов доходов, потребления, сбережений и денежной массы в различных группах регионов была проведена первоначальная калибровка модели по данным за апрель 2009 г.—январь 2019 г. Для идентификации латентных параметров модели решаются обратные задачи. При этом допускается, что такая поведенческая характеристика, как коэффициент дисконтирования δ, может изменяться под влиянием изменений экономической конъюнктуры (темпа инфляции потребительских цен, процентных ставок, темпа роста доходов). Построенные эконометрические регрессии приведены в приложении А. Отметим, что основным регрессором коэффициента дисконтирования у заемщиков является ставка по кредитам, а у сберегающего слоя населения — ставка по депозитам. Каждый слой населения характеризуется своими поведенческими параметрами, и поэтому моделировался отдельно. Для богатой группы регионов были выбраны следующие параметры: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$, $\theta_4 = 4$, $\alpha_1 = 0.88$, $\alpha_2 = 0.75$, $\alpha_4 = 0.765$ (здесь и далее нижний индекс характеризует слой населения). Бедной группе регионов присущи параметры $\theta_1 = 0.7$, $\theta_2 = 2$, $\theta_4 = 3$, $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.8$, $\alpha_4 = 0.775$. Отметим, что коэффициент отвращения к риску больше у заемщиков с необеспеченными кредитами, чем у заемщиков с обеспеченными кредитами. Более того видно, что отвращение к риску у заемщиков в бедной группе регионов больше, чем у заемщиков в богатой группе регионов. Аналогичные замечания можно сделать для параметра, обратного к скорости обращения денег. Слой 3 населения, который не берет потребительский кредит и не сберегает, является значительным по численности. Баланс доходов и расходов слоя 3 и модель влияния экономической конъюнктуры на его поведенческую характеристику θ замыкают описания экономического поведения домашних хозяйств и позволяют качественно воспроизвести общую динамику расходов и денежной массы населения.

Для верификации модели на временно́м интервале февраль 2019 г.—февраль 2020 г. был построен прогноз, который позволил качественно оценить пригодность используемой модели. На фиг. 2 приведены результаты воспроизведения моделью статистических данных, а также их сравнение с прогнозом на периоде февраль 2019 г.—февраль 2020 г. Из фиг. 2 следует, что модель способна качественно воспроизвести данные, описывающие спрос на кредиты, денежную массу, потребление и объемы формируемых населением сбережений.



Фиг. 2. Восстановление моделью фактической статистики потребления, задолженности, депозитов и денежной массы в первой (слева) и второй (справа) группах регионов. Точками обозначены фактические данные, линиями – модельные значения, пунктиром – значения прогноза. D – депозиты, M – денежная масса на руках у населения, L – задолженность по потребительским кредитам, C – потребление населения. Все значения даны в трлн. руб.

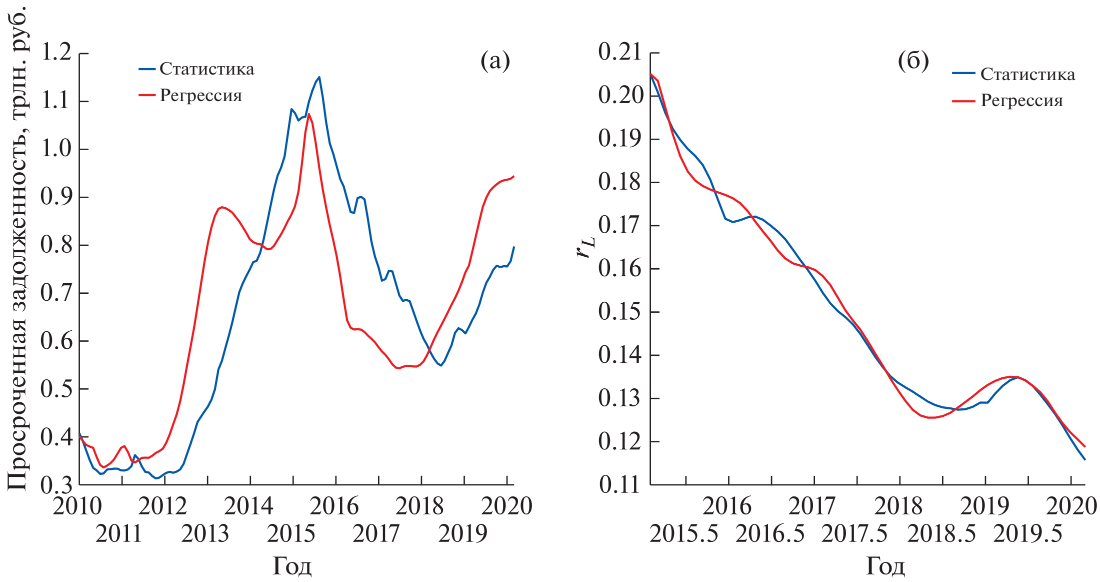
4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ COVID-19 НА ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

Для анализа и прогноза с помощью построенной модели кредитного поведения домашних хозяйств необходимо сформировать сценарии динамики доходов населения и процентных ставок по кредитам. Пандемия COVID-19 и карантинные меры, введенные в России в конце марта 2020 г., привели к значительному снижению реальных доходов населения. Так, по данным Росстата сезонно сглаженные номинальные доходы населения во втором квартале 2020 г. упали на 6.6% по отношению к первому кварталу 2020 г. Сокращение номинальных доходов было вызвано падением доходов от наемного труда, которые сократились на 4% по отношению к первому кварталу 2020 г. Значительная часть снижения доходов произошла в результате сжатия доходов от предпринимательской деятельности, которые сократились на 42% по отношению к первому кварталу в сезонно сглаженном выражении. В таких условиях представляется вероятным рост просроченной задолженности по кредитам из-за потери способности части населения обслуживать платежи по кредитам. Рост просроченной задолженности, в свою очередь, может приводить к повышению процентных ставок в том случае, если банки решат перенести риски кредитования в стоимость кредита. Для того чтобы учесть такую возможность, было проведено регресионное моделирование процентных ставок по кредитам в зависимости от величины просроченной задолженности по потребительскому кредиту, а также ключевой ставки Банка России. В то же время на величину просроченной задолженности непосредственно оказывает влияние стоимость кредитования, выражаемая через процентную ставку по кредитам, а также динамика необеспеченных, ненадежных кредитов, что было учтено с помощью построения дополнительной регрессии. Результаты ретроспективного моделирования изображены на фиг. 3.

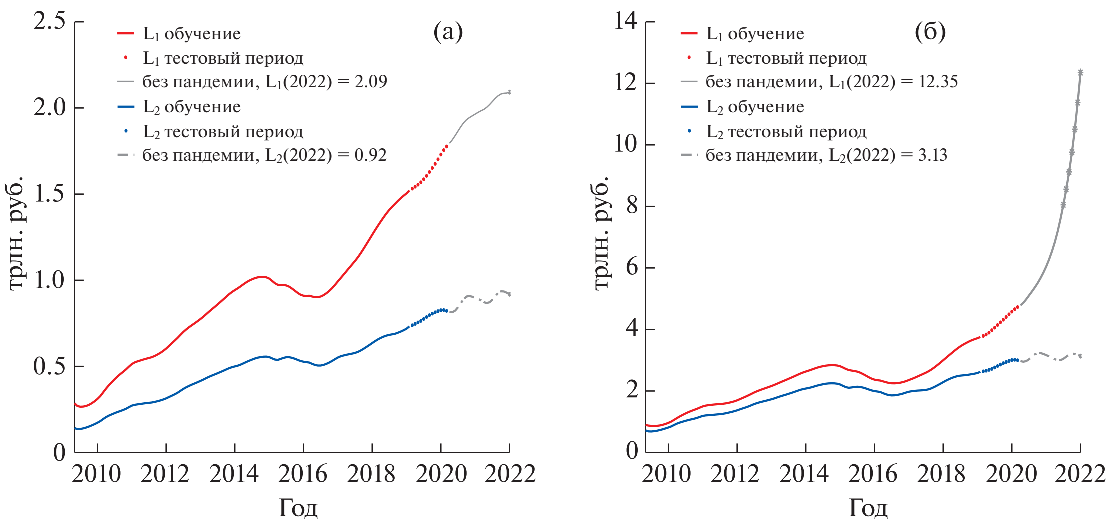
В условиях неопределенности относительно будущей траектории доходов населения рассмотрим несколько сценариев. Во всех этих сценариях ставки по кредитам моделируются с помощью регрессий, представленных в приложении А.

4.1. Сценарий 1. Ситуация отсутствия пандемии COVID-19

В этом сценарии предполагается рост номинальных доходов населения со средним темпом роста в 3.5% к соответствующему периоду прошлого года на всем прогнозном горизонте, а также сохранение ключевой ставки на уровне 6%, начиная с февраля 2020 г. В сценарии отсутствия пандемии и из-за незначительного роста доходов населения происходит рост задолженности на-



Фиг. 3. Фактические и модельные значения просроченной задолженности (а) и процентной ставки (б), полученные с помощью регрессии.

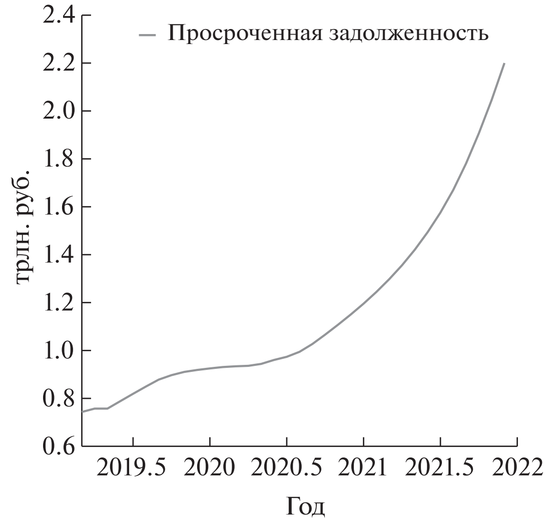


Фиг. 4. Динамика потребительских задолженностей по обеспеченным (синяя линия) и необеспеченным (красная линия) кредитам богатой (а) и бедной (б) групп в условиях отсутствия карантинных мер и номинального роста доходов.

селения в обеих группах регионов (фиг. 4). При этом в бедной группе регионов рост задолженности по необеспеченным кредитам носит гораздо более выраженный характер (фиг. 4б).

Крупными точками (фиг. 4б) отмечены временны́е периоды, когда нарушается фазовое ограничение $x \geq -\dfrac{S}{r_L - \gamma}$. Результаты моделирования показывают, что в условиях роста номинальных доходов и отсутствия карантинных мер необеспеченная задолженность в богатой группе регионов демонстрировала бы замедляющиеся темпы роста. Вместе с этим соразмерное замедление темпов роста в сегменте обеспеченного кредитования привело бы к фактической стагнации обеспеченной потребительской задолженности населения.

Результаты моделирования динамики потребительской задолженности для бедной группы регионов в условиях отсутствия падения доходов отличаются от результатов для богатой группы.



Фиг. 5. Динамика просроченной потребительской задолженности в результате отсутствия пандемии.

В условиях растущих номинальных доходов произошло бы почти троекратное увеличение необеспеченной потребительской задолженности на прогнозируемом временнóм горизонте. Подобная динамика необеспеченной задолженности в бедной группе регионов в условиях стагнации реальных доходов фактически представляет из себя долговой пузырь.

В 2019 г. министр экономического развития М.С. Орешкин заявлял о рисках неограниченного роста потребительского кредитования. Согласно его утверждению (см. [4]), быстрые темпы роста необеспеченного кредитования привели бы к критическому росту перекредитованного населения к 2021 г., что привело бы к рецессии. Результаты моделирования подтверждают выводы бывшего министра.

Помимо роста задолженности населения, интерес также представляют динамика просроченной задолженности и динамика доходов банков в условиях отсутствия пандемии. Доходы банков рассчитываются с помощью следующей формулы:

$$B(t) = \frac{\ln\left(1 + r_L(t)\right)}{12} L(t)\left(1 - \frac{\xi_{\%}(t)}{100}\right) - \left(\xi(t) - \xi(t-1)\right).$$

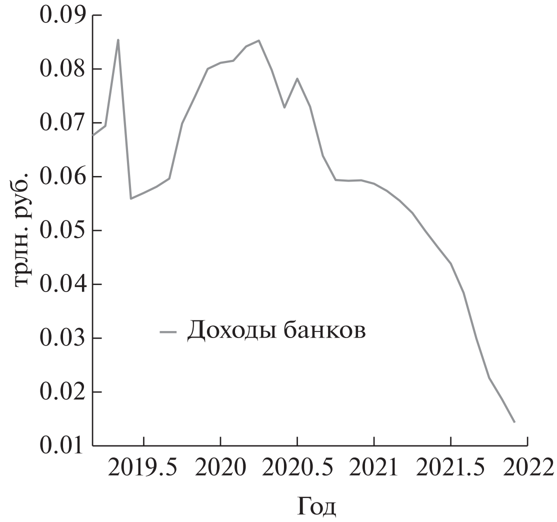
Здесь $\xi_{\%}(t)$ – процентное значение просроченной задолженности ко всей задолженности, $\xi(t)$ – регрессионное значение просроченной задолженности (см. Приложение А). Иными словами, доходы банков есть ни что иное, как выплаты по непросроченным кредитам за вычетом прироста просроченной задолженности.

Постепенный рост просроченной задолженности к концу прогнозируемого периода, вызванный увеличением долгового бремени вследствие роста процентных ставок (фиг. 5), приводит к значительному снижению доходов банков от потребительского кредитования к концу прогнозируемого периода (фиг. 6).

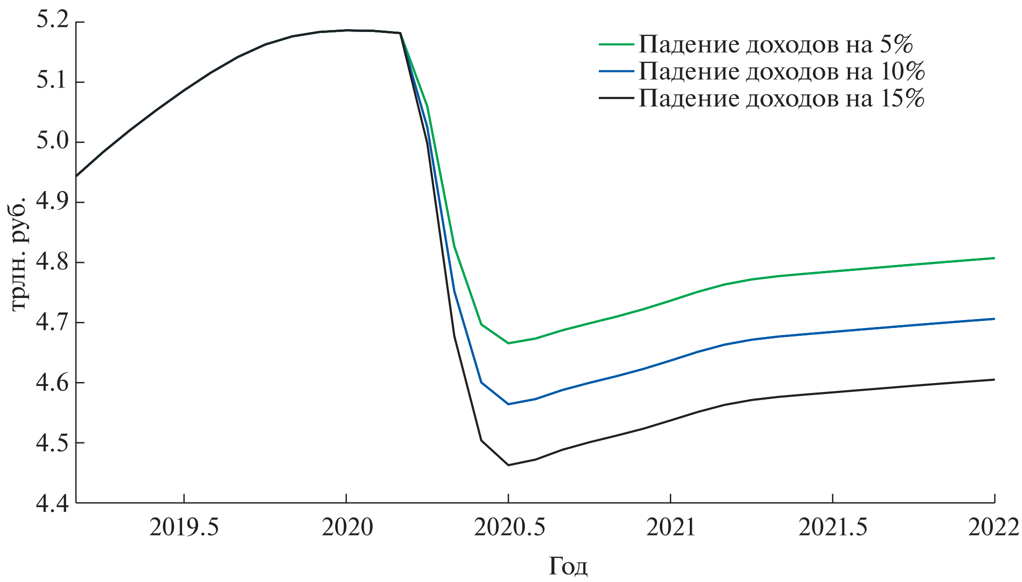
4.2. Сценарий 2. Падение доходов населения при текущей ключевой ставке, равной 4.25%

Сценарий 1 не учитывает произошедшего снижения доходов населения вследствие введения карантина в апреле–мае 2020 г. Сценарии, включающие падение доходов населения, были в первую очередь, основаны на различной динамике роста безработицы, а также имеющихся оценках падения выпуска в российской экономике в период карантина. Спектр роста безработицы включал в себя 5, 10 и 15% увеличения безработицы.

Различная динамика доходов населения, представленная на фиг. 7, оказывает значимое влияние на величину взятого кредита, а значит, и на величину просроченной задолженности в будущем. Просроченная задолженность, в свою очередь, оказывает прямое влияние на степень рискованности кредитования населения банками. В результате различные траектории динамики



Фиг. 6. Динамика доходов банков в результате отсутствия пандемии.

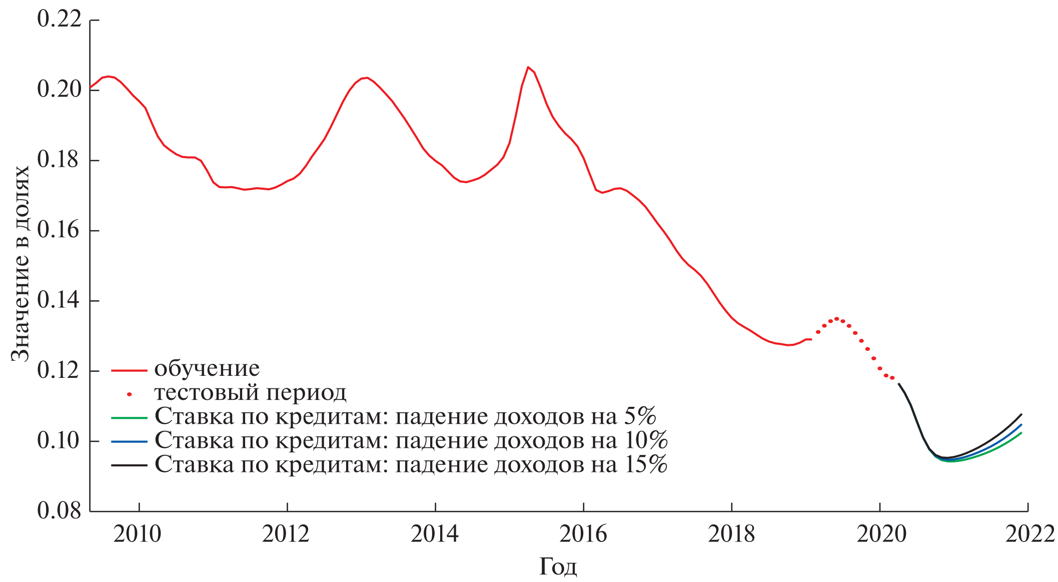


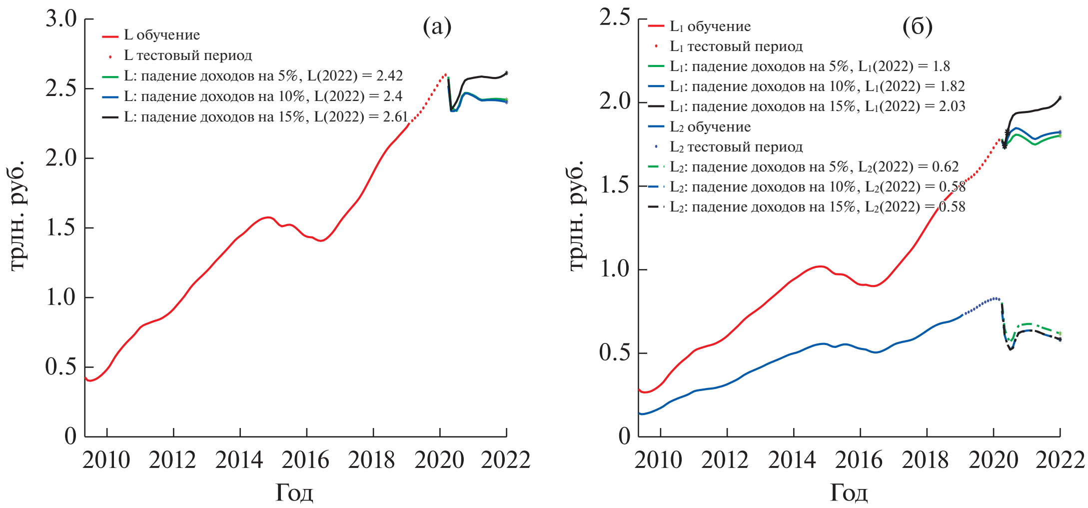
Фиг. 7. Сценарии падения доходов населения в результате пандемии COVID-19.

доходов подразумевают изменения в траектории процентных ставок по кредитованию, что отражено на фиг. 8.

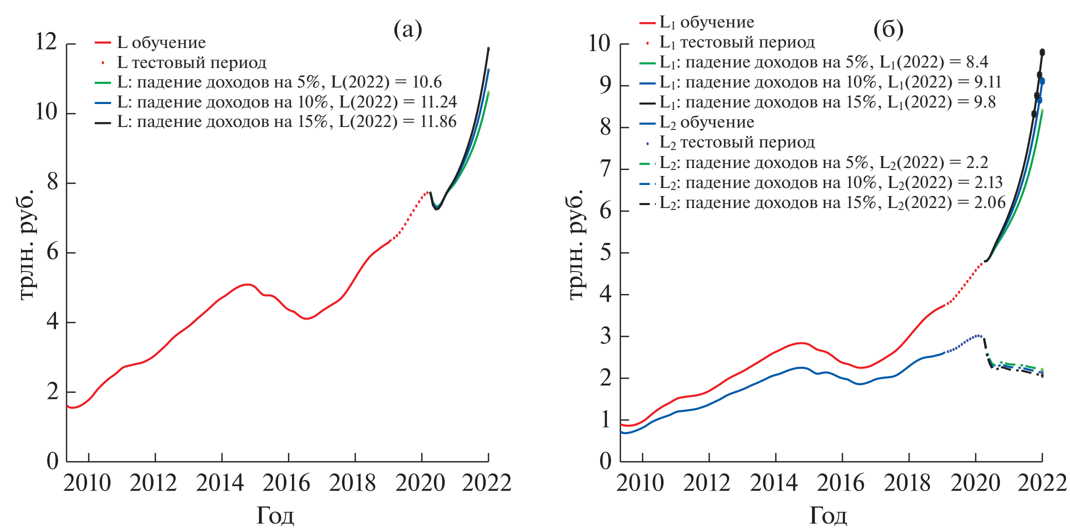
В условиях падения доходов рост потребительского кредитования наблюдается в бедной группе регионов (фиг. 9б), в которых спрос на потребительский кредит значительно превышает возможности коммерческих банков по его удовлетворению. Богатая группа регионов способна избежать значительного роста задолженности по потребительским кредитам (фиг. 9а).

Падение доходов, выражающееся в снижении возможностей домохозяйств к обслуживанию собственных обязательств, приводит к резкому снижению темпов обеспеченного кредитования. При этом происходит ускорение темпов роста необеспеченного кредитования, к концу прогнозируемого во всех сценариях, что обусловлено желанием домохозяйств поддержать сложившиеся стандарты потребления, а также необходимостью реструктуризации взятых ранее кредитов в условиях падения доходов. Высокие темпы падения доходов в условиях пандемии выражаются в большем росте необеспеченной задолженности, что и выражено в будущей динамике задолжен-

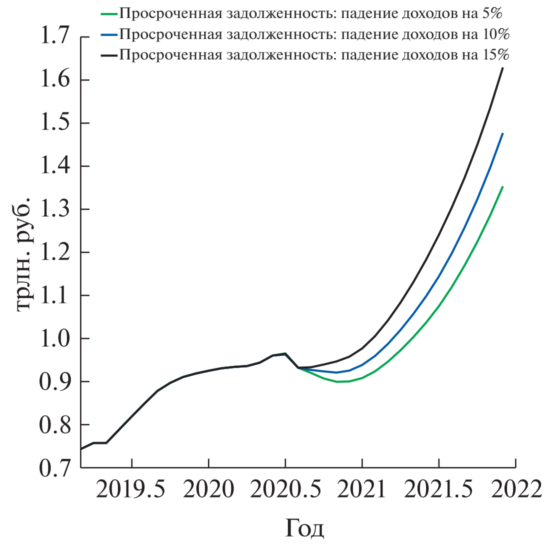




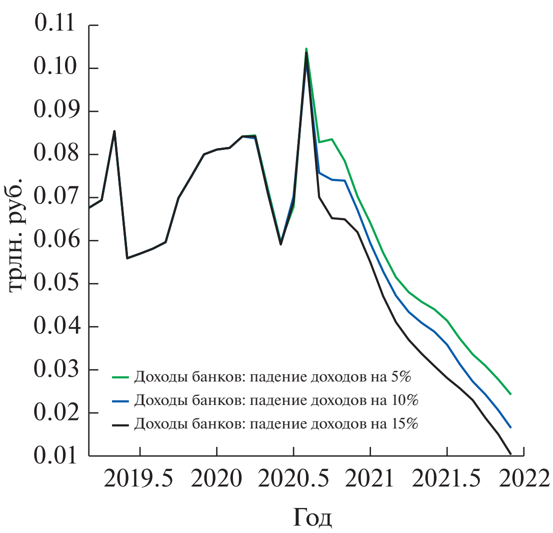
Фиг. 8. Динамика ставок по кредитам в зависимости от сценария падения доходов при неизменной ключевой ставке.



Фиг. 9. Динамика потребительских задолженности в бедной (а) и богатой (б) группах регионов при различных сценариях падения доходов при неизменной ключевой ставке: общая задолженность (слева), задолженности по необеспеченным и обеспеченным кредитам (справа).



Фиг. 10. Динамика просроченной потребительской задолженности при неизменной ключевой ставке.

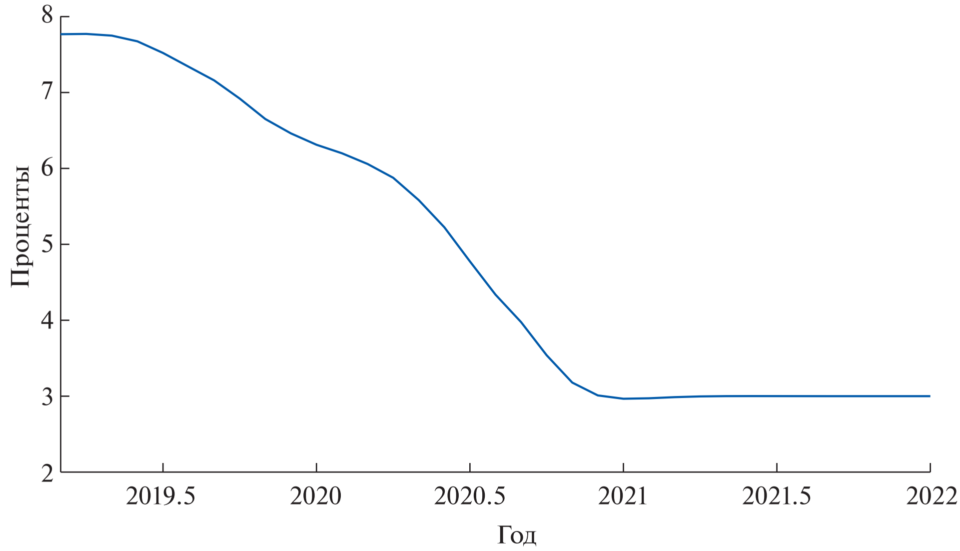


Фиг. 11. Динамика доходов банков при различных сценариях падения доходов при неизменной ключевой ставке.

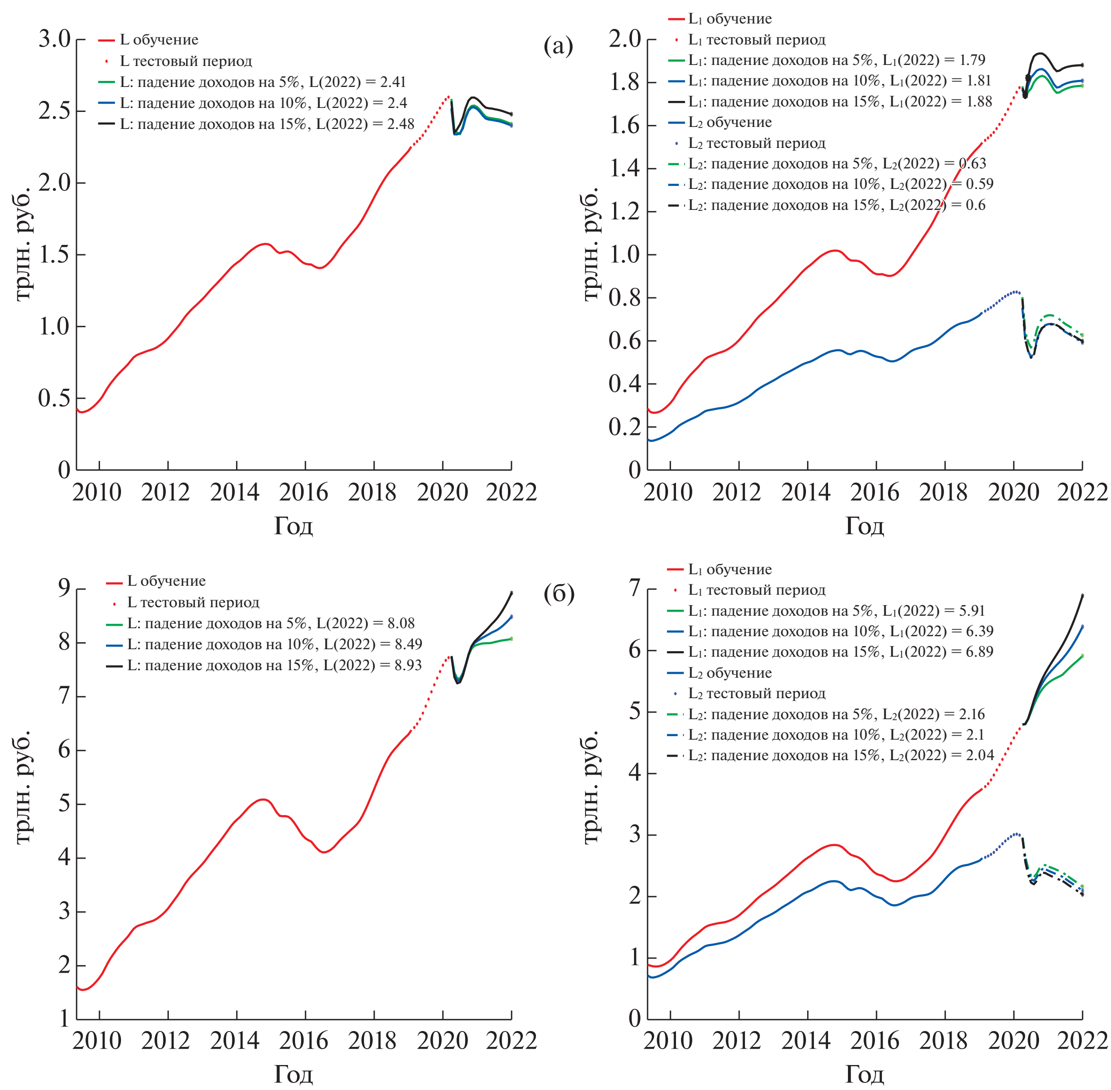
ности бедной группы регионов. Задолженность по необеспеченным кредитам в бедной группе регионов может удвоиться к концу 2021 г. и составить 9.8 трлн руб. в случае самого негативного сценария. Падение доходов в бедной группе регионов 2 приводит к значительному уменьшению способности домохозяйств к обслуживанию своих кредитов, что также отражается на ускоряющемся росте просроченной задолженности (фиг. 10). Отметим, что, несмотря на попытки банков сохранить собственную рентабельность путем увеличения ставок, ухудшение качества заемщиков приводит к более быстрому снижению доходов банков от кредитования физических лиц (фиг. 11).

4.3. Сценарий 3. Резкое снижение ключевой ставки до 3% при падении доходов населения

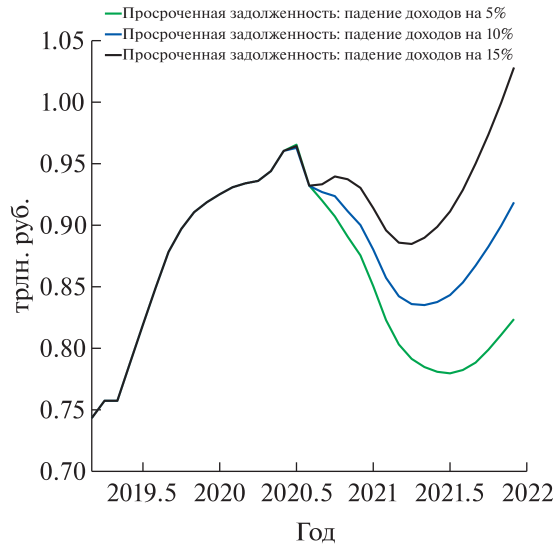
Рассмотрим сценарий с резким снижением процентной ставки до уровня в 3% в третьем квартале 2020 г. (фиг. 12). В этом сценарии останавливается рост задолженности по потребительским кредитам в богатой группе регионов (фиг. 13а) и по сравнению со сценарием 2 замедляется рост задолженности по потребительским кредитам в бедной группе регионов (фиг. 13б). Несмотря на



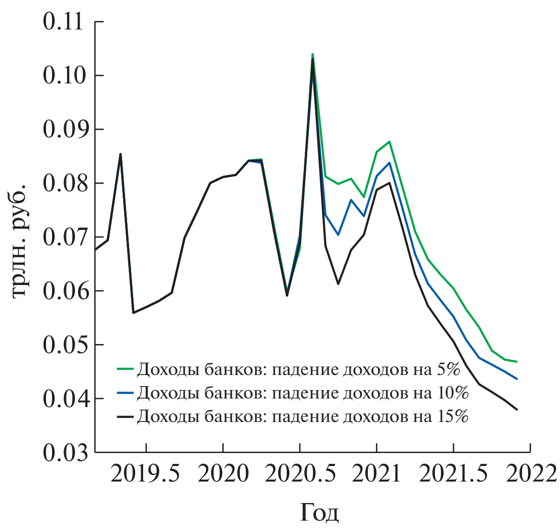
Фиг. 12. Резкое снижение ключевой ставки до 3%.



Фиг. 13. Динамика потребительских задолженностей в богатой (а) и бедной (б) группах регионов при различных сценариях падения доходов при резком снижении ключевой ставки до 3%: общая задолженность (слева), задолженности по необеспеченным и обеспеченным кредитам (справа).



Фиг. 14. Динамика просроченной потребительской задолженности при резком снижении ключевой ставки до 3%.

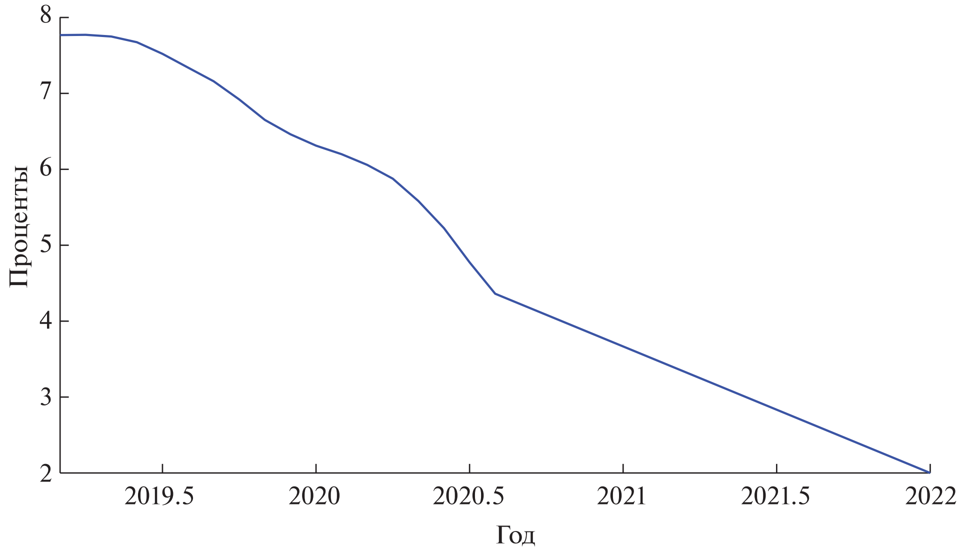


Фиг. 15. Динамика доходов банков при различных сценариях падения доходов при резком снижении ключевой ставки до 3%.

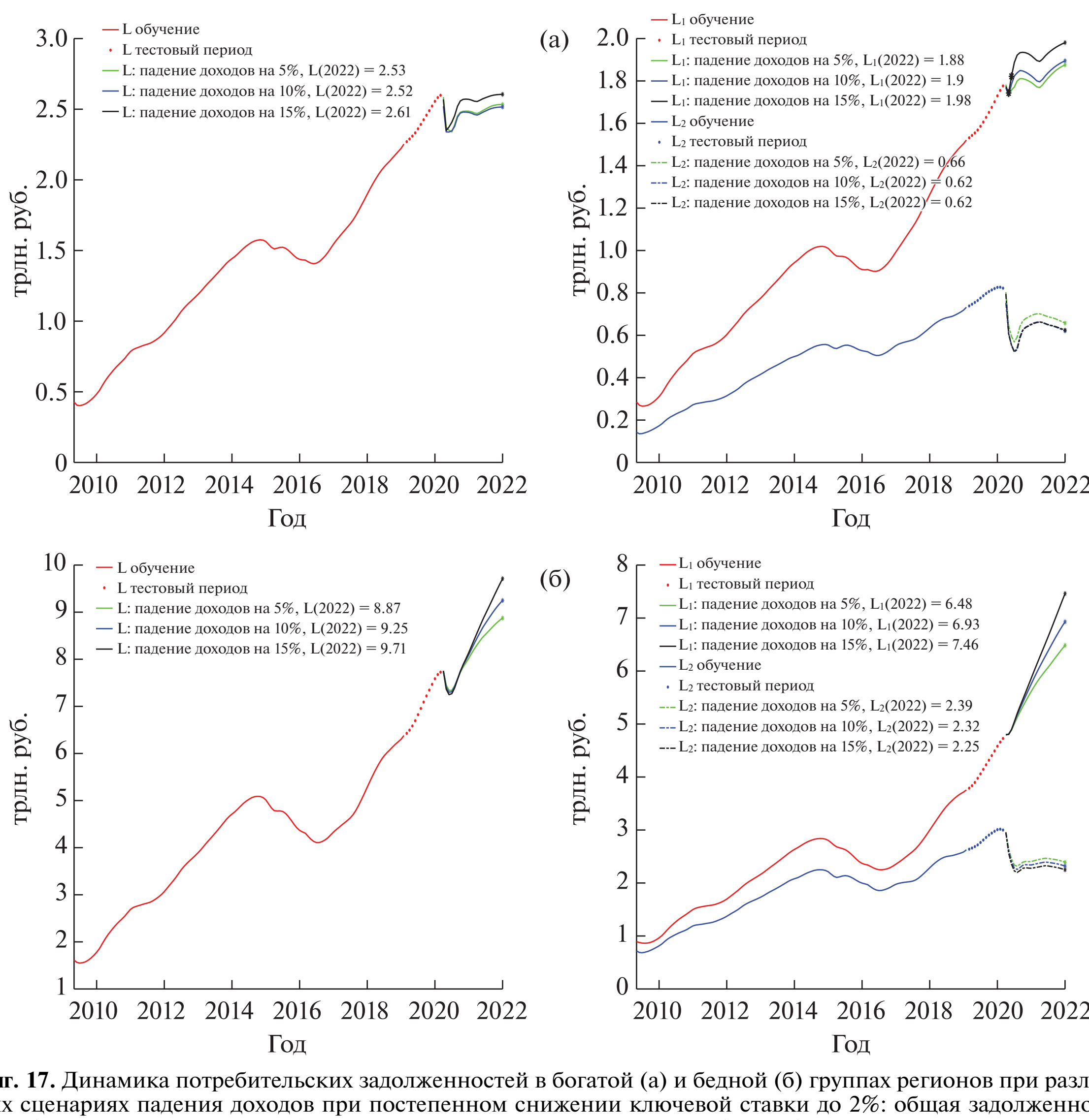
снижение доходов населения, происходит значительное замедление темпов кредитования как в богатой, так и в бедной группах регионов. В бедной группе регионов задолженность по необеспеченным кредитам вырастает до 6.89 трлн руб., а не до 9.8 трлн руб., как в предыдущем сценарии. Просроченная задолженность (фиг. 14) и рентабельность банковской системы (фиг. 15) также демонстрируют более позитивную динамику по сравнению со сценарием 2.

4.4. Сценарий 4. Постепенное снижение ключевой ставки до 2% при падении доходов населения

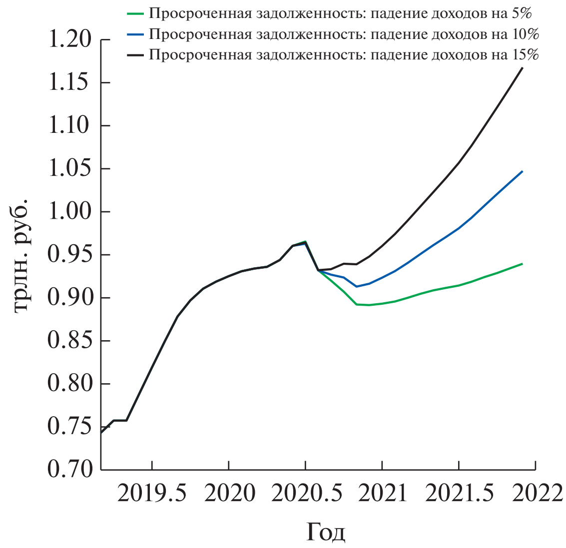
Рассмотрим сценарий с постепенным снижением процентной ставки до уровня в 2% к концу 2021 г. (фиг. 16). В сценарии постепенного снижения ключевой ставки до уровня в 2% положительные результаты не так сильно выражены, как в сценарии с резким снижением ключевой ставки до 3%. Рост задолженности домохозяйств по-прежнему находится на более низкой траектории по сравнению с ситуацией отсутствия снижения ставки, однако замедление темпов кредитования носит менее выраженный характер (фиг. 17).



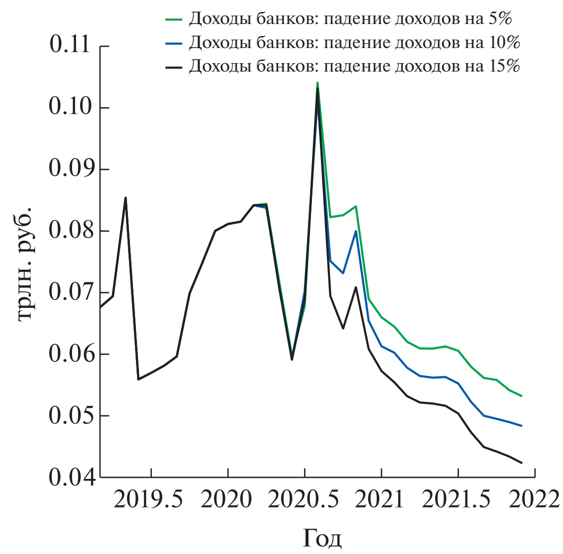
Фиг. 16. Постепенное снижение ключевой ставки до 2%.



Фиг. 17. Динамика потребительских задолженностей в богатой (а) и бедной (б) группах регионов при различных сценариях падения доходов при постепенном снижении ключевой ставки до 2%: общая задолженность (слева), задолженности по необеспеченным и обеспеченным кредитам (справа).



Фиг. 18. Динамика просроченной потребительской задолженности при постепенном снижении ключевой ставки до 2%.



Фиг. 19. Динамика доходов банков при различных сценариях падения доходов при постепенном снижении ключевой ставки до 2%.

Уровень просроченной задолженности и доходы коммерческих банков от потребительского кредитования (фиг. 18, 19) также улучшаются по сравнению со сценарием 2 постоянной ключевой ставки 4.25%.

5. ВЫВОДЫ

Построение синтеза оптимального управления в модели рационального домашнего хозяйства позволило описать изменения экономического поведения при изменении конъюнктуры. Используя данные РМЭЗ НИУ ВШЭ (см. [11]), были выделены репрезентативные типы домашних хозяйств. Модель идентифицирована по статистическим данным о доходах, расходах, потребительских кредитах и сбережениях домашних хозяйств России за апрель 2009 г.–январь 2019 г. Модель верифицирована по статистическим данным за февраль 2019 г.–февраль 2020 г. С помощью модели проанализирована актуальная проблема обеспеченности потребительских кредитов и связанных с ней рисков для коммерческих банков. Эта проблема остро обсуждалась в экономическом блоке правительства РФ в середине 2019 г. (см. [4]). Расчеты по модели показали обоснованность опасений о платежеспособности заемщиков в части регионов РФ. Анализ с помощью модели влияния пандемии COVID-19 показывает, что проблема платежеспособности заемщиков существенно обостряется из-за снижения доходов населения. Одним из основных источников, вызывающих рост долговой нагрузки на население, помимо падения доходов, является рост процентной ставки. В отличие от доходов населения, главным образом формирующихся в результате производственной деятельности в экономике, процентная ставка может быть оперативно отрегулирована государством с помощью изменения ключевой ставки Банка России, являющейся отправной точкой для банков при расчете ставки, по которой они готовы кредитовать экономику. Расчеты по модели показывают, что снижение ключевой ставки Банком России уменьшает долговую нагрузку на домашние хозяйства и долю неплатежеспособных заемщиков среди физических лиц. При этом эффективность снижения ключевой ставки существенно зависит от динамики снижения. Несмотря на явные преимущества сценария с резким снижением ключевой ставки, следует отметить, что резкое уменьшение ключевой ставки может привести к неожиданным негативным последствиям, таким как резкое ослабление курса рубля или значительное увеличение темпов инфляции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕГРЕССИИ

Регрессия, в рамках которой моделируется динамика просроченной задолженности, имеет следующий вид:

$$\xi(t) \approx -1.78736 + 0.0936723 r_{L,\%}(t-3) + 0.253206 L_1(t-3),$$

где в качестве регрессионных параметров берутся ставка по кредитам в процентном соотношении и расчетная динамика задолженности по потребительским кредитам слоя населения 1 с задержкой на 3 мес (в качестве шага модели рассматривается изменение показателей за 1 мес).

Зависимость процентной ставки от рисков кредитования, выражаемых через просроченную задолженность, а также от ключевой ставки Банка России, выражается следующей регрессией:

$$r_L(t) \approx 0.0128 + 0.007213 KIR_{\%}(t) + 0.0118\xi(t) + 0.4259 r_L(t-1),$$

где $KIR_{\%}(t)$ – ключевая ставка, фиксируемая Центральным Банком России, выраженная в процентах; $\xi(t)$ – регрессионное значение просроченной задолженности, представленное выше.

Для построения регрессионных данных при идентификации модели использовались следующие регрессоры: $r_L(t)$ – ставка по кредитам, $r_D(t)$ – ставка по депозитам, $r_{D,\mathrm{curr}}(t)$ – ставка по валютным депозитам, $j_m(t)$ – месячная инфляция, $j_q(t)$ – квартальная инфляция, $j_y(t)$ – годовая инфляция, $\gamma_m(t)$ – месячный темп роста доходов, $\gamma_q(t)$ – квартальный темп роста доходов, $\gamma_y(t)$ – годовой темп роста доходов. Нижний индекс представленных ниже регрессий характеризует принадлежность слою i домашних хозяйств, $i \in \{1,2,3,4\}$. Также отметим, что функция $v(t)$ описывает динамику доходов сберегательного слоя населения (слоя 4), что позволяет качественнее воспроизводить динамику депозитов населения.

Богатая группа регионов:

1. $\delta_1(t) \approx 0.0278 + 0.8177 r_L(t) + 0.0383 j_q(t) - 0.0666 j_y(t) + 0.0059\gamma_y(t) + 0.213\delta_1(t-1)$,

2. $\delta_2(t) \approx 0.0054 + 0.786 r_L(t) + 0.0408 j_q(t) - 0.0477 j_y(t) + 0.1114\gamma_q(t) - 0.0108\gamma_y(t) + 0.2333\delta_2(t-1)$,

3. $\delta_4(t) \approx -0.0296 + 0.6658 r_D(t) - 0.0995 r_{D,\mathrm{curr}}(t) + 0.0313 j_q(t) + 0.2921\delta_4(t-1)$,

4. $v(t) \approx 0.2013 + 0.5303 r_D(t) + 0.7147\gamma_q(t) - 0.3343\gamma_y(t) - 0.1845 j_q(t) + 0.67 r_{D,\mathrm{curr}}(t) + 0.8249 v(t-1)$,

5. $\theta_3(t) \approx 3.2387 - 11.9275 r_D(t) + 0.1845\gamma_q(t) - 2.9587\gamma_y(t) - 11.9042 j_q(t) + 9.4019 j_y(t) + 0.9798\theta_3(t-1)$,

6. $C_3(t) \approx -0.3108 - 0.0492\gamma_q(t) + 0.1119\gamma_y(t) + 0.2841j_m(t) + 0.3977j_q(t) - 0.3448j_y(t) + 0.9374C_3(t-1)$.

Бедная группа регионов:

1. $\delta_1(t) \approx 0.0282 + 0.7956r_L(t) + 0.0374j_q(t) - 0.0658j_y(t) + 0.016\gamma_y(t) + 0.2253\delta_1(t-1)$,

2. $\delta_2(t) \approx 0.0524 + 0.7324r_L(t) + 0.0113j_q(t) - 0.0656j_y(t) + 0.1128\gamma_q(t) + 0.2936\delta_2(t-1)$,

3. $\delta_4(t) \approx -0.0392 + 0.7181r_D(t) - 0.0993r_{D,\mathrm{curr}}(t) + 0.0405j_q(t) + 0.2433\delta_4(t-1)$,

4. $v(t) \approx -0.1848 + 0.3674r_D(t) - 0.1095\gamma_q(t) + 0.0168\gamma_y(t) + 0.1787j_q(t) + 0.0235j_y(t) + 0.723v(t-1)$,

5. $\theta_3(t) \approx 1.9163 - 3.0933r_D(t) - 0.4745\gamma_q(t) - 1.2085j_q(t) - 0.3759j_y(t) + 0.9348\theta_3(t-1)$,

6. $C_3(t) \approx -0.7029 + 0.4254\gamma_q(t) - 0.0048\gamma_y(t) + 0.2154j_m(t) + 0.9445j_q(t) - 0.4237j_y(t) + 0.9844C_3(t-1)$,

7. $C_{1,\mathrm{add}}(t) \approx -9.921 + 11.7407j_m(t) - 1.8498j_q(t) + 0.0177j_y(t) - 4.4094\gamma_m(t) + 1.07\gamma_q(t) - 0.0264\gamma_y(t) + 0.7834C_{1,\mathrm{add}}(t-1)$. Данная регрессия подразумевает взятие части расходов слоя населения 1 слоем 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крупенский Н.А., Кузина О.Е.* Перекредитованность россиян: миф или реальность? // Вопросы экономики. 2018. Т. 11. С. 85–104.
2. *World Bank*. Household Over-Indebtedness in Russia, 2020.
3. *Зубаревич Н.В., Сафронов С.Г.* Люди и деньги: доходы, потребление и финансовое поведение населения российских регионов в 2000–2017 гг. // Изв. РАН. Сер. географическая. 2019. Т. 5. С. 3–17.
4. *Базанова Е.* Минэкономразвития готово поддержать закредитованное население. Ведомости, 2019; https://www.vedomosti.ru/economics/articles/2019/07/2.
5. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of savings // Economic J. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
6. *Рудева А.В., Шананин А.А.* Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // Дифференц. ур-ния. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799–1803.
7. *Гималтдинов И.Ф.* Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 2. С. 84–98.
8. *Komlos J.* A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1967. V. 18. P. 217–229.
9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
10. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ // М.: Наука, 1988. 280 с.
11. “Russia Longitudinal Monitoring survey, RLMS-HSE”, “Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ (RLMS HSE)“, проводимый Национальным исследовательским университетом Высшая школа экономикии ООО Демоскоппри участии Центра народонаселения Университета Северной Каролины в Чапел Хилле и Института социологии Федерального научно-исследовательского социологического центра РАН.