

СОДЕРЖАНИЕ

Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. I: Обзор и анализ методов и моделей и их приложений	3
<i>Ю. Н. Челноков</i>	
О теплотворной способности прямолинейного упруговязкопластического течения при учете производства тепла за счет трения материала о его граничную шероховатую поверхность	32
<i>А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко</i>	
Задача нелинейного изгиба консоли в элементарных функциях	47
<i>К. Н. Анахаев</i>	
Действие наклонной сейсмической волны на подземный трубопровод	58
<i>М. Ш. Исраилов</i>	
Ориентация трещиноватости в хрупком твердом теле при традиционном трехосном сжатии	70
<i>И. А. Пантелеев, В. А. Ляховский</i>	
О существовании нормальных координат для вынужденных колебаний линейных диссипативных систем	93
<i>А. Г. Петров</i>	
Исследование механических свойств тонкопленочных мембран из оксида и нитрида кремния	103
<i>Н. А. Дюжнев, Е. Э. Гусев, М. А. Махиборода</i>	
Стержневой подвес инертной массы для бинс маятникового типа	114
<i>Ю. К. Жбанов, Е. А. Привалов</i>	
О стационарных движениях равногранного тетраэдра, близкого к правильному, с неподвижной точкой в центральном ньютоновском поле сил	120
<i>Е. А. Никонова</i>	
Моделирование величины ударного импульса при поперечных колебаниях ступенчатой стержневой системы, испытывающей продольный удар	130
<i>А. А. Битюрин</i>	
Распространение плоского ударного фронта в упругом слое	141
<i>А. В. Ильяшенко</i>	
Численная оптимизация кинематической схемы многоточечного формообразования панелей в условиях ползучести	150
<i>К. С. Бормотин, А. А. Кривенок</i>	
К 75-летию со дня рождения А.А. Буренина	164

УДК 531.3

**КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ НЕБЕСНОЙ
МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА:
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЙЛЕРА (РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА)
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО (ТРАЕКТОРНОГО) ДВИЖЕНИЯ.
I: ОБЗОР И АНАЛИЗ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ**

© 2022 г. Ю. Н. Челноков^{а,*}

^а*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.10.2021 г.

После доработки 05.12.2021 г.

Принята к публикации 07.12.2021 г.

Рассматривается проблема регуляризации классических уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики), в которых используются переменные, характеризующие форму и размеры мгновенной орбиты (траектории) изучаемого движущегося тела, и углы Эйлера, описывающие ориентацию используемой вращающейся (промежуточной (intermediate)) системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела в инерциальной системе координат. Особенности типа сингулярности (деления на ноль) этих классических уравнений порождаются углами Эйлера и эффективно устраняются с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов (вращения) Гамильтона.

В работе дан обзор и анализ известных нам регулярных в указанном смысле моделей небесной механики и астродинамики, построенных с использованием параметров Эйлера и кватернионов поворота Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Рассмотрены приложения этих моделей в задачах оптимального управления орбитальным движением космического аппарата, решаемых с использованием принципа максимума Понтрягина. Показано, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космических аппаратов может быть кардинально повышена за счет использования регулярных кватернионных моделей астродинамики.

Также дан обзор и анализ публикаций, в которых используются дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда) для решения задач управления общим пространственным движением твердого тела (космического аппарата), представляющим собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела, эквивалентную его винтовому движению, с использованием принципа обратной связи.

Ключевые слова: регуляризация, уравнения небесной механики и астродинамики (механики космического полета), задача двух тел, ориентация орбиты, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), кватернион ориентации, оптимальное управление орбитальным движением, космический аппарат, пространственное движение твердого тела, бикватернион

DOI: 10.31857/S0572329922040043

1. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) в классических моделях небесной механики и астродинамики, записанных во вращающихся системах координат и использующих углы Эйлера (угловые оскулирующие элементы орбиты) для описания орбитального движения изучаемого тела. В наших работах [1–5] даны краткие обзоры и анализ кватернионных методов и моделей регулярной небесной механики и астродинамики (механики космического полета), в которых используются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля и параметры Эйлера, чаще называемые в России параметрами Родрига–Гамильтона, для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, а также обзоры их приложений к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата (КА). С помощью этих методов и моделей устраняются особенности, порождаемые гравитационными силами и возникающие в уравнениях этих задач при соударении тел. Такого рода сингулярности создают не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности в небесной механике и астродинамике, в особенности при изучении движения небесных и космических тел по сильно вытянутым орбитам.

Эффективность решения задач небесной механики и астродинамики во многих случаях повышается за счет использования уравнений орбитального движения, записанных в той или иной вращающейся (промежуточной (intermediate)) системе координат с помощью использования таких понятий как форма, размеры и ориентация мгновенной орбиты изучаемого движущегося тела (например, КА). В уравнениях движения такого рода присутствуют переменные, характеризующие угловое движение используемой вращающейся системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела.

В качестве таких переменных в механике и астродинамике традиционно используются углы Эйлера или направляющие косинусы. Использование углов Эйлера позволяет записать уравнения орбитального движения в наглядной форме, но приводит к появлению в уравнениях движения громоздких тригонометрических выражений и дополнительных особых точек, в которых уравнения вырождаются. Так, в состав широко используемых уравнений Ньютона–Эйлера для оскулирующих элементов (медленно изменяющихся переменных) [6, 7] входят дифференциальные уравнения для угловых элементов: долготы восходящего узла, наклона (наклонения) орбиты, углового расстояния перицентра от узла. Эти уравнения вырождаются, когда угол наклона мгновенной орбиты изучаемого тела становится равным нулю или 180 град. Использование направляющих косинусов позволяет устранить указанную особенность уравнений движения изучаемого тела, однако приводит к существенному повышению размерности системы уравнений движения и к потере геометрической наглядности.

Этих недостатков использования углов Эйлера и направляющих косинусов удастся избежать, если в качестве параметров ориентации используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты изучаемого тела, или плоскости орбиты выбрать параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). В этом случае для описания ориентации этой системы координат и орбиты изучаемого тела удобно использовать гиперкомплексную переменную – кватернион поворота Гамильтона, компонентами которого являются вещественные параметры Эйлера. При этом в составе уравнений траекторного (орбитального) движения появляется дифференциальное кватернионное уравнение углового движения используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты, или плоскости орбиты изучаемого тела, имеющее компактную, симметричную и невырождающуюся структуру. Эти уравнения в настоящее время стали широко использоваться в небесной механике и астродинамике, также как и кватернионные уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и параметрах Эй-

лера, регулярные для орбитального движения тела в гравитационных и других центральных силовых полях.

Кватернион — четырехмерное гиперкомплексное число (или переменная) с одной вещественной и тремя мнимыми единицами. Был введен в математику и механику Гамильтоном (1843) [8]. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного, обладает геометрической наглядностью векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно обладает большей общностью и гибкостью. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена, причем она легко алгоритмизуема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме этого, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, могут непосредственно использоваться векторные величины, определенные своими проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением.

Наиболее эффективная регуляризация особенностей уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами, достигается за счет перехода от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к переменным Кустаанхеймо—Штифеля (Kustaanheimo—Stiefel), 1964, 1965, 1971) [9–11], т.е. за счет перехода от пространства меньшей размерности к пространству большей размерности, а также за счет регуляризуемого преобразования времени и использования дополнительных энергетических переменных. Четырехмерность нового используемого пространства делает естественным использование четырехмерных гиперкомплексных переменных (кватернионов Гамильтона) для описания движения в таком пространстве.

Кватернионы давно и успешно используются в механике, навигации и управлении движением для описания углового (вращательного) движения твердого тела. Использование параметров Эйлера и кватернионов Гамильтона для описания орбитального (поступательного, траекторного) движения и для построения кватернионных динамических уравнений такого движения стало распространенным сравнительно недавно.

2. Анализ регулярных моделей небесной механики и астродинамики, построенных с использованием параметров Эйлера другими исследователями. Регулярные модели орбитального движения, построенные в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона), рассматривались, например, Deprit (1976), Брумбергом (1980), Брагазиным, Бранцем и Шмыглевским (1986), Бранцем и Шмыглевским (1992), Pelaez, Hedo и Rodriguez de Andres (2007), Bau, Urrutxua и Pelaez (2014), Bau, Bombardelli, Pelaez и Lorenzini (2015), Libro (2016), Roa и Kasdin (2017), Amato, Bombardelli, Bau, Morand, Aaron J. Rosengren (2019), Bau и Roa (2020) [12–22].

Deprit [12] вводит систему координат, две оси которой лежат в мгновенной плоскости орбиты, а третья направлена по нормали к ней. Рассматриваются возмущения, имеющие силовую функцию. Уравнения возмущенного кеплерового движения записываются во введенной системе координат в гамильтоновой форме с использованием пффафовой формы (the Pfaffian form). Далее уравнения записываются в орбитальной системе координат в традиционной форме (Andoyer 1923) [23], в которой в качестве переменных используются углы Эйлера (Eulerian angles): долгота восходящего узла (the longitude of the ascending node) h , наклонение I (the inclination), аргумент широты (the argument of the latitude) ζ , расстояние до ньютоновского центра притяжения r , модуль G вектора момента орбитальной скорости. Затем уравнения возмущенного движения записываются в узловой системе координат (the nodal frame), одна из осей которой направлена вдоль линии узлов (линии пересечения плоскости орбиты и неподвижной плоскости (i, j)).

Вводится идеальная (совершенная) система координат (*ideal frames*), положение которой определяется углами Эйлера: долготой восходящего узла h , наклоном I и долготой σ , отсчитываемой в плоскости орбиты на восток. Отмечается, что ни орбитальная, ни узловая системы координат не являются идеальной системой координат. Записываются уравнения возмущенного кеплерового движения в идеальной системе координат, в которых в качестве переменных используются декартовы координаты x и y в идеальной системе координат, их первые производные по времени, долгота восходящего узла h , наклонение I и модуль G вектора момента орбитальной скорости. Отмечается, что эти уравнения были получены ранее Deprit (1975) [24] и что, если в этих уравнениях совершить переход в плоскости орбиты от декартовых координат к полярным, то эти уравнения превратятся в хорошо известные уравнения возмущенного кеплерового движения, записанные в идеальной системе координат Andoyer [23], Musen (1959) [25]. Их сравнение с уравнениями, записанными в орбитальной или узловой системе координат, позволяет установить, что главное преимущество идеальной системы координат состоит в исключении из уравнений, описывающих движение частицы в плоскости орбиты, производных от элементов, определяющих положение плоскости орбиты.

Отмечается также, что Brown и Shook (1933) [26] считают, что идеальные системы координат есть нечто, разделяющее движение в плоскости орбиты и вращение орбитальной плоскости в пространстве. Далее Deprit вводит параметры Эйлера так, как это впервые сделал Musen (1961, 1964) [27, 28] для описания положения апсидальной плоскости: параметры Эйлера определяются формулами через синусы и косинусы половинного угла наклона I и половинной разности или суммы долготы восходящего узла h и долготы σ , которые являются медленными угловыми переменными. Выводятся скалярные дифференциальные уравнения для параметров Эйлера первого порядка, правые части которых содержат частные производные от возмущающего потенциала по параметрам Эйлера и компоненту непотенциального возмущающего ускорения, ортогональную плоскости мгновенной орбиты. Эти уравнения дополняются скалярными дифференциальными уравнениями для декартовых координат точки в плоскости ее мгновенной орбиты и их первыми производными по времени. В итоге Deprit получают уравнения возмущенного кеплерового движения, записанные в идеальной системе координат, мгновенная ориентация которой в неподвижной (фиксированной) системе координат описывается параметрами Эйлера.

Deprit [12] отмечает, что случай отсутствия возмущающего потенциала уже был рассмотрен в орбитальной системе координат Broucke, Lass and Ananda (1971) [29] (при этом был применен элементарный геометрический подход), а в идеальной системе координат был рассмотрен Deprit [24]; случай отсутствия непотенциального возмущающего ускорения был изучен Musen [28] в апсидальной системе координат.

Брумбергом (1980) [13] рассматриваются уравнения возмущенной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера. Брумбергом отмечается, что среди математических проблем небесной механики актуальны вопросы регуляризации и стабилизации уравнений небесной механики, в частности, развитие регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, которая сводит кеплеровское движение в трехмерном пространстве к задаче гармонического осциллятора в четырехмерном пространстве. Им также отмечается, что правые части дифференциальных уравнений небесной механики принимают симметричную форму, приближающуюся к полиномиальной, и становятся более удобными для вычислений, если вместо трех углов Эйлера вводятся четыре параметра Эйлера, которые можно рассматривать как компоненты единичного четырехмерного вектора. Такая модификация классических методов, по мнению Брумберга, была начата Musen (1963) и постепенно приобретает все большую популярность.

Брумбергом [13] описано применение параметров Эйлера к выводу уравнений возмущенного движения в ганзеновских координатах. В правые части полученных им уравнений в параметрах Эйлера входит в качестве общего множителя величина, обратно пропорциональная модулю вектора момента орбитальной скорости, а также входят частные производные от возмущающего потенциала по параметрам Эйлера и компонента непотенциального возмущающего ускорения, ортогональная плоскости мгновенной орбиты. Брумберг отмечает, что уравнения, аналогичные этим уравнениям, были выведены другим способом Derpit [12]. Он также отмечает, что в зависимости от специфики конкретной задачи полученную им систему уравнений для описания движения в ганзеновских координатах можно подвергнуть дальнейшему преобразованию. В частности, левые части этих уравнений можно привести к линейному виду переходом к параболическим координатам Леви-Чивиты и введением новой независимой переменной типа эксцентрической аномалии.

В работах Брагазина, Бранца и Шмыглевского (1986, 1992) [14, 15] дается вывод уравнений орбитального движения, например, искусственного спутника Земли, записанных в орбитальной системе координат. Орбитальные параметры разделяются на две группы: на внутренние параметры, определяющие форму и размер орбиты, а также положение спутника на орбите, и внешние, определяющие пространственную ориентацию орбиты в инерциальной системе координат. В качестве внутренних параметров выбираются расстояние r спутника до центра масс Земли (модуль радиус-вектора спутника), отношение модуля H вектора момента орбитальной скорости к расстоянию r и отношение гравитационной постоянной μ к модулю H . В качестве внешних параметров выбираются параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), т.е. компоненты кватерниона, определяющего ориентацию орбитальной системы координат в инерциальной системе координат. Предложенные дифференциальные уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона, записываются в скалярной и кватернионной формах. Коэффициентами в этих уравнениях являются проекции вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат на ее же координатные оси. Первая проекция этого вектора равна нулю, вторая проекция равна взятому со знаком “минус” отношению расстояния r к модулю H , умноженному на проекцию возмущающего ускорения, ортогональную плоскости мгновенной орбиты спутника, третья проекция равна взятому со знаком “минус” отношению модуля H к квадрату расстояния r спутника (вторая и третья проекции записываются этими авторами в более сложном виде, выраженном через введенные ими внутренние параметры и содержащем гравитационную постоянную μ).

В работе [16] (2007) рассмотрен специальный метод возмущений, в котором, по словам авторов, объединяется простота компьютерной реализации, скорость и точность вычислений, и который может использоваться для описания движения по орбите любой материальной частицы. В статье описывается эволюция некоторых орбитальных элементов на основе параметров Эйлера, которые являются постоянными в невозмущенной задаче, но которые изменяются под действием наложенного возмущения. Используется метод вариации параметров для получения выражений для производных семи элементов для общего случая, который включает любой тип возмущения. Эти основные дифференциальные уравнения немного изменены введением одного дополнительного уравнения для времени и имеют общий порядок, равный восьми. Метод был разработан в Grupode Dinamicade Tethers (GDT) UPM, как инструмент для динамического моделирования, ограниченного в известных пределах. Тем не менее, по словам авторов, он может быть использован в любой другой области и с любым видом орбиты и возмущения. Он не имеет особенностей, связанных с небольшим наклоном и (или) эксцентриситетом. Использование параметров Эйлера делает его устойчивым. Силами возмущения управляют очень простым способом: метод требует, чтобы их компоненты (возмущения) были определены в орбитальной или в инерци-

альной системе координат. В статье проводится сравнение с другими схемами, чтобы показать хорошую производительность предлагаемого метода.

В работе [17] предложен метод для специальных возмущений для распространения эллиптических орбит в возмущенной задаче двух тел: EDromo. Вектор состояния (неособых орбитальных элементов) состоит из элемента времени и семи пространственных элементов, а независимая переменная представляет собой обобщенную эксцентричную аномалию, введенную посредством преобразования времени Sundman. Ключевую роль в методе играет промежуточная система отсчета, которая обладает свойством оставаться неподвижной в пространстве, пока возмущения отсутствуют. Три элемента EDromo характеризуют динамику в орбитальной системе отсчета и ее ориентацию относительно промежуточной системы отсчета, а параметры Эйлера, связанные с промежуточной системой отсчета, представляют собой четыре других пространственных элемента. Производительность EDromo была проанализирована с учетом некоторых типичных проблем в астродинамике. Практически во всех приведенных авторами тестах метод является лучшим среди других популярных формулировок, основанных на элементах.

В работе [18] предложены семь пространственных элементов и элемент времени в качестве переменных состояния нового специального метода возмущений для задачи двух тел. Новые элементы сохраняют нулевой эксцентриситет и наклон, а также отрицательные значения полной энергии. Они развиваются путем объединения пространственного преобразования в проективные координаты (как в регуляризации Burdet–Ferrandiz) с временным преобразованием, в котором показатель радиуса орбиты равен единице вместо двух (как это обычно делается в литературе). Следуя этому подходу, авторы обнаруживают новую линеаризацию задачи двух тел, из которой орбитальные элементы могут быть получены методом вариации параметров. Геометрическая значимость пространственных величин проявляется в новой промежуточной системе отсчета, которая отличается от локальной вертикальной локальной горизонтальной системы на одно вращение в мгновенной плоскости орбиты. Четыре элемента параметризуют ориентацию в пространстве этой системы отсчета, которая, в свою очередь, определяет ориентацию плоскости орбиты и фиксирует направление вылета для долготы движущегося тела. Оставшиеся три элемента определяют движение вдоль вектора радиальной единицы и орбитальной долготы. Эффективность метода, протестированного с использованием ряда эталонных сценариев распространения орбиты, является, по мнению авторов, чрезвычайно хорошей по сравнению с несколькими регуляризованными составами, некоторые из которых были изменены и улучшены здесь впервые.

Дополнительно отметим, что этими авторами используются уравнения движения, записанные в орбитальной системе координат. Для описания ее ориентации используются параметры Эйлера, уравнения для которых записываются в скалярной и матричной формах. В качестве переменных также используются временной элемент, элемент $\lambda_3 = -1/(2\varepsilon)$ и элементы λ_1 and λ_2 (первые интегралы невозмущенного движения). Вместо времени используется новая переменная φ : $dt/d\varphi = r/(-2\varepsilon)^{1/2}$, где ε — полная энергия, r — расстояние. Сравняются результаты численного решения предлагаемых уравнений и других уравнений, в том числе уравнений в KS -переменных. Показывается, что лучшую точность дают уравнения в KS -переменных и уравнения, предложенные авторами, причем решения новых уравнений для рассмотренных примеров имеют меньшие погрешности, чем решения уравнений в KS -переменных.

Librago (2016) [19] отмечается, что обычный маневр космического корабля по поднятию орбиты с помощью электрического двигателя должен иметь дело с четырьмя основными ограничивающими факторами: более продолжительное время полета, множественные затмения, запрещающие непрерывную тягу, длительное воздействие излучения пояса Ван Аллена (Van Allen) и высокие требования к мощности электро-

двигателей. Чтобы оптимизировать передачу малой тяги с учетом этих проблем, выбор координат и соответствующих уравнений движения, используемых для описания кинематического и динамического поведения спутника, имеют решающее значение. Этот выбор потенциально может повлиять на процесс численной оптимизации, а также ограничить набор сценариев миссии, которые можно исследовать. Чтобы повысить способность определять возможный набор сценариев миссии, способных решить полностью проблемы электрического поднятия орбиты, требуется набор уравнений, свободный от каких-либо сингулярностей, для рассмотрения полностью произвольной орбиты инъекции. С этой целью Librago была разработана новая кватернионная формулировка поступательной динамики космического аппарата, которая является глобально невырожденной. Задача минимального времени и малой тяги была решена с использованием новой системы уравнений движения внутри схемы прямой оптимизации для исследования оптимальных траекторий малой тяги во всем диапазоне углов наклона орбиты от 0 до 90 градусов. В состав этой системы уравнений входят кинематические уравнения в параметрах Эйлера.

Roa and Kasdin [20] предложили альтернативный набор неособых кватернионных орбитальных элементов (alternative set of nonsingular quaternionic orbital elements), с помощью которых описывается движение материальной точки (the particle) в инерциальной системе координат. Ими в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел предложены уравнения (15)–(20) [20] орбитального движения частицы, записанные во вращающейся (промежуточной (intermediate frame)) системе координат Q , третья ось которой направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} частицы, а проекция ω_3 вектора абсолютной угловой скорости которой на направление вектора \mathbf{r} равна нулю (такая система координат в авиации называется свободной в азимуте). Для описания вращения системы координат Q используются кватернион \mathbf{q} и кватернионное кинематическое уравнение в параметрах Эйлера q_j – компонентах кватерниона \mathbf{q} . Переменными в предложенных уравнениях являются величина $u = 1/r$ (r – расстояние до центра притяжения (the radial distance)), проекции ω_1 и ω_2 абсолютной угловой скорости промежуточной системы координат на ее же координатные оси, кватернион \mathbf{q} , модуль h вектора момента орбитальной скорости (the module h of the angular momentum vector), реальное время t . Выбранная новая независимая переменная v является истинной аномалией (the true anomaly) для невозмущенного кеплеровского движения. Эти уравнения близки (в отношении используемых переменных) к регулярным уравнениям возмущенной задачи двух тел, полученным нами в работе [30] (1984). В этих уравнениях в качестве переменных выбраны (в принятых в этой работе обозначениях) расстояние r , две проекции ω_2 и ω_3 вектора абсолютной угловой скорости азимутально свободной системы координат η на ее же координатные оси (ее проекция $\omega_1 = 0$), кеплеровская энергия h , кватернион λ ориентации системы координат η в инерциальной системе координат и реальное время t . В качестве новой независимой переменной выступает переменная τ , связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$. Отметим, однако, что уравнения Roa and Kasdin (15)–(20) [20], в отличие от уравнений работы [30], не являются регулярными (в отношении расстояния) для движения в ньютоновском гравитационном поле.

Из выше описанных уравнений (15)–(20) Roa and Kasdin получены регулярные дифференциальные уравнения (37)–(42) [20] в оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных. Уравнения получены методом вариации произвольных постоянных интегрирования λ_1 и λ_2 линейного дифференциального уравнения второго порядка для переменной $u = 1/r$ в случае кеплеровского движения, введением вместо проекций ω_1 и ω_2 двух новых переменных $\lambda_3 = \omega_1/u^2$ и $\lambda_4 = \omega_2/u^2$ (λ_3 и λ_4 – интегралы (постоянные площадей) для невозмущенного кеплеровского движения) и мультипликативным введением новой кватернионной переменной \mathbf{g} , которая является кватер-

нионной постоянной интегрирования кватернионного дифференциального уравнения ориентации системы координат Q в случае кеплеровского движения частицы. Эти уравнения являются регулярными, за исключением случая, когда модуль вектора момента орбитальной скорости $h = 0$. Эта особенность появляется, когда радиус-вектор \mathbf{r} частицы и вектор ее скорости становятся параллельными или когда любой из этих двух векторов равен нулю.

В аннотации статьи говорится, что кватернионные элементы в орбитальной механике обычно связываются с преобразованием Кустаанхеймо–Штифеля или с определением орбитальной плоскости. Новый набор регулярных элементов, представленный в этой статье, происходит от формы уравнений движения вращающегося тела, которые моделируют эволюцию кватерниона, определяющего ориентацию связанной с телом системы координат и изменение угловой скорости такой системы координат. Заменяя связанную с телом систему координат специальной орбитальной системой координат и составляя уравнения для радиального движения отдельно, можно построить эквивалентное решение для орбитального движения. Изменение (вариация) параметров радиального движения поставляет новый набор элементов, который является независимым от описания орбитальной плоскости. Преобразованием Sundman второго порядка вводится фиктивное время, которое заменяет физическое время в качестве новой независимой переменной. Эта техника улучшает числовую работу метода. Использование временного элемента приводит к еще более гладкому изменению орбитальных элементов под действием возмущений. Как только скобки Lagrange и Poisson получены, самая общая неособая (nonosculating) версия набора элементов оказывается представленной. Относительно числовых экспериментов авторами показано, что метод сопоставим с другими формулировками, использующими подобную стабилизацию и методы регуляризации.

В статье [21] сравниваются полуаналитические и неусредненные регуляризованные методы. Показывается, что эффективные реализации неусредненных регуляризованных формулировок уравнений движения, и особенно методов неособых элементов, являются привлекательными кандидатами для долгосрочного изучения высотного и высокоэллиптического спутника Земли. Также показывается, что специальные методы возмущения, основанные на регуляризованных формулировках, могут конкурировать и даже работать лучше, чем полуаналитические методы для долгосрочного движения (порядка десятилетий) объектов, вращающихся вокруг Земли и что для такого рода применений формулировка Cowell никогда не используется из-за малых требуемых размеров шагов, которые вызывают сильное накопление ошибки округления и длительное время вычислений. Для выполнения этого исследования авторы разработали код Fortran, названный THALASSA, который включает метод Cowell's, EDromo, регуляризацию Кустаанхеймо–Штифеля (KS -регуляризацию) [10], и набор регулярных элементов, которые были получены Stiefel и Scheifele [11] из KS -переменных.

Как известно, три элемента EDromo характеризуют динамику в орбитальной системе отсчета и ее ориентацию относительно промежуточной системы отсчета, а параметры Эйлера, связанные с промежуточной системой отсчета, представляют собой четыре других пространственных элемента.

В работе Van и Roa [22] представлен новый метод вычисления орбит в возмущенной задаче двух тел: векторы положения и скорости движущегося объекта в декартовых координатах заменяются восемью орбитальными элементами, которые являются константами для невозмущенного движения. Предлагаемые элементы равномерно действительны для любого значения суммарной энергии. Их определение вытекает из идеи применения временного преобразования Sundman's в рамках проективного разложения движения, которое является отправной точкой линеаризации Burdet–Ferrandiz в сочетании с функциями Штумпфа (Stumpff). По аналогии с идеальными элементами Деприта, формулировка опирается на специальную (промежуточную) систему

координат, которая медленно вращается под действием внешних возмущений. Отсюда и название элементов, два из них связаны с радиальным движением, следующие четыре, параметры Эйлера, задают ориентацию промежуточной системы координат. Полная энергия и элемент времени завершают вектор состояния. Предоставлены все необходимые формулы для расширения метода для определения орбиты и “распространения” неустойчивости (uncertainty propagation). Например, частные производные положения и скорости по отношению к промежуточным элементам получены явно вместе с обратными частными производными. Численные тесты включены для оценки эффективности предлагаемого специального метода возмущений при движении по орбите комет C/2003 T4 (LINEAR) и C/1985 K1 (Machholz).

3. Регулярные модели небесной механики и астродинамики, построенные автором статьи с использованием параметров Эйлера. 3.1. *Параметры Эйлера и проблема регуляризации уравнений задачи двух тел.* В работах [31, 30] (1981, 1984) получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) матричные [31] (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные [30] (с использованием кватернионов Гамильтона) регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в четырехмерных *KS*-переменных в предположении, что хорошо известное билинейное соотношение, лежащее в основе построения регулярных уравнений Кустаанхеймо–Штифеля, не выполняется.

Для получения этих уравнений нами были использованы восьмимерные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0 ($j = 0, 1, 2, 3$) введенной поступательно перемещающейся и вращающейся в инерциальном пространстве системы координат η , а также полученные в этих переменных матричные [31] и кватернионные [30] дифференциальные уравнения возмущенного движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле, записанные в промежуточной системе координат η . Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} второго (рассматриваемого) тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Переменные λ_j являются параметрами Эйлера и характеризуют ориентацию системы координат η в инерциальной системе координат, а переменные λ_j^0 характеризуют поступательное движение системы координат η в инерциальной системе координат.

В этих работах отмечается, что дуальные переменные $\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0$ являются дуальными параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона), которые, в свою очередь, являются компонентами бикватерниона конечного перемещения Клиффорда (Clifford 1873) [32] $\Lambda = \lambda + s\lambda^0$, описывающего пространственное движение (вращательное и поступательное) промежуточной системы координат η . (В дуальных переменных Λ_j символ s – комплексность Клиффорда, обладающая свойством $s^2 = 0$.) В нашей работе [30] также отмечено, что использованные кватернионные дифференциальные уравнения в переменных λ и λ^0 эквивалентны одному бикватернионному (дуальному кватернионному) кинематическому уравнению (Челноков 1980) [33] движения свободного твердого тела (системы координат η).

Декартовы координаты x, y, z рассматриваемого тела в инерциальной системе координат связаны с параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0 системы координат η соотношениями, которые в кватернионной записи имеют вид [33]

$$\mathbf{r}_{in} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \bar{\lambda}$$

В [31] установлено, что из этих соотношений получается регуляризирующее *KS*-преобразование координат

$$\mathbf{r}_{in} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

если параметры λ_j и λ_j^0 положить равными

$$\lambda_0 = r^{-1/2}u_0, \quad \lambda_i = -r^{-1/2}u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_0^0 = (1/2)r^{1/2}u_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)r^{1/2}u_0, \quad \lambda_2^0 = -(1/2)r^{1/2}u_3, \quad \lambda_3^0 = (1/2)r^{1/2}u_2$$

т.е. когда параметры λ_j и λ_j^0 связаны соотношениями

$$\lambda_0^0 = -(1/2)r\lambda_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)r\lambda_0, \quad \lambda_2^0 = (1/2)r\lambda_3, \quad \lambda_3^0 = -(1/2)r\lambda_2$$

Здесь r – модуль радиус-вектора \mathbf{r} , u_j – переменные Кустаанхеймо–Штифеля; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, \circ – символ кватернионного произведения, верхняя черта – символ сопряжения.

Поэтому KS -преобразование заключается в переходе от декартовых координат x, y, z рассматриваемого тела к новым переменным u_j , которые являются параметрами Эйлера λ_j , нормированными с помощью множителя $r^{1/2}$, содержащего расстояние r от рассматриваемого тела до центра притяжения.

Проекция η_j радиус-вектора \mathbf{r} рассматриваемого тела, проводимого из центра притяжения, на оси системы координат η связаны с параметрами λ_j и λ_j^0 кватернионным соотношением [33]

$$\mathbf{r}_\eta = \eta_1\mathbf{i} + \eta_2\mathbf{j} + \eta_3\mathbf{k} = 2\bar{\lambda} \circ \lambda^0$$

Из этого соотношения с учетом выше приведенных связей переменных λ_j и λ_j^0 вытекает, что в рассматриваемом случае отображение \mathbf{r}_η радиус-вектора \mathbf{r} на базис η определяется соотношением

$$\mathbf{r}_\eta = \eta_1\mathbf{i} = r\mathbf{i}$$

и, следовательно, ось η_1 системы координат η направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} .

Таким образом, нами было показано, что регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля могут быть получены с помощью записи уравнений этой задачи во введенной вращающейся системе координат η , использования в качестве параметров ориентации этой системы координат параметров Эйлера и дальнейшей их нормировкой в соответствии с выше приведенными соотношениями.

Было также показано, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1 du_0/d\tau - u_0 du_1/d\tau + u_3 du_2/d\tau - u_2 du_3/d\tau = 0$$

связывающее между собой KS -переменные u_j и их первые производные $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ и играющее, по словам Штифеля и Шейфеле [11], основную роль в их построении регулярной небесной механики, накладывает на движение системы координат η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости этой системы координат на направление радиус-вектора \mathbf{r} (ось η_1):

$$\omega_1 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 - \lambda_2\dot{\lambda}_3 + \lambda_3\dot{\lambda}_2) = 2r^{-1}(-u_0\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_0 - u_2\dot{u}_3 + u_3\dot{u}_2) = 0$$

Здесь верхняя точка – символ дифференцирования по времени t .

3.2. Регуляризация уравнений возмущенного центрального движения. Идеи в области кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел были использованы нами [34–37] (1985, 1993) для разработки общей кватернионной теории регуляризирующих и стабилизирующих преобразований уравнений возмущенного центрального движения материальной точки, имеющих вид векторного дифференциального уравнения второ-

го порядка для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi(r)$ под действием возмущающей силы с потенциалом $\Pi^*(\mathbf{r})$ и возмущающего ускорения $\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$. Здесь \mathbf{r} – радиус-вектора точки, проводимый из центра силового поля, потенциал $\Pi(r)$ полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от материальной точки до центра этого силового поля.

В работах [34–37] получены общие кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки второго порядка с тремя регуляризирующими функциями, условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к удобному для аналитического и численного исследования осцилляторному виду (к виду уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае невозмущенного центрального движения гармонические колебания с одинаковой частотой), а также кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной форме. Из этих уравнений получены [37], как частные, системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения, в которых используются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), а также системы кватернионных уравнений возмущенного движения, содержащие обобщенное уравнение Бинэ. Эти уравнения были также получены нами [38, 39] другим путем.

Полученные кватернионные системы уравнений возмущенного центрального движения отличаются своей структурой, размерностью, используемыми зависимыми и независимыми переменными и свойствами, описанными в этих работах.

Основное достоинство систем дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения, полученных с использованием параметров Эйлера и независимой переменной τ ($d\tau = r^2 dt$) или независимой переменной φ ($d\varphi = cr^2 dt$), заключается в том, что каждое из входящих в эти системы уравнений дифференциальное кватернионное уравнение в параметрах Эйлера второго порядка является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ (здесь c – модуль вектора момента количества движения точки).

Кроме этого, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений в параметрах Эйлера становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора с частотой колебаний, равной $c/2$ во “времени” τ , или с частотой, равной $1/2$ во “времени” φ (параметры Эйлера осциллируют с указанными частотами “во времени” τ и φ), что является удобным для решения ряда задач методами нелинейной механики. При этом дифференциальные уравнения для полной энергии и модуля вектора момента количества движения точки, входящие в состав этих систем уравнений, также являются регулярными для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Уравнения же для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$, имеющего четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения, т.е. для потенциала

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3} - a_4 r^{-4} \quad (a_i = \text{const})$$

В отличие от этих уравнений уравнения Кустаанхеймо–Штифеля имеют более простой вид, однако они регулярны лишь для потенциала, имеющего первый порядок относительно величины r^{-1} , когда $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$.

Полученные нами системы регулярных уравнений могут быть использованы, в частности, для изучения движения материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. Траектории точки в таком пространстве соответствуют траекториям при движении в поле центральной силы с потенциалом

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_3 r^{-3} \quad (a_i = \text{const})$$

Поэтому эти регулярные уравнения могут быть использованы для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО).

В наших работах [40, 41] они были использованы для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник (с регуляризацией слагаемых уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния r до четвертого порядка включительно).

3.3. Уравнения орбитального движения в кватернионных оскулирующих элементах, соответствующих параметрам Эйлера и их первым производным. Из кватернионных дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения нами получены (1993) [39] уравнения возмущенного орбитального движения спутника, в состав которых входят уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), соответствующих параметрам Эйлера и их первым производным по обобщенной истинной аномалии, а из кватернионных регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля получены [1, 3] регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в кватернионных оскулирующих элементах, соответствующих KS -переменным и их первым производным по “фиктивному” времени. Эти уравнения получены с использованием метода вариации произвольных кватернионных постоянных интегрирования и удобны для применения методов нелинейной механики.

3.4. Регулярные уравнения орбитального движения и параметры Эйлера. Нами предложены новые, регулярные кватернионные уравнения небесной механики и астродинамики, в которых используются переменные, характеризующие форму и размеры орбиты материальной точки (частицы), и параметры Эйлера для описания вращения используемой вращающейся (промежуточной) системы координат или ориентации мгновенной орбиты или плоскости орбиты. Эти уравнения не имеют особенностей, порождаемых использованием углов Эйлера, и удобны для решения ряда задач небесной механики и астродинамики.

К таким моделям относятся уравнения задачи двух тел и орбитального движения космического аппарата, записанные с использованием кватернионов в неголономном (азимутально-свободном) координатном трехграннике [1, 2, 30, 31, 34–38, 42–44], в орбитальном координатном трехграннике [1, 2, 38, 42, 45, 46], в орбитальной и идеальной системах координат с использованием первого кватернионного оскулирующего элемента орбиты [38, 39, 45, 46], в идеальной системе координат с использованием первого кватернионного оскулирующего элемента орбиты и идеальных прямоугольных координат Ганзена [47], а также уравнения, записанные с использованием второго кватернионного оскулирующего элемента орбиты [47]. Все эти модели имеют свои достоинства, проявляющиеся при решении тех или иных задач небесной механики и астродинамики. Автором статьи с их помощью решен ряд задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата. В состав этих уравнений входит кватернионное дифференциальное уравнение ориентации или неголономной (азимутально-свободной), или орбитальной, или идеальной системы координат, или кватернионное дифференциальное уравнение мгновенной ориентации орбиты изучаемого тела в параметрах Эйлера.

В работе [47] рассматриваются особенности типа сингулярности (деления на ноль), порождаемые использованием в небесной механике и астродинамике классических уравнений в угловых переменных (в частности, в углах Эйлера) и устраняемые с помощью использования параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов Гамильтона. Рассматриваются основные регулярные в указанном смысле кватернионные модели небесной механики и астродинамики: уравнения траекторного движения, записанные в неголономном, орбитальном и идеальном сопровождающих трехгранниках, для описания вращательного движения которых используются параметры Эй-

лера и кватернионы поворотов, а также кватернионные уравнения ориентации мгновенной орбиты небесного тела (космического аппарата). Выводятся новые кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (траекторного движения КА), построенные с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера и кватернионных переменных и имеющие наряду с известными достоинствами регулярных уравнений Куستاанхеймо–Штифеля свои дополнительные достоинства.

3.5. Регулярные кватернионные уравнения орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли и параметры Эйлера. В наших работах [40, 41] предложены регулярные кватернионные модели возмущенного орбитального движения твердого тела, не имеющие особенностей, присущих классическим моделям, при движении тела в ньютоновском гравитационном поле и, в общем случае, при движении тела в центральном силовом поле, потенциал которого имеет вид полинома отрицательных степеней расстояния до центра притяжения четвертого порядка. Предложены также регуляризованные кватернионные модели возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения, учитывающие несферичность Земли. В этих моделях понижены на несколько порядков отрицательные степени расстояния до центра притяжения в слагаемых, описывающих влияние на орбитальное движение твердого тела зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала поля тяготения Земли. Основными переменными являются параметры Эйлера (или соответствующая им кватернионная переменная), расстояние от центра масс тела до центра притяжения, полная энергия орбитального движения тела и квадрат модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекции этого вектора). В моделях используется новая независимая переменная, связанная с временем дифференциальным соотношением, содержащим квадрат расстояния от центра масс тела до центра притяжения.

В случае орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений орбитального движения, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения тела замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, систему уравнений третьего порядка для расстояния, синуса геоцентрической широты и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости.

3.6. Регулярные уравнения движения точки в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием силы, ортогональной плоскости орбиты и параметры Эйлера. Среди задач астродинамики важное место занимают задачи оптимального управления ориентацией орбиты, плоскости орбиты космического аппарата, рассматриваемого как материальная точка, и задачи коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения или реактивной тяги двигателя КА, ортогональных плоскости орбиты КА.

В случае реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, дифференциальные уравнения движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле, описывающие изменение размеров и формы мгновенной орбиты КА, интегрируются, давая уравнение конического сечения. Поэтому управляемое движение центра масс КА в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, описывающими изменение мгновенной ориентации орбиты КА или используемой (например, орбитальной) вращающейся системы координат, в которой записываются исходные уравнения движения центра масс КА, и дифференциальным уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите.

Для управления (или возмущения), ортогонального мгновенной плоскости орбиты КА, форма и размеры орбиты КА в процессе управления не изменяются, а орбита по-

ворачивается в пространстве как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Это ценное свойство такого процесса переориентации орбиты КА является полезным как при решении задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета.

Традиционно используемые классические дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в угловых элементах орбиты являются наглядными, но существенно нелинейными и содержат особые точки, в которых угол наклона мгновенной орбиты КА становится равным нулю или 180 градусам, и в которых эти уравнения вырождаются (становятся непригодными). Таких проблем не имеют кватернионные дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА [4, 39, 47–49] и орбитальной системы координат [38, 47–49] в параметрах Родрига–Гамильтона (Эйлера), предложенные автором статьи.

Отметим также, что решение задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА как деформируемой фигуры (на основе общих уравнений движения центра масс КА, содержащих три компонента вектора управления) оказывается несостоятельным из-за вырождаемости в этом случае дифференциального уравнения для истинной аномалии (из-за наличия особенности типа сингулярности в этом уравнении). Такая же проблема в случае круговой орбиты возникает и при решении задачи переориентации орбиты с использованием общих дифференциальных уравнений движения центра масс КА в классических оскулирующих элементах орбиты. Вместе с тем актуальность задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА имеет большое практическое значение из-за того, что спутниковые навигационные группировки располагаются на круговых орбитах.

Отметим, что проблема вырожденности классических орбитальных элементов орбиты движущегося тела (например, КА) частично решается в механике космического полета за счет использования так называемых “невырожденных” орбитальных элементов (иногда для них используют термин “equinoctial elements”) и соответствующих уравнений ориентации орбиты Battin [50]. Эти уравнения, также как и предложенные автором статьи кватернионные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, не имеют особой точки (деления на ноль при равенстве нулю угла наклона орбиты), однако в этих уравнениях сохраняется особое значение угла наклона орбиты, равное 180 град. К тому же уравнения Battin и сопряженные к ним уравнения задач оптимального управления орбитальным движением КА, решаемых с использованием принципа максимума, значительно сложнее предложенных нами кватернионных регулярных фазовых и сопряженных уравнений в задачах оптимального управления орбитальным движением КА (например, в задачах оптимальной переориентации орбиты КА), как с аналитической, так и вычислительной точек зрения.

Кроме этого, кватернионное уравнение ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера обладает свойством самосопряженности: оно с точностью до обозначения кватернионной переменной совпадает с кватернионным сопряженным ему уравнением, что позволяет понизить размерность краевых задач оптимизации (с одновременным их упрощением) на четыре единицы с использованием новой кватернионной переменной, являющейся мультипликативной композицией кватернионных фазовой и сопряженной переменных (в виде их кватернионного произведения). Таким свойством классические дифференциальные уравнения ориентации орбиты в угловых элементах орбиты и уравнения Battin не обладают, причем соответствующие им сопряженные уравнения гораздо сложнее фазовых.

4. Приложение регулярных кватернионных уравнений астродинамики, в которых используются параметры Эйлера, к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата. 4.1. Задачи оптимального управления о встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом и параметры Эйлера. С использованием принципа максимума Понтрягина

и различных вариантов регулярных кватернионных уравнений орбитального движения, записанных во вращающихся системах координат с использованием параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера) и кватернионных переменных для описания ориентаций этих систем координат и орбиты КА, нами решены [1, 2, 4, 42, 44–46, 51, 52] в различных постановках (с использованием различных кватернионных моделей орбитального движения КА и различных критериев качества) задачи оптимального управления о мягкой или жесткой встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом, движущимся по кеплеровской орбите.

В одном из вариантов уравнений движения кватернионная переменная характеризует ориентацию мгновенной орбиты КА и положение КА на орбите (то есть, характеризует ориентацию орбитального трехгранника), во втором – ориентацию плоскости мгновенной орбиты КА и положение обобщенного перицентра на орбите, в третьем – ориентацию мгновенной орбиты КА. Кватернионная переменная, используемая во втором и третьем вариантах уравнений движения, является кватернионным оскулирующим элементом орбиты КА, соответствующим постановке задачи. В качестве минимизируемого функционала используется интегральный функционал качества, характеризующий расход энергии и времени на перевод управляемого КА из начального в конечное состояние, или характеристическая скорость КА. Управление (вектор ускорения от тяги реактивного двигателя) полагается ограниченным по модулю.

4.2. Задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты посредством реактивного ускорения или реактивной тяги, ортогональных плоскости орбиты КА и параметры Эйлера. В наших работах [49, 53–60] решены задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты посредством реактивного ускорения или реактивной тяги (для КА с переменной массой), ортогональных плоскости орбиты КА, с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионных дифференциальных уравнений ориентации орбитальной системы координат или орбиты КА в параметрах Эйлера в непрерывной (с ограниченным по модулю управлением) или в импульсной постановке. При таком управлении форма и размеры орбиты КА остаются в процессе управляемого движения неизменными, а сама орбита поворачивается в инерциальной системе координат как неизменяемая (недеформируемая) фигура, что важно, например, при управлении спутниковой навигационной группировкой.

Решены задачи быстрого действия, минимизации импульса реактивного ускорения или реактивной тяги, характеристической скорости КА, а также задачи минимизации комбинированных функционалов качества: времени и суммарного импульса величины ускорения или тяги, затраченных на процесс управления, времени и характеристической скорости КА.

Решение задач оптимальной переориентации орбиты и плоскости орбиты космического аппарата, коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты, с помощью уравнений в классических угловых элементах орбиты [61–66] в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек, в которых угол наклона орбиты $i = 0, \pi$, а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения этих задач вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона).

В наших работах [49, 54, 58–60] для решения указанных задач использовано кватернионное дифференциальное уравнение, описывающее ориентацию орбитальной системы координат в параметрах Эйлера, и скалярное дифференциальное уравнение для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите. В других наших работах [53, 55–57] для решения задач использовано кватернионное диф-

ференциальное уравнение мгновенной ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, и скалярное дифференциальное уравнение для истинной аномалии. Использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием малой тяги реактивного двигателя), однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задач оптимальной переориентации орбиты КА и ее плоскости и коррекции угловых элементов орбиты, так как кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

В работах [49, 53–56, 58, 59] в качестве управления используется вектор реактивного ускорения центра масс КА (масса КА полагается постоянной), задачи оптимального управления решаются в непрерывной постановке (с использованием малой тяги, ограниченной по модулю) или в импульсной постановке (с использованием большой тяги). В работах [57, 60] в качестве управления используется вектор тяги реактивного двигателя КА (масса КА полагается переменной, ее изменение описывается соответствующим дифференциальным уравнением), задачи оптимального управления решаются в непрерывной постановке с ограниченной по модулю тягой.

В работе [57] с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера и принципа максимума решена в нелинейной постановке задача об оптимальном переводе орбиты космического аппарата с переменной массой на заданную плоскость. Управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса тяги, затраченных на процесс управления. Излагается теория решения задачи. Приводятся результаты расчетов оптимального управления для случаев, когда в минимизируемом комбинированном функционале качества процесса управления одновременно учитываются оба критерия, и для случаев, когда минимизируется лишь суммарный импульс тяги. Получены примеры оптимального управления, содержащие до 192 пассивных и активных этапов. Установлены закономерности оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА.

В работе [60] решена в нелинейной постановке с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в параметрах Эйлера и принципа максимума Понтрягина задача оптимального поворота плоскости орбиты КА переменной массы в инерциальной системе координат. Рассмотрены задачи быстрогодействия, минимизации импульса тяги, характеристической скорости КА, а также задачи минимизации комбинированных функционалов качества: времени и суммарного импульса величины тяги, затраченных на процесс управления, времени и характеристической скорости КА. Управление поворотом плоскости орбиты КА на любые по величине углы производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА. Учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Частным случаем изучаемой задачи является задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА. Приведены результаты расчетов оптимального управления плоскостью орбиты КА посредством малой ограниченной реактивной тяги с большим количеством пассивных и активных участков траектории.

4.3. *Положительные стороны использования параметров Эйлера в задачах оптимального управления орбитальным движением КА.* Нами показано, что кватернионные регулярные уравнения орбитального движения центра масс КА, в состав которых входят уравнения в параметрах Эйлера, в отличие от классических уравнений орбитального движения в угловых оскулирующих элементах, содержащих особые точки (деление на ноль), этих особых точек не имеют. Эти кватернионные уравнения позволяют кардинально повысить эффективность аналитического исследования и численного решения выше указанных (*nn. 4.1, 4.2*) задач оптимального управления орбитальным движением КА, а также улучшить сходимость итерационных процессов численного решения краевых задач оптимизации. Нами с использованием параметров Эйлера установлены новые свойства оптимального управления орбитальным движением космических аппаратов и новые кватернионные первые интегралы пространственных краевых задач оптимального управления орбитальным движением, содержащие параметры Эйлера и сопряженные им переменные.

Так, в задачах оптимального управления орбитальным движением космических аппаратов, решаемых с использованием параметров Эйлера и принципа максимума Понтрягина (*n. 4.1*), были установлены новые общие кватернионные первые интегралы для фазовых и сопряженных уравнений этих задач, справедливые для любого управления орбитальным движением КА (в том числе и для оптимального управления). Эти интегралы аналогичны кватернионным первым интегралам, существующим в задачах оптимального управления вращательным движением твердого тела, установленным впервые Бранцем и Шмыглевским [67], и являются мультипликативными композициями кватернионных переменных, сопряженных к кватернионам ориентации вводимых подвижных (вращающихся) систем координат, и этих (фазовых) кватернионов ориентации, компонентами которых являются параметры Эйлера. Они имеют ясный геометрический смысл: система координат ζ , ориентация которой в инерциальном пространстве характеризуется сопряженной кватернионной переменной (сопряженной к соответствующей кватернионной фазовой переменной) оказывается повернутой относительно мгновенной фазовой системы координат η для любого момента времени на один и тот же угол вокруг эйлеровой оси, сохраняющей свое направление в инерциальной системе координат неизменным. Использование кватернионных первых интегралов позволило нам ввести новые переменные, связанные преобразованиями вращения с кватернионными первыми интегралами, и понизить с их помощью размерности исходных кватернионных дифференциальных уравнений краевых задач оптимального управления орбитальным движением с одновременным их упрощением на 5 единиц. Известные векторные первые интегралы в этих задачах справедливы только для оптимального управления и являются частными случаями векторных первых интегралов, являющихся векторными частями наших общих кватернионных первых интегралов, для оптимального управления орбитальным движением. Они не позволяют эффективно понизить размерности исходных векторных уравнений краевых задач оптимизации, записанных с использованием декартовых координат, из-за равенства нулю определителя трехмерного кососимметрического матричного коэффициента в матричном уравнении, соответствующем векторным первым интегралам.

4.4. В работе [1] даны обзор и обобщение результатов, полученных автором статьи и Сапунковым в теории оптимального управления движением материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионных моделей орбитального движения, в которых используются параметры Эйлера или переменные Кустанхаймо–Штифеля. Эта теория имеет важное значение в механике космического полета, являясь фундаментом решения задач оптимального управления движением центра масс космического аппарата. Приведен обзор кватернионных моделей движения материальной точки в централь-

ном ньютоновском гравитационном поле, дан анализ их достоинств и недостатков. Рассмотрена постановка задачи оптимального управления движением материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле и ее связь с задачей оптимального управления движением центра масс космического аппарата. Анализируются основные проблемы, возникающие при решении задач оптимального управления движением материальной точки с помощью принципа максимума, в том числе проблема неустойчивости в смысле Ляпунова решений сопряженных уравнений. Показано, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления движением материальной точки может быть повышена за счет использования кватернионных моделей орбитального движения.

4.5. В нашей работе [4] дан анализ основных проблем, возникающих при решении задач оптимального управления траекторным движением КА с помощью принципа максимума (в том числе неустойчивость в смысле Ляпунова решений сопряженных уравнений). Показано, что использование кватернионных моделей астродинамики в параметрах Эйлера или переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет устранить особые точки в дифференциальных фазовых и сопряженных уравнениях и в их частных аналитических решениях; построить новые кватернионные первые интегралы, существенно уменьшить размерности систем дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации с одновременным их упрощением за счет использования новых кватернионных переменных, связанных с кватернионными константами движения преобразованиями вращения; построить общие решения дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных на участках пассивного движения КА в наиболее простой и удобной форме, что важно для решения задач оптимальных импульсных перелетов КА; расширить возможности аналитического исследования дифференциальных уравнений краевых задач с целью выявления основных закономерностей оптимального управления и движения КА; улучшить вычислительную устойчивость решения краевых задач; уменьшить необходимый объем вычислений.

5. **Применение дуальных параметров Эйлера и бикватернионов Клиффорда в задачах управления пространственным движением твердого тела (космического аппарата).** Дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) были введены автором статьи [33, 68, 69] для описания общего пространственного движения твердого тела, представляющего собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела, эквивалентных его винтовому движению. Они определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_k = \sin(\Phi/2) \cos \Gamma_k, \quad \Phi = \varphi + s\varphi^0 \\ \Gamma_k &= \gamma_k + s\gamma_k^0, \quad k = 1, 2, 3 \\ \Lambda_j &= \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0, 1, 2, 3 \\ \lambda_0 &= \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k = \sin(\varphi/2) \cos \gamma_k \\ \lambda_0^0 &= -(\varphi^0/2) \sin(\varphi/2), \quad \lambda_k^0 = (\varphi^0/2) \cos(\varphi/2) \cos \gamma_k - \gamma_k^0 \sin(\varphi/2) \sin \gamma_k\end{aligned}$$

Здесь Φ – дуальный угол поворота тела вокруг его оси винтового конечного перемещения ab , φ – обычный (вещественный) угол поворота тела вокруг оси ab , φ^0 – величина поступательного перемещения тела вдоль оси ab , γ_k – угол между осью ab и осью X_k системы координат X , в которой рассматривается положение и движение тела, $|\gamma_k^0|$ – кратчайшее расстояние между этими осями; s – комплексность (символ) Клиффорда, имеющая свойство $s^2 = 0$; λ_j – обычные (вещественные) параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующие поворот тела вокруг оси ab в системе координат X , ве-

личины λ_j^0 характеризуют поступательное перемещение тела вдоль оси ab в системе координат X .

Автором статьи также были введены для описания общего пространственного движения твердого тела бикватернионные матрицы и бикватернион (дуальный кватернион) конечного пространственного перемещения твердого тела Λ , определяемый как комплексная (дуальная) комбинация кватернионов λ и λ^0 :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k} = \lambda + s\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0 \mathbf{i} + \lambda_2^0 \mathbf{j} + \lambda_3^0 \mathbf{k})$$

а также различные матричные (в бикватернионных матрицах) и бикватернионные (в дуальных кватернионах) кинематические уравнения пространственного движения свободного твердого тела [49, 69, 48]. Одно из этих уравнений (наиболее часто используемое уравнение) имеет вид

$$2d\Lambda/dt = \Lambda \circ \mathbf{U}_Y$$

$$\mathbf{U}_Y = U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_Y + s\mathbf{v}_Y, \quad \boldsymbol{\omega}_Y = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_Y = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

Здесь компонентами бикватерниона \mathbf{U}_Y являются дуальные ортогональные проекции $U_k = \omega_k + sv_k$ кинематического винта \mathbf{U} твердого тела на оси системы координат Y , связанной с твердым телом; ω_k и v_k – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v} угловой и линейной скоростей тела на оси системы координат Y .

Это бикватернионное уравнение является дуальным аналогом кватернионного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела

$$2d\lambda/dt = \lambda \circ \boldsymbol{\omega}_Y$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_Y = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$$

Декартовы координаты x_k твердого тела в системе координат X находятся по кватернионной формуле

$$x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \bar{\lambda}$$

где верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Кватернионы поворотов Гамильтона, компонентами которых являются широко известные вещественные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), и бикватернионы конечных перемещений Клиффорда (дуальные кватернионы), компонентами которых являются дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), используются для описания вращательного (углового) и общего пространственного движения твердого тела (композиции вращательного и поступательного движений тела). Именно использование вещественных и дуальных параметров Эйлера, число которых равно четырем, в качестве кинематических параметров движения тела привело к широкому использованию в механике четырехмерных гиперкомплексных чисел (переменных): кватернионов Гамильтона и бикватернионов Клиффорда.

Кватернионные и бикватернионные кинематические уравнения в вещественных и дуальных параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), входящие в состав используемых нами уравнений движения твердого тела и связывающие кватернион и бикватернион конечного перемещения тела, а также их первые производные с вектором угловой скорости и кинематическим винтом тела в отображениях на связанный с телом базис, являются линейными (когда угловая и линейная скорости являются известными функциями времени) и не вырождаются ни при каком положении твердого тела в пространстве, в отличие от нелинейных кинематических уравнений в вещественных и дуальных углах Эйлера–Крылова, содержащих особые точки типа сингулярности (деления на ноль), появляющиеся при определенных положениях тела в пространстве. Такими же свойствами линейности и регулярности обладают кинематические уравне-

ния движения твердого тела в вещественных и дуальных направляющих косинусах. Однако число параметров Эйлера равно четырем, поэтому они имеют одно уравнение связи, в отличие от шести уравнений связи для девяти направляющих косинусов (отметим, что кинематические уравнения в вещественных направляющих косинусах имеют размерность, равную девяти, и называются, как известно, уравнениями Пуассона).

Применение вещественных и дуальных параметров Эйлера позволяет исключить из рассмотрения операции с тригонометрическими функциями, что повышает эффективность аналитического и численного (особенно на бортовых компьютерах) решения задач механики и управления движением. Кватернионные и бикватернионные уравнения механики, в которых для описания движения используются вещественные и дуальные параметры Эйлера, имеют симметричные, компактные, а в ряде случаев и линейные или близкие к линейным структуры.

Кроме этого, параметры Эйлера (вещественные и дуальные), а с ними кватернионы и бикватернионы, позволяют наиболее эффективно решать многие вопросы теории конечных перемещений твердого тела, устойчивости и управления его движением. Отметим, что в настоящее время вещественные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионы широко используются для решения геометрических и кинематических задач механики твердого тела и механических систем, а также задач управления их вращательным движением в кинематической и динамической постановках. Дуальные параметры Эйлера и бикватернионы конечных перемещений пока что такого широкого распространения не получили, хотя в последние годы в отечественной и зарубежной литературе опубликовано большое количество работ по применению дуальных параметров Эйлера и бикватернионов (дуальных кватернионов) для управления движением твердого тела, космического аппарата, а также роботов-манипуляторов (термин “бикватернион” был введен Клиффордом и широко использовался Котельниковым, на западе вместо него используется термин “дуальный кватернион”).

Также отметим, что в последнее время дуальные параметры Эйлера и бикватернионы нашли широкое применение в теории и алгоритмах инерциальной навигации, поэтому реализация бикватернионных законов управления движением может быть эффективно осуществлена с использованием этих алгоритмов.

Использование кватернионов поворотов Гамильтона в теории и практике управления вращательным движением движущихся объектов в настоящее время стало общепринятым, поскольку они, как уже отмечалось, являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела (например, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Применение дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов (параболических бикватернионов Клиффорда [15, 32, 48, 70, 71]) в задачах управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением тела, эквивалентным композиции его углового (вращательного) и поступательного (траекторного) движений) было начато в кинематических задачах управления движением твердого тела. В этих задачах управления в качестве математических моделей движения твердого тела используются бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения тела в дуальных параметрах Эйлера, в которых в качестве фазовой переменной выступает бикватернион конечного перемещения Клиффорда, компонентами которого являются дуальные параметры Эйлера, а в качестве управления – кинематический винт тела. Цель кинематического управления – перевод тела из его заданного начального положения (углового и линейного) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением твердого тела или в классе задач построения

нелинейных стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) управлений движением тела по принципу обратной связи.

Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась Стрелковой и Маланиным [72, 73]. Для получения аналитического решения задачи ими было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела в дуальных параметрах Эйлера, предложенное автором статьи [33, 69] (см. также его книгу [48]).

Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривалось с использованием дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов Dareng Han, Qing Wei и Zexiang Li [74]. Введенное ими логарифмическое представление дуального кватерниона использовано для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи. Работы этих авторов [75] и [76] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи. В работе [77] рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных параметров Эйлера, дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного в [74].

Автором статьи рассмотрена [78] в бикватернионной постановке с использованием дуальных параметров Эйлера кинематическая задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Стабилизирующее кинематическое управление формируется в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по положению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы кинематические нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечные ошибки по угловому и линейному положению твердого тела. Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или матричные, или бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению тела, реализуемых системой управления движением тела, а сами уравнения описывают эталонную “динамику” переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

В работе [79] нами было получено явное аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке (с использованием дуальных параметров Эйлера) задачи оптимальной (в смысле интегрального квадратичного функционала качества) нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела.

В последнее время дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке [80–95]. Уравнения динамики твердого тела записыв-

ваются с использованием дуальных параметров Эйлера в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением в дуальных параметрах Эйлера. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления – управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC) [96]. MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также используется метод “бэкстеппинг” (“backstepping”). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением в дуальных параметрах Эйлера. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое предствление дуального кватерниона пространственного перемещения тела.

В нашей работе [97] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных параметров Эйлера, нормированных бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц новый метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Управление обеспечивают асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления используются бикватернионные и дуальные матричные модели пространственного движения твердого тела, предложенные автором статьи, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предложенных нелинейных обратных связей в законах управления. Рассмотрены бикватернионные модели пространственного движения твердого тела, дана постановка задачи управления движением твердого тела, приведены различные формы нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела в бикватернионных и винтовых переменных, удобные для построения законов управления. Предложены различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как свободное твердое тело), для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части бикватерниона ошибки положения твердого тела), инвари-

антных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных связей в предлагаемых дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждено определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства управляемого движения твердого тела.

Отметим, что в задачах управления движением традиционно используются (как в наших работах [78, 97]) нормированные бикватернионы конечных перемещений тела и трехмерные винты скоростей и ускорений пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с нулевыми дуальными скалярными частями). Однако, как показали наши исследования [97–99], законы формирования стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела по принципу обратной связи, полученные с помощью приведения бикватернионных нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения тела в указанных переменных к дуальным линейным стационарным дифференциальным формам (за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в законах управления), имеют особую точку (когда эйлеров угол поворота тела в его возмущенном угловом движении становится равным 180°), в которой эти законы управления вырождаются. В этой точке дуальные скалярные величины, фигурирующие в знаменателях полученных законов управления, становятся равными нулю. Поэтому такого рода законы стабилизирующих управлений обеспечивают (при соответствующем выборе постоянных коэффициентов усиления дуальных нелинейных обратных связей) асимптотическую устойчивость любого выбранного пространственного движения тела в большом, но не в целом.

Регулярные в целом (не содержащие особых точек) законы управления могут быть получены в нелинейной динамической постановке, как показано нами [98, 99], если в рамках предлагаемого нами подхода к синтезу стабилизирующих управлений использовать ненормированный бикватернион положения тела и “четырёхмерные” скорости и ускорения пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями).

В работах [98, 99] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов (бикватернионов Клиффорда) новый метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Управление обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом любого выбранного программного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого движения тела. Для построения законов управления предложены новые бикватернионные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, в которых использованы ненормированные бикватернионы конечных перемещений, бикватернионы угловых и линейных скоростей и ускорений тела с ненулевыми дуальными скалярными частями; концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении уравнений возмущенного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в предложенных бикватернионных законах управления. Построены аналитические решения бикватернионных дифференциальных уравнений, описывающие динамику процесса управления пространственным движением тела с использованием предлагаемых бикватернионных законов управления. Проанализированы свойства и закономерности такого управления.

В нашей работе [98] рассмотрено два вида управляемого пространственного движения твердого тела: программное движение тела относительно инерциальной системы

координат и движение тела относительно программной (неинерциальной) системы координат (относительное движение). В работе изложены бикватернионные дифференциальные уравнения и того и другого вида движения тела. Использование бикватернионов позволило записать и те и другие уравнения в компактном, удобном для решения задачи управления виде. Основное внимание в работе уделено бикватернионным дифференциальным уравнениям возмущенного движения тела и синтезу с их использованием стабилизирующих управлений движением твердого тела (т.е. управлений движением твердого тела по принципу обратной связи в неинерциальной системе координат).

В этой работе нами предложен аналитический метод построения законов управления пространственным движением твердого тела в нелинейной бикватернионной постановке и новые кватернионные и бикватернионные регулярные законы управления, обеспечивающие асимптотически устойчивый в целом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее заданного начального углового и линейного положений на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. Переходный процесс управления при этом имеет желаемые качественные и количественные характеристики.

Отличительные черты предложенного метода – его аналитичность (возможность аналитического решения задачи синтеза управлений в нелинейной пространственной динамической постановке) и возможность обоснованного выбора необходимых дуальных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей в законах управления, исходя из требуемой (желаемой) динамики процесса управления движением.

6. Заключение. Применение параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов Гамильтона в механике традиционно связывают с угловым (вращательным) движением твердого тела (в частности, космического аппарата). Однако в последние годы параметры Эйлера и кватернионы поворотов Гамильтона стали широко использоваться в механике для описания орбитального (траекторного) движения центра масс твердого тела (космического аппарата).

Особенности типа сингулярности (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета (уравнений орбитального движения), порождаемые использованием углов Эйлера для описания ориентации мгновенной орбиты изучаемого тела или системы координат, в которой записываются уравнения орбитального движения, эффективно устраняются с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов Гамильтона. Это показывает проведенный нами в статье обзор и анализ регулярных моделей небесной механики и механики космического полета, построенных с использованием параметров Эйлера и кватернионов поворота Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Рассмотренные нами приложения этих моделей в задачах оптимального управления орбитальным движением космического аппарата, решаемых с использованием принципа максимума Понтрягина, показывает, что эффективность аналитического исследования и численного решения пространственных краевых задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космических аппаратов кардинально повышается за счет использования указанных регулярных кватернионных моделей механики космического полета.

Обзор и анализ публикаций, в которых используются дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда) для решения задач управления общим пространственным движением твердого тела (космического аппарата), представляющим собой композицию вращательного и траекторного движений, с исполь-

зованием принципа обратной связи показал эффективность использования дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов для решения этих задач управления.

Отметим, что обзор работ по кватернионной регуляризации (устранения) других особенностей (типа деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными и другими центральными силами, с помощью использования параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), четырехмерных переменных Кустаахеймо–Штифеля и других модифицированных четырехмерных переменных, двумерных переменных Леви-Чивита, а также с помощью использования в качестве дополнительных переменных энергетических переменных и регуляризирующего преобразования времени дан в нашей недавней работе [100].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
2. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
3. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Косм. иссл. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401.
4. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Косм. иссл. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. <https://doi.org/10.7868/S0023420615050040>
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.
7. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
8. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853.
9. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
10. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
11. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p. = *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
12. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
13. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
14. *Брагазин А.Ф., Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Описание орбитального движения с использованием кватернионов и скоростных параметров // Анн. докл. шестого Всесоюзного съезда по теорет. и прик. механике. Ташкент: “Фан”, 1986. С. 133.
15. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
16. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez de Andres P.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 97, 131–150 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
17. *Bau G., Urrutxua H. and Pelaez J.* EDROMO: An accurate propagator for elliptical orbits in the perturbed two-body problem // Adv. Astronaut. Sci. 2014. V. 152. № 06. P. 379–399.
18. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J. and Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // MNRAS. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908. <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
19. *Libraro P.A.* Globally Nonsingular Quaternion-Based Formulation for All-Electric Satellite Trajectory Optimization. A Dissertation... for the Degree of Doctor of Philosophy. Princeton University. 2016. 153 p.

20. *Roa J. and Kasdin J.* Alternative set of nonsingular quaternionic orbital elements // *J. Gui. Contr. Dyn.* 2017. V. 40. № 11. 2737–2751.
<https://doi.org/10.2514/1.G002753>
21. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Aaron J. Rosengren.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. P. 21 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
22. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2020. V. 132. P. 10.
<https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y>
23. *Andoyer H.* Cours de mecanique celeste. Paris: Gauthier-Villars, 1923.
24. *Deprit A.* Ideal elements for perturbed Keplerian motions // *J. Res. National Bureau Standards.* s – B. Mat. Sci. 1975. V. 79B. № 1 and 2. P. 1–15.
<https://doi.org/10.6028/JRES.079B.001>
25. *Musen P.* Application of Hansen’s theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // *J. Geophys. Res.* 1959. V. 64. № 12. P. 2271–2279.
<https://doi.org/10.1029/JZ064i012p02271>
26. *Brown E.W. and Shook C.A.* Planetary Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1933.
27. *Musen P.* On stromgren’s method of special perturbations // *J. Astron. Sciences.* 1961. V. 8. P. 48–51.
28. *Musen P.* On the application of pfaff’s method in the theory of variation of astronomical constants // NASA Technical Note D-2301. 1964. 24 p.
29. *Broucke R., Lass H. and Ananda M.* Redundant variables in celestial mechanics // *Astron. Astrophys.* 1971. V. 13. P. 390–398.
30. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.
31. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. № 6. С. 12–21.
32. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // *Proc. London Math. Soc.* 1873. V. 4. P. 381–395.
33. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // *ПММ.* 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
34. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. Деп. в ВИНТИ 13.12.85. № 218628-В. М.: ВИНТИ, 1985. 36 с.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. Деп. в ВИНТИ 13.22.85. № 8629-В. М.: ВИНТИ, 1985. 18 с.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 1. С. 20–30.
37. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 2. С. 3–11.
38. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // *Косм. иссл.* 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
39. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // *Косм. иссл.* 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
40. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные регулярные модели возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 4. С. 562–585.
<https://doi.org/10.31857/S003282350002735-8>
41. *Chelnokov Yu.N.* Regular quaternion models of perturbed orbital motion of a rigid body in the earth’s gravitational field // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 7. P. 40–58.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420070079>
42. *Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных управлений и траекторий движения космического аппарата, использующее кватернионное описание пространственной ориентации орбиты // *Косм. иссл.* 1997. Т. 35. № 5. С. 534–542.

43. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в механике космического полета // Гириск. навиг. 1999. № 4 (27). С. 47–66.
44. *Челноков Ю.Н.* Оптимальное управление движением космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле: Применение кватернионов для описания ориентации орбиты // Косм. иссл. 1999. Т. 37. № 4. С. 433–442.
45. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 1 // Косм. иссл. 2001. Т. 39. № 5. С. 502–517.
46. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 2 // Косм. иссл. 2003. Т. 41. № 1. С. 92–107.
47. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Косм. иссл. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. <https://doi.org/10.7868/S0023420614030029>
48. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
49. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // ПММ. Т. 76. Вып. 6. 2012. С. 895–912.
50. *Battin R.H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. N. Y.: AIAA Press, 1987. <https://doi.org/10.2514/4.861543>
51. *Афанасьева Ю.В., Челноков Ю.Н.* Задача о встрече в центральном ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым космическим аппаратом, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 3. С. 164–179.
52. *Афанасьева Ю.В., Челноков Ю.Н.* Задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата как деформируемой фигурой // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 125–138.
53. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2012. Т. 12. № 3. С. 87–95.
54. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2013. Т. 13. № 1–1. С. 84–92.
55. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатр. автомат. управл. 2016. Т. 17. № 8. С. 567–575. <https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>
56. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // Мехатр. автомат. управл. 2016. Т. 17. № 9. С. 633–643. <https://doi.org/10.17587/mau.17.663-643>
57. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Оптимальный поворот плоскости орбиты космического аппарата переменной массы в центральном гравитационном поле посредством ортогональной тяги // Автомат. телемех. 2019. № 8. С. 87–108.
58. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. I // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 70–89. <https://doi.org/10.31857/S057232990002467-3>
59. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. II // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 3–23. <https://doi.org/10.1134/S0572329919010021>
60. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение задачи оптимального поворота плоскости орбиты космического аппарата переменной массы с помощью тяги, ортогональ-

- ной плоскости орбиты // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 110–129.
<https://doi.org/10.1134/S057232991904007X>
61. *Копнин Ю.М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника // Косм. иссл. 1965. Т. 3. Вып. 4. С. 22–30.
 62. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.
 63. *Борщевский М.З., Ислювич М.В.* К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // Косм. иссл. 1969. Т. 7. Вып. 6. С. 8–15.
 64. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 680 с.
 65. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета: Уч. пос. М.: Наука, 1990. 445 с.
 66. *Ишков С.А., Романенко В.А.* Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Косм. иссл. 1997. Т. 35. № 3. С. 287–296.
 67. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
 68. *Челноков Ю.Н.* Об одном винтовом методе описания движения твердого тела // Сб. науч.-метод. статей по теорет. мех. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 129–138.
 69. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
 70. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
 71. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. общества при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
 72. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстрдействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. 4. С. 73–76.
 73. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 204 с.
 74. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions // Int. J. Automat. Comput. 2008. V. 5. № 3. P. 319–324.
<https://doi.org/10.1007/s11633-008-0319-1>
 75. *Han D., Qing Wei, Li Z., Weimeng Sun.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternion // IFAC Proc. Vols. 2008. V. 41. № 2. P. 3836–3841.
<https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00645>
 76. *Han D., Qing Wei, Li Z.* A Dual-quaternion method for control of spatial rigid body. networking, sensing and control // IEEE Intern. Conf. Networking Sensing Control. 2008. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1109/ICNSC.2008.4525172>
 77. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robot. Autonom. Syst. 2016. V. 77. P. 66–73.
 78. *Челноков Ю.Н.* Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.
 79. *Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И.* Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2016. Т. 16. № 2. С. 198–206.
 80. *Perez A., McCarthy J.M.* Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems // J. Mech. Design. 2004. V. 126. № 3. P. 425–435.
 81. *Han D., Wei Q., Li Z., Sun W.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternions // IFAC Proc. Vols. 2008. V. 41. № 2. 2008. P. 3836–3841.
<https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00645>
 82. *Schilling M.* Universally manipulable body models – dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs // Auton. Robots. 2011. V. 30. P. 399–425.
<https://doi.org/10.1007/s10514-011-9226-3>
 83. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guid. Navig. Control Conf. 2011. Portland, Oregon. USA.

- AIAA, 2011. P. 6396.
<https://doi.org/10.2514/6.2011-6396>
84. Wang J., Sun Z. 6DOF Robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying // *Acta Astron.* 2012. V. 73. P. 76–87.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.12.005>
85. Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M. Finite-time control for spacecraft formation with dual-number based description // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2012. V. 35. № 3. P. 950–962.
<https://doi.org/10.2514/1.54277>
86. Wang J., Yu C. Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics // *Syst. Control Lett.* 2013. V. 62. № 3. P. 225–233.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.11.019>
87. Filipe N., Tsiotras P. Rigid body motion tracking without linear and angular velocity feedback using dual quaternions // *IEEE. Europ. Control Conf.* 2013. P. 329–334.
<https://doi.org/10.23919/ECC.2013.6669564>
88. Lee U. State-constrained rotational and translational motion control with applications to monolithic and distributed spacecraft. A dissertation... for the degree of Doctor of Philosophy. Univ. of Washington. 2014.
89. Filipe N., Kontitsis M., Tsiotras P. Extended Kalman filter for spacecraft pose estimation using dual quaternions // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2015. V. 38. № 9. P. 1625–1641.
<https://doi.org/10.2514/1.G000977>
90. Filipe N., Tsiotras P. Adaptive position and attitude–tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2015. V. 38. № 4. P. 566–577.
91. Lee U., Mesbahi M. Optimal powered descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.* 5–9 January 2015 Kissimmee, Florida. AIAA, 2015.
<https://doi.org/10.2514/6.2015-0319>
92. Gui H., Vukovich G. Cite as dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // *Nonlin. Dyn.* 2016. V. 83. № 1–2. P. 597–614.
93. Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В. Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме // *Научно-техн. ж. “Полет”.* 2018. Т. 4. С. 9–20.
94. Ахрамович С.А., Малышев В.В. Применение бикватернионов в задачах управления летательными аппаратами // *Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов.* М.: МАИ, 2018. С. 117–120.
95. Ахрамович С.А., Баринов А.В. Система управления движением БПЛА с прогнозирующей моделью в бикватернионной форме // *Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов.* М.: МАИ, 2018. С. 120–122.
96. Garcia C., Prett D.M., Morari M. Model predictive control: theory and practice // *Automatica.* 1989. № 3. P. 335–348.
97. Челноков Ю.Н. Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 1. С. 17–43.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010049>
98. Челноков Ю.Н. Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 5–6. С. 704–733.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519050035>
99. Chelnokov Yu.N. Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 7. P. 59–80.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420070080>
100. Chelnokov Y.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math. Mech. (Eng. Ed.).* 2022. V. 43. № 1. P. 21–80.
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>

УДК 539.37+539.214

О ТЕПЛОТВОРНОЙ СПОСОБНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ УЧЕТЕ ПРОИЗВОДСТВА ТЕПЛА ЗА СЧЕТ ТРЕНИЯ МАТЕРИАЛА О ЕГО ГРАНИЧНУЮ ШЕРОХОВАТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

© 2022 г. А. А. Буренин^{a,*}, Л. В. Ковтаник^{b,**}, Г. Л. Панченко^{b,c,***}^aИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия^bИнститут автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия^cВладивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток, Россия*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru**e-mail: lk@iacp.dvo.ru***e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 20.05.2022 г.

После доработки 22.05.2022 г.

Принята к публикации 23.05.2022 г.

Приводятся расчеты распределения деформаций, напряжений и температуры в процессе деформирования упруговязкопластического материала, зажато между коаксиальными цилиндрическими поверхностями и удерживаемого первоначально за счет сухого трения о граничные поверхности. За счет задаваемого переменного продвижения внешней из них происходит проскальзывание материала и наступает (не одновременно) его вязкопластическое течение. Рассматривается процесс развития течения с его последующим торможением до остановки, разгрузки материала и остывания до комнатной температуры. Тепло производится за счет трения скольжения о граничную шероховатую поверхность и за счет необратимого деформирования (связанная задача теории больших деформаций). Деформируемый материал считается механически несжимаемым, когда изменение его объема связывается только с температурным расширением, предел текучести полагается зависящим от температуры.

Ключевые слова: термоупругость, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность

DOI: 10.31857/S0572329922050051

1. Введение. Прямолинейные движения жестковязкопластических сред изучены достаточно подробно [1–6]. Если отказаться от принимаемого в рамках жесткопластического анализа положения о недеформируемости материала застойных зон и продвигающихся ядер, то с неизбежностью приходим к необходимости постановок таких задач в рамках теории больших упруговязкопластических деформаций [7–9]. В областях вязкопластического течения деформации положить малыми невозможно, а в областях упругого деформирования они существенно зависят от параметров протекающего вязкопластического течения. Прямолинейные движения упруговязкопластической среды посредством постановок задач теории больших деформаций рассматривались в [8, 10–13]. Современная технологическая практика заставляет считать [14], что в областях застойных зон и продвигающихся ядер происходит не только обратимое (упругое) деформирование, но и необратимое в форме роста деформаций ползучести. На

продвигающихся границах областей вязкопластического течения в таком случае одно-моментно меняется механизм производства необратимых деформаций (меняются определяющие законы) с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) при активном процессе деформирования и наоборот при разгрузке. Задачи, учитывающие такие обстоятельства, ставились и решались в рамках теории больших деформаций в [15–18].

Учет теплотворной способности процесса необратимого деформирования (связанности задач теории больших деформаций) только усложняет математическое моделирование процесса деформирования, постановки и методы решения соответствующих краевых задач [19–24]. Производство тепла за счет необратимого деформирования в прямолинейных движениях упруговязкопластических сред рассматривалось в [25–28]. В таких задачах теории больших деформаций также считалось, что тепло производится еще и за счет трения материала о шероховатые поверхности, его ограничивающие. Здесь рассмотрим еще одну связанную задачу о прямолинейном движении упруговязкопластического материала, зажатого в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями при заданном переменном движении внешней из них.

В качестве математической модели упруговязкопластического деформирования выбираем предложение [8, 29], когда обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями их переноса [30, 31]. Отметим при этом, что именно в рамках такой модели было получено большинство численно-аналитических, включая точные, решений краевых задач теории больших упругопластических или упруговязкопластических деформаций. На часть их ссылаемся в настоящей публикации.

2. Основные зависимости модели деформирования. Дифференциальные уравнения изменения (переноса) тензоров обратимых \mathbf{m} и необратимых \mathbf{p} деформаций запишем, следуя [8], в виде

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z})) \quad (2.1)$$

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}), \quad \theta = (T - T_0) T_0^{-1}$$

Здесь \mathbf{v} – вектор скорости; T , T_0 – температура и температура недеформированного состояния (комнатная температура); \mathbf{e} – тензор, задающий упругие деформации; \mathbf{I} – единичный тензор, составленный из символов Кронекера; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ – нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\psi}$ ($\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\psi}^T$), здесь ее не приводим, в [8] она полностью записана; $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – скорость изменения необратимых деформаций, α – коэффициент линейного расширения.

Соотношением (2.2) вводится объективная производная по времени, с помощью которой задается взаимодействие между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования, обеспечивающее геометрическую корректность в построениях кинематики среды. При $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}$ такая производная оказывается производной Зарембы–Яумана. Когда $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}$ тензор необратимых деформаций неизменен и согласно (2.2) изменяются только компоненты этого тензора, что характерно для процесса разгрузки.

Для тензора полных деформаций Альманси \mathbf{d} из (2.1) и (2.2) следует

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \quad (2.3)$$

Тензор \mathbf{m} , следовательно, является только главной линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Его использование в качестве меры обратимых деформаций оправдано удобствами в записи уравнения его изменения (2.1) и не только. Так следствием уравнения баланса внутренней энергии (закона сохранения энергии) можно [8] получить

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.5)$$

В (2.4) и (2.5) $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ – плотность распределения внутренней энергии; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; s – плотность энтропии; \mathbf{q} – поток тепла; $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}$ – поток энтропии; ρ – плотность среды; принята гипотеза о независимости термодинамического потенциала $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций \mathbf{p} , что позволяет разделить процесс деформирования на его консервативную и диссипативную составляющие. Такая упрощающая математическая гипотеза является обычной в теории больших деформаций [32, 33].

Далее считаем, что деформируемый материал механически несжимаем; все изменение его объема сводится к тепловому расширению (сжатию). В этом случае из (2.4) следует

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} \equiv \mathbf{0} \\ -P_2 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.6)$$

В (2.6) P_1 и P_2 – неизвестные функции добавочного давления; $W = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ – упругий потенциал; ρ_0 – плотность материала в его свободном состоянии. Полагая деформируемый материал изотропным, представим упругий потенциал его разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния [34]

$$W = W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + v_1 J_1 \theta + v_2 \theta^2 - v_3 J_1 \theta^2 - v_4 J_1^2 \theta - v_5 J_2 \theta - v_6 \theta^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ J_k, & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad L_1 = \text{tr} \mathbf{d}, \quad L_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

Здесь μ – модуль сдвига, b , χ , v_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – иные термомеханические постоянные. Если принять закон теплопроводности в простейшей форме Фурье, то из (2.5) и (2.7) следуют уравнения теплопроводности, имеющие разный вид в зависимости от режима деформирования:

в областях обратимого деформирования, которое предшествует вязкопластическому течению

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \text{tr} \mathbf{d}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta \quad (2.8)$$

$$\beta_1 = \frac{v_2(1 - 3\alpha T_0) - 3v_6}{v_2}, \quad \beta_2 = -\frac{v_3}{v_2}, \quad \beta_3 = -\frac{v_1 + v_5}{v_2}$$

в области течения

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \text{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta - \frac{1}{2v_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.9)$$

в областях разгрузки или повторного вязкопластического течения

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta \quad (2.10)$$

В (2.8)–(2.10) g – коэффициент температуропроводности.

В качестве пластического потенциала (уравнения поверхности нагружения) далее принимается [35] обобщенное условие пластического течения Треска–Сен-Венана

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.11)$$

со следованием ассоциированного закона пластического течения [35, 36]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \zeta > 0 \quad (2.12)$$

В (2.11) и (2.12) $\sigma_i, \varepsilon_k^p$ – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k – предел текучести; η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

3. Постановка задачи. Обратимое деформирование. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал расположен в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами с радиусами r_0 и R ($r_0 < R$). При этом внутренний цилиндр жестко закреплен, а внешний цилиндр движется равноускоренно. Решение задачи будем искать в классе функций $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$ в цилиндрической системе координат r, φ, z . Тогда граничные условия задачи можно записать в следующем виде

$$v^+ \Big|_{r=r_0} = u^+ \Big|_{r=r_0} = 0, \quad v^+ \Big|_{r=R} = v_R = a_1 t, \quad u^+ \Big|_{r=R} = u_R = a_1 t^2 / 2, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=r_0} = a_0 \quad (3.1)$$

В условиях (3.1) знаком “+” обозначены скорости и перемещения граничных цилиндров, a_0 и a_1 – заданные постоянные, σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений. Последнее условие (3.1) задает напряженное состояние, вызванное начальным поджатием.

Также предполагаем, что пока выполняется условие

$$|\sigma_{rz}| - f |\sigma_{rr}| < 0 \quad (3.2)$$

материал на границах $r = r_0$ и $r = R$ удерживается за счет сухого трения с коэффициентом f , то есть на граничных поверхностях выполняются условия прилипания.

Из соотношения (2.3) следует, что в рассматриваемом случае отличные от нуля компоненты тензора деформаций имеют вид

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2} u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.3)$$

Считаем, что материал начинает деформироваться из свободного состояния и первоначально обратимо. Полагая обратимые деформации достаточно малыми и учитывая только слагаемые до второго порядка по u' включительно, из зависимостей (2.6) и (2.7) для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)(u')^2 = -p_1 \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + \mu(u')^2, \quad \sigma_{rz} = \mu u' \end{aligned} \quad (3.4)$$

Будем рассматривать задачу в рамках квазистатического подхода. Тогда из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (3.5)$$

следует, что переменная p_1 является функцией только координаты z , так что $p_1 = l_0 z - a_0$, где l_0 – неизвестная постоянная. Положим $l_0 = 0$ для того, чтобы компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} были конечными при $z \rightarrow \infty$. Таким образом, для граничных условий (3.1) решение упругой задачи примет форму

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{c}{r}, & \sigma_{rr} &= \sigma_{\varphi\varphi} = a_0, & \sigma_{zz} &= a_0 + \frac{c^2}{\mu r^2}, & c &= c(t) = \mu u_R \ln^{-1} \frac{R}{r_0} \\ u &= \frac{c}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}, & v &= \frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}, & e_{rz} &= \frac{c}{2\mu r}, & e_{rr} &= -\frac{3}{2} e_{rz}^2, & e_{zz} &= \frac{1}{2} e_{rz}^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как величина a_0 влияет только на распределение компонент нормальных напряжений, положим $a_0 < k/f$. Тогда проскальзывание материала в окрестности внутреннего цилиндра начнется раньше, чем пластическое течение.

Увеличение со временем скорости движения внешнего цилиндра приведет к тому, что в некоторый момент времени $t = t_1$ на внутренней границе $r = r_0$ неравенство (3.2) обратится в равенство и с этого момента времени материал начнет проскальзывать в окрестности внутреннего цилиндра. В таком случае примем условие

$$(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi v)|_{r=r_0} = 0, \quad t > t_1 = \sqrt{\frac{2fa_0 r_0}{\mu a_1}} \ln \frac{r_0}{R} \quad (3.7)$$

Здесь ξ – коэффициент вязкого трения. С момента времени $t = t_1$ материал начинает нагреваться из-за трения о жесткий внутренний цилиндр. В этом случае следует принять начальное и граничные условия для температуры

$$\theta(r, t_1) = 0, \quad \theta(r_0, t) = \gamma u(r_0, t), \quad \theta(R, t) = 0 \quad (3.8)$$

В условиях (3.8) γ – постоянная теплопроизводства за счет трения. Будем дополнительно предполагать, что температура θ не достигнет температуры плавления в процессе деформирования.

Из соотношений (2.6) и (2.7) следуют зависимости для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) - (b + \mu)(u')^2/2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - (v_3 + 3\beta v_1 + 18\mu\beta^2)\theta^2 + \\ &+ (v_4 + 3b\beta)\theta(u')^2 = -p_1, & \sigma_{rr} &= -p_1 + b\theta(u')^2, & \sigma_{zz} &= -p_1 + \mu(u')^2 \\ \sigma_{rz} &= (\mu - l\theta)u', & \beta &= \alpha T_0, & l &= v_1 + v_5 + 3\mu\beta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Интегрируя уравнения равновесия (3.5) и учитывая последнее условие (3.1), получим, что

$$\sigma_{rr} = \frac{a_0 r_0}{r} - \frac{1}{r} \int_{r_0}^r p_1 dr \quad (3.10)$$

а компонента σ_{rz} удовлетворяет первой зависимости (3.6). Из соотношений (3.9), (3.10) и первой зависимости (3.6) следует формула для вычисления p_1

$$p_1 = lc^2 \int_{r_0}^r \left(\theta' - \frac{\theta}{r} + \frac{2l\theta\theta'}{\mu - l\theta} \right) \frac{dr}{(\mu - l\theta)^2 r^2} + \frac{l\theta(r_0)c^2}{(\mu - l\theta(r_0))^2 r_0^2} - a_0 \quad (3.11)$$

Согласно соотношениям (2.3) и (3.9) компоненты обратимых деформаций и градиент перемещений имеют вид

$$m_{rz} = \frac{c}{2(\mu - l\theta)r}, \quad m_{rr} = -\frac{3}{2} m_{rz}^2, \quad m_{zz} = \frac{1}{2} m_{rz}^2, \quad u' = \frac{c}{(\mu - l\theta)r} \quad (3.12)$$

Уравнение теплопроводности (2.8) с учетом зависимостей (3.3) и (3.12) примет форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 c^2}{2(\mu - l\theta)^3 r^2}\right) \dot{\theta} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2(\mu - l\theta)^2 r^2} = g \left(\theta'' + \frac{1}{r} \theta' \right) + h_1(r, t), \quad h_1(r, t) = 0 \quad (3.13)$$

Из последнего уравнения (3.12) при граничном условии (3.7) получим компоненты векторов перемещений и скорости

$$\begin{aligned} u &= c \int_{r_0}^r \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + u(r_0), \quad u(r_0) = \frac{1}{\xi r_0} \int_{t_1}^t c dt + \frac{f a_0}{\xi} (t - t_1) \\ v &= \dot{c} \int_{r_0}^r \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + l c \int_{r_0}^r \frac{\dot{\theta} dr}{(\mu - l\theta)^2 r} + \frac{c}{\xi r_0} + \frac{f a_0}{\xi} + h_2(r, t), \quad h_2(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Изменение граничного условия на границе $r = r_0$ с (3.2) на (3.7) приводит и к изменению функции c в первой зависимости (3.6) для компоненты тензора напряжений σ_{rz} . Используя первое соотношение (3.14), а также условие прилипания на границе $r = R$, получим уравнение для функции c

$$c \int_{r_0}^R \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + \frac{1}{\xi r_0} \int_{t_1}^t c dt + \frac{f a_0}{\xi} (t - t_1) = u_R + h_3(t), \quad h_3(t) = 0 \quad (3.15)$$

Система уравнений (3.13) и (3.15) при условиях (3.8), а также при условии непрерывности функции c в момент времени $t = t_1$ решается численно с использованием конечно-разностного метода.

При дальнейшем увеличении скорости внешнего цилиндра в некоторый момент времени $t = t_2$ неравенство (3.2) перестает выполняться и на границе $r = R$. Этот момент времени можно найти из уравнения $c(t_2) = -fR\sigma_{rr}(R, t_2)$. Теперь материал начинает проскальзывать и соответственно разогреваться в окрестности внешнего цилиндра. Граничное условие (3.2) при $r = R$ заменим на условие проскальзывания в виде

$$(|\sigma_{rz}| - f |\sigma_{rr}| - \xi [v])|_{r=R} = 0, \quad [v] = v^+ - v \quad (3.16)$$

Также изменим второе граничное условие (3.8) на следующее

$$\theta(R, t) = \gamma [u]|_{r=R}, \quad [u] = u^+ - u \quad (3.17)$$

Изменение граничного условия на границе $r = R$ приводит к изменению функции c , для которой из первой зависимости (3.14) и условия (3.16) следует уравнение вида (3.15) с функцией

$$h_3(t) = \frac{1}{\xi} \int_{t_2}^t \left(f p_1(R) - \frac{c}{R} - \frac{f l \theta(R) c^2}{(\mu - l\theta(R))^2 R^2} \right) dt$$

Решение системы уравнений (3.11), (3.13) и (3.15) с учетом первого граничного условия (3.8), условия (3.17) и условий непрерывности температуры θ и функций p_1 и c в момент времени $t = t_2$ находится численно с помощью конечно-разностного метода. Перемещение и скорость точек деформируемого материала вычисляются из зависимостей (3.14) при известных функциях θ и c .

Найденное решение упругой неизотермической задачи при растущей скорости внешнего цилиндра будет справедливым до некоторого момента времени $t = t_3$, в который на внутренней границе $r = r_0$ впервые выполнится условие пластического течения (2.11) в следующем виде

$$\sigma_{rz}|_{r=r_0} = k(t_3) \quad (3.18)$$

В соотношении (3.18) предел текучести является зависящим от температуры. Введем эту зависимость в форме

$$k = k_0 (1 - \theta/\theta_m)^2, \quad \theta_m = (T_m - T_0)/T_0 \quad (3.19)$$

Здесь T_m – температура плавления материала.

Момент начала пластического течения $t = t_3$ вычисляется из уравнения $c(t_3) = k(t_3)r_0$.

4. Вязкопластическое течение при возрастающей и постоянной скорости внешнего цилиндра. С момента времени $t = t_3$ в материале растет область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. Здесь $r = r_1(t)$ – движущаяся граница, отделяющая область течения от области $r_1(t) \leq r \leq R$, в которой материал продолжает деформироваться обратимо и для напряжений выполняются зависимости (3.9).

Из соотношений (2.6) и (2.7) в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ следуют зависимости для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= -(P_2 + 2\mu) + 2b(m_{rr} + m_{zz}) - 2\mu m_{rz}^2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - \\ &- (v_3 + 3\beta v_1 + 18\mu\beta^2)\theta^2 - 2(v_4 + 3b\beta)(m_{rr} + m_{zz} - m_{rz}^2)\theta = -p_1 \\ \sigma_{rz} &= 2(\mu - l\theta)m_{rz}, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + 2(\mu - l\theta)m_{rr} + (3\mu + l\theta)m_{rz}^2 \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l\theta)m_{zz} + (3\mu + l\theta)m_{rz}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из уравнений равновесия (3.5) следует, что для компонент напряжений σ_{rz} и σ_{rr} продолжают выполняться первое соотношение (3.6) и зависимость (3.10) соответственно. Используя их и соотношения (4.1), в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ получим уравнение для изменившейся функции p_1

$$p_1 r - \int_{r_0}^r p_1 dr = 2(\mu - l\theta) r m_{rr} + \frac{(3\mu + l\theta)c^2}{4(\mu - l\theta)^2 r} - a_0 r_0 \quad (4.2)$$

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ из (3.9), (3.10) и условия непрерывности напряжений следует уравнение

$$p_1 r - \int_{r_0}^r p_1 dr = \frac{l\theta c^2}{(\mu - l\theta)^2 r} - a_0 r_0 \quad (4.3)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (2.12) следует, что условие пластичности (2.11) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} > 0$, $\varepsilon_{rz}^p > 0$) примет вид

$$\sigma_{rz} = k + \eta \varepsilon_{rz}^p$$

Отсюда с использованием первой зависимости (3.6) получаем соотношение для компоненты тензора скоростей пластических деформаций

$$\varepsilon_{rz}^p = \eta^{-1}(c/r - k) \quad (4.4)$$

Из непрерывности напряжений следует равенство нулю компоненты ε_{rz}^p на упруго-пластической границе $r = r_1(t)$. Таким образом, из (4.4) имеем

$$c = \eta k(r_1) \quad (4.5)$$

В рассматриваемом случае, согласно зависимостям (2.1)–(2.3), кинематика течения задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rz} &= m_{rz} + p_{rz}, & \frac{dd_{rz}}{dt} &= \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2}v', & r_{rz} &= -r_{zr} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2} \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \varepsilon_{rz}^p), & \varepsilon_{zz}^p &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p) \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2}v' = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, & \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{zz}^p = \frac{\varepsilon_{rz}^p m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ уравнение теплопроводности имеет вид (3.13). В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ уравнение теплопроводности (2.9) с учетом первой зависимости (3.6), соотношений (4.1) и (4.4) примет форму (3.13) со следующей функцией $h_1(r, t)$

$$h_1(r, t) = -c\nu_2^{-1}\eta^{-1}r^{-1}(c/r - k) \quad (4.7)$$

Из зависимостей (4.6) и граничного условия (3.7) следует, что в области течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ компонента вектора скорости удовлетворяет второй зависимости (3.14) с функцией

$$h_2(r, t) = \frac{2}{\eta} \int_0^r \left(\frac{c}{r} - k \right) dr \quad (4.8)$$

С учетом непрерывности скорости на упругопластической границе получаем, что в области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ скорость имеет вид второго соотношения (3.14) с функцией $h_2(r_1, t)$, вычисляемой из (4.8).

Развивающаяся область течения приводит к изменению функции c , для которой из второй зависимости (3.14) и граничного условия (3.16) следует уравнение

$$\begin{aligned} c \int_{r_0}^R \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + lc \int_{r_0}^R \frac{\dot{\theta} dr}{(\mu - l\theta)^2 r} + h_2(r_1, t) &= -\frac{c}{\xi r_0} - \frac{fa_0}{\xi} + v_R + h_4(t) \\ h_4(t) &= -\frac{c}{\xi R} + \frac{fp_1(R)}{\xi} - \frac{flc^2\theta(R)}{\xi(\mu - l\theta(R))^2 R^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.6) при условии отсутствия необратимых деформаций в момент времени $t = t_3$ следует выражение для компоненты тензора пластических деформаций

$$p_{rz} = \int_{t_3}^t \varepsilon_{rz}^p dt \quad (4.10)$$

Для неизвестных компонент тензоров обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ из соотношений (3.3) и (4.6) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \varepsilon_{rz}^p \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p)p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz}p_{rz} \right) \\ p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, & m_{zz} &= -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz}p_{rz}, & m_{rr} &= -m_{zz} - m_{rz}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Уравнения (3.13), (4.2), (4.3), (4.5), (4.9) и (4.11) для неизвестных функций θ , p_1 , η , c , m_{rr} , m_{zz} , p_{rr} и p_{zz} решаются одновременно с использованием второго условия (3.8) и условия (3.17). Также предполагается непрерывность функций θ , p_1 и c в момент времени $t = t_3$ и непрерывность температуры и теплового потока на упругопластической границе $r = \eta(t)$. Для решения этой системы разработана конечно-разностная схема первого порядка по времени и второго – по пространству, учитывающая движущуюся упругопластическую границу и изменяющиеся области необратимого и обратимого деформирования.

Из (4.6) следует, что градиент перемещений в области пластического течения $r_0 \leq r \leq \eta(t)$ имеет вид

$$u' = 2(m_{rz} + p_{rz}) \quad (4.12)$$

Интегрируя это уравнение при втором условии (3.14), найдем компоненту вектора перемещений в области течения. В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ также выполняется уравнение (4.12) при условии равенства нулю компоненты p_{rz} . Из этого уравнения находим перемещения с учетом их непрерывности на упругопластической границе $r = r_1(t)$.

Пусть с момента времени $t = t_4$ скорость внешнего цилиндра становится постоянной, т.е. $v_R = a_1 t_4$. Такое изменение граничного условия не приводит к качественному изменению деформационного процесса. В материале по-прежнему присутствуют область обратимого деформирования и развивающаяся область вязкопластического течения. Все соотношения данного раздела остаются верными и в данном случае.

5. Течение при убывающей скорости внешнего цилиндра. Разгрузка среды и охлаждение.

В некоторый момент времени $t = t_5 > t_4$ начнем снижать скорость внешнего цилиндра по закону $v_R = a_1 t_4 - a_2 (t - t_5)$. Поначалу такое изменение в режиме нагружения не вносит никаких качественных изменений в процесс деформирования. Все соотношения предыдущего раздела продолжают выполняться. Область вязкопластического течения продолжает увеличиваться, однако скорость движения упругопластической границы $r = r_1(t)$ падает и в некоторый расчетный момент времени $t = t_6$ становится равной нулю.

С момента времени $t = t_6$ упругопластическая граница $r = r_1(t)$ начинает двигаться в обратную сторону к внутреннему цилиндру $r = r_0$. В деформируемом материале появляется новая область $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$, в которой компонента тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p равна нулю, и, следовательно, компонента тензора пластических деформаций p_{rz} не изменяется в этой области. В сужающейся области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ по-прежнему продолжается вязкопластическое течение, а в области $r_1(t_6) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо.

Для компонент тензора напряжений в области обратимого деформирования $r_1(t_6) \leq r \leq R$ продолжают выполняться соотношения (3.9), а в областях $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$ компоненты напряжений удовлетворяют зависимостям (4.1). С другой стороны, следуя уравнениям равновесия (3.5) с учетом условия непрерывности напряжений, получим, что для компонент σ_{rz} и σ_{rr} остаются справедливыми первое соотношение (3.6) и зависимость (3.10) во всех трех областях. Сравнив соотношения для напряжений, получим, что функция p_1 в областях $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$ имеет вид (4.2), а в области $r_1(t_6) \leq r \leq R$ – (4.3).

Уравнение (4.5) для упругопластической границы $r = r_1(t)$ также остается верным. Уравнение теплопроводности во всех трех областях имеет вид (3.13), причем, в областях

$r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$ и $r_1(t_6) \leq r \leq R$ функция $h_1(r, t) = 0$, а в области течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ функция $h_1(r, t)$ имеет вид (4.7). Функция c по-прежнему удовлетворяет уравнению (4.9).

Для определения неизвестных компонент тензоров обратимых деформаций m_{rr}, m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr}, p_{zz} в области течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ служит система уравнений (4.11), в которой ε_{rz}^p и p_{rz} определяются из зависимостей (4.4) и (4.10). В области $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$ неизвестные компоненты тензоров обратимых деформаций m_{rr}, m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr}, p_{zz} также удовлетворяют системе уравнений (4.11), в которой $\varepsilon_{rz}^p = 0$, а для компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} следует уравнение

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

Градиент перемещений в областях $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$ имеет вид (4.12). В области обратимого деформирования $r_1(t_6) \leq r \leq R$ градиент перемещений также удовлетворяет уравнению (4.12) при $p_{rz} = 0$.

В некоторый момент времени $t = t_7$ на внешней поверхности материала $r = R$ выполняется равенство $(|\sigma_{rz}| - f |\sigma_{rr}|)_{r=R} = 0$. Условие проскальзывания (3.16) далее не выполняется, напряжения вновь связаны неравенством (3.2). Нагревание материала за счет трения прекращается, поскольку снова выполняется условие прилипания внешней граничной поверхности материала с жестким цилиндром. Поэтому граничное условие для температуры (3.17) заменим следующим:

$$(\delta\theta' + h\theta)_{r=R} = 0 \quad (5.2)$$

в котором δ и h – коэффициент теплопроводности и коэффициент теплоотдачи материала соответственно.

Изменение граничного условия на внешней границе $r = R$ приводит к изменению функции c , для которой из второго соотношения (3.14) и условия прилипания следует уравнение (4.9) с функцией $h_4(t) = 0$.

При дальнейшем уменьшении скорости внешнего цилиндра в расчетный момент времени $t = t_8$ упругопластическая граница $r = r_1(t)$ совпадает с внутренней поверхностью $r = r_0$. С этого момента времени в материале остается две области: область обратимого деформирования $r_1(t_6) \leq r \leq R$ и область $r_0 \leq r \leq r_1(t_6)$, в которой не изменяется компонента тензора необратимых деформаций p_{rz} . В этих областях уравнение теплопроводности имеет вид (3.13), функция p_1 в области $r_0 \leq r \leq r_1(t_6)$ удовлетворяет соотношению (4.2), а в области $r_1(t_6) \leq r \leq R$ – (4.3). Для функции c выполняется уравнение (4.9) при $h_4(t) = 0$. В области $r_0 \leq r \leq r_1(t_6)$ компоненты $m_{rr}, m_{zz}, p_{rr}, p_{zz}$ и p_{rz} вычисляются из зависимостей (4.11) и (5.1). Для нахождения перемещений в области $r_0 \leq r \leq r_1(t_6)$ служит уравнение (4.12). Из этого же уравнения можно найти перемещения в области обратимого деформирования при $p_{rz} = 0$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных $x = r/R$ и $\tau = t\sqrt{a_1/R}$ при следующих значениях постоянных: $r_0/R = 0.1$, $a_0/\mu = -4.08 \times 10^{-4}$, $k_0/\mu = 2.63 \times 10^{-3}$, $f = 0.2$, $\beta_1 = 0.379$, $\beta_3 = -0.558$, $\theta_m = 2.18$, $qR^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R^{-1}} = 21.06$, $\mu\xi^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R^{-1}} = 219.13$, $\mu\eta^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R} = 525.9$, $l/\mu = 0.3$, $v_2/\mu = 0.5$, $\gamma R = 10$, $a_2/a_1 = 2$, $hR/\delta = 12$.

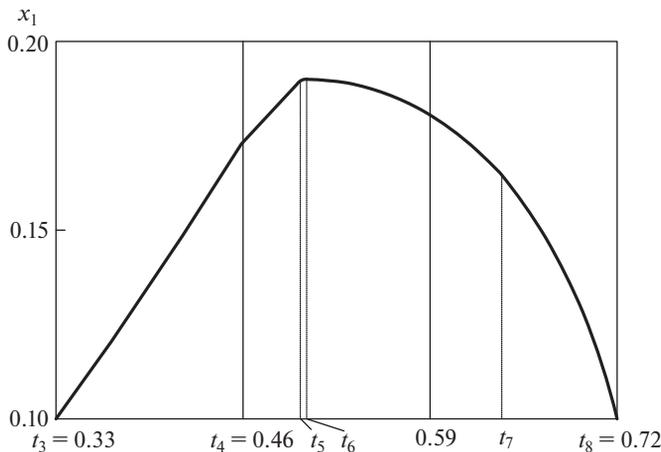


Рис. 1. График упругопластической границы.

На рис. 1 представлен график изменения упругопластической границы $x_1 = r_1/R$ в зависимости от безразмерного времени τ в интервале от τ_3 до τ_8 .

В момент времени $t = t_9 = a_1 a_2^{-1} t_4 + t_5$ внешний цилиндр останавливается. Для функции c в данном случае следует уравнение (4.9), в котором $h_4(t) = 0$ и $v_R = 0$.

Далее в момент времени $t = t_{10}$ теперь уже и на внутренней границе $r = r_0$ выполняется равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. Скорость во всем деформируемом слое становится равной нулю, а функция c перестает изменяться. Теперь материал начинает остывать во всем слое. Уравнение теплопроводности во всем слое примет вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 c^2}{2(\mu - l\theta)^3 r^2}\right) \dot{\theta} = g \left(\theta'' + \frac{1}{r} \theta'\right)$$

Первое граничное условие из (3.8) для этого уравнения изменим на условие

$$\theta'|_{r=r_0} = 0$$

А на границе $r = R$ по-прежнему выполняется граничное условие (5.2). С течением времени материал полностью остынет. После полного остывания напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} на границе $r = r_0$ до нуля.

Распределения температуры θ в момент начала пластического течения τ_3 , в момент времени τ_4 , когда скорость внешнего цилиндра становится постоянной, и в момент времени $\tau_{10} = 0.8$, когда на внутренней границе снова выполняется условие прилипания, показаны на рис. 2.

Рис. 3 иллюстрирует перемещения точек деформируемого слоя в конечный момент времени.

Компонента остаточных напряжений σ_{rz}/μ показана на рис. 4, а. На рис. 4, б представлены остаточные напряжения σ_{rr}/μ , $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ и σ_{zz}/μ сплошной, штриховой и пунктирной линиями соответственно.

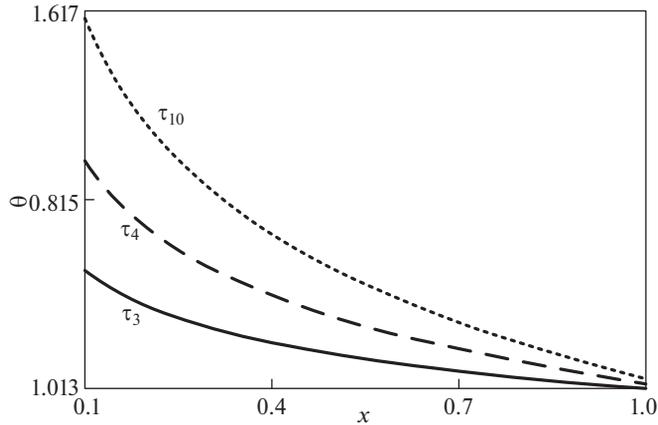


Рис. 2. Распределение температуры по слою в разные моменты времени.

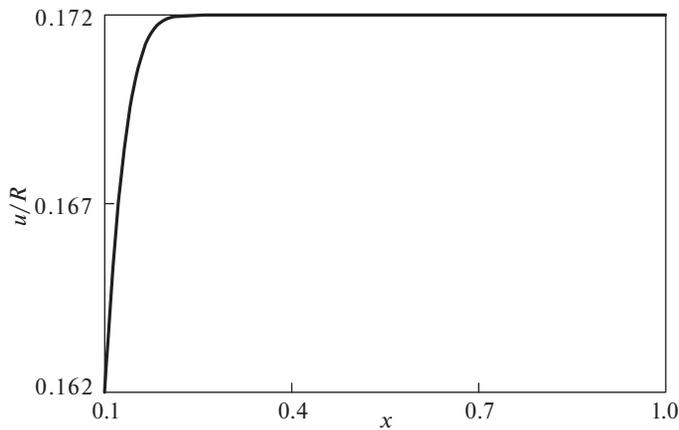


Рис. 3. Перемещения точек материала в конечный момент времени.

6. Заключение. Здесь рассмотрен процесс развития и торможения вязкопластического течения материала с учетом его обратимого деформирования и теплопередачи в нем вне области течения. Учитывается теплотворная способность деформирования и разогрев материала в условиях его проскальзывания по граничной поверхности. Добиться результатов таких расчетов существенно помогли дифференциальные уравнения изменения тензоров обратимых и необратимых деформаций. С их помощью в расчетах удалось избежать достаточно трудных алгоритмических приемов, связанных, например, с проецированием (радиальным вращением) напряжений на поверхность нагружения [32]. Используемый здесь подход не ограничивает в задании иных определяющих законов, не вводит новые постоянные или функции модели, ограничиваясь преимущественно классическими. При необходимости расширения модели это можно сделать. Для этого следует ввести кроме обратимых и необратимых деформаций и температуры новые термодинамические параметры состояния, например, повреждае-

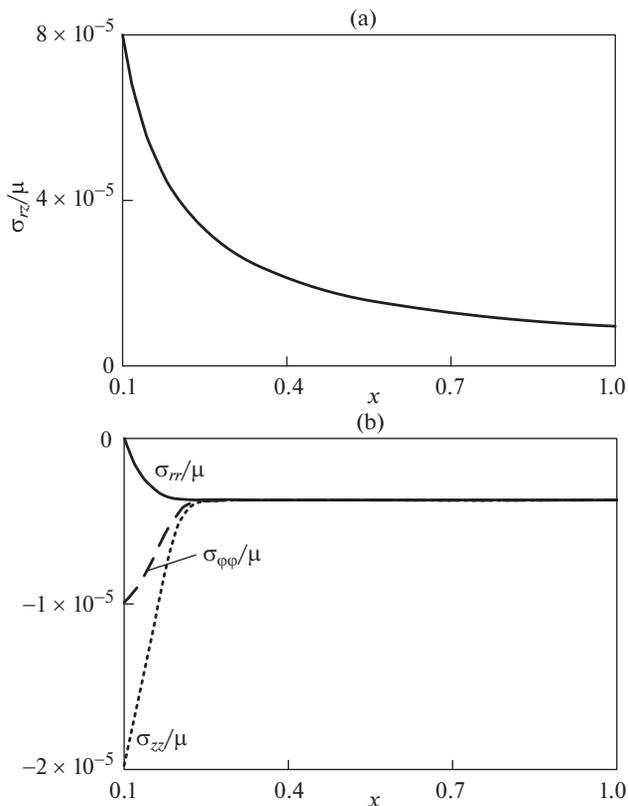


Рис. 4. Распределение по слою остаточных напряжений.

мость, и сформулировать для них соответствующие дифференциальные уравнения изменения.

В названии статьи [29], где впервые на основе [30, 31] были записаны дифференциальные уравнения изменения обратимых и необратимых деформаций вида (2.1) и (2.2), включено “простая модель”. Представлялось, что эти уравнения будут записаны по-иному, для разных случаев, посредством других подходов. Этого до настоящего времени не произошло, надеемся, что все же произойдет. Представляемые возможности для решения краевых задач теории больших необратимых деформаций, примером чему является настоящая статья, обязаны привлечь внимание к развитию данного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 79–86.
2. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы в теории течений жестковязкопластических сред. М.: МГУ, 1971. 163 с.
3. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: МГУ, 1970. 415 с.
4. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.

5. Быковцев Г.И., Чернышов А.Д. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
6. Георгиевский Д.В. Жесткие зоны в статически определимых и неопределимых задачах вязкопластического течения // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. М.: Физматлит, 2006. С. 135–141.
7. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.
8. Буренин А.А., Ковтанык Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
9. Роговой А.А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть 1. Основные соотношения механики сплошных сред. Пермь: УрО РАН, 2020. 288 с.
10. Ковтанык Л.В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. 2005. Т. 400. № 6. С. 764–766.
11. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Мазелис А.Л. Развитие и торможение прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последствие после его остановки // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 2. С. 140–147.
12. Буренин А.А., Ковтанык Л.В. Об упругих деформациях и вязкопластическом течении в тяжелом слое, помещенном на наклонной плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 158–170.
13. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Лушпей А.В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // ПММ. 2009. Т. 73. № 3. С. 494–500.
14. Олейников А.И., Пекарши А.И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.
15. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанык Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216270086>
16. Prokudin A. N., Firsov S. V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // J. Siber. Federal Uni. Math. Phys. 2018. V. 11. I. 4. P. 399–410.
<https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410>
17. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. I. 4. P. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
18. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // Lobachevskii J Math. 2021. V. 42. I. 8. P. 1998–2005.
<https://doi.org/10.1134/S1995080221080163>
19. Ковтанык Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. мат. ж. 2004. № 1. С. 107–117.
20. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. I. 2. P. 338–365.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.07.005>
21. Canadija M., Mosler J. On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimization // Int. J. Solids Struct. 2011. V. 48. I. 7–8. P. 1120–1129.
<https://doi.org/>
22. Junker P., Hackl K. A thermo-mechanically coupled field model for shape memory alloys // Contin. Mech. Thermodyn. 2014. V. 26. I. 6. P. 859–877.
<https://doi.org/10.1007/s00161-014-0345-x>
23. Zhu Y., Kang G., Kan Q., Bruhns O.T., Liu Y. Thermo-mechanically coupled cyclic elasto-viscoplastic constitutive model of metals: Theory and application // Int. J. Plasticity. 2016. V. 79. P. 111–152.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.12.005>

24. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л. Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 107–120.
25. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // ДАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
<https://doi.org/10.7868/S0869565215270080>
26. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счет трения о шероховатую плоскость // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 4 (332). С. 101–111.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20150410>
27. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 6–18.
28. Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 265–275.
29. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанык Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
30. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
31. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
32. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: Изд-во КГУ, 2009. 465 с.
33. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 120–128.
34. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
35. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
36. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

УДК 517.583; 517.927; 624.072.21

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА КОНСОЛИ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

© 2022 г. К. Н. Анахаев^{a,*}

^aИнститут прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра
Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик, Россия

*e-mail: anaha13@mail.ru

Поступила в редакцию 07.08.2021 г.

После доработки 08.10.2021 г.

Принята к публикации 11.10.2021 г.

Приводится аналитическое решение нелинейной задачи изгиба консоли вертикальной силой, представленное в элементарных функциях с расчетными формулами по прямому определению основных параметров изгибаемой консоли в зависимости от заданной величины силовой нагрузки (модуля), таких как – координаты очертания консоли, изгибаемые углы и кривизна по длине консоли, моменты сил и внутренняя энергия изгиба, а также упрощенные формулы для нахождения координат свободного конца консоли. Сравнение полученных расчетных значений с графическими и табличными данными известных численных (точных) решений дало достаточно высокую сходимость результатов (<1–2%), приведены примеры расчета. Полученные результаты могут быть использованы также для определения (обратным методом) жесткости стержней консолей произвольного поперечного сечения, либо модуля упругости материала консоли при известных сечениях, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов.

Ключевые слова: консоль, изгиб консоли, нелинейная задача, эллиптические функции Якоби, эллиптические интегралы 1 и 2 рода, изгибающий момент сил, внутренняя энергия изгиба

DOI: 10.31857/S057232992204002X

1. Введение. Изгиб консоли тонкого упругого горизонтального стержня длиной L , жестко защемленного одним (левым) концом в центре координат xOy , возникает при воздействии на другой свободный конец поперечной вертикальной статической силы P (рис. 1). При этом, как известно, уравнение равновесия такого стержня имеет вид [1, 2]

$$EJ \frac{d^2\theta}{dl^2} + P \cos \theta = 0 \quad (1.1)$$

в котором E – модуль упругости (модуль Юнга); J – момент инерции; EJ – изгибная жесткость стержня; l и $\theta(l)$ – текущие значения длины (неизменной) дуги стержня и угла между касательной к текущей точке стержня и осью Ox .

Выражение (1.1) преобразовывается в нелинейное уравнение маятника [1–4]

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{EJ} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \beta^2 \sin \gamma = 0 \quad (1.2)$$

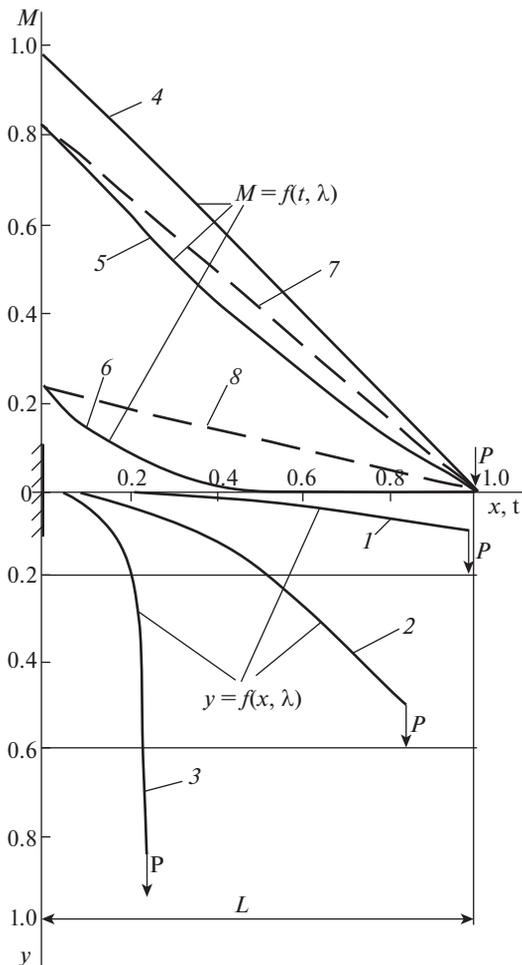


Рис. 1. Расчетная схема изгиба горизонтальной консоли от вертикальной силы P : кривые 1–3 – очертания консоли $y = f(x, \lambda)$ для заданных значений модуля $\lambda = \sqrt{0.6}, \sqrt{0.85}, \sqrt{0.99999}$; кривые 4–6 и 4, 7, 8 – графики моментов сил $M = f(t, \lambda)$ по длине консоли для тех же значений модуля λ , соответственно, для нелинейной и линейной задач.

где $\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}}$ – силовой коэффициент подобия; $\gamma(t) = \frac{\pi}{2} + \theta$ – угол между касательной к текущей точке и осью $0y$; $t = \frac{l}{L}$ – приведенная длина стержня.

2. Постановка задачи. Решение уравнения (1.2) представляется в виде зависимостей [1–3]

$$\gamma(t) = 2 \arcsin[\lambda \cdot \operatorname{sn}(\beta t + F(\varphi, \lambda), \lambda)], \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} = 2 \cdot \lambda \beta \cdot \operatorname{cn}[\beta t + F(\varphi, \lambda), \lambda] \quad (2.1)$$

в которых значения модуля λ , равного $\lambda = \sin \alpha$ (α – модулярный угол), и неполного эллиптического интеграла 1 рода $F(\varphi, \lambda) \equiv F(\varphi)$ (φ – амплитуда интеграла) зависят от величины силы P . Здесь и далее (см. ниже) обозначение модуля λ в эллиптических интегралах и эллиптических функциях опущено для упрощения записей, то есть: $K(\lambda) \equiv K$, $K'(\lambda) \equiv K'$, $E(\lambda) \equiv E$, $E(\varphi, \lambda) \equiv E(\varphi)$, $\text{sn}(u, \lambda) \equiv \text{sn}(u)$, $\text{cn}(u, \lambda) \equiv \text{cn}(u)$, $\text{dn}(u, \lambda) \equiv \text{dn}(u)$

При этом с учетом граничных условий, равных: $t = 0 \rightarrow \theta(0) = 0$, $\gamma(0) = \frac{\pi}{2}$ и $t = 1 \rightarrow \frac{d\theta(L)}{dt} = 0$, $\frac{d\gamma(1)}{dt} = 0$ из зависимостей (2.1) после преобразований следует значение эллиптического синуса Якоби, равное

$$\text{sn}[F(\varphi)] = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)/\lambda$$

откуда выразим зависимости [2, 3, 5, 6] для определения значений амплитуды

$$\varphi = \arcsin\{\text{sn}[F(\varphi)]\} = \arcsin\left(\frac{1}{\lambda} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$$

и неполного эллиптического интеграла 1 рода

$$F(\varphi) = F\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)\right] \quad (2.2)$$

а также нижеследующее равенство (2.3) для силового коэффициента подобия

$$\beta = K - F(\varphi) \quad (2.3)$$

где K – полный эллиптический интеграл 1 рода при модуле λ и модулярном угле α , изменяющихся в интервалах $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda < 1$, $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

В вышеприведенных формулах (2.1)–(2.3) значения λ и $F(\varphi)$ находятся в зависимости от силовой нагрузки β методом подбора при известном P – задаваясь λ в формуле для определения критической нагрузки [2, 3]:

$$\frac{P}{P_c} = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^2 = 4 \left[\frac{K - F(\varphi)}{\pi}\right]^2 \quad (2.4)$$

где $P_c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{L^2}$ – эйлерова критическая сила.

По результатам интегрирования соотношений $\frac{dx}{dt} = \cos \theta$, $\frac{dy}{dt} = \sin \theta$ и преобразований представлены следующие расчетные зависимости (2.5) для описания очертания упругого стержня [1–3] при $L = 1$ (в усл. ед.):

$$x = \frac{2\lambda}{K - F(\varphi)} [\sqrt{1 - 0.5\lambda^{-2}} - \text{cn}(u)] \quad (2.5)$$

$$y = t - \frac{2}{K - F(\varphi)} \{E[am(u)] - E(\varphi)\}$$

в которых $E(\varphi)$ и $E[am(u)]$ – неполные эллиптические интегралы 2 рода с модулем λ , соответственно, при амплитуде $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$ и эллиптической амплитуде Якоби [5, 6]

$am(u) = \arcsin[\operatorname{sn}(u)]$. При этом значение угла u в эллиптических функциях Якоби – синусе $\operatorname{sn}(u)$ и косинусе $\operatorname{cn}(u)$, определяется по зависимости [2, 3]

$$u = [K - F(\varphi)]t + F(\varphi) \quad (2.6)$$

3. Метод и построение решения. Следует отметить, что аналитическое решение различных прикладных задач механики с эллиптическими функциями Якоби и эллиптическими интегралами 1 и 2 рода (не выражающимися через элементарные функции) представляет собой значительные математические трудности, связанные, в том числе, с использованием специальных графиков и таблиц и необходимостью нелинейного, перекрестного и обратного интерполирования их данных. В то же время, используемые в настоящее время математические программы позволяют на основе численных решений находить значения эллиптических функций и интегралов с заданной точностью – однако, при этом результаты получаются в “цифрах” и только для отдельных дискретных точек. Указанное не позволяет получить общее аналитическое решение в элементарных функциях более сложной и многокомпонентной задачи, в которую отдельными “фрагментами” могут входить специальные функции, что ограничивает возможности выявления причинно-следственных связей исходных факторов и их влияние на итоговые результаты решаемых задач [7–10].

При этом известные аппроксимации указанных интегралов [11] не охватывают всю область их определения и представлены достаточно громоздкими приближенными формулами с большим числом интервалов их разбиения и т.д.

Другим направлением исследований является получение на основе результатов теоретических исследований упрощенных аналитических зависимостей для решения прикладных инженерных задач. В частности, в работах [12, 13] выполнены такие исследования для представления в элементарных функциях параметров прогиба стержня при изгибе от воздействия продольной нагрузки.

Аналогичные упрощенные зависимости для определения прогиба консоли от действия поперечной силы на свободном конце получены на основе “модифицированно-линейного решения” [14, 15] (с численным решением алгебраических уравнений), а также путем разложения эллиптических интегралов в ряды [16] (с результатами близкими к точным). Вместе с тем, следует указать на недостаточность таковых исследований для оценки “укорочения” консоли при прогибе, то есть по определению абсциссы ее конца, что имеет важное значение при проектировании гибких стержневых систем.

Ниже приводятся расчетные зависимости для аналитического представления эллиптических интегралов 1 и 2 рода: K , $F(\varphi)$, $E(\varphi)$, $E[am(u)]$ и эллиптических функций Якоби: $\operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u)$ в элементарных функциях, полученные на основе результатов гидромеханических решений (с погрешностью $\ll 1-2\%$) для заданных значений модуля $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda < 1$.

При этом неполный эллиптический интеграл 1 рода $F(\varphi)$ для рассматриваемых случаев $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda < 1$ рекомендуется определять по новой расчетной зависимости (3.1), основанной на результатах ранее полученных гидромеханических решений [7, 8, 17],

$$F(\varphi) = -K + \frac{K'}{\pi} \operatorname{Arch} \left(r \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}}{\varepsilon_2} \right) \quad (3.1)$$

где величины ε_1 , ε_2 , r находятся по формулам

$$\varepsilon_1 = (m - 1) + (1 + m - 2n)\varphi_1, \quad \varepsilon_2 = n(m - 1) + [2m - n(1 + m)]\varphi_1, \quad m = \frac{2r}{1 + r^2}$$

$$n = \frac{2}{r} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}{1 + r^{-2} \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}, \quad r = \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi K}{K'}\right), \quad \varphi_1 = \sin(\varphi), \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$$

в которых K и K' (K' – полный эллиптический интеграл 1 рода при дополнительном модуле $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$) определяются по зависимостям [7–10, 17]:

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \sqrt{1 - \lambda^2}}{\ln[0.35(1 - 0.2\sqrt{1 - \lambda^2})]} \quad (3.2)$$

$$K' = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \lambda}{\ln[0.35(1 - 0.2\lambda)]}. \quad (3.3)$$

При этом получена новая аналитическая зависимость (3.4) в элементарных функциях для прямого определения значений эллиптического синуса Якоби $\operatorname{sn}(u)$ (основанная на работах [7, 8, 17]), в виде:

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{(\xi^* - n)(1 - m)}{\xi^*(1 + m - 2n) + n(1 + m) - 2m}, \quad \xi^* = \frac{2}{r} \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{K'}(u + K)\right]}{1 + r^{-2} \operatorname{ch}^2\left[\frac{\pi}{K'}(u + K)\right]} \quad (3.4)$$

где значения угла u подсчитываются по формулам (2.6), (3.1)–(3.3) для заданных значений t и λ .

Величина эллиптического косинуса Якоби $\operatorname{cn}(u)$ определяется по формуле [6]

$$\operatorname{cn}(u) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u)} \quad (3.5)$$

Значения же неполного эллиптического интеграла 2 рода $E(\varphi)$ находятся для двух интервалов в зависимости от заданных величин модулярного угла $\alpha_0 = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$ и амплитуды $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$ по следующим усовершенствованным формулам [10]:

$$E(\varphi) = \varphi - (\varphi - \sin \varphi) \frac{\alpha_0}{90^\circ}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad (3.6)$$

$$E(\varphi) = \left[2E + \left(1 - 0.1\pi \frac{\alpha_0}{180^\circ}\right) \frac{\pi - 2\varphi}{\varphi - 1} \right] \frac{\varphi - 1}{\pi - 2}, \quad 1 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

где E – полный эллиптический интеграл 2 рода, определяемый в виде [9, 10]:

$$E = \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \cdot \lambda^2} \quad (3.7)$$

Значения $E(\varphi)$, полученные по зависимостям (3.6), близко (~1%) согласуются с графиками точного решения [5], а для частных случаев (граничных участков) значе-

ния $E(\varphi)$ полностью совпадают с точными формулами, в частности, при $\alpha_0 = 0$; $\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0$; $\frac{\pi}{2}$, соответственно, $E(\varphi, 0) = \varphi$; $E(\varphi, 1) = \sin \varphi$ и $E(0, \lambda) = 0$; $E\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = E$.

Величина интеграла $E[am(u)]$ в зависимости (2.5) также находится по формулам (3.6), принимая в них вместо φ величину эллиптической амплитуды $am(u) = \arcsin[\operatorname{sn}(u)]$, в котором значение эллиптического синуса Якоби $\operatorname{sn}(u)$ рассчитывается по (3.4).

Таким образом, подставляя рекомендуемые расчетные зависимости, выраженные в элементарных функциях (3.1)–(3.7), в формулы (2.5), строятся очертания линии изогнутой консоли для заданных значений модуля λ .

Кроме этого, по подсчитанным по формуле (2.6) значениям угла u , определяются также по нижеследующим зависимостям [1] значения изгибающих моментов

$$M = \frac{2\lambda}{\beta} PL \cdot \operatorname{cn}(u)$$

и углов θ между касательной к текущей точке консоли и осью Ox

$$\theta = 2 \arcsin[\lambda \cdot \operatorname{sn}(u)] - \frac{\pi}{2} \quad (3.8)$$

которые для концевой точки (при $t = 1$) будут равны $M = 0$; $\theta = 2\alpha - 0.5\pi$.

Кривизна изгиба консоли k вдоль длины стержня определится производной

$$k = \theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\lambda \cdot \operatorname{cn}(u) \cdot \operatorname{dn}(u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(u)}} [K - F(\varphi)] = 2\lambda \cdot \beta \cdot \operatorname{cn}(u) \quad (3.9)$$

в которой $\operatorname{dn}(u) = \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(u)}$ – дельта амплитуды Якоби (рис. 2).

Внутренняя энергия изгиба консоли V находится по формуле [1]

$$V = PL \left\{ \frac{2}{\beta} [E - E(\varphi)] - 2(1 - \lambda^2) \right\} \quad (3.10)$$

характер изменения которой в зависимости от значений модулярного угла α_0 (в градусах) показан на рис. 2.

Для расчетов прикладных задач (с погрешностью $< 1.5\text{--}2.5\%$) аналитическую взаимосвязь между значениями β и λ в формуле (2.4), можно выразить через значения модулярного угла α_0 в виде зависимостей (3.11) и (3.12), полученных на основе [9]:

$$\beta = K - \left[\frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{\alpha_0}{60^\circ} \right) + \frac{1}{1.65 \cdot \varphi - 0.5} \cdot \frac{\alpha_0}{60^\circ} + 1.15(\varphi - 0.65) \left(K^{-1} + 0.165 \frac{\alpha_0}{60^\circ} - \frac{2}{\pi} \right) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

$45^\circ < \alpha_0 < 60^\circ$

$$\beta = K - \left[\frac{3 - \frac{\alpha_0}{30^\circ}}{1.665 \cdot \varphi - 0.5} + \frac{\frac{\alpha_0}{30^\circ} - 2}{\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]} \right]^{-1}, \quad 60^\circ \leq \alpha_0 < 90^\circ \quad (3.12)$$

в которых величины модуля λ и амплитуды φ , соответственно, равны $\lambda = \sin \alpha_0$ и $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$, а полные эллиптические интегралы 1 рода K и K' определяются по формулам (3.2) и (3.3).

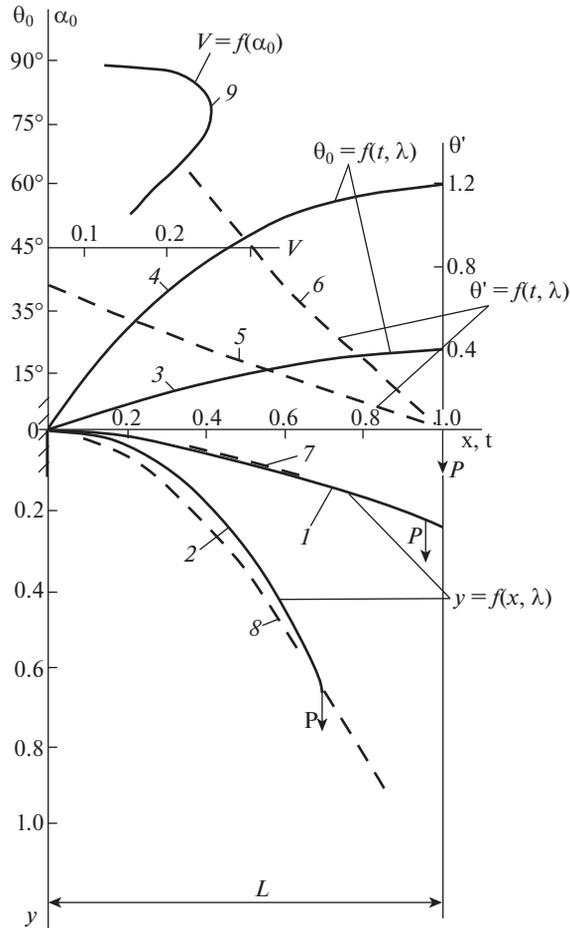


Рис. 2. Графики параметров изгибаемой консоли: кривые 1, 2 и 7, 8 – очертания консоли $y = f(x, \lambda)$ для заданных значений $\beta^2 = 0.7305, 3.4055$ для нелинейной и линейной задач; кривые 3, 4 и 5, 6 – значения изгибаемых углов $\theta_0 = f(t, \lambda)$ и кривизны консоли $\theta'_0 = f(t, \lambda)$ для тех же значений β^2 ; кривая 9 – эпюра внутренней энергии изгиба $V = f(\alpha_0)$.

4. Анализ результатов и примеры. На рис. 1 приведена расчетная схема изгиба горизонтальной консоли от действия поперечной вертикальной силы P , на которой для заданных значений модуля λ , равных $\sqrt{0.6}, \sqrt{0.85}, \sqrt{0.99999}$, показаны:

- линии изгибов консоли (кривые 1–3), практически совпадающих с очертаниями кривых, построенных численным методом [2, рис. 2, с. 128];
- эпюры изгибающих моментов сил по длине консоли с учетом нелинейности (кривые 4–6) и для случая линейной задачи (кривые 7, 8).

Из рис. 1 также следует, что при силовых нагрузках с модулем $\lambda > \sqrt{0.85}$ завышение “линейных” моментов сил над “нелинейными” составляет от 20% до кратных значений.

Таблица 1. Координаты изогнутой консоли при модулях $\lambda = 0.8192, 0.9659$

Приведенная длина стержня t	Координата x		% (абс.)	Координата y		% (абс.)
	точные значения [1]	по автору (2.5), (2.6), (3.1)–(3.7)		точные значения [1]	по автору (2.5), (2.6), (3.1)–(3.7)	
При $\beta^2 = 0.7305$, модуле $\lambda = 0.8192$ ($\alpha_0 = 55^\circ$)						
0	0	0	–	0	0	–
0.2500	0.2489	0.2474	–0.2	0.0201	0.0365	+1.6
0.4375	0.4327	0.4300	–0.3	0.0572	0.0746	+1.7
0.6250	0.6132	0.6091	–0.4	0.1076	0.1196	+1.2
0.8125	0.7912	0.7855	–0.6	0.1667	0.1692	+0.2
0.9062	0.8795	0.8731	–0.6	0.1981	0.1950	–0.3
1.0	0.9676	0.9605	–0.7	0.2301	0.2212	–0.9
При $\beta^2 = 3.4055$, модуле $\lambda = 0.9659$ ($\alpha_0 = 75^\circ$)						
0	0	0	–	0	0	–
0.2500	0.2384	0.2372	–0.1	0.0656	0.0572	–0.8
0.4375	0.3886	0.3857	–0.3	0.1769	0.1643	–1.3
0.6250	0.5127	0.5075	–0.5	0.3172	0.3031	–1.4
0.8125	0.6178	0.6101	–0.8	0.4724	0.4602	–1.2
0.9062	0.6661	0.6572	–0.9	0.5527	0.5430	–1.0
1.0	0.7132	0.7030	–1.0	0.6338	0.6283	–0.6

В табл. 1 дается сравнение значений координат (при $L = 1$) изогнутой консоли, подсчитанных по рекомендуемым зависимостям (2.5), (2.6), (3.1)–(3.7) с данными численного (точного) решения Попова Е.П. [1, табл. 9.4 и 9.5, с. 231] для силовых нагрузок $\beta^2 = 0.7305, 3.4055$ при соответствующих значениях модуля $\lambda = 0.8192, 0.9659$.

Как следует из табл. 1, результаты подсчетов координат изогнутой консоли для модулей $\lambda = 0.8192, 0.9659$, подсчитанные по предлагаемым зависимостям на основе элементарных функций (2.5), (2.6), (3.1)–(3.7), весьма близко (<1.0–1.7%) согласуются с данными численного (точного) решения [1] по всей длине консоли (рис. 2, кривые 1 и 2).

На рис. 2 для указанных модулей $\lambda = 0.8192, 0.9659$ показаны также графики углов изгиба θ_0 (в градусах), равные $\theta_0 = \frac{\theta}{\pi} 180^\circ$ – (кривые 3, 4) и кривизны консоли, определяемые

производной $k = \theta' = f(t, \lambda)$ (кривые 5, 6).

Для сравнительной оценки результатов полученного решения нелинейной задачи представлены также очертания изгибов консолей при решении линейной задачи (кривые 7, 8). Как видно из последнего, “линейное” очертание кривой 7 для модуля $\lambda = 0.8192$ достаточно близко совпадает с точной кривой (без учета горизонтального смещения на ~3%), однако же, для повышенных значений модуля $\lambda = 0.9659$ линейная задача с очертанием кривой 8 дает неприемлемые результаты с завышением прогибов консоли до 50–80%, не учитывая при этом и горизонтальное смещение на ~30%.

Из рассмотренного общего решения задачи следуют отдельные результаты, в частности, по определению координат свободного конца консоли. Последние выразятся из (2.5), (2.6), (3.4) и (3.5) при значении $t = 1$ в виде:

Таблица 2. Координаты свободного конца изогнутой консоли при нагрузках $1 < \beta \leq 4.85$

Формулы автора	Модулярный угол α_0 (град)	Модуль λ	Силловая нагрузка β	Координаты свободного конца консоли при $t = 1$					
				ордината y			абсцисса x		
				точные значения	по автору		точные значения	по автору	
					$y = f(\beta)$	%		$x = f(\beta)$	%
(4.2), (4.4)	45.2	0.7096	0.1182	0.0046	0.0081		0.9999	0.9999	—
	46	0.7193	0.2643	0.0233	0.0285		0.9997	0.9997	—
	48.515 [16]	0.7491	0.4967	0.0834	0.0843	+1.1	0.9960	0.9952	-0.1
	50	0.7660	0.5941	0.1160	0.1160	—	0.9919	0.9904	-0.2
	55 [1, с. 231]	0.8192	0.8547	0.2301	0.2247	-2.3	0.9676	0.9641	-0.4
(4.3), (4.5)	60	0.8666	1.0783	0.3405	0.3418	+1.3	0.9274	0.9204	-0.8
	65	0.9063	1.3009	0.4455	0.4471	+0.4	0.8716	0.8672	-0.5
	66.252 [16]	0.9153	1.3593	0.4707	0.4717	+0.2	0.8552	0.8500	-0.6
	70	0.9397	1.5467	0.5436	0.5424	-0.2	0.8003	0.7965	-0.5
	72.866 [16]	0.9556	1.7088	0.5977	0.5944	-0.3	0.7224	0.7525	+1.6
	75 [1, с. 231]	0.9659	1.8454	0.6338	0.6322	-0.3	0.7132	0.7469	+0.5
	80	0.9848	2.2541	0.7167	0.7273	+1.5	0.6082	0.6191	+1.8
(4.3), (4.6)	85.89 [16]	0.9974	3.1415	0.8101	0.8094	-0.1	0.4478	0.4508	+0.7
	88	0.9994	3.8606	0.8472	0.8471	—	0.3659	0.3588	-1.9
	89.257	0.9999	4.8503	0.8791	0.8788	—	0.2915	0.2972	+1.9

Примечание: значения абсцисс для строк, заимствованных из [1, 16], подсчитаны автором.

$$x = \frac{2}{\beta} \sqrt{\lambda^2 - 0.5}, \quad y = 1 - \frac{2}{\beta} [E - E(\varphi)] \tag{4.1}$$

Для нахождения значений указанных координат в зависимости от действующей силовой нагрузки β предлагаются также следующие упрощенные зависимости для соответствующих интервалов нагрузки:

– для абсциссы $x = f(\beta)$

$$x_1 = 1 - 0.09\beta [\beta(\beta - 0.35) + 0.035], \quad 0 < \beta \leq 1 \tag{4.2}$$

$$x_2 = 0.96 - 0.32(\beta - 1)[1 - 0.12(\beta - 1)], \quad 1 < \beta \leq 4.85 \tag{4.3}$$

– для ординаты $y = f(\beta)$

$$y_1 = 0.272\beta [0.135 + \beta(1 - 0.032\beta)], \quad 0 < \beta \leq 1 \tag{4.4}$$

$$y_2 = 0.3 + 0.55(\beta - 1) \{1 - 0.385(\beta - 1)[1 - 0.145(\beta - 1)]\}, \quad 1 < \beta \leq 3 \tag{4.5}$$

$$y_3 = 0.8 + 0.022\pi(\beta - 3) \{1 - 0.268(\beta - 3)[1 - 0.124(\beta - 3)]\}, \quad 3 < \beta \leq 6.26 \tag{4.6}$$

В нижеследующей табл. 2 дается сравнение значений координат $x = f(\beta)$ и $y = f(\beta)$ для свободного конца изогнутой консоли, подсчитанных по рекомендуемым зависимостям (4.2)–(4.6) с точными данными (в том числе, заимствованными из [1, 16]) для интервала силовых нагрузок $0 < \beta \leq 4.85$.

Как следует из табл. 2, значения координат $x = f(\beta)$ и $y = f(\beta)$ для свободного конца изогнутой консоли, подсчитанных по рекомендуемым зависимостям (4.2)–(4.6)

весьма близко ($\sim 1-2\%$) согласуются с точными данными, в том числе, заимствованными из [1, 16], для всего интервала действия силовых нагрузок $0 < \beta \leq 4.85$.

Кроме этого, на рис. 2 представлено изменение характера внутренней энергии изгиба $V = f(\alpha_0)$ в зависимости от модулярного угла α_0 (кривая 9), из которого следует, что консоль обладает наибольшей внутренней энергией при значениях $\alpha_0 = 75^\circ \dots 80^\circ$, соответствующих силовому коэффициенту подобия $\beta = 1.845 \dots 2.284$.

Заключение. В работе рассматривается классическая нелинейная задача изгиба консоли от действия вертикальной силы. При этом получены расчетные зависимости в элементарных функциях для прямого аналитического определения основных параметров изгибаемой консоли, таких как – координаты очертания консоли, изгибаемые углы и кривизна по длине консоли, моменты сил и внутренняя энергия изгиба, а также упрощенные формулы для нахождения координат свободного конца консоли. Сравнение полученных расчетных значений с графическими и табличными данными известных численных (точных) решений дало достаточно высокую сходимость результатов ($< 1-2\%$), приведены примеры расчета, в том числе со сравнением с результатами линейного расчета. Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при определении (обратным методом) жесткости стержней консолей произвольного поперечного сечения, а также модуля упругости материала консоли при известных сечениях, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 294 с.
2. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.
3. Захаров Ю.В., Захаренко А.А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 48–54.
4. Анахаев К.Н. К расчету математического маятника // Доклады академии наук. 2014. Т. 459. № 3. С. 288–293.
<https://doi.org/10.7868/S0869565214330081>
5. Милн-Томсон Л. Эллиптические интегралы // Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган М.: Наука, 1979. С. 401–441.
6. Милн-Томсон Л. Эллиптические функции Якоби и зэта-функции // Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган М.: Наука, 1979. С. 380–400.
7. Анахаев К.Н. О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // “Инженерные системы – 2009”. Труды межд. научн.-практ. конф. Т. 2. М.: РУДН, 2009. С. 588–595.
8. Анахаев К.Н. Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Сер.: Мат. Информат. Физ. 2009. № 2. С. 90–95.
9. Анахаев К.Н. О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.
<https://doi.org/10.7868/S0869565217080072>
10. Анахаев К.Н. Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады РАН. Физика. Техн. науки. 2020. Т. 491. № 1. С. 24–29.
<https://doi.org/10.31857/S2686740020020042>
11. Пархомовский Я.М. Приближенные формулы для эллиптических интегралов и примеры приложения их к двум задачам нелинейной статики упругих балок // Уч. записки ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 4. С. 75–86.
12. Астапов Н.С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 4. С. 135–138.
13. Анфилофьев А.В. Стрела прогиба и сближение концов стержня в продольном изгибе // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 1–6.

-
14. Зуев Д.М. Стрела прогиба консоли под действием поперечной сосредоточенной нагрузки. Приближенные формулы для модификации линейной теории // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2018. Т. 1. С. 294–296.
 15. Зуев Д.М., Охоткин К.Г. Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки // Космические аппараты и технологии. 2020. Т. 4. № 1 (31). С. 28–35.
 16. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Власов А.Ю. Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 132–134.
 17. Анахаев К.Н. О расчете потенциальных потоков// ДАН 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.

УДК 539.3:534.1

ДЕЙСТВИЕ НАКЛОННОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОДЗЕМНЫЙ ТРУБОПРОВОД

© 2022 г. М. Ш. Исраилов^{а,*}

^аКомплексный НИИ РАН, Грозный, Россия

*e-mail: israiler@hotmail.com

Поступила в редакцию 05.10.2021 г.

После доработки 17.10.2021 г.

Принята к публикации 18.10.2021 г.

Исследуются стационарные колебания подземного трубопровода, вызванные наклонным падением плоской сейсмической волны. Показано, что наклонная волна может быть представлена в виде нескольких продольных и поперечных волн, распространяющихся вдоль трубопровода с большими скоростями. Дана постановка связанной задачи о совместных продольных колебаниях упругого грунта и трубопровода. Полученное аналитическое решение внешней задачи для грунта приводит к теоретическому выражению для силы взаимодействия между трубопроводом и грунтом, относительно которой ранее предлагались лишь эмпирические соотношения. Решения для трубопровода в сверхзвуковом и дозвуковом режимах демонстрируют существенно различный характер их поведения, что должно быть учтено в расчетах на сейсмостойкость.

Ключевые слова: сейсмические волны, подземный трубопровод, связанные колебания

DOI: 10.31857/S0572329922040055

1. Введение. Впервые задача о действии продольной сейсмической волны на бесконечно протяженный трубопровод рассмотрена А. Сакураи и Т. Такахаши [1]. Считается, что волна распространяется вдоль трубопровода и является стационарной, то есть периодической функцией времени. Тогда амплитуды ускорений и деформаций в трубопроводе находятся из простых алгебраических уравнений в предположении, что действие грунта заменяется силой, пропорциональной разности между перемещениями в волне и трубопроводе в одном и том же сечении, перпендикулярном оси трубопровода. Эти амплитуды (при различных значениях коэффициента взаимодействия в указанной пропорциональной зависимости) не превышают амплитуд соответствующих величин, определяемых из простейшей инженерной теории “жесткого защемления” трубопровода в грунте, согласно которой перемещения, а значит, и деформации трубопровода совпадают с перемещениями и деформациями грунта в сейсмической волне [2–4].

В дальнейшем А.А. Ильюшин и Т.Р. Рашидов [5, 6] рассмотрели нестационарный режим распространения волн вдоль бесконечного трубопровода, когда нестационарное динамическое состояние трубопровода (перемещения, деформации и напряжения) в разные моменты времени на равном расстоянии от фронта волны одинаково. Иными словами, названные характеристики являются функциями расстояния до фронта волны. В этом случае задача является автомодельной и волновое уравнение нестационарных продольных колебаний трубопровода приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, что позволяет получить аналитиче-

ское решение задачи. Основной результат работы состоит в том, что в ней впервые вводится в рассмотрение названный “сверхзвуковым” режим распространения сейсмической волны вдоль трубопровода, когда ее скорость больше скорости распространения продольных возмущений в трубопроводе. Появление сверхзвукового режима объясняется наличием демпфирующих стыков, соединяющих сегменты трубопровода и гасящих скорость волн в трубопроводе. Из результатов настоящего исследования следует, что такой режим может возникнуть и в более простой ситуации падения наклонной волны на однородный трубопровод.

Следует отметить, что в постановках задач в [1] и [5, 6] не конкретизируется заглублен ли трубопровод на некоторую глубину в полупространстве, занятом грунтом, или же он расположен в неограниченной упругой среде (грунте); второй случай рассматривается для упрощения задачи, когда глубина залегания трубопровода значительно превышает его диаметр. Эта конкретизация зависит от физических соображений или опытных данных, исходя из которых определяется коэффициент в линейной зависимости между силой взаимодействия грунта и трубопровода и относительным смещением трубопровода, принятой в этих работах при выводе дифференциального уравнения движения трубопровода. Указанное обстоятельство, связанное с тем, что грунт отбрасывается и его действие на трубопровод заменятся силой взаимодействия, является основным допущением подхода к постановке задач сейсмодинамики для трубопровода, предложенного в работах [1, 5, 6]. Этот подход в дальнейшем многократно использовался, принимая различные гипотезы (законы) для зависимости между силой взаимодействия и относительным смещением трубопровода.

Другая, более строгая постановка задачи о действии сейсмической волны на трубопровод состоит в том, что исследуются совместные (связанные) движения грунта и трубопровода. Впервые такая постановка задач сейсмодинамики трубопровода дана в наших работах [7–10]. В них считалось, что падающая продольная волна распространяется вдоль трубопровода, что упрощало решение внешней задачи для грунта, сводя ее к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. В настоящей работе рассматриваются постановки и решения связанных задач о совместных стационарных движениях грунта и трубопровода при произвольном угле падения плоской сейсмической волны. Ввиду теоретической и практической важности задачи указаны или исправлены неточности, допущенные в постановке и решении подобной задачи по “модели взаимодействия” в работах [5, 6], когда сейсмическая волна движется вдоль трубопровода.

2. Разложение наклонной волны в сумму нескольких волн, распространяющихся вдоль трубопровода. Предположим сначала, что падающая на трубопровод плоская сейсмическая волна является продольной волной и что она распространяется в вертикальной плоскости (плоскости, проходящей через ось трубопровода и центр Земли или через ось трубопровода перпендикулярно поверхности Земли). Последнее означает, что в декартовой системе координат, с осью z , направленной по оси трубы и осями y и x , лежащими соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, фронт падающей волны перпендикулярен вертикальной плоскости Oyz . Этот фронт (вернее, его след в вертикальной плоскости) изображен прямой FF' на рис. 1. Предположение же, что волна является продольной означает, что перемещения частиц грунта в возмущенной волной области (за ее фронтом) происходят в перпендикулярных фронту направлениях. Такая волна описывается уравнением

$$w_0 = A_0 \exp \left[-i \frac{2\pi}{L} (c_1 t - z') \right] \quad (2.1)$$

если она является стационарной. В (2.1) A_0 есть амплитуда волны, L – ее длина, c_1 означает скорость распространения продольной волны в упругом грунте, а t – время. Лучи (Oz' и параллельные ей), вдоль которых распространяется плоская волна, обра-

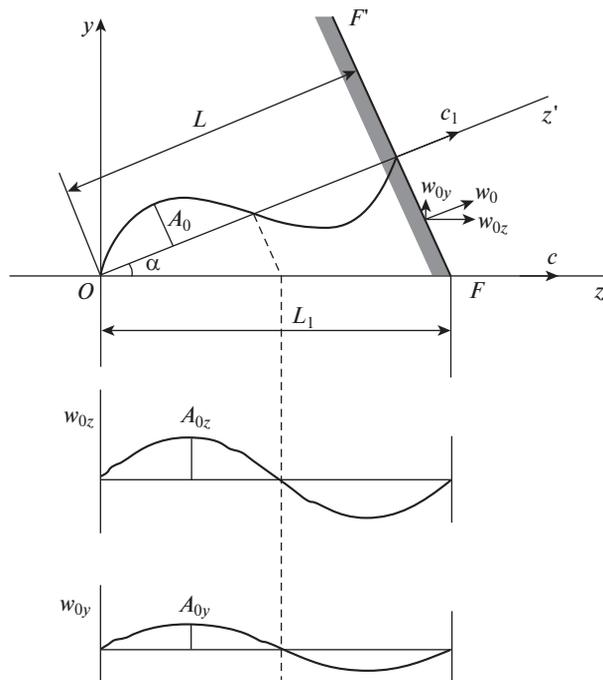


Рис. 1. Разложение наклонной волны, распространяющейся в вертикальной плоскости, на продольную и поперечную составляющие.

зует угол α с осью трубопровода Oz (рис. 1). Этот угол меняется в пределах от 0 до π (поскольку естественно предположить, что фокус землетрясения находится на большей глубине, чем трубопровод) и можно считать, что $0 < \alpha < \pi/2$; случай $\pi/2 < \alpha < \pi$ сводится к предыдущему изменением положительных направлений осей z и x .

Представляя перемещение в волне (2.1) в виде суммы перемещений в направлениях z и y , т.е. в виде суммы $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_{0z} + \mathbf{w}_{0y}$, можно ее воздействие на протяженное в направлении Oz сооружение, в частности трубопровод, заменить воздействием следующих двух волн

$$w_{0z} = A_0 \cos \alpha \exp \left[-i \frac{2\pi}{L/\cos \alpha} \left(\frac{c_1}{\cos \alpha} t - z \right) \right] \equiv A_{0z} \exp \left[-i \frac{2\pi}{L_1} (ct - z) \right] \quad (2.2)$$

$$w_{0y} = A_0 \sin \alpha \exp \left[-i \frac{2\pi}{L/\cos \alpha} \left(\frac{c_1}{\cos \alpha} t - z \right) \right] \equiv A_{0y} \exp \left[-i \frac{2\pi}{L_1} (ct - z) \right]$$

изображенных на рис. 1 и распространяющихся вдоль трубопровода со скоростью $c = c_1/\cos \alpha$. Первая из этих волн (w_{0z} с амплитудой $A_{0z} = A_0 \cos \alpha$) является продольной, а вторая (w_{0y} с амплитудой $A_{0y} = A_0 \sin \alpha$) – поперечной *SV*-волной. В выражениях (2.2) величины c , L_1 , A_{0z} и A_{0y} положительны в силу предположения, что $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Идею подобного рассмотрения эффекта действия наклонной волны на протяженные подземные сооружения высказал впервые Т. Кюзель [11]. Такое рассмотрение может быть принято, когда поперечный размер сооружения является значительно меньшим длины волны L и протяженности самого сооружения вдоль оси z . Примени-

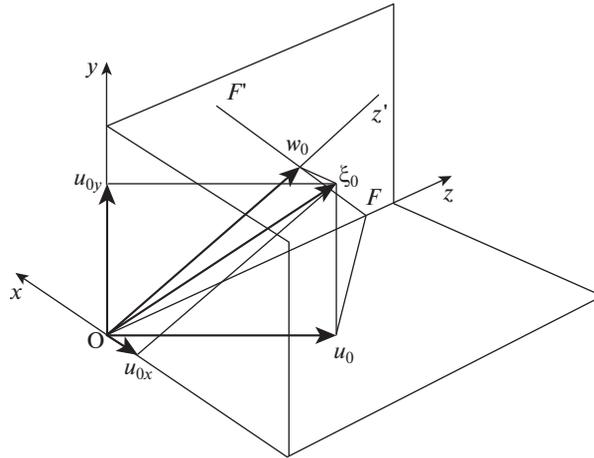


Рис. 2. Два способа представления произвольно ориентированной наклонной волны в виде суммы продольной и поперечной волн.

тельно к трубопроводу это означает, что представление (2.2), верно, когда он рассматривается как стержень, совершающий продольные и изгибные колебания (т.е. движется без искажений поперечных сечений) и не приемлемо, когда трубопровод рассматривается как цилиндрическая оболочка (представления для волны (2.1) в этом случае даны, например, в работах [12, 13]).

Если падающая плоская наклонная волна является продольной и распространяется в горизонтальной плоскости Ozx (проходящей через ось трубопровода и параллельной поверхности Земли), т.е. если вектор перемещения \mathbf{u}_0 в волне лежит в плоскости Ozx (или в плоскостях параллельной ей), образуя угол β с осью трубопровода, то, повторяя приведенные выше рассуждения, волна \mathbf{u}_0 , также как и \mathbf{w}_0 , может быть представлена в виде суммы двух волн (продольной и поперечной), распространяющихся вдоль трубопровода со скоростью $c' = c_1/\cos\beta$.

В более общем случае, когда падающая продольная волна произвольно ориентирована в пространстве и вектор перемещений ξ_0 в ней не принадлежит ни одной из названных выше плоскостей, то он может быть двумя способами выражен в виде суммы двух векторов (рис. 2):

$$\xi_0 = \mathbf{w}_0 + \mathbf{u}_{0x} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_{0y}$$

Здесь \mathbf{w}_0 и \mathbf{u}_0 соответственно проекции вектора ξ_0 на вертикальную и горизонтальную плоскости, а \mathbf{u}_{0x} и \mathbf{w}_{0y} представляют собой поперечные волны, распространяющиеся в направлениях осей x и y .

Представляя теперь каждую из волн \mathbf{w}_0 и \mathbf{u}_0 указанным выше способом через сумму продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль трубопровода, приходим к следующему результату. Действие произвольно ориентированной продольной волны на трубопровод эквивалентно действию трех волн: двух поперечных и одной продольной волн, распространяющихся вдоль трубопровода со скоростью $c = c_1/(\cos\gamma \cdot \cos\alpha)$, где γ угол между вектором ξ_0 и вертикальной плоскостью Ozy , а α угол, образуемый проекцией вектора ξ_0 на эту плоскость с осью Oz (осью трубопровода). Аналогичное

представление, очевидно, имеет место и при падении на трубопровод (или протяженное сооружение) сдвиговой наклонной волны.

3. Постановка связанных задач о колебаниях грунта и трубопровода. Метод квазиодномерной деформации. Результаты наблюдений показывают, что наибольшие внутренние усилия (напряжения) и, соответственно, разрушения трубопроводов в местах стыков возникают, как правило, при их продольных колебаниях под воздействием сейсмических волн. Сказанное справедливо по крайней мере тогда, когда общая длина трубопровода или в случае трубопровода, рассматриваемого как бесконечно длинный, длины его представительных участков (содержащие, скажем, несколько стыков) значительно малы в сравнении с длинами сейсмических волн. Такие участки трубы практически не деформируются под воздействием поперечных волн и движутся в поперечном направлении как абсолютно твердые тела. Если такое рассмотрение не приемлемо и могут возникать заметные деформации и усилия в результате изгиба, то оценки этих величин можно получить, считая, что поперечные движения трубы совпадают с поперечными перемещениями в сейсмической волне [14].

Принимая, для определенности, наклонную нестационарную падающую волну в виде (2.1), дадим постановку задачи о совместных продольных колебаниях трубопровода и упругого грунта под воздействием продольной составляющей падающей волны, выделенной в п. 2, а именно, под воздействием распространяющейся вдоль трубопровода волны w_{0z} из (2.2). Такие связанные постановки впервые даны в наших работах [7–10]. В этих постановках на границах грунтовой массы принимаются следующие краевые условия.

На расстоянии $r = R$, достаточно удаленном от трубопровода, перемещения грунта равны перемещениям в продольной волне (2.2), т.е.

$$u_r|_{r=R} = 0, \quad u_\theta|_{r=R} = 0, \quad (u_z \equiv w)|_{r=R} = w_{0z}(ct - z) = A_{0z} \exp \left[-i \frac{2\pi}{L_1} (ct - z) \right] \quad (3.1)$$

Здесь u_r , u_θ , $u_z \equiv w$ – компоненты вектора перемещений грунта вдоль осей цилиндрической системы координат (r, θ, z) , с осью z , совпадающей с осью трубопровода.

Сформулированные условия означают, что на внешней границе грунта краевые условия сносятся на коаксиальную поверхности трубы цилиндрическую поверхность, радиус R которой может быть принят равным глубине залегания трубопровода.

Если трубопровод находится в неограниченной среде (что можно считать, когда глубина заложения R многократно превосходит внешний радиус трубопровода a), то условия (3.1) должны выполняться на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$).

На внутренней границе грунта, т.е. на границе контакта грунта с трубопроводом, ставятся обычные условия непрерывности перемещений

$$u_r|_{r=a} = 0, \quad u_\theta|_{r=a} = 0, \quad w|_{r=a} = {}^0u(z, t) \quad (3.2)$$

где ${}^0u(z, t)$ означает осевое (продольное) перемещение трубопровода, определяемое из уравнения продольных колебаний стержня. Физически условия (3.2) означают, что радиальные перемещения в трубопроводе пренебрежимо малы в сравнении с продольными и принято условие прилипания на поверхности контакта трубы с грунтом. Оценки величин радиальных перемещений u_r на поверхности металлических (стальных, чугунных) и бетонных труб получены в [15].

При сформулированных краевых условиях (3.1), (3.2) имеет место осевая симметрия, когда $u_\theta \equiv 0$, а перемещения u_r и $u_z \equiv w$ не зависят от угловой координаты θ . Тогда уравнения движения упругого грунта сводятся к системе двух уравнений Ламе для названных ненулевых компонент вектора перемещений (системе (1.3) из [9]).

Гипотеза квазиодномерности деформации грунта. С целью упрощения задачи для грунта предположим, что радиальная $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$ и окружная $\varepsilon_{\theta\theta} = u_r / r$ деформации

являются малыми (по абсолютной величине) в сравнении с деформацией $\varepsilon_{zz} = \partial w / \partial z$ в направлении распространения падающей продольной волны w_{0z} . Тогда тензор деформации имеет лишь две ненулевые компоненты: ε_{zz} и $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr}$.

Метод квазиодномерной деформации предложен и использовался нами в работах [8–10, 15]. В задаче о сейсмических колебаниях трубопровода в бесконечной упругой среде [10], допускающей точное решение, установлено, что приближенное ее решение, полученное по данному методу, весьма близко к точному решению.

В условиях принятой гипотезы, в одном из двух уравнений Ламе, указанных выше, а именно, в уравнении движения в направлении оси z , членами, содержащими перемещение u_r , можно пренебречь в сравнении с другими членами и оно сводится к отдельному (“анизотропному”) волновому уравнению относительно продольного перемещения w :

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

где $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ есть скорость распространения сдвиговых волн в грунте (μ – модуль сдвига, ρ – плотность грунта).

Другое уравнение Ламе содержит оба перемещения u_r и w и может быть решено после нахождения функции w . Однако в этом нет необходимости для полной постановки и решения задачи о совместных продольных колебаниях трубопровода и грунта. Действительно, в силу граничного условия для u_r из (3.2), касательное напряжение, действующее на поверхности контакта среды и трубопровода, вычисляется по формуле

$$\sigma_{rz}|_{r=a} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (3.4)$$

и не зависит от u_r (предполагается, что операции дифференцирования по z и предельного перехода по r перестановочны).

Тогда равнодействующая касательных напряжений (3.4), действующих на боковой поверхности элемента трубопровода длины dz и вовлекающего его в движение, есть

$$Pdz = dz \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}|_{r=a} a d\theta = dz \cdot 2\pi a \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (3.5)$$

Поверхностная сила (3.5), отнесенная к объему $dV = \pi(a^2 - b^2)dz$ элемента dz (b – внутренний диаметр трубы), принимается за объемную силу, действующую на трубопровод: $\mathcal{F} = P/[\pi(a^2 - b^2)]$. Следовательно, уравнение вынужденных продольных колебаний трубопровода имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E' \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2a}{(a^2 - b^2)} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (3.6)$$

где E' – модуль Юнга, а ρ' – плотность материала трубопровода.

Для определения силы взаимодействия \mathcal{F} между трубопроводом и средой не требуется знание радиального перемещения среды u_r . Это следует из равенства (3.4), справедливого при выполнении граничного условия (3.2) для u_r , означаящим, что пренебрегается радиальным расширением трубопровода или влиянием этого расширения на деформации и напряжения в грунте. В работе [15] нами показано, что задача для w выделяется в отдельную задачу и при учете поперечного расширения трубы.

Данная выше постановка является связанной, поскольку в задачу для грунта входит перемещение трубы (через краевое условие в (3.2)) и уравнение движения трубопровода (3.6) содержит продольное перемещение грунта.

Уравнение (3.6) отличается от уравнений движения трубопровода, приведенных в работах [1, 5], тем, что в нем присутствует теоретическое выражение для силы взаимодействия с грунтом (которое в явном виде получено ниже путем решения внешней задачи для грунта), в то время как в указанных работах подразумевается, что сила взаимодействия определена опытным путем. Этот факт является существенным преимуществом рассматриваемой здесь постановки еще и в силу того обстоятельства, что установки и опыты для измерения силы и коэффициента взаимодействия, описанные в работах [6, 16], не отражают адекватно физические условия сейсмической задачи и вопрос их корректного определения из опытов остается открытым [17].

Ввиду важности задачи и для внесения ясности в ее постановку, отметим неточности, допущенные в работе [5] при выписывании уравнения движения трубопровода.

1) Применительно к продольному движению трубопровода утверждается, что "... эффективная масса единицы ее длины $\rho_a F$ несколько больше действительной за счет присоединенной массы грунта" (здесь F есть площадь поперечного сечения трубы, а ρ_a понимается как приведенная погонная плотность трубы с учетом присоединенной массы). Далее эта величина, т.е. $\rho_a F$, входит в уравнение движения трубопровода через выражение для скорости звука в трубе. Однако для продольных движений трубопровода в грунте не может быть введено понятие присоединенной массы в его классическом (Стоксовом [18]) понимании, чего и нет в работе. Более того, предположение о существовании присоединенной массы противоречит принятому в ней же положению о том, что при распространении вдоль трубопровода сейсмической волны все влияние грунта на трубопровод сводится к силе взаимодействия. Раз эта сила учтена в уравнении движения трубопровода, то никаких других сил со стороны грунта на трубопровод не действует и потому рассуждения о присоединенной массе не состоятельны.

2) Представленные в работе (на инженерном уровне) соображения по поводу вывода формулы приведенной жесткости на растяжение для трубопровода с демпфирующими стыками не разъясняют этот вопрос и содержат путаницу в обозначениях. То же относится и к изложению этого вопроса в монографии Т. Рашидова [6]. Инженерные и строгие методы вывода средних (или усредненных) модулей упругости и скоростей распространения продольных волн в трубопроводе с демпфирующими стыками приведены в работе [19].

Нетрудно показать, что сформулированная выше задача в случае бесконечного трубопровода является *автомодельной*, т.е. когда заданная сейсмическая волна w_{0z} , входящая в граничное условие (3.1), является функцией аргумента $Z \equiv ct - z$, она допускает решение, в котором обе неизвестные функции w и u также зависят от Z вместо зависимости от двух переменных z и t в отдельности: $w(r, z, t) = w(r, Z)$, $u(z, t) = u(Z)$. Следовательно, уравнения колебаний грунта (3.3) и трубопровода (3.6) сводятся к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}, \quad m^{-2} \equiv \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 - 1 \right] > 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{2a\mu}{(M^2 - 1)(a^2 - b^2)E'} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a}, \quad M \equiv \frac{c}{c_0}, \quad c_0' = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}} \quad (3.8)$$

При этом может реализоваться один из следующих двух, физически различных, режимов протекания волновых процессов в системе грунт–трубопровод: *a*) сверхзвуковой режим ($M > 1$), когда скорость сейсмической волны c в грунте больше стержневой

скорости распространения возмущений в трубопроводе $c_0' = \sqrt{E'/\rho'}$ и $b)$ дозвуковой режим ($M < 1$), когда $c < c_0'$.

Скорость движения волны вдоль трубы $c = c_1/\cos\alpha$ при наклонном падении волны на трубопровод может быть сколь угодно большой (при $0 < \alpha < \pi/2$). По этой причине сверхзвуковой случай, впервые введенный в рассмотрение в работе [5], может возникать и когда трубопровод не содержит демпфирующих стыков.

В условиях, когда падающая волна (2.1) и ее составляющая w_{0z} из (3.1), распространяющаяся вдоль трубопровода, являются стационарными волнами, в грунте и трубопроводе реализуется установившийся колебательный режим, т.е. перемещения w и u могут разыскиваться в виде

$$w(r, Z) = W(r) \exp(-ihZ), \quad u(Z) = U \exp(-ihZ), \quad h \equiv \frac{2\pi}{L_1} = \frac{2\pi}{L} \cos\alpha \quad (3.9)$$

Тогда уравнения (3.7), (3.8) для $W(r)$ и U принимают вид

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + p^2W = 0, \quad p \equiv h/m \quad (3.10)$$

$$h^2U + \frac{2a\mu}{(M^2 - 1)(a^2 - b^2)E'} \left(\frac{dW}{dr} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.11)$$

К этой системе уравнений необходимо присоединить краевые условия для W , получаемые при подстановке представлений (3.9) в (3.1), (3.2), т.е. условия

$$W(r)|_{r=R} = A_{0z} \equiv W_0, \quad W(r)|_{r=a} = U \quad (3.12)$$

4. Вывод теоретического значения для силы взаимодействия. Решение задачи для трубопровода. Интегрируя уравнение колебаний грунта (3.10) (являющееся уравнением Бесселя) и удовлетворяя краевым условиям (3.12), получаем решение внешней задачи для грунта в виде

$$W(r) = \frac{J_0(pr)[Y_0(pR)U - Y_0(pa)W_0] - Y_0(pr)[J_0(pR)U - J_0(pa)W_0]}{J_0(pa)Y_0(pR) - Y_0(pa)J_0(pR)} \quad (4.1)$$

Здесь J_0, Y_0 означают функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Из (4.1) следует, что

$$\frac{dW(r)}{dr} = p \frac{-J_1(pr)[Y_0(pR)U - Y_0(pa)W_0] + Y_1(pr)[J_0(pR)U - J_0(pa)W_0]}{J_0(pa)Y_0(pR) - Y_0(pa)J_0(pR)} \quad (4.2)$$

если воспользоваться правилами дифференцирования бесселевых функций [20].

Равенство (4.2) показывает, что при произвольных значениях параметров, входящих в аргументы бесселевых функций, касательное напряжение (3.4) на поверхности трубы, а значит, и сила взаимодействия с грунтом не пропорциональны относительному перемещению $W_0 - U$, как это предполагается в работах [1, 5, 6]. Однако, если предположить, что безразмерный параметр $pR \ll 1$ (тогда и $pa \ll 1$) или, что эквивалентно, $\varepsilon \equiv R/L \ll 1$, т.е. малость глубины залегания трубопровода и его диаметра в сравнении с длиной сейсмической волны, то пользуясь в (4.2) разложениями бесселевых функций при малых значениях аргументов [20], приходим к асимптотическому представлению для касательного напряжения на поверхности трубы в виде ($\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^0 \exp(-ihZ)$):

$$\sigma_{rz}^0 \Big|_{r=a} = \mu \left(\frac{dW}{dr} \right) \Big|_{r=a} \approx \frac{\mu}{a \ln(R/a)} (W_0 - U) \quad (4.3)$$

Легко показать, что следующий член в асимптотическом разложении касательного напряжения при малом ϵ имеет порядок $O(\epsilon^2 \ln \epsilon)$ и он не пропорционален относительному смещению $W_0 - U$ (содержит разные коэффициенты при W_0 и $-U$). Таким образом, в случае линейно упругого грунта установлена справедливость принятой в инженерных теориях гипотезы о пропорциональности касательных напряжений на поверхности трубопровода (а значит, и силы взаимодействия с грунтом) относительному смещению в первом приближении, когда глубина заложения трубопровода и его диаметр малы в сравнении с длиной сейсмической волны. При этом, из (4.3) следует теоретическое выражение для коэффициента взаимодействия, а именно $k_z = \mu / [a \ln(R/a)]$. Этот коэффициент в инженерных теориях должен определяться в опытах.

Отметим, что в частном, но важном случае $c = c_1$ (не наклонного падения волны на трубопровод, когда $\alpha = 0$ и падающая волна движется вдоль трубы) закон (4.3) выполняется точно. Действительно, тогда в уравнении (3.10) $m^{-1} = 0$ и решение краевой задачи (3.10), (3.12) есть

$$W(r) = \frac{\ln(r/a)}{\ln(R/a)}(W_0 - U) + U, \quad \frac{dW(r)}{dr} = \frac{1}{r \ln(R/a)}(W_0 - U)$$

Подстановка найденного из решения внешней задачи выражения (4.3) для касательного напряжения в уравнение (3.11) приводит последнее к виду

$$(h^2 \pm k^2)U = \pm k^2 W_0, \quad k^2 = \frac{2\mu}{E' |M^2 - 1| (a^2 - b^2) \ln(R/a)} \quad (4.4)$$

Следовательно, амплитуда связанных стационарных колебаний трубопровода дается выражением

$$U = \frac{\pm k^2}{h^2 \pm k^2} W_0 = \frac{1}{1 \pm (h/k)^2} W_0 \quad (4.5)$$

В формулах (4.4), (4.5) верхние знаки берутся в дозвуковом случае ($M < 1$), а нижние – в сверхзвуковом ($M > 1$).

Решение уравнения (3.7) для дозвукового случая (формула (4.5) с верхними знаками плюс) формально совпадает с решением А. Сакураи и Т. Такахаша [1], однако, есть и существенные различия. Во-первых, амплитуда падающей волны $W_0 = A_{0z}$ и параметры h и k , входящие в решение (4.5), зависят от угла падения наклонной падающей волны (формулы (2.2), (3.8), (3.9), (4.4)); в [1] же возможность наклонного падения волны на трубопровод не предполагалась. Во-вторых, что более важно, параметр k в (4.5) имеет теоретическое значение (4.4), вытекающее из решения внешней задачи для грунта, в то время как в работе [1] (а также в работе [5]) этот параметр остается неопределенным.

Сверхзвуковой режим (когда число Маха $M > 1$ и волна в грунте распространяется вдоль трубопровода со скоростью большей, чем скорость звука в трубе) также не изучался А. Сакураи и Т. Такахаша. Этот режим естественным образом возникает при увеличении угла наклона плоской волны к трубопроводу (напомним, что под углом падения понимается угол, образуемый нормалью к фронту волны с осью трубопровода (рис. 1)), поскольку в этом случае $c = c_1 / \cos \alpha \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \pi/2$. Другой случай, когда может возникать сверхзвуковой режим, – это сегментный трубопровод с демпфирующими стыками (гасящими скорость распространения звука в нем) или трубопроводы из композитных или полимерных материалов. В особенности, если такие трубопроводы уложены в плотных или скалистых грунтах с большими скоростями распространения объемных волн.

5. Анализ решения и выводы. Соотношения (4.5) отражают существенное отличие в поведении решений для сверхзвукового и дозвукового режимов, связанное, прежде всего, с возможностью существования резонанса в первом случае: когда параметр k , определенный формулой (4.4), становится по своим значениям близким к h , амплитуда стационарных колебаний при $M > 1$ неограниченно возрастает. Однако и при $k \neq h$ динамические напряжения в сверхзвуковом случае превышают соответствующие напряжения, вычисленные по теории “жесткого защемления” (принятой в нормативных документах при расчете подземных трубопроводов на сейсмостойкость [4]), согласно которой продольные перемещения и деформации трубы совпадают с продольными перемещениями и деформациями грунта в волне w_{0z} из (2.2). Согласно этой простейшей теории, максимальные напряжения в трубопроводе $\sigma'_{zz}{}^0 = E' A_0 h \cos \alpha$.

Следовательно, существующее убеждение [2], что рассчитанные по теории полного защемления напряжения являются верхней границей напряжений в трубопроводе неверно, если реализуется сверхзвуковой режим, а он имеет место при наклонном падении сейсмической волны на трубопровод для углов α , для которых $\cos \alpha < c_1/c'_0$ (подразумевается обычная ситуация, когда скорость объемных волн в грунте c_1 меньше стержневой скорости трубопровода c'_0).

При землетрясениях интенсивности 3 и выше (по шкале Рихтера) основную часть энергии несут волны с длинами от многих десятков до нескольких сотен метров. Тогда для металлических и бетонных (асбестоцементных) трубопроводов в реальных условиях их пролегания численное значение h может на порядок или даже на два порядка быть меньше значения параметра k . В этом случае ($h/k \ll 1$) также справедлив приведенный выше анализ.

В качестве примера исследуем важный вопрос о поведении амплитуды колебаний трубопровода (и амплитуды напряжений в нем) при изменении глубины пролегания. С этой целью подставим значения h из (3.9) и k из (4.4) в решения (4.5) и представим их в виде

$$\frac{U}{W_0} = \frac{1}{1 \pm 2\pi^2 \left(\frac{E'}{\mu} \right) \left[M^2 - 1 \right] \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{a}{L_1} \right)^2 \ln \frac{R}{a}} \quad (5.1)$$

На рис. 3 изображены графики безразмерной амплитуды колебаний U/W_0 железного трубопровода, заложенного в мягкий грунт, в зависимости от глубины заложения при следующих значениях входящих в (5.1) констант и параметров: $E' = 21.3 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 3.38 \times 10^8$ Н/м², $b/a = 0.9$, $a = 0.15$ м, $L_1 = 110$ м, $M = 1.1$ и $M = 0.9$ соответственно в сверхзвуковом и дозвуковом случаях (значение модуля Юнга E' для железа взято из справочника [21], а модуля сдвига μ для мягкого грунта – из [22]).

Теми же выражениями (5.1) определяются и безразмерные амплитуды продольных напряжений в трубопроводе $\sigma'_{zz}/\sigma'_{zz}{}^0$.

Из графиков рис. 3 видно, что амплитуды перемещений (и напряжений) в дозвуковом режиме убывают с возрастанием глубины заложения (сплошная линия), а в сверхзвуковом режиме они, наоборот, возрастают с увеличением R (штриховая линия). Полушириная прямая на рис. 3 обозначает не зависящий от глубины залегания результат элементарной теории полного защемления трубопровода в грунте.

Таким образом, если в дозвуковом случае для обеспечения большей сейсмостойкости трубопровод необходимо заглублять на большую глубину (известный факт), то в сверхзвуковом случае, как следует из результатов настоящего исследования, нужно поступать ровно противоположным образом (разумеется в предположении, что глуби-

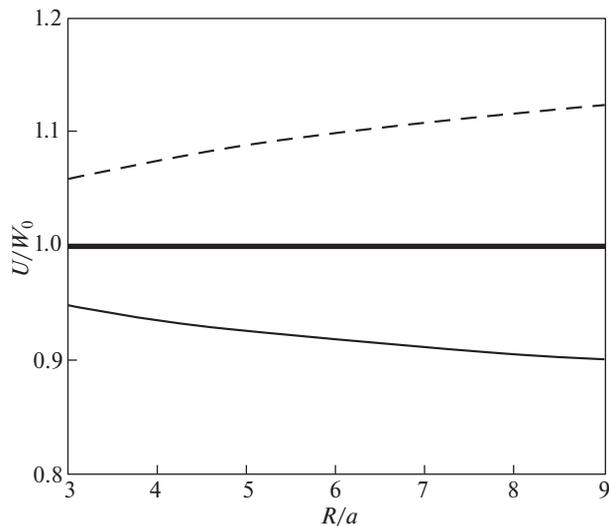


Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний трубопровода от глубины пролегания в дозвуковом (сплошная линия) и сверхзвуковом (штриховая линия) случаях; полужирная прямая показывает результат инженерной теории полного заземления трубы в грунте.

на заложения остается все еще достаточной для того, чтобы можно было пренебречь влиянием поверхностных волн, затухающих экспоненциально с глубиной).

Если же трубопровод или протяженное сооружение цилиндрической формы (скажем тоннель метрополитена) в силу разных причин располагается на небольшой глубине, в зоне интенсивного воздействия поверхностных волн (волн Рэлея), то для уменьшения эффекта этого воздействия и обеспечения большей сейсмозащиты могут быть использованы расположенные вдоль сооружения вертикальные сейсмические барьеры. В работе [23] предложены различные варианты таких барьеров и расчетами подтверждена их эффективность для гашения наиболее опасных для протяженного сооружения вертикальных колебаний в волнах Рэлея.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00024.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sakurai A., Takahashi T. Dynamic stress of underground pipelines during earthquakes // Proc. 4th World Conf. Earthq. Engng. Chile, Santiago, 1969. P. 81–95.
https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/4_vol2_B4-81.pdf
2. Ханетваридзе Ш.Г. Сейсмостойкость гидротехнических сооружений. М.: Госстройиздат, 1959. 216 с.
3. Newmark N.H. Problems in wave propagation in soil and rock // Proc. Int. Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials. New Mexico: Univ. of New Mexico Press, 1968. P. 7–26.
4. Нормы проектирования атомных станций: НП 031–01. Москва, 2001. Приложение 6. Основные положения расчета линейно-протяженных конструкций. С. 23–25.
5. Ильюшин А.А., Рашидов Т. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1971. № 1. 37–42.
6. Рашидов Т. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1973. 180 с.

7. *Исраилов М.Ш.* Связанные задачи сейсродинамики трубопровода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. 1996. № 5. С. 41–45.
8. *Israilov M.Sh.* Seismodynamics of an underground pipeline // Proc. of the 15-th World Conf. on Earthq. Engng. Lissabon, Portugal, 2012. P. 2125.
9. *Георгиевский Д.В., Исраилов М.Ш.* Сейсродинамика протяженных подземных сооружений и грунтов: постановки задач и автомодельные решения // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 138–151.
<https://doi.org/10.3103/S0025654415040135>
10. *Исраилов М.Ш.* Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
<https://doi.org/10.3103/S0025654416010052>
11. *Kuesel T.R.* Earthquake design criteria for subways // J. Struct. Div. Proc. Am. Soc. Civil Eng. 1969. V. 95. P. 1213–1231.
<https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002292>
12. *Kouretzis G.P., Bouckovalas G.D., Gantes C.J.* 3-D shell analysis of cylindrical underground structures under seismic shear(S) wave action // Soil Dyn. Earthquake Eng. 2006. V. 26. P. 909–921.
<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2006.02.002>
13. *Kouretzis G.P., Bouckovalas G.D., Karamitros D.K.* Seismic verification of long cylindrical underground structures considering Rayleigh wave effects // Tunneling Underground Space Technol. 2011. V. 26. P. 789–794.
<https://doi.org/10.1016/j.tust.2011.05.001>
14. *O'Rourke M.J., Liu X.* Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Univ. of Buffalo, 1999. 250 p.
15. *Исраилов М.Ш., Мардонов Б., Рашидов Т.Р.* Сейсродинамика подземного трубопровода при неидеальном контакте с грунтом: влияние проскальзывания на динамические напряжения // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 6. С. 189–196.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20160621>
16. *Рашидов Т., Хожметов Г.Х.* Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1985. 154 с.
17. *Исраилов М.Ш.* Сейсродинамика протяженных подземных сооружений: границы применимости инженерных подходов и неправомерность аналогии с наземными сооружениями // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 1. С. 55–59.
<https://doi.org/10.37153/2618-9283-2017-1-55-59>
18. *Stokes G.G.* On some cases of fluid motion // *Stokes G.G.* Mathematical and Physical Papers. N.Y., L.: Johnson Reprint Corporation, 1966. V. 1. P. 17–68.
19. *Исраилов М.Ш., Смирнова Л.Н.* Вычисление скоростей распространения волн в сегментных трубопроводах с демпфирующими стыками // Сейсмическое строительство. Безопасность сооружений. 2020. № 2. С. 3–17.
<https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-3-17>
20. *Lebedev N.N.* Special functions and their applications. L.: Prentice-Hall Inc., 1965. 308 p.
21. *Кэй Д., Лэби Т.* Справочник физика-экспериментатора. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 300 с.
22. *Чедвик П., Кокс А., Гопкинс Г.* Механика глубоких подземных взрывов. М.: Мир, 1966. 126 с.
23. *Морозов Н.Ф., Братов В.А., Кузнецов С.В.* Сейсмические барьеры для защиты от поверхностных и головных волн: множественные рассеиватели и метаматериалы // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 36–47.

УДК 539.37

**ОРИЕНТАЦИЯ ТРЕЩИНОВАТОСТИ В ХРУПКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ
ПРИ ТРАДИЦИОННОМ ТРЕХОСНОМ СЖАТИИ**© 2022 г. И. А. Пантелеев^{a,*}, В. А. Ляховский^{b,**}^aИнститут механики сплошных сред УрО РАН, ПФИЦ УрО РАН, Пермь, Россия^bГеологическая служба Израиля, Иерусалим, Израиль

*e-mail: pia@icmm.ru

**e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com

Поступила в редакцию 13.10.2021 г.

После доработки 12.12.2021 г.

Принята к публикации 13.12.2021 г.

Представлено обобщение скалярной нелинейной реологической модели деформирования хрупкого твердого тела на случай тензорного параметра поврежденности, главные значения которого описывают сокращение площади поперечного сечения материала в трех ортогональных направлениях. Введенный тензорный параметр поврежденности позволяет описать ортотропию упругих свойств материала, вызванную развитием микротрещиноватости в процессе его деформирования. Для случая традиционного трехосного сжатия рассмотрены две характерные задачи: определение ориентации поврежденности (микротрещиноватости) во всем материале и определение ориентации зоны локализованной поврежденности, обеспечивающие максимальную скорость ее роста. В результате решения первой задачи определена степень разориентировки исходной трещиноватости и скорости роста новой трещиноватости в зависимости от параметра анизотропии поврежденности. Решение второй задачи позволило показать, что оптимальным углом наклона зоны локализованной поврежденности является угол Кулона–Мора с микротрещиноватостью внутри зоны, ориентированной либо строго вертикально, либо под углом, близким к углу Кулона–Мора.

Ключевые слова: тензорная поврежденность, нелинейная механика, ориентационные эффекты, направленная трещиноватость, зона локализации разрушения, индуцированная поврежденностью анизотропия

DOI: 10.31857/S0572329922040092

1. Введение. В 1773 году Шарль-Огюстен де Кулон предложил критерий разрушения материала при сжатии, ставший впоследствии основополагающим в геомеханике [1]. Согласно этому критерию разрушение материала происходит вдоль плоскости, на которой действующее касательное напряжение превышает эффективное нормальное напряжение, складывающееся из сцепления C и произведения давления на коэффициент трения χ :

$$|\tau| = \chi\sigma_n + C \quad (1.1)$$

В свою очередь, сцепление C (или когезия) является собственной прочностью материала на сдвиг, а коэффициент трения определяется углом внутреннего трения $\varphi = \text{tg}^{-1}(\chi)$. Ориентация плоскости, по которой происходит разрушение материала, определяется максимумом кулоновских напряжений $|\tau| - \chi\sigma_n$ и задается углом Куло-

на—Мора относительно направления действия максимального главного сжимающего напряжения:

$$\theta_{\text{СМ}} = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right) \quad (1.2)$$

Коэффициент сцепления и угол внутреннего трения обуславливают прочностные характеристики породы, а для их определения проводятся испытания цилиндрических образцов на одноосное сжатие с боковым подпором (схема Кармана) [2], которое в зарубежной литературе носит название традиционного трехосного сжатия. Несмотря на недостатки способа определения механических и прочностных свойств горных пород в экспериментах по схеме Кармана, этот вид испытаний в настоящее время остается наиболее распространенным и лежит в основе соответствующих ГОСТов. Наиболее полный обзор по традиционному и истинному трехосному сжатию горных пород с анализом недостатков и преимуществ каждого из подходов представлен в [3]. Также необходимо отметить, что соотношение (1.2) легло в основу модели образования разломов в обстановке чистого сдвига Кулона—Андерсона [4], которая широко используется в тектонофизике для интерпретации ориентации вторичных разрывов и разломов в поле действующих тектонических сил [5, 6].

Неупругое поведение различных материалов и горных пород, включая хрупкое разрушение при низких давлениях и катакластическое течение при высоких давлениях, как правило, описывается упругопластическими соотношениями [7–10]. Бифуркационный анализ этих соотношений успешно предсказывает возникновение полос деформации, но не описывает их эволюцию, потому что кинетические уравнения в явном виде не включены в определяющие соотношения упругопластического тела [11]. Этот подход также не учитывает постепенную деградацию упругих свойств материала, вызванную развитием микроскопических повреждений. Следующей пионерской работе Качанова [12] было разработано множество моделей поврежденности хрупких и пластичных тел, учитывающих кинетику процесса разрушения [13–17]. Постепенное накопление повреждений и их локализация в узкой зоне, приводящая к макроскопическому разрушению, согласуется с общепризнанным представлением о разрушении как эволюционном многомасштабном процессе, характеризующемся несколькими стадиями развития от зарождения и роста микротрещин, до их взаимодействия, слияния в магистральную трещину [18–20]. Однако вопрос ориентации зоны локализованной поврежденности, предсказываемой различными моделями, все еще остается дискуссионным. Прямое численное моделирование упругих взаимодействий, слияния и локализации микрповреждений показало, что ориентация образующейся магистральной трещины (разлома) в хрупком материале в условиях традиционного трехосного сжатия не соответствует углу Кулона—Мора [21]. При моделировании использовались соотношения классической континуальной механики поврежденности для изотропного линейно-упругого материала с уменьшающимся модулем Юнга как функцией скалярного параметра поврежденности, d :

$$E(d) = (1 - d)E_0 \quad (1.3)$$

Степень поврежденности материала d варьируется от нуля для неповрежденного материала, до единицы при макроразрушении. E_0 — модуль Юнга неповрежденного образца. В этих моделях коэффициент Пуассона ν считается постоянным в независимости от уровня поврежденности.

Авторы работы [21] пришли к выводу, что несоответствие между углом разлома и углом, предсказанным моделью Кулона—Мора, указывает на то, что разрушение при сжатии является результатом коллективного развития повреждений внутри образца и их дальнедействующего упругого взаимодействия. Также они предположили, что критерий Кулона—Мора не позволяет оценить параметры материала, традиционно опре-

деляемые по углу магистральной трещины [22]. Полученные в [21] зависимости угла наклона зоны локализации разрушения от коэффициента Пуассона и других параметров модели, по мнению авторов настоящей статьи, не означают неспособность теории Кулона–Мора описывать ориентацию магистральных трещин при разрушении материала, а вместе с экспериментальными данными указывают на необходимость отказа от представлений идеального линейно-упругого тела. Горные породы, как и многие другие хрупкие тела, представляют собой неоднородную среду, содержащую микротрещины, поры и различные структурные неоднородности. Макроскопические свойства такой среды зависят от вида нагружения или вида деформирования. Это приводит к индуцированной дефектами анизотропии упругих свойств среды в процессе ее деформирования, взаимосвязи сдвигового и объемного деформирования, что проявляется в виде нелинейного отклика среды на приложенную нагрузку.

Настоящая работа посвящена обобщению скалярной нелинейной реологической модели [23–25] на случай тензорной поврежденности и ее применению для определения ориентации трещиноватости, возникающей на различных стадиях традиционного трехосного сжатия хрупкого твердого тела. Обобщение модели, основные принципы которой сформулированы в [26], осуществляется в рамках анизотропной континуальной механики поврежденности, вклад ансамблей разноориентированных микротрещин в упругие и прочностные свойства материала описывается тензором поврежденности второго ранга. Построенная модель позволяет описать основные свойства неоднородных сред с микротрещиноватостью: нелинейное упругое поведение, зависимость макроскопических свойств от вида напряженно-деформированного состояния, индуцированную дефектами ортотропию механических свойств. Предложенное обобщение позволяет описывать деформирование материала с исходной трещиноватостью при нагружении по произвольным трехмерным многозвенным траекториям.

В начале статьи кратко обсуждаются основные особенности нелинейной модели со скалярным параметром поврежденности. Затем обобщены основные определяющие и кинетические соотношения для нелинейной модели с анизотропной поврежденностью, полученные в [26] для частного случая соосной ориентировки нагружения и поврежденности. В заключение представлено решение двух задач, описывающее различные этапы развития поврежденности и ее ориентацию при традиционном трехосном сжатии.

2. Нелинейная реологическая модель деформирования хрупкого тела. Многочисленные экспериментальные исследования деформационного поведения материалов со структурными неоднородностями различного типа, показали, что их свойства зависят от вида нагружения или вида деформирования. Данная зависимость определяется вариативностью отклика микроскопических неоднородностей на внешние воздействия различной конфигурации. Еще одной особенностью деформационного поведения таких сред является взаимосвязь процессов сдвигового и объемного деформирования, приводящая, в частности, к дилатансии материала в условиях сдвиговых нагрузок.

В пионерской работе [27] Ю.Н. Работновым была предложена модель упругой среды с модулями упругости, зависящими от напряжений. Этот подход получил дальнейшее развитие в серии работ Е.В. Ломакина [28–31], в которых определяющие соотношения формулируются также в пространстве напряжений. Аналогичные разномодульные модели обсуждались также в работах [32–34].

Особенностью такого подхода является формулировка определяющих соотношений в напряжениях. Для моделей с изменяющейся степенью поврежденности (количества микротрещин, пустот или другого типа дефектов), приводящей к деградации упругих модулей, применение определяющих соотношений в напряжениях к описанию деформационного разупрочнения сталкивается с трудностями ввиду невозможности явного описания эволюции предела текучести [35]. Напротив, формулировка определяющих соотношений в деформациях показала свою эффективность в описа-

нии поведения материалов, переход к неупругому поведению и условие текучести которых зависят как от свойств самого материала (поврежденности), так и от истории нагружения [35–39]. Несмотря на схожесть формулировки определяющих соотношений в деформациях и напряжениях, они не эквивалентны, когда рассматривается разупрочнение материала [40–43].

Экспериментальные исследования деформационного поведения хрупких материалов, в частности горных пород, показали, что нелинейное поведение проявляется уже при малых деформациях [44–47]. В работе [48] на основе анализа множества экспериментальных данных авторами предложен общий вид упругой энергии (в деформациях) в предположении, что это функция второго порядка инвариантов тензора деформации. Их выводы обеспечили математическую основу для формулировки энергии упругой деформации, обсуждавшейся ранее в [49–54]:

$$U = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} \right) \quad (2.1)$$

где λ , μ – параметр Ламе, γ – дополнительный упругий модуль, определяющий степень нелинейности материала, $I_1 = \varepsilon_{ij}$, $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ – первый и второй инвариант тензора деформации соответственно. В отличие от традиционных моделей нелинейной упругости, которые базируются на включении в выражение для упругой энергии слагаемых более высоких порядков по деформации [55], эта модель оперирует только слагаемыми второго порядка. Особенностью традиционных моделей является проявление нелинейного отклика только при высоком уровне приложенных усилий. Описание нелинейного отклика при малых нагрузках в данной модели обеспечивается нелинейной связью компонент тензора напряжения и компонент тензора деформации:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{\gamma}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + 2 \left(\mu - \frac{\gamma \xi}{2} \right) \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

с упругими модулями $\lambda_{\text{eff}} = \lambda - \frac{\gamma}{\xi}$, $\mu_{\text{eff}} = \mu - \frac{\gamma \xi}{2}$, зависящими от вида напряженно-деформированного состояния, определяемого параметром $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$. Параметр ξ меняется

от $-\sqrt{3}$ для всестороннего сжатия до $\sqrt{3}$ при всестороннем растяжении; $\xi = \pm 1$ соответствует одноосному сжатию/растяжению, а $\xi = 0$ – чистому сдвигу. Нелинейное слагаемое позволяет описывать разномодульность, т.е. скачкообразное изменение упругих модулей при переходе от растяжения к сжатию [32, 33]. Оно также позволяет описывать дилатансию материала при чистом сдвиге [24], являющуюся неотъемлемым свойством многих хрупких тел с микроструктурными неоднородностями.

В работах [25, 50] в модель введена зависимость упругих свойств от скалярного параметра поврежденности α , описывающего плотность микротрещин, в виде $\mu = \mu_0 + \mu_1 \alpha$, $\gamma = \gamma_1 \alpha$, где μ_1, γ_1 – материальные параметры. Кинетическое уравнение для роста поврежденности при этом имеет вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = C_d I_2 (\xi - \xi_0) \quad (2.3)$$

где $C_d > 0$ описывает скорость роста поврежденности при заданном уровне деформации, ξ_0 – материальный параметр, контролирующий переход от залечивания микротрещин к их росту. Параметр ξ_0 связан с упругими модулями и углом внутреннего трения соотношением:

$$\xi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9 + 2k^2 \left(2 + 3 \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)}} \quad (2.4)$$

где $k = \frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin \varphi}{3}}$ и определяется по результатам традиционных испытаний материала

по схеме Кармана. В следующем разделе будет представлено обобщение нелинейно упругой модели на случай тензорной поврежденности.

3. Нелинейная модель деформирования твердого тела с анизотропией, индуцированной поврежденностью. *3.1. Тензор поврежденности и определяющие соотношения.* Несмотря на широкое использование моделей со скалярным параметром поврежденности, отражающем изменение площади поперечного сечения материала при росте микротрещин или деградацию его соответствующих упругих модулей [56–58], многочисленные эксперименты указывают на тензорную природу явления разрушения. Для описания ориентационных эффектов развития поврежденности вводятся тензорные параметры второго или четвертого рангов [59–61]. Следуя классической теории анизотропной поврежденности [62, 63], в работе [26] предложена модель, в которой поврежденность материала определяется симметричным тензором второго ранга Ω_{ij} . Главные направления этого тензора задают направления ортотропии материала, а главные значения $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ определяют изменение эффективной площади поперечных сечений, перпендикулярных к каждой из осей ортотропии (рис. 1.):

$$\Omega_i = \frac{(A_i - A_i^*)}{A_i} \quad (3.1)$$

где A_i и A_i^* – площади поперечного сечения неповрежденного и поврежденного материала в плоскости с нормалью n_i .

Ранее в работе авторов [26] было показано, что использование методологии континуальной механики анизотропной поврежденности, в частности, принципа эквивалентности энергии поврежденного и фиктивного неповрежденного состояния [64], приводит к следующему выражению для упругой энергии:

$$W(\{\tilde{\epsilon}^*, \tilde{\Omega}\}) = \frac{1}{2} \{\tilde{\epsilon}^*\}^T \{C_0\} \{\tilde{\epsilon}^*\} = W(\tilde{\epsilon}, 0) = \frac{1}{2} \{\tilde{\epsilon}\}^T \{C(\tilde{\Omega})\} \{\tilde{\epsilon}\} \quad (3.2)$$

где $\{\tilde{\epsilon}\}$ – тензор деформации, $\{\tilde{\epsilon}^*\}$ – тензор эффективных деформаций, $\{C_0\}$ и $\{C(\tilde{\Omega})\}$ – матрица жесткости неповрежденного и поврежденного материала соответственно.

Анализируя соотношение (3.2), можно сформулировать основные особенности и недостатки классического подхода к построению энергии упругой деформации. Во-первых, ввиду несимметричности тензора эффективных деформаций для определения энергии поврежденного анизотропного материала требуется использование того или иного способа симметризации этого тензора. Основные способы симметризации и их последствия разобраны в [63], обобщенная форма симметризации, содержащая классические аддитивную и мультипликативную схемы как частные случаи, приведена в [65]. Во-вторых, такая формулировка не подходит для описания деформационного поведения хрупких материалов с разноориентированными микротрещинами, которым присуща зависимость упругих свойств от вида напряженно-деформированного состояния.

Для преодоления сформулированных недостатков, прежде всего, введем симметризованный тензор фиктивной деформации, представляющий собой разность между де-

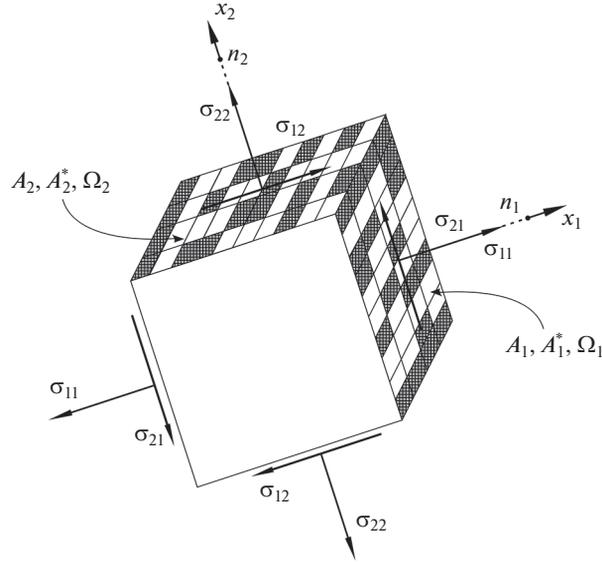


Рис. 1. Представительный объем материала с ортотропной поврежденностью.

формацией в фиктивном неповрежденном состоянии и эффективной деформацией в поврежденном состоянии, в виде:

$$\varepsilon_{ij}^{(\Omega)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ik} \Omega_{kj} + \varepsilon_{jk} \Omega_{ki}) \quad (3.3)$$

характеризующий деформацию поврежденного материала. Инварианты тензора фиктивной деформации определяются как:

$$\begin{aligned} I_1^{(\Omega)} &= \varepsilon_{ij}^{(\Omega)} \delta_{ij} \\ I_2^{(\Omega)} &= \varepsilon_{ij}^{(\Omega)} \varepsilon_{ij}^{(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В частном случае в главных осях тензора поврежденности инварианты имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1^{(\Omega)} &= \varepsilon_{11} \Omega_1 + \varepsilon_{22} \Omega_2 + \varepsilon_{33} \Omega_3 \\ I_2^{(\Omega)} &= (\varepsilon_{11} \Omega_1)^2 + (\varepsilon_{22} \Omega_2)^2 + (\varepsilon_{33} \Omega_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^2 (\Omega_1 + \Omega_2)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{13}^2 (\Omega_1 + \Omega_3)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{23}^2 (\Omega_2 + \Omega_3)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

По аналогии с энергией скалярной модели (2.1), представим энергию упругой деформации анизотропного поврежденного материала в виде трех слагаемых (см. также [26]):

$$W(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\Omega}) = \left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 \right] + [\lambda_1 (I_1^{(\Omega)})^2 + \mu_1 I_2^{(\Omega)}] - \gamma I_1^{(\Omega)} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} \quad (3.6)$$

где λ_0 , μ_0 – параметры Ламе исходного неповрежденного изотропного материала, λ_1 , μ_1 – параметры, характеризующие деградацию упругих модулей при росте поврежденности, γ – дополнительный модуль, ответственный за нелинейность при накоплении повреждений. Первое слагаемое в (3.6) представляет собой энергию деформирования исходного неповрежденного изотропного материала, второе слагаемое – энергию деформации материала с анизотропией, индуцированной поврежденностью, а третье

слагаемое отвечает за нелинейность и разномодульность деформационного отклика материала, зависимость его свойств от вида напряженно-деформированного состояния. В случае нулевой поврежденности $\tilde{\Omega} = 0$ выражение (3.6) сводится к классической гуковской энергии упругого изотропного тела. В случае изотропной поврежденности, $\Omega_{ij} = \Omega \delta_{ij}$ и линейно-упругого изотропного тела ($\gamma = 0$) выражение для энергии будет иметь вид:

$$W(\tilde{\xi}, \tilde{\Omega}) = (1 - \Omega^2) \left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 \right] \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что эффективные упругие модули, например модуль Юнга, будут определяться как $E(\Omega) = (1 - \Omega^2)E_0$, что аналогично модели Качанова (1.3). В случае нелинейной модели изотропной поврежденности соотношение (3.6) редуцируется к нелинейной реологической модели (2.1) с модулями λ , μ , γ , линейно зависимиыми от скалярного параметра поврежденности $\alpha = \Omega^2$. Различие в степенях α и Ω является спецификой анизотропной формулировки и обусловлено использованием гипотезы эквивалентности энергии.

Следуя [26], примем $\lambda_1 = 0$ и, используя соотношения Мурнагана [55], получим выражение для компонент тензора напряжений Коши для общего случая недиагональных тензоров деформации и поврежденности:

$$\sigma_{lm} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{lm}} = [\lambda_0 I_1 \delta_{lm} + 2\mu_0 \varepsilon_{lm}] - \gamma \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \left(\mu_1 - \frac{\gamma}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} \quad (3.8)$$

где производные от инвариантов (3.4) равны:

$$\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \Omega_{lm}$$

$$\frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \frac{1}{2} (\Omega_{li} \varepsilon_{ik} \Omega_{km} + \Omega_{mi} \varepsilon_{ik} \Omega_{kl}) + \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \varepsilon_{mk} \Omega_{kj} + \Omega_{mj} \varepsilon_{lk} \Omega_{kl})$$

Здесь необходимо отметить особенность, присущую всем анизотропным моделям. Из выражения (3.8) следует, что в случае несоосных тензора поврежденности и тензора деформации тензор напряжений будет не соосен им обоим. Так, например, в случае диагонального тензора поврежденности в условиях деформации сдвига (когда заданы только недиагональные компоненты), тензор напряжений будет иметь как недиагональные компоненты, связанные с характером приложенной деформации, так и диагональные компоненты, связанные с дилатансией за счет роста поврежденности. В частном случае соосности тензоров деформации и поврежденности в главных осях этих тензоров, который рассмотрен в [26], выражение (3.8) редуцируется к:

$$\sigma_n = \lambda_0 I_1 - \frac{\gamma \Omega_n I_1^{(\Omega)}}{\xi^{(\Omega)}} + (2\mu_0 + 2\mu_1 \Omega_n^2 - \gamma \Omega_n^2 \xi^{(\Omega)}) \varepsilon_n \quad (3.9)$$

где σ_n , ε_n — главные напряжения и деформации соответственно, $\xi^{(\Omega)} = \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}$ — параметр, характеризующий тип напряженно-деформированного состояния поврежденного материала по аналогии с параметром $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$ для неповрежденного материала.

При $\Omega_1 \neq \Omega_2 \neq \Omega_3$ поврежденный материал будет ортотропным с упругими модулями,

зависящими от главных поврежденностей, вида напряженно-деформированного состояния и величины приложенных главных деформаций:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_1^2 - \gamma\Omega_1^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_1\Omega_1^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^4\varepsilon_1^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{22} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_2^2 - \gamma\Omega_2^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_2\Omega_2^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^4\varepsilon_2^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{33} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_3^2 - \gamma\Omega_3^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_3\Omega_3^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_3^4\varepsilon_3^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{12} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_2\Omega_1\Omega_2^2 + \varepsilon_1\Omega_2\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{13} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_1\Omega_3^2 + \varepsilon_1\Omega_3\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{23} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_2\Omega_3^2 + \varepsilon_2\Omega_3\Omega_2^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^2\Omega_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{44} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_3 + \Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_3 + \Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4} \\
C_{55} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1 + \Omega_3)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1 + \Omega_3)^2\xi^{(\Omega)}}{4} \\
C_{66} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1 + \Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1 + \Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4}
\end{aligned}$$

В отличие от классических моделей континуальной механики поврежденности максимальное значение компонент тензора поврежденности не всегда равно единице. Допустимые максимальные значения определяются из условия выпуклости потенциала (3.6). Для скалярной модели условия выпуклости приведены в [50].

3.2. Кинетика поврежденности. Ранее в работе [26] на основе уравнения баланса энергии и энтропии было предложено выражение для локального производства энтропии, вызванного ростом поврежденности:

$$\Gamma = -\frac{\partial W}{\partial \Omega_{lm}} \frac{\partial \Omega_{lm}}{\partial t} > 0 \quad (3.10)$$

Согласно принципу Онзагера [66] линейная связь между вынуждающей силой и термодинамическим потоком приводит к кинетическому уравнению для эволюции поврежденности:

$$\frac{d\Omega_{lm}}{dt} = -L_{ijlm} \frac{\partial W}{\partial \Omega_{ij}} \quad (3.11)$$

где L_{ijlm} – матрица кинетических коэффициентов, положительно определенная функция параметров состояния системы, описывающая эволюцию компонент тензора поврежденности. Уравнение (3.11) позволяет описать не только процесс роста поврежденности в поле внешних приложенных напряжений, но и залечивание микротрещин, наблюдающееся при высоком уровне бокового давления и высокой температуре. На основе имеющихся экспериментальных результатов [67] примем гипотезу об от-

существовании взаимного влияния компонент тензора поврежденности на рост друг друга, тогда матрица L_{ijlm} может быть представлена в виде:

$$L_{ijlm} = \frac{L}{\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}} (\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) \quad (3.12)$$

где параметр L , как было показано в [26], является функцией среднего напряжения. Необходимо отметить, что отказ от гипотезы взаимного влияния требует дополнительных истинно трехосных экспериментальных подтверждений, которые в настоящее время отсутствуют. Нормирование производных компонент тензора поврежденности на $\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}$ связано с необходимостью устранения зависимости правой части соотношения (3.11) от поврежденности, приводящей к экспоненциальному росту поврежденности при постоянном уровне приложенных деформаций.

С использованием (3.6) получим общее выражение для производной компонент тензора поврежденности по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{lm}}{dt} &= \frac{L}{\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}} \gamma \left[\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(\frac{\mu_1}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} \right] \\ \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} &= \varepsilon_{lm}; \quad \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{li}\Omega_{ik}\varepsilon_{km} + \varepsilon_{mi}\Omega_{ik}\varepsilon_{kl}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{lj}\Omega_{mk}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{mj}\Omega_{lk}\varepsilon_{kj}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из выражения (3.13) следует, что начало роста поврежденности определяется взаимным соотношением между скоростью изменения второго инварианта тензора эффективных деформаций, его квадратным корнем, параметром вида напряженно-деформированного состояния $\frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}$ и модулем μ_1 . В случае исходного изотропного состояния

$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = \sqrt{\alpha}$ выражение для первого инварианта скорости роста поврежденности редуцируется к кинетическому уравнению (2.3) с $L = C_d$, откуда следует определение дополнительного материального параметра $\mu_1 = \gamma \xi_0$.

В случае соосности тензора деформации и тензора поврежденности в системе координат главных осей тензоров кинетическое уравнение (3.13) будет иметь вид:

$$\frac{d\Omega_k}{dt} = \frac{L}{\sqrt{\Omega_l\Omega_l}} \gamma \left[\varepsilon_k \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \varepsilon_k^2 \Omega_k \right] \quad (3.14)$$

Необходимо отметить, что в случае вращения тензора деформации относительно тензора эффективных деформаций (поврежденности), например для криволинейной траектории нагружения, скорость изменения компонент тензора поврежденностей будет определяться коротационной производной Зарембы–Яуманна [68]:

$$\overset{\nabla}{\Omega} = \dot{\Omega} - \Omega^T S - S^T \Omega, \quad (3.15)$$

где S – тензор спина, описывающий вращение базисных векторов.

Важными аспектами, определяющими возможность использования кинетических уравнений (3.13) и (3.14) в прикладных задачах, являются информация об исходной (начальной) поврежденности материала и оценка кинетических коэффициентов, определяющих скорость изменения компонент тензора поврежденности. Калибровка кинетических уравнений и входящих в них коэффициентов осуществляется на основе данных лабораторных экспериментов по трехосному деформированию образцов горных пород с непрерывной регистрацией акустической эмиссии. В работе [26] было показано, что для калибровки кинетического уравнения (3.14) для главных компонент

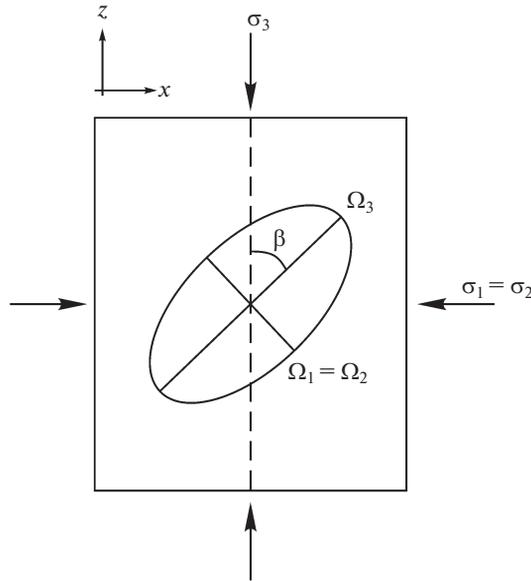


Рис. 2. Ориентация эллипсоида поврежденности относительно оси активного сжатия.

тензора поврежденности достаточными являются данные об изменении упругих модулей и скорости акустической эмиссии в процессе деформирования образца горной породы. На лабораторном масштабе в вопросе определения начальной поврежденности материала наиболее информативным является метод компьютерной микротомографии, позволяющий получить количественные оценки трещиноватой структуры образца. На геологическом масштабе в задачах оценки состояния горного массива можно говорить о некоторой текущей конфигурации напряженно-деформированного состояния среды, для которой с использованием полевых измерений могут быть получены данные о природных напряжениях. Оценка компонент тензора поврежденности в этом случае может быть получена сейсмическими методами из данных о пространственных вариациях скоростей продольных и поперечных волн различной поляризации (сейсмотомографии), зависящих как от вида напряженно-деформированного состояния, так и от текущей поврежденности среды.

4. Ориентация микротрещиноватости при традиционном трехосном сжатии. Рассмотрим задачу развития поврежденности при одноосном сжатии с боковым подпором материала, имеющем в исходном состоянии определенно ориентированную микротрещиноватость. Исходная трещиноватость задается главными значениями тензора поврежденности $\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega$, $q \in [0, 1]$. Параметр q определяет степень анизотропии поврежденности материала. Такой вид тензора поврежденности соответствует материалу с ансамблем одинаково ориентированных микротрещин. Ориентация трещиноватости определяется эллипсоидом поврежденности. Вращение эллипсоида поврежденности допускается только вокруг оси OY , а его ориентация задается углом $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ между осью активного сжатия и главной осью, соответствующей максимальной главной поврежденности Ω_3 (рис. 2).

Будем работать в системе координат главных осей тензора напряжений $\{x, y, z\}$. Компоненты тензора напряжений и производные компонент тензора поврежденности по времени задаются соотношениями (3.8) и (3.13) соответственно. В табл. 1 пред-

Таблица 1. Материальные параметры и параметры нагружения

Упругие модули, ГПа			Угол внутреннего трения, град.	Критический параметр	Кинетический коэффициент	Параметры нагружения, МПа	
λ_0	μ_0	γ	φ	ξ_0	L, c^{-1}	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_3
1.0	1.0	1.16	40	-0.794	1	-50	-229.5

ставлены материальные параметры и параметры нагружения, использованные для расчета деформаций, и скоростей изменения компонент тензора поврежденности. Критический параметр ξ_0 , отвечающий за рост поврежденности, для заданного угла внутреннего трения и упругих свойств в соответствии с (2.4) равен $\xi_0 = -0.794$. Будем решать задачу для бокового подпора $\sigma_1 = \sigma_2 = 50$ МПа, а осевую нагрузку определим из критерия Кулона–Мора $\sigma_3 = \sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$. Примем также, что степень исходной анизотропии поврежденности составляет либо 10% ($q = 0.1$), либо 50% ($q = 0.5$). Квадрат средней поврежденности или ее скалярный эквивалент равен 0.1 (т.е. $\frac{1}{3}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) = \sqrt{\alpha} = \sqrt{0.1}$).

Из (3.8) найдем компоненты тензора деформации, соответствующие приложенным напряжениям и построим скорости изменения компонент тензора поврежденности, а также среднюю скорость изменения поврежденности от угла β . Полученные зависимости представлены на рис. 3. Видно, что компонента $\frac{d\Omega_{xx}}{dt}$ всегда положительная, что отражает рост вертикально ориентированной трещиноватости вдоль направления осевой нагрузки (рис. 2) или, другими словами, рост трещиноватости перпендикулярно направлению минимального главного напряжения. Компонента $\frac{d\Omega_{zz}}{dt}$ при любом угле β отрицательная, что также закономерно, так как в направлении активного сжатия будет наблюдаться только закрытие или “залечивание” существующих трещин в не зависимости от ориентации исходной трещиноватости.

Средняя скорость роста поврежденности $tr\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$, начиная с угла 55° , становится положительной. Также необходимо отметить, что степень анизотропии влияет на амплитуду указанных компонент тензора скорости роста поврежденности (сплошные и пунктирные линии на рис. 3), но не меняет форму их зависимости от угла β . Существенное влияние параметра q наблюдается лишь для недиагональной компоненты $\frac{d\Omega_{xz}}{dt}$. При стремлении $q \rightarrow 1$ (изотропной исходной трещиноватости) величина $\frac{d\Omega_{xz}}{dt} \rightarrow 0$ для любого β .

Особенностью деформирования материала с исходной анизотропной трещиноватостью является генерация новых микротрещин с ориентацией, не совпадающей с имеющейся трещиноватостью. Математически это выражается в несоосности тензора скорости изменения поврежденности и тензора поврежденности. Построим зависимости максимального $\dot{\Omega}_{pv+}$ и минимального $\dot{\Omega}_{pv-}$ собственных значений тензора скорости изменения поврежденности от угла ориентации исходной поврежденности (рис. 4,а). При вариации угла ориентации исходной трещиноватости минимальное собственное значение тензора скорости роста поврежденности $\dot{\Omega}_{pv-}$ меняется более

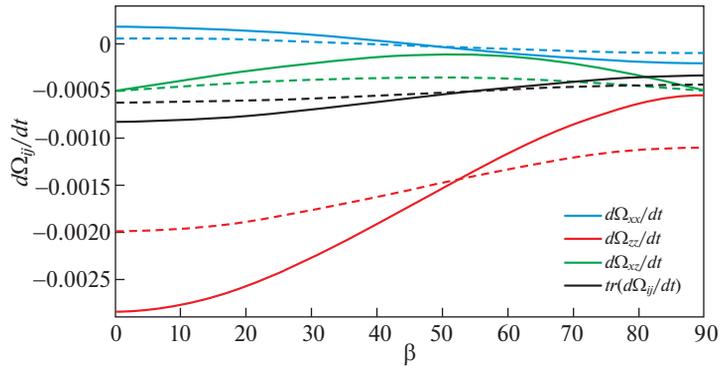


Рис. 3. Зависимости компонент тензора скорости поврежденности от угла ориентации поврежденности β для $q = 0.1$ (сплошные линии), $q = 0.5$ (пунктирные линии).

значительно, чем положительное $\dot{\Omega}_{pv+}$. Вектора, соответствующие этим главным собственным значениям, указывают направления максимального раскрытия и закрытия берегов существующих микротрещин, а также, в случае $\dot{\Omega}_{pv+}$, ориентацию новых микротрещин, рост которых инициирован приложенными напряжениями. На рис. 4, b построены зависимости углов между направлением активного сжатия и направлениями $\dot{\Omega}_{pv+}$ (угол ψ_{pv+}), $\dot{\Omega}_{pv-}$ (угол ψ_{pv-}).

Из рис. 4, b видно, что направление минимального главного значения тензора скорости роста поврежденности ψ_{pv-} (синяя линия) не превышает 18° при вариациях угла ориентации исходной поврежденности. При этом максимальное отклонение от направления активного сжатия соответствует $\beta = 73.7^\circ$, а при $\beta = 0^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ направление минимального главного значения тензора скорости в точности совпадает с направлением активного сжатия. Аналогичная ситуация наблюдается для направления максимального главного значения. При $\beta = 73.7^\circ$ наблюдается максимальное отклонение от направления минимального главного сжимающего напряжения σ_1 в 18° , при $\beta = 0^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ направление максимального роста поврежденности в точности ему соответствует.

Полученные решения показывают, что в случае материала с исходной анизотропией упругих свойств, вызванной поврежденностью, одноосное сжатие с боковым подпором приводит к росту вторичной трещиноватости, ориентированной квазивертикально. Степень отклонения определяется степенью исходной анизотропии. Стоит отметить, что ранее в экспериментах по истинному трехосному сжатию песчаника Darley Dale [67] было показано, что в процессе деформирования происходит формирование микротрещин, ориентированных перпендикулярно направлению оси минимального главного напряжения. Оценки отклонения от этого направления дают величину до $\sim 18^\circ$.

5. Ориентация зоны локализованной поврежденности при традиционном трехосном сжатии. Множественные экспериментальные наблюдения показывают, что процесс накопления повреждений при достижении некоторой критической плотности микротрещин приводит к формированию зоны локализованной поврежденности, ориентированной под острым углом к направлению активного сжатия. Согласно критерию Кулона–Мора этот угол определяется углом внутреннего трения (1.2). Как было сказано ранее, прямое численное моделирование традиционного трехосного сжатия с ис-

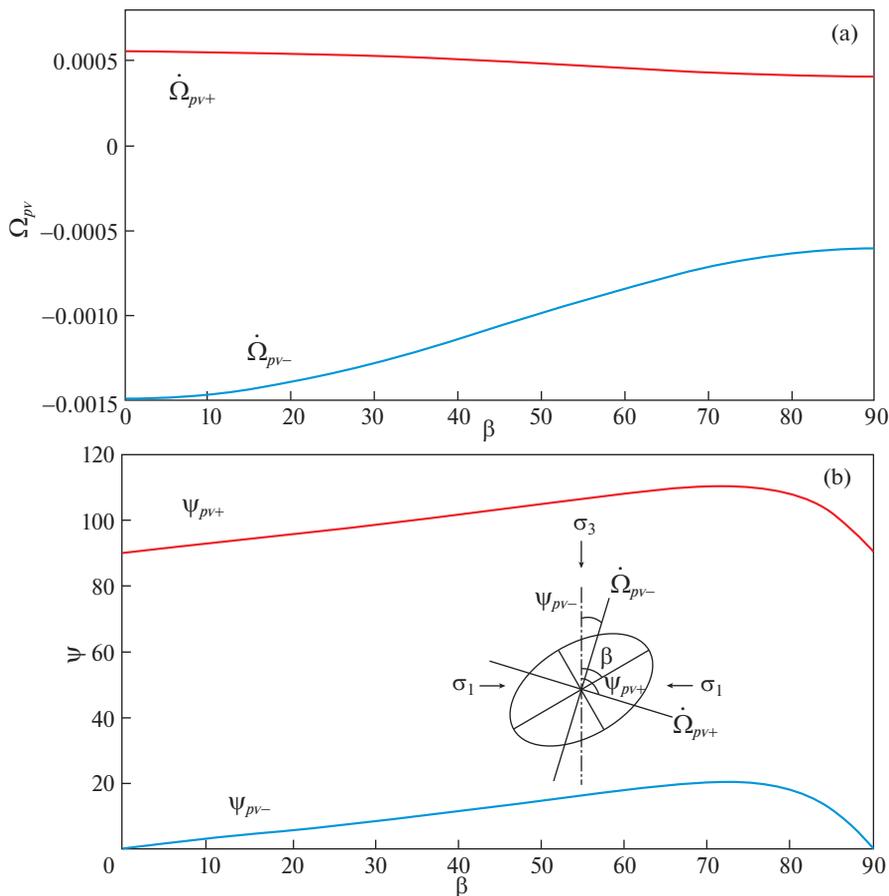


Рис. 4. Зависимости максимального $\dot{\Omega}_{pv+}$, минимального $\dot{\Omega}_{pv-}$ главных значений тензора скорости изменения поврежденности (а) и углов Ψ_{pv+} , Ψ_{pv-} (б) от угла ориентации β для $q = 0.1$.

пользованием модели линейной упругости не позволило подтвердить это утверждение [21].

Рассмотрим задачу о традиционном трехосном сжатии материала в поле напряжений $\sigma_{zz} = \sigma_3 > \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_1 = \sigma_2$ с зоной локализованной поврежденности, ориентированной по отношению к оси активного сжатия Oz под углом θ (рис. 5).

В случае упругого изотропного неповрежденного тела определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = \varepsilon_3 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_3 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (2\sigma_3 + \sigma_1) \right] \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_1 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (2\sigma_3 + \sigma_1) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зона представляет собой сплошной материал с заниженными из-за поврежденности упругими свойствами. Условие непрерывности перемещений и усилий на границах

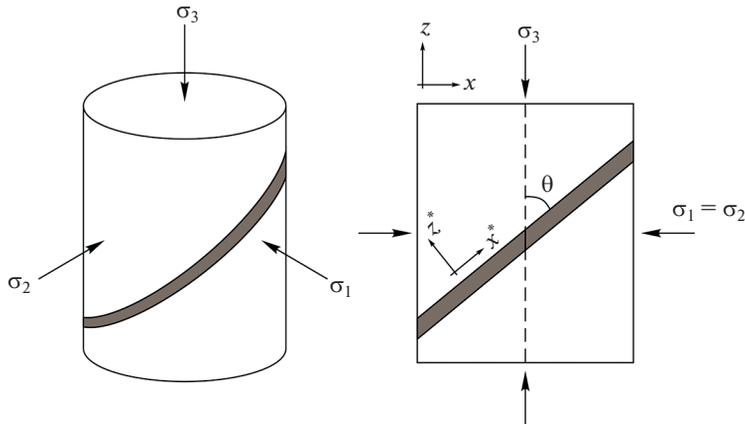


Рис. 5. Геометрия образца с зоной локализованной поврежденности при одноосном сжатии с боковым подпором.

зоны (проскальзывание отсутствует) приводит к следующей системе равенств для напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^* &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta \\
 \sigma_{xz}^* &= (\sigma_3 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_{yy}^* &= \sigma_2 \\
 \sigma_{xx}^* &= \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Аналогичные равенства имеют место для компонент тензора деформации. С использованием первых двух равенств в (5.2) для заданного уровня поврежденности в локализованной зоне найдем ϵ_{zz}^* и ϵ_{xz}^* , а потом построим зависимость скорости роста поврежденности (средней поврежденности) от угла, чтобы определить оптимальный угол наклона зоны с точки зрения эффективности диссипации энергии в соответствии с кинетическими уравнениями (3.12).

5.1. Нелинейная модель со скалярным параметром поврежденности. Для расчета скорости роста поврежденности в зависимости от угла наклона (θ) зоны локализованной поврежденности (рис. 5) в реологической нелинейной модели со скалярным параметром поврежденности используем выражения (2.2) для компонент $\sigma_{zz}^*(\alpha)$, $\sigma_{xz}^*(\alpha)$ и (2.3) для скорости изменения поврежденности. Величину приложенных напряжений и материальные константы примем такими же, как в задаче об ориентации микротрещиноватости (см. табл. 1).

На рис. 6 представлена зависимость скорости роста поврежденности от угла наклона зоны для $\alpha = 0.1$. Модель со скалярным параметром поврежденности предсказывает, что максимальная величина скорости роста поврежденности достигается при угле наклона $\theta = 25^\circ$, что в точности соответствует критерию Кулона–Мора $\theta_{CM} = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$. Для других значений поврежденности α оптимальный угол наклона зоны несколько отличается от угла Кулона–Мора. Аналогичный результат получен для материала с другими значениями угла внутреннего трения.

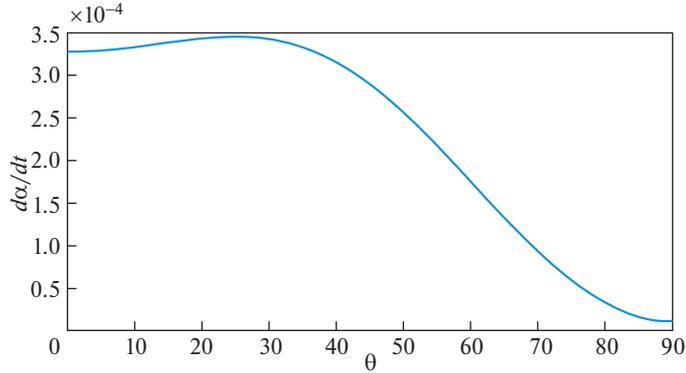


Рис. 6. Зависимость скорости роста поврежденности от угла наклона зоны локализованной поврежденности.

Полученный результат не является тривиальным, так как ранее в [21] было показано, что линейно-упругие модели не позволяют получить ориентацию зоны локализованной поврежденности, соответствующую критерию Кулона–Мора, хотя и результат закономерен, так как пороговый параметр определяется именно углом внутреннего трения.

5.2. *Модель с тензорным параметром поврежденности.* Как и в задаче об ориентации трещиноватости в материале при традиционном трехосном сжатии примем следующее соотношение между главными поврежденностями $\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega$, $q \in [0, 1]$. Параметр q определяет степень анизотропии поврежденности. Ориентация эллипсоида поврежденности определена углом $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ между осью активного нагружения и главным направлением, соответствующим Ω_3 (рис. 7). Величину приложенных напряжений и материалы константы примем такими же, как в задаче об ориентации микротрещиноватости (см. табл. 1).

Выражение для компонент σ_{zz}^* , σ_{xz}^* в случае тензорного параметра поврежденности в системе координат зоны локализации имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= \lambda_0 I_1 + 2\mu_0 \varepsilon_{zz}^* - \gamma \Omega_{zz}^* \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \gamma \left[\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{2\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] D_1 \\ \sigma_{xz}^* &= 2\mu_0 \varepsilon_{xz}^* - \gamma \Omega_{xz}^* \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \gamma \left[\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{2\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] D_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$D_1 = \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xz}^{*2} + \varepsilon_{zz}^* (\Omega_{xz}^{*2} + 2\Omega_{zz}^{*2}) + \varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + 3\Omega_{zz}^*)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} (4\varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^{*2} + \varepsilon_{zz}^* (\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*)^2 + \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xz}^* (3\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*) + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + 3\Omega_{zz}^*))$$

где инварианты (3.4а) имеют вид $I_1^{(\Omega)} = \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* \Omega_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^* + 2\varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^*$, $I_2^{(\Omega)} = (\varepsilon_{xx}^* \Omega_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^*)^2 + (\varepsilon_{yy}^* \Omega_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^* + \varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^*)^2 + \frac{1}{2} (\Omega_{xz}^* (\varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^*) + \varepsilon_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*))^2$.

Компоненты тензора поврежденности в системе координат зоны локализации определяются поворотом исходного диагонального тензора Ω_{ij} на угол $\theta - \beta$ ($\beta - \theta$, при $\beta > \theta$) соответственно.

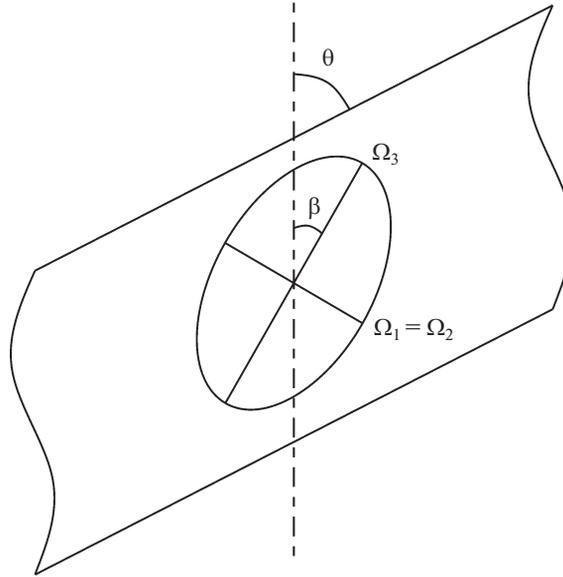


Рис. 7. Ориентация и форма эллипсоида поврежденности.

Будем анализировать изменение средней скорости роста поврежденности $\frac{1}{3} \left(\frac{d\Omega_{xx}^*}{dt} + \frac{d\Omega_{yy}^*}{dt} + \frac{d\Omega_{zz}^*}{dt} \right) = tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right)$ в зоне, отражающей изменение объема материала, так как экспериментально было показано, что при невысоких уровнях бокового давления зона локализации характеризуется повышенным разуплотнением [18, 22].

Согласно (3.12), средняя скорость роста поврежденности определяется как:

$$tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right) = \frac{L}{\sqrt{I_2(\tilde{\Omega}^*)}} \left[I_1 \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) A \right] \quad (5.4)$$

$$A = \Omega_{xx}^* (\varepsilon_{xx}^{*2} + \varepsilon_{xz}^{*2}) + \Omega_{yy}^* \varepsilon_{yy}^{*2} + \Omega_{zz}^* (\varepsilon_{zz}^{*2} + \varepsilon_{xz}^{*2}) + 2\Omega_{xz}^* \varepsilon_{xz}^* (\varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^*)$$

Построим зависимость средней скорости изменения поврежденности от углов наклона зоны локализации и ориентации тензора поврежденности соответственно для случая $q = 0.1$ и $\frac{1}{3}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) = \sqrt{\alpha} = \sqrt{0.1}$. Полученное решение (рис. 8) определяет оптимальные с точки зрения скорости диссипации энергии и нежелательные ориентации микротрещин внутри зоны локализации. Из рисунка видно, что в случае $\beta = \theta$ и $\beta = \theta - 90^\circ$ средняя скорость роста поврежденности либо отрицательная, либо близка к нулю. Эти случаи соответствуют трещиноватости, ориентированной либо поперек зоны, либо параллельно ей.

Построенная зависимость $tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right)$ (рис. 8) имеет два локальных максимума, совпадающих по амплитуде и соответствующих одному наклону зоны локализованной поврежденности $\theta_1 = \theta_2 = 31^\circ$. Первый максимум наблюдается при $\beta_1 = \pm 90^\circ$, второй максимум при $\beta_2 = -29^\circ$. Вариация степени анизотропии показывает, что положение максимумов зависит от нее по-разному. Так, оптимальный наклон зоны локализован-

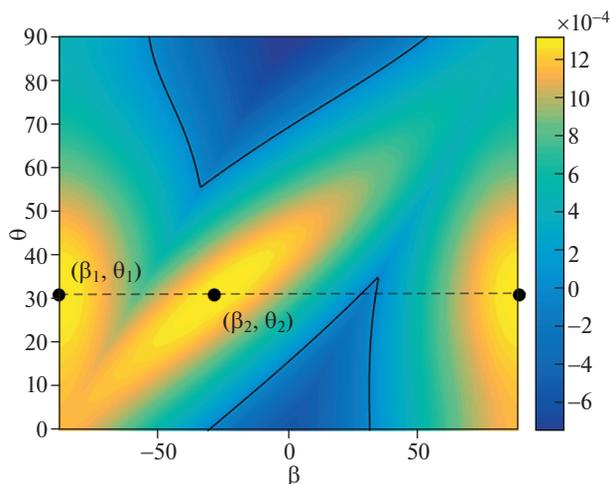


Рис. 8. Зависимость средней скорости роста поврежденности от угла наклона зоны локализации θ и ориентации тензора поврежденности β (точки – локальные максимумы, черная линия – изолиния $\text{tr}\left(\frac{d\dot{\Omega}^*}{dt}\right) = 0$).

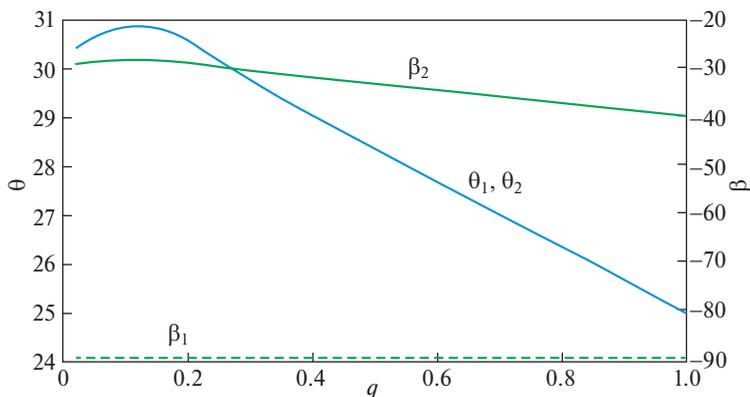


Рис. 9. Зависимости оптимального угла ориентации зоны локализации θ и поврежденности внутри нее β от степени анизотропии поврежденности q .

ной поврежденности, соответствующий и первому и второму максимуму, при $q \rightarrow 1$ (изотропная поврежденность) стремится к углу Кулона–Мора, т.е. $\theta_1, \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ (рис. 9).

При этом угол ориентации поврежденности внутри зоны в случае первого максимума не меняется с изменением параметра q и составляет $\beta_1 = \pm 90^\circ$. Оптимальный угол ориентации поврежденности внутри зоны, соответствующий второму максимуму, уменьшается с ростом параметра q и при $q = 1$ (изотропная поврежденность) равен $\beta_2 = -40^\circ$ (рис. 9).

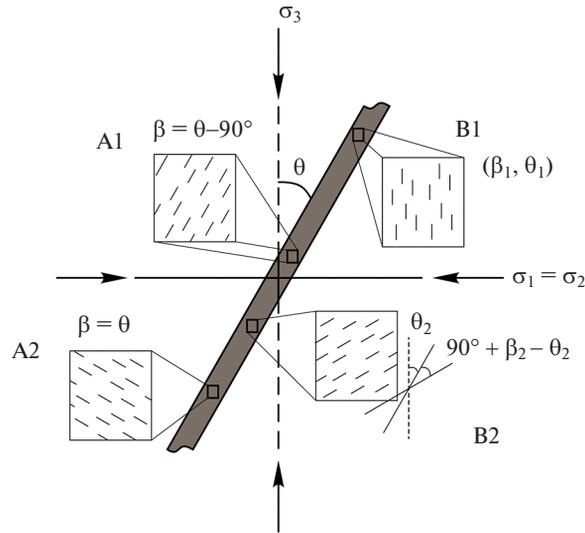


Рис. 10. Оптимальные (B1, B2) и нежелательные (A1, A2) ориентации микротрещиноватости с точки зрения скорости роста средней поврежденности при традиционном трехосном сжатии.

Найденные локальные максимумы и минимумы (рис. 8) определяют ориентацию трещиноватости, приводящей к ее максимальному росту или залечиванию (закрытию трещин). Рис. 10 схематически показывает ориентацию четырех групп микротрещин. Первому максимуму соответствуют микротрещины, ориентированные вертикально вне зависимости от степени анизотропии поврежденности (B1). Второму максимуму соответствуют микротрещины, ориентированные наклонно под углом $(90^\circ + \beta_2 - \theta_2)$ к направлению зоны локализованной поврежденности (B2). Важно отметить, что в случае изотропной поврежденности $q = 1$ эти микротрещины будут располагаться под углом Кулона–Мора к направлению зоны локализации поврежденности, тогда как сама зона также будет располагаться под углом Кулона–Мора к оси активного сжатия. Микротрещины, ориентированные параллельно (A1) или перпендикулярно (A2) к направлению зоны локализации поврежденности, не растут. Эти трещины закрываются и залечиваются.

Важно отметить, что полученные оптимальные и нежелательные ориентации микротрещиноватости, показанные на рисунке 10, с точки зрения скорости роста средней поврежденности в зоне локализации определены относительно ориентации самой зоны. Наклон зоны локализации в соответствии с (1.2) определяется углом внутреннего трения, и при его изменении взаимные ориентации зоны локализации и микротрещиноватости внутри нее не изменяются.

6. Заключение. В работе представлено обобщение скалярной нелинейной реологической модели на случай тензорного параметра поврежденности. Тензор поврежденности второго ранга вводится в рамках устоявшихся представлений континуальной механики поврежденности, главные значения которого описывают сокращение площади поперечного сечения материала в трех ортогональных направлениях. Преимущество такого представления заключается в возможности определения компонент тензора для любого набора разноориентированных ансамблей микротрещин, полученного по томографическим или петрофизическим данным. Соответствующие алгоритмы можно найти, например, в [51]. Введенный тензор позволяет описать индуци-

рованную поврежденностью анизотропию упругих свойств. В общем случае в процессе деформирования исходный изотропный материал становится ортотропным, а его упругие свойства зависят как от вида текущего напряженно-деформированного состояния, так и от уровня поврежденности в трех ортогональных направлениях.

Разработанная модель в отличие от многих современных моделей деформирования и разрушения горных пород не требует соосности тензоров поврежденности, деформации и напряжения. Эта особенность открывает новые возможности для описания деформационного поведения трещиноватых сред при сложных криволинейных трехмерных траекториях нагружения и позволяет описать ориентационные эффекты при развитии поврежденности в поле приложенных напряжений. Ранее для случая соосных тензоров поврежденности и деформации модель была успешно идентифицирована и апробирована на экспериментальных данных по традиционному и истинному трехосному сжатию песчаника Darley Dale [26].

Для случая одноосного сжатия материала с боковым подпором рассмотрены две характерные задачи: определение ориентации поврежденности (микротрещиноватости) во всем материале и определение ориентации зоны локализованной поврежденности, обеспечивающие максимальную скорость ее роста. Решение первой задачи с использованием разработанной модели позволило определить степень разориентировки исходной трещиноватости и скорости роста новой трещиноватости в зависимости от параметра анизотропии поврежденности. Показано, что максимальная разориентировка составляет до $\sim 18^\circ$, а в случае исходного ансамбля вертикальных или горизонтальных микротрещин ориентация новых микротрещин в точности совпадает с направлением минимального главного напряжения. Полученные величины разориентировки совпадают с оценками, полученными в результате истинных трехосных испытаний песчаника Darley Dale [67].

В результате решения второй задачи показано, что использование нелинейной реологической модели со скалярным параметром поврежденности позволило получить точное соответствие найденного оптимального угла наклона локализованной зоны поврежденности с углом Кулона–Мора. Использование тензорного параметра поврежденности позволило конкретизировать внутреннее строение зоны с позиции скорости диссипации энергии. Показано, что оптимальным углом наклона зоны локализованной поврежденности является угол, близкий к углу Кулона–Мора. Степень близости определяется уровнем анизотропии исходной поврежденности. При этом внутри зоны оптимальными являются две ориентации микротрещин: вертикальная ориентация трещиноватости, которая не зависит от степени анизотропии исходной поврежденности, ориентация относительно направления зоны локализованной поврежденности под углом, близким к углу Кулона–Мора. Степень близости также определяется степенью анизотропии поврежденности в материале. Необходимо отметить, что первое найденное решение соответствует механизму образования магистральных трещин в горных породах при традиционном трехосном сжатии, предложенному в [69] по результатам обобщения большего количества экспериментальных наблюдений. Второе найденное решение описывает возможность появления вторичных микротрещин, аналогичных R-сколам в модели Риделя [70]. Так в модели формирования сдвиговых зон Риделя предполагается, что зона основного сдвига располагается под углом $\frac{\pi}{4}$ к направлению действия максимального сжимающего напряжения, а R-сколы под углом $\frac{\Phi}{2}$ к этой зоне. В случае традиционного трехосного сжатия и изотропной поврежденности, построенная модель предсказывает формирование основной зоны локализованной поврежденности под углом $\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ к направлению действия максимального

сжимающего напряжения и формирование вторичной трещиноватости под этим же углом.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта (№ 19-77-3008). В.А. Ляховский благодарит за частичную финансовую поддержку Мегагрант Минобрнауки РФ 14.W03.31.0033 “Геофизические исследования, мониторинг и прогноз развития катастрофических геодинамических процессов на Дальнем Востоке РФ”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des r`egles de maximis et minimis `a quelques probl`emes de statique relatifs a l'`architecture // *M`em. Math. Phys.* 1773. V. 7. 343 p.
2. ГОСТ 21153.8-88 Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. М.: Изд-во стандартов, 1988. 15 с.
3. *Карев В.И., Химуля В.В., Шевцов Н.И.* Экспериментальные исследования процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 3–26.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050056>
4. *Anderson E.M.* The dynamics of faulting // *Trans. Edinburgh Geol. Soc.* 1905. V. 8. P. 387–402.
<https://doi.org/10.1144/SP367.1>
5. *Schulson E.M.* Compressive shear faults within arctic sea ice: Fractures on scales large and small // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. P. C07016.
<https://doi.org/10.1029/2003JC002108>
6. *Reches Z.* Determination of the tectonic stress tensor from slip along faults that obey the coulomb yield condition // *Tectonics.* 1987. V. 6. № 6. P. 849–861.
<https://doi.org/10.1029/TC006i006p00849>
7. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. V. 23. P. 371–394.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
8. *Rice J.R., Rudnicki J.W.* A note on some features of the theory of localization of deformation // *Int. J. Solids Struct.* 1980. V. 16. № 7. P. 597–605.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(80\)90019-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(80)90019-0)
9. *Issen K.A., Rudnicki J.W.* Conditions for compaction bands in porous rock // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 2000. V. 105. № B9. P. 21529–21536.
<https://doi.org/10.1029/2000JB900185>
10. *Rudnicki J.W.* Models for compaction band propagation // *Rock Physics and Geomechanics in the Study of Reservoirs and Repositories* / Eds. *C. David, M. Le Ravelec-Dupin.* London: Geological Society of London, 2007. Ch. 8. P. 107–125.
<https://doi.org/10.1144/SP284.1>
11. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1998. 368 p.
12. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук.* 1958. С. 26–31.
13. *Krajcinovic D.* Damage Mechanics. Elsevier, 1996. 774 p.
14. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // *Вопросы прочности материалов и конструкций.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
15. *Работнов Ю.Н.* Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
16. *Lemaitre J.A.* Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer Verlag. 1996. 228 p.
17. *Кукуджанов В.Н.* Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. 215 с.
18. *Lockner D.A., Byerlee J.D., Kuksenko V., Ponomarev A., Sidorin A.* Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite // *Nature.* 1991. V. 350. P. 39–42.
19. *Rock Physics and Natural Hazards* / Ed. by *J. Fortin, S. Stanchits, G. Dresen, Y. Gueguen.* Basel: Birkhäuser, 2009. 823 p.

20. *Renard F., Cordonnier B., Kobchenko M., Kandula N., Weiss J., Zhu W.* Microscale characterization of rupture nucleation unravels precursors to faulting in rocks // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2017. V. 476. P. 69–78.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2017.08.002>
21. *Dansereau V., Démercy V., Berthier E., Weiss J., and Ponson L.* Collective Damage Growth Controls Fault Orientation in Quasibrittle Compressive Failure // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 122. P. 085501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.085501>
22. *Jaeger J.C., Cook N.G.W.* *Fundamentals of Rock Mechanics.* Cambridge: Chapman and Hall, 1979. 593 p.
23. *Lyakhovskiy V., Reches Z., Weinberger R., Scott T.* Non-linear elastic behavior of damaged rocks // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. P. 157–166.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
24. *Hamiel Y., Lyakhovskiy V., Agnon A.* Rock dilation, nonlinear deformation, and pore pressure change under shear // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2005. V. 237. P. 577–589.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2005.06.028>
25. *Agnon A., Lyakhovskiy V.* Damage distribution and localization during dyke intrusion // *The physics and chemistry of dykes* / Eds. *G. Baer, A. Heimann.* Rotterdam: Balkema, 1995. P. 65–78.
26. *Panteleev I., Lyakhovskiy V., Browning J., Meredith P.G., Healy D., Mitchell T.* Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification // *Eur. J. Mech.: A. Solids.* 2021. V. 85. P. 104085.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>
27. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
28. *Ломакин Е.В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 4. С. 92–99.
29. *Ломакин Е.В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. I. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // *Мех. комп. матер.* 1988. № 1. С. 3–9.
30. *Ломакин Е.В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физ. мезомех.* 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
31. *Lomakin E.V., Shchendrigna O.P.* Stresses and strains in a disk of physically nonlinear material with stress state dependent properties // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 4. P. 475–481.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040081>
32. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
33. *Chaboche J.* Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition // *Int. J. Damage Mech.* 1992. V. 1. P. 148–171.
<https://doi.org/10.1177/105678959200100201>
34. *Lemaitre J., Desmorat R.* *Engineering damage mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, 2005. 380 p.
<https://doi.org/10.1007/b138882>
35. *Han D.J., Chen W.F.* Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling // *Int. J. Solids Struct.* 1986. V. 22. P. 935–950.
36. *Naghdi P.M., Trapp J.A.* The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space // *Int. J. Eng. Sci.* 1975. V. 13. P. 785–797.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(75\)90080-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(75)90080-4)
37. *Yoder P.J., Iwan W.D.* On the formulation of strain space plasticity with multiple loading surfaces // *J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. P. 773–778.
38. *Lehane B.M., Simpson B.* Modelling glacial till under triaxial conditions using a BRICK soil model // *Can. Geotech. J.* 2000. V. 37. P. 1078–1088.
39. *Puzrin A.M., Houlsby G.T.* Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2001. V. 38. P. 3771–3794.
40. *Casey J., Naghdi P.M.* On the nonequivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theory // *J. Appl. Mech.* 1983. V. 50. P. 350–354.
<https://doi.org/10.1115/1.3167043>
41. *Einav I.* Thermo-mechanical relations between stress-space and strain-space models // *Geotechnique.* 2004. V. 54. № 5. P. 315–318.

42. *Einav I.* Energy and variational principles for piles in dissipative soil // *Geotechnique*. 2005. V. 55. P. 515–525.
<https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.7.515>
43. *Einav I.* A second look at strain space plasticity and latest applications // 18th Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Perth, 2005. V. 1. CRC Press/Balkema, 2005. P. 225–231.
44. *Lockner D.A., Stanchits S.A.* Undrained poroelastic response of sandstones to deviatoric stress change // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. № B12. P. 2353.
<https://doi.org/10.1029/2001JB001460>
45. *Basaran C., Nie S.* An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids // *Int. J. Damage*. 2004. V. 13. № 3. P. 205–223.
<https://doi.org/10.1177/1056789504041058>
46. *Tencate J.A., Pasqualini D., Habib S., Heitmann K., Higdon D., Johnson P.A.* Nonlinear and non-equilibrium dynamics in geomaterials // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. № 6. P. 065501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.065501>
47. *Pasqualini D., Heitmann K., Tencate J.A., Habib A., Higdon D., Johnson P.A.* Nonequilibrium and nonlinear dynamics in Berea and Fontainebleau sandstones: Low-strain regime // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. P. B01204.
<https://doi.org/10.1029/2006JB004264>
48. *Hamiel Y., Lyakhovsky V., Ben-Zion Y.* The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear deformation of crystalline rocks // *Pure Appl. Geophys.* 2011. V. 168. P. 2199–2210.
<https://doi.org/10.1007/S00024-011-0265-7>
49. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1984. № 10. С. 71–75.
50. *Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A.* Distributed damage, faulting, and friction // *J. Geophys. Res.* 1997b. V. 102. № B12. P. 27635–27649.
51. *Lyakhovsky V., Myasnikov V.P.* Acoustics of theologically non-linear solids // *PEPIAM*. 1988. V. 50. P. 60–64.
52. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1985. № 4. С. 28–35.
53. *Lyakhovsky V., Reches Z., Weinberger R., Scott T.* Non-linear elastic behavior of damaged rocks // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. P. 157–166.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
54. *Ben-Zion Y., Lyakhovsky V.* Analysis of aftershocks in a lithospheric model with seismogenic zone governed by damage rheology // *Geophys. Int. J.* 2006. V. 165. P. 197–210.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.02878.x>
55. *Murnaghan F.D.* *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: John Wiley, Chapman, 1951. 140 p.
56. *Kachanov L.M.* *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. 135 p.
57. *Kachanov L.M.* Effective elastic properties of cracked solids; critical review of some basic concepts // *Appl. Mech. Rev.* 1992. V. 45. P. 304–335.
<https://doi.org/10.1115/1.3119761>
58. *Степанова Л.В., Игонин С.А.* Параметр поврежденности Ю.Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин и перспективы // *ПМТФ*. 2015. Т. 56. № 2. С. 133–145.
59. *Leckie F.A., Onat E.T.* Tensorial nature of damage measuring internal variables // *Physical Non-linearities in Structural Analysis* / Eds. *J. Hult, J. Lemaitre*. Berlin: Springer, 1981. P. 140–155.
60. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. P. 829–834.
61. *Lemaitre J., Desmorat R., Sauzay M.* Anisotropic damage law of evolution // *Eur. J. Mech. Solid.* 2000. V. 19. P. 187–208.
[https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)00161-3](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00161-3)
62. *Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., Yousef M.A.* Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics // *Handbook of Damage Mechanics*. Berlin: Springer, 2015. P. 3–42.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1

63. *Zhang W., Cai Y.* Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. Berlin: Springer, 2010. 1000 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-04708-4>
64. *Lee U., Lesieutre G.A., Fang L.* Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks // *Int. J. Solid Struct.* 1997. V. 34. P. 4.377–4.397.
65. *Семенов А.С.* Симметризация тензора эффективных напряжений для сред с анизотропной поврежденностью // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 82–98.
66. *DeGroot S.R., Mazur P.* Nonequilibrium thermodynamics. Amsterdam: North Holland, 1962. 510 p.
67. *Browning J., Meredith P.G., Stuart C.E., Healy D., Harland S., Mitchell T.M.* Acoustic characterization of crack damage evolution in sandstone deformed under conventional and true triaxial loading // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 2017. V. 122. P. 4395–4441.
<https://doi.org/10.1002/2016JB013646>
68. *Skrzypek J.J., Ganczarski A.* Modeling of Material Damage and Failure of Structures. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 326 p.
69. *Reches Z., Lockner D.* Nucleation and growth of faults in brittle rocks // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 1994. V. 99. № B9. P. 18159–18173.
70. *Hills E.S.* Elements of Structural Geology. London: Methuen, 1972. 502 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-5843-2>

УДК 534.015.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. Г. Петров^{а,*}^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 18.08.2021 г.

После доработки 25.10.2021 г.

Принята к публикации 15.11.2021 г.

Линейная диссипативная механическая система с конечным числом степеней свободы определяется тремя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы, а также диссипативной функцией Рэля. Известно, что всегда можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая и потенциальная энергии приводятся к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами. Третья же квадратичная форма при этом к сумме квадратов, вообще говоря, не приведет. В данном исследовании обсуждаются условия, при которых все три квадратичные формы одним преобразованием приводятся к сумме квадратов. Для таких систем можно ввести нормальные координаты, в которых система расщепляется на независимые системы второго порядка и их анализ существенно упрощается. Приводятся примеры анализа вынужденных колебаний линейных диссипативных систем для двух и трех степеней свободы.

Ключевые слова: квадратичные формы, канонический вид, малые колебания, силы трения

DOI: 10.31857/S0572329922050129

1. Введение. Общая теория малых линейных колебаний систем с конечным числом степеней свободы для консервативных систем дана в 1762–1765 гг. Лагранжем. В этом случае механическая система определяется двумя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы. Вейерштрасс показал в 1858 г., что в силу положительной определенности кинетической энергии можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая энергия приведет к сумме квадратов, а потенциальную энергию к сумме квадратов с некоторыми множителями. В нормальных координатах уравнения расщепляются на независимые осцилляторы, решения которых выражаются через тригонометрические и показательные функции. Прежние исследователи (следуя Лагранжу) ошибочно предполагали, что в случае кратных корней характеристического уравнения нормальные координаты не будут существовать и что в окончательных интегралах уравнений движения время будет входить не только через тригонометрические и показательные функции. Соответствующие библиографические ссылки приведены в монографии [1].

Анализу колебаний механических систем посвящен ряд работ [2–4], в которых демонстрируется существенное упрощение при переходе к нормальным координатам. Одновременное приведение к диагональной форме двух вещественных симметричных матриц A и B всегда выполнимо [5], если одна из них соответствует знакоопределенной квадратичной форме. Поэтому квадратичные формы кинетической и потенци-

альной энергии консервативной системы всегда приводятся к диагональному виду и система дифференциальных уравнений расщепляется на независимые подсистемы второго порядка.

Для двух и более матриц [6, 7] не всегда возможно их одновременное приведение к диагональным. Известно несколько разновидностей условий, при выполнении которых это удастся осуществить [8]. Наиболее общее условие приведения трех матриц A , B и C к диагональному виду получено в [9]. Для систем с n степенями свободы оно состоит из равенства нулю n^2 элементов матрицы

$$AB^{-1}C - CB^{-1}A = 0, \quad \text{Det}[B] \neq 0 \quad (1.1)$$

В данной работе показано, что n^2 уравнений условия (1.1) сводятся к $n(n-1)/2$ независимых уравнений. Если квадратичные формы зависят от двух переменных, то 4 условия сводятся к одному равенству нулю определителя третьего порядка коэффициентов трех квадратичных форм. Вывод условия тоже упрощается и проводится, не опираясь на результат Новикова [9]. Для систем с тремя степенями свободы из условия Новикова получены три уравнения для билинейных по элементам матриц A и B форм.

Даны примеры применения полученного условия для анализа малых колебаний механической системы с двумя и тремя степенями свободы с учетом сил трения.

Другой подход исследования систем с двумя степенями свободы в случае двукратной собственной частоты методом возмущений предложен в [11].

2. Независимые условия приведения трех квадратичных форм к каноническому виду.

Матрица $M = (AB^{-1}C - CB^{-1}A) \det B$ антисимметрична: $M_{ij} = -M_{ji}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ и имеет только $n(n-1)/2$ независимых коэффициента. Отсюда из критерия Новикова (1.1) вытекают $n(n-1)/2$ независимых условий:

$$M_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = i + 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Элементы матрицы M_{ij} являются однородными полиномами переменных a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , линейными по a_{ij} .

3. Условие приведения трех квадратичных форм к каноническому виду. Теорема. Пусть даны три квадратичные формы двух переменных

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2), & f_2 &= \frac{1}{2}(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) \\ f_3 &= \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2) \\ & & & b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Тогда для существования невырожденного преобразования

$$Y = QX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

приводящего их к виду

$$f_1 = \frac{1}{2}(a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2), \quad f_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2), \quad f_3 = \frac{1}{2}(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2)$$

Необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов исходных квадратичных форм, обратился в ноль

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Доказательство. Квадратичные формы от двух переменных образуют векторное пространство размерности 3 из векторов $\mathbf{a}(a_{11}, a_{12}, a_{22})$, $\mathbf{b}(b_{11}, b_{12}, b_{22})$, $\mathbf{c}(c_{11}, c_{12}, c_{22})$. Если квадратичные формы f, f_1, f_2, f_3 одновременно приводятся к каноническому виду, то линейная оболочка этих форм является подпространством размерности 2 или меньше, а следовательно три формы линейно зависимы и определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ равен нулю $\Delta = 0$. Это и есть условие теоремы 1.

Наоборот, если $\Delta = 0$, то f_1, f_2, f_3 линейно зависимы, и при этом f_1, f_2 линейно независимы, то f_3 линейно выражается через f_1, f_2 , и тогда достаточно привести к каноническому виду две формы f_1, f_2 . Если же f_2 пропорциональна f_1 , то задача сводится к приведению двух форм f_1, f_3 , что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Теорема непосредственно вытекает из критерия Новикова (1.1) и тождества для матриц размерности 2×2

$$M = (AB^{-1}C - CB^{-1}A)\det(B) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

4. Малые колебания системы с двумя степенями свободы. Кинетическая T и потенциальная энергии Π , диссипативная функция Рэлея D и работа внешних сил N имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2^2), \quad D = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2), \quad N = (U_1\dot{x}_1 + U_2\dot{x}_2) \sin \omega t$$

Запишем уравнения Лагранжа движения механической системы под действием сил, меняющихся по гармоническому закону

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1, 2$$

Предполагается, что внешние силы меняются по гармоническому закону с амплитудами U_1, U_2 . Если определитель (3.2) коэффициентов квадратичных форм равен нулю $\Delta = 0$, то по доказанной теореме преобразованием (3.1) квадратичные формы приводятся к каноническому виду

$$T = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \quad D = \frac{1}{2}(A_1\dot{y}_1^2 + A_2\dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(B_1y_1^2 + B_2y_2^2)$$

Система уравнений расщепляется на два независимых уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + A_i \frac{dy_i}{dt} + B_i y_i = E_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

$$E_1 = U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, \quad E_2 = U_1 q_{12} + U_2 q_{22}$$

Анализ такой системы значительно упрощается. Решение для установившихся колебаний

$$y_i = P_i \sin \omega t - Q_i \cos \omega t$$

$$P_i = \frac{E_i(B_i - \omega^2)}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}, \quad Q_i = \frac{E_i A_i \omega}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2} \quad (4.2)$$

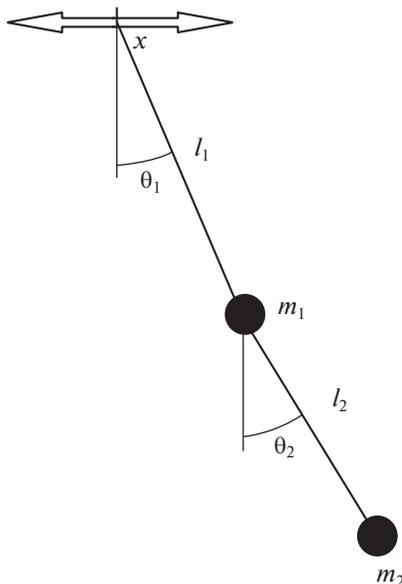


Рис. 1. Двойной маятник.

Имеет амплитуды

$$a_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} = \frac{E_i}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Для описания переходного процесса из состояния покоя до установления необходимо решить уравнение (4.1) с начальными условиями $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Решение имеет вид

$$y_i(t) = P_i \sin \omega t - Q_i \cos \omega t + J_i(t) \quad (4.4)$$

$$J_i(t) = e^{-A_i t/2} \left(\left(\frac{Q_i - 2P_i \omega}{2\omega_i} \right) \sin(\omega_i t) + Q_i \cos(\omega_i t) \right), \quad \omega_i = \sqrt{B_i^2 - A_i^2/4}$$

Полезность полученных формул ниже демонстрируется на исследовании малых вынужденных колебаний двойного плоского маятника с учетом сил трения.

5. Двойной плоский маятник. Рассмотрим малые колебания около положения равновесия двойного плоского маятника, у которого точка подвеса движется по горизонтали по гармоническому закону $x = a \sin \omega t$ (рис. 1).

Запишем выражения T , D , Π и N как функции обобщенных координат θ_1 , θ_2 и скоростей $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ [10]

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \quad D = \frac{1}{2}r_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gl_2 \theta_2^2, \quad N = a\omega^2((m_1 + m_2)l_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2) \sin \omega t$$

где предполагается линейный по относительной угловой скорости закон трения в шарнирах с коэффициентами трения r_1 , r_2 .

Выпишем коэффициенты квадратичных форм функций T , R , Π

$$\begin{aligned} a_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2, & a_{22} &= m_2l_2^2, & a_{12} &= m_2l_1l_2 \\ b_{11} &= r_1 + r_2, & b_{22} &= r_2, & b_{12} &= -r_2 \\ c_{11} &= (m_1 + m_2)gl_1, & c_{22} &= m_2gl_2, & c_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Из равенства нулю определителя (3.2) находим условие $r_2/r_1 = m_2/m_1$ приведения T , R , Π к сумме квадратов, то есть коэффициенты трения должны быть пропорциональны массам. При найденном условии пропорциональности $r_1 = rm_1$, $r_2 = rm_2$ замена переменных

$$\theta_1 = x_1/\sqrt{gl_1(m_1 + m_2)}, \quad \theta_2 = x_2/\sqrt{gl_2m_2} \quad (5.1)$$

приведет квадратичные формы к виду

$$\begin{aligned} a'_{11} &= l_1/g, & a'_{22} &= l_2/g, & a'_{12} &= \sqrt{l_1l_2}\mu, & \mu &= m_2/(m_1 + m_2) \\ b'_{11} &= r/(l_1l_2)a'_{22}, & b'_{22} &= r/(l_1l_2)a'_{11}, & b'_{12} &= -r/(l_1l_2)a'_{12} \\ c'_{11} &= 1, & c'_{22} &= 1, & c'_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Построим ортогональное преобразование, приводящее первую матрицу к диагональному виду. Для этого надо найти собственное число λ_1 и единичный собственный вектор e_1, e_2 из решения системы

$$\begin{pmatrix} a'_{11} - \lambda_1 & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

Второе собственное число λ_2 находится из аналогичного уравнения. Второй собственный вектор ортогонален первому. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 - (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}), & \lambda_2 &= \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 + (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}) \\ e_{11} &= -\sqrt{\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{1 + M})}, & e_{12} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1/\sqrt{1 + M})}, & M &= \frac{4l_1l_2\mu}{(l_1 - l_2)^2} \end{aligned}$$

Преобразование

$$x_1 = e_{11}y_1 + e_{12}y_2, \quad x_2 = -e_{12}y_1 + e_{11}y_2 \quad (5.2)$$

приводит первую и вторую матрицы к диагональному виду. Собственные значения матрицы D с точностью до множителя $r/(l_1l_2)$ совпадают с собственными значениями матрицы T , но меняются местами.

В преобразованных переменных функции T , R , Π и N примут вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\lambda_1\dot{y}_1^2 + \lambda_2\dot{y}_2^2), & D &= \frac{r}{2l_1l_2}(\lambda_2\dot{y}_1^2 + \lambda_1\dot{y}_2^2), & \Pi &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \\ N &= \frac{a\omega^2}{\sqrt{g}}(\sqrt{m_2l_2}(-e_{12}\dot{y}_1 + e_{11}\dot{y}_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)l_1}(e_{11}\dot{y}_1 + e_{12}\dot{y}_2)) \sin \omega t \end{aligned}$$

а система уравнений приведет к виду (4.1), в которой

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{r}{l_1l_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, & A_2 &= \frac{r}{l_1l_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, & B_1 &= \frac{1}{\lambda_1}, & B_2 &= \frac{1}{\lambda_2} \\ E_1 &= \frac{a\omega^2}{\lambda_1\sqrt{g}}(-e_{12}\sqrt{l_2m_2} + e_{11}\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}), & E_2 &= \frac{a\omega^2}{\lambda_2\sqrt{g}}(e_{11}\sqrt{l_2m_2} + e_{12}\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Формулы (4.2)–(4.4), (5.1)–(5.3) определяют общее аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двойного математического маятника при единственном условии пропорциональности диссипативных коэффициентов массам маятника: $r_2/r_1 = m_2/m_1$

В частном случае $l_1 = l_2 = l$ формулы упрощаются

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{l}{g}(1 - \sqrt{\mu}), & \lambda_2 &= \frac{l}{g}(1 + \sqrt{\mu}) \\ A_1 &= \frac{r}{l^2} \frac{1 + \sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}}, & A_2 &= \frac{r}{l^2} \frac{1 - \sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}, & B_1 &= \frac{g}{l(1 - \sqrt{\mu})}, & B_2 &= \frac{g}{l(1 + \sqrt{\mu})} \\ E_1 &= E_2 = E_0 \omega^2, & E_0 &= a \sqrt{\frac{g}{2l}} (m_1 + m_2), & -e_{11} &= e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2), & x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

По формуле (4.3) находим амплитуды переменных y_1, y_2

$$a_{y_i} = \frac{E_0 \omega^2}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (5.5)$$

и их максимальные значения

$$\max(a_{y_i}) = \frac{2B_i E_0}{A_i \sqrt{4B_i - A_i^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

которые достигаются при частотах $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ соответственно

$$\omega_1 = \frac{B_1}{\sqrt{B_1 - A_1^2/2}}, \quad \omega_2 = \frac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2/2}}. \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.6) значения A_i, B_i (5.4), получим

$$\begin{aligned} \max(a_{y_1}) &= \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\mu}}}{1 + \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2}{4(1 - \sqrt{\mu})}\right)^{-1/2} \\ \max(a_{y_2}) &= \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\mu}}}{1 - \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2}{4(1 + \sqrt{\mu})}\right)^{-1/2} \\ \varepsilon &= \frac{r}{\sqrt{gl^3}} \end{aligned}$$

Для отношения максимальных амплитуд имеем

$$\frac{\max(a_{y_2})}{\max(a_{y_1})} = \frac{(1 + \sqrt{\mu})^{3/2} \left(1 - \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2 \varepsilon^2}{4(1 - \sqrt{\mu})}\right)^{1/2}}{(1 - \sqrt{\mu})^{3/2} \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2 \varepsilon^2}{4(1 + \sqrt{\mu})}\right)^{1/2}}$$

При $\varepsilon^2 < \frac{2(1 - \mu)}{3\mu + 1} < 2$ максимальная амплитуда второй моды превосходит амплитуду

первой моды. При этом выполнено условие $1 - \varepsilon^2 \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2}{4(1 - \sqrt{\mu})} > 0$ вещественности решения.

Интерес представляет диапазон параметров $\mu \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Тогда $\max(a_{y_2})$ превосходит $\max(a_{y_1})$ более чем в 9 раз и амплитудные характеристики для углов θ_1 и θ_2 выражаются только через амплитудную характеристику второй нормальной моды a_{y_2} , а первая мода вносит пренебрежимо малые поправки. С помощью (5.1), (5.4) и (5.5) находим амплитудно-частотные характеристики $a_{\theta_1}(\omega)$ и $a_{\theta_2}(\omega)$ для углов θ_1 и θ_2

$$\begin{aligned} a_{\theta_1}(\omega) &= \frac{a_{y_2}}{\sqrt{2gl(m_1 + m_2)}} = \frac{E_0\omega^2}{\sqrt{2gl(m_1 + m_2)((B_2 - \omega^2)^2 + A_2^2\omega^2)}} = \\ &= \frac{a}{2l} \frac{(\sqrt{\mu} + 1)\Omega^2}{\sqrt{(1 - (1 + \sqrt{\mu})\Omega^2)^2 + (1 - \sqrt{\mu})^2\Omega^2\varepsilon^2}}, \quad \omega^2 = \Omega^2 \frac{g}{l}, \quad a_{\theta_2}(\omega) = \frac{a_{\theta_1}(\omega)}{\mu} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Максимальные значения амплитуд углов и нормальной переменной y_2 достигаются при одной и той же частоте $\omega = \omega_2$, которая находится с помощью (5.7) и (5.4)

$$\omega_2 = \frac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2/2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{(1 + \sqrt{\mu} - \varepsilon^2(1 - \sqrt{\mu})^2/2)}$$

и подставляя их в (5.8), получим наибольшие значения углов двойного маятника

$$\begin{aligned} \max(\theta_1) &= a_{\theta_1}(\omega_2) = \frac{a}{2l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\mu}}}{1 - \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2}{4(1 + \sqrt{\mu})} \right)^{-1/2} \\ \max(\theta_2) &= \frac{\max(\theta_1)}{\sqrt{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Наибольшая амплитуда θ_2 превосходит θ_1 в $1/\sqrt{\mu}$ раз. На параметры задачи следует наложить условие $\max(\theta_2) \ll 1$, чтобы линейная теория колебаний была применима.

6. Условия приведения трех квадратичных форм к каноническому виду при $n = 3$.

Три квадратичные формы приводятся к каноническому виду при выполнении уравнений (2.1). Из них при $n = 3$ получаем систему трех уравнений

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{23} = 0$$

Система линейна по коэффициентам a_{ij} и приводится к следующему матричному виду

$$P \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.1)$$

где матрицы P и Q имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2| & |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1| & 0 \\ |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_3| & 0 & |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1| \\ 0 & |\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_3| & |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_2| \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2| & |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1| \\ |\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_3| & Q_{22} & |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1| \\ |\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_3| & |\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2| & Q_{33} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$Q_{11} = (b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11})c_{23} + (b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23})c_{13} + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)c_{22} + (b_{23}^2 - b_{22}b_{33})c_{11}$$

$$Q_{22} = (b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11})c_{23} + (b_{12}b_{33} - b_{23}b_{13})c_{12} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)c_{33} + (b_{23}^2 - b_{22}b_{33})c_{11}$$

$$Q_{33} = (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23})c_{12} + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})c_{13} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)c_{33} + (b_{13}^2 - b_{11}b_{33})c_{22}$$

Здесь прямыми скобками обозначены определители третьего порядка для матриц, составленных из векторов $\mathbf{b}_i(b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})$, $\mathbf{c}_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$.

Например

$$|\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} & c_{21} \\ b_{22} & b_{32} & c_{22} \\ b_{23} & b_{33} & c_{23} \end{vmatrix}$$

Разрешая систему (6.1) относительно a_{11} , a_{22} , a_{33} , найдем

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} = -P^{-1}Q \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Пример 1. Для трех квадратичных форм

$$F_1 = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3)$$

найти коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} , так чтобы существовала линейная замена переменных, приводящая все три квадратичные формы к каноническому виду. Найти замену переменных и канонический вид квадратичных форм в новых переменных.

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм F_1 , F_2 , F_3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 1 \\ -1 & a_{22} & -2 \\ 1 & -2 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

С помощью формул (6.1) и (6.2) вычисляем матрицы P и Q

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad -P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

По формуле (6.4) находятся требуемые коэффициенты

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Используя известный алгоритм [5], находим преобразование

$$x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 - y_3), \quad x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3)$$

приводящее квадратичные формы F_2 , F_3 к каноническому виду. Тогда третья квадратичная форма F_1 в этих переменных примет канонический вид тоже.

Все три формы в новых переменных имеют следующий канонический вид

$$F_1 = \frac{1}{2}(2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \quad F_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \quad F_3 = \frac{1}{2}(2y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2)$$

Пример 2. В монографии [1] (стр. 252) рассмотрена задача определения нормальных колебаний твердого тела, имеющего закрепленную точку и колеблющегося под действием произвольной системы консервативных сил около положения равновесия. Кинетическая и потенциальная энергии в [1] приводятся к виду

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3)$$

Поставим вопрос: найти коэффициенты диссипативной функции

$$D = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3)$$

так, чтобы все три формы привелись к каноническому виду.

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм D , T и Π

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

С помощью формул (6.1) и (6.2) вычисляем матрицы P и Q

$$P = \begin{pmatrix} c_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{13} & 0 & -c_{13} \\ 0 & c_{23} & -c_{23} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} c_{22} - c_{11} & c_{23} & -c_{13} \\ c_{23} & c_{33} - c_{11} & -c_{12} \\ c_{13} & -c_{12} & c_{33} - c_{22} \end{pmatrix}$$

По формуле (6.1) находятся три линейных соотношения между диссипативными коэффициентами a_{ij}

$$\begin{aligned} c_{12}(a_{11} - a_{22}) + (c_{22} - c_{11})a_{12} + c_{23}a_{13} - c_{13}a_{23} &= 0 \\ c_{13}(a_{11} - a_{33}) + c_{23}a_{12} + (c_{33} - c_{11})a_{13} - c_{12}a_{23} &= 0 \\ c_{23}(a_{22} - a_{33}) + c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13} + (c_{33} - c_{22})a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Если коэффициенты a_{ij} удовлетворяют этой системе, то можно найти нормальные координаты, в которых динамические уравнения вынужденных колебаний расщепляются на три независимые уравнения второго порядка вида (4.1) с решением (4.2)–(4.4).

Заключение. Для вынужденных колебаний механических систем с двумя и тремя степенями свободы с учетом сил трения получены простые условия расщепления системы уравнений 4-го и 6-го порядков на две или три идентичные системы 2-го порядка типа (4.1). Они значительно проще исходной и позволяют получать простые аналитические решения системы в явном аналитическом виде.

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge at the university press. Second edition, 1917. = *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. М.: URSS, 2004. 595 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 305 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 552 с.
6. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N. Y.: McGraw-Hill, 1970. = *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.

7. *Johnson C.R., Horn R.A.* Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. = *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 665 с.
8. *Kumar Mitra.* Simultaneous diagonalization of rectangular matrices // *Lin. Algebra Appl.* 1982. V. 47. P. 139–150.
9. *Новиков М.А.* Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц // *Изв. вузов. Математика.* 2014. № 12. С. 70–82.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. Том I. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
11. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г.* Анализ действия возмущений линейных резонансных систем с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 2. С. 42–50.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921020185>

УДК 53.043

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ МЕМБРАН ИЗ ОКСИДА И НИТРИДА КРЕМНИЯ

© 2022 г. Н. А. Дюжев^а, Е. Э. Гусев^{а,*}, М. А. Махиборода^а

^аНациональный исследовательский университет “МИЭТ”, Зеленоград, Москва, Россия

*e-mail: bubbledouble@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2022 г.

После доработки 12.01.2022 г.

Принята к публикации 13.01.2022 г.

Изготовлены тонкопленочные мембраны из чередующихся слоев оксида и нитрида кремния по групповой технологии. Исследовано влияние количества составляющих мембрану слоев при сохранении ее толщины на величину механической прочности. Давление разрыва мембранной структуры диаметром 560 мкм изменяется в диапазоне от 0.9 до 1.65 атм для 30 образцов в зависимости от количества составляющих мембрану слоев. Механическая прочность структуры $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$ изменяется от 10.5 до 19.2 ГПа. Показано, что область разрыва структуры локализована на границе мембрана/подложка.

Ключевые слова: механическая прочность, мембраны, тонкие пленки, оксид кремния, нитрид кремния

DOI: 10.31857/S0572329922050063

Введение. Актуальность работы подтверждается постоянно расширяющейся областью применения преобразователей физических величин (сенсоров) за счет миниатюризации конструкции и улучшения выходных характеристик. В качестве ключевой детали значительной части сенсоров используются мембраны, выполненные по кремниевой МЭМС микро- и нанотехнологии. Исследованию влияния уменьшения толщины единичного слоя (при сохранении общей толщины) на механические свойства тонкопленочной мембраны из оксида и нитрида кремния посвящена данная работа.

Пленки SiO_2 и Si_3N_4 обладают сжимающими и растягивающими механическими напряжениями, что приводит к компенсации напряжений и повышению запаса механической прочности. Технологический процесс формирования мембран включает в себя осаждение тонких пленок на подложку с последующим удалением локальных областей кремниевой подложки.

Одной из проблем в процессе разработки сенсоров является достоверность сведений о механической прочности материалов [1], особенно с учетом размерного эффекта между объемными и пленочными материалами [2]. Поэтому необходимо совершенствовать метрологическую базу измерений. В [3] механическая прочность боросиликатного стекла измерена методом ударного сжатия. В [4] механическая прочность слоя нитрида галлия, сформированного методом гидридно-хлоридной парофазной эпитаксии, определена посредством индентора. В данном исследовании авторы применяли бесконтактный метод выдувания тонкой пленки посредством избыточного давления, к достоинствам которого можно отнести отсутствие внесенных дефектов.

Механическая прочность материала зависит от величины остаточных внутренних механических напряжений. Одной из причин возникновения внутренних механических напряжений являются дефекты и скрытые трещины в объеме материала. Поэтому, необходимо анализировать причину их возникновения и находить технологические и конструкционные факторы, направленные на минимизацию количества и размеров дефектов и трещин. Например, известна работа, описывающая закономерность образования дефектов в процессе термообработки кремния [5]. Также интересны работы по анализу трещин в соединении материалов [6, 7].

Из конструкционных решений можно выделить переход от прямоугольной к круглой форме мембраны [8]. Это связано с тем, что разрушение мембраны в большинстве случаев происходит по границе мембрана-подложка. Форма круга обеспечивает значительно меньшие значения упругих деформаций по сравнению с прямоугольной формой мембраны. Значения деформаций равномерно распределены по контуру мембраны и в материале мембраны [8]. Известен метод увеличения механической прочности, заключающийся в изменении стехиометрического соотношения между атомами в материале, например, увеличение концентрации углерода в SiC [9]. К другим факторам повышения механической прочности относят: уменьшение поверхностных дефектов [10]; изменение размера зерен структуры [11]; легирование материала пленки атомами меди, цинка, магния, марганца, кремния [2].

1. Технологический маршрут. Тонкие пленки были осаждены на кремниевую пластину диаметром 150 мм с кристаллографической ориентацией (100) и толщиной 670 мкм. В результате сформировалась круглая мембрана на Si кристалле квадратной формы со стороной 6 мм. Исследуемая мембранная структура состоит из набора чередующихся слоев нитрида и оксида кремния толщиной 0.32 ± 0.02 мкм. Причем толщина единичного слоя SiO₂ или Si₃N₄ варьируется: 80, 160 и 320 нм. Толщина всей тонкопленочной мембраны для каждой из трех пластин с массивом мембран составляет 640 нм.

Технологический маршрут изготовления структуры показан ниже. В качестве примера на рис. 1, а изображена четырехслойная структура SiO₂/Si₃N₄. Особенностью технологического маршрута формирования мембран является формирование маски для глубокого травления кремния (на глубину подложки). Слой фоторезиста толщиной единицы микрон стравливается раньше, чем происходит травление на глубину Si подложки толщиной 670 мкм. В результате значительно возрастает площадь травления и возникает эффект черного кремния. Поэтому стандартный слой фоторезиста заменяется на слой алюминия. Алюминий обладает большей селективностью к кремнию по сравнению с фоторезистом (при травлении кремния).

Таким образом, сначала формируют набор чередующихся слоев SiO₂/Si₃N₄ методом химического осаждения из газовой фазы (PECVD). После этого, магнетронным методом формируют слой алюминия на обратной стороне подложки (рис. 1, б). Затем проводят фотолитографию по алюминию (рис. 1, с). После этого проводят жидкостное химическое травление алюминия и удаление резиста в ДМФА (рис. 1, d). Затем осаждают слой алюминия на лицевой стороне для предотвращения попадания мембран в реакционную камеру. Далее выполняют глубокое травление кремния (Bosch-процесс) на глубину подложки до SiO₂ (рис. 1, e). После этого, проводят жидкостное химическое травление алюминия (рис. 1, f).

На рис. 2–4 приведены изображения во вторичных электронах поперечного сечения соответственно образцов тонких пленок Si₃N₄/SiO₂ на кремниевой подложке. Топология набора мембран представляет собой круг, расположенный по центру кристалла квадратной формы со стороной 6 мм. В мембране отсутствуют концентраторы механических напряжений за счет использования шаблона травления круглой формы.

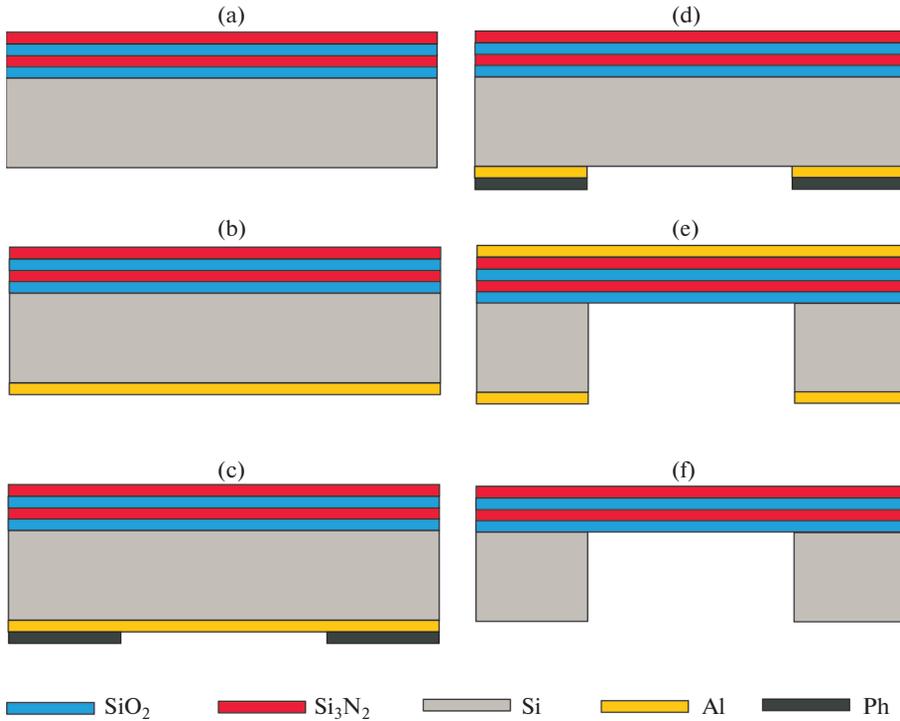
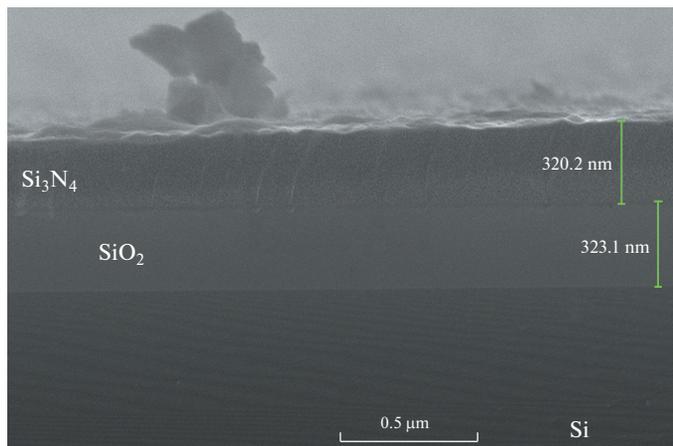


Рис. 1. Технологический маршрут.

Рис. 2. Двухслойная структура SiO₂/Si₃N₄.

Результат анализа распределения элементов по глубине посредством ВИМС показан на рис. 5. Анализ образцов проводился в системе TOF.SIMS 5 при следующих условиях: травление кратера в мембранах проводилось ионами цезия Cs⁺ с энергией

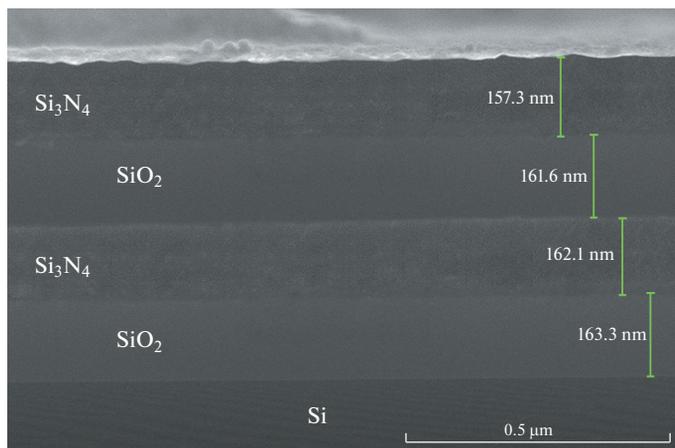


Рис. 3. Четырехслойная структура SiO₂/Si₃N₄.

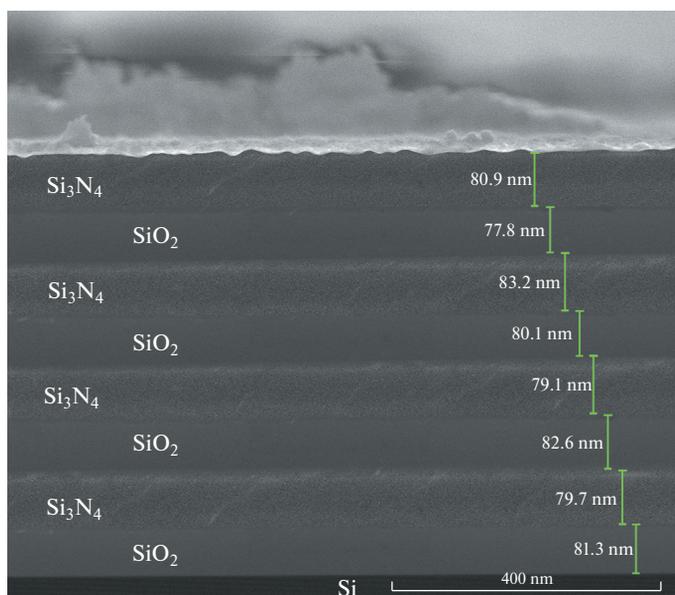


Рис. 4. Восьмислойная структура SiO₂/Si₃N₄.

1 кэВ на растре 300×300 мкм; – анализирующий пучок ионов висмута (Bi^+) с током 1.5 пА имел энергию 30 кэВ и растр 100×100 мкм; для измерения глубины кратера ионного травления использовался контактный профилометр Alpha-Step D-120 компании KLA-Tencor Instruments (США).

Также для определения элементного состава набора слоев Si₃N₄/SiO₂, получаемых в чередующихся процессах химического осаждения из газовой фазы, и уточнения значений их толщины, образцы исследовались методом ЭОС на оже-спектрометре РНІ-670хi компании Physical Electronics (США). Профильный оже-анализ исследуемых об-

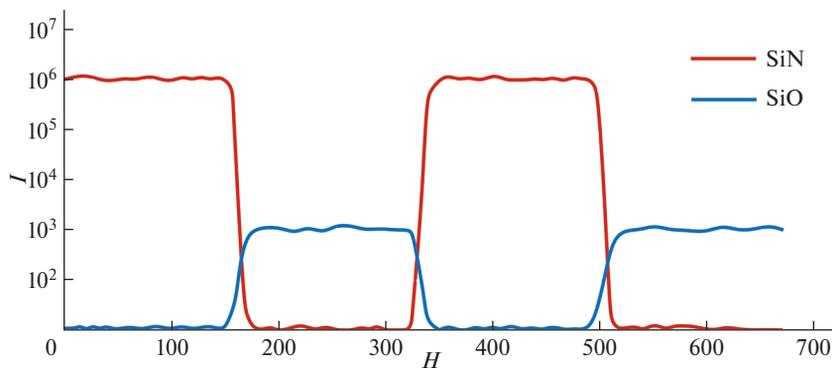


Рис. 5. Распределение элементов по глубине посредством ВИМС для образца с толщиной единичного слоя 160 нм. По оси X отложена глубина H в нм. По оси Y отложена интенсивность I в условных единицах.

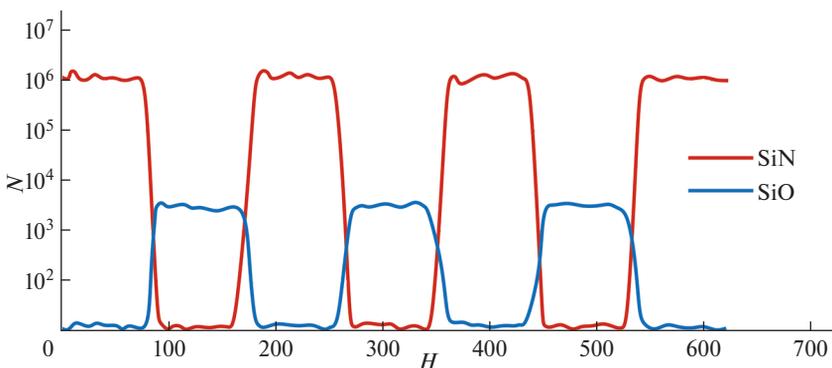


Рис. 6. Распределение элементов по глубине, полученные оже-анализом, для образца с толщиной единичного слоя 80 нм. По оси X отложена глубина H в нм. По оси Y отложена концентрация атомов N в относительных единицах.

разцов проводились при следующих условиях: — ускоряющее напряжение первичного электронного пучка — 10 кВ; — ток первичного электронного пучка — 20 нА; — ускоряющее напряжение пучка ионов аргона (Ar^+) — 3 кВ; — ток ионного пучка — 0.6 мкА; — диаметр области усреднения регистрации оже-сигнала — 170 мкм. Расчет концентрации элементов проводится в соответствии с моделью гомогенного распределения с использованием метода относительных коэффициентов обратной элементной чувствительности. Относительные коэффициенты элементной чувствительности для азота, кислорода и кремния были получены ранее на тестовых образцах оксида кремния, нитрида кремния.

Для получения распределений элементов по глубине сформированных слоев определялась средняя скорость ионного распыления слоев двуокиси и нитрида кремния. Она рассчитывалась по глубине кратера ионного травления мембраны, измеряемой на контактном профилометре Alpha-Step D-120 компании KLA-Tencor Instruments (США), и времени его формирования. Распределение элементов по глубине посредством метода Оже-спектроскопии показано на рис. 6.

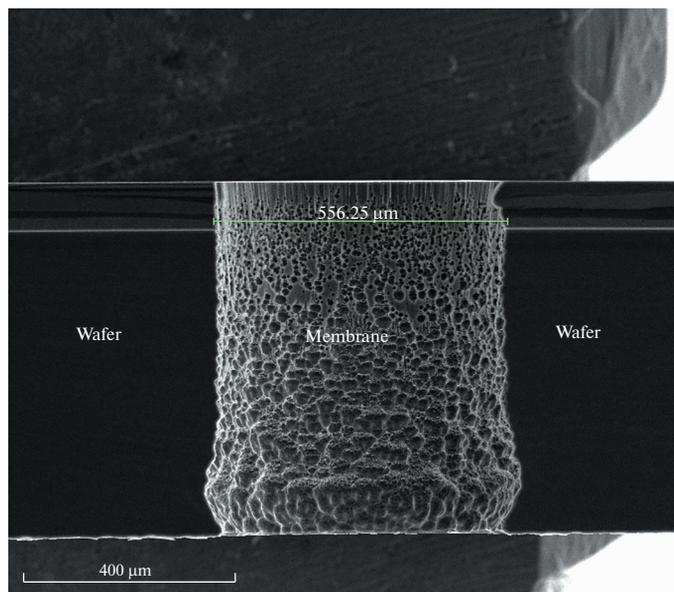


Рис. 7. Вид области мембраны.

Таким образом, измерения на аналитическом оборудовании подтверждают запланированную толщину и последовательность чередующихся слоев $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$.

Далее проводился контроль экспериментального диаметра мембраны. Для этого посредством алмазного диска был сделан рез образцов по центру круглой мембраны (рис. 7).

На изображении с РЭМ заметно, что экспериментальный диаметр мембраны составляет 560 мкм. Также заметна линия надреза на глубину 600 мкм при толщине пластины в 670 мкм. Стенки канавок имеют вертикальный профиль травления после Bosch-процесса.

2. Расчет механических напряжений. После формирования набора чередующихся слоев $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$ на Si подложке проведены измерения механических напряжений в тонких пленках по формуле Стони. Стандартная методика измерения по величине кривизны структуры была модернизирована. В результате, получено распределение механических напряжений в локальных областях структуры. Также повышена точность расчета. В программном обеспечении для современных профилометров часто заложен ряд упрощений при расчете величины напряжений: радиус кривизны гораздо больше расстояния между соседними точками, используются функции полинома и производные второго порядка. Следовательно, при увеличении длины шага сканирования возрастает погрешность. Формула (2.1) для расчета механических напряжений:

$$\sigma_0 = \frac{E_s \cdot d_s^2}{6 \cdot (1 - \mu_s) \cdot d_f} \cdot \frac{1}{R_f} \quad (2.1)$$

где σ_0 – величина механических напряжений, E_s – модуль Юнга материала подложки, d_s – толщина пластины, μ_s – коэффициент Пуассона подложки, d_f – сумма толщин слоев на подложке, R_f – радиус кривизны поверхности после проведения технологической операции.

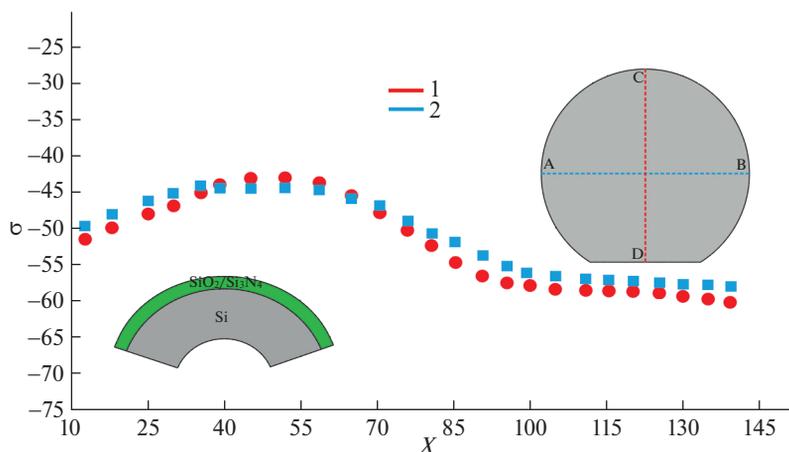


Рис. 8. Распределение механических напряжений по Si пластине в тонкой пленке $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$. По оси X отложена координата оси X в мм. По оси Y отложена величина механических напряжений σ в МПа. Легенда: 1 – направление перпендикулярное базовому срезу, 2 – направление параллельное базовому срезу.

На рис. 8 показано распределение механических напряжений σ_0 в восьмислойной пленке $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$. Измерение рельефа проводилось в направлении перпендикулярном (C-D) и параллельном базовому срезу (A-B). Двухосный модуль упругости составляет 181 ГПа для Si пластины с кристаллографической ориентацией (100). Результирующее механическое напряжение у данного набора пленок – сжимающее. Рассчитанная величина механического напряжения составляет – 50 МПа.

3. Анализ механической прочности структуры. В следующих статьях указан диапазон значений механической прочности пленки оксида кремния: 0.364 ± 0.57 ГПа PECVD SiO_2 толщиной 1.0 мкм [13]; 0.89 ± 0.07 ГПа термического SiO_2 для слоев толщиной от 507 до 985 нм [14]; от 1.2 до 1.9 ГПа PECVD оксида кремния [12]; 8.4 ГПа для нитевидных структур из SiO_2 [15]. Значение механической прочности пленки нитрида кремния составляет 14.0 ГПа [15–17]. В книге 2018 года [18] указано, что механическая прочность пленки нитрида кремния, полученной методом LPCVD, изменяется в диапазоне от 10.8 до 11.7 ГПа, при толщине пленки от 72.6 до 83.4 нм. По результатам работы [19] механическая прочность LPCVD нитрида кремния составляет 5.87 ГПа. Для дальнейших расчетов было использовано значение механической прочности оксида кремния 0.365 ГПа и нитрида кремния 14 ГПа.

Теоретическое значение механической прочности (максимальных механических напряжений) мембраны σ_T вычисляется по следующей формуле (3.1):

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\text{SiO}_2} \cdot h_{\text{SiO}_2} + \sigma_{\text{Si}_3\text{N}_4} \cdot h_{\text{Si}_3\text{N}_4}}{h_{\text{SiO}_2} + h_{\text{Si}_3\text{N}_4}}, \quad (3.1)$$

где h_{SiO_2} – толщина оксида кремния, $h_{\text{Si}_3\text{N}_4}$ – толщина слоя нитрида кремния.

Рассчитанное значение σ_T составляет 7.18 ГПа. Распределение механических напряжений по диаметру мембраны рассчитывается по формуле (3.2) [2]:

$$\sigma = \frac{3 \cdot P}{8 \cdot h^2} \cdot \sqrt{((1 + \mu)^2 \cdot (2a^4 - 8a^2r^2) + r^4 \cdot (10 + 12\mu + 10\mu^2))} \quad (3.2)$$

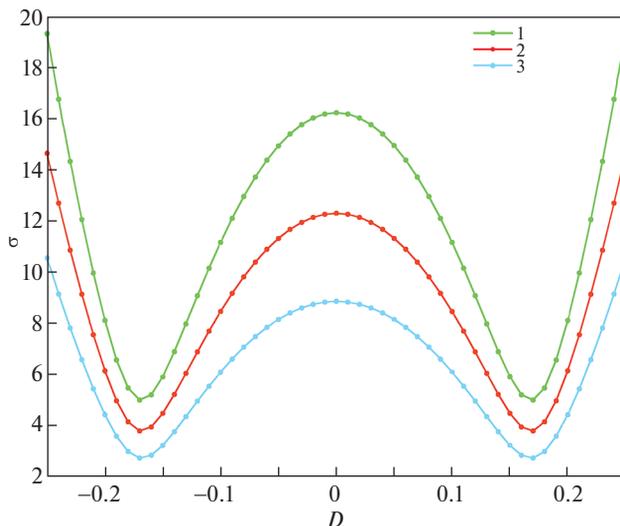


Рис. 9. Распределение механических напряжений в мембране $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$. По оси X отложена величина расстояния от центра D в мм. По оси Y отложена величина механических напряжений σ в МПа. Легенда: 1 — избыточное давление 1.65 атм для мембраны из 8 слоев, 2 — избыточное давление 1.25 атм для мембраны из 4 слоев, 3 — избыточное давление 0.9 атм для мембраны из 2 слоев.

где a — радиус мембраны, h — толщина мембраны, P — давление на мембрану, μ — коэффициент Пуассона мембраны, r — расстояние от центра мембраны.

Результаты расчета по формуле (3.2) распределения механических напряжений по диаметру мембраны при различном избыточном давлении для двухслойной, четырехслойной и восьмислойной мембраны представлены на рис. 9.

Согласно аналитическому расчету, максимальные механические напряжения $\sigma_{\text{макс}}$ возникают, когда расстояние от центра (середины) мембраны равно радиусу, т.е. $r = a$. Таким образом, прогнозируемое значение критического избыточного давления $P_{\text{пр}}$ рассчитывают по формуле (3.3) [2]:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{макс}} \cdot h^2}{a^2 \cdot B(\mu)} \quad (3.3)$$

Коэффициент $B(\mu)$ рассчитывается как $\frac{3}{4}\sqrt{1 + \mu^2}$. Значение коэффициента Пуассона мембраны μ рассчитывается как среднее арифметическое. Учитывая, что μ_{SiO_2} составляет 0,2, $\mu_{\text{Si}_3\text{N}_4}$ 0,23, то коэффициент Пуассона мембраны μ будет равным 0,215. Следовательно, значение коэффициента $B(\mu)$ составляет 0,76. Таким образом, согласно расчетам по формуле (3.3) для мембраны диаметром 0,5 мм прогнозируемое значение критического избыточного давления $P_{\text{пр}}$ будет равным 0,6 атм.

4. Анализ двухосного модуля упругости структуры. Анализируя зависимость (формула (4.1)) прогиба мембраны w от избыточного давления P , можно определить двухосный модуль упругости $E/(1 - \mu)$:

$$P = C_1 \cdot \frac{\sigma_0 \cdot h \cdot w}{a^2} + C_2 \cdot \frac{E \cdot h \cdot w^3}{(1 - \mu) \cdot a^4} \quad (4.1)$$

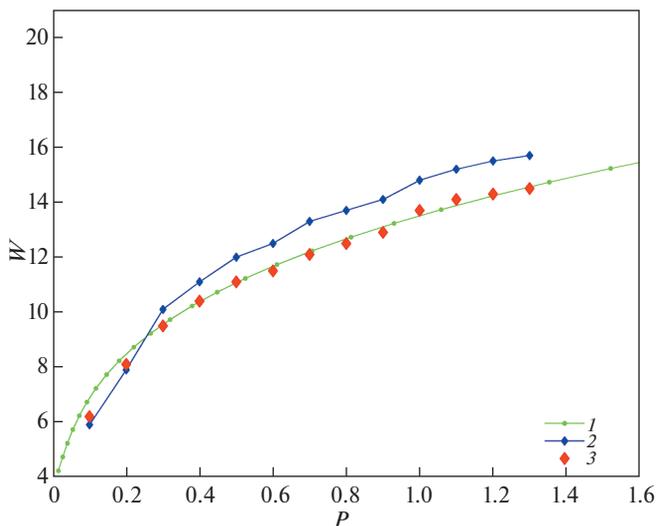


Рис. 10. Зависимость прогиба мембраны от избыточного давления. По оси X отложена величина избыточного давления в атм. По оси Y отложена величина прогиба мембраны w в мкм: 1 – расчёт по формуле при $E/(1 - \mu)$ равном 182 ГПа, 2 – моделирование в программе Comsol, 3 – эксперимент.

где P – избыточное давление, σ_0 – остаточные механические напряжения в структуре при $P = 0$, h – толщина мембраны, w – прогиб мембраны, a – радиус мембраны, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Значения коэффициентов C_1 и C_2 зависят от формы мембраны. Обычно при работе с круглыми мембранами используют $C_1 = 4$ и $C_2 = 8/3$ [2]. Зависимость $P(w)$ можно разделить на крутую и пологую область. Критерий крутой области выполняется при малых значениях прогиба мембраны w , т.е. первое слагаемое значительно больше второго. Значение двухосного модуля упругости $E/(1 - \mu)$ вычисляют на пологой области зависимости (5) при больших значениях прогиба мембраны w , т.е. значением первого слагаемого можно пренебречь (формула (4.2)):

$$\frac{E}{1 - \mu} = \frac{P \cdot a^4}{C_2 \cdot h \cdot w^3} \quad (4.2)$$

Модуль Юнга нитрида кремния составляет 225 ГПа [19], модуль Юнга оксида кремния 60.1 ± 3.4 ГПа [13]. Следовательно, модуль Юнга мембраны будет равным 142.5 ГПа. Теоретическое значение двухосного модуля упругости мембраны $E/(1 - \mu)$ составит 182 ГПа при коэффициенте Пуассона мембраны μ равном 0.215 рассчитанном ранее.

Ниже представлена зависимость прогиба мембраны w от избыточного давления P (рис. 10), рассчитанная по формуле, полученной в результате моделирования в Comsol и экспериментальные данные для восьмислойного образца. В формуле (4.1) величина остаточных напряжений в структуре составляет 50 МПа. Для повышения корреляции между расчетом по формуле (4.1), моделированием в среде Comsol и экспериментальными данными величина начального прогиба (при $P = 0$) будет равной 3.5 мкм при моделировании и в аналитическом расчете.

Из рис. 10 можно сделать несколько выводов. Относительная погрешность формулы с экспериментальными данными не превышает 5%, а относительная погрешность моделирования с экспериментальными данными не превышает 10%. Исходная структура имеет значительную величину прогиба мембраны, которая не учитывается в ис-

ходной формуле и в модели Comsol. Рассчитывая по формуле (4.2) модуль упругости из экспериментальных данных при давлении P , равном 1.3 атм получим значение 97.6 ГПа, что в несколько раз меньше теоретического значения. Это связано с эффектом использования набора слоев вместо монослоя материала. Предполагается, что модуль Юнга материала, сформированный на подложке, вносит больший эффект на результирующее значение механических свойств набора тонких пленок, входящих в состав мембраны, чем остальные тонкие пленки.

5. Экспериментальное измерение механической прочности. Для определения механических свойств мембранных элементов был модернизирован ранее разработанный стенд [2]. Избыточное давление подается с магистрали (вместо компрессора). Таким образом, расширен верхний диапазон величины давления до 6.5 атм, увеличена стабильность значения давления в системе.

Были экспериментально определены значения критического избыточного давления на модернизированном стенде. Избыточное давление разрыва мембраны $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$ с экспериментальным диаметром 0.56 мм (30 образцов) составляет: для двухслойной структуры 0.9 ± 0.05 атм; для четырехслойной 1.25 ± 0.05 атм; для восьмислойной 1.65 ± 0.1 атм. Заметно, что полученные результаты обладают высокой воспроизводимостью. Экспериментальное значение механической прочности мембраны из $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$ составляет 10.5 ГПа (двухслойная), 14.3 ГПа (четырёхслойная) и 19.2 (восьмислойная).

Выводы. Экспериментальное значение механической прочности мембраны из $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$ изменяется от 10.5 до 19.2 ГПа, экспериментальный двухосный модуль упругости $E/(1 - \mu)$ для восьмислойной мембраны составляет 97.6 ГПа. Экспериментальный размер мембран будет равным 0.56 мм при размере открытой области в шаблоне 0.5 мм. В процессе травления сформировался вертикальный профиль стенок полости. Избыточное давление разрыва мембранных структур из $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$ на кремниевой подложке изменяется в диапазоне от 0.9 до 1.65 атм для диаметра 0.56 мм. Полученный результат позволяет использовать данные мембраны в сенсорах с хорошим запасом механической прочности. Разработчик может выбрать баланс между затраченным временем на проведение процесса и необходимой величиной механической прочности материала. Повышение механической прочности объясняется уменьшением количества дефектов в объеме пленок $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiO}_2$.

Сравнивая полученный эффект с результатами работ других исследователей [20] можно заметить, что подобные эффекты увеличения механической прочности (жесткости) многослойных структур были выявлены ранее, но для других материалов и изготовленных другим методом. Например, в [21] для структуры Mo/NbN , полученной эпитаксиальным методом, с уменьшением толщины единичного слоя с 50 до 1 нм экспериментальная жесткость многослойной структуры увеличилась с 13 до 33 ГПа. При этом теоретическая жесткость, рассчитанная по правилу смесей (как и в текущей работе), составляет 9.5 ГПа. В мировой практике исследования влияния данного эффекта для материалов SiO_2 и Si_3N_4 , полученных методом осаждения из газовой фазы (PECVD), проведено ранее не было, что подтверждает новизну данного экспериментального исследования.

Благодарности. Работы выполнены на оборудовании ЦКП “МСТ и ЭКБ” НИУ МИЭТ при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-1692.2022.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шнейцман В.В., Николаев В.И., Поздняков А.О. и др. Прочность пластин монокристаллического кремния для солнечных элементов // Журнал технической физики. 2020. № 90 (1). С. 79–84. <https://doi.org/10.21883/JTF.2020.01.48665.148-19>
2. Gusev E.E., Borisova A.V., Dedkova A.A. et al. The effect of ion beam etching on mechanical strength multilayer aluminum membranes // 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Elec-

- trical and Electronic Engineering (EIconRus). 2019. № 8657243. P. 1990–1994.
<https://doi.org/10.1109/eiconrus.2019.8657243>
3. *Savinykh A.S., Kanel G.I., Razorenov S.V.* Strength and failure of LK7 borosilicate glass under shock compression // *Tech. Phys.* 2010. V. 55. № 6. P. 839–843.
<https://doi.org/10.1134/S1063784210060150>
 4. *Zhilyaev Y.V., Raevskii S.D., Grabko D.Z. et al.* Bulk GaN layers grown on oxidized silicon by vapor-phase epitaxy in a hydride–chloride system // *Tech. Phys. Lett.* 2005. V. 31. № 5. P. 367–369.
<https://doi.org/10.1134/1.1931770>
 5. *Верезуб Н.А., Простомолотов А.И.* Механика процессов выращивания и термообработки монокристаллического кремния // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 5. С. 51–63.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040157>
 6. *Перельмутер М.Н.* Анализ трещиностойкости соединений материалов // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 4. С. 96–114.
<https://doi.org/10.31857/S057232992004011X>
 7. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 5. С. 13–20.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920050025>
 8. *Власов А.И., Цивинская Т.А., Шахнов В.А.* Анализ влияния формы мембраны на механическую прочность и стабильность параметров МЭМС-сенсоров давления // *Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС).* 2016. № 4. С. 65–70.
 9. *Shikunov S.L., Kurlov V.N.* SiC-based composite materials obtained by siliconizing carbon matrices // *Tech. Phys.* 2017. V. 62. № 12. P. 1869–1876.
<https://doi.org/10.1134/S1063784217120222>
 10. *Mueller M.G., Fornabaio M., Zagar G., Mortensen A.* Microscopic strength of silicon particles in an aluminium – silicon alloy // *Acta Mater.* 2016. V. 105. P. 165–175.
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.12.006>
 11. *Ramnath Venkatraman, John C. Bravman* Separation of film thickness and grain boundary strengthening effects in Al thin films on Si // *J. Mater. Res.* 1992. V. 7. № 8. P. 2040–2048.
<https://doi.org/10.1557/JMR.1992.2040>
 12. *Tsuchiya T., Sakata J., Taga Y.* Tensile strength and fracture toughness of surface micromachined polycrystalline silicon thin films prepared under various conditions // *MRS Proc.* 1998. V. 505. P. 285–290.
<https://doi.org/10.1557/proc-505-285>
 13. *Sharpe W.N., Pulskamp J., Gianola D.S. et al.* Strain measurements of silicon dioxide microspecimens by digital imaging processing // *Exp. Mech.* 2007. V. 47. P. 649–658.
<https://doi.org/10.1007/s11340-006-9010-z>
 14. *Jinling Yang.* Fracture Properties of LPCVD silicon nitride and thermally grown silicon oxide thin films from the load-deflection of long Si₃N₄ and SiO₂/Si₃N₄ diaphragms // *J. Microelectromech. Sys.* 2008. V. 17. № 5. P. 1120–1134.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2008.928706>
 15. *Petersen K.E.* Silicon as a mechanical material // *Proc. IEEE.* 1982. V. 70. № 5. P. 420–457.
<https://doi.org/10.1109/PROC.1982.12331>
 16. *Tai-Ran Hsu.* MEMS and Microsystems: Design and Manufacture. Boston: McGraw-Hill Education, 2002. 436 p.
 17. *Madou M.* Fundamentals of Microfabrication. L.: Taylor & Francis, 1997. 589 p.
 18. *Qing An Huang.* Micro Electro Mechanical Systems. Singapore: Springer, 2018. 1479 p.
 19. *Edwards R.L., Coles G., Sharpe W.N.* Comparison of tensile and bulge tests for thin-film silicon nitride // *Exp. Mech.* 2004. V. 44. № 1. P. 49–54.
<https://doi.org/10.1007/bf02427976>
 20. *Clemens B.M., Kung H., Barnet S.A.* Structure and strength of multilayers // *MRS Bull.* 1999. V. 24. P. 20–26.
<https://doi.org/10.1557/S0883769400051502>
 21. *Madan A., Yun-yu Wang, Barnet S.A. et al.* Enhanced mechanical hardness in epitaxial nonisostuctural Mo/NbN and W/NbN superlattices // *J. Appl. Phys.* 1998. V. 84. № 2. P. 15.
<https://doi.org/10.1063/1.368137>

УДК 531.768, 531.775

**СТЕРЖНЕВОЙ ПОДВЕС ИНЕРТНОЙ МАССЫ
ДЛЯ БИНС МАЯТНИКОВОГО ТИПА**© 2022 г. Ю. К. Жбанов^а, Е. А. Привалов^{а,*}^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: prival@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 01.09.2021 г.

После доработки 10.02.2022 г.

Принята к публикации 13.02.2022 г.

В бесплатформенной инерциальной навигационной системе (БИНС) маятникового типа, предложенной академиком В.Ф. Журавлевым, в качестве чувствительного элемента используется инертная масса, которая помещена в центр изотропного упругого подвеса. При механической реализации упругого подвеса масса его элементов влияет на движение инертной массы. В работе рассмотрен стержневой подвес, не искажающий движения инертной массы, если основание подвеса неподвижно. Составлены уравнения движения подвеса на вращающемся основании, позволяющие анализировать влияние массы элементов подвеса на траекторию инертной массы.

Ключевые слова: датчик инерциальной информации, центральное поле сил, изотропный упругий подвес

DOI: 10.31857/S0572329922050154

Рассматривается вариант реализации новой схемы бесплатформенной инерциальной навигационной системы маятникового типа [1–6]. В схемах такого типа датчиком полной инерциальной информации о движущемся объекте является траектория материальной точки в центральном поле сил, которой придана форма эллипса. Наблюдение траектории точки в системе координат, связанной с объектом, позволяет определить ускорение поступательного перемещения объекта и его ориентацию.

Реализовать подвес инертной массы в центральном поле сил можно механическим стержневым подвесом, обеспечивающим линейную зависимость силы от смещения инертной массы. Один из возможных вариантов такого подвеса исследован в [7].

В данной работе исследуется динамика подвеса, состоящего из 30 цилиндрических стержней (рис. 1) с одинаковыми геометрическими и упруго-массовыми характеристиками.

Шесть центральных стержней соединены в центре O подвеса и в недеформированном состоянии направлены по осям декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, единичные векторы координатных осей которой обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Остальные 24 боковых стержня в недеформированном состоянии образуют три одинаковых квадрата с общим центром в точке O и лежат в ортогональных плоскостях системы координат $Ox_1x_2x_3$. В вершинах квадратов стержни скреплены с основанием подвеса.

Положение точки, принадлежащей k -му стержню, задается как функция $\mathbf{r}_k(s)$ параметра $0 \leq s \leq 1$, определяющего расстояние от начала стержня до точки. Отсчет параметра s для 6 центральных стержней ведется от центра подвеса, для остальных 24 стержней – от точек их крепления к концам центральных стержней. В табл. 1 записа-

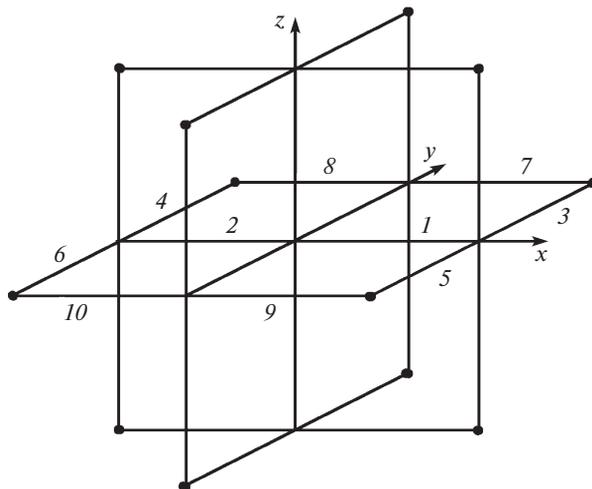


Рис. 1. Стержневой подвес.

ны векторы $\mathbf{r}_{0k}(s)$ ($k = 1-10$), задающие положение точек стержней недеформированного подвеса, лежащих в плоскости Oxy .

Векторы $\mathbf{r}_{0k}(s)$, имеющие номера $k = 11-20$, и векторы с номерами $k = 21-30$ получаются циклическими перестановками векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в формулах табл. 1.

Деформации стержней при малых смещениях центра подвеса определяются методами теории сопротивления материалов [8, 9]. Используются записанные в безразмерных параметрах выражения [7] для малого угла поворота касательной к консольно-закрепленному стержню при его изгибе

$$d' = m\xi + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) f \quad (1)$$

и для смещения точки стержня от ее положения при недеформированном состоянии стержня

$$d = m \frac{\xi^2}{2} + \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) f \quad (2)$$

Таблица 1. Векторы $\mathbf{r}_{0k}(s)$ ($k = 1-10$), задающие положение точек стержней недеформированного подвеса, лежащих в плоскости Oxy

k	$\mathbf{r}_{0k}(s)$	k	$\mathbf{r}_{0k}(s)$
1	$s\mathbf{e}_1$	2	$-\mathbf{e}_1$
3	$\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2$	4	$-\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2$
5	$\mathbf{e}_1 - s\mathbf{e}_2$	6	$-\mathbf{e}_1 - s\mathbf{e}_2$
7	$\mathbf{e}_2 + s\mathbf{e}_1$	8	$\mathbf{e}_2 - s\mathbf{e}_1$
9	$-\mathbf{e}_2 + s\mathbf{e}_1$	10	$-\mathbf{e}_2 - s\mathbf{e}_1$

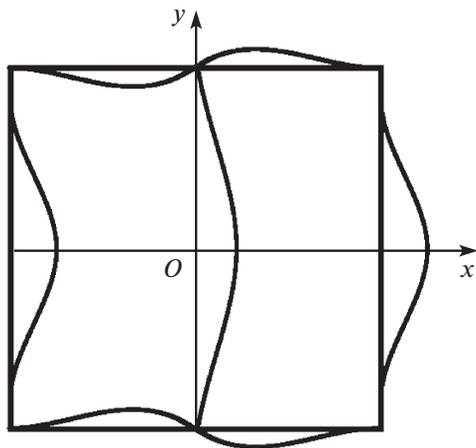


Рис. 2. Стержни подвеса, лежащие в плоскости Oxy в недеформированном состоянии и деформированном состоянии при смещении центра подвеса по оси Ox .

Здесь ξ – координата точки недеформированного стержня, отсчитываемая от точки его закрепления, d – величина смещения точки, по нормали продольной оси стержня, f и m – величины силы и момента силы, приложенных к свободному концу стержня. Штрихом обозначена производная d по ξ .

На рис. 2 изображены стержни подвеса, лежащие в недеформированном состоянии в плоскости Oxy , при смещении центра подвеса по оси Ox . Смещение центра подвеса вдоль оси центрального стержня приводит к его поступательному перемещению и изгибу скрепленных с ним боковых стержней. Смещение центра подвеса по нормали к центральному стержню вызывает изгиб этого стержня и поворот касательной к нему в точке его соединения с боковыми стержнями.

Определим форму, которую принимает боковой стержень при смещении скрепленного с ним центрального стержня вдоль своей оси. Рассмотрим деформацию консольно-закрепленного стержня под действием силы и момента силы, приложенных в его конечной точке, при условии, что касательная к стержню в этой точке не поворачивается $d'(1) = 0$. Из этого равенства следует

$$m = -\frac{1}{2}f \quad (3)$$

При этом смещение точки консольно-закрепленного стержня записывается в виде $d(\xi) = d(1)(3\xi^2 - 2\xi^3)$. Подставив формулу (3) в (2), получим равенство $f = f_a d(1)$, где $f_a = 12$. В результате замены переменной $\xi = 1 - s$ выражение для смещения точки бокового стержня подвеса приведем к виду $d(s) = d(0)a(s)$, где $d(0)$ – смещение центра подвеса, $a(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3$.

При определении деформации бокового стержня, вызванной изгибом центрального стержня, отметим, что точка, в которой стержни скреплены, не смещается. При условии $d(1) = 0$ из выражения (2) для смещения точки консольно-закрепленного стержня следует $f = -\frac{3}{2}m$. В результате подстановки этого равенства в (1) получим отношение

$$m = 4d'(1) \quad (4)$$

Смещение точки бокового стержня определяется функцией $d(\xi) = -\xi^2(1 - \xi)d'(1)$.

При изгибе центрального стержня касательная к этому стержню в точке его крепления к боковым стержням и касательная к двум скрепленным с ним боковым стержням, лежащим в плоскости изгиба центрального стержня, поворачиваются на один и тот же угол. При этом два других стержня, крепящиеся к центральному стержню в этой точке, скручиваются на такой же угол.

Форму изгиба центрального стержня определим, считая его консольно-закрепленным в сместившемся на величину $d(0)$ ортогонально оси стержня в центре подвеса. Момент силы, приложенный в конечной точке стержня, пропорционален углу поворота касательной к стержню в этой точке $m = -\mu d'(1)$. При подстановке этого условия в выражения (1) и (2) получим равенства

$$d'(1) = \frac{1}{2(1 + \mu)} f, \quad d = \left(\frac{\xi^2}{4} \frac{2 + \mu}{1 + \mu} - \frac{\xi^3}{6} \right) f$$

Учитывая отношение (4), применимое к двум изогнутым боковым стержням, и то, что жесткость цилиндрического стержня на кручение в два раза больше жесткости на изгиб, получим $\mu = 12$. Выражение для смещения точки центрального стержня принимает вид $d(\xi) = d(0) \left(\frac{21}{8} \xi^2 - \frac{13}{8} \xi^3 \right)$. Из полученных отношений следует

$$d'(1) = \frac{3}{8} d(0) \quad (5)$$

Используя переменную $s = \xi$, форму изгиба центрального стержня подвеса запишем в виде $d(s) = d(0)b(s)$, где $b(s) = 1 - \frac{21}{8}s^2 + \frac{13}{8}s^3$.

Сила, приложенная в конечной точке центрального стержня, связана со смещением центра подвеса отношением $f = f_b d(0)$, где $f_b = \frac{39}{4}$.

С учетом равенства (5) в результате замены переменной $\xi = 1 - s$ функция, определяющая форму бокового стержня, примет вид $d(s) = c(s)d(0)$, где $c(s) = -\frac{3}{8}s(1 - s)^2$.

При произвольном смещении центра подвеса форма каждого стержня представляет линейную комбинацию функций $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ с коэффициентами, зависящими от проекций смещения центра подвеса на оси системы координат $Oxuz$. В табл. 2 приведены формулы для векторов \mathbf{r}_k ($k = 1-10$), которые определяют положения точек стержней, лежащих в недеформированном состоянии подвеса в плоскости Oxy , при смещении центра подвеса в точку $\mathbf{R} = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Положение точек стержней с номерами $k = 11-20$ и с номерами $k = 21-30$ определяется формулами, получающимися в результате циклических перестановок переменных x , y , z и векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 в формулах табл. 2.

Уравнение движения подвеса запишем в форме Лагранжа. Жесткости подвеса по осям Ox , Oy , Oz имеют одни и те же значения. Выражение для потенциальной энергии упругих деформаций элементов подвеса при смещении центра подвеса в точку \mathbf{R} имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{R}^2$$

Здесь $\mu_0 = 8f_a + 4f_b = 135$ – приведенная жесткость стержневого подвеса.

Таблица 2. Формулы для векторов \mathbf{r}_k ($k = 1-10$), которые определяют положения точек стержней, лежащих в недеформированном состоянии подвеса в плоскости Oxy , при смещении центра подвеса в точку $\mathbf{R} = xe_1 + ye_2 + ze_3$

k	$\mathbf{r}_k(s)$	k	$\mathbf{r}_k(s)$
1	$se_1 + xe_1 + bye_2 + bze_3$	2	$-se_1 + xe_1 + bye_2 + bze_3$
3	$e_1 + se_2 + axe_1 + cye_1$	4	$-e_1 + se_2 + axe_1 - cye_1$
5	$e_1 - se_2 + axe_1 - cye_1$	6	$-e_1 - se_2 + axe_1 + cye_1$
7	$e_2 + se_1 + cxe_2 + aye_2$	8	$e_2 - se_1 - cxe_2 + aye_2$
9	$-e_2 - se_1 - cxe_2 + aye_2$	10	$-e_2 - se_1 + cxe_2 + aye_2$

Скорость точки подвеса, расположенного на объекте, который совершает поворот относительно инерциальной системы координат, определяется формулой

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость объекта, вектор \mathbf{r} задается формулами табл. 2 и формулами, полученными в результате циклических перестановок в табл. 2.

Выражение для квадрата скорости точки представим в виде

$$\mathbf{V}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 + 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \quad (6)$$

Для подсчета кинетической энергии T стержневого подвеса выражение для квадрата скорости точки стержня следует проинтегрировать по s от 0 до 1 для каждого стержня, принимая линейную плотность стержня за единичную, т.е. считая дифференциал массы стержня $dm = ds$, а затем результаты интегрирования просуммировать по всем стержням. При выполнении расчетов удобнее сначала просуммировать квадраты скоростей точек с одинаковым значением s и затем проинтегрировать полученные выражения по s .

Расчет сумм слагаемых, входящих в формулу (6), для точек стержней подвеса с использованием выражений табл. 2 дает результаты:

$$\sum \dot{\mathbf{r}}_k^2 = (2 + 8a^2 + 4b^2 + 8c^2)\dot{\mathbf{R}}^2$$

$$\sum \mathbf{r}_k^2 = (2 + 8a^2 + 4b^2 + 8c^2)\mathbf{R}^2$$

$$\sum (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k) = (4b + 2b^2)\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}$$

$$\sum (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_k)^2 = 4c^2\mathbf{R}^2\boldsymbol{\omega}^2 + (4b + 2b^2)(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 +$$

$$+ (2 + 8a^2 + 2b^2 - 4b - 4c^2)[(x\omega_1)^2 + (y\omega_2)^2 + (z\omega_3)^2]$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости на оси системы координат $Oxyz$.

Сумма квадратов скоростей точек стержней подвеса записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{V}_k^2 = & (2 + 8a^2 + 4b^2 + 8c^2)\dot{\mathbf{R}}^2 + (4b + 2b^2)2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + \\ & + (2 + 8a^2 + 4b^2 + 4c^2)\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}^2 - (4b + 2b^2)(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + \\ & - (2 + 8a^2 + 2b^2 - 4b - 4c^2)[(x\omega_1)^2 + (y\omega_2)^2 + (z\omega_3)^2] \end{aligned} \quad (7)$$

В результате интегрирования выражения (7) по s от 0 до 1 получим:

$$\int \sum V_k^2 = 6.563\dot{\mathbf{R}}^2 + 2.917 \cdot 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + 6.557\boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 - 2.917(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 - \\ - 3.636(x^2\omega_1^2 + y^2\omega_2^2 + z^2\omega_3^2)$$

Запишем выражение для кинетической энергии стержневой подвеса, выделив фрагмент, соответствующий кинетической энергии материальной точки, находящейся в центре подвеса

$$T = \frac{1}{2} \int \sum \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} \cdot 6.563[\dot{\mathbf{R}}^2 + 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})^2] - \\ - \frac{1}{2} \cdot 3.646 \cdot 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + \frac{1}{2} \cdot 3.646(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 - \\ - \frac{1}{2} \cdot 0.006\boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 - \frac{1}{2} \cdot 3.636[(x\omega_1)^2 + (y\omega_2)^2 + (z\omega_3)^2]$$

Учет инертности элементов подвеса приводит к появлению коэффициента перед скобкой, определяющей кинетическую энергию инертной массы в центре подвеса, а также к появлению дополнительных слагаемых в выражении для энергии.

Уравнения Лагранжа, описывающие движение стержневого подвеса, имеют вид

$$6.563[\ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{R} + (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}] + 135\mathbf{R} = \\ = 3.646[2\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{R} + (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}] - 0.006\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{R} - 3.636[x\omega_1^2, y\omega_2^2, z\omega_3^2]^T$$

Слагаемые в правой части уравнения следует рассматривать как возмущающие силы. Динамика инертной массы, помещенной в механический изотропный упругий подвес, совпадает с динамикой материальной точки в центральном поле сил при условии компенсации этих сил.

Работа выполнена по госзаданию № АААА-А17-117021310382-5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности (Пространственный осциллятор – датчик полной инерциальной информации) // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 5–10.
2. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная навигационная система маятникового типа (БИНС МТ) // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 6–17.
3. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К. К вопросу использования компьютерной механики в теории инерциальных навигационных систем // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 48–62. <https://doi.org/10.1134/S0572329919020132>
4. Журавлёв В.Ф. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164. <https://doi.org/10.31857/S0572329920010249>
5. Бранец В.Н. Об изоморфизме математических описаний операции вращения // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 136–143.
6. Челноков Ю.Н. Уравнения и алгоритмы для нахождения инерциальной ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта в кватернионных и бикватернионных четырехмерных ортогональных операторах // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 17–25.
7. Жбанов Ю.К., Привалов Е.А. Стержневая конструкция изотропного упругого подвеса инертной массы // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 19–28. <https://doi.org/10.31857/S057232990002463-9>
8. Феодосьев В.И. Сопроотивление материалов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 544 с.
9. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 328 с.

УДК 531.36

**О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ РАВНОГРАННОГО ТЕТРАЭДРА,
БЛИЗКОГО К ПРАВИЛЬНОМУ, С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ
В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ**

© 2022 г. Е. А. Никонова^{а,*}

^а *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук,
Москва, Россия*

**e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.12.2021 г.

После доработки 06.01.2022 г.

Принята к публикации 07.01.2022 г.

Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений тетраэдрального тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Рассматривается случай равногранного тетраэдра близкого к правильному.

Исследуется связь этих свойств стационарных движений со свойствами стационарных движений правильного тетраэдра.

В небесной механике гравитационное поле небесного тела неправильной формы нередко моделируется гравитационным полем некоторой совокупности массивных точек. Представления в виде совокупности двух или трёх точечных масс содержат симметрии, не присущие реальным телам. Наиболее подходящими представляются приближения гравитационных полей с помощью полей притяжения именно четырёх массивных точек.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, теория Рауса, устойчивость и ветвление стационарных движений, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S0572329922050117

Введение. Согласно исследованиям [1–3] в случае правильного тетраэдра, являющегося частным случаем равногранного, масса которого в равных долях сосредоточена в его вершинах, наблюдаются примечательные свойства равновесий, а именно, размерность элемента правильного тетраэдра (вершина, ребро, грань), которым он обращен в стационарном движении, в частности, и в равновесии, к притягивающему центру совпадает со степенью неустойчивости. “Чувствительность” этих свойств к геометрическим модификациям правильного тетраэдра обсуждается в работах [4–6]. Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений равногранного тетраэдра вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил.

Исследование “чувствительности” динамических свойств платоновых тел восходит к публикации [7], в которой предложен оригинальный подход, опирающийся на эффективное использование симметрий в распределении масс при изучении стационарных движений в задачах динамики твердого тела (см. также [8–13]). Другое направление исследований динамики тетраэдральных тел, обусловленное потребностями механики космического полета, связано с предположением о наличии в них роторов [14–16].

Настоящее исследование инспирировано, в частности, работой [8], где рассматривается задача о движении однородного параллелепипеда, закрепленного в центре масс и находящегося в центральном ньютоновском поле сил. В работе определены все положения равновесия тела, близкого к кубу, исследованы их ветвления и устойчивость в зависимости от параметров задачи.

В небесной механике при изучении динамики малых тел со сложным распределением масс, форма которых далека от шарообразной, последние могут быть представлены в виде совокупности нескольких точечных масс, т.н. масконов. Так, например, гравитационное поле кометы (67P) Чурюмова–Герасименко может быть представлено полем притяжения образующих тетраэдр четырех массивных точек [17] (см. также [18], относительно вопроса качества приближения).

1. Постановка задачи и основные обозначения. Рассмотрим движение твердого тела \mathcal{T} вокруг неподвижной точки O в поле сил ньютоновского притяжения с центром в точке N . Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – единичный вектор, направленный от N к O , $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции тела относительно точки O , $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости тела. Здесь и далее все векторы и тензорные величины задаются в подвижной системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, задаваемых собственными векторами тензора инерции \mathbf{I} .

Если $U_N = U_N(\gamma)$ – потенциал силового поля, то описывающие движение уравнения Эйлера–Пуассона можно записать в виде

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U_N}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \quad (1.1)$$

Помимо интеграла энергии $\mathcal{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\omega, \omega) + U_N(\gamma) = h$ и интеграла площадей $\mathcal{F}_1 = (\mathbf{I}\omega, \gamma) = p_\psi$, уравнения (1.1) допускают геометрический интеграл

$$\mathcal{F}_2 = (\gamma, \gamma) - 1 = 0 \quad (1.2)$$

задающий в пространстве $R^3(\gamma)$ т.н. сферу Пуассона \mathcal{S} .

Как известно (см., например, [19]), система (1.1) может обладать перманентными вращениями вокруг оси NO с постоянной по величине угловой скоростью ω . Положение оси перманентного вращения в теле согласно (1.1) задаются уравнениями

$$0 = \gamma \times \left(\frac{\partial U_N}{\partial \gamma} - \omega^2 \mathbf{I}\gamma \right), \quad \omega = \text{const}$$

Замечание. Согласно теории Рауса ([20, 21], см. также [22]) эти вращения могут быть найдены как критические точки приведенного (en: amended) потенциала

$$U_\psi = \frac{p_\psi^2}{2I(\gamma)} + U_N(\gamma)$$

рассмотренного как функция на сфере (1.2). Здесь $I(\gamma) = (\mathbf{I}\gamma, \gamma)$ – момент инерции тела относительно оси вращения. При этом постоянная интеграла площадей p_ψ и величина угловой скорости оказываются связанными соотношением $p_\psi = I(\gamma)\omega$.

Хорошо известно, что при описании движения твердого тела в центральном поле ньютоновского притяжения, как правило, достаточно воспользоваться разложением до слагаемых первого или второго порядка малости по параметру, характеризующему отношение размеров тела к его расстоянию до притягивающего центра. Однако, в случае, когда тензор инерции тела близок к шаровому, такие приближения, вообще говоря, оказываются недостаточными. В дальнейшем в качестве примера рассмотрим дви-

жение твердого тела \mathcal{T} в виде равногранного тетраэдра с равными массами в вершинах.

2. Равногранный тетраэдр. Согласно [23], тетраэдр называется равногранным, если все грани – равные между собой треугольники. Как известно, у равногранного тетраэдра бимедианы попарно перпендикулярны и являются общими серединными перпендикулярами соответствующих скрещивающихся ребер. Пусть \mathcal{T} – тело в форме равногранного тетраэдра с равными массами m в вершинах. Будем считать, что оно совершает вращение вокруг неподвижной точки O , совпадающей с точкой пересечения бимедиан. Зададим жестко связанную с тетраэдром правую систему отсчета $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и осями, направленными вдоль бимедиан. Если длины бимедиан равны $2a_1, 2a_2, 2a_3$ соответственно, то вершины A, B, C и D тетраэдра \mathcal{T} в этой системе отсчета задаются радиус-векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{OA} = r(a_1, -a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_A, & \mathbf{r}_B &= \mathbf{OB} = r(-a_1, -a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_B \\ \mathbf{r}_C &= \mathbf{OC} = r(-a_1, a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_C, & \mathbf{r}_D &= \mathbf{OD} = r(a_1, a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_D \end{aligned}$$

причем длины этих векторов равны

$$|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = |\mathbf{OC}| = |\mathbf{OD}| = r, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Оси $Ox_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции тела \mathcal{T} , в них главные центральные моменты \mathcal{T} записываются как

$$I_k = 4mr^2I'_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad I'_1 = a_2^2 + a_3^2, \quad I'_2 = a_1^2 + a_3^2, \quad I'_3 = a_1^2 + a_2^2$$

3. Приближенное представление потенциала поля притяжения. Пусть N – притягивающий центр, в котором сосредоточена масса M , $|\mathbf{NO}| = d$. Пусть единицы размерности выбраны так, что гравитационная постоянная, масса M , а также величина $r_* = \sqrt{d^2 + r^2}$ равны единице (ср. [24]). Тогда потенциал притяжения имеет вид

$$U_N = - \sum_{(A,B,C,D)} \rho_A^{-1}, \quad \rho_A = (1 + \varepsilon(\gamma, \mathbf{e}_A))^{1/2} \quad (3.1)$$

где (A, B, C, D) – циклическая перестановка индексов.

Параметр разложения ε , предложенный в [24], удобно применять и в настоящем исследовании поскольку он позволяет одновременно описывать случаи, когда тетраэдр располагается очень далеко от притягивающего центра N , и когда, наоборот, центр масс тетраэдра очень близок к притягивающему центру N .

4. Равногранный тетраэдр, мало отличающийся от правильного. Пусть равногранный тетраэдр мало отличается от правильного, причем

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \varepsilon p}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{1}{3} + \varepsilon p} \quad (4.1)$$

Подставляя величины (4.1) в потенциал (3.1) и вновь разлагая его в ряд по параметру ε , имеем

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 + \varepsilon^4 V_4 + \dots \quad (4.2)$$

$$V_0 = -4, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = -\frac{1}{2}, \quad V_3 = \frac{3}{2}(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)p + \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$V_4 = -\frac{35}{288}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4) - \frac{35}{48}(\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_1^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2)$$

Предполагая, что параметр ε близок к нулю, исследуем равновесия и области возможного движения (ОВД).

4.1. *Равновесия. Существование.* Ограничиваясь рассмотрением случая приближения третьего порядка, покажем, как число равновесий системы зависит от значения параметра p . Уравнения равновесий имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \gamma_2 \gamma_3 + (\lambda + 3p) \gamma_1 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \gamma_1 \gamma_3 + \lambda \gamma_2 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \gamma_1 \gamma_2 + (\lambda - 3p) \gamma_3 = 0$$

$$W = V_3 + \frac{\lambda}{2} ((\gamma, \gamma) - 1) = \frac{3}{2} (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) p + \frac{5\sqrt{3}}{6} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \frac{\lambda}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1)$$

Эту систему следует рассматривать в совокупности с геометрическим интегралом (1.2). Неопределённый множитель Лагранжа λ , удовлетворяющий системе, имеет вид

$$\lambda = 3(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) p - \frac{5\sqrt{3}}{2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

Обозначим $p_* = \frac{5\sqrt{6}}{36}$. Тогда помимо равновесий $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и \mathcal{F}_3 вида

$$\mathcal{F}_1: \quad \gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0, \quad \lambda = -3p$$

$$\mathcal{F}_2: \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \gamma_3 = 0, \quad \lambda = 0$$

$$\mathcal{F}_3: \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \lambda = 3p$$

существующих при всех значениях параметра p , систем обладает равновесиями

$$\mathcal{F}_4: \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{6p}{25} \sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25} p^2,$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{3} - \frac{72}{25} p^2, \quad \gamma_3^2 = \frac{1}{3} - \frac{6p}{25} \sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25} p^2$$

такими, что

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 > 0, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{108p^2 + 25}}{6}, \quad p \in [-p_*, p_*]$$

а также равновесиями

$$\mathcal{F}_5: \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{6p}{25} \sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25} p^2$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{3} - \frac{72}{25} p^2, \quad \gamma_3^2 = \frac{1}{3} + \frac{6p}{25} \sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25} p^2$$

такими, что

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 < 0, \quad \lambda = \frac{\sqrt{108p^2 + 25}}{6}, \quad p \in [-p_*, p_*]$$

В случае $p \ll 1$, решения \mathcal{F}_4 порождаются равновесиями, на которых тетраэдр ориентирован на точку N центром одной из своих граней. Так, например, для решения

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5}p + \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \dots, & \gamma_2 &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{36\sqrt{3}}{25}p^2 + \dots \\ \gamma_3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5}p + \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \dots\end{aligned}$$

порождающим является решение, на котором правильный тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр гранью ABC .

Решения \mathcal{F}_5 порождаются равновесиями, на которых тетраэдр ориентирован на точку N одной из своих вершин. Так, например, для решения

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5}p - \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \dots, & \gamma_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{36\sqrt{3}}{25}p^2 + \dots \\ \gamma_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5}p - \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \dots\end{aligned}$$

порождающим является решение, на котором правильный тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр вершиной D .

4.2. Равновесия. Устойчивость и ветвление. При $p \in (-\infty; -p_*)$ на решении \mathcal{F}_1 функция V_3 достигает локальных минимумов, и равновесия устойчивы, степень неустойчивости $\chi = 0$. При $p \in (-p_*; p_*)$ решению \mathcal{F}_1 отвечают седловые точки V_3 , и равновесия неустойчивы, со степенью неустойчивости $\chi = 1$. Наконец, при $p \in (p_*; +\infty)$ на решении \mathcal{F}_1 функция V_3 достигает локальных максимумов, равновесия неустойчивы, степень неустойчивости $\chi = 2$. При $p = \pm p_*$ требуется дополнительное исследование устойчивости.

Для \mathcal{F}_3 имеет место, в определенном смысле, обратная ситуация. При $p \in (-\infty; -p_*)$ на решении \mathcal{F}_3 функция V_3 достигает локальных максимумов, равновесия неустойчивы, степень неустойчивости $\chi = 2$. При $p \in (-p_*; p_*)$ решению \mathcal{F}_3 отвечают седловые точки V_3 , и равновесия неустойчивы, со степенью неустойчивости $\chi = 1$. Наконец, при $p \in (p_*; +\infty)$ на решении \mathcal{F}_3 функция V_3 достигает локальных минимумов, равновесия устойчивы, степень неустойчивости $\chi = 0$. При $p = \pm p_*$ опять же требуется дополнительное исследование устойчивости.

Равновесия \mathcal{F}_2 неустойчивы и отвечают седловым точкам функции V_3 .

Замечание. Имеет место следующая связь между свойствами устойчивости решений $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ в зависимости от параметра p и значениями главных моментов инерции тетраэдра. Решение \mathcal{F}_k , $k \in 1, 3$, устойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 0$, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_k$ — наименьший. При этом, решение \mathcal{F}_ℓ , $\ell \in 1, 3$, неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 2$, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_\ell$ — наибольший. Наконец, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_m$ — средний, то решение \mathcal{F}_m неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 1$. В рамках (4.1) индекс $m = 2$.

Решения \mathcal{F}_4 неустойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 2$. При этом, решения \mathcal{F}_5 устойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 0$.

При $p = -p_*$, решения \mathcal{F}_4 рождаются из решения \mathcal{F}_3 , и при $p = p_*$ сливаются с решением \mathcal{F}_1 . Наоборот, при $p = -p_*$, решения \mathcal{F}_5 рождаются из решения \mathcal{F}_1 , и при $p = p_*$ сливаются с решением \mathcal{F}_3 , см. рис. 1, где изображены кривые на сфере Пуассона \mathcal{S} , определяемой геометрическим интегралом (1.2). Стрелками указаны изменения решений с ростом значения параметра p .

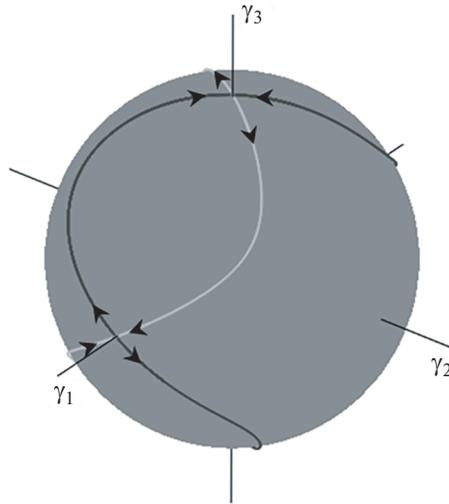


Рис. 1. Множества равновесий \mathcal{F}_4 (светлая кривая) и \mathcal{F}_5 (темная кривая) на сфере Пуассона при изменении параметра p от $-p_*$ до p_* (указано стрелками).

4.3. Области возможного движения. Для правильного тетраэдра главные центральные моменты инерции равны, слагаемое в приведенном потенциале, обусловленное центробежными силами, постоянно и не сказывается на структуре областей возможного движения. Однако, если тетраэдр отличен от правильного, это, вообще говоря, не так, и области возможного движения существенно зависят от значений постоянной интеграла площадей p_Ψ . Ограничимся здесь построением ОВД лишь для нулевого уровня интеграла площадей: $p_\Psi = 0$.

Для различных значений энергии h ОВД определяются соотношением

$$V_3 - h \leq 0 \tag{4.3}$$

Функция V_3 непрерывна на компакте \mathcal{S} , и при любом значении p достигает на нем своих минимального и максимального значений, обозначаемых $h_*(p)$ и $h^*(p)$. ОВД, определяемые неравенством (4.3) для различных значений постоянной h , задаваемой уровнем интеграла энергии, в виде проекции полусферы $\gamma_3 > 0$ на плоскость (γ_1, γ_2) изображены на рис. 3. ОВД окрашены серым. На рис. 2 изображена диаграмма на плоскости (p, h) . Плоскость разбита на восемь областей a, b, c, d, k, l, m, n . Для параметров p, h внутри каждой области ОВД топологически эквивалентны. ОВД в случае полусферы $\gamma_3 < 0$ получается из полученных путем их отражения относительно оси $\gamma_1 = 0$. ОВД в случае $p < 0$ получается из рассматриваемого путем отражения относительно оси $\gamma_1 = 0$ и инверсии цветов, поэтому наличие рисунков k, l, m, n в определенном смысле избыточно.

Замечание. Рассмотрим подробнее случай $p = 0$. При $h > h^*(0) = h^* = 5/18$ ОВД совпадает со всей сферой \mathcal{S} . При $h = h^*$ ОВД представляет собой \mathcal{S} с четырьмя выколотыми точками $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ вида

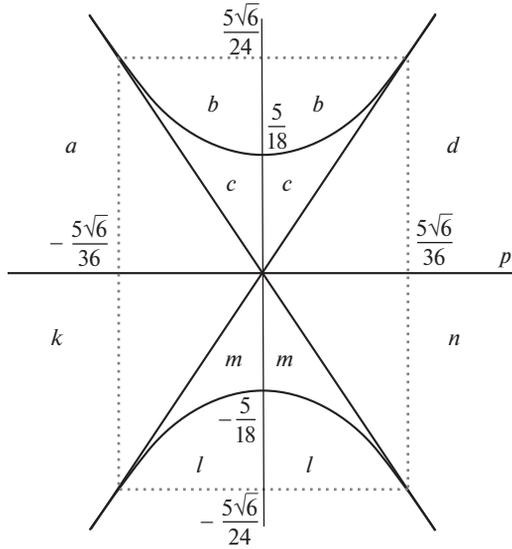


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (p, h) .

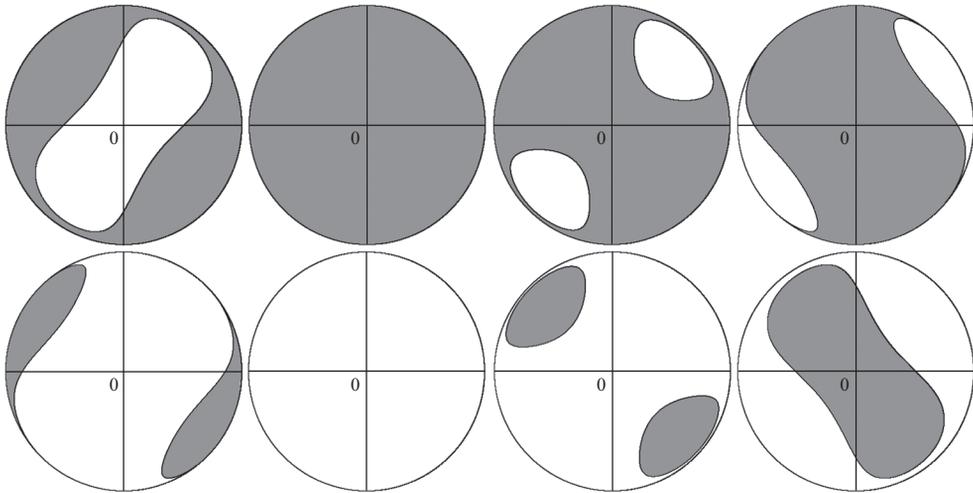


Рис. 3. Проекция областей возможного движения (закрашены серым) на плоскость (γ_1, γ_2) для различных областей $abcdklmn$ из бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 2.

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \tag{4.4}$$

с положительным произведением координат. Эти точки отвечают осям γ , при которых тетраэдр ориентирован на притягивающий центр N центрами граней.

При $0 < h < h^*$ окрестности точек P_1^* , P_2^* , P_3^* и P_4^* увеличиваются, при $h = 0$ заполняя части сферы \mathcal{S} , расположенные в октантах с положительным произведением координат.

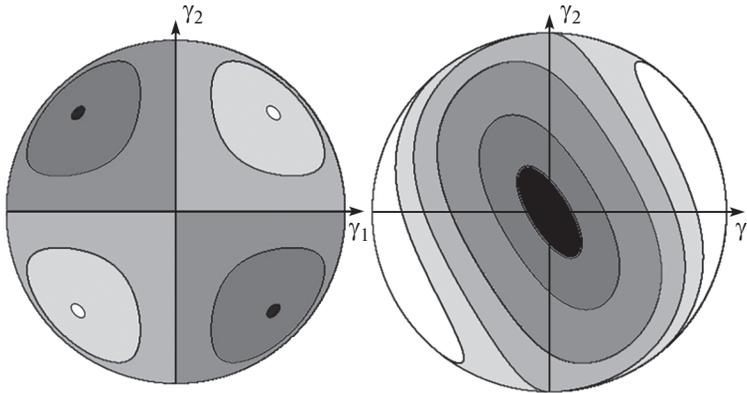


Рис. 4. Проекция областей возможного движения (закрашены серым) на плоскость (γ_1, γ_2) при $p = 0$ (слева) и при $p = 5(1 + \sqrt{6})/36$ (справа). ОВД окрашены оттенками серого цвета.

При $-5/18 = h_* = h_*(0) < h < 0$ ОВД в определенном смысле “выворачиваются”, и далее представляется объединением окрестностей точек $P_{1*}, P_{2*}, P_{3*}, P_{4*}$ вида (4.4) с отрицательным произведением координат. Эти точки отвечают осям γ , при которых тетраэдр ориентирован на притягивающий центр N вершинами.

При $h = h_*$ ОВД вырождается в четыре точки, $P_{1*}, P_{2*}, P_{3*}, P_{4*}$. При $h < h_*$ движение невозможно. На рис. 4 (слева) для различных значений постоянной $h \in [h_*(p), h^*(p)]$ представлены ОВД, окрашенные оттенками серого цвета, изменяющимися от черного, отвечающего значению $h_*(p)$, до белого, отвечающего значению $h^*(p)$. При фиксированном значении h движение возможно в тех областях, цвет которых темнее цвета, отвечающего рассматриваемому h . На рис. 4 (справа) представлены ОВД при $p = 5(1 + \sqrt{6})/36$.

5. О чувствительности равновесий к степени приближения гравитационного потенциала. К отысканию равновесий можно подходить, опираясь на введение новых переменных (ср. [4, 25]). Так если в качестве таких переменных использовать величины

$$j_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad j_2 = \sqrt{3}(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)p + \frac{5}{3}\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad j_3 = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_1^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2$$

“обязанные” своим происхождением геометрическому интегралу и первым двум нетривиальным слагаемым в разложении потенциала, то сам потенциал (4.2) с точностью до постоянного слагаемого имеет вид

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon^3 j_2 - \frac{35}{72}\epsilon^4 \left(\frac{j_1^2}{4} + j_3 \right) + \dots \tag{5.1}$$

Уравнения равновесий принимают вид

$$\frac{\partial W}{\partial j_1} = \lambda - \frac{35}{72}\epsilon^4 \frac{j_1}{2} + \dots = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial j_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon^3 + \dots = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial j_3} = -\frac{35}{72}\epsilon^4 + \dots = 0$$

где $W = V + \lambda(j_1 - 1)$. Эти уравнения несовместны при достаточно малых значениях $\epsilon \neq 0$. Таким образом, равновесия имеют место лишь там, где замена $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (j_1, j_2, j_3)$ вырождена, т.е. в тех точках, для которых якобиан

$$\mathcal{F}_p = \frac{\partial(j_1, j_2, j_3)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \equiv \frac{20}{3} \mathcal{F}'_p$$

равен нулю, т.е. выполнено условие

$$\mathcal{F}'_p = \frac{18\sqrt{3}}{5} p \cdot \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left(\frac{1}{3} - \gamma_2^2 \right) - (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) = 0 \quad (5.2)$$

Все решения, найденные в пункте 4.1, удовлетворяют равенству (5.2), определяющему однопараметрическую поверхность в пространстве $R^3(\gamma(p))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суликашвили П.С. О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 57–66.
2. Суликашвили П.С. Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. № 4. С. 582–586.
3. Burov A.A., Sulikashvili R.S. On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Pré-publication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. № 17. 8 p.
4. Буров А.А., Никонова Е.А. Вращение равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил: конус Штауде // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 5. С. 40–46.
5. Буров А.А., Никонова Е.А. Установившиеся движения симметричного равногранного тетраэдра в центральном поле сил // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 152–164.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050032>
6. Никонова Е.А. О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 153–168.
<http://doi.org/10.31857/S0032823522020096>
7. Карпетян А.В., Нараленкова И.И. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 12–21.
8. Нараленкова И.И. О ветвлении и устойчивости положений равновесия твердого тела в ньютоновском поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1995. С. 53–60.
9. Абрарова Е.В., Карпетян А.В. О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. № 5. С. 68–73.
10. Абрарова Е.В. Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. № 6. С. 947–955.
11. Буров А.А., Карпетян А.В. О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 14–18.
12. Абрарова Е.В. Об относительных равновесиях твердого тела в центральном гравитационном поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 3–28.
13. Абрарова Е.В., Карпетян А.В. О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. № 3. С. 375–387.
14. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили П.С. Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 594–609.
15. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили П.С. Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. № 5. С. 738–744.
16. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Dynamics of a Tetrahedral Satellite-Gyrostet // AIP Conference Proceedings. 2010. V. 1281. P. 465–468.
<https://doi.org/10.1063/1.3498509>
17. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V.I. Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // Acta Astronautica. 2019. V. 157. P. 225–232.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>

18. *Yang H., Li Sh., Sun J.* A fast Chebyshev polynomial method for calculating asteroid gravitational fields using space partitioning and cosine sampling // *Advances in Space Research*. 2020. V. 65. № 4. P. 1105–1124.
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.11.001>
19. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука. 1988. 304 с.
20. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Cambridge University press, 1877. 108 p.
21. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillan, 1884. 343 p.
22. *Каранетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
23. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия // “Библиотечка Квант”. Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
24. *Vashkoviak M. A.* On the stability of circular “asteroid” orbits in an N-planetary system // *Celestial Mechanics*. 1976. V. 13. № 3. P. 313–324.
25. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2016. V. 12. № 2. P. 179–196.
<https://doi.org/10.20537/nd1602002>

УДК 531.36

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТУПЕНЧАТОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР

© 2022 г. А. А. Битюрин^{a,*}

^a Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

*e-mail: sntk_2015@mail.ru

Поступила в редакцию 07.11.2021 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 26.01.2022 г.

Рассматривается продольный удар о жесткую преграду системы однородного и ступенчатого стержней, один из которых имеет дефект в виде начальной кривизны. С использованием метода начальных параметров и волновой модели продольного удара вычисляются начальный изгибающий момент и угол поворота сечения искривленного стержня, взаимодействующего с жесткой преградой, а также рассчитывается продольная динамическая сила и время ее воздействия. Вычисляются максимальная амплитуда поперечных колебаний искривленного стержня рассматриваемой системы, и его средний импульс, являющиеся важнейшими характеристиками вибрационного воздействия возникающего колебательного процесса. Отмечается универсальность применения предлагаемой методики к расчету стержневых систем с произвольным начальным состоянием.

В работе моделировалось среднее значение вибрационного импульса для стержневых систем с различным соотношением длин однородных участков при одинаковом соотношении их толщины и одинаковой предударной скорости. Как показали результаты моделирования, четкой закономерности между величиной среднего импульса и каким-либо соотношением длин участков рассматриваемой стержневой системы не прослеживается, что представляет немалый научный интерес. Это связано с хаотичностью интерференционной картины продольных волн деформаций при их распространении и преобразовании вдоль однородных участков и при переходе через их границы. В результате, для каждой определенной конфигурации стержневой системы, в процессе ударного взаимодействия образуются продольные волны разной величины и продолжительности, от которых зависит среднее значение моделируемого импульса.

Ключевые слова: поперечные колебания, прогиб, продольный удар, волновая модель, метод начальных параметров, вибрация, импульс

DOI: 10.31857/S0572329922050038

Введение. Явление вибрации и сопутствующая ему повышенная шумность работы оборудования различного назначения, связано, прежде всего, с возникновением колебаний тех или иных элементов самого оборудования. В большинстве отраслей, и в машиностроении, в частности, явление вибрации в основном сказывается отрицательно. Редкое исключение составляют лишь единичные технологические процессы, где используется вибрация, такие как вибрационная сварка трением. Колебания различных элементов оборудования машиностроения при их длительном воздействии

вызывают усталость материала, приводящее к ухудшению его параметров и последующему разрушению, нередко являющемуся причиной серьезных аварий [1]. В рабочем цикле возникающая вибрация приводит к повышению энергозатрат, сокращению срока службы машин и станков, а также к ухудшению условий труда рабочего персонала. В этой связи для решения поставленной проблемы, прежде всего, необходима качественная и количественная оценка возникающих колебаний в тех или иных условиях, и уже только после этого принятие соответствующих решений по их устранению. Важнейшими параметрами колебательного процесса являются амплитуда и частота, определение которых относят к динамическим задачам механики. При совпадении частоты собственных и вынужденных колебаний колеблющихся элементов возникает явление резонанса, представляющего известную опасность.

Причины возникновения явления вибрации могут заключаться как в несоответствии требованиям к условиям эксплуатации оборудования, так и в различных конструкционных дефектах самого оборудования, а также в случае его неисправности. Вибрация может проявиться из-за излишнего трения движущихся частей, низкого качества сборки и различных геометрических дефектов взаимодействующих элементов конструкции машины: искривление, децентрализация, эксцентриситеты и прочее.

Задачи расчета на динамический прогиб при поперечных колебаниях реализовывались в основном для идеальных стержней с прямолинейной осью при отсутствии каких-либо посторонних внешних воздействий [2–7]. Однако, как было отмечено выше, причиной вибрации могут являться различные геометрические дефекты, требующие обязательного учета. В этом случае решение поставленной задачи усложняется. Особую важность представляет учет динамического характера продольного нагружения стержневых элементов конструкций, что приводит к дальнейшему усложнению поставленной задачи, как это было справедливо отмечено в работах [8–11].

Основную сложность решения динамических задач представляет их нелинейность. Необходимо отметить, что если рассматривать продольный удар нескольких стержней различной длины и толщины, составляющих геометрически неоднородную стержневую систему, то решение задачи известными методами [2–11] может оказаться невозможным из-за хаотичности интерференционной картины продольных волн при их переходе через границы однородных участков.

Ранее были рассмотрены задачи поперечных колебаний однородного стержня при продольном ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса [12] и продольного удара ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну одного из участков [13]. Был реализован подход, заключавшийся в совместном применении метода начальных параметров [14] и волновой модели продольного удара [15–18]. В настоящей работе этот подход реализуется для расчета вибрационных характеристик геометрически неоднородной стержневой системы, имеющей начальную кривизну одного из участков, и испытывающую продольный удар об абсолютно жесткую преграду.

1. Постановка задачи. Рассматриваемая схема взаимодействия стержневых элементов довольно часто реализуется в различных машинах ударного действия, пневматических ударных механизмах, гидравлических виброударных системах, системах кузнечно-штамповочного производства и прочего. Помимо этого, такая схема возможна и в отраслях, напрямую не связанных с ударом. Это могут быть машины и механизмы самого различного назначения, где в силу тех или иных факторов возникает продольный удар стержневых элементов. Динамическое взаимодействие стержневых элементов конструкций имеет место и в строительной отрасли.

В предлагаемой работе рассматривается продольный удар ступенчатого стержня, имеющего длины однородных участков l_1 и l_2 и площади поперечных сечений A_1 , A_2 , о покоящийся однородный стержень длиной l_3 и площадью поперечных сечений A_3 , взаимодействующий с жесткой преградой. Схема удара изображена на рис. 1. Стержень длиной l_3 , взаимодействующий с жесткой преградой, имеет начальную кривизну

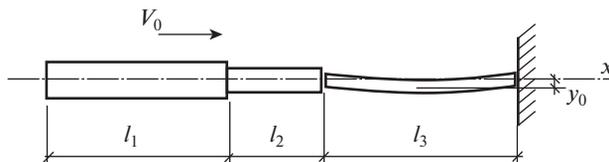


Рис. 1. Схема соударения стержней.

y_0 . Все стержневые элементы рассматриваемой системы предполагаются состоящими из одного материала.

Методом начальных параметров рассчитываются максимальное поперечное смещение и скорость сечений искривленного стержня, сжатого постоянной продольной силой [14]. Далее с применением волновой модели продольного удара [15–18] вычисляются продольные силы, возникающие в однородных участках стержневой системы, и рассчитывается время их действия. После прекращения действия продольных сил участки представляют из себя колебательную систему, выведенную из положения равновесия и совершающую затухающие поперечные колебания, имея вначале процесса приобретенную скорость и начальное смещение поперечных сечений [12, 13]. При известной амплитуде и частоте поперечных колебаний, а также массе колеблющегося элемента, рассчитывается среднее значение импульса, как важнейшей характеристики вибрационного процесса [19].

2. Применение метода начальных параметров. Для определения максимальной амплитуды поперечных колебаний или максимального прогиба, которые будут иметь место вначале колебательного процесса стержней после взаимодействия с жесткой преградой, можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня постоянного поперечного сечения, несущего равномерно распределенную массу [2, 14]:

$$\begin{aligned} (dy^4/d\xi^4) + v^2(d^2y/d\xi^2) - u^4y &= 0 \\ v^2 &= Nl^2/EI; \quad u^4 = (m\omega^2l^4/EI) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где y – прогиб оси стержня;

$\xi = x/l$ относительная координата;

N – продольная сила (положительная, если стержень сжат);

l – длина стержня или его однородного участка;

EI – жесткость стержня при изгибе;

m – интенсивность массы;

ω – частота свободных колебаний стержня, зависящая от условий его закрепления.

При решении поставленной задачи, уравнение (2.1) решается для каждого стержня или участка в отдельности. При продольном ударе сила N будет представлять из себя кусочно-разрывную функцию, поэтому для решения поставленной задачи вычисляется среднее значение продольной силы на рассматриваемом временном интервале.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.1)

$$\lambda^4 + v^2\lambda^2 - u^4 = 0 \quad (2.2)$$

и его корни будут [14]

$$\lambda_1^2 = -(v^2/2) - \sqrt{(v^4/4) + u^4}; \quad \lambda_2^2 = -(v^2/2) + \sqrt{(v^4/4) + u^4} \quad (2.3)$$

В зависимости от направления продольной силы (сжатие или растяжение) u^4 и v^2 принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому корни (2.3)

могут быть вещественными, чисто мнимыми или комплексными сопряженными числами.

Общий интеграл уравнения (2.1) при отсутствии кратных корней можно записать в виде суммы

$$y = \sum_{j=1,2} (A_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi) \quad (2.4)$$

где A_j, B_j – постоянные интегрирования; λ_j – корни характеристического уравнения (2.2).

Выражение (2.4) для прогибов стержня дает возможность составить формулы усилий и углов поворота сечений стержней, если воспользоваться дифференциальными зависимостями [14]

$$\varphi = (dy/dx), \quad M = -EI(d^2y/dx^2), \quad Q^N = -EI(d^3y/dx^3) \quad (2.5)$$

Здесь φ, M – амплитуды угла поворота и изгибающего момента в сечениях; Q^N – амплитуда поперечной силы, перпендикулярной к изогнутой оси стержня [14].

Для удобства обозначения примем

$$\tilde{\varphi} = l\varphi, \quad \tilde{M} = Ml^2/EI, \quad \tilde{Q}^N = Q^N l^3/EI \quad (2.6)$$

Тогда искомые зависимости запишутся в более простой форме

$$\tilde{\varphi} = dy/d\xi, \quad \tilde{M} = -d^2y/d\xi^2, \quad \tilde{Q}^N = -d^3y/d\xi^3 \quad (2.7)$$

или в виде сумм:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1,2} \lambda_j (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi) \quad (2.8)$$

$$\tilde{M} = - \sum_{j=1,2} \lambda_j^2 (A_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi) \quad (2.9)$$

$$\tilde{Q}^N = - \sum_{j=1,2} \lambda_j^3 (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi) \quad (2.10)$$

В дальнейшем поставленную задачу удобнее решать методом начальных параметров, как это предлагалось В.Г. Чудновским [14]. Для получения формул метода начальных параметров необходимо постоянные интегрирования A_j и B_j выразить через усилия и перемещения сечения стержня, совпадающего с началом координат. Эти усилия и перемещения и будут называться начальными параметрами: y_0, φ_0, M_0 и Q_0 . Данная методика была подробно изложена в работах [12, 13], и в соответствии с ней получено выражение для расчета величины максимального прогиба участка, имеющего начальную кривизну:

$$y_{\max} = \tilde{\varphi}_0 F_{\xi}^{\text{IV}} - \tilde{M}_0 F_{\xi}^{\text{III}} \quad (2.11)$$

Здесь \tilde{M}_0 и $\tilde{\varphi}_0$ – относительные момент и угол поворота ударного сечения, связанные с начальной кривизной стержня. Коэффициенты F_{ξ}^{III} и F_{ξ}^{IV} зависят от величины возникающей продольной ударной силы и рассчитываются в соответствии с методикой, изложенной в [12, 13].

3. Определение продольной силы. Для определения продольной силы N используется волновая модель продольного удара однородного стержня о жесткую преграду [15–18]. Решается волновое уравнение для трех однородных участков, составляющих стержневую систему:

$$\partial^2 u_1(x, t) / \partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_1(x, t) / \partial t^2) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (3.1)$$

$$\partial^2 u_2(x, t) / \partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_2(x, t) / \partial t^2) = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \quad (3.2)$$

$$\partial^2 u_3(x, t) / \partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_3(x, t) / \partial t^2) = 0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \quad (3.3)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ – продольное перемещение поперечных сечений первого, второго и третьего участков, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением [15]: при $t = t_0 = 0$

$$\begin{aligned} u_1(x, t_0) = u_2(x, t_0) = u_3(x, t_0) = 0 \\ \partial u_1(x, t_0) / \partial t = \partial u_2(x, t_0) / \partial t = V_0, \quad \partial u_3(x, t_0) / \partial t = 0 \\ \partial u_1(x, t_0) / \partial x = \partial u_2(x, t_0) / \partial x = \partial u_3(x, t_0) / \partial x = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Граничные условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения, взаимодействующего с жесткой преградой $x = l$ при взаимодействии искривленного стержня с жесткой преградой [15].

Для решения волновых уравнений (3.1)–(3.3) применяется метод Даламбера [15]:

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (3.5)$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \quad (3.6)$$

$$u_3(x, t) = f_3(at - x) + \varphi_3(at + x), \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l \quad (3.7)$$

$$\partial u / \partial x = -f'(at - x) + \varphi'(at + x) \quad \partial u / \partial t = a[f'(at - x) + \varphi'(at + x)] \quad (3.8)$$

где $f_1(at - x)$, $f_2(at - x)$, $f_3(at - x)$ – функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся соответственно по однородным участкам в направлении оси x ; $\varphi_1(at + x)$, $\varphi_2(at + x)$, $\varphi_3(at + x)$ – функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по этим же участкам в противоположном направлении; $f'_1(at - x)$, $f'_2(at - x)$, $f'_3(at - x)$, $\varphi'_1(at + x)$, $\varphi'_2(at + x)$, $\varphi'_3(at + x)$ – производные функций.

Целесообразно перейти к относительным величинам, определяющим прямые и обратные волны:

$$\begin{aligned} \bar{f}'(at - x) = af'(at - x) / V_0; \quad \bar{\varphi}'(at + x) = a\varphi'(at + x) / V_0 \\ \bar{\epsilon}(x, t) = -\bar{f}'(at - x) + \bar{\varphi}'(at + x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\bar{v}(x, t) = v(x, t) / V_0 = \bar{f}'(at - x) + \bar{\varphi}'(at + x) \quad (3.10)$$

В дальнейшем, для удобства определения продольной силы N в сечениях стержней, методом характеристик строится поле волновых состояний и диаграмма продольных сил [15–18]. Относительная продольная деформация $\bar{\epsilon}(x, t)$, позволяющая в дальнейшем рассчитать продольную сжимающую силу N , возникающую в стержневых элементах, связана с параметрами прямых и обратных волн зависимостью (3.9). При известной величине $\bar{\epsilon}(x, t)$ можно определить продольную силу:

$$N = EA\bar{\epsilon}(V_0/a) \quad (3.11)$$

где E – модуль упругости, зависящий от материала стержневой системы, A – площадь сечения соответствующего участка.

Далее, используя метод начальных параметров, можно рассчитать прогиб y и скорость $y' = dy/dt$ в момент прекращения действия продольной силы N . Далее сечения

рассматриваемого стержня, имея приобретенную поперечную скорость y' и двигаясь по инерции до некоторого максимального отклонения y_{\max} от положения равновесия, начинают совершать свободные поперечные колебания, что и будет являться источником вибрации.

4. Вычисление максимального прогиба и среднего импульса. Максимальное отклонение сечений стержневой системы от положения равновесия, которые и будут максимальными прогибами, легко определится по известной формуле [2]:

$$y_{\max}^* = \sqrt{y^2 + (y'^2/\omega^2)} \quad (4.1)$$

где y – максимальный прогиб, равный максимальной координате рассматриваемого сечения в момент прекращения действия продольной силы N , ω – циклическая частота свободных поперечных колебаний стержней при отсутствии продольной силы. Учитывая формы связей рассматриваемых стержневых элементов системы, устанавливаем для искривленного участка $\xi = 0.5$. Для первой формы поперечных колебаний ($n = 1$), как наиболее часто встречающейся на практике, а также с учетом зависимости (3.11) при условии, что продольная сила N не превышает критическую эйлеровскую нагрузку, имеем для каждого участка стержневой системы выражение циклической частоты поперечных колебаний:

$$\vartheta = \omega\sqrt{1 - (2V_0\bar{\epsilon}l^2/\pi^2ad^2)} \quad (4.2)$$

Здесь l и d – соответственно, длина и диаметр рассматриваемого участка, $\bar{\epsilon}$ – относительная продольная деформация. В нашем случае, когда рассматриваются поперечные колебания третьего участка, в эту формулу вместо l следует подставлять l_3 .

Анализируя формулу (4.2) можно заключить, что с ростом предупредной скорости частота поперечных колебаний ϑ сжатого участка по первой форме будет уменьшаться и станет равной нулю при достижении продольной силы величины P_{kr} по Эйлеру, что отмечено в [2].

В зависимости от вида связи каждого участка стержневой системы с соседними участками и с жесткой преградой, циклическую частоту свободных поперечных колебаний по первой форме $n = 1$ можно рассчитать по формуле [2]

$$\omega = (\wp^2/l^2)\sqrt{(EI/m)} \quad (4.3)$$

где произведение EI является изгибной жесткостью стержня. Параметр \wp выбирается с учетом сопряжения рассматриваемого искривленного участка с соседними участками и с жесткой преградой, от которого зависит частота колебаний ω [2].

Предполагая гармонический закон колебательного процесса, имеем

$$y = y_{\max} \sin(\vartheta t) \quad \text{и} \quad y' = y_{\max} \omega^* \cos(\vartheta t) \quad (4.4)$$

При малых значениях t максимальная скорость сечений будет

$$y' \approx y_{\max} \omega \quad (4.5)$$

Подставляя значения частоты свободных колебаний ω и скорости y' в формулу (4.1), получим искомый максимальный прогиб, равный максимальному перемещению поперечных сечений y_{\max}^* рассматриваемого участка. В этом случае имеет место учет сил инерции, действующих на стержневую систему при динамической нагрузке, что представляло в традиционных моделях расчета довольно сложную задачу.

Если ударное взаимодействие с жесткой преградой будет многократным в течение длительного интервала времени, то возникнет вибрационный процесс. Важной его характеристикой является среднее значение создаваемого импульса колеблющимся

участком стержневой системы при каждом поперечном колебании. Для расчета среднего импульса можно воспользоваться зависимостью [19]:

$$\Omega = y_{\max}^* m \omega / (\sin \omega t)_{sr} \quad (4.6)$$

5. Пример и краткий анализ результатов. Рассмотрим продольный удар ступенчатой стержневой системы о жесткую преграду. Длины однородных участков: $l_1 = l_3 = 1.6$ м, $l_2 = 0.8$ м, причем третий однородный участок имеет начальную кривизну $y_0 = 2$ мм. Диаметры участков: $d_1 = 0.12$ м, $d_2 = 0.07$ м, $d_3 = 0.04$ м. Предударная скорость ступенчатого стержня об искривленный однородный стержень (третий участок стержневой системы), взаимодействующий с жесткой преградой, $V_0 = 1$ м/с. Материал стержневой системы – сталь СТ-5. Циклическая частота собственных поперечных колебаний для третьего участка, имеющего начальную кривизну, $\omega = 495$ р/с, при φ равном 1.

С помощью метода характеристик строим поле волновых состояний при продольном ударе для рассматриваемой стержневой системы, (рис. 2) и диаграмму продольных сил (рис. 3).

Области состояний (рис. 2) $\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_{24}$, $\mathbf{II}_0 - \mathbf{II}_{18}$, $\mathbf{III}_0 - \mathbf{III}_{25}$ с соответствующими значениями $\vec{f}'(at - x_j)$, $\vec{\varphi}'(at + x_j)$, $\vec{e}(x, t)$, $\vec{v}(x, t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, относительную продольную деформацию и скорость поперечных сечений. Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат t , которые имеют точки наклонных линий для этого сечения.

При $t = 3.2l/a$ происходит отрыв однородного искривленного стержня от ступенчатого стержня и от жесткой преграды. На поле состояний (рис. 2) отрывы выделены жирными кружками.

Для вычисления среднего значения продольной силы, действующей на искривленном третьем участке стержневой системы, учитывая ее кусочно-разрывной характер, обратимся к диаграмме продольных сил (рис. 3). На интервале времени $1.2l/a \leq \tau \leq 3.2l/a$ продольная сила N достигает своих максимальных величин, которые оказывают основное влияние на колебательный процесс искривленного участка. Анализируя диаграмму продольных сил (рис. 3), устанавливаем среднее значение продольной силы $N = 131.44$ кН на рассматриваемом интервале времени, и переводя его в секунды при известных значениях общей длины l и скорости распространения продольной волны деформации a , получим значение $\tau = 9.0 \times 10^{-4}$ сек. При учете кривизны участка, начальными параметрами являются угол поворота $\varphi_0 = 2y_0/l_3$, и момент M_0 , равный произведению y_0 на значение возникающей продольной силы N .

Далее, вычисляем коэффициенты $v^2 = 10.24$ и $u^4 = 1002$ по формулам (2.1), и используя их, вычисляем корни характеристического уравнения (2.2) по формулам (2.3): $\lambda_1^2 = -37.19$, $\lambda_2^2 = 26.95$. Используя полученные числовые результаты, получим значения коэффициентов $F_{\xi}^{\text{III}} = -0.0598$ и $F_{\xi}^{\text{IV}} = -0.461$. После подстановки этих значений в выражение (2.11) для y_{\max} , получим $y_{\max} = 0.7$ мм. Такое значение прогиба возникает при постоянной продольной силе N . При кратковременном ее действии искривленный участок будет только выведен из положения равновесия и далее предоставлен самому себе. Для гармонического закона изменения координаты торцевого сечения стержня имеем (4.4):

$$y = 0.7 \sin \vartheta t \quad (4.7)$$

Циклическая частота колебаний кратковременно сжатого стержня, рассчитанная по (4.2), будет равна $\vartheta = 281.09$ р/с. С учетом длительности действия продольной силы N максимальное отклонение сечения, имеющего координату $x = 0.5l_3$ считая от

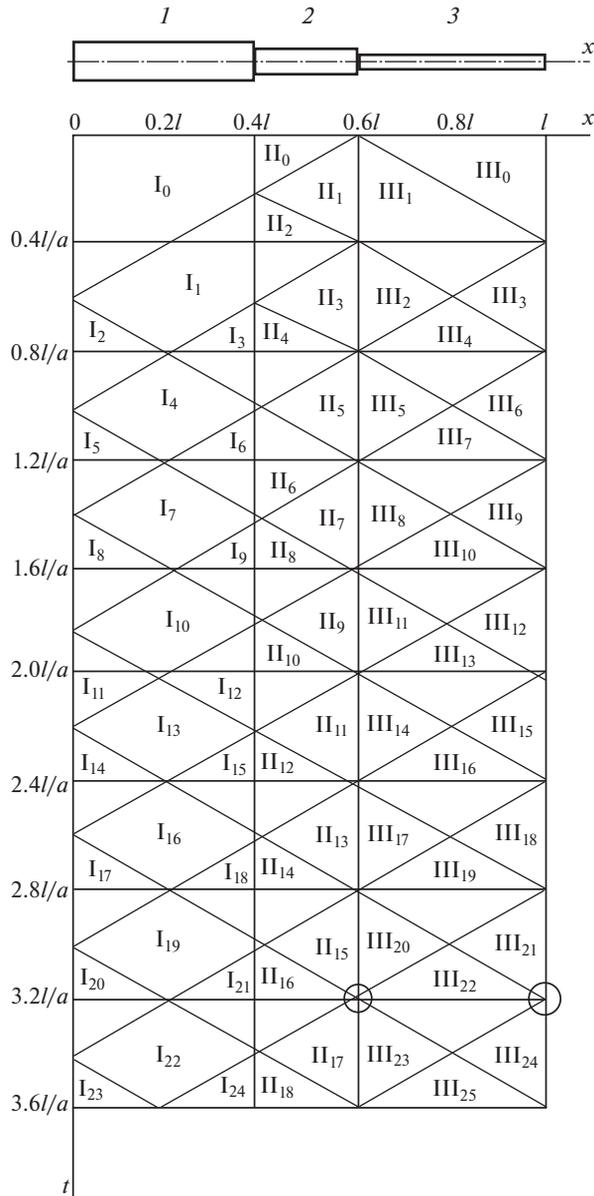


Рис. 2. Поле волновых состояний.

границы второго и третьего участков, в течение промежутка времени τ и, исходя из (4.7), будет равно 0.19 мм. В соответствии с (4.5) поперечная скорость рассматриваемого сечения будет равна 0.2 м/с. Тогда по формулам (4.1) и (4.6) получаем максимальное его отклонение от положения равновесия при свободных колебаниях $y_{\max}^* = 0.44$ мм и среднее значение импульса 12.8 кг · м/с.

В работе моделировалось среднее значение вибрационного импульса для стержневых систем с различным соотношением длин однородных участков при одинаковом

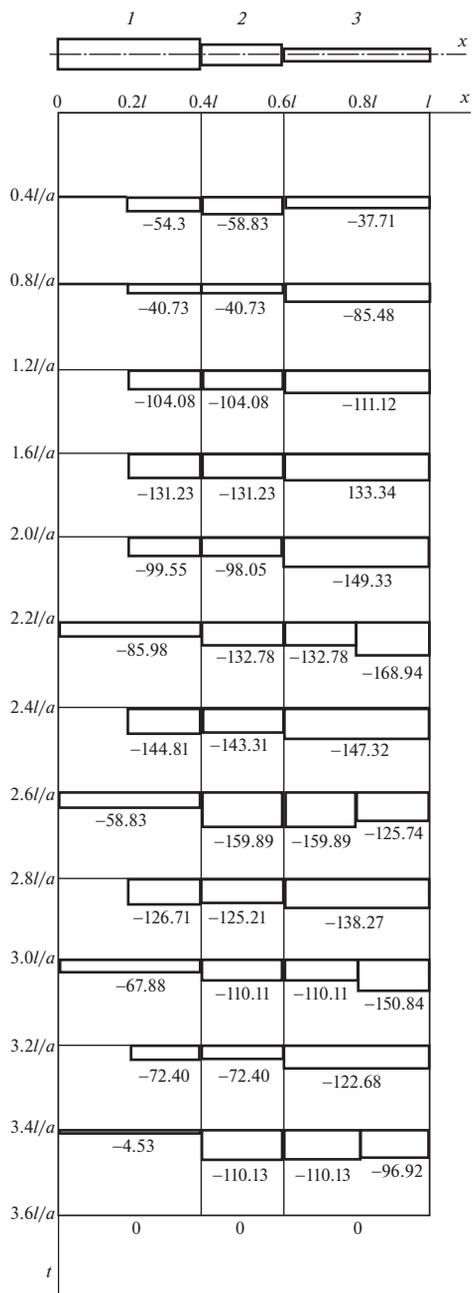


Рис. 3. Диаграмма продольных сил.

соотношении их толщины и одинаковой предупредной скорости V_0 . Как показали результаты моделирования, четкой закономерности между величиной импульса и каким-либо соотношением длин участков l_1 , l_2 , l_3 не прослеживается, что представляет немалый научный интерес.

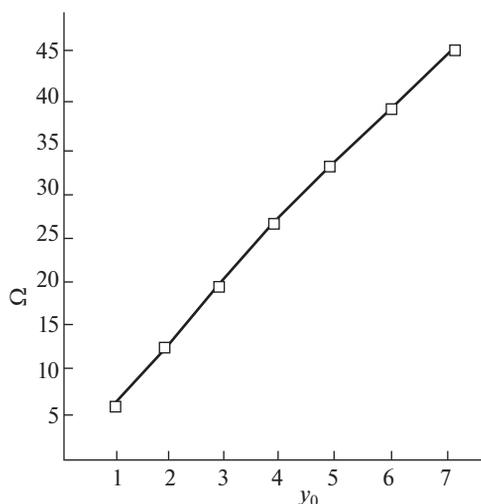


Рис. 4. Зависимость величины ударного импульса в кг м/с от начальной кривизны в мм.

Зависимость величины ударного импульса Ω в процессе удара от начальной кривизны стержня y_0 иллюстрирована на графике (рис. 4). Как видно из графика, зависимость $\Omega(y_0)$ близка к линейной, что подтверждается анализом выражения (2.11).

Заключение. В рассмотренной работе был представлен подход, позволяющий рассчитать амплитуду поперечных колебаний искривленного участка ступенчатой стержневой системы, испытывающей продольный удар с жесткой преградой. При многократном, периодическом характере продольного удара возникнет вибрационный процесс, являющийся известной проблемой машиностроения, надежности машин и механизмов в рабочем цикле, а также проблемой в строительной отрасли.

Рассчитан средний импульс при возникающих поперечных колебаниях искривленного участка, что дает возможность качественной и количественной оценки вибрационного воздействия возникающего колебательного процесса. С помощью предлагаемой методики можно рассчитать амплитуду колебаний и среднее значение импульса практически для любой произвольной кусочно-неоднородной стержневой системы, испытывающей динамическое воздействие, с учетом ее начального состояния.

Метод расчета величины амплитуды поперечных колебаний и среднего значения импульса искривленного участка рассматриваемой стержневой системы, описанный выше, позволил эффективно совместно применить метод начальных параметров и волновую модель продольного удара. Примененный подход позволяет учесть инерционные силы при расчете вибрационных характеристик, что представляло в традиционных методах довольно непростую задачу. Дальнейшее развитие данного подхода будет представлять интерес для решения целого ряда прикладных задач механики.

Как было отмечено выше, зависимость средней величины импульса от конфигурации стержневой системы не прослеживается. Это связано с хаотичностью интерференционной картины продольных волн деформаций при их распространении и преобразовании по длине каждого однородного участка и при переходе через границы участков. В результате, для каждой определенной конфигурации стержневой системы, образуются продольные волны разной величины и продолжительности, от которых зависит среднее значение моделируемого импульса.

Немалый научный интерес представляет изучение колебательного процесса и величины возникающего ударного импульса ступенчатой стержневой системы с учетом высших форм колебаний, что является целью дальнейшей исследовательской работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миндрин В.И., Пачурин Г.В., Ребрушкин М.Н. Виды и причины вибрации энергетических машин // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 5. С. 32–36.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
3. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 779–782.
4. Малый В.И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
5. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
6. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
7. Малышев Б.М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
8. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 131–141.
9. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 28–33.
10. Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О статической и динамической неустойчивости тонких стержней // Тр. 7 Всерос. конф. “Механика деформируемого твердого тела”. Ростов-на-Дону.: ЮФУ, 2013. С. 80–84.
11. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей Эйлеровой // Докл. АН. 2013. Т. 453. № 3. С. 282–285.
<https://doi.org/10.7868/S0869565213330128>
12. Битюрин А.А. Моделирование амплитуды поперечных колебаний однородного стержня при ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса // Вестн. ПНИПУ. Мех. 2018. № 2. С. 16–23.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.02>
13. Битюрин А.А. Моделирование максимального прогиба ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну при ударе о жесткую преграду // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 131–141.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919050064>
14. Чудновский В.Г. Методы расчета колебаний стержневых систем. Киев: АН УССР, 1952. 403 с.
15. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 164 с.
16. Битюрин А.А. Моделирование продольного удара однородных стержней при неустойчивых связях // Вестник УлГТУ. 2005. № 3. С. 23–25.
17. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Моделирование продольного удара однородного и неоднородного стержней о жесткую преграду при неустойчивых связях // Вестник УлГТУ. 2006. № 1. С. 20–23.
18. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Волновые процессы при продольном ударе стержня о ступенчатый стержень, соприкасающийся с жесткой преградой // ПММ. 2009. Т. 73. № 2. С. 226–235.
19. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1968. 536 с.

УДК 539.3: 534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОГО УДАРНОГО ФРОНТА В УПРУГОМ СЛОЕ

© 2022 г. А. В. Ильяшенко^{a,*}

^aМосковский Государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: avi_56@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2022 г.

После доработки 03.02.2022 г.

Принята к публикации 04.02.2022 г.

Исследуется задача о волновом фронте в анизотропном упругом слое. Показано, что в случае упругой изотропии однородная волна с плоским фронтом в слое возможна лишь в одном частном случае, при нулевом коэффициенте Пуассона. В других случаях для существования волны с плоским фронтом, волна должна быть неоднородной по отношению к трансверсальной координате. Аналитическое решение, обеспечивающее существование плоского ударного волнового фронта, получено впервые.

Ключевые слова: анизотропия, волновой фронт, акустический тензор, упругий слой

DOI: 10.31857/S0572329922050075

1. Введение. В [1–17] исследовались задачи распространения гармонических дисперсионных и бездисперсионных волн в линейно-упругих средах. Определенная часть исследований выполняется численными методами на основе конечных элементов, обладающих спектральными свойствами [18–21]. Для решения волновых задач применяются так же конечно-разностные методы [22–26], используются методы граничных интегральных уравнений [27–29], а так же различные варианты безсеточных (meshless) методов, наиболее распространенными из которых являются SPH и DEM методы [30–32]. Проблема определения скоростей распространения упругих волн становится особенно сложной, когда в среде, или конструкции возникает дисперсия и волновой профиль начинает размываться из-за различия в скоростях распространения частотных составляющих волнового профиля. По-видимому, впервые этот факт теоретически исследован в [33], в дальнейшем, исследования в этом направлении продолжены в [34–39]. Применительно к исследуемым ниже дисперсионным волнам в пластинах, большое число работ посвящено исследованию длинноволновых пределов волн Лэмба, Рэлея–Лэмба и Лява [40–43], являющихся, по существу, бездисперсионными в окрестности нулевой частоты (для симметричной фундаментальной моды) [44, 45].

Нужно отметить, что имеется значительное число экспериментальных исследований, посвященных исследованию распространению ударных волн в стержнях [46–48], известны исследования по образованию и распространению ударного фронта в одномерных волноводах из бимодульных материалов [49, 50].

В этой связи особый интерес представляет исследование условий, при которых могут распространяться “плоские” волны, поперечный профиль которых остается плоским в процессе движения. Ниже, в линейной постановке исследуются вопросы существования волн в упругом анизотропном слое с поляризацией волны, не зависящей от поперечной координаты. На основе потенциалов для поля смещений построены ана-

литические решения, позволяющие описать условия для дисперсионных волн, у которых, несмотря на дисперсию, волновой фронт остается плоским. Условия существования таких волн, как показывает обзор литературы, получены впервые.

2. Волновой фронт в безграничной среде. Задача о распространении плоского ударного волнового фронта, рассматривается в упругой инфинитезимальной постановке.

2.1. *Анизотропная среда.* Уравнения движения в линейно-упругой анизотропной среде могут быть представлены в виде

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}_x \mathbf{C} \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1)$$

где \mathbf{u} – поле смещений, \mathbf{x} – пространственная координата, t – время, ρ – плотность среды, \mathbf{C} – четырехвалентный симметричный тензор упругости

$$\forall i, j, m, n \quad C_{imjn} = C_{imnj} = C_{mijn} = C_{jnim} \quad (2.2)$$

Условиями (2.2) из рассмотрения исключаются микрополярные среды.

Рассматривая тензор \mathbf{C} , как оператор, в шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга, запишем условие его строгой эллиптичности

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} > 0 \quad (2.3)$$

Условие (2.3) выполняется для любых ненулевых разложимых тензоров вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} – произвольные ненулевые векторы.

Введем волновой потенциал для плоской бегущей волны

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \psi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) \quad (2.4)$$

В представлении (2.4) \mathbf{n} – волновой вектор, определяющий направление распространения волны, c – скорость, \mathbf{m} – нормализованная поляризация волны ($\|\mathbf{m}\| = 1$), определяющая движение на фронте волны, ψ – скалярный потенциал, с помощью которого задается профиль волны. Ниже предполагается, что потенциал ψ – достаточно гладкий [48]

$$\psi \in C^{k-1}(\mathbb{R}) \quad \& \quad \partial \psi \notin C^{k-1}(\mathbb{R}), \quad k \geq 1 \quad (2.5)$$

Заметим, что в отношении волновых фронтов применяется следующая классификация: в случае, когда $k = 1$, то есть потенциал ψ непрерывен, а его первая производная разрывная, волновой фронт считается сильным, – в этом случае при распространении волны напряжения являются разрывными на фронте волны, в то время как, перемещения являются непрерывными функциями пространственной координаты. В случае, когда $k \geq 2$, волновой фронт считается слабым, для слабого волнового фронта и напряжения и перемещения являются непрерывными функциями пространственной координаты. В случае, когда $k < 1$, волновой фронт считается сверхсильным, такой волновой фронт сопровождается разрывами в перемещениях. Помимо условия (2.5), обычно вводят следующее условие, предполагающее отсутствие смещений перед фронтом волны и ненулевую кривизну волнового потенциала за фронтом волны

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \partial^2 \psi \neq 0, & s < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким образом, предполагается, что перед фронтом материал находится в естественном недеформированном состоянии. Кроме того, движение плоской волны описывается условием

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения движения (2.1) совместно с представлением (2.4) и условием (2.6) дают алгебраическое уравнение Кристоффеля для определения векторной амплитуды \mathbf{m}

$$(\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.8)$$

В уравнении (2.8) \mathbf{I} – единичный тензор (единичная диагональная матрица), $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ – акустический тензор, определяемый волновым вектором \mathbf{n}

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) показывает, что для любого волнового вектора \mathbf{n} акустический тензор (2.9) симметричен и строго эллиптичен. Это обеспечивает существование трех действительных и положительных собственных чисел в Жордановой нормальной форме тензора (2.9)

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}'(\mathbf{n}) \quad (2.10)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ – ортогональный тензор, зависящий от вектора \mathbf{n} , а $\mathbf{D}(\mathbf{n})$ – диагональный тензор, состоящий из собственных чисел акустического тензора, верхний индекс в (2.10) обозначает транспонирование соответствующего тензора (матрицы). Возвращаясь к уравнению Кристоффеля, заметим, что поляризация (векторная амплитуда) является собственным вектором акустического тензора и корневым собственным вектором тензора в левой части уравнения (2.8). Симметрия акустического тензора обеспечивает существование трех взаимно ортогональных собственных векторов и, следовательно, поляризации, соответствующие собственным значениям акустического тензора взаимно ортогональны. Более того, даже в случае, когда акустический тензор не является простым, например в случае изотропной среды, он – полупростой, тем не менее он обладает тремя взаимно ортогональными собственными векторами.

Замечания 2.1. а) Уравнения (2.4)–(2.8) обеспечивают постоянство скоростей распространения, в случае сильных или слабых ударных волновых фронтов.

б) Уравнения движения (2.1) и представление для поля смещений (2.4) показывают, что какова бы ни была функция ψ , которая, вообще говоря, может не удовлетворять условиям, заданным уравнениями (2.5), (2.6), она определяет некоторое поле движений в безграничной среде. Однако, если тело имеет границы, то функция ψ , уже не является произвольной.

в) Имея ввиду Замечание 2.1.б, рассмотрим функцию ψ в виде гармонической по временной и пространственным переменным функции

$$\psi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) = \exp(ir(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)) \quad (2.11)$$

где r – волновое число. Функция (2.11) описывает плоскую гармоническую волну круговой частоты $\omega = rc$ и длины $l = 2\pi c/\omega$. Заметим, что в случае гармонической волны волновой фронт определяется в пространстве \mathbb{R}^4 , как

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct = \text{const} \quad (2.12)$$

г) Особый интерес представляет поле напряжений на фронте волны

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \quad (2.13)$$

Подставляя в выражение (2.13) поле перемещений, определяемое представлением (2.4), получим

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.14)$$

2.2. Упругая изотропия. Тензор упругости, рассматриваемый как оператор в пространстве симметричных тензоров, может быть записан в виде невырожденной симметрической матрицы размерности 6×6

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

В представлении (2.15) λ и μ – константы Ляме

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.16)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Тензор упругости (2.15) позволяет записать закон Гука в терминах соответствующих шестимерных векторов $\bar{\sigma}_6 = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ и $\bar{\varepsilon}_6 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{12})$.

Векторное уравнение Кристоффеля (2.8) для тензора упругости изотропной среды (2.15) принимает вид

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho c^2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\mu}{\rho c^2} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.17)$$

Уравнение Кристоффеля в форме (2.17) имеет собственные числа, определяющие скорости продольной волны $c_1 = c_L$ и двух поперечных волн $c_{2,3} = c_T$

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.18)$$

Замечания 2.2. а) Матрица в левой части уравнения Кристоффеля (2.17) не является простой, поскольку два ее собственных числа совпадают. Однако, эта матрица остается полупростой, поскольку в ее структуре отсутствуют Жордановы блоки.

б) Анализ уравнений (2.14), (2.17) показывает, что напряжения на фронте волны представимы в виде

$$\sigma_{\mathbf{n}} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{n} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) показывает, что напряжения на фронте продольной волны по направлению совпадают со смещениями. При этом, на плоскостях ортогональных фронту волны, т.е. на плоскостях с нормалью $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$ нормальные напряжения $\sigma_{\mathbf{p}}$, вообще говоря, тоже присутствуют

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \lambda \mathbf{p} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.20)$$

При $\lambda = 0$ на плоскостях $\Pi_{\mathbf{p}}$ напряжений нет.

в) В случае поперечной волны напряжения на фронте волны определяются выражением

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \mu \mathbf{m} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.21)$$

показывающим, что напряжения $\sigma_{\mathbf{n}}$ ортогональны волновому вектору \mathbf{n} и совпадают с направлением смещений. На ортогональных плоскостях $\Pi_{\mathbf{m}}$ с нормалью \mathbf{m} (напомним, что в рассматриваемом случае $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$) напряжения $\sigma_{\mathbf{m}}$ представимы в виде

$$\sigma_{\mathbf{m}} = \mu \mathbf{n} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.22)$$

г) В случае, если $\lambda = 0$ тензор упругости (2.15) диагонален и тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mu (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I}) \quad (2.23)$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ на плоскостях ортогональных фронту волны как нормальные, так и касательные компоненты поверхностных напряжений оказываются нулевыми.

3. Волновой фронт в слое. Рассмотрим пластину со свободными поверхностями толщины h . Пусть начало координат расположено на срединной поверхности пластины и волновой вектор \mathbf{n} находится в срединной плоскости, а \mathbf{v} – вектор единичной нормали к этой плоскости.

3.1. *Упругая анизотропия.* Условия на боковых поверхностях пластины, выражающие собой отсутствие соответствующих напряжений, представимы в виде

$$\sigma_{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} \Big|_{x'=\pm h/2} = 0 \quad (3.1)$$

где обозначено $x' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$.

Поле смещений для ударной волны, распространяющейся в направлении \mathbf{n} и имеющей плоский фронт, определяется выражением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \varphi(x') \psi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) \quad (3.2)$$

где \mathbf{u} – поле перемещений, $\varphi(x')$ – пока еще неизвестная функция, характеризующая вариацию амплитуды волны в трансверсальном направлении. Граничные условия (3.1) при учете (3.2) принимают вид

$$\sigma_{\mathbf{v}} \equiv \left[\begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial \varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) + \\ + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнения (2.1) и представление поля смещений (3.2) дают дифференциальное уравнение второго, позволяющее определить поляризацию волнового фронта \mathbf{m} , причем в это уравнение входят две, вообще говоря, неизвестных функции φ и ψ

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n})(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (3.5)$$

Замечания 3.1. а) В том случае, когда профиль волны ψ известен заранее (это часто встречается при моделировании ударных волн), дифференциальное уравнение (3.4) становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции φ .

б) Если, функция ψ гармонична, например, определяется выражением (2.11), уравнение (3.4) принимает вид

$$[\mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial^2 \varphi) + i r \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n})(\partial \varphi) - r^2 (\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.6)$$

3.2. *Изотропия, $\lambda \neq 0$.* В изотропном случае условия (3.3) равенства нулю напряжений на соответствующих границах слоя принимают вид

$$\sigma_{\mathbf{v}} \equiv \left[\begin{array}{l} ((\lambda + 2\mu)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}))(\partial \varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (\lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \otimes \mathbf{v})(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.7)$$

Аналогичным образом трансформируется уравнение (3.4):

$$\left[\begin{array}{l} ((\lambda + 2\mu)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}))(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (2(\lambda + \mu)\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}))(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + ((\lambda + 2\mu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.8)$$

В (3.8) обозначено

$$\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

Замечание 3.2. Для продольной волны с поляризацией, совпадающей с направлением распространения, уравнения (3.8) приобретают вид

$$\begin{cases} \mu(\partial^2\varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) - ((\lambda + 2\mu) - \rho c^2)(\varphi)(\partial^2\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) = 0 \\ (\lambda + \mu)(\partial\varphi)(\partial\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) показывают, что при произвольной функции ψ , такой что $\psi(s)$, $\partial\psi(s)$ и $\partial^2\psi(s)$ не равны тождественно нулю, их выполнение при $\varphi = \text{const}$ возможно лишь при условии

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.11)$$

Однако, надо заметить, что условия $\varphi = \text{const}$ $\lambda \neq 0$ противоречат условиям (3.7) на границе.

3.3. *Изотропия*, $\lambda = 0$. Условия (3.3) при $\lambda = 0$ принимают вид

$$\sigma_{\mathbf{v}} \equiv \mu \begin{bmatrix} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I})(\partial\varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) \\ + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.12)$$

Аналогичным образом трансформируется уравнение (3.8):

$$\mu \begin{bmatrix} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I})(\partial^2\varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) \\ + 2\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n})(\partial\varphi)(\partial\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) \\ + \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I} - \frac{\rho c^2}{\mu} \mathbf{I} \right) (\varphi)(\partial^2\psi(s)|_{s=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-ct}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.13)$$

Дифференциальные уравнения (3.13) для волны, описываемой уравнениями (2.11), трансформируются к виду

$$\begin{aligned} & [(\mu(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I})(\partial^2\varphi) + ir(2\mu\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}))(\partial\varphi) - \\ & - r^2(\mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I}) - \rho c^2\mathbf{I})(\varphi)] \cdot \mathbf{m} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Последнее выражение показывает, что условия (3.12) на границе и дифференциальные уравнения (3.13) удовлетворяются для волны с продольной поляризацией и плоским фронтом с постоянной по поперечному сечению функцией φ . Последнее, с учетом Замечания 3.2, дает

Предложение а) В случае изотропного слоя *плоская продольно-поляризованная* волна существует лишь при выполнении условия $\lambda = 0$.

б) В общем случае, когда $\lambda \neq 0$ продольно-поляризованная ударная или гармоническая волна существует, если (i) фронт волны неплоский, или (ii) поляризация волны непостоянна в поперечном сечении слоя: $\varphi(x') \neq \text{const}$.

4. Заключение. Построенные решения показывают, что плоский волновой фронт продольной волны в изотропном линейно-упругом слое со свободными граничными поверхностями, может распространяться

(1) либо при условии нулевого коэффициента Пуассона, что эквивалентно нулевой константе Ламе $\lambda = 0$, и тогда амплитуда продольной волны необходимо постоянна в поперечном сечении;

(2) либо при ненулевом коэффициенте Пуассона и, соответственно, ненулевой константе Ламе λ , но переменной в поперечном сечении амплитуде.

Таким образом, изначально плоский ударный фронт продольной волны в изотропном упругом слое в случае произвольного и не равного нулю коэффициента Пуассона, необходимо трансформируется в волновой профиль с переменной в трансверсальном направлении амплитудой. Представляется интересным обобщение полученных результатов на ударные волны, распространяющиеся в стратифицированных и функционально-градиентных пластинах.

В заключение необходимо отметить недавние исследования по распространению дисперсионных гармонических волн в стержнях [51–54], где вопросы существования плоских ударных фронтов также играют важную роль.

Благодарность. Автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований (Грант 20-08-00419) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.
2. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Phys. Acoust. 1970. V. 6. P. 109–166.
3. *Ventura P., Hodre J.M., Desbois J., Solal M.* Combined FEM and Green's function analysis of periodic SAW structure, application to the calculation of reflection and scattering parameters // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. 2001. V. 48. P. 1259–1274.
4. *Synge J.L.* Elastic waves in anisotropic media // J. Math. Phys. 1956. V. 35. P. 323–334.
5. *Stoneley R.* The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal // Proc. Roy. Soc. 1955. A232. P. 447–458.
6. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. P. 77–103.
7. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 4319–4325.
8. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 45. P. 845–851.
9. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Phys. Acoust. 1970. V. 6. P. 109–166.
10. *Bauerschmidt P., Lerch R., Machui J., Ruile W., Visintini G.* Reflection and transmission coefficients of SAW in a periodic grating computed by finite element analysis // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1990. P. 421–423.
<https://doi.org/10.1109/ULTSYM.1990.171400>
11. *Davies R.M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // Phil. Trans. R. Soc. 1948. V. A240. P. 375–457.
12. *Mindlin R.D., Hermann G.* A one-dimensional theory of compressive waves in an elastic rod // Proc. First U.S. National Congress Appl. Mech. Chicago, 1955.
13. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. № 1. P. 17–34.
14. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
15. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. New York: Dover Publ., 1975. 649 p.
16. *Ting T.C.T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. New York: Oxford Univ. Press, 1996.
17. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
<https://doi.org/10.3103/S002565441106015X>
18. *Fortunato D., Hale N., Townsend A.* The ultraspherical spectral element method // J. Comput. Phys. 2021. V. 436. P. 110087.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110087>
19. *Orszag S.A.* Spectral methods for problems in complex geometries // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. P. 70–92.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90005-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90005-4)

20. *Martinsson P.* A direct solver for variable coefficient elliptic PDEs discretized via a composite spectral collocation method // *J. Comput. Phys.* 2013. V. 242 P. 460–479.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.02.019>
21. *Babb T., Gillman A., Hao S., Martinsson P.-G.* An accelerated Poisson solver based on multidomain spectral discretization // *BIT Numer. Math.* 2018. V. 58. P. 851–879.
<https://doi.org/10.1007/s10543-018-0714-0>
22. *Chua C., Stoffab P.L.* Nonuniform grid implicit spatial finite difference method for acoustic wave modeling in tilted transversely isotropic media // *J. Appl. Geophys.* 2012. V. 76. P. 44–49.
23. *Falk J., Tessmer E., Gajewski D.* Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps // *Geophys. Prospecting.* 1998. V. 46. P. 603–616.
24. *Moczko P., Kristek J., Galis M., Pazak P.* On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to p -wave to s -wave speed ratio // *Geophys. J. Int.* 2010. V. 182. P. 493–510.
25. *Antunes A.J.M., Leal-Toledo R.C.P., Filho O.T.S., Toledo, Elson M.* Finite difference method for solving acoustic wave equation using locally adjustable time-steps // *Procedia Computer Sci.* 2014. V. 29. P. 627–636.
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.056>
26. *Oliveira S.A.M.* A fourth-order finite-difference method for the acoustic wave equation on irregular grids // *Geophys.* 2003. V. 68 (2). P. 672–676.
27. *Wu T.W.* *Boundary Element Acoustics: Fundamentals and Computer Codes.* Advances in Boundary Elements. Southampton, Boston: Witpress, 2000.
28. *Silva J.J.R.* *Acoustic and Elastic Wave Scattering using Boundary Elements.* Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
29. *Wang X., Chen H., Zhang J.* An efficient boundary integral equation method for multi-frequency acoustics analysis // *Eng. Anal. Boundary Elem.* 2015. V. 61. P. 282–286.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.08.006>
30. *Zhang Y.O., Zhang T., Ouyang H., Li T.Y.* SPH simulation of acoustic waves: Effects of frequency, sound pressure, and particle spacing // *Math. Problems Eng.* 2015. V. 2015. P. 348314. P. 1–7.
<https://doi.org/10.1155/2015/348314>
31. *Wang Sh., Zhang Y.O., Wu J.P.* Lagrangian meshfree finite difference particle method with variable smoothing length for solving wave equations // *Adv. Mech. Eng.* 2018. V. 10 (7). P. 1–12.
<https://doi.org/10.1177/1687814018789248>
32. *Cleckler J., Elghobashi S., Liu F.* On the motion of inertial particles by sound waves // *Phys. Fluids.* 2012. V. 24 (3). P. 033301.
<https://doi.org/10.1063/1.3696243>
33. *Gogoladze V.G.* Dispersion of Rayleigh waves in a layer // *Publ. Inst. Seism. Acad. Sci. U.R.S.S.* 1947. V. 119. P. 27–38.
34. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21 (2). P. 89–93.
35. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // *Quart. Appl. Math.* 2006. V. 64 (1). P. 153–165.
<https://doi.org/10.1090/s0033-569x-06-00992-1>
36. *Evans R.B.* The decoupling of seismic waves // *Wave Motion.* 1986. V. 8 (4). P. 321–328.
37. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of Lamb waves in stratified media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. P. 175.
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1222-z>
38. *Ilyashenko A. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. V. 69. P. 17.
<https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
39. *Goldstein R.V.* Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29 (3). P. 608–619.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90066-3)
40. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
41. *Argatov I., Iantchenko A.* Rayleigh surface waves in functionally graded materials – long-wave limit // 2019. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* V. 72 (2) P. 197–211.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/hbz002>

42. *Kaplunov J., Prikazchikov D.* Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // *Adv. Appl. Mech.* 2017. V. 50. P. 1–106.
<https://doi.org/10.1016/bs.aams.2017.01.001>
43. *Craster R.V., Joseph L.M., Kaplunov J.* Long-wave asymptotic theories: The connection between functionally graded waveguides and periodic media // *Wave Motion* 2014. V. 51 (4). P. 581–588.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.09.007>
44. *Wootton P.T., Kaplunov J., Prikazchikov D.* A second order asymptotic model for Rayleigh waves on a linearly elastic half plane // *IMA J. Appl. Math.* 2020. V. 85 (1). P. 113–131.
<https://doi.org/10.1093/imamat/hxz037>
45. *Djeran-Maigre I. et al.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus. Mec.* 2008. V. 336 (1–2). P. 102–107.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2007.11.001>
46. *Karman T., Duwez P.* The propagation of plastic deformation in solids // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. P. 987–994.
<https://doi.org/10.1063/1.1699544>
47. *Knowles J.* Impact-induced tensile waves in a rubberlike material // *J. Appl. Math.* 2002. V. 62. P. 1153–1175. /
<https://doi.org/10.1137/S0036139901388234>
48. *Molinari A., Ravichandran G.* Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals // *J. Appl. Phys.* 2004. V. 95. P. 1718–1732.
<https://doi.org/10.1063/1.1640452>
49. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2021.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
50. *Hafskjold B., Bedeaux D., Kjelstrup S., Wilhelmsen Ø.* Theory and simulation of shock waves: Entropy production and energy conversion // *Phys. Rev. Ser. E.* 2021. V. 104 (1).
<https://doi.org/10.1103/physreve.104.014131>
51. *Ilyashenko A.V. et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
52. *Ilyashenko A.V.* Pochhammer–Cree Longitudinal Waves: Anomalous Polarization // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. P. 598–606.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419040149>
53. *Мокряков В.В.* Максимумы напряжений в продольных волнах Похгаммера–Кри // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 5. С. 86–103.
<https://doi.org/10.1134/S057232991905012X>
54. *Гаджибеков Т.А., Ильяшенко А.В.* Теоретические аспекты применения волн Похгаммера–Кри к задачам определения динамического коэффициента Пуассона // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 113–126.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050044>

УДК 517.97, 539.376

ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ МНОГОТОЧЕЧНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2022 г. К. С. Бормотин^{a,*}, А. А. Кривенко^{a,**}

^a Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: cvmi@knastu.ru

**e-mail: baikal-190@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

После доработки 22.05.2022 г.

Принята к публикации 23.05.2022 г.

В авиастроении в технологических процессах изготовления тонкостенных деталей включаются этапы формообразования в условиях ползучести. Такие режимы позволяют управлять повреждаемостью за счет выбора кинематической схемы деформирования. Формулируется задача оптимального управления, которая решается методом динамического программирования. Реализация численного метода оптимизации выполнена в конечно-элементном программном комплексе Marc. Для анализа схем деформирования рассматривается моделирование процесса формования панелей в реконфигурируемом стержневом пуансоне. Высокопрочные сплавы изделий могут обладать свойствами анизотропии и разносопротивляемости растяжению и сжатию. Данные свойства, по результатам расчетных данных, соответствуют разным кинематическим схемам деформирования.

Ключевые слова: ползучесть, анизотропия, разносопротивляемость, поврежденность, формообразование, метод конечных элементов, задача оптимального управления, метод динамического программирования

DOI: 10.31857/S057232992205004X

1. Введение. В современном отечественном и зарубежном авиастроении в технологиях формообразования крупногабаритных изделий используют медленные высокотемпературные режимы деформирования [1–4]. Такие режимы, обеспечивающие условия ползучести, позволяют уменьшить повреждаемость и сберечь ресурс изделий на стадии изготовления.

Современная организация производства требует автоматизации и, соответственно, использования оборудования с числовым программным управлением. В качестве такого оборудования в последнее время рассматривается реконфигурируемый стержневой пуансон (матрица) [5–7], исследуются особенности конструкции стержневых систем и предлагаются основные подходы к определению нагрузок, действующих на каждый стержневой элемент. Формующая поверхность, как пуансона, так и матрицы, образованная двумя системами соосно расположенных стержней, каждый из которых выставляется в индивидуальную позицию посредством числового программного управления, позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации.

В связи с этим, актуальным направлением исследований является разработка методов определения рациональных температурно-скоростных кинематических режимов

формования заготовок для максимального сбережения ресурса материала конструкции. Известно аналитическое решение для идеальных пластин и оболочек, которое получено с учетом ряда ограничений: так в случае малых прогибов оптимальное деформирование проходит по линейному закону, а в случае больших прогибов оптимальное деформирование проводится по нелинейному закону [8–10].

В авиастроении в качестве деталей все больше применяются крупногабаритные монолитные, монолитно-сборные и оребренные панели из облегченных высокопрочных конструкционных сплавов. Большинство деталей типа обшивок и элементов шпангоутов имеют сложную геометрию, в частности переменную кривизну и переменную толщину. Используемые сплавы при изготовлении изделий обладают такими свойствами как анизотропия, разное сопротивление растяжению и сжатию [11–16]. Данные свойства могут появиться в результате предварительной обработки заготовок. В этом случае для прогнозирования нагрузки, формирующей изменения геометрии заготовок при деформировании, и определения оптимальных условий процесса актуальны численные методы. Определение эффектов различных параметров, участвующих в процессах формообразования металлических изделий стало возможным благодаря использованию метода конечных элементов для анализа процессов обработки металлов давлением. Например, для определения оптимального пути формирования изгиба при изготовлении интегральных панелей самолета предлагается метод, основанный на совместном применении метода конечных элементов, искусственной нейронной сети и генетического алгоритма [17]. В качестве функции цели рассматриваются отклонения точек поверхности от заданной геометрии.

В данной работе, в качестве критерия выбора оптимальной траектории деформирования задается поврежденность материала. Допустимое пространство решений задачи оптимального управления включает немонотонные траектории деформирования, учитывающие частичную разгрузку. Рассматривается зависимость оптимальной адаптации оснастки в процессе деформирования панелей от свойств материала в ползучести.

2. Формулировка задач оптимального управления при формообразовании тонкостенных конструкций. Задача оптимального формообразования в режиме ползучести изделий из листов и панелей с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона представляет собой поиск оптимального закона движения стержней.

Пусть $V \subset R^3$ – область деформируемого тела с границей S . Контактная поверхность жестких тел с деформируемым обозначается через S_c ($S_c \subset S$). Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ – векторы перемещений деформируемого тела и векторы перемещений контактных тел.

Математическая формулировка задачи формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая Лагранжева формулировка [18]) представляется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J_1(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \dot{\mathbf{u}}) = \dot{W}_c + a(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \dot{\mathbf{u}}) \quad \text{при} \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}} |_{S_c} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \quad (2.1)$$

где $\dot{\bar{\mathbf{u}}}^*$ – заданные скорости перемещений контактных тел в момент времени t ; $t \in [0, T]$ – время деформирования тела под нагрузкой; \dot{W}_c – соотношения, полученные наложением контактных условий на движения тел методом множителей Лагранжа или методом штрафных функций; потенциальная форма определяется в виде

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\delta \mathbf{u}}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta \dot{u}_{i,j} dV, \quad \text{где} \quad E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl}^c + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}, \quad c_{ijpl} - \text{компо-}$$

ненты тензора упругих констант, $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j})$ – компоненты

скоростей деформаций, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $\dot{\varepsilon}_{pl}^c$ – компоненты скоростей деформаций ползучести, определяемые по закону установившейся ползучести; точкой сверху обозначены скорости перемещений \dot{u}_i , \dot{u}_i^* , $i, j, p, l = 1, 2, 3$.

Компоненты скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа определяют соотношениями

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijpl}(\dot{\varepsilon}_{pl} - \dot{\varepsilon}_{pl}^c)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (2.1), и функционал оптимизации:

$$A = \int_0^T \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV dt \rightarrow \inf \quad (2.2)$$

Данный функционал представляет удельную работу рассеяния и характеризует параметр поврежденности.

В качестве функций управления принимаются перемещения $\bar{\mathbf{u}}(t) = f(t)\bar{\mathbf{u}}^*$ точек контактных тел на границе S_c , а функции состояния – перемещения, деформации, напряжения в теле V . Таким образом, определив некоторое решение $\bar{\mathbf{u}}^*$ обратной задачи [19], решается задача поиска оптимальной функции $f(t)$.

В данной работе предлагается анализ следующих моделей определяющих соотношений в ползучести:

1. Неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и растяжении [20]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \gamma s_{ij}, \quad \gamma(\sigma_e, \theta) \equiv \frac{1}{2}[\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1) \sin 3\theta] \quad (2.3)$$

где

$$\gamma_1(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} B^+ \sigma_e^{n_+ - 1}, \quad \gamma_2(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} B^- \sigma_e^{n_- - 1} \quad (2.4)$$

σ_e – эффективное напряжение, которое определяется через компоненты девиатора тензора напряжений: $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$, θ – угол напряженного состояния.

Для материала АК4-1 при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ стадия установившейся ползучести при сжатии и при растяжении в течение 250 ч, описывается законом Нортонна с разными значениями коэффициентов [12, 13]:

$$\text{– растяжение: } B^+ = 0.5 \times 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_+} (\text{час})^{-1}, \quad n_+ = 8$$

$$\text{– сжатие: } B^- = 0.25 \times 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_-} (\text{час})^{-1}, \quad n_- = 8$$

Для данного материала характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии: модуль Юнга $E = 7000 \text{ кГ/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$.

2. Неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом параметра поврежденности имеет вид (2.3) с функциями:

$$\gamma_1(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} \frac{B^+ \sigma_e^{n_+ - 1}}{A_*^{m_+} (1 - \omega)^{m_+}}, \quad \gamma_2(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} \frac{B^- \sigma_e^{n_- - 1}}{A_*^{m_-} (1 - \omega)^{m_-}} \quad (2.5)$$

Параметр поврежденности ω определяется из уравнения:

$$\dot{\omega}(\sigma_e, \theta) \equiv \frac{1}{2}[\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + (\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1) \sin 3\theta] \quad (2.6)$$

$$\text{где } \dot{\omega}_1 = \frac{B^+ \sigma_e^{n_+ + 1}}{A_*^{m_+ + 1} (1 - \omega)^{m_+}}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{B^- \sigma_e^{n_- + 1}}{A_*^{m_- + 1} (1 - \omega)^{m_-}}.$$

Параметры данного закона ползучести для материала АК4-1 при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ [12, 13]:

$$\text{растяжение: } B^+ = 0.45 \times 10^{-14} \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^{m_+ - n_+} \text{ (час)}^{-1}, \quad n_+ = 8, \quad m_+ = 7;$$

$$\text{сжатие: } B^- = 0.29 \times 10^{-14} \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^{m_- - n_-} \text{ (час)}^{-1}, \quad n_- = 8, \quad m_- = 2.$$

Параметр поврежденности в случае одноосного деформирования есть отношение текущей работы рассеяния A к ее величине на момент разрушения A_* , ($A_* = 1 \text{ кГ/мм}^2$) т.е. приведенная работа $\omega = \frac{A}{A_*}$ [12, 13].

3. Неассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию имеет вид (2.3) с учетом следующих функций

$$\gamma_1(\sigma_{ij}) \equiv T_1^{n_+}, \quad \gamma_2(\sigma_{ij}) \equiv T_2^{n_-} \quad (2.7)$$

где квадратичные формы компонент тензора напряжений [15]:

$$T_1 = (A_{11}^+(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^+(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^+(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^+\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^+\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$T_2 = (A_{11}^-(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^-(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^-(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^-\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^-\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$A_{11}^+ = \frac{1}{2} \left((B_{22}^+)^{\frac{2}{n_+}} + (B_{33}^+)^{\frac{2}{n_+}} - (B_{11}^+)^{\frac{2}{n_+}} \right), \quad 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{\frac{2}{n_+}} - A_{11}^+ - A_{22}^+$$

$$A_{11}^- = \frac{1}{2} \left((B_{22}^-)^{\frac{2}{n_-}} + (B_{33}^-)^{\frac{2}{n_-}} - (B_{11}^-)^{\frac{2}{n_-}} \right), \quad 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{\frac{2}{n_-}} - A_{11}^- - A_{22}^-$$

Остальные компоненты A_{ij}^+ , A_{ij}^- ($i, j = 1, 2, 3$) получаются циклической перестановкой индексов.

На основе экспериментов на растяжение и сжатие сплошных цилиндрических образцов, а также на кручение тонкостенных трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите толщиной 42 мм из сплава АК4-1 и в продольном направлении, при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ в течение 400 ч найдены параметры закона ползучести для трансверсально-изотропного материала [11, 13]:

$$n_+ = n_- = n = 12, \quad B_{23}^+ = B_{31}^+ = 2.976 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{11}^+ = B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 8.935 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{23}^- = B_{31}^- = 0.811 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{11}^- = B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 1.805 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

или

$$\begin{aligned} B_{23}^+ &= B_{31}^+ = 8.48 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{11}^+ &= B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 2.545 \times 10^{-19} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{23}^- &= B_{31}^- = 2.31 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{11}^- &= B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 5.14 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \end{aligned}$$

4. Ассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред раз-
носопротивляющихся растяжению и сжатию, в общем виде имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.10)$$

где Φ – скалярная потенциальная тензорная функция напряжений [13, 14]:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_e, \theta) &\equiv \frac{1}{2} [\phi_1 + \phi_2 + (\phi_2 - \phi_1) \sin 3\theta] \\ \phi_1(T) &= T_1^{n_+ + 1} / n_+ + 1, \quad \phi_2(T) = T_2^{n_- + 1} / n_- + 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этом случае в квадратичных формах (2.8), (2.9) коэффициенты находятся по фор-
мулам:

$$\begin{aligned} A_{11}^+ &= \frac{1}{2} \left((B_{22}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} + (B_{33}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} - (B_{11}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} \right), \quad 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} - A_{11}^+ - A_{22}^+ \\ A_{11}^- &= \frac{1}{2} \left((B_{22}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} + (B_{33}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} - (B_{11}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} \right), \quad 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} - A_{11}^- - A_{22}^- \end{aligned}$$

Остальные компоненты A_{ij}^+ , A_{ij}^- ($i, j = 1, 2, 3$) получаются циклической перестанов-
кой индексов.

Реализация моделей определяющих соотношений ползучести в системе Marc вы-
полняется с помощью написания пользовательских функций на языке программиро-
вания fortran.

**3. Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей в
режиме ползучести.** Применяя основные процедуры метода конечных элементов к ва-
риационному уравнению функционала (2.1) строятся дискретные уравнения задачи
деформирования [18, 21]

$${}^{t+dt} \mathbf{K}^{(r-1)} \Delta \mathbf{U}^{(r)} = {}^{t+dt} \mathbf{R}^{(r-1)} \quad (3.1)$$

где ${}^{t+dt} \mathbf{K}^{(r-1)}$ – симметричная матрица касательной жесткости (в матрицах включены
дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений), ${}^{t+dt} \mathbf{R}^{(r-1)}$ –
вектор внутренних и внешних сил. Верхние индексы величины $t + dt$ указывают зна-
чение времени нагружения, для которого она вычисляется. Верхние индексы величи-
ны $(r - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона–
Рафсона.

Наряду с дискретизацией по времени t , вызванной решением нелинейных задач ме-
ханики методом конечных элементов, для приближенного решения задачи оптималь-
ного управления вводится дополнительная сетка: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Учитывая
дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (3.1) при
условии $dt \leq t_{k+1} - t_k$ минимизируемый функционал (2.2) заменяется формулой

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{t=t_k}^{t_{k+1}} \int_V \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c dV \rightarrow \inf \quad (3.2)$$

В данном случае, дискретная задача оптимального управления будет включать дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (3.1) и минимизируемый функционал (3.2). В такой постановке строится функция Беллмана и задача решается методом динамического программирования [22–25].

Для решения аддитивных задач применяется алгоритм, основное содержание которого состоит в формулировке правил последовательного сжатия множества конкурентоспособных вариантов [22, 23]. Алгоритм представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится исключение некоторого множества вариантов, о котором в процессе работы алгоритма становится известным, что оно не содержит оптимального варианта.

Для разработки алгоритма оптимизации при деформировании заготовки в реконфигурируемом пуансоне в качестве управляющих параметров вводится вектор-функция перемещений узловых точек контактных тел на границе S_c (стержней) в виде $\bar{U}_z(t) = f(t)\bar{U}_z^*$, где \bar{U}_z^* – заданные конечные перемещения. В этом случае строится сетка в пространстве (t, z) . Шаг по аргументу t задан и равен Δt , по переменной z – Δz . Узлы сетки обозначим через $P_m(n)$. Индекс n означает номер гиперплоскости Σ_n при заданном значении t , а индекс m означает номер узла в гиперплоскости Σ_n . Каждые два узла, лежащие в гиперплоскостях $P_q(n)$ и $P_m(n+1)$, соединены отрезками, длины этих отрезков обозначаются $l_{qm}(n) = f_n(P_q(n), P_m(n+1))$ [23].

В результате таких операций строится граф с вершинами $P_m(n)$, и вместо исходной задачи будет рассматриваться задача поиска на этом графе кратчайшего пути, соединяющего гиперплоскости Σ_0 и Σ_N . Обозначая через $l_m(n)$ ломанную кратчайшей длины, соединяющую узел $P_m(n)$ с гиперплоскостью Σ_0 , можно прийти к рекуррентному соотношению [23]:

$$l_s(n+1) = \min_m \{l_m(n) + l_{ms}(n)\}$$

Минимум берется по тем номерам m , для которых узлы лежат в допустимой области G_n и принадлежат гиперплоскости Σ_n .

Расчет функций $\bar{U}_z(t) = f(t)\bar{U}_z^*$ выполняется методом динамического программирования, реализованным в системе Магс, по заданной сетке. Размеры сетки или шаги метода динамического программирования вычисляются по формуле:

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = 0, \quad \Delta z = \frac{\bar{U}_z^*}{M}$$

На каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$ при решении задачи уравнениями (3.1) определяются граничные условия на перемещения контактных тел ΔU_z по заданному алгоритму [25].

В случае деформирования анизотропных материалов законы движения стержней могут быть различны. Задача оптимизации приобретает d -ю размерность, где d – количество независимо движущихся стержней. Увеличение размерности задачи оптимизации приводит к поиску набора функций, обеспечивающих экстремальное значение критерия, т.е. рассматриваются несколько графов с вершинами $P_{m_1}^1(n_1), \dots, P_{m_d}^d(n_d)$, соответствующих нескольким функциям $\bar{U}_z^1(t) = f^1(t)\bar{U}_z^{1*}, \dots, \bar{U}_z^d(t) = f^d(t)\bar{U}_z^{d*}$ для разных контактных тел. Решение задачи оптимизации находится определением на этих графах кратчайших путей с помощью рекуррентного соотношения, причем для каж-

Таблица 1. Результаты расчета деформаций ползучести при деформировании кубического образца по разным моделям определяющих соотношений

Модель	Деформации и параметр поврежденности	Результаты при растяжении: $\sigma_x = 15 \text{ кГ/мм}^2$	Результаты при сжатии: $\sigma_x = -15 \text{ кГ/мм}^2$
Модель разнсопротивляемости в ползучести (2.3), (2.4)	ϵ_x^c	0.0032	-0.0017
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.0483	0.0257
Модель разнсопротивляемости в ползучести с учетом поврежденности (2.3), (2.5), (2.6)	ϵ_x^c	0.0035	-0.002
	ω	0.0519	0.0307
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.0519	0.0307
Ассоциированный и неассоциированный закон ползучести для анизотропных разнсопротивляющихся сред (2.3), (2.7)–(2.11)	ϵ_x^c	0.0079	-0.0018
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.1189	0.0271

дого узла $P_{m_i-1}^{i-1}(n)$ на гиперплоскости Σ_n^{i-1} перебираются все узлы $P_{m_i}^i(n)$ на гиперплоскости Σ_n^i .

В частности, при расчете 2-х оптимальных траекторий (размерность задачи оптимизации $d = 2$) методом динамического программирования для каждого варианта 1-й траектории анализируются все варианты 2-й траектории.

4. Численные результаты моделирования и оптимизации. Тестирование реализованных в программе MSC.Marc моделей определяющих соотношений (2.3)–(2.11) проводилось при решении задач растяжения и сжатия кубического образца в течение $T = 260$ ч постоянными нагрузками (табл. 1). Размеры образца: $1 \times 1 \times 1$ мм.

Согласно численным данным решения задач параметры поврежденности, учитываемые в модели определяющих соотношений (2.6) и вычисленные по результатам (3.2), совпадают. Кроме того, для приближенной оценки параметра поврежденности достаточно использовать модель определяющих соотношений (2.3), (2.4). Завышенные результаты, полученные при ползучести для анизотропных разнсопротивляющихся сред, можно объяснить аппроксимацией экспериментальных данных, полученных при большем времени деформирования.

Для оценки особенностей деформирования материала с разнсопротивляемостью при растяжении и сжатии рассматривается задача кручения квадратной пластинки [20]. Квадратная пластина имеет размеры $200 \text{ мм} \times 200 \text{ мм}$ и толщину 20 мм . Начало прямоугольной системы координат находится в центре пластины, а ось z направлена перпендикулярно пластине (пространственные координаты пластины: $100 \text{ мм} \leq x \leq 100 \text{ мм}$, $100 \text{ мм} \leq y \leq 100 \text{ мм}$, и $10 \text{ мм} \leq z \leq 10 \text{ мм}$). В каждом углу пластинки для задания распределенной нагрузки установлены квадратные площадки размером $20 \text{ мм} \times 20 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$. К четырем площадкам в течение 260 ч приложены два набора распределённых сил одинаковой величины и противоположного направления, эквивалентные сосредоточенной силе по величине 1850 кГ . В результате деформирования образуется седловидная поверхность пластины (рис. 1), и данное испытание имеет сложное напряженное состояние, в котором одновременно существуют растягивающие и сжимающие напряжения. Полученные величины прогибов (перемещения по оси z) для разных моделей определяющих соотношений представлены в табл. 2.

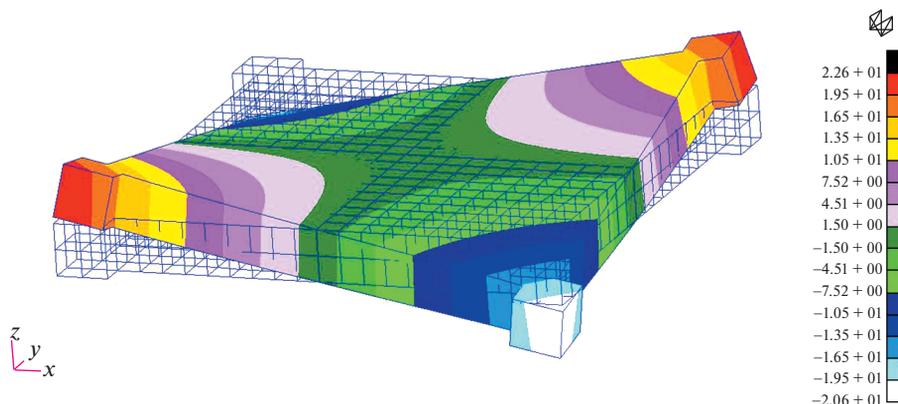


Рис. 1. Конечно-элементная модель исходной и деформированной панели с распределением перемещений по оси z.

Сопоставляя решения, имеем близкие значения прогиба для ассоциированного и неассоциированного закона. На основе этого дальнейшие расчеты будем проводить с использованием неассоциированного закона.

Решение задачи оптимизации траекторий деформирования рассматривается на примере многоточечного формообразования квадратной пластинки в установке с верхней и нижней матрицами, включающими по четыре стержня. Размеры пластинки $500 \times 500 \times 45$ мм. Перемещение жестких тел задается и выполняется на 30 мм. В случае, если имеется только конечная форма панели, то расчет конечного положения стержней, обеспечивающих необходимую упреждающую форму панели, может быть выполнен итерационным методом решения обратной задачи [19].

Анализ решений данной задачи с разными определяющими соотношениями позволяет сделать следующие выводы:

1. Обеспечение больших прогибов вызывает смятия материала в местах контакта с жесткими телами. Это приводит к концентрации напряжений, значительному увеличению параметра поврежденности по модели определяющих соотношений (2.3), (2.5), (2.6), и в итоге к неустойчивому процессу решения.

2. Моделирование ассоциированного закона в системе MSC.Marc возможно только с помощью неявной процедуры интегрирования [26]. В этом случае учет контактных условий приводит также к неустойчивому процессу решения и не позволяет выбрать единые общие параметры итерационного процесса для всех вариантов деформирования.

Таким образом, исследование зависимости оптимальных траекторий деформирования пластинки от свойств материала будет проводиться со следующими определяющими соотношениями в ползучести:

Таблица 2. Значения прогибов в момент времени $T = 260$ ч, полученные при использовании двух типов обобщенного закона Нортон

Тип обобщенного закона Нортон	Прогиб (мм) в узле с координатами (35.35, 35.35, 0)	Прогиб (мм) в узле с координатами (90,90,0)
Неассоциированный (2.3), (2.7)–(2.9)	2.774	18.303
Ассоциированный (2.10), (2.11)	2.752	18.086

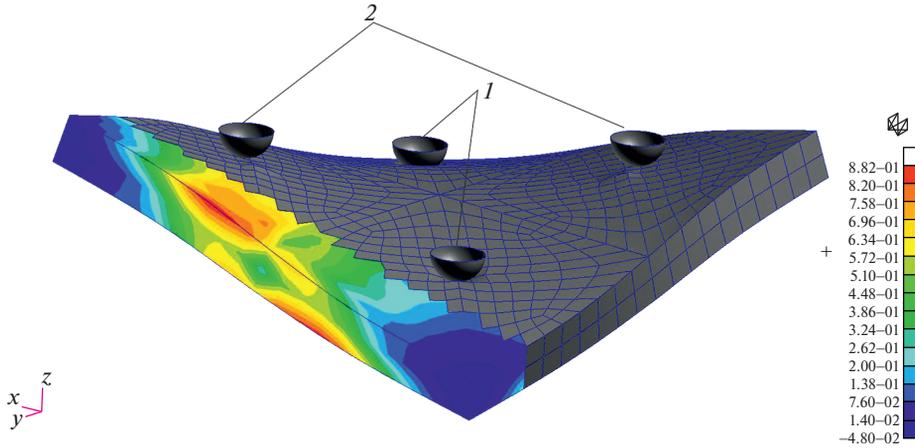


Рис. 2. Деформированная конфигурация пластинки и максимальное значение энергии рассеяния.

1. закон установившейся ползучести для изотропных сред с одинаковыми характеристиками при сжатии и растяжении (2.3), (2.4): $B^+ = B^-$;
2. неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и растяжении (2.3), (2.4);
3. неассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию (2.3), (2.7), (2.8), (2.9).

При движении контактных тел максимальное значение энергии рассеяния в пластинке, при исключении мест смятия от жестких тел, образуются в области перегиба (рис. 2). Таким образом, критерий оптимизации (3.2) рассматривается в данных областях с четырех сторон.

Известно, что для пластин в случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону $\bar{U}_z(t) = \frac{t}{T} \bar{U}_z^*$, а в случае больших прогибов опти-

мальное деформирование происходит по нелинейному закону $\bar{U}_z(t) = \sqrt{\frac{t}{T}} \bar{U}_z^*$ [8–10].

В случае одинакового движения всех контактных тел ($d = 1$) оптимальная функция представлена на рис. 3, 4 (жирная сплошная кривая – численные результаты, штрих-пунктирная кривая – аналитические данные для изгиба пластин [8–10]). Численное решение задачи оптимизации траектории деформирования, одинаковой для всех стержней, сводится к перебору вариантов при каждом параметре t_k . Набор функций $f(t)$ задается ломанными линиями, проходящими от точки O к точке B (рис. 3, 4). В результате, оптимальное решение, полученное методом динамического программирования при $N = 3$, $M = 9$ и $N = 4$, $M = 12$ для трех случаев определяющих соотношений, приближается к аналитической кривой и не совпадает с линейной функцией.

В случае различного движения контактных тел, в частности, при $d = 2$ группы контактных жестких тел 1 и 2 (рис. 2) будут перемещаться по разным функциям. Для модели материала, соответствующей закону Нортона (т.е. без учета разносопротивляемости, анизотропии), вычисленная оптимальная система траекторий состоит из двух одинаковых функций, которые совпадают с траекторией на рис. 3, 4 (жирная сплошная линия). Вычисленная оптимальная система траекторий с законом установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и

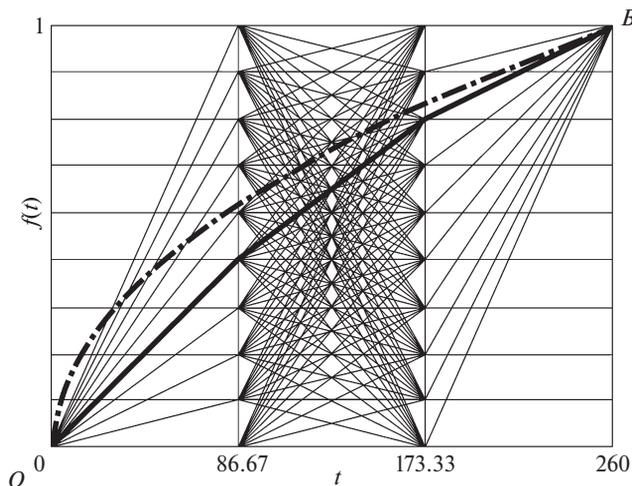


Рис. 3. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальная функция.

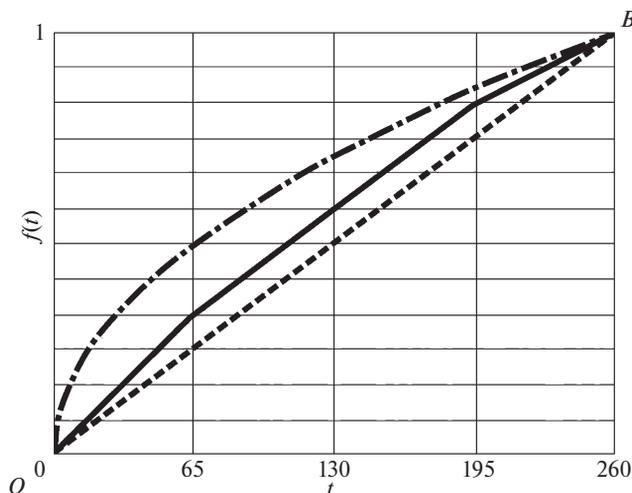


Рис. 4. Варианты законов движения контактных тел при $N = 4$, $M = 12$ и оптимальная функция.

растяжении (2.3), (2.4), и с законом установившейся ползучести для анизотропных сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию (2.3), (2.7), (2.8), (2.9), состоит из двух разных функций для групп контактных тел 1 и 2 (рис. 5, 6 соответственно).

Таким образом, оптимальная система траекторий движения стержней в реконфигурируемой оснастке зависит от материала, а разработанный численный метод позволяет определить движение каждого стержня из оснастки, обеспечивающей наименьшую поврежденность заготовки.

Однако использование данного численного метода требует значительных вычислительных ресурсов. Так, если обозначить через r – время расчета пластинки для произвольного пути деформирования, соединяющего соседние гиперплоскости, то можно

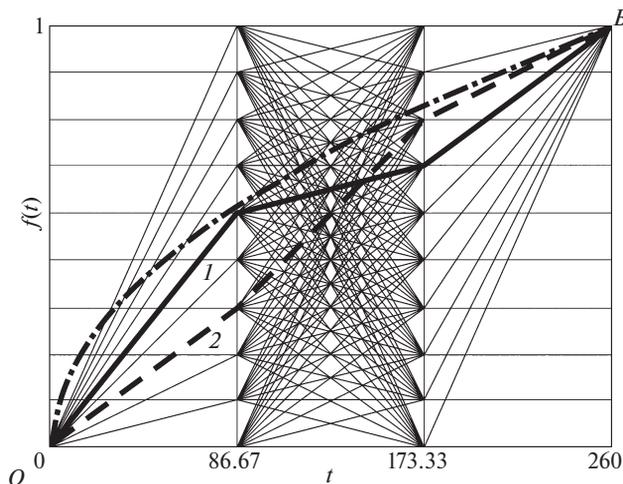


Рис. 5. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальные функции для модели материала (2.3), (2.4).

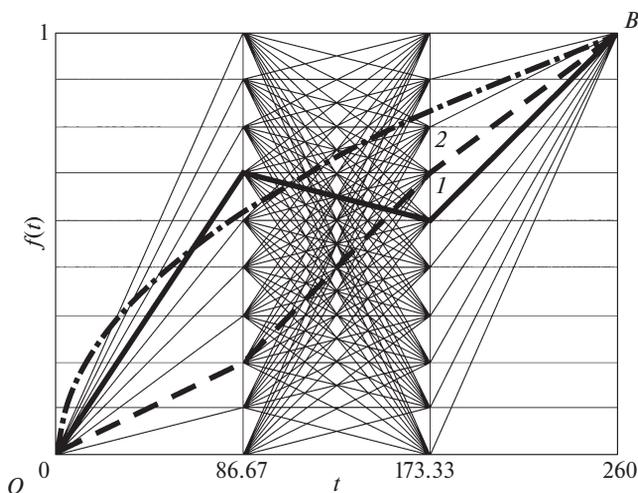


Рис. 6. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальные функции для модели материала (2.7)–(2.9).

оценить время расчета методом динамического программирования и простым перебором всевозможных путей деформирования (табл. 3). При увеличении N , M время расчета сокращается значительно, например, при $N = 4$, $M = 9$, $d = 1$ время расчета методом динамического программирования $10 \cdot 10 \cdot 2\tau + 10 \cdot 10 \cdot 3\tau + 10 \cdot 4\tau = 540\tau$, а простым перебором траекторий $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4\tau = 4000\tau$.

Вычисления рекуррентных соотношений выполняются путем построения итераций и решения уравнений (3.1) в системе MSC.Marc. Ввод граничных условий и вывод значения критерия оптимизации выполняется с помощью пользовательских про-

Таблица 3. Сравнение времени расчета методом динамического программирования при $N = 3$, $M = 9$ с перебором траекторий

Размерность, d	Время расчета методом динамического программирования	Время расчета простым перебором траекторий
1	$10 \cdot 10 \cdot 2r + 10 \cdot 3r = 230r$	$10 \cdot 10 \cdot 3r = 300r$
2	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2r + 10 \cdot 10 \cdot 3r = 20300r$	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3r = 30000r$
4	$(10 \cdot 10)^4 \cdot 2r + (10)^4 \cdot 3r = 20003 \cdot 10^4 r$	$(10 \cdot 10)^4 \cdot 3r = 30000 \cdot 10^4 r$

Таблица 4. Сравнение времени расчета методом динамического программирования при $N = 2$, $M = 9$, $d = 2$ в зависимости от количества потоков на сервере

Время расчета методом динамического программирования	Время расчета при заданном количестве потоков, мин				
	1	2	10	18	20
$10 \cdot 10 \cdot 2r = 200r$ (или 100 задач)	1644	877	291	217	197

грамм. Программная реализация метода оптимизации выполнена с учетом алгоритма распределенных вычислений в Visual C, в которой удаленная связь между машинами и потоками устанавливается с помощью протокола распределенной модели СОМ (Distributed СОМ). Программа позволяет распределять вычисления на потоки и вычислительные машины.

Результаты параллельного многопоточного конечно-элементного расчета на многопроцессорной вычислительной машине (Core i5-10400F), в зависимости от заданного количества потоков, представлены в табл. 4. Фактические значения времени расчета свидетельствуют о перспективности увеличения вычислительных потоков.

5. Заключение. В результате разработан численный метод оптимизации деформирования тонкостенных конструкций, учитывающий немонотонные траектории и размерность задачи. Данным методом проанализировано влияние таких свойств материала, как разносопротивляемость и анизотропия в ползучести, на оптимальную систему траекторий деформирования для разных точек пластины. Так для изотропного материала с одинаковыми характеристиками сжатия и растяжения при ползучести оптимальное изменение прогиба пластины будет осуществляться с одинаковой функцией для разных точек.

Данный метод уменьшает объем вычислений в сравнении с перебором всевозможных путей деформирования, так как в процессе расчета исключаются неоптимальные траектории. Несмотря на это, незначительное увеличение параметров метода, в частности размерности, приводит к требованию достаточно больших вычислительных ресурсов.

В рассмотренном методе сходимость зависит от сетки, причем шаги по пространственным переменным зависят от размера шагов по переменной времени, и сама структура сетки зависит от природы задачи [23], в данном случае от свойств материала. Поэтому данный способ нужно рассматривать как возможность получения грубого приближения, а затем уточнять решение, например, методом локальных вариаций или методом блуждающих трубок [22, 23].

С учетом развития вычислительных технологий разработанный метод позволяет на стадии подготовки производства оптимизировать параметры технологического процесса, в частности для формообразования деталей в реконфигурируемом стержневом пуансоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-11-00165).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.
<https://doi.org/10.1007/s10808-010-0074-2>
2. Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // J. Achiev. Mater. Manuf. Eng. 2010. V. 43. № 1. P. 353–361.
3. Adachi T., Kimura S., Nagayama T., Takehisa H., Shimanuki M. Age forming technology for aircraft wing skin // Proc. of the 9th Int. Conf. on Aluminium Alloys. Ed. by J.F. Nie, A.J. Morton and B.C. Muddle. Melbourne: Inst. of Mater. Eng. Australasia Ltd., 2004. P. 202–207.
4. Кривенок А.А. Моделирование в системе MSC.Marc процесса формообразования деталей в режиме термомодеформационного старения с учетом усадки материала // Уч. зап. КнАГТУ. 2013. № III-1(15). С. 4–10.
[https://doi.org/10.17084/2013.III-1\(15\).1](https://doi.org/10.17084/2013.III-1(15).1)
5. Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G. A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Proc. CIRP. 2014. V. 17. P. 853–858.
<https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.01.095>
6. Walczyk D.F., Lakshminathan J., Kirk D.R. development of a reconfigurable tool for forming aircraft body panels // J. Manuf. Sys. 1998. V. 17. № 4. P. 287–296.
[https://doi.org/10.1016/S0278-6125\(98\)80076-9](https://doi.org/10.1016/S0278-6125(98)80076-9)
7. Su S.Z., Li M.Z., Liu C.G., Ji C.Q., Setchi R., Larkiola J., Panteleev I., Stead I., Lopez R. Flexible tooling system using reconfigurable multi-point thermoforming technology for manufacturing freeform panels // Key Eng. Mater. 2012. V. 504–506. P. 839–844.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.504-506.839>
8. Цвелодуб И.Ю. Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 128–136.
9. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 133 с.
10. Бормотин К.С., Олейников А.И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 5. С. 136–146.
<https://doi.org/10.1134/S0021894412050148>
11. Горев Б.В., Масанов И.Ж. Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технол. машиностр. 2009. № 7. С. 13–20.
12. Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сборник трудов НИИВТа № 117. Новосибирск: Новосиб. ин-т инженеров вод. трансп., 1976. С. 78–88.
13. Банищикова И.А. Ползучесть изотропных и ортотропных сплавов и длительная прочность элементов конструкций. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, 2020. 338 с.
14. Банищикова И.А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. № 1. С. 102–117.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200110>
15. Соснин О.В. Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.
16. Yuhao Guo, Gang Liu, Yi Huang. A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Eur. J. Mech. A/Solids. 2022. V. 93. P. 104510.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510>
17. Yan Yu, Wan Min, Wang Haibo, Huang Lin. Design and optimization of press bend forming path for producing aircraft integral panels with compound curvatures // Chinese J. Aeronaut. 2010. V. 23(2). P. 274–282.
[https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(09\)60216-8](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(09)60216-8)
18. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

19. *Бормотин К.С.* Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Ж. выч. мат. мат. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 145–153.
<https://doi.org/10.1134/S0965542513120026>
20. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Выч. мет. программ. 2008. Т. 9. № 1. С. 346–365.
21. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006. 518 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
22. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
23. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.
24. *Бормотин К.С., Вин Аунг.* Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести // Выч. мет. программ. 2018. Т. 19. С. 470–478.
<https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r442>
25. *Бормотин К.С., Герасимов К.Е., Романютин М.И.* Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей двойной кривизны // Уч. зап. КНАГТУ. 2020. № VII-1(47). С. 59–69.
26. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation URL: <http://www.mssoftware.com/product/marc>.

К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.А. БУРЕНИНА

DOI: 10.31857/S0572329922050130

20 августа 2022 года исполняется семьдесят пять лет члену-корреспонденту РАН Анатолию Александровичу Буренину. А.А. Буренин – выдающийся специалист в механике деформирования сплошных сред. Его разносторонние научные интересы включают в себя нелинейную динамическую теорию упругости, большие упругопластические деформации, теорию ползучести и др.

А.А. Буренин родился в Тамбовской области. После школы он поступил на математико-механический факультет Воронежского государственного университета. После окончания университета работал младшим научным сотрудником Научно-исследовательского института математики ВГУ. Отслужив в рядах Советской армии в 1970–1971 годах, вернулся в университет, пройдя путь от младшего научного сотрудника до заведующего отделом механики НИИ математики ВГУ. В 1974 году А.А. Буренин защитил кандидатскую диссертацию под руководством проф. А.Д. Чернышова, но своими учителями он также по праву считает выдающихся ученых-механиков проф. Д.Д. Ивлева и проф. Г.И. Быковцева. С 1975 по 1987 год А.А. Буренин занимался преподавательской и научно-исследовательской деятельностью в Воронежском инженерно-строительном институте, был старшим преподавателем, доцентом, заведующим кафедрой теоретической механики. В 1987 году, после переезда вслед за Г.И. Быковцевым и В.П. Мясниковым во Владивосток, начал работать в Тихоокеанском океанологическом институте ДВО АН СССР, а в 1988 году перешел в Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. Через три года защитил докторскую диссертацию, и в 1993 году стал заведующим лабораторией механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН. А.А. Буренин оказал значительное влияние на развитие механики на Дальнем Востоке России.

А.А. Буренин – выдающийся педагог и организатор науки. При его непосредственном участии в 1988 году в ИАПУ ДВО СССР создана базовая кафедра математического моделирования и информатики Дальневосточного политехнического института им. В.В. Куйбышева (ныне Инженерная школа ДВФУ), которой он заведовал с 1992 года. Десятки выпускников кафедры стали кандидатами и докторами наук, а деятельность А.А. Буренина была отмечена присвоением ему звания “Почетный работник высшего образования”.

Пять лет (2008–2013 гг.) Буренин А.А. исполнял обязанности главного ученого секретаря Дальневосточного отделения РАН, где во многом способствовал слаженной работе отделения и развитию физико-математических и технических наук на Дальнем Востоке. В 2013 году избирается директором Института машиноведения и металлургии ДВО РАН. А.А. Буренин – член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, действительный член Академии инженерных наук.

Редколлегия журнала “Известия РАН. Механика твердого тела” желает А.А. Буренину здоровья, дальнейших научных успехов и счастья в личной жизни.