СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 9, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1165–1185

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© 2022 г. З. С. Алиев, К. Ф. Абдуллаева

Рассмотрена задача на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка со спектральным параметром, содержащимся в одном из граничных условий. Найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости). Изучены структуры корневых подпространств, осцилляционные свойства собственных функций, базисные свойства собственных функций в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, и равномерная сходимость рядов Фурье по собственным функциям этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122090011, EDN: CHIYEC

Введение. В данной статье исследуется граничная задача

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$U_1(\lambda, y) \equiv y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$U_2(\lambda, y) \equiv y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$U_3(\lambda, y) \equiv (a\lambda + b)y'(l) + (c\lambda + d)y''(l) = 0, \tag{4}$$

$$U_4(\lambda, y) \equiv y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр; $Ty \equiv y''' - qy'$, q – положительная абсолютно непрерывная на отрезке $[0, l]$ функция; α, β, δ, a, b, c, d – действительные постоянные, такие, что $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$, $\pi/2 \leqslant \delta < \pi$ (за исключением случая $\beta = \delta = \pi/2$), $\sigma = bc - ad > 0$.

Отметим, что задача (1)–(5) возникает при описании малых изгибных колебаний упругой консольной однородной балки, в поперечных сечениях которой действует продольная сила, а к свободному концу посредством невесомого стержня прикреплён груз, удерживающийся в равновесии при помощи упругой пружины (см., например, [1, с. 152–154] и [2, с. 256–258]).

Целью настоящей работы является изучение базисных свойств собственных функций в пространстве $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, и равномерной сходимости спектральных разложений по собственным функциям задачи (1)–(5).

Базисные свойства в $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, и равномерная сходимость рядов Фурье по корневым функциям задач Штурма–Лиувилля исследованы в работах [3–13], а в задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка – в статьях [14–23].

Задача (1)–(5) в случае $\alpha = \beta = 0$ исследована в [15], где, в частности, доказано, что её собственные значения являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность. Кроме того, изучено расположение собственных значений на вещественной оси, исследованы осцилляционные свойства собственных функций, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, установлена базисность в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций этой задачи с одной произвольно удалённой функцией.

1. Операторная трактовка краевой задачи (1)–(5). Известно (см. [15, с. 386]), что спектральная задача (1)–(5) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,l) \bigoplus \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{v})_H = (\{y, m\}, \{v, s\})_H = \int\limits_0^1 y(x)\overline{v(x)}\,dx + \sigma^{-1} m\bar{s},$$

где оператор
$$L\hat{y} = L\{y, m\} = \{\ell(y)(x), -(by'(l) + dy''(l))\}$$

определён в области

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x), m\} \in H : y \in W_2^4(0,l),\quad \ell(y) \in L_2(0,l),\quad y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0,$$
$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0,\quad y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0,\quad m = ay'(l) + cy''(l)\},$$

которая всюду плотна в H. Очевидно, что оператор L корректно определён в H. При этом задача (1)–(5) приобретает вид
$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\quad \hat{y} \in D(L), \tag{6}$$
т.е. собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задач (1)–(5) и (6) совпадают между собой с учётом их кратности, а между корневыми функциями имеется взаимнооднозначное соответствие

$$y_k(x) \leftrightarrow \{y_k(x), m_k\},\quad m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l).$$

Теорема 1 [15, с. 386]. *Оператор L является дискретным самосопряжённым полуограниченным снизу в пространстве H. Система $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k, m_k\}$, $m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l)$, собственных векторов этого оператора образует ортогональный базис в H.*

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Введём краевое условие
$$y'(l)\cos\gamma + y''(l)\sin\gamma = 0, \tag{7}$$
где $\gamma \in [0, \pi/2]$.

Краевая задача (1)–(3), (5), (7) при $\delta \in [0,\pi)$ исследована в работах [24, 25], где установлен следующий результат.

Теорема 2 [24, теоремы 5.4 и 5.5; 25, теорема A, замечание 1 и теорема 2]. *Собственные значения спектральной задачи (1)–(3), (5), (7) при $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$ и $\delta \in [0, \pi)$ являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k(\alpha,\beta,\delta,\gamma)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) > 0$ при $k \geqslant 2$, причём для каждых α, β, γ существует $\delta_0(\alpha,\beta,\gamma) \in [\pi/2,\pi)$ такое, что $\lambda_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta) > 0$, если $\delta \in [0, \delta_0(\alpha,\beta,\gamma))$, $\lambda_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0$, если $\delta = \delta_0(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\lambda_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta) < 0$, если $\delta \in (\delta_0(\alpha,\beta),\pi)$. Кроме того, собственная функция $y_{k,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, при $k \geqslant 2$ имеет в точности $k-1$ простых нулей; при $k = 1$ не имеет нулей, если $\delta \in$ $\in [0, \delta_0(\alpha,\beta,\gamma)]$, имеет произвольное число нулей, если $\delta \in (\delta_0(\alpha,\beta,\gamma),\pi)$.*

Для исследования спектральных свойств задачи (1)–(5) изучим свойства решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5) при $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$ и $\delta \in [\pi/2, \pi)$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение $y(x,\lambda)$ задачи (1)–(3), (5).*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.3 в [15].

Пусть $y(x,\lambda)$ – решение задачи (1)–(3), (5), нормированное условием

$$|y(0)| + |Ty(0)| = 1$$

при $\lambda > 0$ и условием
$$|y'(l)| + |y''(l)| = 1$$

при $\lambda \leqslant 0.$ Заметим, что если $\lambda > 0$ и $y(0,\lambda) = Ty(0,\lambda) = 0,$ то в силу условия (2) из первой части леммы 2.1 работы [24] следует, что $y(l,\lambda)Ty(l,\lambda) > 0,$ что противоречит условию (5). Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$ и $y'(l,\lambda) = y''(l,\lambda) = 0.$ Тогда λ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (7) как при $\gamma = 0,$ так и при $\gamma = \pi/2,$ что противоречит свойству 1 в [24, с. 64].

Поскольку уравнение (1) линейно зависит от $\lambda,$ из общей теории линейных дифференциальных уравнений (см., например, [26, гл. 1]) следует, что для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ функция $y(x,\lambda)$ является целой функцией параметра $\lambda.$

Пусть $\alpha,\beta \in [0,\pi/2],$ $\delta \in [\pi/2,\pi)$ – произвольные и фиксированные числа. При этом для упрощения изложения обозначим $\mu_k = \lambda_k(\alpha,\beta,0,\delta)$ и $\nu_k = \lambda_k(\alpha,\beta,\pi/2,\delta).$

Пусть $\mathcal{B}_k = (\mu_{k-1},\mu_k),$ $k = 1,2,\ldots,$ где $\mu_0 = -\infty.$

Собственные значения μ_k и $\nu_k,$ $k \in \mathbb{N},$ спектральной задачи (1)–(3), (5), (7) при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ являются нулями целых функции $y'(l,\lambda)$ и $y''(l,\lambda)$ соответственно. Заметим, что функция

$$F(\lambda) = \frac{y''(l,\lambda)}{y'(l,\lambda)}$$

определена для значений $\lambda \in \mathcal{B} \equiv (\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}_k)\bigcup(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$ и является мероморфной функцией конечного порядка, собственные значения ν_k и $\mu_k,$ $k \in \mathbb{N},$ краевой задачи (1)–(3), (5), (7) при $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = 0$ являются нулями и полюсами этой функции соответственно.

Лемма 2. *Имеет место следующая формула:*

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y'^2(l,\lambda)}\int\limits_0^l y^2(x,\lambda)\,dx, \quad \lambda \in \mathcal{B}. \tag{8}$$

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство формулы (30) работы [15].

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = +\infty. \tag{9}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.8 в [15].

В силу [24, свойство 1] и формул (8), (9) имеет место соотношение

$$\nu_1 < \mu_1 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots < \nu_k < \mu_k < \ldots \tag{10}$$

Пусть $m(\lambda) = ay'(l,\lambda) + cy''(l,\lambda).$

Лемма 4. *Если $\tilde\lambda$ – собственное значение задачи (1)–(5), то $m(\tilde\lambda) \neq 0.$*

Доказательство. Предположим, что $\tilde\lambda$ – собственное значение задачи (1)–(5) такое, что $m(\tilde\lambda) = ay'(l,\tilde\lambda) + cy''(l,\tilde\lambda) = 0.$ Если $c \neq 0,$ то отсюда следует, что $y''(l,\tilde\lambda) = -ay'(l,\tilde\lambda)/c.$ Тогда в силу (4) имеем

$$(a\tilde\lambda + b)y'(l,\tilde\lambda) + (c\tilde\lambda + d)\left(-\frac{a}{c}\right)y'(l,\tilde\lambda) = \frac{\sigma}{c}y'(l,\tilde\lambda) = 0.$$

Так как $\sigma \neq 0$ и $c \neq 0,$ то из последнего соотношения получим $y'(l,\tilde\lambda) = 0.$ Если же $c = 0,$ то $\sigma = -ad \neq 0.$ Следовательно, из равенства $m(\tilde\lambda) = ay'(l,\tilde\lambda) = 0$ получим $y'(l,\tilde\lambda) = 0.$ Тогда в обоих случаях из граничного условия (4) следует, что $y''(l,\tilde\lambda) = 0,$ что противоречит соотношению (10). Лемма доказана.

3. Осцилляционные свойства решения $y(x,\lambda)$ задачи (1)–(3), (5). Рассмотрим уравнение

$$y(x,\lambda) = 0, \quad x \in [0,l], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Очевидно, что корни этого уравнения являются функциями параметра $\lambda.$

Лемма 5. *Каждый корень $x(\lambda) \in (0, l)$ уравнения (11) является простой и непрерывно-дифференцируемой функцией параметра λ.*

Доказательство. Пусть существуют $x_0 \in (0, l)$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $y(x_0, \lambda_0) = y'(x_0, \lambda_0) = 0$. Тогда очевидно, что $|y''(x_0, \lambda_0)| + |Ty(x_0, \lambda_0)| > 0$. Если $y''(x_0, \lambda_0)Ty(x_0, \lambda_0) \geqslant 0$, то в силу первой части леммы 2.1 в [24] получим $y(l, \lambda_0)Ty(l, \lambda_0) > 0$, что противоречит условию (5), поскольку $\delta \in [\pi/2, \pi)$, а если $y''(x_0, \lambda_0)Ty(x_0, \lambda_0) < 0$, то в силу второй части леммы 2.1 в [24] получим $y'(0, \lambda_0)y''(0, \lambda_0) < 0$, что противоречит условию (2), поскольку $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Пусть теперь существуют $x_0^* \in (0, l)$ и $\lambda_0^* \leqslant 0$ такие, что $y(x_0^*, \lambda_0^*) = y'(x_0^*, \lambda_0^*) = 0$. Тогда, умножив обе части равенства

$$y^{(4)}(x, \lambda_0^*) - (q(x)y'(x, \lambda_0^*))' = \lambda_0^* y(x, \lambda_0^*), \quad 0 < x < x_0^*,$$

на $y(x, \lambda_0^*)$ и проинтегрировав полученное равенство в пределах от 0 до x_0^*, используя формулу интегрирования по частям, принимая во внимание граничные условия (2), (3) и $y(x_0^*, \lambda_0^*) = y'(x_0^*, \lambda_0^*) = 0$, получим

$$\int_0^{x_0^*} y''^2(x, \lambda_0^*)\, dx + \int_0^{x_0^*} q(x) y^2(x, \lambda_0^*)\, dx + \tilde{N}[y(x, \lambda_0^*)] = \lambda_0^* \int_0^{x_0^*} y^2(x, \lambda_0^*)\, dx,$$

где

$$\tilde{N}[y(x, \lambda_0^*)] = \begin{cases} y'^2(0, \lambda_0^*) \operatorname{ctg}\alpha + y^2(0, \lambda_0^*) \operatorname{ctg}\beta, & \text{если} \quad \alpha, \beta \in (0, \pi/2], \\ y'^2(0, \lambda_0^*) \operatorname{ctg}\alpha, & \text{если} \quad \alpha \in (0, \pi/2], \quad \beta = 0, \\ y^2(0, \lambda_0^*) \operatorname{ctg}\beta, & \text{если} \quad \alpha = 0, \quad \beta \in (0, \pi/2], \\ 0, & \text{если} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0. \end{cases}$$

Так как $q(x) > 0$ при $x \in [0, l]$ и $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, то из последнего соотношения следует, что $\lambda_0^* > 0$, что противоречит условию $\lambda_0^* \leqslant 0$.

Далее, непрерывная дифференцируемость функции $x(\lambda)$ следует из хорошо известной теоремы о неявной функции. Лемма доказана.

Следствие 1. *При изменении параметра λ, $\lambda > 0$ $(\lambda \leqslant 0)$, функция $y(x, \lambda)$ может потерять нуль или приобрести новый, если она окажется внутри интервала $(0, l)$ или вне его за краевой точкой $x = l$ $(x = 0)$.*

Доказательство. При изменении λ, $\lambda > 0$, нули функции $y(x, \lambda)$ не могут принадлежать интервалу $(0, l)$ или оказаться вне его за краевой точкой $x = 0$. Действительно, если это не так, то при некотором $\lambda_0 > 0$ имеем $y(0, \lambda_0) = y'(0, \lambda_0) = y''(0, \lambda) = 0$, если $\beta = 0$, $y(0, \lambda_0) = Ty(0, \lambda_0) = 0$, если $\beta \in (0, \pi/2]$. Тогда, на основании первой части леммы 2.1 работы [24], получим $y(l, \lambda_0)Ty(l, \lambda_0) > 0$, что противоречит условию (5).

Если $\lambda \leqslant 0$, то при изменении λ нули функции $y(x, \lambda)$ не могут лежать в интервале $(0, l)$ или лежать вне его за краевой точкой $x = l$. Действительно, в противном случае, в силу (5) при некотором $\tilde{\lambda}_0 \leqslant 0$ имеет место $y(l, \tilde{\lambda}_0) = Ty(l, \tilde{\lambda}_0) = 0$. Определим угол $\tilde{\gamma}_0 \in [0, \pi)$ из равенства

$$\tilde{\gamma}_0 = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{y'(l, \tilde{\lambda}_0)}{y''(l, \tilde{\lambda}_0)}, & \text{если} \quad y''(l, \tilde{\lambda}_0) \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad y''(l, \tilde{\lambda}_0) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{\lambda}_0$ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (7) как при $\gamma = \tilde{\gamma}_0$, $\delta = \pi/2$, так и при $\gamma = \tilde{\gamma}_0$, $\delta = 0$, что противоречит свойству 1 в [24, с. 64] (поскольку в силу леммы 2 все собственные значения этих задач являются простыми). Лемма доказана.

Замечание 1. Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательствах лемм 2.6, 2.9 и 2.10 из [15], убеждаемся, что их утверждения справедливы также и для функции $y(x, \lambda)$.

Через $s(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим число нулей функции $y(x, \lambda)$, содержащихся в интервале $(0, l)$.

В силу леммы 5, следствия 1, замечания 1 и теоремы 2 имеет место следующая осцилляционная теорема для функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Если* $\lambda \in (\mu_{k-1}, \nu_k)$ *при* $k \geqslant 3$, *то* $k-2 \leqslant s(\lambda) \leqslant k-1$, *а если* $\lambda \in [\nu_k, \mu_k]$ *при* $k \geqslant 3$, *то* $s(\lambda) = k-1$. *Кроме того, если* $\delta \in [\pi/2, \delta_0(\alpha,\beta,0)]$, *то* $s(\lambda) = 0$ *при* $\lambda \in [0,\mu_1]$, $0 \leqslant s(\lambda) \leqslant 1$ *при* $\lambda \in (\mu_1, \nu_2)$ *и* $s(\lambda) = 1$ *при* $\lambda \in [\nu_2, \mu_2]$; *если* $\delta \in [\delta_0(\alpha,\beta,0), \delta_0(\alpha,\beta,\pi/2))$, *то* $0 \leqslant s(\lambda) \leqslant 1$ *при* $\lambda \in [0,\nu_2)$, $s(\lambda) = 1$ *при* $\lambda \in [\nu_2,\mu_2]$; *а если* $\delta \in [\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2,\pi))$, *то* $s(\lambda) = 1$ *при* $\lambda \in [0,\mu_2]$.

В силу следствия 1 при изменении λ, $\lambda < 0$, функция $y(x,\lambda)$ может приобрести новый нуль, если она окажется внутри интервала $(0,l)$ через краевую точку $x = 0$, причём если функция $y(x,\lambda)$ приобретает новый нуль при некотором $\tilde\lambda < 0$, то $y(0,\tilde\lambda) = y'(0,\tilde\lambda) = y''(0,\tilde\lambda) = 0$ при $\beta = 0$, $y(0,\tilde\lambda) = Ty(0,\tilde\lambda) = 0$ при $\beta \in (0,\pi/2]$.

Лемма 6. *Пусть* $\lambda^* < \lambda^{**} < 0$ *такие, что* $s(\lambda^*) \neq s(\lambda^{**})$. *Тогда в интервале* $(\lambda^*, \lambda^{**})$ *содержится собственное значение спектральной задачи, порождённой уравнением (1) с граничными условиями* $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ *и (5) при* $\beta = 0$; *и уравнением (1) с граничными условиями* $y(0) = Ty(0) = 0$ *и (5) при* $\beta \in (0,\pi/2]$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5 в [27].

Пусть $\epsilon > 0$ – достаточно малое фиксированное число, $\lambda < 0$ и μ – вещественное собственное значение уравнения (1) с граничными условиями $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ и (5), если $\beta = 0$, (2), $y(0) = Ty(0) = 0$ и (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$. *Индексом осцилляции* собственного значения μ называется разность между числом нулей, содержащихся в интервале $(0,l)$, функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda \in (\mu-\epsilon, \mu)$ и числом таких же нулей при $\lambda \in (\mu, \mu+\epsilon)$ (см. [28, с. 51]). Из этого определения видно, что число нулей функции $y(x,\lambda)$, содержащихся в интервале $(0,l)$, равно сумме индексов осцилляции всех собственных значений, принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, задачи (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), если $\beta = 0$; (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$.

Имеет место следующая

Лемма 7. *Существует число* $\varsigma < 0$ *такое, что все вещественные собственные значения* ρ_k, $k = 1,2,\ldots$, *краевой задачи (1),* $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, *(5), если* $\beta = 0$, *(1), (2),* $y(0) = Ty(0) = 0$, *(5), если* $\beta \in (0,\pi/2]$, *лежат на интервале* $(-\infty, \varsigma)$, *являются простыми, образуют неограниченно убывающую последовательность и имеют индекс осцилляции, равный единице.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 4.1 в [28].

Пусть $i(\rho_k)$ – индекс осцилляции собственного значения ρ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), если $\beta = 0$; (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$. Тогда из сказанного выше следует, что число нулей, содержащихся в интервале $(0,l)$, функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda < 0$ определяется формулой

$$s(\lambda) = \sum_{\rho_k \in (\lambda,0)} i(\rho_k). \tag{12}$$

4. Структуры корневых подпространств, расположение собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости) и осцилляционные свойства собственных функций задачи (1)–(5). Введём следующее краевое условие:

$$ay'(l) + cy''(l) = 0. \tag{13}$$

Заметим, что краевое условие (13) в случае $a = 0$ $(c = 0)$ совпадает с условием (7) при $\gamma = \pi/2$ $(\gamma = 0)$. В случае $ac \neq 0$ собственные значения краевой задачи (1)–(3), (5), (13) совпадают с корнями уравнения $F(\lambda) = -a/c$. В силу формулы (8) это уравнение имеет только простые корни и, следовательно, собственные значения спектральной задачи (1)–(3), (5), (13) являются простыми. На основании (8) и (9) уравнение $F(\lambda) = -a/c$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ в интервале $\mathcal{B}_k$ имеет единственное решение τ_k такое, что

$$\nu_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots \tag{14}$$

при $a/c > 0$ и

$$\tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots \tag{15}$$

при $a/c < 0$.

В случае $a \neq 0$ $(c \neq 0)$ определим число k_a (k_c) из неравенства

$$\lambda_{k_a-1} \leqslant -b/a < \lambda_{k_a} \quad (\lambda_{k_c-1} < -d/c \leqslant \lambda_{k_c}).$$

Замечание 2. Если $ac \neq 0$, то $k_a \leqslant k_c + 1$ при $ac > 0$, $k_a \geqslant k_c$ при $ac < 0$.

Замечание 3. Очевидно, что μ_{k_c} является собственным значением задачи (1)–(5) в случае $c \neq 0$ и $-d/c = \mu_{k_c}$, а в случаях $c = 0$ и $c \neq 0$, $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$, в силу леммы 4 собственные значения задачи (1)–(5) являются корнями уравнения

$$F(\lambda) = -\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}. \tag{16}$$

Теорема 4. *Собственные значения задачи (1)–(5) являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такую, что* $\lambda_k > 0$ *при* $k \geqslant 3 + \operatorname{sgn}|c|$. *Кроме того, имеет место следующее расположение собственных значений:*

а) если $c = 0$, *то*

$$\nu_1 < \lambda_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_a-2} < \nu_{k_a-1} \leqslant \lambda_{k_a-1} < \mu_{k_a-1} < \lambda_{k_a} < \nu_{k_a} < \\ < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k-1} < \lambda_k < \nu_k < \mu_k < \ldots; \tag{17}$$

б) если $a = 0$, *то*

$$\lambda_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \nu_2 < \mu_2(0) < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \nu_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \\ \leqslant \mu_{k_c} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots; \tag{18}$$

в) если $ac \neq 0$, *то*

в$_1$*) в случае* $ac > 0$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-2} < \nu_{k_c-1} \leqslant \lambda_{k_c-1} < \tau_{k_c-1} < \\ < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \\ < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \;\; k_a = k_c, \tag{19}$$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-1} < \nu_{k_c} \leqslant \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \\ \leqslant \mu_{k_c} < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \\ < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \;\; k_a = k_c + 1, \tag{20}$$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_a-2} < \nu_{k_a-1} \leqslant \lambda_{k_a-1} < \tau_{k_a-1} < \\ < \mu_{k_a-1} < \lambda_{k_a} < \nu_{k_a} < \tau_{k_a} < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \\ < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \\ < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \;\; k_a < k_c, \tag{21}$$

в$_2$*) в случае* $ac < 0$

$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < .. < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} < \nu_{k_c} < \\ < \mu_{k_c} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \nu_{k_c+1} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \nu_{k-1} < \\ < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \;\; k_a = k_c, \tag{22}$$

$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < .. < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \nu_{k_c} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} << \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \nu_{k_c+1} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k <$$
$$< \nu_{k-1} < \mu_{k-1} < \ldots \quad \textit{при} \;\; k_a = k_c + 1, \tag{23}$$
$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \nu_{k_c} <$$
$$< \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \tau_{k_c+1} < \nu_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k_a-2} < \tau_{k_a-1} < \nu_{k_a-1} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_a} < \mu_{k_a-1} < \tau_{k_a} < \lambda_{k_a+1} < \nu_{k_a} < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k <$$
$$< \nu_{k-1} < \mu_{k-1} < \ldots \quad \textit{при} \;\; k_a > k_c + 1. \tag{24}$$

Доказательство. Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве леммы 2.4 работы [15], можно показать, что собственные значения задачи (1)–(5) являются вещественными и простыми.

Из леммы 2 следует, что функция $F(\lambda)$ является строго убывающей на каждом интервале $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для функции $H(\lambda) = -(a\lambda + b)/(c\lambda + d)$ имеем $H'(\lambda) = \sigma/(c\lambda + d)^2$, откуда следует, что эта функция при $c = 0$ строго возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$, а при $c \neq 0$ строго возрастает на интервалах $(-\infty, -d/c)$ и $(-d/c, +\infty)$, причём

$$\lim_{\lambda \to -d/c-0} H(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda \to -d/c+0} H(\lambda) = -\infty. \tag{25}$$

Так как $y'(l, \mu_k) = 0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, в силу лемм 2 и 3 (см. формулы (8) и(9)) имеем

$$\lim_{\lambda \to \mu_{k-1}+0} F(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda \to \mu_k - 0} F(\lambda) = -\infty.$$

Следовательно, в случае $c = 0$, либо $c \neq 0$, и $-d/c \notin (\mu_{k-1}, \mu_k)$ уравнение

$$F(\lambda) = H(\lambda) \tag{26}$$

в интервале (μ_{k-1}, μ_k) имеет единственное решение $\lambda = \tilde{\lambda}_k$ и, следовательно, в силу замечания 3 $\tilde{\lambda}_k$ является собственным значением задачи (1)–(5). Очевидно, что если $c = 0$, либо $c \neq 0$, $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$ и $k < k_c$, либо $c \neq 0$, $-d/c = \mu_{k_c}$ и $k \leqslant k_c$, то $\tilde{\lambda}_k$ является k-м собственным значением спектральной задачи (1)–(5), т.е. $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k$. Кроме того, если $c \neq 0$, $-d/c = \mu_{k_c}$, то $\mu_{k_c} = \lambda_{k_c+1}$ и $\tilde{\lambda}_k = \lambda_{k+1}$ при $k > k_c$.

Заметим, что в случае $c \neq 0$ и $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$ уравнение (26) ((16)) в каждом из интервалов $(\lambda_{k_c-1}, -d/c)$ и $(-d/c, \lambda_{k_c})$ имеет единственное решение: $\tilde{\lambda}_{k_c} = \lambda_{k_c}$ и $\tilde{\lambda}^*_{k_c} = \lambda_{k_c+1}$ соответственно. В этом случае имеет место также соотношение $\tilde{\lambda}_k = \lambda_{k+1}$ при $k > k_c$.

Покажем, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 3 + \operatorname{sgn}|c|$. Действительно, если $ac < 0$, $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ (при этом $\nu_1 < \mu_1 < 0 < \nu_2$), $k_a = 1$ и $k_c = 1$, то из изложенного выше следует, что $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, \mu_1]$, $\lambda_k \in (\mu_{k-2}, \mu_{k-1})$ при $k \geqslant 3$. Следовательно, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 4$. Кроме того, $\lambda_3 \in (\mu_1, 0)$, либо $\lambda_3 = 0$, либо $\lambda_3 \in (0, \nu_2)$, так как $H(\lambda) > 0$ и $G(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\mu_1, \nu_2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Теперь покажем, что выполняются соотношения (17)–(24). Рассмотрим случай $ac < 0$ (т.е. случай в$_2$) при $k_a = k_c = 1$. Так как $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} H(\lambda) = -a/c$, функция $H(\lambda)$ возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, -d/c)$, $(-d/c, +\infty)$ и выполняются равенства (25), то имеют место соотношения $H(\lambda) > -a/c$ при $\lambda < -d/c$ и $H(\lambda) < -a/c$ при $\lambda > -d/c$. Так как $k_a = 1$, то имеем $-b/a < \nu_1$ и, следовательно, $H(\lambda) > 0$ при $\lambda > \nu_1$. Кроме того, $F(\lambda) > -a/c$ при $\lambda \in (\mu_{k-1}, \tau_k)$, $F(\lambda) < -a/c$ при $\lambda \in (\tau_k, \mu_k)$ и $F(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\mu_{k-1}, \nu_k)$, $F(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\nu_k, \mu_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (10), (14) и (15) из изложенного выше следует, что

$$\lambda_1 < \tau_1 < \lambda_2 < \nu_1 < \mu_1 < \tau_2 < \lambda_3 < \nu_2 < \mu_2 < \tau_3 < \lambda_4 < \nu_3 < \mu_3 < \ldots$$

Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $k_1 = \max\{k_a, k_c\} + 2$. *Тогда при* $k > k_1$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\mu_{k-1} < \lambda_k < \nu_k < \mu_k, \quad \text{если } c = 0, \tag{27}$$

$$\mu_{k-2} < \tau_{k-1} = \nu_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1}, \quad \text{если } a = 0, \tag{28}$$

$$\mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1}, \quad \text{если } ac > 0, \tag{29}$$

$$\mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \nu_{k-1} < \mu_{k-1}, \quad \text{если } ac < 0. \tag{30}$$

Имеет место следующая осцилляционная теорема для задачи (1)–(5).

Теорема 5. *Собственная функция* $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, *соответствующая собственному значению* λ_k, *обладает следующими осцилляционными свойствами:*

а) если $c = 0$, *то функция* $y_k(x)$ ($k \geqslant 1$ *при* $\delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *и* $k_a \geqslant 2$; $k \geqslant 2$ *при* $\delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *и* $k_a = 1$, *при* $\delta_0(\alpha, \beta, \pi/2) < \delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, *и при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \geqslant 3$; $k \geqslant 3$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \leqslant 2$) *имеет в точности* $k-1$ *простых нулей при* $k < k_a$, *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k \geqslant k_a$; *функция* $y_1(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *либо не имеет нулей, либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; при* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; функция* $y_2(x)$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \leqslant 2$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

б) если $a = 0$, *то функция* $y_k(x)$ (*при* $k \geqslant 2$ *в случаях* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$, *при* $k \geqslant 3$ *в случаях* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *и* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$) *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k \leqslant k_c$, *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей при* $k > k_c$; *в случае* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; в случае* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, а в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

в) если $ac \neq 0$, *то:*

в$_1$) *при* $ac > 0$ *функция* $y_k(x)$ (*при* $k \geqslant 2$ *в случаях* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$; $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_c \geqslant 2$; $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$ *и* $k_a \geqslant 3$; *при* $k \geqslant 3$ *в случаях* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$; $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$ *и* $k_a \leqslant 2$) *имеет в точности* $k-1$ *простых нулей при* $k < k_a$, *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k_a \leqslant k \leqslant k_c$, *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей при* $k > k_c$; *в случае* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; в случае* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 2$ *и* $k_a \leqslant 2$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

в$_2$) *при* $ac < 0$ *функция* $y_k(x)$ ($k \geqslant 2$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случаях* $k_c = 1$, $k_a \geqslant 2$ *и* $k_c \geqslant 2$, *при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c \geqslant 2$; $k \geqslant 3$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = k_a = 1$, *при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *и при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случаях* $k_c \leqslant 2$, $k_a \geqslant 3$ *и* $k_c \geqslant 3$; $k \geqslant 4$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c \leqslant k_a \leqslant 2$) *при* $k \leqslant k_c$ *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей, при* $k > k_a$ *имеет либо* $k-3$, *либо* $k-2$ *простых нулей, при* $k_c < k \leqslant k_a$ (*в случае* $k_c < k_a$) *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей; функция* $y_1(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, а при* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; функция* $y_2(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = k_a = 1$ *и при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, в случае* $k_c \geqslant 2$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо* *не имеет нулей, либо имеет один простой нуль, функция* $y_3(x)$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$ *в случае* $k_c \leqslant k_a \leqslant 2$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$.

Доказательство. Рассмотрим случай а), т.е. пусть $c = 0$. В силу (17) имеем

$$\lambda_k \in (\nu_k, \mu_k) \ \text{ при } \ k < k_a, \quad \lambda_k \in (\mu_{k-1}, \nu_k) \ \text{ при } \ k \geqslant k_a. \tag{31}$$

Тогда из теоремы 4 следует, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 3$.

Если $\delta \leqslant \delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)$, то в силу теоремы 2 и соотношения (10) имеем $0 \leqslant \nu_1 < \mu_1$. Тогда из (31) следует, что $\lambda_1 \geqslant 0$ при $k_a \geqslant 2$; $\lambda_1 < 0$ при $k_a = 1$ и $-b/d > F(0)$; $\lambda_1 = 0$ при $k_a = 1$ и $-b/d = F(0)$ и $\lambda_1 > 0$ при $k_a = 1$ и $-b/d < F(0)$.

Пусть $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2) < \delta \leqslant \delta_0(\alpha,\beta,0)$. Из теоремы 2 следует, что $\nu_1 < 0 \leqslant \mu_1$. Тогда из (31) получаем, что $\lambda_2 > 0$. При этом $\lambda_1 < 0$ при $\delta = \delta_0(\alpha,\beta,0)$ и при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2) < \delta < \delta_0(\alpha,\beta,0)$ в случаях $k_a = 1$ и $k_a \geqslant 2$, $-b/d > F(0)$; $\lambda_1 = 0$ при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2) < \delta < \delta_0(\alpha,\beta,0)$, $k_a \geqslant 2$ и $-b/d = F(0)$; $\lambda_1 > 0$ при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2) < \delta < \delta_0(\alpha,\beta,0)$, $k_a \geqslant 2$ и $-b/d < F(0)$.

Если $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$, то на основании теоремы 2 имеем $\nu_1 < \mu_1 < 0 < \nu_2$. Тогда из (31) следует, что $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_3 > 0$, причём $\lambda_2 < 0$ при $k_a \leqslant 2$ и $-b/d > F(0)$; $\lambda_2 = 0$ при $k_a \leqslant 2$ и $-b/d = F(0)$; $\lambda_2 \in (0, \nu_2)$ при $k_a \leqslant 2$ и $-b/d < F(0)$, $\lambda_2 \in [\nu_2, \mu_2)$ при $k_a \geqslant 3$.

Теперь утверждение теоремы в случае п. а) следует из теоремы 3 и формулы (12) на основании приведённых выше рассуждений. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогичным образом. Доказательство теоремы завершено.

5. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевых задач (1)–(3), (5), (13) при $q(x) \equiv 0$ и (1)–(5).

Теорема 6. *Пусть* $q(x) \equiv 0$ *в уравнении (1). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(3), (5), (13):*

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{1 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O(k^{-2})x, \quad \text{если } \ \alpha = 0, \quad c = 0, \tag{32}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{2 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi} + O(k^{-2}), \quad \text{если } \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c = 0, \tag{33}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{2 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{a/c}{k\pi} + O(k^{-2}), \quad \text{если } \ \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{34}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{3(1 + \operatorname{sgn}\beta)}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{2a/c + (1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi} + \\ + O(k^{-2}), \quad \text{если } \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c \neq 0, \tag{35}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + \\ + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + O(k^{-2})\}, \quad \text{если } \ \alpha = 0, \quad c = 0, \tag{36}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\biggl\{\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + \\ + \operatorname{sgn}\beta\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\sqrt[4]{\tau_k}}\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (1+\operatorname{sgn}\beta)\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\sqrt[4]{\tau_k}}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + (1+\operatorname{sgn}\beta)\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\sqrt[4]{\tau_k}}e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + \\ + O(k^{-2})\biggr\}, \quad \text{если } \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c = 0, \tag{37}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\biggl\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} + (-1)^{k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta} \frac{a/c}{\rho_k} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} +$$

$$+ O(k^{-2})\Bigg\}, \quad \textit{если} \ \ \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{38}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\Bigg\{\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+1-\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-\operatorname{sgn}\beta} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} - \operatorname{sgn}\beta\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\rho_k}\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\rho_k}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) +$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\rho_k} e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-\operatorname{sgn}\beta} \frac{a/c}{\rho_k} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} +$$

$$+ O(k^{-2})\Bigg\}, \quad \textit{если} \ \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c \neq 0, \tag{39}$$

причём соотношения (36)–(39) выполняются равномерно по $x \in [0, l]$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $\tau_k > 0$ при $k \geqslant 2$.

В уравнении (1) положим $q \equiv 0$ и $\lambda = \rho^4$, $\rho > 0$. Очевидно, что это уравнение имеет четыре линейно независимых решения

$$\varphi_j(x, \rho) = e^{\rho\omega_j x}, \quad j = \overline{1, 4}, \tag{40}$$

где $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = -i$, $\omega_3 = i$, $\omega_4 = 1$.

В силу (40) имеем

$$U_1(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j'(0, \rho) = \rho\omega_j, \quad \text{если} \ \ \alpha = 0, \tag{41}$$

$$U_1(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j'(0, \rho)\cos\alpha - \varphi_j''(0, \rho)\sin\alpha = -\rho^2\omega_j^2\sin\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\rho\omega_j}\right), \quad \text{если} \ \ \alpha \in (0, \pi/2], \tag{42}$$

$$U_2(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j(0, \rho) = 1, \quad \text{если} \ \ \beta = 0, \tag{43}$$

$$U_2(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j(0, \rho)\cos\beta + T\varphi_j(0, \rho)\sin\beta = \rho^3\omega_j^3\sin\beta(1 + O(\rho^{-2})), \quad \text{если} \ \ \beta \in (0, \pi/2], \tag{44}$$

$$U_3^1(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j'(l, \rho) = \rho\omega_j e^{\rho\omega_j l}, \quad \text{если} \ \ c = 0, \tag{45}$$

$$U_3^1(\lambda, \varphi_j) \equiv a\varphi_j'(l, \rho) + c\varphi_j''(l, \rho) = c\rho^2\omega_j^2 e^{\rho\omega_j l}\left(1 + \frac{a/c}{\rho\omega_j}\right), \quad \text{если} \ \ c \neq 0, \tag{46}$$

$$U_4(\lambda, \varphi_j) \equiv \varphi_j(l, \rho)\cos\delta - T\varphi_j(l, \rho)\sin\delta = -\rho^3\omega_j^3 e^{\rho\omega_j l}\sin\delta(1 + O(\rho^{-2})). \tag{47}$$

Очевидно, что $\lambda = \rho^4$ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (13), если ρ является нулём характеристического определителя

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\lambda, \varphi_1) & U_1(\lambda, \varphi_2) & U_1(\lambda, \varphi_3) & U_1(\lambda, \varphi_4) \\ U_2(\lambda, \varphi_1) & U_2(\lambda, \varphi_2) & U_2(\lambda, \varphi_3) & U_2(\lambda, \varphi_4) \\ U_3^1(\lambda, \varphi_1) & U_3^1(\lambda, \varphi_2) & U_3^1(\lambda, \varphi_3) & U_3^1(\lambda, \varphi_4) \\ U_4(\lambda, \varphi_1) & U_4(\lambda, \varphi_2) & U_4(\lambda, \varphi_3) & U_4(\lambda, \varphi_4) \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Пусть $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta = 0$, $c \neq 0$, $\delta \in [\pi/2, \pi)$ в граничных условиях (2), (3), (5), (13). Тогда в силу (41)–(47) из (48) имеем

$$\Delta_0(\lambda) = c\rho^7\sin\alpha\sin\delta \times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix} 1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho} & -\left(1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho}\right) & -\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho}\right) & 1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-\rho l}\left(1-\dfrac{a/c}{i\rho}\right) & -e^{-i\rho l}\left(1-\dfrac{a/c}{\rho}\right) & -e^{i\rho l}\left(1+\dfrac{a/c}{i\rho}\right) & e^{\rho l}\left(1+\dfrac{a/c}{\rho}\right) \\ -e^{-\rho l} & ie^{-i\rho l} & -ie^{i\rho l} & e^{\rho l} \end{vmatrix} + O(\rho^{-2})\right\} =$$

$$= -2c\varrho^7 e^{\rho l}\sin\alpha\sin\delta\times$$

$$\times\left\{(1-i)\left(1+\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho}(1+i)\right)e^{i\rho l}-(1+i)\left(1-\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho}(1-i)\right)e^{-i\rho l}+O(\rho^{-2})\right\}.$$

Отсюда следует, что нули определителя $\Delta(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$e^{2i\rho l} = i - \frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho} + O(\rho^{-2}). \tag{49}$$

Учитывая замечание 1, из теоремы 3.1 работы [14] получим асимптотическую формулу

$$\rho_k = \sqrt[4]{\tau_k} = \left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \epsilon_k, \tag{50}$$

где $\epsilon_k = O(k^{-1})$ при $k\to\infty$. Согласно (50) из (49) находим

$$e^{2i\rho_k l} = ie^{2i\epsilon_k l} = i - \frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi/l} + O(k^{-2}),$$

откуда получаем

$$\epsilon_k = \frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}). \tag{51}$$

Асимптотическое равенство (35) при $\beta=0$ следует из соотношений (50) и (51).

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (41)–(47).

В силу (35) при $\beta=0$ имеем

$$e^{i\rho_k l} = -i(-1)^k\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho_k}+O(k^{-2})\right),\quad e^{-i\rho_k l} = i(-1)^k\left(1+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho_k}+O(k^{-2})\right). \tag{52}$$

Собственная функция $v_k(x)=v(x,\tau_k)$ задачи (1)–(3), (5), (13) при $q(x)\equiv 0$, соответствующая собственному значению $\tau_k=\rho_k^4$, может быть представлена в виде

$$v_k(x) = C_{\rho_k}\begin{vmatrix} \varphi_1(x,\rho_k) & \varphi_2(x,\rho_k) & \varphi_3(x,\rho_k) & \varphi_4(x,\rho_k) \\ U_2(\lambda,\varphi_1) & U_2(\lambda,\varphi_2) & U_2(\lambda,\varphi_3) & U_2(\lambda,\varphi_4) \\ U_3^1(\lambda,\varphi_1) & U_3^1(\lambda,\varphi_2) & U_3^1(\lambda,\varphi_3) & U_3^1(\lambda,\varphi_4) \\ U_4(\lambda,\psi_1) & U_4(\lambda,\psi_2) & U_4(\lambda,\psi_3) & U_4(\lambda,\psi_4) \end{vmatrix}, \tag{53}$$

где $C_{\rho_k}\neq 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ρ_k.

В случае $\alpha\in(0,\pi/2]$, $\beta=0$, $c\neq 0$, $\delta\in[\pi/2,\pi)$ на основании формулы (35) при $\beta=0$ и равенств (43), (46), (47), (52) из (53) получим

$$v_k(x) = v(x,\rho_k) = -c\rho_k^5\sin\delta C_{\rho_k}\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix} e^{-\rho_k x} & e^{-i\rho_k x} & e^{i\rho_k x} & e^{\rho_k x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -e^{-\rho_k l}\left(1-\dfrac{a}{c\rho_k}\right) & -ie^{-i\rho_k l}\left(1-\dfrac{a}{i\rho_k}\right) & ie^{i\rho_k l}\left(1+\dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & e^{\rho_k l}\left(1+\dfrac{a}{c\rho_k}\right) \\ e^{-\rho_k l} & ie^{-i\rho_k l} & -ie^{i\rho_k} & e^{\rho_k l} \end{vmatrix} + O(\rho_k^{-2})\right\} =$$

$$= -c\rho_k^5 e^{\rho_k l} \sin\delta \times$$

$$\times C_{\rho_k} \left\{ \begin{vmatrix} e^{-\rho_k x} & e^{-i\rho_k x} & e^{i\rho_k x} & e^{\rho_k (x-l)} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\rho_k l}\left(1 - \dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & ie^{i\rho_k l}\left(1 + \dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & 1 + \dfrac{a}{c\rho_k} \\ 0 & i & e^{-i\rho_k l} - ie^{i\rho_k} & 1 \end{vmatrix} + O(\rho_k^{-2}) \right\} =$$

$$= 2i\sqrt{2}(-1)^{k+1} c\rho_k^5 e^{\rho_k l} \sin\delta \times$$

$$\times C_{\rho_k} \left\{ \sin\rho_k + (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\rho_k (x-l)} + \frac{a}{c\rho_k} \sin\rho_k x - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k} \cos\rho_k x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k} e^{-\rho_k x} + O(\rho_k^{-2}) \right\}.$$

Выберем постоянную C_{ρ_k} следующим образом:

$$C_{\rho_k} = \frac{i(-1)^k e^{-\rho_k l} \rho_k^{-5}}{2\sqrt{2l}c \sin\delta} \left(1 - \frac{a/c}{\rho_k}\right).$$

Тогда из последнего соотношения получим асимптотическую формулу (39) при $\beta = 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (32)–(35) и (41)–(47). Теорема доказана.

В силу (32)–(35) из (36)–(39) непосредственными вычислениями получим

$$\|v_k\|_2^2 = 1 + O(k^{-2}),$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в пространстве $L_2(0, l)$.

Замечание 4. Обозначим через $\Psi_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, нормированную собственную функцию задачи (1)–(3), (5), (13) при $q \equiv 0$, соответствующую собственному значению τ_k, т.е. $\Psi_k(x) = \dfrac{v_k(x)}{\|v_k\|_2}$. Тогда для $\Psi_k(x)$ имеют место асимптотические формулы (36)–(39).

Функцию $q_0(x)$, $x \in [0, l]$, и число q_0 определим следующим образом:

$$q_0(x) = \int_0^x q(t)\,dt, q_0 = \int_0^l q(t)\,dt.$$

Теорема 7. *Для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(5) справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{5 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если} \ \ \alpha = 0, \quad c = 0, \tag{54}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{6 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 2(1 + \operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если} \ \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c = 0, \tag{55}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{6 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 4a/c}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если} \ \ \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{56}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{7 + 3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 4a/c + 2(1 + \operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} +$$

$$+ O(k^{-2}), \quad \textit{если} \ \ \alpha \in (0, \pi/2], \quad c \neq 0, \tag{57}$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sgn}\beta}{l}} \Big\{ (1 - \operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (1 - \operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} +$$

$$+ (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{(1-\operatorname{sgn}\beta)q_0 - q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0 + (1-\operatorname{sgn}\beta)q_0(x)}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) +$$

$$+ (1-\operatorname{sgn}\beta)\frac{q_0 - q_0(x)}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}x} + O(k^{-2})\bigg\}, \quad \text{если} \quad \alpha = 0, \quad c = 0, \tag{58}$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\bigg\{\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} -$$

$$- \operatorname{sgn}\beta\frac{q_0(x) + 4\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - \frac{q_0(x) + 2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sgn}\beta q_0(x) + 2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} + O(k^{-2})\bigg\}, \quad \text{если} \quad \alpha \in (0, \pi/2], \quad c = 0, \tag{59}$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\bigg\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)} + (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{(1-\operatorname{sgn}\beta)(q_0 + 4a/c) - q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) -$$

$$- (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0 + 4a/c + (1-\operatorname{sgn}\beta)q_0(x)}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (1-\operatorname{sgn}\beta)\frac{q_0 + 4a/c - q_0(x)}{4\varrho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0(x)}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)} + O(k^{-2})\bigg\}, \quad \text{если} \quad \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{60}$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\bigg\{\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)} - \operatorname{sgn}\beta\frac{4\operatorname{ctg}\alpha + q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) -$$

$$- \frac{q_0(x) + 2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + \frac{\operatorname{sgn}\beta q_0(x) + 4\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0(x) - q_0 + 4a/c}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)} + O(k^{-2})\bigg\}, \quad \text{если} \quad \alpha \in (0, \pi/2], \quad c \neq 0, \tag{61}$$

причём соотношения (58)–(61) выполняются равномерно по $x \in [0, l]$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 2$. Поэтому в уравнении (1) положим $\lambda = \varrho^4$, где $\varrho > 0$. Известно (см. [26, с. 63–64]), что уравнение (1) во всякой области T комплексной ϱ-плоскости имеет четыре линейно независимых решения $\psi_j(x, \varrho)$, $j = \overline{1,4}$, регулярных относительно ϱ (при достаточно большом ϱ), удовлетворяющих соотношениям

$$\psi_j^{(s)}(x, \varrho) = (\varrho\omega_j)^s e^{\varrho\omega_j x}\bigg\{1 + \frac{q_0(x)}{4\varrho\omega_j} + O(\varrho^{-2})\bigg\}, \quad j = \overline{1,4}, \quad s = \overline{0,3}, \tag{62}$$

где $\omega_1 = -\omega_4 = -1$, $\omega_2 = -\omega_3 = -i$.

В силу (62) имеем

$$U_1(\lambda, \psi_j) = \psi_j'(0, \varrho) = \varrho\omega_j(1 + O(\varrho^{-2})), \quad \text{если} \quad \alpha = 0, \tag{63}$$

$$U_1(\lambda, \psi_j) = \psi_j'(0, \varrho)\cos\alpha - \psi_j''(0, \varrho)\sin\alpha =$$

$$= -\varrho^2\omega_j^2\sin\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho\omega_j} + O(\varrho^{-2})\right), \quad \text{если} \quad \alpha \in (0, \pi/2], \tag{64}$$

$$U_2(\lambda,\psi_j)=\psi_j(0,\rho)=1+O(\rho^{-2}),\quad \text{если}\ \ \beta=0, \tag{65}$$

$$U_2(\lambda,\psi_j)=\psi_j(0,\rho)\cos\beta+T\psi_j(0,\rho)\sin\beta=\varrho^3\sin\beta\,\omega_j^3(1+O(\rho^{-2})),\quad \text{если}\ \ \beta\in(0,\pi/2], \tag{66}$$

$$U_3(\lambda,\psi_j)=(a\lambda+b)\psi_j'(l,\varrho)+d\psi_j''(l,\varrho)=a\varrho^5\omega_j e^{\varrho\omega_j l}\left(1+\frac{q_0}{4\varrho\omega_j}+O(\rho^{-2})\right),\quad \text{если}\ \ c=0, \tag{67}$$

$$\begin{gathered}U_3(\lambda,\psi_j)=(a\lambda+b)\psi_j'(l,\varrho)+(c\lambda+d)\psi_j''(l,\varrho)=\\=c\varrho^6\omega_j^2e^{\varrho\omega_j l}\left(1+\frac{q_0+4a/c}{4\varrho\omega_j}+O(\rho^{-2})\right),\quad \text{если}\ \ c\neq0,\end{gathered} \tag{68}$$

$$\begin{gathered}U_4(\lambda,\psi_j)\equiv\psi_j(l,\varrho)\cos\delta-T\psi_j(l,\varrho)\sin\delta=\\=-\rho^3\omega_j^3e^{\varrho\omega_j l}\sin\delta\left(1+\frac{q_0}{4\varrho\omega_j}+O(\rho^{-2})\right),\quad \text{если}\ \ \delta\in[\pi/2,\pi).\end{gathered} \tag{69}$$

Пусть $\lambda=\varrho^4$ – собственное значение краевой задачи (1)–(5). Тогда ϱ является корнем характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(\lambda,\psi_1) & U_1(\lambda,\psi_2) & U_1(\lambda,\psi_3) & U_1(\lambda,\psi_4)\\ U_2(\lambda,\psi_1) & U_2(\lambda,\psi_2) & U_2(\lambda,\psi_3) & U_2(\lambda,\psi_4)\\ U_3(\lambda,\psi_1) & U_3(\lambda,\psi_2) & U_3(\lambda,\psi_3) & U_3(\lambda,\psi_4)\\ U_4(\lambda,\psi_1) & U_4(\lambda,\psi_2) & U_4(\lambda,\psi_3) & U_4(\lambda,\psi_4)\end{vmatrix}. \tag{70}$$

Если $\alpha\in(0,\pi/2]$, $\beta=0$, $c\neq0$, $\delta\in[\pi/2,\pi)$ в граничных условиях (2)–(5), то в силу соотношений (64), (65), (68) и (69) из (70) находим

$$\Delta(\lambda)=c\varrho^{11}\sin\alpha\sin\delta\,\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix}1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho} & -\left(1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\right) & -\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\right) & 1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho}\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ e^{-\rho l}\left(1-\dfrac{q_0+4a/c}{4\varrho}\right) & -e^{-i\varrho l}\left(1-\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho}\right) & -e^{i\rho l}\left(1+\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho}\right) & e^{\varrho l}\left(1+\dfrac{q_0+4a/c}{4\varrho}\right)\\ -e^{-\varrho l}\left(1-\dfrac{q_0}{4\varrho}\right) & ie^{-i\varrho l}\left(1-\dfrac{q_0}{4i\varrho}\right) & -ie^{i\varrho l}\left(1+\dfrac{q_0}{4i\varrho}\right) & e^{\varrho l}\left(1+\dfrac{q_0}{4\varrho}\right)\end{vmatrix}+O(\varrho^{-2})\right\}=$$

$$=c\varrho^{11}e^{\varrho l}\sin\alpha\sin\delta\left(1+\frac{q_0+4a/c}{4\varrho}\right)\left(1+\frac{q_0}{4\varrho}\right)\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix}1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho} & \left(1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\right) & -\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\right) & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -e^{-i\varrho l}\left(1-\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho}\right) & -e^{i\rho l}\left(1+\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho}\right) & 1\\ 0 & ie^{-i\varrho l}\left(1-\dfrac{q_0}{4i\varrho}\right) & -ie^{i\varrho l}\left(1+\dfrac{q_0}{4i\varrho}\right) & 1\end{vmatrix}+O(\varrho^{-2})\right\}=-2c\varrho^{11}e^{\varrho l}\,\times$$

$$\times\left(1+\frac{q_0+4a/c}{4\rho}\right)\left(1+\frac{q_0}{4\varrho}\right)\sin\alpha\sin\delta\left\{(1-i)\left(1+\frac{(1-i)q_0+4a/c+2(1+i)\operatorname{ctg}\alpha}{4i\varrho}\right)e^{i\varrho l}-\right.$$

$$\left.-(1+i)\left(1-\frac{(1+i)q_0+4a/c+2(1-i)\operatorname{ctg}\alpha}{4i\varrho}\right)e^{-i\varrho l}+O(\varrho^{-2})\right\}.$$

Из последнего равенства следует, что нули определителя $\Delta(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$e^{2i\varrho l} = i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2i\varrho} + O(\varrho^{-2})\right). \tag{71}$$

Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве теоремы 2 в [26, гл. 2, с. 77–79], убеждаемся, что из уравнения $e^{2i\rho l} = i + O(\rho^{-1})$ для $\varrho_k = \sqrt[4]{\lambda_k}$ вытекает асимптотическая формула

$$\varrho_{k+m_0} = \left(k + \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \varepsilon_k, \tag{72}$$

где m_0 – некоторое фиксированное целое число, $\varepsilon_k = O(k^{-1})$ при $k \to \infty$. В силу теоремы 3.1 работы [2] для собственных значений задачи (1)–(3), (5), (7) при $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $\delta \in [\pi/2, \pi)$ имеет место асимптотическая формула

$$\sqrt[4]{\mu_k} = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} + O(k^{-1}). \tag{73}$$

На основании (27)–(30) и (73) из (72) получаем, что $m_0 = 2$ и, следовательно, справедливо асимптотическое равенство

$$\varrho_k = \left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \varepsilon_k, \tag{74}$$

согласно которому из уравнения (71) находим

$$e^{2i\varrho_k l} = ie^{2i\epsilon_k l} = i(1 + 2i\epsilon_k l + O(\epsilon_k^2)) = i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2i\varrho_k} + O(\varrho_k^{-2})\right) =$$

$$= i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2ik\pi/l} + O(k^{-2})\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\epsilon_k = \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k l} + O(\varrho_k^{-2}) = \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}). \tag{75}$$

Асимптотическая формула (57) при $\beta = 0$ следует из соотношений (74) и (75).

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом с учётом равенств (63)–(69). В силу формулы (57) при $\beta = 0$ имеем

$$e^{i\varrho_k l} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4ik\pi} + O(k^{-2})\right), \tag{76}$$

$$e^{-i\varrho_k l} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\left(1 + \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4ik\pi} + O(k^{-2})\right). \tag{77}$$

Собственную функцию $y(x, \lambda_k)$ задачи (1)–(5), соответствующую собственному значению $\lambda_k = \varrho_k^4$, можем представить в виде

$$y(x, \lambda_k) = D_{\varrho_k} \begin{vmatrix} \psi_1(x, \varrho_k) & \psi_2(x, \varrho_k) & \psi_3(x, \varrho_k) & \psi_4(x, \varrho_k) \\ U_2(\lambda, \psi_1) & U_2(\lambda, \psi_2) & U_2(\lambda, \psi_3) & U_2(\lambda, \psi_4) \\ U_3(\lambda, \psi_1) & U_3(\lambda, \psi_2) & U_3(\lambda, \psi_3) & U_3(\lambda, \psi_4) \\ U_4(\lambda, \psi_1) & U_4(\lambda, \psi_2) & U_4(\lambda, \psi_3) & U_4(\lambda, \psi_4) \end{vmatrix}, \tag{78}$$

где $D_{\varrho_k} \neq 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ϱ_k.

В случае $\alpha \in (0,\pi/2]$, $\beta=0$, $c\neq 0$, $\delta\in[\pi/2,\pi)$ на основании (57) при $\beta=0$, (65), (68), (69), (76) и (77) из (78) получим

$$y(x,\lambda_k) = -c\varrho_k^9 e^{\varrho_k} D_{\varrho_k}\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix} e^{-\varrho_k x}\left(1-\dfrac{q_0(x)}{4k\pi}\right) & e^{-i\varrho_k x}\left(1-\dfrac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{i\varrho_k x}\left(1+\dfrac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{\varrho_k(x-l)}\left(1+\dfrac{q_0(x)}{4k\pi}\right) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -e^{-i\varrho_k l}\left(1-\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho_k}\right) & -e^{i\varrho_k l}\left(1+\dfrac{q_0+4a/c}{4i\varrho_k}\right) & 1+\dfrac{q_0+4a/c}{4\varrho_k} \\ 0 & ie^{-i\varrho_k l}\left(1-\dfrac{q_0}{4i\varrho_k}\right) & -ie^{-i\varrho_k l}\left(1+\dfrac{q_0}{4i\varrho_k}\right) & 1+\dfrac{q_0}{4\varrho_k} \end{vmatrix} + O(\varrho_k^{-2})\right\} =$$

$$= 2\sqrt{2}(-1)^k ic\varrho_k^9 e^{\varrho_k l} D_{\varrho_k}\left\{\sin(\varrho_k x) + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\varrho_k(x-l)} + \frac{q_0+4a/c}{4\varrho_k}\sin(\varrho_k x) - \right.$$

$$\left. - \frac{q_0(x)+2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}\cos(\varrho_k x) + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\varrho_k}e^{-\varrho_k x} + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x)}{4\varrho_k}e^{\varrho_k(x-l)}\frac{q_0(x)}{4\varrho_k} + O(\varrho_k^{-2})\right\}.$$

Постоянную D_{ϱ_k} выберем следующим образом:

$$D_{\varrho_k} = \frac{(-1)^{k+1}i\varrho_k^{-9}e^{-\varrho_k l}}{2\sqrt{2}c}\left(1-\frac{q_0+4a/c}{4\rho_k}\right).$$

Тогда из последней формулы получим равенство (61) при $\beta=0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (54)–(57) и (62)–(69). Теорема доказана.

6. О базисности в $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, подсистем собственных функций краевой задачи (1)–(5). Введём обозначение

$$\delta_k = \|\widehat{y}_k\|_H^2 = (\widehat{y}_k,\widehat{y}_k)_H = \|y_k\|_{L_2}^2 + \sigma^{-1}m_k^2. \tag{79}$$

Поскольку $\sigma>0$ и $m_k\neq 0$ (см. лемма 4), из (79) имеем

$$\delta_k>0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Замечание 5. В силу теоремы 1 система $\{\widehat{\vartheta}_k\}_{k=1}^\infty$, $\widehat{\vartheta}_k=\delta_k{}^{-1/2}\widehat{y}_k$, собственных векторов оператора L образует ортонормальный базис в пространстве H.

Замечание 6. Пусть $\{\widehat{\upsilon}_k\}_{k=1}^\infty$, $\widehat{\upsilon}_k=\{\upsilon_k(x),s_k\}$, – система, сопряжённая к системе $\{\widehat{y}_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда каждый элемент $\widehat{\upsilon}_k$, $k\in\mathbb{N}$, этой системы определяется следующим соотношением:

$$\widehat{\upsilon}_k = \delta_k^{-1}\widehat{y}_k. \tag{80}$$

Теорема 8. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^\infty$ собственных функций задачи (1)–(5) образует базис в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, который при $p=2$ является базисом Рисса. Кроме того, система $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^\infty$, сопряжённая к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^\infty$, определяется равенством*

$$u_k(x) = \upsilon_k(x) - s_k s_r^{-1}\upsilon_r(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - m_k m_r^{-1}y_r(x)\},\quad k\in\mathbb{N},\quad k\neq r. \tag{81}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6.2 в [16].

7. Равномерная сходимость разложений по системе собственных функций задачи (1)–(5). Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. В силу теоремы 8 разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{\infty} (f, u_k) y_k(x) \tag{82}$$

любой функции $f(x) \in C[0,l]$ по системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$ собственных функций спектральной задачи (1)–(5) сходится в $L_p(0,l), 1 < p < \infty,$ причём в $L_2(0,l)$ этот ряд сходится безусловно.

Теорема 9. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральные число, $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[0,l]$ функция, которая имеет равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,l]$. Тогда ряд (82) сходится равномерно на отрезке $[0,l]$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0,\pi/2]$, $\beta = 0$ и $c \neq 0$ в граничных условиях (2)–(4) и (13). В силу замечания 4 из (35) и (39) следует, что для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(3), (5), (13) при $q \equiv 0$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{2a/c + \operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k l} + O(k^{-2}) = \left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{2a/c + \operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi} + O(k^{-2}), \tag{83}$$

$$\Psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\Big\{\sin\rho_k x - (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\rho_k(x-l)} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}\cos\rho_k x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}e^{-\rho_k x} +$$
$$+ (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a/c}{\rho_k}e^{\rho_k(x-l)} + O(\rho_k^{-2})\Big\}, \tag{84}$$

причём равенство (84) выполняется равномерно по $x \in [0,l]$. Далее, на основании (83) из (84) получим

$$\Psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\bigg\{\sin\left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x - (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) +$$
$$+ \frac{(2a/c + \operatorname{ctg}\alpha)x - l\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\cos\left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \frac{l\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) -$$
$$- (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(2a/c + \operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - 2la/c}{2k\pi}\exp\left(\left(k - \frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)\bigg\} + O(k^{-2}). \tag{85}$$

Из (57) и (61) для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(5) при $\alpha \in \in (0,\pi/2]$, $\beta = 0$ и $c \neq 0$ имеем асимптотические формулы

$$\varrho_k = \sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}),$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\Big\{\sin\varrho_k x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\varrho_k(x-l)} - \frac{q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}\cos\varrho_k x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\varrho_k}e^{-\varrho_k x} +$$
$$+ (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x) - q_0 - 4a/c}{4\varrho_k}e^{\varrho_k(x-l)} + O(\varrho_k^{-2})\Big\} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\bigg\{\sin\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) +$$
$$+ \frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)x - (q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\cos\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) +$$
$$+ (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - (q_1(x) + 4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) + O(k^{-2})\bigg\}, \tag{86}$$

причём соотношение (86) выполняется равномерно по $x \in [0,l]$.

Из формул (85) и (86) следует, что при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$y_k(x) = \Psi_{k-1}(x) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\frac{q_0 x - q_0(x)l}{4k\pi}\cos\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x-l) - q_1(x)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)\right\} + O(k^{-2}). \quad (87)$$

Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве теоремы 7, убеждаемся, что справедливы следующие асимптотические представления:

$$y_k'(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left\{\cos\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) - \right.$$

$$- \frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)x - (q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\sin\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) +$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - (q_1(x) + 4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) + O(k^{-2})\right\}, \quad (88)$$

$$y_k''(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(k - \frac{7}{4}\right)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left\{-\sin\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) - \right.$$

$$- \frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)x - (q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\cos\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) +$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - (q_1(x) + 4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) + O(k^{-2})\right\}. \quad (89)$$

Из (88) и (89) следует, что

$$y_k'(l) = (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(1 - \frac{a}{ck\pi} + O(k^{-2})\right),$$

$$y_k''(l) = (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(-\frac{a}{c} + O(k^{-1})\right).$$

Тогда в силу (4) имеем

$$m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l) = -\frac{by_k'(l) + dy_k''(l)}{\lambda_k} = -\frac{by_k'(l) + dy_k''(l)}{\varrho_k^4} =$$

$$= (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(\frac{\sigma}{c} + O(k^{-1})\right)\right)\left(\left(k - \frac{7}{4}\right)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4(1 + O(k^{-2}))\right)^{-1} = O(k^{-3}). \quad (90)$$

Пользуясь формулами, приведёнными в работе [22, с. 296–297], убеждаемся, что справедлива формула

$$\|y_k\|_2^2 = 1 + O(k^{-2}). \quad (91)$$

Тогда в силу (90) и (91) из (79) находим

$$\delta_k = \|y_k\|_2^2 + \sigma^{-1}m_k^2 = 1 + O(k^{-2}). \quad (92)$$

Пусть r – произвольное фиксированное натуральное числа. В силу (90)–(92) и (80) из (81) получим

$$u_k(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - m_k {m_r}^{-1} y_r(x)\} = y_k(x) + O(k^{-2}). \quad (93)$$

Заметим, что для равномерной сходимости ряда (82) необходима и достаточна равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,u_k)y_k(x). \tag{94}$$

На основании (93) имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,u_k)y_k(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)y_k(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}O(k^{-2}).$$

Асимптотическая формула (87) показывает, что справедливо соотношение

$$y_k(x)=\Psi_{k-1}(x)+O(k^{-1}),$$

согласно которому имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)y_k(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)O(k^{-1}).$$

Так как система $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,l),$ то имеет место оценка

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)O(k^{-1})|\leqslant\mathrm{const}\bigg\{\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)|^2+\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\bigg\}<+\infty.$$

Следовательно, для равномерной сходимости ряда (94) достаточно исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x). \tag{95}$$

Введём обозначения

$$P_1(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{q_0x-q_0(x)l}{4\pi},\quad P_2(x)=(-1)^k\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x-l)-q_1(x)l}{4\pi},$$

$$e_{k,1}(x)=\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x,\quad e_{k,2}(x)=\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right),\quad x\in[0,l].$$

Тогда в силу (87) запишем

$$y_k(x)=\Psi_{k-1}(x)+k^{-1}P_1(x)e_{k,1}(x)+k^{-1}P_2(x)e_{k,2}(x)+O(k^{-2}),$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-1})\Psi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}k^{-1}(fP_1,e_{k,1})\Psi_{k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=r+1}^{\infty}k^{-1}(fP_2,e_{k,2})\Phi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}O(k^{-2})\Psi_{k-1}(x).$$

В силу [29, лемма 5] каждая из систем $\{e_{k,j}\}_{k=1}^{\infty},$ $j=1,2,$ является бесселевой. Следовательно, имеют место оценки

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\left|\frac{(fP_j,e_{k,j})}{k}\right|\leqslant\mathrm{const}\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=l+1}^{\infty}|(fP_j,e_{k,j})|^2\right)\leqslant\mathrm{const}(1+\|f\|_2^2),\quad j=1,2.$$

Таким образом, ряд (95) сходится равномерно на отрезке $[0,l]$, поскольку в силу условия теоремы ряд $\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-1})\Psi_{k-1}(x)$ сходится равномерно на этом же отрезке.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Теорема доказана.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту за ценные замечания и комментарии, способствовавшие значительному улучшению текста статьи и пониманию полученных в ней результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М., 1978.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1951.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1599–1604.
5. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 20–24.
6. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504–1507.
7. *Капустин Н.Ю.* О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1143–1145.
8. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе C^1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
9. *Алиев З.С., Дуньямалиева А.А.* Дефектная базисность системы корневых функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1249–1266.
10. *Kerimov N.B., Goktas S., Maris E.A.* Uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions for a spectral problem // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 80. P. 1–14.
11. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of the Fourier series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. № 9. P. 2298–2309.
12. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of Fourier series expansions for Sturm–Liouville problems with a spectral parameter in the boundary conditions // Results Math. 2018. V. 73. № 3. P. 1–16.
13. *Керимов Н.Б.* О базисных свойствах в L_p оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 148–157.
14. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
15. *Aliyev Z.S.* Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. № 2. P. 378–388.
16. *Алиев З.С.* Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 766–777.
17. *Aliyev Z.S., Guliyeva S.B.* Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load // J. Differ. Equat. 2017. V. 263. № 9. P. 5830–5845.
18. *Aliyev Z.S., Mamedova G.T.* Some properties of eigenfunctions for the equation of vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions // J. Differ. Equat. 2020. V. 269. № 2. P. 1383–1400.
19. *Курбанов В.М.* Условия абсолютной и равномерной сходимости биортогонального ряда, отвечающего дифференциальному оператору // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 594–596.
20. *Kurbanov V.M., Huseynova Y.I.* On convergence of spectral expansion of absolutely continuous vector-function in eigenvector-functions of fourth order differential operator // Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2014. V. 34. № 1. P. 83–90.

21. *Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. I // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 147–161.
22. *Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. II // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 291–302.
23. *Namazov F.M.* Uniform convergence of Fourier series expansions for a fourth-order spectral problem with boundary conditions depending on the eigenparameter // Bull. Iran. Math. Soc. 2021. V. 47. № 2. P. 225–235.
24. *Banks D.O., Kurowski G.J.* A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differ. Equat. 1977. V. 24. № 1. P. 57–74.
25. *Kerimov N.B., Aliyev Z.S.* On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2005. V. 25. № 4. P. 63–76.
26. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
27. *Aliyev Z.S.* Structure of root subspaces and oscillation properties of eigenfunctions of one fourth order boundary value problem // Azerbaijan J. Math. 2014. V. 4. № 2. P. 108–121.
28. *Амара Ж. Бен, Владимиров А.А.* Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 41–52.
29. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.

Бакинский государственный университет,
Азербайджан,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку,
Сумгаитский государственный университет,
Азербайджан

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
После доработки 04.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1186–1192

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. А. Я. Янченко

Исследованы целые решения (решения, являющиеся целыми функциями) для алгебраических дифференциальных уравнений вида $P(y,y^{(n)})+Q(z,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$ (где P, Q – многочлены с комплексными коэффициентами, причём степень Q меньше, чем степень P). Показано, что (при некоторых ограничениях на многочлен P) все целые трансцендентные решения таких уравнений являются квазимногочленами.

DOI: 10.31857/S0374064122090023, EDN: CHOUZA

1. Исторический обзор. Формулировка основной теоремы. Одной из задач теории алгебраических дифференциальных уравнений в комплексной области является задача описания их целых решений. Получено довольно много результатов для линейных (по y, y', ..., $y^{(n)}$) уравнений. Что же касается нелинейного случая, то почти все полученные результаты относятся к конкретным уравнениям, например, хорошо изучены уравнения Пенлеве (см. [1, с. 78]). Имеющиеся к настоящему времени результаты, относящиеся к более или менее общим классам нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений (помимо классических теорем Брио–Буке–Эрмита и Пикара, описывающих, в частности, целые решения уравнений вида $P(y,y')=0$ и $P(y,y'')=0$), рассматривают в основном достаточно специфические целые решения таких уравнений – многочлены или целые функции, имеющие конечное число нулей (с такими результатами можно ознакомиться, например, в монографии [2]).

В последние годы автором данной статьи разработана некоторая техника, с помощью которой удалось получить для некоторого класса нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений (т.н. уравнений с выделенной линейной частью) описание их целых решений конечного порядка [3, 4].

В данной работе использование этой техники совместно с применением теории максимального члена Вимана–Валерона позволило описать все целые решения уже другого общего класса нелинейных уравнений, при этом на возможные целые решения изначально не накладывается условие конечности их порядка.

Через $\mathbb{C}[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ будем обозначать кольцо многочленов от переменных ω_1, ..., ω_n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – целая функция, то положим (при всяком $R>0$) $M_f(R)=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$; порядок ρ целой функции $f(z)$ определяется равенством

$$\rho=\overline{\lim_{R\to+\infty}}\,\frac{\ln\ln M_f(R)}{\ln R},$$

при этом если $\rho<+\infty$, то говорят, что $f(z)$ – *функция конечного порядка.* Если целая функция $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, то при всяком $R>0$ максимальный член $m_f(R)$ определяется равенством $m_f(R)=\max\limits_k|a_k|R^k$; центральный индекс $\nu_f(R)$ определяется как наибольшее значение k_0, при котором $m_f(R)=|a_{k_0}|R^{k_0}$ (см., например, [5, с. 11; 6, с. 10]).

Основной результат работы – установление справедливости следующей теоремы.

Теорема. *Пусть n, d – натуральные числа и $P\in\mathbb{C}[z,\omega_0,\ldots,\omega_n]$, $P=\sum_{l=0}^{d}P_l$, где при всяком $l=\overline{0,d}$ P_l – однородный многочлен (по совокупности переменных ω_0, ..., ω_n) степени l. При этом $P_d=\prod_{j=1}^{d}(\omega_n-\alpha_j\omega_0)$, где α_1, ..., α_d – различные комплексные числа.*

Пусть $y = f(z)$ *– целая функция, являющаяся решением дифференциального уравнения* $P(z, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. *Тогда найдутся натуральное* N, *комплексные числа* $\beta_1, \ \ldots, \ \beta_N$ *и многочлены* $q_1(z), \ldots, q_N(z) \in \mathbb{C}[z]$ *такие, что*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} q_j(z) e^{\beta_j z}.$$

Несложно привести примеры дифференциальных уравнений, описанных в теореме. Таким является уравнение

$$(y^{(4)})^2 - y^2 - zy^{(3)} - zy = 0$$

(с целым решением $y = e^z - z$).

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция. Тогда существует измеримое множество* $E_f \subset \subset [0; +\infty)$ *такое, что:*

а) $\int_{E_f} (1/r)\, dr < +\infty$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся число* $R_0 \equiv R_0(\varepsilon) > 0$ *такое, что при всех* $R > R_0$, $R \notin E_f$, *справедливы оценки*

$$M_f(R) < m_f(R)(\ln m_f(R))^{\varepsilon + 1/2}, \quad \nu_f(R) < \ln(m_f(R))^{1+\varepsilon}.$$

Лемма 1 является следствием теоремы Вимана–Валерона [5, с. 22, оценки (5), (6)].

Замечание. Множество E_f из условий леммы 1 будем далее называть *исключительным множеством* функции f.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция,* E_f *– её исключительное множество. Пусть при любом* $R > 0$ ξ_r *– такая точка, что* $|\xi_R| = R$ *и* $|f(\xi_R)| = M_f(R)$. *Пусть* j *– натуральное число. Тогда для любого* $\delta \in (0; 1/4)$ *найдётся постоянная* γ_1, *не зависящая от* R, *такая, что при каждом* $R > 0$, $R \notin E_f$, *следует*

$$f^{(j)}(\xi_R) = \left(\frac{\nu_f(R)}{\xi_R} \right)^j f(\xi_R)(1 + \eta_j(\xi_R)),$$

где $|\eta_j(\xi_R)| \leqslant \gamma_1 (\nu_f(R))^{\delta - 1/4}$.

Лемма 2 доказывается, например, в [5, с. 25, соотношение (8)].

Лемма 3. *Пусть* $f(z)$ *– целая трансцендентная функция,* E_f *– её исключительное множество. Пусть существуют постоянные (не зависящие от* R*)* $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ *такие, что при всех* $R \notin E_f$ *справедлива оценка*

$$\nu_f(R) \leqslant \gamma_1 R^{\gamma_2}.$$

Тогда $f(z)$ *– целая функция конечного порядка.*

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$. Так как $f(z)$ – целая функция, то $\max\limits_k |C_k| \leqslant C$ при некотором $C \in \mathbb{R}$. Отсюда в силу определения $m_f(R)$ имеем оценку $m_f(R) \leqslant C R^{\nu_f(R)}$.

Применим лемму 1, выбрав число $\varepsilon = 1/2$. Тогда найдётся $R_0 > 0$ такое, что при любом $R > R_0$, $R \notin E_f$, выполняются неравенства

$$M_f(R) \leqslant (C R^{\nu_f(R)}) \ln(C R^{\nu_f(R)}) \leqslant (C R^{\nu_f(R)})^2 \leqslant C^2 R^{2\gamma_1 R^{\gamma_2}}.$$

Поэтому найдутся постоянные $\gamma_3, \gamma_4 > 0$ такие, что при любом $R \notin E_f$ справедлива оценка

$$M_f(R) \leqslant e^{\gamma_3 R^{\gamma_4}}.$$

Далее, из свойств исключительного множества E_f следует, что найдётся постоянная $\gamma_5 > 0$ такая, что $\int_{E_f}(1/r)\,dr < \gamma_5$. Пусть $R > e^{\gamma_5}+1$. Покажем, что существует хотя бы одна точка $A \in [R, R^2]$, не лежащая в E_f. Если бы это было не так, то из оценок

$$\gamma_5 \geqslant \int\limits_{E_f} \frac{dr}{r} \geqslant \int\limits_{R}^{R^2} \frac{dr}{r} = \ln R$$

получили бы противоречие с оценкой $R > e^{\gamma_5}+1$. Тогда справедливы неравенства

$$M_f(R) \leqslant M_f(A) \leqslant \exp(\gamma_3 A^{\gamma_4}) \leqslant \exp(\gamma_3 R^{2\gamma_4})$$

при любом $R > e^{\gamma_5}+1$, что означает конечность порядка функции $f(z)$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* n, d *– натуральные числа,* $P \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \ldots, \omega_n]$ *и* $P = \sum_{l=1}^{d} P_l$, *где:*

а) при всяком l P_l *– однородный многочлен степени* l *по совокупности переменных* $\omega_0, \ldots, \omega_n$;

б) $P_d = \prod_{j=1}^{d}(\omega_n - \alpha_j\omega_0)$, $\{\alpha_j\} \in \mathbb{C}$.

Пусть $y = f(z)$ *– целая трансцендентная функция, удовлетворяющая уравнению*

$$P(z, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда $f(z)$ *– функция конечного порядка.*

Доказательство. При всяком R, не лежащем в исключительном множестве E_f, выберем какую-либо точку ξ_R с условием $M_f(R) = |f(\xi_R)|$. Предположим, что существует бесконечная числовая последовательность $R_k \notin E_f$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k = +\infty$, и при любом k

$$\nu_f(R_k) > R_k^2.$$

Применив лемму 2 (со значением $\delta = 1/8$), найдём, что существует $R_0 > 0$ такое, что при всяком $R_k > R_0$ и при любом $j = \overline{1,n}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^j \leqslant \left|\frac{f^{(j)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})}\right| \leqslant 2\biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^j. \tag{1}$$

Пусть далее $R_k > R_0$. Рассмотрим равенство

$$P(\xi_{R_k}, f(\xi_{R_k}), \ldots, f^{(n)}(\xi_{R_k})) = 0,$$

равносильное равенству $I_1 = I_2$, где

$$I_1 = (f(\xi_{R_k}))^d \prod_{j=1}^{d}\biggl(\frac{f^{(n)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})} - \alpha_j\biggr), \quad I_2 = \sum_{l=1}^{d-1} P_l\biggl(\xi_{R_k}, 1, \ldots, \frac{f^{(n)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})}\biggr) f^l(\xi_{R_k}).$$

Учитывая оценки (1) и то, что $\nu_f(R_k) > R_k^2$, получаем при достаточно большом R_k

$$|I_1| \geqslant |f(\xi_{R_k})|^d \prod_{j=1}^{d}\biggl(\frac{1}{2}\biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^n - |\alpha_j|\biggr) \geqslant \gamma_1 |f(\xi_{R_k})|^d \biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^{nd}$$

для некоторой постоянной $\gamma_1 > 0$. Аналогично можно показать, что

$$|I_2| \leqslant (d-1)HR^m\biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^{n(d-1)} \leqslant \gamma_2 R^{\gamma_3} |f(\xi_{R_k})|^{d-1}\biggl(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\biggr)^{n(d-1)},$$

здесь H – сумма модулей всех коэффициентов всех многочленов $P_1, \ldots, P_{d-1}$; m – максимальная степень по переменной z у всех многочленов $P_1, \ldots, P_{d-1}$; $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ – постоянные, не зависящие от R_k.

Отсюда, учитывая, что $|I_1| = |I_2|$, найдём

$$|\nu_f(R_k)| \leqslant \gamma_4 R_k^{1+\gamma_3/n} \frac{1}{|f(\xi_{R_k})|}. \tag{2}$$

Так как $f(z)$ – трансцендентная функция, то правая часть в неравенстве (2) стремится к нулю при $R_k \to +\infty$, откуда следует, что и $\nu_f(R_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, что противоречит оценкам (1). Но тогда найдётся постоянная $\gamma_5 > 0$, не зависящая от R, такая, что при всех $R \notin E_f$ следует неравенство $\nu_f(R) \leqslant \gamma_5 R^2$, откуда в силу леммы 3 заключаем, что $f(z)$ – функция конечного порядка. Лемма 4 полностью доказана.

Лемма 5 ([3], лемма 3). *Пусть $h(z)$ – целая функция конечного порядка не выше ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $R_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что справедливо следующее утверждение: при любых $R > R_0$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество B_R кругов с суммой радиусов не более $2H$ таким образом, что при любом $z \in C_R \setminus B_R$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqslant \delta\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right). \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi(z)$ – целая функция конечного порядка не выше ρ. Тогда при всяком $j \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа R_j и σ_j такие, что справедливо утверждение: при любых $R > R_j$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество $B_{j,R}$ кругов с суммой радиусов не более $2jH$ таким образом, что при всяком $z \in C_R \setminus B_{j,R}$ верна оценка*

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \sigma_j\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^j. \tag{4}$$

Доказательство. Отметим, что при любом $l \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(l)}(z)$ – целая функция порядка не выше ρ (см., например, [6, гл. 1]). Применим лемму 5 к каждой из $\varphi^{(l)}(z)$ при всех $l = \overline{0, j-1}$.

Пусть $B_{j,R}$ – объединение совокупностей исключительных кругов при всех $l = \overline{0, j-1}$; $\delta_0, \ldots, \delta_{j-1}$ – соответствующие постоянные из неравенства (3). Тогда сумма радиусов всех кругов из $B_{j,R}$ не более чем $2jH$, и при всех $z \in C_R \setminus B_{j,R}$ выполняется оценка

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| = \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right|\cdots\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi^{(j-1)}(z)}\right| \leqslant \delta_0\cdots\delta_{j-1}\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^j.$$

В завершение доказательства положим $\sigma_j = \delta_0 \cdots \delta_{j-1}$.

Следствие 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_r(z)$ – целые функции конечного порядка не выше ρ. Тогда при всяком $s \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $R_{s,r}$ и $\lambda_{s,r}$ такие, что справедливо утверждение: при любых $R > R_{s,r}$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество $B_{r,s,R}$ кругов с суммой радиусов не более $2rsH$ таким образом, что при всяком $z \in C_R \setminus B_{r,s,R}$ и при любых $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$ верны оценки*

$$\left|\frac{\varphi_k^{(j)}(z)}{\varphi_k(z)}\right| \leqslant \lambda_{s,r}\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^s.$$

Замечание. Для доказательства следствия 2 достаточно применить следствие 1 к каждой из функций $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_r(z)$ и, объединив выброшенные в каждом случае круги, взять в качестве правой части искомого неравенства максимум из правых частей всех неравенств вида (4).

Лемма 6 ([4], § 2, лемма 2). *Пусть* $\delta \in (0;1)$; $R > 10^{1/\delta}$; B_R *– конечное множество кругов с общей суммой радиусов менее* $2R^{1-\delta}$, *лежащих в кольце* $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$. *Тогда найдётся число* $R_1 \in (2R, 3R)$ *такое, что окружность* $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ *не пересекается с множеством* B_R.

3. Доказательство теоремы. Далее через γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать положительные постоянные, которые зависят только от функции $f(z)$ и многочлена P (и не зависят от определённых далее чисел R). По условию $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$P_d(f(z), f^{(n)}) + Q(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = 0, \tag{5}$$

где $P_d(\omega_0, \omega_n) = \prod_{j=1}^{d}(\omega_n - \alpha_j\omega_0)$, а степень многочлена Q (по совокупности переменных ω_0, $\ldots$, ω_n) не превосходит $d-1$. Так как при $d = 1$ утверждение теоремы очевидно выполняется, то в дальнейшем считаем, что $d \geqslant 2$.

Согласно лемме 4 функция $f(z)$ имеет конечный порядок. Пусть этот порядок равен ρ. Положим $K = 100(nd + \deg_z Q)^2(\rho + 1)$. Обозначим через $\mathcal{L}$ следующее множество функций:

$$\mathcal{L} = \{f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z), f^{(n)}(z) - \alpha_1 f(z), \ldots, f^{(n)}(z) - \alpha_d f(z)\}.$$

Тогда каждая из функций множества $\mathcal{L}$ имеет порядок, не превосходящий ρ, и найдётся постоянная γ_1 такая, что при любом $R > \gamma_1$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ справедливы оценки

$$M_{\varphi^{(j)}}(4R) \leqslant \exp(R^{\rho+1}).$$

Применим следствие 2 из леммы 5, согласно которому существуют постоянные $\gamma_2, \gamma_3 > 0$, что при любом $R > \gamma_2$ найдётся конечное число кругов B_R такое, что:

а) $B_R \subset \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$;

б) сумма радиусов всех кругов из B_R не превосходит $R^{1/2}$;

в) при любом $z \in \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\} \setminus B_R$ для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \{0, 1, \ldots, 3nd\}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \gamma_3 R^K.$$

Далее, согласно лемме 6 найдётся $\gamma_4 > 1$, что при любом $R > \gamma_4$ существует число $R_1 \subset (2R, 3R)$ такое, что окружность $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ лежит во множестве $\{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\} \setminus B_R$ и, следовательно, для любой точки $z \in \beta_{R_1}$, любой функции $\varphi \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \{0, 1, \ldots, 3nd\}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \gamma_3 R^K. \tag{6}$$

Фиксируем произвольное достаточное большое R. Пусть многочлен Q из равенства (5) имеет вид

$$Q = \sum_{j_0+\ldots+j_n \leqslant d-1} a_{j_1,\ldots,j_n}(z)\omega_0^{j_0} \cdots \omega_n^{j_n}.$$

Тогда из (5) при любом $z \in \beta_{R_1}$ получим

$$|f(z)|^d \prod_{j=1}^{d} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} - \alpha_j\right| \leqslant \sum_{j_0+\ldots+j_n \leqslant d-1} |a_{\overline{j}}(z)| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^{j_1} \cdots \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right|^{j_n} |f(z)|^{j_0+\ldots+j_n},$$

откуда, учитывая выбор параметра K, имеем неравенство

$$|f(z)|^d \prod_{j=1}^{d} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} - \alpha_j\right| \leqslant \gamma_5(|f(z)|+1)^{d-1} R^{K(d-1/2)}. \tag{7}$$

Пусть $z_0 \in \beta_{R_1}$ и $|f(z_0)| > R^{2Kd}$. Из (7) находим

$$\prod_{j=1}^{d} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j\right| \leqslant \gamma_6 \frac{R^{K(d-1/2)}}{|f(z_0)|}. \tag{8}$$

Здесь согласно условиям теоремы все числа α_j различны.

Пусть j_0 таково, что справедливо неравенство

$$\min_j \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j\right| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0}\right|.$$

Тогда из (8) имеем

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0}\right|^d \leqslant \prod_{j=1}^{d} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j\right| \leqslant \gamma_6 \frac{R^{K(d-1/2)}}{R^{2Kd}},$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0}\right| \leqslant \frac{\gamma_7}{R^K}.$$

Если $j \neq j_0$, то (при достаточно большом R)

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j\right| \geqslant |\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0}\right| \geqslant |\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \frac{\gamma_7}{R^K} \geqslant \frac{1}{2}|\alpha_j - \alpha_{j_0}|.$$

Из (8) будем иметь

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0}\right| \leqslant \gamma_8 \frac{R^{K(d-1/2)}}{|f(z_0)|}$$

или

$$|f^{(n)}(z) - \alpha_{j_0} f(z_0)| \leqslant \gamma_8 R^{K(d-1/2)}.$$

Если же $|f(z_0)| \leqslant R^{2Kd}$, то из (6) следует, что

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \gamma_9 R^{3Kd},$$

откуда получим

$$|f^{(n)}(z_0) - \alpha_{j_0} f(z_0)| \leqslant \gamma_{10} R^{3Kd}.$$

Таким образом, при достаточно большом $R > \gamma_{11}$ и при любом $z \in \beta_{R_1}$ найдётся натуральное число $j(z) \in \{1, \ldots, d\}$ такое, что

$$|f^{(n)}(z) - \alpha_{j(z)} f(z)| \leqslant \gamma_{12} R^{3Kd}.$$

Но тогда, согласно (6), при всех $l = \overline{0, 2nd}$ справедливы оценки

$$|f^{(n+l)}(z) - \alpha_{j(z)} f^{(l)}(z)| \leqslant \gamma_{13} R^{4Kd}. \tag{9}$$

Отсюда при всех $s=\overline{1,d}$ имеют место неравенства

$$|f^{(ns)}(z)-\alpha_{j(z)}^{s}f(z)|\leqslant(1+|\alpha_{j(z)}|)^{s}\gamma_{13}R^{4Kd}. \qquad (10)$$

Действительно, применив индукцию:
1) при $s=1$ получим оценку (9);
2) если (10) верно при $s=t$, то при $s=t+1$ имеем

$$|f^{(n(t+1))}(z)-\alpha_{j(z)}^{t+1}f(z)|\leqslant|f^{(n(t+1))}(z)-\alpha_{j(z)}f^{(nt)}(z)|+|\alpha_{j(z)}f^{(nt)}(z)-\alpha_{j(z)}^{t+1}f(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_{13}R^{4Kd}+|\alpha_{j(z)}|(1+|\alpha_{j(z)}|)^{t}\gamma_{13}R^{4Kd}\leqslant(1+|\alpha_{j(z)}|)^{t+1}\gamma_{13}R^{4Kd}.$$

Справедливость неравенств (10) доказана.

Пусть $Q(t)=\prod_{j=1}^{d}(t-\alpha_j)=t^d+a_{d-1}t^{d-1}+\ldots+a_0$. Положим

$$L(f)=f^{(nd)}+a_{d-1}f^{(n(d-1))}+\ldots+a_1f^{(n)}+a_0.$$

Тогда (учитывая, что $Q(\alpha_{j(z)})=0$ при всех $j(z)$) найдём, что при любом $z\in\beta_{R_1}$

$$|L(f(z))|=|L(f(z))-Q(\alpha_{j(z)})f(z)|\leqslant$$

$$\leqslant|f^{(dn)}(z)-\alpha_{j(z)}^{d}f(z)|+|a_{d-1}||f^{((d-1)n)}(z)-\alpha_{j(z)}^{d-1}f(z)|+\ldots+|a_0||f(z)-f(z)|\leqslant\gamma_{15}R^{4Kd}.$$

Таким образом, при всяком достаточно большом R для целой функции $L(f(z))$ имеет место оценка

$$\max_{|z|\leqslant R}|L(f(z))|\leqslant\max_{z\in\beta_{R_1}}|L(f(z))|\leqslant\gamma_{14}R^{4Kd}.$$

Тогда по теореме Лиувилля $L(f(z))=q(z)$ при некотором многочлене $q(z)\in\mathbb{C}[z]$, т.е. функция $y=f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$y^{(dn)}+a_{d-1}y^{((d-1)n)}+\ldots+a_1y^{(n)}+a_0y=q(z),$$

откуда следует, что $f(z)$ – квазимногочлен. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., 1950.
2. *Горбузов В.Н.* Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений. Гродно, 2006.
3. *Подкопаева В.А., Янченко А.Я.* О целых решениях конечного порядка одного класса алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1318–1322.
4. *Янченко А.Я.* О некоторых арифметических свойствах значений целых функций конечного порядка и их первых производных // Мат. сб. 2019. Т. 210. № 12. С. 136–150.
5. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1987.
6. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 28.03.2022 г.
После доработки 11.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1193–1204

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.983

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2022 г. С. П. Зубова, Е. В. Раецкая

Исследуется разрешимость полуграничной задачи в банаховом пространстве для уравнения в частных производных с необратимыми операторными коэффициентами. За счёт регулярности операторного пучка уравнение расщепляется на два уравнения в подпространствах. Выявляются условия разрешимости задач, поставленных для этих уравнений, и строятся решения.

DOI: 10.31857/S0374064122090035, EDN: CHUCTT

Введение. Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где $A: E_1 \to E_2$ – линейный замкнутый фредгольмов оператор с нулевым индексом, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$; $B \in L(E_1 \to E_2)$; E_1, E_2 – банаховы пространства; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0, t_k]$, $X = [0, x_k]$; $u = u(t,x)$ – искомая вектор-функция.

Под решением уравнения (1) понимается вектор-функция $u = u(t,x) \in \operatorname{dom} A$, непрерывно дифференцируемая по t и по x, удовлетворяющая (1) при всех $(t,x) \in T \times X$.

Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in X, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие вектор-функции со значениями в E_2.

Интерес к уравнениям в частных производных с необратимым оператором при производной по выделенной переменной привлекла работа С.Л. Соболева [1], вследствие чего такие уравнения называют *уравнениями соболевского типа*. Уравнениями указанного типа описываются процессы гидродинамики, тепло- и влагопереноса, процессы в электромеханических системах (см., например, [2–4]).

Исследование уравнения (1) можно сопоставить с исследованием уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = Bz(t) \tag{4}$$

с коэффициентами A и B, описанными выше, а решение задачи (1)–(3) – с решением уравнения (4), удовлетворяющим условию

$$z(0) = z_0 \in \operatorname{dom} A. \tag{5}$$

При этом можно использовать многие факты, полученные при решении задачи (4), (5), начало исследования которой было положено, по-видимому, в середине XX века на семинаре проф. Л.А. Люстерника в Московском государственном университете.

В частном случае конечномерных пространств E_1, E_2 определённые результаты описаны в книге [5, гл. XII, § 7]; в конечномерном случае значительные результаты получены в работах [6–9], в банаховом пространстве – в [10, 11].

С шестидесятых годов прошлого века активные исследования задачи (4), (5) велись в Воронежской математической школе под руководством проф. С.Г. Крейна. Подробные результаты получены в работах [12–15], часть их приведена в Математической энциклопедии [16, с. 332–337]. Опишем основные результаты.

В случае регулярного операторного пучка $A-\lambda B$ (т.е. обратимости пучка при достаточно малых по модулю и не равных нулю λ $(\lambda \in \dot{\bigcup}(0) \bigcap \mathbb{C})$) оператор $A_\lambda = (A-\lambda B)^{-1}A\colon\ \operatorname{dom} A \to \to E_1$ имеет число нуль нормальным собственным числом, т.е. имеет место разложение E_1 в прямую сумму

$$E_1 = M \bigoplus N, \tag{6}$$

где N – корневое подпространство для A_λ; M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\tilde{A_\lambda}$ оператора A_λ на M обратимо (см. [12]). Определение нормального собственного числа приведено в [17, гл. I, § 2].

Далее: решение задачи (4), (5) существует в том и только в том случае, если $z_0 \in M$. Само решение целиком лежит в M и оно единственно. Получена формула для решения.

Результаты получены и в случае неоднородного уравнения (4), и в случае переменных коэффициентов A и B, и в случае ненулевого индекса оператора A.

Задача (1)–(3) в пространстве $\mathbb{R}^n$ с дополнительным слагаемым $Cu(t,x)$, с постоянными или переменными коэффициентами исследована в работах В.Ф. Чистякова, в частности, в статьях [18, 19], в которых получены определённые условия разрешимости задачи, построено частное решение.

Цель настоящей работы – построить решение задачи (1)–(3). Для этого требуется определить необходимые условия согласования для функций $\varphi(x)$, $\psi(t)$, достаточную степень их гладкости, убедиться, что достаточным условием на коэффициенты A и B для решения поставленных задач является условие регулярности пучка $A-\lambda B$.

1. Расщепление уравнения и краевых условий. Пусть пучок $A-\lambda B$ регулярен; P_N и P_M – проекторы на подпространства N и M соответственно, отвечающие разложению (6). Тогда

$$u(t,x) = P_M u(t,x) + P_N u(t,x). \tag{7}$$

Обозначим $P_M z = z_M$, $P_N z = z_N$ для любого $z \in E_1$.

Представление $B = \lambda^{-1}(\lambda B - A + A)$ и умножение уравнения (1) слева на $(A-\lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - I)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{8}$$

и поскольку M и N инвариантны относительно A_λ, то, подставив (7) в (8) и отделив слагаемые в M и N, получим в подпространстве M

$$\tilde{A}_\lambda \frac{\partial u_M}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - P_M)\frac{\partial u_M}{\partial x} \tag{9}$$

и в подпространстве N

$$A_\lambda \frac{\partial u_N}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - P_N)\frac{\partial u_N}{\partial x}. \tag{10}$$

В M оператор A_λ обратим, следовательно, уравнение (9) разрешается относительно производной по t следующим образом:

$$\frac{\partial u_M}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(P_M - \tilde{A_\lambda}^{-1})\frac{\partial u_M}{\partial x}. \tag{11}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из равенства (7) и двух дифференциальных уравнений (10), (11).*

Замечание 1. Равенство (7) – алгебраическое уравнение для нахождения функции $u(t,x)$, в этом смысле уравнение (1) является дифференциально-алгебраическим.

Из (7) следует, что

$$u(0,x) = u_M(0,x) + u_N(0,x) = \varphi_M(x) + \varphi_N(x),$$

$$u(t,0) = u_M(t,0) + u_N(t,0) = \psi_M(t) + \psi_N(t),$$

отсюда получим

$$u_M(0,x) = \varphi_M(x), \quad u_M(t,0) = \psi_M(t), \tag{12}$$

$$u_N(0,x) = \varphi_N(x), \quad u_N(t,0) = \psi_N(t). \tag{13}$$

Недостатком уравнений (10) и (11) является наличие в них параметра λ. В статье [12] получена формула для оператора $\lambda^{-1}(P_M - \tilde{A}_\lambda^{-1})$, не содержащая λ. Доказательство независимости решения уравнения (10) от λ достаточно трудоёмко, поэтому преобразуем (10), умножив его слева на $A - \lambda B$:

$$A\frac{\partial u_N}{\partial t} = B\frac{\partial u_N}{\partial x}. \tag{14}$$

Итак, задача состоит в решении уравнений (14) и (11) с условиями (12) и (13).

2. Предварительные сведения. Фредгольмовость оператора $A : E_1 \to E_2$ позволяет разложить пространства в прямые суммы

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \bigoplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \bigoplus \operatorname{Coker} A, \tag{15}$$

где $\operatorname{Coim} A$ – прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$ в пространстве E_1, $\operatorname{Coker} A$ – дефектное подпространство; сужение $\tilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A$ имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ (см. [20]).

Проекторы на $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$, отвечающие разложению (15), обозначаются через P_0 и Q_0 соответственно; через I – единичный оператор в соответствующем пространстве; оператор $\tilde{A}^{-1}(I - Q_0)$ обозначается через A^- и называется *полуобратным оператором.*

Далее приведём результаты, полученные в [12, 13] и описанные в [14, 15].

Лемма 2. *Равенство*

$$Ay = z, \quad y \in E_1 \bigcap \operatorname{dom} A, \quad z \in E_2,$$

эквивалентно системе

$$Q_0 z = 0,$$

$$y = A^- z + P_0 y \quad \text{для всех} \quad P_0 y \in \operatorname{Ker} A \bigcap \operatorname{dom} A.$$

При построении оператора $(A - \lambda B)^{-1}$, при исследовании свойств оператора $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1} A$ возникают операторы

$$S_0 = Q_0 B, \quad T_0 = A_0^- B \quad (A_0 = A), \quad A_j = S_{j-1} P_{j-1},$$

$$S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1}, \quad j = \overline{1,p}, \tag{16}$$

p – максимальная длина цепочек B-присоединённых элементов к элементам из $\operatorname{Ker} A$. Имеются ввиду B-жордановы цепочки, отвечающие нулевому собственному числу.

Операторы A_j: $\operatorname{Ker} A_{j-1} \to \operatorname{Coker} A_{j-1}$ – конечномерные операторы с соответствующими квадратными матрицами, следовательно, являются фредгольмовыми, тогда

$$\operatorname{Ker} A_{j-1} = \operatorname{Coim} A_j \bigoplus \operatorname{Ker} A_j, \quad \operatorname{Coker} A_{j-1} = \operatorname{Im} A_j \bigoplus \operatorname{Coker} A_j, \quad j = \overline{1, p-1}. \tag{17}$$

Операторы P_j и Q_j в (16) – это проекторы на $\operatorname{Ker} A_j$ и $\operatorname{Coker} A_j$ соответственно, отвечающие разложениям (17); $A_j^- = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$.

Лемма 3. *Пучок $(A - \lambda B)$ регулярен в том и только в том случае, когда существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_q обратим. Число p есть минимальное из таких q.*

Разложение (15) с помощью равенств (17) переходит в разложения

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \bigoplus \operatorname{Coim} A_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \operatorname{Coim} A_{p-1} \bigoplus \operatorname{Coim} A_p,$$

$$E_2 = \operatorname{Im} A \bigoplus \operatorname{Im} A_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \operatorname{Im} A_{p-1} \bigoplus \operatorname{Im} A_p,$$

$$\operatorname{Coim} A_p = \operatorname{Ker} A_{p-1}, \quad \operatorname{Im} A_p = \operatorname{Coker} A_{p-1}.$$

Лемма 4. *Справедливо представление пространства E_1 в виде (6), где*

$$M = \{y \in E_1 : S_i y = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}.$$

Сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет ограниченный обратный оператор

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} = P_M - \lambda T_p. \tag{18}$$

Получены формулы для построения проекторов P_M и P_N на M и N соответственно.

3. Структура корневого подпространства. Подпространство N есть линейная оболочка собственных и присоединённых элементов $w_i(\lambda)$ оператора A_λ, отвечающих нулевому собственному числу. Оператор A_λ в N нильпотентен со степенью нильпотентности p: $A_\lambda^p = 0$.

Для элементов $w_i(\lambda)$ получены формулы, однако при работе в подпространстве N удобнее использовать v_i – элементы B-жордановых цепочек для A, отвечающие нулевому собственному числу, не зависящие от λ, т.е. элементы $v_1, v_2, \ldots \in E_1$: $Av_1 = 0$, $Av_i = Bv_{i-1}$, $\ldots$ Максимальная длина цепочек равна p, элементы цепочек длины k имеют вид

$$v_1 = P_{k-1} z_1, \quad v_2 = T_{k-2}(P_{k-1} z_1) + P_{k-2} z_2, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad v_i = \sum_{s=1}^{i} \prod_{j=i}^{s} T_{k-j}(P_{k-s+1} z_{s-1}) + P_{k-i} z_i, \quad i = \overline{1, k}, \tag{19}$$

с произвольными элементами $P_{k-i} z_i \in \operatorname{Ker} A_{k-i}$, т.е. v_i – блоки B-присоединённых элементов к блоку v_1 собственных элементов оператора A, принадлежащих $\operatorname{Coim} A_k$.

Переход от $w_i(\lambda)$ к v_i возможен, поскольку $w_i(\lambda)$ являются линейными комбинациями элементов v_i:

$$w_1(\lambda) = v_1,$$

$$w_i(\lambda) = \sum_{j=2}^{i} (-1)^{j-1} C_{i-2}^{j-2} \lambda^{j-1} v_j, \quad i = \overline{2, k}.$$

Теперь N – линейная оболочка собственных и B-присоединённых элементов оператора A, в таком случае проекторы P_M и P_N не зависят от параметра λ.

Элементы из $\operatorname{Coim} A_1$ не имеют B-присоединённых элементов, длины их B-жордановых цепочек равны единице. Элементы из $\operatorname{Coim} A_2$ имеют по одному B-присоединённому элементу, длины их B-жордановых цепочек равны 2, $\ldots$, элементы из $\operatorname{Coim} A_p = \operatorname{Ker} A_{p-1}$ имеют B-жордановы цепочки длины p.

Замечание 2. Если $A_r = (0)$ с некоторым r, $1 \leqslant r < p$, то полагаем, что $A_r^- = (0)$, $\operatorname{Coim} A_r = \{0\}$, соответствующие присоединённые элементы являются нулевыми и $P_r = P_{r-1}$, $Q_r = Q_{r-1}$.

Представим

$$N = N_1 \bigoplus N_2 \bigoplus \ldots \bigoplus N_p,$$

где N_k – линейная оболочка элементов из $\operatorname{Coim} A_k$ (это $v_{k\,1}$) и B-присоединённых к ним элементов $v_{k\,i}$, $i = \overline{2, k}$.

3.1. Структура подпространства N_k.

Лемма 5. *$N_k = \operatorname{lin}\{v_{k\,1}, v_{k\,2}, \ldots v_{k\,k}\}$, где*

$$v_{k\,1} = z_{k\,1}, \quad v_{k\,2} = T_0 z_{k\,1} + z_{k\,2}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad v_{k\,j} = \sum_{i=1}^{j} T_0^{j-i} z_{k\,i}, \quad \textit{для любых} \quad z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k, \quad i = \overline{1,k}, \tag{20}$$

и

$$\tilde{S}_i z_{k\,k-j} = 0, \quad j > i, \quad \tilde{S}_i z_{k\,k-i} \neq 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \tag{21}$$

Здесь $\tilde{S}_i = Q_0 B T_0^i|_{\operatorname{Coim} A_k}$.

Доказательство. Первое равенство в (20) очевидно. Далее из равенства $Av_{k\,2} = Bv_{k\,1}$ в силу леммы 2 следует, что $v_{k\,2}$ существует в том и в только в том случае, когда $Q_0 B v_{k\,1} = S_0 v_{k\,1} = 0$. Тогда $v_{k\,2} = A^- B v_{k\,1} + z_{k\,2}$ для всех $z_{k\,2} \in \operatorname{Coim} A_k$.

Аналогично, так как существует $v_{k\,i}$ такой, что $Av_{k\,i} = Bv_{k\,i-1}$, то $S_0 v_{k\,i-1} = 0$ и $v_{k\,i} = T_0 v_{k\,i-1} + z_{k\,i}$ для любых $z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k$. При этом $S_0 v_{k\,i-1} = S_0 T_0 v_{k\,i-2} = \ldots = S_0 T_0^{i-2} v_{k\,1} = 0$, $i = \overline{2,k}$.

Уравнение $Av_{k\,k+1} = Bv_{k\,k}$ не имеет решения $v_{k\,k+1}$, поэтому $S_0 v_{k\,k} \neq 0$ и $S_i v_{k\,k-i} \neq 0$, $i = \overline{0,k-1}$.

Замечание 3. Формулы (20) согласуются с формулами (19), поскольку $A_j|_{\operatorname{Coim} A_k} = (0)$, $j = \overline{1,k-1}$, и $P_j = P_0$, $Q_j = Q_0$. Сужение $\tilde{A}_k$ оператора A_k на $\operatorname{Coim} A_k$ обратимо в N_k и $\tilde{A}_k = S_k|_{\operatorname{Coim} A_k} = \tilde{S}_k$.

Замечание 4. В формулах (20) нельзя отбросить младшие слагаемые, как это делается при построении B-присоединённых элементов к одномерному вектору из подпространств N. Иначе – элемент из N_k нельзя представить в виде суммы B-присоединённых элементов с элементами из $\operatorname{Coim} A_k$, вообще говоря, неодномерными.

3.2. Представление элементов в N_k. Запишем произвольный элемент $y \in N_k$ в виде суммы элементов, описанных формулами (20):

$$y = z_{k\,1} + (T_0 z_{k\,1} + z_{k\,2}) + \ldots + \sum_{i=1}^{k} T_0^{k-i} z_{k\,i}, \tag{22}$$

с элементами $z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k$, которые предстоит определить с помощью свойств (21), для чего целесообразно перегруппировать слагаемые в последнем равенстве:

$$y = \sum_{j=0}^{k-1} T_0^j z_{k\,1} + \sum_{j=0}^{k-2} T_0^j z_{k\,2} + \ldots + (I + T_0) z_{k\,k-1} + z_{k\,k}.$$

Последовательным умножением этого равенства слева на S_0, S_1, $\ldots$, S_{k-1} и с использованием свойств (21) формируется система

$$S_0 y = S_0 T_0^{k-1} z_{k\,1}, \quad S_1 y = S_1 T_0^{k-1} z_{k\,1} + S_1 T_0^{k-2} z_{k\,2}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad S_{k-1} y = S_{k-1} T_0^{k-1} z_{k\,1} + S_{k-1} T_0^{k-2} z_{k\,2} + \ldots + S_{k-1} T_0^0 z_{k\,k}. \tag{23}$$

Здесь $S_0 T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim} A_k} = S_1 T_0^{k-2}|_{\operatorname{Coim} A_k} = \ldots = S_{k-1} T_0^0|_{\operatorname{Coim} A_k} = \tilde{A}_k$ – обратимый оператор, вследствие чего из первого уравнения этой системы находится $z_{k\,1} = \tilde{A}_k^{-1} S_0 y$, из второго уравнения – $z_{k\,2}$, и т. д. Единственность решения $z_{k\,i}$ системы очевидна. Логично обозначить $z_{k\,i}$ через $y_{k\,i}$. Таким образом, доказана

Лемма 6. *Любой элемент $y \in N_k$ представим в виде (22) с элементами $z_{k\,i} = y_{k\,i}$, $i = \overline{1,k}$, определяемыми из системы (23).*

4. Решение уравнения (14) с условиями (13). Как правило, вектор-функцию из конечномерного пространства представляют в виде суммы элементов минимальной размерности. В данной работе $u_N(t,x)$ ищется в виде суммы B-жордановых блоков:

$$u_N(t,x)=\sum_{k=1}^{p}u_k,\quad \psi_N(t)=\sum_{k=1}^{p}\psi_k,$$

$$u_k=u_{k\,1}+(T_0u_{k\,1}+u_{k\,2})+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}u_{k\,i},$$

$$\psi_k=\psi_{k\,1}+(T_0\psi_{k\,1}+\psi_{k\,2})+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\psi_{k\,i}, \tag{24}$$

$u_k=u_k(t,x)\in N_k$, $\psi_k=\psi_k(t)\in N_k$, где $u_{k\,i}$ определяются из (23) с заменой $y\to u_k$, $z_{k\,i}\to u_{k\,i}$, а $\psi_{k\,i}$ – из (23) с заменой $y\to\psi_k$, $z_{k\,i}\to\psi_{k\,i}$.

4.1. Преобразование уравнения (14) в $\boldsymbol{N_k}$. Соотношение $A\dfrac{\partial u_N}{\partial t}=B\dfrac{\partial u_N}{\partial x}$ в силу леммы 2 эквивалентно системе

$$S_0\frac{\partial u_N}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}=T_0\frac{\partial u_N}{\partial x}+z_{k\,1}(t,x),\quad \text{для любых}\quad z_{k\,1}(t,x)\in\operatorname{Coim}A_k,$$

т.е.

$$S_0\biggl(\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\biggl(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial x}\biggr)+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial x}\biggr)=0 \tag{25}$$

и

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial t}+\biggl(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial t}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial t}\biggr)+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}=T_0\biggl(\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\biggl(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial x}\biggr)+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial x}\biggr)+z_{k\,1}. \tag{26}$$

Равенство (25) в силу свойств (21) имеет вид $S_0T_0^{k-1}\dfrac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0$, и в силу обратимости $S_0T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\tilde{A}_k$ имеем

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0.$$

В соотношении (26) удобно сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях T_0:

$$\sum_{j=1}^{k-1}T_0^{k-j}\sum_{i=1}^{j}\biggl(\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}\biggr)+\sum_{i=1}^{k-1}\biggl(\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}\biggr)+\biggl(\frac{\partial u_{k\,k}}{\partial t}-z_{k\,1}\biggr)=0.$$

Умножая последнее равенство последовательно на S_0, S_1, $\ldots$, S_{k-1} и учитывая свойства (21) и обратимость операторов $S_0T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim}A_k}=S_1T_0^{k-2}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\ldots=S_{k-1}T_0^{0}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\tilde{A}_k$, получаем

$$\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}=0,\quad i=\overline{1,k-1},$$

$$\frac{\partial u_{k\,k}}{\partial t}-z(t,x)=0,$$

т.е. в подпространстве N_k уравнение (14) разрешается относительно производной по x:

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}=\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t},\quad i=\overline{1,k-1}. \tag{27}$$

4.2. Решение уравнения (14) в N_k с условием $u_N(t,0)=\psi_N(t)$. Решая последовательно уравнения (27) с условиями $u_{k\,i}(t,0)=\psi_{k\,i}(t)$ при достаточной гладкости $\psi_{k\,i}(t)$, получаем

$$u_{k\,1}(t,x)=\psi_{k\,1}(t),\quad u_{k\,2}(t,x)=x\frac{d\psi_{k\,1}}{dt}+\psi_{k\,2}(t),\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad u_{k\,i}(t,x)=\sum_{j=1}^{i}\frac{x^{i-j}}{(i-j)!}\frac{d^{i-j}\psi_{k\,j}}{dt^{i-j}},\quad i=\overline{1,k}. \tag{28}$$

Определяем и

$$z_{k\,1}(t,x)=\sum_{j=1}^{p}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\frac{d^{k-j+1}\psi_{k\,j}}{dt^{k-j+1}}.$$

4.3. Решение уравнения (14) с условием $u_N(t,0)=\psi_N(t)$. Согласно равенству (24)

$$u_N(t,x)=\sum_{k=1}^{p}u_k(t,x), \tag{29}$$

поэтому справедлива

Лемма 7. *Пусть $\psi_{k\,i}(t)\in C^{k-i+1}(T\to\mathbb{C})$, $k=\overline{1,p}$, $i\leqslant k$. Решение $u_N(t,x)$ уравнения (14) существует, единственно и описывается формулами (29), (24), (28).*

4.4. Решение уравнения (14) с условиями (13). На основании результатов п. 4.3 справедлива

Лемма 8. *Пусть $\psi_{k\,i}(t)\in C^{k-i+1}(T\to\mathbb{C})$, $k=\overline{1,p}$, $i\leqslant k$. Решение уравнения*

$$A\frac{\partial u_N}{\partial t}=B\frac{\partial u_N}{\partial x}$$

с условиями $u_N(t,0)=\psi_N(t)$, $u_N(0,x)=\varphi_N(x)=\sum_{i=1}^{p}\varphi_i(x)$ существует в том и только в том случае, когда выполняются условия согласования, вытекающие из (29), (24), (28):

$$\varphi_{k\,i}(x)=\sum_{j=1}^{i}\frac{x^{i-j}}{(i-j)!}\frac{d^{i-j}\psi_{k\,j}}{dt^{i-j}}\bigg|_{t=0},\quad i=\overline{1,k}. \tag{30}$$

5. Решение задачи в дополнительном подпространстве. Для решения уравнения (11) можно воспользоваться формулой (18), в результате чего уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial u_M}{\partial t}=T_p\frac{\partial u_M}{\partial x}. \tag{31}$$

5.1. Решение уравнения (31) с условием $u_M(0,x)=\varphi_M(x)$. Использование спектральных свойств оператора $T_p\in L(M\to M)$ приводит к следующему результату.

Пусть Γ – замкнутый спрямляемый контур, окружающий спектр ограниченного оператора xP_M+tT_p.

Лемма 9. *Решение $u_M(t,x)$ уравнения (31) с условием $u_M(0,x)=\varphi_M(x)$ и аналитической на X вектор-функцией $\varphi_M(x)$ имеет вид*

$$u_M(t,x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(tT_p+(x-\mu)P_M)^{-1}\varphi_M(\mu)\,d\mu. \tag{32}$$

В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (32) в (31) и в начальное условие.

5.2. Решение уравнения (31) с условиями (12). Из формулы (32) при $x = 0$ следует, что

$$\psi_M(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma (tT_p - \mu P_M)^{-1}\varphi_M(\mu)\,d\mu. \tag{33}$$

Это ещё одно условие согласования для вектор-функций $\varphi(x)$, $\psi(t)$, необходимое для существования решения задачи (1)–(3).

Лемма 10. *Решение* $u_M(t,x)$ *уравнения*

$$A\frac{\partial u_M}{\partial t} = B\frac{\partial u_M}{\partial x}$$

с условиями $u_M(0,x) = \varphi_M(x) \in C^\infty(X \to M)$, $u_M(t,0) = \psi_M(t)$ *существует в том и только в том случае, когда выполняется условие (33). Решение имеет вид (32).*

6. Решение задачи (1)–(3). На основании результатов, полученных в предыдущих пунктах, справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\varphi_M(x) \in C^\infty(X \to M)$. *Решение задачи (1)–(3) существует в том и только в том случае, когда выполняются условия согласования (30) и (33). Решение единственно и определяется по формулам (7), (32), (29), (24), (28).*

Единственность решения в корневом подпространстве очевидна, а единственность $u_M(t,x)$ доказывается с помощью преобразования Лапласа $\tilde z(t,y)$ функции $z(t,x)$, равной разности двух предполагаемых решений $u_{M\,1}(t,x)$ и $u_{M\,2}(t,x)$. За счёт условий $z(t,0) = 0$ и $z(0,x) = 0$ преобразование $\tilde z(t,y)$ тождественно равно нулю, следовательно, $z(t,x) \equiv 0$ и $u_{M1}(t,x) = u_{M2}(t,x)$.

7. Пример. Решается задача (1)–(3) с операторами

$$A = \begin{pmatrix} \partial/\partial s & 1 \\ -1 & \partial/\partial s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в банаховом пространстве $E = E_1 = E_2 = \{y(s) \in C^1([0,2\pi] \to \mathbb{R}^2),\ y(0) = y(2\pi)\}$, $\operatorname{dom} A = C^2([0,2\pi], y(0) = y(2\pi))$, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$, т.е. строится решение $u(t,x,s) = (u_1(t,x,s), u_2(t,x,s))$ системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{34}$$

с условиями

$$u(0,x,s) = \varphi(x,s) = (\varphi_1(x,s), \varphi_2(x,s)), \quad u(t,0,s) = \psi(t,s) = (\psi_1(t,s), \psi_2(t,s)),$$

$$u(t,x,0) = u(t,x,2\pi). \tag{35}$$

Известно [21], что оператор A в пространстве E является фредгольмовым. Легко проверяется обратимость пучка $A - \lambda B$ при $\lambda \in \dot{\bigcup}(0) \bigcap \mathbb{C}$ и при выполнении условия (35), следовательно, оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$ имеет число нуль нормальным собственным числом и справедливо разложение E в прямую сумму (6).

Ядро оператора A_λ совпадает с ядром A, а решение уравнения $Ay = 0$, т.е. уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial s} = Ry, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \in E,$$

имеет вид $y = e^{sR}c$ для любых $c = c(t,x) \in C^1([T \times X] \to \mathbb{R}^2)$.

Заметим, что

$$e^{sR}c = \begin{pmatrix} c_1\cos s - c_2\sin s \\ c_1\sin s + c_2\cos s \end{pmatrix}.$$

B-присоединённых элементов к элементам из $\operatorname{Ker} A$ нет, поэтому

$$N = \{e^{sR}c, \quad \text{для любых} \quad c \in C^1([T \times X] \to \mathbb{R}^2)\}.$$

Для существования решения y уравнения $A_\lambda y = z$ в пространстве E необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_0^{2\pi} e^{-\tau R} Ry(t,x,\tau)\, d\tau = 0, \tag{36}$$

которое представляет собой условие принадлежности элемента $y(t,x,s)$ подпространству M. Нетрудно убедиться в том, что если y обладает свойством (36), то и $A_\lambda y$ обладает таким свойством, т.е. M инвариантно относительно A_λ.

Далее, $y(t,x,s) = y_M(t,x,s) + y_N(t,x,s)$, т.е.

$$y(t,x,s) = y_M(t,x,s) + e^{sR}c(t,x). \tag{37}$$

С помощью условия (36) для любых $y \in E$ находим

$$c(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\tau R} y(t,x,\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

Из (37) и (38) определяется проектор на N: $P_N(\cdot) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{(s-\tau)R}R(\cdot)\, d\tau$ и $P_M = I - P_N$. Легко проверяется свойство $P_N^2 = P_N$, тогда и $P_M^2 = P_M$. Имеем

$$\tilde{A}_\lambda^{-1}(\cdot) = P_M(\cdot) - \lambda \int_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R}R(\cdot)\, d\tau. \tag{39}$$

Теперь $u(t,x,s) = u_M + u_N$, $u_M = u_M(t,x,s)$, $u_N = u_N(t,x,s)$; $\varphi(x,s) = \varphi_M + \varphi_N$, $\varphi_M = \varphi_M(x,s)$, $\varphi_N = \varphi_N(x,s)$; $\psi(t,s) = \psi_M + \psi_N$, $\psi_M = \psi_M(t,s)$, $\psi_N = \psi_N(t,s)$.

7.1. Решение уравнения (14) с условием $\boldsymbol{u_N(t,0,s) = \psi_N(t,s)}$. Поскольку $N = \operatorname{Ker} A$, то уравнение (14) состоит из одного уравнения

$$\frac{\partial u_N}{\partial x} = 0,$$

следовательно,

$$u_N(t,x,s) = \psi_N(t,s). \tag{40}$$

7.2. Решение уравнения (14) с условиями (35). Так как $u_N(0,x,s) = \varphi_N(x,s)$, то одно из условий согласования граничных значений –

$$\psi_N(0,s) = \varphi_N(x,s), \tag{41}$$

откуда следует, что вектор-функция φ_N не должна зависеть в этом примере от x.

Итак, решение поставленной в примере задачи в подпространстве N существует в том и только в том случае, если $\psi_N(t,s) \in C^1(T \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2)$, $\varphi_N = \varphi_N(s) \in C^1([0,2\pi] \to \mathbb{R}^2)$ и выполняется условие (41). Это решение определяется формулой (40).

7.3. Решение уравнения (31) с условием $\boldsymbol{u_M(0,x,s) = \varphi_M(x,s)}$. В уравнении (31) $T_p = 1/\lambda(P_M - \tilde{A}_\lambda^{-1})$. Из (39) следует, что $T_p(\cdot) = \int_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R}R(\cdot)\, d\tau$. Решение уравнения (31) с условием $u_M(0,x,s) = \varphi_M(x,s)$ имеет вид (32), если функция $\varphi_M(x,s)$ аналитична по x в области, ограниченной контуром Γ, окружающим спектр ограниченного оператора $tT_p + xP_M$. Вычислим

$$(tT_p + (x-\mu)P_M)^{-1}\varphi_M(\mu,s) =$$

$$= \frac{1}{x-\mu}\varphi_M(\mu,s) - \frac{t}{(x-\mu)^2}\int\limits_s^{2\pi} \exp\biggl(\biggl(1+\frac{t}{x-\mu}\biggr)(s-\tau)R\biggr) R\varphi_M(\mu,\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$u_M(t,x,s) = \varphi_M(x,s) - t\int\limits_s^{2\pi} e^{(s-\tau)}R\biggl(-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{1}{(x-\mu)^2}\exp\biggl(\frac{t}{x-\mu}(s-\tau)R\biggr)R\varphi_M(\mu,\tau)\,d\mu\biggr)\,d\tau.$$

Здесь

$$R\varphi_M = \begin{pmatrix} -\varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} -\varphi_{M2} \\ \varphi_{M1} \end{pmatrix},$$

$$\exp\biggl(\frac{t}{x-\mu}(s-\tau)R\biggr)R\varphi_M = \begin{pmatrix} -\varphi_{M2}\cos\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} - \varphi_{M1}\sin\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} \\ -\varphi_{M2}\sin\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} + \varphi_{M1}\cos\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} \end{pmatrix}.$$

Разложение функций $\cos(t(s-\tau)/(x-\mu))$, $\sin(t(s-\tau)/(x-\mu))$ в ряды Тейлора и интегрирование по частям в интегралах по контуру Γ приводит к результату

$$u_M(t,x,s) = \begin{pmatrix} \varphi_{M1}(x,s) \\ \varphi_{M2}(x,s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R}\begin{pmatrix} v_1(t,x,s,\tau) \\ v_2(t,x,s,\tau) \end{pmatrix}\,d\tau,$$

где

$$v_1 = v_1(t,x,s,\tau) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}(s-\tau)^{2k}}{(2k)!(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}\varphi_{M2}}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}(s-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+2)!}\frac{\partial^{2k+2}\varphi_{M1}}{\partial x^{2k+2}},$$

$$v_2 = v_2(t,x,s,\tau) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}(s-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+2)!}\frac{\partial^{2k+2}\varphi_{M2}}{\partial x^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}(s-\tau)^{2k}}{(2k)!(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}\varphi_{M1}}{\partial x^{2k+1}}. \tag{42}$$

Окончательно получим

$$u_M(t,x,s) = \begin{pmatrix} \varphi_{M1}(x,s) \\ \varphi_{M2}(x,s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi}\begin{pmatrix} v_1\cos(x-\tau) - v_2\sin(s-\tau) \\ v_1\sin(x-\tau) + v_2\cos(s-\tau) \end{pmatrix}\,d\tau. \tag{43}$$

7.4. Решение уравнения (31) с условиями (35). Условие $u_M(t,0,s) = \psi_M(t,s)$ выполняется в том и только в том случае, как это следует из формулы (43), когда

$$\begin{pmatrix} \varphi_{M1}(0,s) \\ \varphi_{M2}(0,s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi}\begin{pmatrix} v_1(t,0,s,\tau)\cos(s-\tau) - v_2(t,0,s,\tau)\sin(s-\tau) \\ v_1(t,0,s,\tau)\sin(s-\tau) + v_2(t,0,s,\tau)\cos(s-\tau) \end{pmatrix}\,d\tau = \psi_M(t,s).$$

Решение определяется по формулам (43), (42).

7.5. Частный случай 1. Пусть

$$\varphi(x,s) = \begin{pmatrix} x + a\cos s \\ bx\cos s + c\sin s \end{pmatrix}, \quad \psi(t,s) = \begin{pmatrix} t + (a-t)\cos s + t\sin s \\ (c-t)\sin s - t\cos s \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Тогда

$$\varphi_N(x,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s-\dfrac{b}{2}x\sin s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix},\quad \varphi_M(x,s)=\begin{pmatrix}x+\dfrac{a-c}{2}\cos s+\dfrac{bx}{2}\sin s\\ \dfrac{c-a}{2}\sin s+\dfrac{bx}{2}\cos s\end{pmatrix},$$

$$\psi_N(t,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s+t\sin s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s-t\cos s\end{pmatrix},\quad \psi_M(t,s)=\begin{pmatrix}t+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s\end{pmatrix}.$$

Решение задачи в подпространстве M, построенное по формулам (43), (42), имеет вид

$$u_M(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s+\dfrac{b}{2}(t+x)\sin s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix},$$

в N –

$$u_N(t,x,s)=\begin{pmatrix}(t+3/2)\cos s\\ (t+3/2)\sin s\end{pmatrix}.$$

Решение

$$u(t,x,s)=u_M(t,x,s)+u_N(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\dfrac{3+a-c}{2}\cos s+\dfrac{b}{2}(t+x)\sin s\\ \dfrac{3+c-a}{2}\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix}$$

не является решением задачи (34), (35), так как не выполняются условия согласования, в частности условие (41) (φ_N зависит от x).

7.6. Частный случай 2. Пусть в (44) $b=0$:

$$\varphi(x,s)=\begin{pmatrix}x+a\cos s\\ c\sin s\end{pmatrix},\quad \varphi_M(x,s)=\begin{pmatrix}x+\dfrac{a-c}{2}\cos s\\ \dfrac{c-a}{2}\sin s\end{pmatrix},\quad \varphi_N(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s\end{pmatrix},$$

$$u_M(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s\end{pmatrix},$$

вектор-функция $\psi(t,s)$ прежняя. Тогда функция

$$u(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+(a-t)\cos s+t\sin s\\ (c-t)\sin s-t\cos s\end{pmatrix}$$

есть решение задачи (34), (35), поскольку условия (35) с функциями (44) при $b=0$ выполняются.

Заключение. В работе показано, что решение задачи (1)–(3), как и задачи (4), (5), представимо в виде суммы решений уравнений в двух подпространствах, одинаковых для этих задач. Но уравнения в задаче (1)–(3) дифференциальные, причём одно из них разрешимо относительно одной переменной, а другое – относительно второй переменной. В задаче (4),

(5) одно уравнение является дифференциальным, а другое – алгебраическим, имеющим лишь тривиальное решение, т.е. задача (4), (5) разрешима лишь тогда, когда начальное значение задано в подпространстве, в котором уравнение является дифференциальным. Доказано, что задача (1)–(3) разрешима не при любых задаваемых значениях в (2), (3), а если только выполняются определённые условия согласования. Выявлены условия на гладкость граничных функций, достаточные для решения задачи (1)–(3). Построено решение, при этом от коэффициентов рассматриваемого уравнения, как и уравнения (4), требуется лишь регулярность операторного пучка. Приведён пример решения задачи (1)–(3) с системой уравнений в частных производных по трём переменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 3–50.
2. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.
3. *Gunther M., Rentrop P.* PDAE-Netzwerkmodelle in der Elektrischen Schaltungssimulation. Karlsruhe, 1999 (Preprint/IWRMMM, № 99/3).
4. *Серов У.П., Корольков Б.П.* Динамика парогенераторов М., 1981.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц М., 1988.
6. *Campbell S.L.* The index of infinite dimensional implicit system // Math. and Comput. Model. of System. 1999. V. 5. № 1. P. 18–42.
7. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. Новосибирск, 1988.
8. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
9. *Kunkel P., Mehrmann V.* Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Zurich, 2006.
10. *Сидоров Н.А., Романова О.А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1516–1526.
11. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln, 2003.
12. *Зубова С.П., Чернышов К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. Институт физики и математики АН Литовской ССР. 1976. Т. 14. С. 21–39.
13. *Зубова С.П.* Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной // Деп. в ВИНИТИ. Воронежский гос. ун-т. Воронеж, 1991. № 2516-В91.
14. *Зубова С.П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 444–446.
15. *Зубова С.П.* Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.
16. Матемвatическая экнциклопедия. Т. 3. Коо-Од. 1977–1985.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов М., 1965.
18. *Нгуен Х.Д., Чистяков В.Ф.* О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6. № 1. С. 98–111.
19. *Бормотова О.В., Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф.* О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 18–29.
20. *Никольский С.М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 147–166.
21. *Зубова С.П., Усков В.И.* Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных // Итоги науки: избр. тр. Междунар. симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М., 2017. Вып. 31. С. 3–24.

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный лесотехнический
университет имени Г.Ф. Морозова

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 18.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1205–1219

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА

© 2022 г. Б. Ю. Иргашев

Рассмотрена задача типа Коши для уравнения высокого порядка с дробной производной в смысле Хилфера. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи в классе ограниченных функций, построенного с помощью автомодельных решений.

DOI: 10.31857/S0374064122090047, EDN: CHVYQA

1. Введение и построение автомодельных решений. Рассмотрим следующее уравнение дробного порядка:
$$D_{0y}^{\alpha_1,\beta_1}u(x,y)-\mu D_{0x}^{\alpha_2,\beta_2}u(x,y)=0, \tag{1}$$
здесь $q-1<\alpha_1\leqslant q,\ \ p-1<\alpha_2\leqslant p,\ \ q<p,\ \ q,p\in\mathbb{N},\ \ 0\leqslant\beta_1\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\beta_2\leqslant 1,\ \ \mu<0,\ \ D_{0t}^{\alpha,\beta}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Хилфера порядка α и типа β (см. [1])
$$D_{0t}^{\alpha,\beta}u=I_{0t}^{\beta(s-\alpha)}\frac{\partial^s}{\partial t^s}(I_{0t}^{(1-\beta)(s-\alpha)}u),$$
или
$$D_{0t}^{\alpha,\beta}u=D_{0t}^{-\beta(s-\alpha)}\frac{\partial^s}{\partial t^s}(D_{0t}^{-(1-\beta)(s-\alpha)}u),$$
где $s-1<\alpha\leqslant s,\ \ 0\leqslant\beta\leqslant 1,\ \ s\in\mathbb{N},\ \ I_{0t}^{\gamma}$ – оператор дробного интегрирования, а D_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка γ, определяемый соотношением [2, с. 28]
$$D_{0t}^{\gamma}\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)}\displaystyle\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\gamma+1}}, & \gamma<0,\\ \varphi(t), & \gamma=0,\\ \dfrac{d^{[\gamma]+1}}{dt^{[\gamma]+1}}D_{0t}^{\gamma-[\gamma]-1}\varphi(t), & \gamma>0,\end{cases}$$
в котором $[\gamma]$ – целая часть числа γ.

Заметим, что в уравнении (1) при $\beta=0$ имеем дробную производную Римана–Лиувилля, а при $\beta=1$ – дробную производную Капуто.

В работе [3] методами специальных операторов были найдены автомодельные решения уравнения с постоянными коэффициентами, содержащие дробные производные в смысле Римана–Лиувилля. Для уравнения с обычной производной вида
$$\frac{\partial^p u(x,y)}{\partial x^p}-\frac{\partial^q u(x,y)}{\partial y^q}=0,\quad p<q,$$
автомодельные решения были построены в статье [4].

Отметим, что различные начально-краевые задачи для уравнения с дробной производной Хилфера изучались в работах [5–7] и др.

Найдём один из видов автомодельных решений уравнения (1). Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $\mu < 0$, $-\alpha_1\gamma_j + b + 1 + \beta_1(\alpha_1 - q) > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\gamma_j = (j - (1-\beta_2)(p-\alpha_2))/\alpha_2$, $j = \overline{0, p-1}$, *то автомодельные решения уравнения (1) при* $x > 0$, $y > 0$ *имеют вид*

$$u_j(x,y) = x^{\alpha_2\gamma_j} y^{-\alpha_1\gamma_j + b} e^{\alpha_2\gamma_j + 1, -\alpha_1\gamma_j + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right), \tag{2}$$

где

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha > \beta, \quad z \in \mathbb{C},$$

– функция типа Райта [8, с. 23] или обобщённая функция Райта [3].

Доказательство. Найдём частные производные от функции (2), входящие в уравнение (1). Для упрощения записи индекс j при параметре γ будем пропускать. Использовав формулу (2.2.12) из [8], получим

$$D^{-\beta_1(q-\alpha_1)}_{0y} \frac{\partial^q}{\partial y^q} D^{-(1-\beta_1)(q-\alpha_1)}_{0y}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= x^{\alpha_2\gamma}\left(y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b - \alpha_1 + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right), \tag{3}$$

а с помощью формул (1.2.7) и (2.2.17) –

$$D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x} \frac{\partial^p}{\partial x^p} D^{-(1-\beta_2)(p-\alpha_2)}_{0x}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x} D^{p-(1-\beta_2)(p-\alpha_2)}_{0x}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x}\left(y^{-\alpha_1\gamma + b} x^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2)} e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right).$$

Применив формулу (2.2.3) из [8], будем иметь

$$e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1} e^{\alpha_2\gamma + 1 - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2, -\alpha_1\gamma + b + 1 - \alpha_1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right),$$

а формулу (2.2.17) –

$$\frac{1}{\mu} D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x}\Big(y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} x^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2} \times$$

$$\times e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2 + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1 - \alpha_1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\mu} y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} x^{\alpha_2\gamma} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b - \alpha_1 + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right). \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (4) в уравнение (1), получим верное равенство. Лемма доказана.

Отметим, что при $\beta = 0$ представление (2) совпадает с результатами из работы [3].

Пусть теперь в представлении (2) $\alpha_2 = p \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 = \alpha$, $q-1 < \alpha \leqslant q \in \mathbb{N}$, $q < p$, тогда автомодельными решениями уравнения

$$D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x,y) - \mu \frac{\partial^p u(x,y)}{\partial x^p} = 0, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{5}$$

будут выражения вида

$$u_i(x,y) = y^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{-n} (xy^{-\alpha/p})^{pn+i}}{\Gamma(-\alpha n - \alpha i/p + b + 1)(pn+i)!}, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Рассмотрим их линейную комбинацию

$$u(x,y) = y^b \sum_{i=0}^{p-1} c_i u_i(x,y), \quad c_i \in \mathbb{C},$$

и пусть коэффициенты c_i такие, что $c_i = c^i$, $c^p = 1/\mu$, т.е. в качестве параметра c выберем любой из корней уравнения $c^p = 1/\mu$. В результате получим семейство из p функций

$$u(x,y) = y^b \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr), \tag{6}$$

здесь

$$\phi(-\delta, \varepsilon; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(-\delta k + \varepsilon)}$$

– функция Райта [9].

Теперь выясним, в каких случаях выражение (6) удовлетворяет уравнению (5). Справедлива следующая

Лемма 2. *Если* $(1+\alpha/p)\pi/2 < |\arg c| \leqslant \pi$, *то представление (6) удовлетворяет уравнению (5).*

Доказательство. Учитывая лемму 2.1 из работы [10], имеем

$$D_{0y}^{-\beta(q-\alpha)} \frac{\partial^q}{\partial y^q} D_{0y}^{-(1-\beta)(q-\alpha)} \biggl(y^b \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) =$$

$$= D_{0y}^{-\beta(q-\alpha)} \biggl(y^{b+(1-\beta)(q-\alpha)-q} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1+(1-\beta)(q-\alpha)-q; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) =$$

$$= y^{b-\alpha} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b-\alpha+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr). \tag{7}$$

Далее непосредственным вычислением убеждаемся, что для $s \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$y^b \frac{\partial^s}{\partial x^s} \biggl(\phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) = y^b \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(cy^{-\alpha/p})^n x^{n-s}}{(n-s)!\Gamma(-\alpha n/p + b + 1)} =$$

$$= c^s y^{b-\alpha s/p} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b - \frac{\alpha}{p}s + 1; cy^{-\alpha/p}x\biggr), \tag{8}$$

из которого следует, что

$$y^b \frac{\partial^p}{\partial x^p} \biggl(\phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) = \frac{1}{\mu} y^{b-\alpha} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b-\alpha+1; cy^{-\alpha/p}x\biggr). \tag{9}$$

Подставив (7) и (9) в уравнение (5), получим верное равенство. Лемма доказана.

2. Задача с начальными условиями и её решение. В этом пункте в области

$$D = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < T\}, \quad 0 < T < +\infty,$$

для уравнения

$$L[u(x, y)] = D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x, y) - (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u(x, y)}{\partial x^{2n}} = 0, \tag{10}$$

где $n = 1, 2, \ldots,$ если $0 < \alpha \leqslant 1$, и $n = 2, 3, \ldots,$ если $1 < \alpha < 2$, рассмотрим задачу с начальными условиями типа Коши.

Задача Коши для уравнений с дробными производными Джрбашяна–Нерсесяна и Римана–Лиувилля рассматривалась, соответственно, в работах [10, 11] и [12], идеи которых использованы в настоящем исследовании. Следует также отметить статьи [13–16], где изучен вопрос о разрешимости задачи типа Коши для уравнений с дробными производными Капуто и Римана–Лиувилля и с целыми производными второго порядка.

Так как $\lambda_k^{2n} = (-1)^{n-1}$, где $\lambda_k = e^{(2k-n+1)i\pi/(2n)}$, $k = \overline{0, n-1}$, то с учётом леммы 2 и неравенства

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2n}\right) < |\arg(-\lambda_k)| \leqslant \pi, \quad k = \overline{0, n-1},$$

функции вида

$$u_k(x, y) = y^b \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k |x| y^{-\alpha/(2n)}\right), \quad b \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{11}$$

удовлетворяют уравнению (10) в области D.

Рассмотрим следующую линейную комбинацию решений (11):

$$\Gamma_b(x - \xi, y) = \frac{y^b}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k |x - \xi| y^{-\alpha/(2n)}\right). \tag{12}$$

Вещественнозначность функции (12) следует из работы [12, лемма 2]. Отметим также, что функция $\Gamma_b(x - \xi, y - \eta)$ при $b = \alpha - 1 - \alpha/(2n)$ является фундаментальным решением уравнения (10) при $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\beta = 0$ (см. [12]). Изучим некоторые свойства функции $\Gamma_b(x - \xi, y - \eta)$.

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения:*

1) при всех $s \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} = -(\operatorname{sgn}(x - \xi))^s \frac{y^{b - \alpha s/(2n)}}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-\lambda_k)^{s+1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b - \frac{\alpha s}{2n} + 1; -\lambda_k |x - \xi| y^{-\alpha/(2n)}\right);$$

2) $\dfrac{\partial^{2n} \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^{2n}} = (-1)^{n-1} \Gamma_{b-\alpha}(x - \xi, y);$

3) $\displaystyle\lim_{x-\xi\to+0} \frac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} - \lim_{x-\xi\to-0} \frac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} = \begin{cases} 0, & s = \overline{0, 2n-2}, \\ \dfrac{(-1)^n y^{b-\alpha+\alpha/(2n)}}{\Gamma(b + \alpha/(2n) - \alpha + 1)}, & s = 2n - 1; \end{cases}$

4) $D_{0y}^{\alpha} \Gamma_b(x - \xi, y) = \Gamma_{b-\alpha}(x - \xi, y);$

5) $\left|\dfrac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s}\right| \leqslant C|x - \xi|^{-\theta} y^{b + \alpha(\theta - s)/(2n)}$, *где* $y > 0$, $s \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $C = C(\alpha, b, \theta, s)$,

$$\theta \leqslant \begin{cases} 0, & \dfrac{\alpha s}{2n} - b - 1 \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & \dfrac{\alpha s}{2n} - b - 1 \in \mathbb{N}_0; \end{cases}$$

6) при $|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\to+\infty$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right|\leqslant Cy^{b-\alpha s/(2n)}\exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)}y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где C *– положительная постоянная, не зависимая от* $x,\ \xi,\ y,$ *а*

$$\nu<\left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\left(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\right);$$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi=\frac{y^{b+\alpha/(2n)}}{\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}.$

Доказательство.

1) Использовав формулу (8), имеем

$$\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}=\frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\frac{\partial^s}{\partial x^s}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)=$$

$$=-(\operatorname{sgn}(x-\xi))^s\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b-\frac{\alpha s}{2n}+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right).$$

2) Справедливость этого пункта следует из свойства 1) при $s=2n$.

3) Из свойства 1) следует, что

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}-\lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}=$$

$$=\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{2n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}+(-1)^s\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}\right).$$

Если $s=2m,\ \ m\in\mathbb{N},$ то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}-\lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}=0.$$

Если $s=2m-1,\ \ m=\overline{1,n-1},$ то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}-\lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}=-\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{2m}=$$

$$=-\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}e^{-(nm+m)i\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{2kmi\pi/n}=0.$$

Наконец, если $s=2n-1,$ то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^{2n-1}\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^{2n-1}}-\lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^{2n-1}\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^{2n-1}}=\frac{(-1)^n y^{b+\alpha/(2n)-\alpha}}{\Gamma(b+\alpha/(2n)-\alpha+1)}.$$

4) Из леммы 2.1 работы [10] находим

$$D_{0y}^{\alpha}\Gamma_b(x-\xi,y)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k D_{0y}^{\alpha}\left(y^b\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k y^{b-\alpha}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b-\alpha+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)=\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y).$$

5) Используя оценку из [10, формула (2.11)]

$$|y^{\varepsilon-1}\phi(-\delta,\varepsilon;\lambda x y^{-\delta})| \leqslant C x^{-\theta} y^{\varepsilon-1+\delta\theta}, \quad \theta \geqslant \begin{cases} 0, & -\varepsilon \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & -\varepsilon \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

получим

$$\left|\frac{\partial^s \Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}\right| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_k|^{s+1}\left|y^{b-\alpha s/(2n)}\phi\Bigl(-\frac{\alpha}{2n}, b-\frac{\alpha s}{2n}+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\Bigr)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C|x-\xi|^{-\theta} y^{b+\alpha(\theta-s)/(2n)}.$$

6) Учитывая оценку из [10, формула (2.8)], при $|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)} \to +\infty$

$$|\phi(-\delta,\varepsilon;z)| \leqslant C\exp(-\nu|z|^{1/(1-\delta)}), \quad C = C(\delta,\varepsilon,\nu), \tag{13}$$

где $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\nu < (1-\delta)\delta^{\delta/(1-\delta)}\cos\frac{\pi-|\arg z|}{1-\delta}, \quad \frac{1+\delta}{2}\pi < |\arg z| \leqslant \pi,$$

и свойство 1), имеем

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right| \leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)} \max_{k=\overline{0,n-1}}\left|\phi\Bigl(-\frac{\alpha}{2n}, b-\frac{\alpha s}{2n}+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\Bigr)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)} \max_{k=\overline{0,n-1}} \exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)} y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где

$$\nu < \Bigl(1-\frac{\alpha}{2n}\Bigr)\Bigl(\frac{\alpha}{2n}\Bigr)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\Bigl(\frac{\pi-|\arg(-\lambda_k)|}{1-\alpha/(2n)}\Bigr).$$

Так как

$$\min_{k=\overline{0,n-1}}\cos\Bigl(\frac{\pi-|\arg(-\lambda_k)|}{1-\alpha/(2n)}\Bigr) = \cos\Bigl(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\Bigr),$$

то справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right| \leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)} \exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)} y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где

$$\nu < \Bigl(1-\frac{\alpha}{2n}\Bigr)\Bigl(\frac{\alpha}{2n}\Bigr)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\Bigl(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\Bigr).$$

7) Используя равенство (см. [10, формула (2.12)])

$$\int_0^{+\infty}\phi(-\delta,\varepsilon;\lambda x)\,dx = -\frac{1}{\lambda\Gamma(\delta+\varepsilon)}, \tag{14}$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi = \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\Bigl(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\Bigr)\,d\xi =$$

$$
= \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Big[\int_{-\infty}^{x}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi +
$$

$$
+\int_{x}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi\Big]. \tag{15}
$$

Вычислим каждый интеграл в отдельности. Для этого в первом интеграле сделаем замену переменных по формулам $t=(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}$, $\xi = x - y^{\alpha/(2n)}t$, $d\xi = -y^{\alpha/(2n)}\,dt$. Тогда будем иметь

$$
\int_{-\infty}^{x}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi =
$$

$$
= y^{\alpha/(2n)}\int_{0}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k t\Big)\,d\xi = \frac{y^{\alpha/(2n)}}{\lambda_k\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}. \tag{16}
$$

Аналогично для второго интеграла получим

$$
\int_{x}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi = \frac{y^{\alpha/(2n)}}{\lambda_k\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}. \tag{17}
$$

Подставив выражения (16) и (17) в (15), получим равенство

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi = \frac{y^{b+\alpha/(2n)}}{\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}.
$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего изложения введём функцию

$$
\Phi(b+1,b;-\lambda_k t) = \Big(\frac{\alpha}{2n}+b\Big)\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k t\Big) - \phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b; -\lambda_k t\Big), \quad b,t\in\mathbb{R},
$$

здесь предполагается, что множитель $\alpha/(2n)+b$ не меняется, могут изменяться вторые параметры у функций Райта. Например, запись $\Phi(b+1+s,b+s;-\lambda_k t)$ означает следующее:

$$
\Phi\Big(b+1+s,b+s;-\lambda_k t\Big) = \Big(\frac{\alpha}{2n}+b\Big)\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1+s; -\lambda_k t\Big) - \phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+s; -\lambda_k t\Big).
$$

Отметим некоторые свойства этой функции.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $\dfrac{d}{dt}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t) = -\lambda_k\Phi\Big(b+1-\dfrac{\alpha}{2n}, b-\dfrac{\alpha}{2n}; -\lambda_k t\Big)$;

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi\Big(b+1+\frac{\alpha s}{2n}, b+\frac{\alpha s}{2n}; -\lambda_k t\Big)\,dt =$

$$
= \frac{b+\alpha/(2n)}{\lambda_k}\bigg(\frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha(s+1)/(2n))} - \frac{1}{(b+\alpha/(2n))\Gamma(b+\alpha(s+1)/(2n))}\bigg);
$$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int_0^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt = 0, \quad s=\overline{0,n-1}.$

Доказательство.

1) Следует из формулы (см. [10, 17])

$$\frac{d}{dz}\phi(\delta,\varepsilon;z)=\phi(\delta,\varepsilon+\delta;z)\quad(\delta>-1).$$

2) Следует из формулы (14).

3) Учитывая свойство 1) леммы 4, неравенство (13), и используя метод интегрирования по частям, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt=-\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}d\Phi\left(b+1+\frac{\alpha}{2n},b+\frac{\alpha}{2n};-\lambda_k t\right)=$$

$$=2s\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(b+1+\frac{\alpha}{2n},b+\frac{\alpha}{2n};-\lambda_k t\right)t^{2s-1}\,dt.$$

Повторив этот процесс ещё $2s-1$ раз, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2s)!}{\lambda_k^{2s-1}}\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(b+1+\frac{\alpha s}{n},b+\frac{\alpha s}{n};-\lambda_k t\right)dt=$$

$$=\frac{(2s)!}{\Gamma(b+\alpha(2s+1)/(2n))}\left(\frac{\alpha+2nb}{\alpha(2s+1)+2nb}-1\right)e^{i(n-1)s\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\pi iks/n}=0.$$

Последнее равенство выполняется при $s=\overline{1,n-1}$. Справедливость свойства 3) леммы 4 при $s=0$ следует из свойства 2) этой же леммы. Лемма доказана.

Исследуем теперь задачи с начальными условиями для уравнения (10).

Задача 1. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (10) в области $D=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\ 0<y<T\}$, удовлетворяющее условиям:

1) $0<\alpha\leqslant 1$;

2) $D_{0y}^{\alpha,\beta}u(x,y),\ \dfrac{\partial^{2n}u(x,y)}{\partial x^{2n}}\in C(D)$;

3) $y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y)\in C(\overline{D})$;

4) $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$.

Заданная функция удовлетворяет ограничению

$$\varphi(x)\in C(\mathbb{R}),\quad |\varphi(x)|\leqslant M,\quad 0<M-\text{const}.\tag{18}$$

Задача 2. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (10) в области D, удовлетворяющее условиям:

1) $1<\alpha<2$;

2) $D_{0y}^{\alpha,\beta}u(x,y),\dfrac{\partial^{2n}u(x,y)}{\partial x^{2n}}\in C(D),\ \ y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y)\in C^1(\overline{D})$;

3) $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$;

4) $\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\psi(x)$. Заданные функции удовлетворяют ограничениям

$$\varphi^{(2n)}(x),\psi(x)\in C(\mathbb{R}),\quad |\psi(x)|,|\varphi^{(j)}(x)|\leqslant M\tag{19}$$

для любых $x\in\mathbb{R}$, $j=\overline{0,2n}$, $0<M-\text{const}$.

Существование решений задач 1 и 2 следует из следующих теорем.

Теорема 1. *Решение задачи 1 определяется формулой*

$$u(x,y)=\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

где

$$b=-\frac{\alpha}{2n}-(1-\beta)(1-\alpha). \tag{21}$$

Доказательство. Сначала покажем, что функция (20) удовлетворяет уравнению (10). Используя закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования и обобщённую формулу Ньютона–Лейбница ([8, с. 15]), получим

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=D_{0y}^{-\beta(1-\alpha)}D_{0y}^{1-(1-\beta)(1-\alpha)}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=$$

$$=D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\lim_{y\to0}D_{0y}^{-(1-\beta)(1-\alpha)}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg). \tag{22}$$

Покажем, что выражение (22) имеет смысл. Отметим, что при $b\in\mathbb{R}$, $y>0$ в силу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{-K}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{-K}^{K}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{K}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi$$

и свойств 5), 6) из леммы 3 имеем

$$\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg|<\infty, \tag{23}$$

где $0<K$ – достаточное большое число. Учитывая это, находим

$$D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{y}\frac{1}{(y-t)^{\alpha}}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\bigg(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{y}\frac{\Gamma_b(x-\xi,t)}{(y-t)^{\alpha}}\,dt\bigg)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D_{0y}^{\alpha}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

В силу (23) все выкладки законны. Используя свойство 4) леммы 3, имеем

$$D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Последний интеграл существует в силу свойств 5) и 6) леммы 3. Далее, учитывая свойство 7) леммы 3, получим

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{-(1-\beta)(1-\alpha)}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+(1-\beta)(1-\alpha)}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=$$

$$=\varphi(x)\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\biggr)+\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi\biggr)=$$

$$=\varphi(x)+\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi\biggr).$$

Теперь вычислим предел в последней сумме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$I_2=\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$I_3=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi.$$

Учитывая свойство 6) леммы 3 и (18), находим

$$\lim_{y\to 0}I_1=\lim_{y\to 0}I_2=0,\quad |I_3|\leqslant C\sup_{s\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}|\varphi(s)-\varphi(x)|,\quad \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Bigl|\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\Bigr|\,d\xi\leqslant C.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ и произвольности ε имеем $\lim\limits_{y\to 0}I_3=0$. Значит,

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\varphi(x).\tag{25}$$

Теперь вычислим частную производную по переменной x. Учитывая свойства 2) и 3) леммы 3, получим

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{x}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=$$

$$=(-1)^{n-1}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\biggr).\tag{26}$$

Подставив (25) и (26) в уравнение (10), получим тождество.

Покажем справедливость соотношения 4) задачи 1. Имеем

$$\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\lim_{y\to+0}\left(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\lim_{y\to+0}(J_1+J_2+J_3),$$

где

$$J_1=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}\right)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi,$$

$$J_2=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Gamma_b(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$J_3=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi.$$

Из свойств 6) и 7) леммы 3, а также из (18) и (21) следует, что

$$\lim_{y\to+0}J_1=\lim_{y\to+0}J_2=0,\quad \lim_{y\to+0}J_3=\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))},$$

откуда

$$\lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x).$$

Условие 3) задачи 1 вытекает из непрерывности функции $\varphi(x)$ и соотношения 4) задачи 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи 2 определяется формулой*

$$u(x,y)=\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi, \tag{27}$$

здесь $b=-\alpha/(2n)-(1-\beta)(2-\alpha)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 покажем, что первое слагаемое в представлении (27) удовлетворяет уравнению (10), т.е.

$$L\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right]=0, \tag{28}$$

и условию

$$\lim_{y\to+0}\left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=\varphi(x). \tag{29}$$

Проверим, что второе слагаемое в представлении (27) тоже удовлетворяет уравнению (10). Действуя так же как и в доказательстве теоремы 1 (формулы (22)–(25)), имеем

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}\lim_{y\to+0}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)-$$

$$-\frac{y^{\beta(2-\alpha)-2}}{\Gamma(\beta(2-\alpha)-1)}\lim_{y\to+0}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{1-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}\psi(x)}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}. \tag{30}$$

Здесь учтены условия (19), свойство 6) леммы 3 и равенства

$$\lim_{y\to+0}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\bigg)=1,\quad \lim_{y\to+0}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{1-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\bigg)=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\Gamma(2)}=0,$$

которые следуют из свойства 7) леммы 3. Найдём частные производные по переменной x. Использовав свойство 3) леммы 3, запишем

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)=\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{x}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)=$$

$$=(-1)^{n-1}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}\psi(x)}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}\bigg). \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует

$$L\bigg[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg]=0. \tag{32}$$

Учитывая (28) и (32), получим $L[u(x,y)]=0$.

Теперь проверим выполнение условия 3) задачи 2. Из леммы 3 и (19) имеем

$$\lim_{y\to+0}\bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\bigg)=$$

$$=\lim_{y\to+0}\bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\bigg)\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)(\psi(\xi)-\psi(x))\,d\xi\bigg)+$$

$$+\lim_{y\to+0}\bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\psi(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\,d\xi\bigg)=0. \tag{33}$$

Из (29) и (33) следует, что $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$.

Осталось проверить условие 4) задачи. Найдём

$$I=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=$$

$$=\left(-\frac{\alpha}{2n}-b\right)\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-1-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)+\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-1}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-1-\alpha/(2n)}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\alpha}{2n}+b\right)\Gamma_b(x-\xi,y)-y\Gamma_{b-1}(x-\xi,y)\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2n}\lim_{y\to 0}y^{-1-\alpha/(2n)}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Bigg[\left(\int\limits_{-\infty}^{x}+\int\limits_{x}^{+\infty}\right)\left(\left(\frac{\alpha}{2n}+b\right)\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)-\right.$$

$$\left.-\,\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\right)\varphi(\xi)\,d\xi\Bigg].$$

В первом интеграле сделаем замену переменных по формулам

$$t=(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)},\quad \xi=x-ty^{\alpha/(2n)},\quad d\xi=-y^{\alpha/(2n)}\,dt,$$

а во втором – по формулам

$$t=(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)},\quad \xi=x+ty^{\alpha/(2n)},\quad d\xi=y^{\alpha/(2n)}\,dt.$$

В результате получим

$$I=-\frac{1}{2n}\lim_{y\to 0}y^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt. \tag{34}$$

С учётом свойства 3) леммы 4 и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)=\sum_{s=0}^{2n-1}(-1)^s\frac{\varphi^{(s)}(x)}{s!}(y^{\alpha/(2n)}t)^s+\frac{\varphi^{(2n)}(x-\theta y^{\alpha/(2n)}t)}{(2n)!}y^\alpha t^{2n},\quad 0<\theta<1,$$

$$\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t)=\sum_{s=0}^{2n-1}\frac{\varphi^{(s)}(x)}{s!}(y^{\alpha/(2n)}t)^s+\frac{\varphi^{(2n)}(x+\mu y^{\alpha/(2n)}t)}{(2n)!}y^\alpha t^{2n},\quad 0<\mu<1,$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt=$$

$$=\frac{y^\alpha}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2n}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi^{(2n)}(x+\mu y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi^{(2n)}(x-\theta y^{\alpha/(2n)}t))\,dt. \tag{35}$$

Учитывая оценку (13), условие (19), соотношение (35) и $1<\alpha<2$, находим

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=0.$$

Осталось проверить справедливость равенства

$$J=\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))\lim_{y\to+0}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\right)=\psi(x).$$

Действительно, действуя так же как при получении представления (34) и используя свойство 2) леммы 4, имеем

$$J=-\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{2n}\lim_{y\to+0}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}\Phi(b+2,b+1;-\lambda_k t)(\psi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\psi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt=$$

$$=-\psi(x)\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}\Phi(b+2,b+1;-\lambda_k t)\,dt=$$

$$=-\psi(x)\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b+\alpha/(2n)}{\Gamma(b+2+\alpha/(2n))}-\frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha/(2n))}\right)=$$

$$=-\Gamma(b+2+\alpha/(2n))\left(\frac{b+\alpha/(2n)}{\Gamma(b+2+\alpha/(2n))}-\frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha/(2n))}\right)\psi(x)=\psi(x).$$

Предельный переход в интеграле законен в силу (13), (19). Теорема доказана.

3. Единственность решений. Покажем единственность решений задач 1 и 2 при некоторых дополнительных условиях. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи 1 (задачи 2) с условиями:*

1) $\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)|\,dx<\infty$;

2) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\partial^j u(x,y)}{\partial x^j}=0,\ \ j=\overline{0,2n-1}.$

Тогда это решение единственно при $y>0$.

Доказательство. Покажем единственность решения задачи 2 (единственность задачи 1 доказывается аналогично). Пусть существуют два решения задачи 2 с условиями 1) и 2) (теорема 3). Обозначим их разность через $v(x,y)$. Тогда функция $v(x,y)$ есть решение следующей задачи:

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}v(x,y)-(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}}=0,\quad \lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y))=0,$$
$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y))=0. \tag{36}$$

Применим преобразование Фурье

$$F_x[v](\xi,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(x,y)e^{ix\xi}\,dx=\widehat{v}(\xi,y),$$

$$F_x\left[\frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}}\right](\xi,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}}e^{ix\xi}\,dx=(-1)^n\xi^{2n}\widehat{v}(\xi,y).$$

С учётом (36) получим задачу

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\widehat{v}(\xi,y)=-\xi^{2n}\widehat{v}(\xi,y),\quad \lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\widehat{v}(\xi,y))=0,\quad \lim_{y\to+0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\widehat{v}(\xi,y))=0.$$

Из работы [18, лемма 1] следует, что $\widehat{v}(\xi,y)\equiv 0$. Значит (см. [19, теорема 120, с. 183]) $v(x,y)\equiv$ $\equiv 0$ п.в. Так как $y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y)\in C^1(\bar{D})$, то $v(x,y)\equiv 0$ при $y>0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hilfer R.* Fractional time evolution // Appl. of Fract. Calc. in Phys. 2000. P. 87–130.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Luchko Yu., Gorenflo R.* Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calc. and Appl. Anal. 1998. V. 1. № 1. P. 63–78.
4. *Иргашев Б.Ю.* Построение частных решений с особенностями, выраженных через гипергеометрические функции, для уравнения с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 328–336.
5. *Kim M.-Ha., Chol-Ri G., Chol O.H.* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2014. V. 17. № 1. P. 79–95.
6. *Karimov E.T.* Tricomi type boundary value problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with Hilfer fractional operator // Bull. of the Inst. of Math. 2019. № 1. P. 19–26.
7. *Salakhitdinov M.S., Karimov E.T.* Direct and inverse source problems for two-term time-fractional diffusion equation with Hilfer derivative // Uzbek Math. J. 2017. № 4. P. 140–149.
8. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
9. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. № 29. P. 71–79.
10. *Pskhu A.V.* Fundamental solutions and cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative // Electr. J. of Differ. Equat. 2019. V. 2019. № 21. P. 1–13.
11. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.
12. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временно́й переменной // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 696–706.
13. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599–609.
14. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // Докл. РАН. 2006. Т. 406. № 1. С. 12–16.
15. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Условия существования классического решения задач Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 4. С. 451–454.
16. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц.уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670.
17. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
18. *Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.* On a nonlocal problem for a fourth-order mixed-type equation with the Hilfer operator // Bull. of the Karaganda Univ. Math. ser. 2021. V. 104. № 4. P. 89–102.
19. *Титчмарш Э.Ч.* Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Республика Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент

Поступила в редакцию 30.01.2022 г.
После доработки 16.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1220–1225

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.929

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. В. В. Лийко

Рассматривается смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в ограниченной области. Установлена взаимосвязь этой задачи с нелокальной смешанной краевой задачей для эллиптического дифференциального уравнения. Сформулированы теоремы об однозначной разрешимости обеих задач и о гладкости их обобщённых решений.

DOI: 10.31857/S0374064122090059, EDN: CHXUSR

Введение. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения, интерес к которым вызван в связи с их важными приложениями, рассматриваются в работах многих математиков. Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в монографии [1], а современный обзор литературы приведён в статье [2]. В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщённых решений может нарушаться внутри области даже при бесконечно гладкой правой части и сохраняться лишь в некоторых подобластях (см. [1, 2]). В работе [3] исследована смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндрической области. В настоящей работе исследуются смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и нелокальная смешанная задача для эллиптического дифференциального уравнения в произвольной ограниченной области с гладкой границей.

Отметим, что смешанные краевые задачи для сильно эллиптических систем дифференциально-разностных уравнений возникают при исследовании упругих деформаций трёхслойных пластин с гофрированным заполнителем в случае, когда две противоположные грани пластины жёстко закреплены, а другие две – свободны [4].

1. Некоторые свойства разностных операторов. Рассмотрим вспомогательные результаты о свойствах разностных операторов (доказательства см. в [1, гл. II]).

1.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a,b)$, если $n = 2$. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определяемый по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathscr{M}} a_h u(x+h), \tag{1}$$

где $a_h \in \mathbb{C}$, $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Введём оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ следующим образом: $R_Q = P_Q R I_Q$, где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функций из пространства $L_2(Q)$ нулём в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на область Q. Операторы R_Q используются в краевых задачах для дифференциально-разностных уравнений.

Обозначим через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus (\bigcup_{h \in \mathsf{M}} (\partial Q + h))$, где M – аддитивная абелева группа, порождённая множеством $\mathscr{M}$. Назовём компоненты Q_r *подобластями*, а множество $\mathscr{R}$ всех подобластей Q_r, $r = 1, 2, \ldots,$ – *разбиением области* Q.

Разбиение $\mathscr{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in \mathsf{M}$, для которого справедливо равенство $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s – номер класса $(s = 1, 2, \ldots)$, а l – порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Будем предполагать, что число различных классов конечно и равно s_1.

1.2. Введём множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \{\overline{Q} \bigcap (\partial Q + h_1) \bigcap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Пусть множество $\mathscr{K} \bigcap \partial Q$ имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру Лебега $\mu_{n-1}(\cdot)$. Однако в общем случае может оказаться, что $\mu_{n-1}(\mathscr{K} \bigcap \partial Q) \neq 0$ (см. [1, пример 7.6]).

Определим множества Γ_p как связные компоненты открытого в топологии ∂Q множества $\partial Q \backslash \mathscr{K}$. Можно доказать, что если $(\Gamma_p + h) \bigcap \overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in \mathsf{M}$, то либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует множество $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathscr{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$. В силу этого утверждения множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q},\ p = 1, 2, \ldots,\ h \in M\}$ можно разбить на классы следующим образом: множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1) существует $h \in \mathsf{M}$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$,

2) направления внешних нормалей к границе ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают (в случае $\Gamma_{p_1} + h_1,\ \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$).

Предположим, что число различных классов конечно и равно r_1.

Очевидно, что множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ – не более чем двум классам. Обозначим множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = \overline{1, r_1}$ – номер класса, j – номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q,\ \Gamma_{r, J_0+1}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q,\ 0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)$. Здесь через $J = J(r)$ обозначено количество элементов в r-м классе, а через $J_0 = J_0(r)$ – количество элементов в r-м классе, принадлежащих области Q.

Из определения множества $\mathscr{K}$ и фактов, представленных выше, вытекает, что для любого множества $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, при этом $\Gamma_{rj} \bigcap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, если $(s_1, l_1) \neq (s, l)$. Тогда несложно показать, что для любого номера $r = \overline{1, r_1}$ существует единственное число $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и после некоторой перенумерации подобластей Q_{sl} будут справедливы включения $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl},\ l = \overline{1, N(s)}$. Также для любого $\Gamma_{rj} \subset Q$ существуют подобласти $Q_{s_1 l_1}$ и $Q_{s_2 l_2}$ такие, что $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \bigcap \partial Q_{s_2 l_2}$ и $\Gamma_{rj} \bigcap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, если $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

2. Разностные операторы в пространствах Соболева.

2.1. Через $W_2^k(Q)$ обозначим пространство Соболева комплекснозначных функций из пространства $L_2(Q)$, имеющих все обобщённые производные из $L_2(Q)$ до порядка k включительно.

Обозначим через $\mathring{W}{}^1_{2,\Gamma}(Q)$ подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0, \quad r \in B, \quad l = \overline{J_0 + 1, J},$$

где $J_0 = J_0(r),\ J = J(r),\ B = \{r : J_0(r) > 0\},\ \Gamma = \{\Gamma_{rl}\},\ r \in B,\ l = \overline{J_0 + 1, J}$.

Введём матрицы R_s $(s = \overline{1, s_1})$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами вида

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathscr{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathscr{M}. \end{cases} \tag{2}$$

Далее введём матрицы R_s^1, получаемые из матриц R_s вычёркиванием последних $N - J_0$ столбцов, матрицы R_s^0 порядка $J_0 \times J_0$, получаемые из матриц R_s^1 вычёркиванием последних $N - J_0$ строк. Обозначим через e_i^r, $i = \overline{1, N}$, i-ю строку матрицы R_s^1.

Определение 1. Разностный оператор R_Q – $L_2(Q) \to L_2(Q)$ называется *регулярным*, если матрицы R_s, $s = \overline{1, s_1}$, и R_s^0, $s = s(r)$, $r \in B$, невырожденные.

Замечание. Если оператор R_Q является регулярным, то матрицы $R^0_{s(r)}$ невырожденные для всех $r \in B$. Следовательно, существуют такие коэффициенты γ^r_{ij}, $r \in B$, $i = \overline{J_0(r)+1, J(r)}$, $j = \overline{1, J_0(r)}$, что справедливо равенство

$$e^r_l = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} e^r_j, \quad l = \overline{J_0+1, J}. \tag{3}$$

Обозначим через $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w(x+h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} w(x+h_{sj})|_{\Gamma_{r1}}, \quad r \in B, \quad l = \overline{J_0+1, J},$$

где $\gamma = \{\gamma^r_{ij}\}$, γ^r_{ij} – комплексные числа.

Теорема 1. *Пусть оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *является регулярным. Тогда отображение* $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ – *изоморфизм.*

Это утверждение устанавливает связь между смешанной краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и сильно эллиптическим дифференциальным уравнением с нелокальными смешанными краевыми условиями.

2.2. Рассмотрим некоторое число $r \in B$ и соответствующие $J = J(r)$ и $J_0 = J_0(r)$. Для этого r существуют такие $p = p(r)$ и $m = m(r)$, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{pm}$, $Q_{pm} \neq Q_{s1}$. Перенумеруем подобласти p-го класса таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}, \quad l = \overline{1, J_0}, \quad J_0 \leqslant N(p).$$

Введём матрицу R'_s, получаемую из матрицы R_s вычёркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов. Если $N(p) > J_0$, то введём также матрицу R'_p, получаемую из матрицы R_p вычёркиванием последних $N(p) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов. Если $N(p) > J_0$, то введём матрицу $T_r = (R'_s \mid R'_p)$ порядка $J_0 \times (N(s) + N(p) - 2J_0)$, получаемую объединением столбцов матриц R'_s и R'_p.

Теорема 2. *Пусть оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *является регулярным, и пусть для всех* $r \in B$ *таких, что* $N(p) > J_0$, *столбцы матрицы* T_r *линейно независимы, и для всех* $r \in B$ *таких, что* $N(p) = J_0$, *столбцы матрицы* R'_s *линейно независимы. Предположим также, что* $R_Q^{-1}(H_1) \subset W^1_2(Q)$, *где* H_1 – *линейное подпространство в* $W^1_2(Q)$. *Тогда справедливы включения*

$$R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \quad \text{и} \quad H_1 \subset W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q).$$

Утверждение теоремы 2 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q при выполнении дополнительных условий на коэффициенты наличие "минимальной гладкости" функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на многообразиях Γ_{rl}, $r \in B$, $l = \overline{J_0+1, J}$, а функции из H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений естественно задавать однородные условия Дирихле на многообразиях Γ_{rl}, $r \in B$, $l = \overline{J_0+1, J}$, и краевые условия второго рода на многообразиях Γ_{rl}, $r \notin B$, $l = \overline{1, J}$. Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями второго рода на сдвигах многообразий Γ_{rl}, $r \in B$, $l = \overline{J_0+1, J}$, приводит к переопределённым задачам.

3. Смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

3.1. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Qu(x) = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{4}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0, \quad r \in B, \quad l = \overline{J_0(r)+1, J(r)}, \tag{5}$$

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i)\right)\Bigg|_{\Gamma_{rl}} = 0, \quad r \notin B, \quad l = \overline{1, J(r)}, \tag{6}$$

где $f_0 \in L_2(Q)$, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ_{rl}, дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R},$$

$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, оператор R задаётся по формуле (1).

Будем предполагать, что оператор A сильно эллиптический, т.е. выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть матрицы R_s, соответствующие разностному оператору R_Q, удовлетворяют условию $R_s + R_s^* > 0$, $s = \overline{1, s_1}$. В таком случае уравнение (4) будем называть *сильно эллиптическим.*

Определение 2. Функция $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ называется *обобщённым решением задачи (4)–(6)*, если для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}.$$

Теорема 3. *Пусть уравнение (4) сильно эллиптическое. Тогда для любой функции $f_0 \in \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ задачи (4)–(6), при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)},$$

где $c_0 > 0$ – постоянная, не зависящая от f_0.

3.2. Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщённых решений задачи (4)–(6).

Теорема 4. *Пусть уравнение (4) сильно эллиптическое. Предположим, что $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ – обобщённое решение задачи (4)–(6). Тогда $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $s = \overline{1, s_1}$, $l = \overline{1, N(s)}$, где $\mathscr{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}) < \varepsilon\}$.*

В работе [3] показана справедливость теоремы 4 при $\varepsilon = 0$ для случая, когда область $Q = (0, d) \times G$ является цилиндром, разностный оператор R имеет сдвиги по оси цилиндра, а дифференциальный оператор $A = -\Delta$, где Δ – оператор Лапласа. В общем случае теорема 4 при $\varepsilon = 0$ неверна (см. [5]).

4. Связь с нелокальной эллиптической краевой задачей. Изучим связь между смешанной краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и сильно эллиптическим дифференциальным уравнением с нелокальными смешанными краевыми условиями, которую устанавливает теорема 1 об изоморфизме.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Aw(x) = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{7}$$

с нелокальными смешанными краевыми условиями

$$w(x+h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r w(x+h_{sj})|_{\Gamma_{r1}}, \quad r \in B, \quad l = \overline{J_0(r)+1, J(r)}, \tag{8}$$

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} w_{x_j} \cos(\nu, x_i)\right)\Bigg|_{\Gamma_{rl}} = 0, \quad r \notin B, \quad l = \overline{1, J(r)}, \tag{9}$$

где $f_0 \in L_2(Q)$, ν – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_{rl}, дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R},$$

γ_{ij}^r – комплексные числа.

Пусть оператор A сильно эллиптический, т.е. выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Также предположим, что справедливо следующее

Условие А. Пусть для заданных чисел γ_{ij}^r существуют числа $a_h \in \mathbb{C}$ $(h \in \mathscr{M})$ такие, что выполняются равенства (3), при этом матрицы R_s вида (2) удовлетворяют условию

$$R_s + R_s^* > 0 \quad (s = \overline{1, s_1}).$$

Определение 3. Функция $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ называется *обобщённым решением задачи (7)–(9)*, если для любой функции $v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}.$$

Утверждение теоремы 1 устанавливает эквивалентность задач (4)–(6) и (7)–(9). Пусть выполняется условие A, функция $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ – обобщённое решение задачи (7)–(9). Тогда функция $u = R_Q^{-1} w \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ является обобщённым решением задачи (4)–(6). В силу теоремы 3 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* A. *Тогда для любой функции* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщённое решение* $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ *задачи (7)–(9), при этом справедлива оценка*

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_1 \|f_0\|_{L_2(Q)},$$

где $c_1 > 0$ *– постоянная, не зависящая от* f_0.

Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщённых решений задачи (7)–(9).

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* A. *Предположим, что* $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ *– обобщённое решение задачи (7)–(9). Тогда* $w \in W_2^2(Q \setminus (\partial Q \bigcap \mathscr{K})^\varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 6 можно получить обобщение теоремы 4 о гладкости обобщённых решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, предположив, что R_Q – регулярный оператор.

Теорема 7. *Пусть оператор* R_Q *регулярный, и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *– обобщённое решение задачи (4)–(6). Тогда* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* $s = \overline{1, s_1}$, $l = \overline{1, N(s)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-1115).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications // Operator Theory. Adv. and Appl. V. 91. Basel; Boston; Berlin, 1997.
2. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
3. *Liiko V.V., Skubachevskii A.L.* Smoothness of solutions to the mixed problem for elliptic differential-difference equation in cylinder // Complex Variables and Elliptic Equat. 2022. V. 67. № 2. P. 462–477.
4. *Onanov G.G., Tsvetkov E.L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Rus. J. of Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 491–500.
5. *Liiko V.V.* Mixed boundary value problem for strongly elliptic differential difference equations in a bounded domain // Rus. J. of Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 270–274.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 16.06.2022 г.
После доработки 16.06.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1226–1233

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.28+517.968.78

О СИСТЕМАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЖДЕСТВЕННО ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПЕРЕД ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

© 2022 г. М. В. Булатов, Л. С. Соловарова

Рассмотрены линейные однородные системы интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с матрицами-ядрами Вольтерры и Фредгольма с нулевыми начальными условиями. Исследован случай, когда искомая вектор-функция зависит от одного (интегро-дифференциальные системы) и двух (системы интегральных уравнений) аргументов и матрица перед главной частью является квадратной и тождественно вырожденной. Подчеркнуто принципиальное отличие рассматриваемых систем от систем, разрешённых относительно главной части, в существовании не только тривиального решения. В терминах матричных пучков и полиномов сформулированы достаточные условия, при выполнении которых задачи для рассматриваемых систем имеют только тривиальное решение. Приведены иллюстративные примеры.

DOI: 10.31857/S0374064122090060, EDN: CIBLSD

Введение. Системы различных классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений описывают важные прикладные задачи, чем и обусловлены интерес к их исследованию и большое количество публикаций по данной тематике. Конкретные прикладные задачи, библиографию и исторический обзор можно найти в специальной учебной литературе [1–3] и в монографиях [4–8].

Как правило, исследование существования и единственности решения таких задач приведены для случая, когда система разрешена относительно главной части. Значительно меньше исследованы системы с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Исключение составляют лишь интегральные уравнения Вольтерры первого рода. К настоящему времени созданы алгоритмы решения этих задач только для частных случаев. Детальную библиографию, исторический обзор и описание трудностей, возникающих при создании и обосновании численных методов решения интегральных уравнений первого рода, можно найти в работах [4–9].

Разработка качественной теории – формулировка условий существования и единственности решения в различных классах функций, а также разработка численных методов решения систем интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерры с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью – только начинает зарождаться. Число публикаций по этой теме насчитывает первые десятки статей (см., например, [10–12] и приведённую в них библиографию). Исследований аналогичного класса задач с матрицами-ядрами типа Вольтерры и Фредгольма практически нет. Эти факторы и послужили мотивацией для написания данной статьи.

В работе приведены формулировки двух видов систем интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью и подчеркнуты их принципиальные отличия от классических постановок задач для систем, разрешённых относительно главной части.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int_0^1 L(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ – вещественные $n\times n$-матрицы, $x(t)$ – заданная и искомая n-мерная вектор-функция, μ – вещественный параметр.

В данной работе рассмотрен случай, когда

$$\det A \equiv 0. \tag{3}$$

Всюду далее предполагается, что элементы $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$ и $L(t,\tau)$ обладают достаточной гладкостью, необходимой для проведения выкладок. Под *решением задачи* (1), (2) будем понимать любую непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает равенство (1) в тождество и удовлетворяет условию (2).

Если исходная система (1) является неоднородной, то при $K(t,\tau)\equiv L(t,\tau)\equiv 0$ и $A(t)\not\equiv 0$ имеем дифференциально-алгебраические уравнения, а при $A(t)\equiv 0$, $L(t,\tau)\equiv 0$ будем иметь один из четырёх случаев:

1) систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода при $\det B(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$;

2) систему интегральных уравнений Вольтерры третьего рода при $\det B(t_j)=0$, $j=\overline{1,p}$, $t_j\in[0,1]$;

3) интегро-алгебраические уравнения, если $\det B(t)\equiv 0$, но при условии, что $B(t)$ не является тождественно нулевой матрицей;

4) систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода при нулевой матрице $B(t)$.

Исследование неоднородной задачи (1) с заданными начальными условиями при $L(t,\tau)\equiv 0$ на предмет существования и единственности решения, а также создание численных методов её решения описаны в статьях [13, 14].

Из самой постановки задачи видно, что нулевая вектор-функция является решением данной задачи. Ниже сформулируем условия, гарантирующие существование только тривиального решения поставленных задач.

В данной работе также затронут вопрос о существовании только тривиального решения двумерных систем интегральных уравнений вида

$$C(s,q)u(s,q)+\int\limits_0^s\int\limits_0^q M(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1 N(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr=0, \tag{4}$$

где $0\leqslant r\leqslant s\leqslant 1$, $0\leqslant l\leqslant q\leqslant 1$, $C(\cdot)$, $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ – $n\times n$-матрицы, θ – скалярный параметр, $u(s,q)$ – n-мерная вектор-функция, и

$$\det C(s,q)\equiv 0. \tag{5}$$

Системы (1), (2) и (4) для которых выполнены условия (3) и (5) соответственно, принципиально отличаются от систем, разрешённых относительно главной части, т.е. с условием $\det A(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$ и $\det C(s,q)\neq 0$ при всех $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$. Они могут иметь бесконечно много решений при любых μ и θ, а в неоднородном случае могут быть неустойчивыми к возмущениям входных данных или не иметь достаточно гладкого решения. Таким образом, рассматриваемая задача относится к классу некорректных.

Приведём конкретные примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+$$

$$+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau+\mu\int\limits_0^1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что данная задача имеет множество решений $x_1 = \psi(t)$, $x_2 = -\psi'(t)$ при любом значении $\mu \in (-\infty, \infty)$, где $\psi(t)$ – любая функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi'(0)$ и $\int_0^1 \psi(t)dt = 0$.

Пример 2. Неоднородная система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

имеет единственное решение при любых значениях $\mu \in (-\infty, \infty)$.

В самом деле, из второго уравнения в (6)

$$\int\limits_0^t x_1(\tau)\, d\tau = f_2(t)$$

имеем $x_1(t) = f_2'(t)$. При этом должно быть выполнено

$$f_2(0) = 0. \tag{7}$$

Продифференцируем первое уравнение в (6):

$$x_1' + x_1 + \int\limits_0^t x_2(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^1 x_2(\tau)\, d\tau = f_1(t)$$

и получим $x_1''(t) + x_1'(t) + x_2(t) = f_1'(t)$. В силу того что, $x_1(t) = f_2'(t)$, имеем $x_2(t) = f_1'(t) - - f_2''(t) - f_2'''(t)$. Отметим, что данная система имеет единственное решение, которое не зависит от начальных условий (2)

Рассмотрим теперь возмущённую задачу (6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(\tau) \\ \tilde{x}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(\tau) \\ \tilde{x}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},$$

где $\|\tilde{f}_1(t) - f_1(t)\|_C \leqslant \delta$, $\|\tilde{f}_2(t) - f_2(t)\|_C \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Легко заметить, что при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t) + + \delta \sin(t/\delta^2)$ погрешность $\|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)\|_{C_{\delta\to 0}} \to \infty$, а при $\tilde{f}_2 = f_2 + \delta\cos(t)$ возмущённая задача не имеет решения в классе непрерывно-дифференцируемых функций, так как $\tilde{f}_2(0) \neq \neq 0$ (нарушено условие (7)).

Пример 3. В качестве решения задачи

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

можно взять вектор-функцию $(0, \varphi'(t))^{\mathrm{т}}$, где $\varphi(t)$ – любая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$.

Перейдём теперь к системе (4). Точно также, как и задача (1), (2) с условием (3), она принципиально отличается от систем, разрешённых относительно главной части (интегральных уравнений второго рода). Приведём некоторые примеры.

Пример 4. Рассмотрим неоднородную систему (4) вида

$$\begin{pmatrix}\varsigma(s,q) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(s,q)\\ u_2(s,q)\end{pmatrix}+\int\limits_0^s\int\limits_0^q\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr+$$

$$+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\begin{pmatrix}\psi(s,q,r,l) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr=\begin{pmatrix}\varphi_1(s,q)\\ \varphi_2(s,q)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

которая имеет единственное решение при любых достаточно гладких входных данных и любом $\theta\in(-\infty,\infty)$ (предположение на правую часть сделано по ходу изложения).

В самом деле, из второго уравнения $\int_0^s\int_0^q u_1(r,l)\,dl\,dr=\varphi_2(s,q)$ системы (8) вытекает, что

$$u_1(s,q)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial q}\varphi_2(s,q),$$

при этом должно выполняться $\varphi_2(0,q)=\varphi_2(s,0)=0$.

Подставив это выражение в первое уравнение (8), получим

$$\varsigma(s,q)u_1(s,q)+\int\limits_0^s\int\limits_0^q u_2(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\psi(s,q,r,l)u_1(r,l)\,dl\,dr=\varphi_1(s,q),$$

т.е.

$$u_2(s,q)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial q}\Big[\varphi_1(s,q)-\varsigma(s,q)u_1(s,q)-\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\psi(s,q,r,l)u_1(r,l)\,dl\,dr\Big].$$

Итак, решение данной системы зависит от смешанных производных высоких порядков входных данных, а функция $\varsigma(s,q)$ может обращаться в нуль, и этот факт не означает наличия сингулярных точек.

Похожая на предыдущую система

$$\begin{pmatrix}\varsigma(s,q) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(s,q)\\ u_2(s,q)\end{pmatrix}+\int\limits_0^s\int\limits_0^q\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr+$$

$$+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & N(s,q,r,l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

будет иметь сингулярные точки, если функция $\varsigma(s,q)=0$ в некоторых точках области $[0,1]\times\times[0,1]$ обращается в нуль. Если взять $\varsigma(s,q)=-sq$, то решением первого уравнения данного примера, помимо тривиального, является функция $u_1(r,l)=1$. Также в зависимости от того как задана функция $N(s,q,r,l)$ и скаляр θ второе уравнение системы (9) может иметь нетривиальное решение. Например, при $\theta=1$ и $N(s,q,r,l)\equiv 1$ любая функция

$$u_2(r,l)=(r-0.5)^{2k+1}+(l-0.5)^{2m+1},$$

где k, m – любые целые неотрицательные числа, является решением.

В следующем пункте приведены достаточные условия существования только тривиального решения задачи (1), (3).

2. Условия существования только тривиального решения. Для дальнейшего изложения потребуются определения и вспомогательные утверждения из теории матричных пучков и полиномов.

Определение 1 [15, 16]. Матричный полином $p^2A(t)+pB(t)+C(t)$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $n\times n$-матрицы, p – скаляр, имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$, если:

1) $\operatorname{rank} A(t)=k_0=\mathrm{const}$ для любого $t\in[0,1]$;

2) $\operatorname{rank}(A(t)|B(t))=k_0+k_1=\mathrm{const}$ при любом $t\in[0,1]$;

3) $\det(p^2A(t)+pB(t)+C(t))=a_0(t)p^{2k_0+k_1}+a_1(t)p^{2k_0+k_1-1}+\ldots$, где $a_0(t)$ – функция, причём $a_0\neq 0$, t – любое значение из отрезка [0,1].

Лемма 1 [15, 16, 13]. *Если матричный полином $p^2A(t)+pB(t)+C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$ и элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ принадлежат классу $C^k_{[0,1]}$, то существует невырожденная для любого $t\in[0,1]$ матрица $P(t)$ такая, что*

$$P(t)(p^2A(t)+pB(t)+C(t))=p^2\begin{pmatrix}A_1(t)\\0\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}B_1(t)\\B_2(t)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $k_0\times n$-матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $k_1\times n$-матрицы, C_3 – $(n-k_0-k_1)\times n$-матрица, причём

$$\det\begin{pmatrix}A_1(t)\\ \alpha B_2(t)\\ \beta C_3(t)\end{pmatrix}\neq 0\quad\text{для любых}\quad t\in[0,1]\quad\text{и}\quad \alpha,\beta\neq 0.$$

Для квадратных матриц, элементы которых зависят от двух аргументов, приведём результаты из теории матричных пучков.

Определение 2 (см., например, [17, с. 52]). Матричный пучок $\lambda C(s,q)+D(s,q)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень" в области $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$, если:

1) $\operatorname{rank} C(s,q)=k_0=\mathrm{const}$ для любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$;

2) $\det(\lambda C(s,q)+D(s,q))=a_0(s,q)\lambda^{k_0}+a_1(s,q)\lambda^{k_0-1}+\ldots+a_k(s,q)$,

где $a_0(s,q)$ – функция, не обращающаяся в нуль при любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$.

Лемма 2 [17, с. 32]. *Если матричный пучок $\lambda C(s,q)+D(s,q)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень" в области $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$ и элементы матриц $C(s,q)$ и $D(s,q)$ являются непрерывными функциями в заданной области, то существует невырожденная $n\times n$-матрица с непрерывными элементами $P(s,q)$ такая, что*

$$P(s,q)(\lambda C(s,q)+D(s,q))=\lambda\begin{pmatrix}C_1(s,q)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D_1(s,q)\\D_2(s,q)\end{pmatrix},\tag{10}$$

где C_1, D_1 – $k_0\times n$-матрицы, D_2 – $(n-k_0)\times n$-матрица, λ – действительный параметр.

Лемма 3 [10]. *Матрица $\begin{pmatrix}C_1(s,q)\\ \alpha D_2(s,q)\end{pmatrix}$ из леммы 1 является невырожденной для любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$ и любого скаляра $\alpha\neq 0$.*

Перед формулировкой условий существования достаточно гладкого решения рассматриваемого класса задач приведём ещё два факта.

Утверждение 1. *Если у задачи (1), (2) элементы входных данных достаточно гладкие, $\det A(t)\neq 0$ при всех $t\in[0,1]$, то при $|\mu|<\mu_0$ она имеет только тривиальное решение.*

Утверждение 2. *Система интегральных уравнений*

$$u(s,q)+\int\limits_0^r A_1(s,q,r)u(s,r)\,dr+\int\limits_0^s A_2(s,q,l)u(l,q)\,dl+$$

$$+\int\limits_0^s\int\limits_0^q A_3(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1 A_4(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr=0,$$

где $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant q \leqslant 1$, $A_j(\cdot)$, $j = \overline{1,4}$, *– $n \times n$-матрицы с непрерывными в области определения элементами,* θ *– скалярный параметр, при* $|\theta| \leqslant \theta_0$ *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство этих фактов следует из принципа сжатых отображений (см., например, [1, с. 74; 2, с. 52]).

Сформулируем достаточные условия существования решения рассматриваемых задач.

Утверждение 3. *Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:*

1) элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ *и* $f(t)$ *– дважды непрерывно дифференцируемые функции (для матриц* $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ *– по совокупности элементов);*

2) матричный полином $p^2A(t) + pB(t) + K(t,t)$ *имеет простую структуру на отрезке* $[0,1]$.

Тогда при $|\mu| \leqslant m_0$ *данная задача имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Умножим систему (1) на матрицу $P(t)$ такую, что матрица

$$P(t)(p^2A(t) + pB(t) + K(t,t))$$

имеет блочный вид

$$P(t)(p^2A(t) + pB(t) + K(t,t)) = p^2 \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1(t,t) \\ K_2(t,t) \\ K_3(t,t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $K_1(t,t)$ – $k_0 \times n$-матрицы, $B_2(t)$, $K_2(t,t)$ – $k_1 \times n$-матрицы, $K_3(t,t)$ – $n \times (n - k_0 - k_1)$-матрица, $\operatorname{rank} A(t) = k_0$, $\operatorname{rank}(A(t)|B(t)) = k_0 + k_1$. Существование такой матрицы гарантируют условия утверждения и лемма 1.

Используя результат леммы 1, распишем в блочном виде систему

$$P(t)\bigg(A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\bigg) = \tag{11}$$

$$= A_1(t)x'(t) + B_1(t)x(t) + \int\limits_0^t K_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0,$$

$$B_2(t)x(t) + \int\limits_0^t K_2(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_2(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^t K_3(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_3(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \tag{13}$$

где

$$P(t)L(t,\tau) = \begin{pmatrix} L_1(t,\tau) \\ L_2(t,\tau) \\ L_3(t,\tau) \end{pmatrix}, \quad P(t)f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя (12), (13) по t один и два раза соответственно и объединяя полученные уравнения с уравнениями (11), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ K_3(t,t) \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \bar{B}_2(t) \\ \bar{B}_3(t) \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} K_1(t,\tau) \\ \bar{K}_2(t,\tau) \\ \bar{K}_3(t,\tau) \end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 \begin{pmatrix} L_1(t,\tau) \\ \bar{L}_2(t,\tau) \\ \bar{L}_3(t,\tau) \end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

с начальным условием $x(0) = 0$, элементы матриц которой являются непрерывными функциями в силу первого условия утверждения. Из условий утверждения и леммы 1 следует, что блочная матрица

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ K_3(t,\tau) \end{pmatrix}$$

у системы (14) является невырожденной для любого $t \in [0,1]$. Из утверждения 1 вытекает, что система (14) при $|\mu| \leqslant \mu_0$ и $x(0) = 0$ имеет только тривиальное решение. Утверждение доказано.

Если в точках нарушается второе условие утверждения 2, то через данные точки может проходить несколько решений. Для иллюстрации этого факта достаточно рассмотреть простейший пример с матрицами

$$A(t) = \operatorname{diag}(a_{11}(t), 0, 0), \quad B(t) = \operatorname{diag}(1, b_{22}(t), 0),$$

$$K(t,\tau) = \operatorname{diag}(0, 1, K_{33}(t,\tau)), \quad L(t,\tau) \equiv 0. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения

$$(t - t_j)x'(t) - dx(t) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{16}$$

где d – натуральное число, $t_j \in [0,1)$, $j = \overline{1,3}$, имеют решения $x = 0$ при $t \in [0, t_j)$ и $x = c(t - t_j)^d$ при $t \in [t_j, 1]$, где c – любое число.

Положим $j = 3$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{\mathrm{т}}$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < 1$. Записав (16) при $j = 2$ и $j = 3$ в виде интегральных уравнений Вольтерры второго и первого рода соответственно и объединив полученные уравнения в систему (1) с матрицами (15), получим, что в точках $t_j \in [0,1)$ происходит нарушение условий второго утверждения (соответственно изменяется $\operatorname{rank} A(t)$ в точке t_1, изменяется $\operatorname{rank}(A(t)|B(t)$ в точке t_2 и функция $a_0(t_3) = 0$).

Утверждение 4. *Пусть для задачи (4) выполнены условия:*

1) элементы входных данных достаточно гладкие;

2) матричный пучок $\lambda C(s,q) + M(s,q,s,q)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень".

Тогда, начиная с некоторого $|\theta| \leqslant \theta_0$, рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Доказательство утверждения 4 основано на леммах 2 и 3 и проводится аналогично доказательству утверждения 3.

Заключение. В статье приведены достаточные условия существования только тривиального решения для однородных систем интегро-дифференциальных (с нулевыми начальными данными) и интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. Данные условия сформулированы в терминах матричных полиномов и пучков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-51-S52003-а),

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
2. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М., 1975.
3. *Бельтюков Б.А.* Некоторые вопросы теории приближённых методов решения интегральных уравнений. Иркутск, 1994.
4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. М., 1978.
5. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. Новосибирск, 1999.
6. *Brunner H., Houwen P. van der.* The Numerical Solution of Volterra Equations. Amsterdam; New York, 1986.

7. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge, 2004.
8. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia, 1985.
9. *Тен Мен Ян.* Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерры I рода: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1985.
10. *Bulatov M.V., Lima P.M.* Two-dimensional integral-algebraic systems: analysis and computational methods // J. of Comput. and Appl. Math. 2011. V. 236. № 2. P. 132–140.
11. *Brunner H., Hui L.* Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1// IMA J. Numer. Anal. 2020. V. 40(2). P. 850–885.
12. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 43–51.
13. *Булатов М.В., Чистякова Е.В.* Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1248–1255.
14. *Булатов М.В., До Тиен Тхань.* Методы типа Адамса для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 3. С. 93–106.
15. *Булатов М.В.* Об одном семействе матричных троек // Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий: матер. конф. Иркутск, 2002. С. 10.
16. *Булатов М.В., Минг-Гонг Ли.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1299–1306.
17. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 24.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1234–1241

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.642.2

КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Н. С. Габбасов

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для нахождения его приближённого решения в пространстве обобщённых функций предложены и обоснованы специальные варианты обобщённого метода коллокации.

DOI: 10.31857/S0374064122090072, EDN: CIHAHE

Настоящая работа посвящена отысканию приближённого решения линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$Ax \equiv x^{(p)}(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, числа $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j=\overline{1,q})$ и $p \in Z^+$ являются фиксированными; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами "гладкости" точечного характера, а x – искомая функция. Очевидно, что задача о нахождении решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, возникает вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность этой задачи. При рассмотрении этого вопроса вполне естественно учитывать, что при $p=0$ ИДУ (1) представляет собой линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле уравнения являются "родственными"). Последнее встречается в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и содержащуюся в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V. Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных с помощью функционала "дельта-функция Дирака" (соответственно функционала "конечная часть интеграла по Адамару"). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114].

ИДУ (1) при $q=1$, $t_1=0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D. В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D обобщённых функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A), обоснован прямой проекционный метод приближённого решения, основанный на применении стандартных полиномов. Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с соответствующим теоретическим обоснованием.

В данной статье разработаны обобщённые варианты метода коллокации на основе специальных полиномов, приспособленные к приближённому решению ИДУ (1) в пространстве типа D обобщённых функций. Основное внимание уделено обоснованию исследуемых методов в смысле [9, гл. 1], т.е. доказаны теоремы существования и единственности решения соответствующего приближённого уравнения, установлены оценки погрешности приближённого решения и доказана безусловная сходимость последовательности приближённых решений к точному решению однозначно разрешимого ИДУ (1). Также исследованы вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. Пространства основных и обобщённых функций. Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя работе [10], будем считать, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t=0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m,p;0\} \equiv \{y \in C\{m;0\} : y^{\{i\}}(0)=0, \quad i=\overline{0,p-1}\},$$

где число $p \in Z^+$ удовлетворяет неравенству $p<m$.

Введём в пространстве Y норму

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \tag{2}$$

где $T : Y \to C$ – "характеристический" оператор класса Y, определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)t^i/i! \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C \quad (H(0) \equiv \lim_{t\to 0} H(t)).$$

Лемма 1 [8]. *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \tag{3}$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t=0$, а $y^{\{i\}}(0)=\alpha_i i!$ $(i=\overline{p,m-1})$.

ii) Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C.

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на множестве I функций, в котором определим норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \tag{4}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2 [8]. *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C.*

Следствие 1. *Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geqslant 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leqslant \|z\|_{C^{(p)}} \leqslant d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^{p} \|z^{(i)}\|_C$.*

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1)=0 \quad (i=\overline{0,p-1})\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \tag{5}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и её "тейлоровские" производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t)y(t)dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \quad (y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}). \tag{6}$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \tag{7}$$

2. Обобщённый метод коллокации на основе полинома Бернштейна. Пусть задано ИДУ (1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{8}$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $p \in N \bigcup \{0\}$, $m \in N$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$; ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\,\cdot\,, s) \in C, \quad K(t, \cdot\,) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{9}$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближённое решение ИДУ (8) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+1}\delta^{\{i\}}(t), \tag{10}$$

$$g_n \equiv Jz_n, \quad z_n(t) \equiv 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{11}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} z(s)\,ds,$$

$\binom{n}{i} \equiv n!/(i!(n-i)!)$ $(i = \overline{0, n})$ – биномиальные коэффициенты. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$ $(j = \overline{0, n+m-p})$ найдём согласно нашему методу из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+1)$–го порядка:

$$c_k = (Ty - TKx_n)(\nu_k) \quad (k = \overline{0, n}), \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}), \tag{12}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближённого решения, а узлы коллокации $\nu_k = \nu_k^{(n)} \in I$ вычисляются по формуле

$$\nu_k = -1 + 2k/n \quad (k = \overline{0, n}). \tag{13}$$

Прежде чем перейти к обоснованию предложенного метода (10)–(13), следуя работе [11], примем следующие полезные для оформления результатов соглашения. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0)$ СЛАУ (12) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$, и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (8) по норме пространства X” заменим простой фразой “метод (10)–(12) обоснованно применим к уравнению (8)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (8).

Для вычислительного алгоритма (8)–(13) справедлива

Теорема 1. *Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 [8]), то прямой метод (10)–(12) обоснованно применим к уравнению (8), причём*

$$\Delta x_n^* = O\{\omega_t(h;\Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i;\Delta_n) + \omega(Ty;\Delta_n)\}, \tag{14}$$

где $\omega(f;\Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ $(0 < \Delta \leqslant 2)$, а $\omega_t(h;\Delta)$ – частный модуль непрерывности функции h по переменной t; $h \equiv T_tK$, $f_i \equiv T\psi_i$ $(i = \overline{0, m-p-1})$, $\Delta_n \equiv n^{-1/2}$.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (8) можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y \quad (x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m,p;0\}),$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Систему (10)–(12) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m-p+1)$-мерное подпространство элементов вида (10), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\operatorname{span}\{t^i\}_p^{n+m}$. Далее введём линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+1} : Y \to Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+1}(y;t) \equiv (UB_nTy)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{15}$$

где $B_n : C \to \Pi_n \equiv \operatorname{span}\{t^i\}_0^n$ представляет собой оператор Бернштейна [12, с. 22] по системе узлов (13).

Покажем теперь, что система (10)–(12) равносильна линейному уравнению

$$A_nx_n \equiv Vx_n + \Gamma_nKx_n = \Gamma_ny \quad (x_n \in X_n, \quad \Gamma_ny \in Y_n). \tag{16}$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ – решение уравнения (16), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n\tau_n^* = 0$ $(\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y)$. В силу равенств (10), (11) и (15) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + B_nT\tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\tau_n^*)^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!} \equiv 0. \tag{17}$$

На основании (3) очевидно, что тождество (17) эквивалентно системе

$$z_n^*(t) \equiv (B_n(Ty - TKx_n^*))(t), \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}). \tag{18}$$

В левой и правой частях первого равенства системы (18) находятся полиномы Бернштейна некоторых функций соответственно со значениями c_k^* и $(Ty - TKx_n^*)$ в узлах (ν_k) $(k = \overline{0, n})$ из (13). Далее, с учётом (8) и $Vx_n^* = Uz_n^*$, имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{p, m-1}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y).$$

Следовательно, система (18) принимает вид

$$c_k^* = (Ty - TKx_n^*)(\nu_k) \quad (k = \overline{0, n}), \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}). \tag{19}$$

Итак, СЛАУ (12) имеет решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p}$, т.е. решение уравнения (16) является решением системы (10)–(12).

С целью получения обратного утверждения соответствующие равенства в узлах в (19) умножаем на выражения

$$2^{-n}\binom{n}{i}(t+1)^i(1-t)^{n-i} \quad (i = \overline{0, n})$$

соответственно и затем почленно складываем, что приводит к системе (18). Далее достаточно провести изложенные выше рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (16). Для этих целей понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n, которое устанавливает

Лемма 3. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leqslant d_1 \omega(Ty; \Delta_n)$$

(здесь и далее d_i $(i = \overline{1, 3})$ – некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 3 следует из представления (3), определений (15), (2) и оценки [12, с. 245]:

$$\|f - B_n f\|_C \leqslant d_1 \omega(f; \Delta_n) \quad (f \in C). \tag{20}$$

Покажем теперь "близость" операторов A и A_n на подпространстве X_n. Использовав уравнения (8) и (16), представления (3) и (15), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y = \|TKx_n - B_n TKx_n\|_C. \tag{21}$$

На основании (8), (5) и (6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} \psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$TKx_n = \int_{-1}^{1} h(t,s) g_n(s)\, ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} f_i(t). \tag{22}$$

В силу (22), (20), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\|TKx_n - B_n TKx_n\|_C \equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^{1} (h - B_n^t h)(t,s) g_n(s)\, ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+1}(f_i - B_n f_i)(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2d_1\|g_n\|_C\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i d_1|c_{i+n+1}|\omega(f_i;\Delta_n)\leqslant$$

$$\leqslant 2d_1\|g_n\|_{(p)}\omega_t(h;\Delta_n)+d_1\|x_n\|_X\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\leqslant$$

$$\leqslant d_2\Big[\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\Big]\|x_n\|_X \quad (d_2\equiv 2d_1). \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n:

$$\varepsilon_n\equiv\|A-A_n\|_{X_n\to Y}\leqslant d_2\Big[\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\Big]. \tag{24}$$

Из теоремы 7 [9, с. 19] на основании оценки (24) и леммы 3 вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (14).

Следствие 2. *Если существуют ограниченные производные* $h_t^{(r)}$, $f_i^{(r)}$, $(Ty)^{(r)}$ $(r\geqslant 2)$, *то в условиях теоремы 1 верна оценка* $\Delta x_n^*=O(1/n)$.

3. Обобщённый метод коллокации на базе интерполяционного полинома Эрмита–Фейера. Приближённое решение задачи (8), (9) будем искать в виде

$$x_n(t)\equiv\bigg(J\bigg\{\sum_{i=0}^{2n-1}c_it^i\bigg\}\bigg)(t)+\sum_{i=0}^{m-p-1}c_{i+2n}\delta^{\{i\}}(t), \tag{25}$$

где $c_j=c_j^{(n)}$ $(j=\overline{0,2n+m-p-1})$ – подлежащие определению коэффициенты, которые находим из квадратной СЛАУ $(2n+m-p)$-го порядка:

$$(T\rho_n)(\lambda_k)=0,\quad (TUx_n)'(\lambda_k)=0\quad (k=\overline{1,n}),\quad \rho_n^{\{i\}}(0)=0\quad (i=\overline{p,m-1}), \tag{26}$$

где $\{\lambda_k\}$ – система узлов Чебышёва первого рода.

Пусть $F_n\equiv F_{2n+m-p}:Y\to Y_n\equiv \operatorname{span}\{t^i\}_p^{2n+m-1}$ – линейный оператор, сопоставляющий любой функции $y\in Y$ полином F_ny, однозначно определяемый условиями

$$(TF_ny-Ty)(\lambda_k)=0,\quad (TF_ny)'(\lambda_k)=0\quad (k=\overline{1,n}),$$

$$(F_ny-y)^{\{i\}}(0)=0\quad (i=\overline{p,m-1}).$$

На основании рассуждений, приведённых в работе [5, с. 29], несложно получить представление

$$F_ny\equiv F_{2n+m-p}(y;t)\equiv(U\Phi_nTy)(t)+\sum_{i=p}^{m-1}y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{27}$$

где $\Phi_n:C\to\Pi_{2n-1}$ – оператор Эрмита–Фейера [12, с. 549] по системе $\{\lambda_k\}$ $(k=\overline{1,n})$.

Лемма 4. *Если функции* $y\in Y$ *и* Ty *принадлежат классу* $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то справедлива оценка*

$$\|y-F_ny\|_Y\leqslant d_3n^{-\alpha/2}.$$

Доказательство следует из леммы 1, представлений (27), (2) и оценки (см., например, [13])

$$\|f-\Phi_nf\|_C\leqslant d_3n^{-\alpha/2}\quad (f\in\operatorname{Lip}\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1).$$

Для вычислительной схемы (8), (9), (25), (26) справедлива

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *в пространстве* X, *а функции* h *(по* t*),* f_i $(i = \overline{0, m-p-1})$, Ty *принадлежат классу* $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то метод (25), (26) обоснованно применим к уравнению (8), и при этом* $\Delta x_n^* = O(n^{-\alpha/2})$.

Для доказательства данной теоремы достаточно повторить рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 1, с учётом того, что в этом случае система (25), (26) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv F_n A x_n = F_n y \quad (x_n \in \widetilde{X}_n, \quad F_n y \in \widetilde{Y}_n),$$

где $\widetilde{X}_n$ – подпространство всех образований x_n вида (25) таких, что $(TUx_n)'(\lambda_k) = 0$ $(k = \overline{1, n})$, а $\widetilde{Y}_n$ состоит из всех полиномов $y_n \in Y_n$, обладающих свойством $(Ty_n)'(\lambda_k) = 0$ $(k = \overline{1, n})$.

4. Замечания.

1. В силу определения нормы в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

2. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 2, а именно, из них вытекают соответствующие простые следствия: 1) если исходные данные (h, f_i, Ty) уравнения (8) принадлежат классу $C^{(r)}$ $(r = 2, 3, \ldots)$, то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-1})$; 2) если же исходные данные принадлежат классу $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то при выполнении условий теоремы 2 верна оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-\alpha/2})$.

3. При $p = 0$ исследуемое ИДУ (8) является интегральным уравнением третьего рода с оператором

$$A : D\{m; 0\} \to C\{m; 0\},$$

а прямой метод (10)–(13) – специальным для УТР вариантом обобщённого метода коллокации. Следовательно, теорема 1 содержит в себе известные результаты [5, с. 98–100] по обоснованию специального варианта метода коллокации для решения УТР в классе $D\{m; 0\}$ обобщённых функций.

4. Если $m = p = 0$, то ИДУ (8) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C. При этом вычислительный алгоритм (10)–(13) становится известным вариантом метода коллокации (см. [14]), причём $Ty \equiv y$ и $h \equiv K$. Поэтому в данном случае оценка теоремы 1 совпадает с соответствующей уравнению второго рода в C оценкой статьи [14].

5. Суть предыдущих замечаний 3, 4 остаётся в силе и в случае прямого метода (25), (26).

6. Так как в условиях теорем 1 и 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad n \geqslant n_1),$$

то очевидно [9, с. 23, 24], что предложенные в данной работе прямые методы для ИДУ (8) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Последнее позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперёд заданной степенью точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind// SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., 1972.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.

4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций. Казань, 2006.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2012.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2003.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
10. *Пресcдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Мат. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
11. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.
12. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
13. *Петерсен И.* О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1961. № 1. С. 3–12.
14. *Каспшицкая М.Ф., Тукалевская Н.И.* К вопросу о сходимости метода коллокации // Укр. мат. журн. 1967. Т. 19. № 4. С. 48–56.

Набережночелнинский институт Казанского
(Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 29.12.2021 г.
После доработки 29.12.2021 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1242–1250

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО ПРИНЦИПА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. М. В. Николаев, А. А. Никитин, У. Дикман

Работа посвящена анализу системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в результате трёхпараметрического замыкания третьего пространственного момента в модели У. Дикмана и Р. Лоу в случае n-видового сообщества в N-мерном пространстве. Данная система для анализа её разрешимости представляется в виде операторного уравнения в банаховом пространстве специального вида. При помощи обобщённого принципа неподвижных точек формулируются достаточные условия существования нетривиального решения.

DOI: 10.31857/S0374064122090084, EDN: CIIPCT

Введение. В данной работе изучена система нелинейных интегральных уравнений, возникающая в модели популяционной динамики Дикмана–Лоу [1, 2] в случае многовидового сообщества:

$$0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)N_i + [(\overline{m}_i + \overline{m}_j) * C_{ij}](x) - (\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i + d_j) + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x))C_{ij}(x) -$$

$$- \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{[\overline{w}_{ik} * C_{jk}](-x)}{N_j} + \frac{[\overline{w}_{jk} * C_{ik}](x)}{N_i}\right)C_{ij}(x) - \widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\overline{w}_{ik}C_{ik} * C_{kj}](x) + [\overline{w}_{jk}C_{kj} * C_{ik}](x)}{N_k} -$$

$$- \widetilde{\beta}N_iN_j\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})N_k, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Здесь $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\,dy$ – свёртка функций f и g; $d_i > 0$ – естественная смертность вида i; $\overline{m}_i(x) = b_im_i(x)$, где $m_i(x)$ – ядро разброса, а $b_i > 0$ – интенсивность рождаемости вида i; $\overline{w}_{ij}(x) = s_{ij}w_{ij}(x)$, где $w_{ij}(x)$ – ядро конкуренции, $s_{ij} \geqslant 0$ – сила конкуренции вида i по отношению к виду j. Ядра разброса и конкуренции являются неотрицательными интегрируемыми сферически симметричными функциями с L_1-нормой, равной единице, стремящимися к нулю на бесконечности. Кроме того, $\widetilde{\alpha} = \alpha/(\alpha+\gamma)$, $\widetilde{\beta} = \beta/(\alpha+\gamma)$, $\widetilde{\gamma} = \gamma/(\alpha+\gamma)$, где α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\alpha + \gamma \neq 0$. Все описанные выше величины известны, а под δ_{ij} понимается символ Кронекера. Числа N_i и функции $C_{ij}(x)$ – это неизвестные первые и вторые пространственные моменты сообщества соответственно, на которые накладываются дополнительные условия вида

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} C_{ij}(x) = N_iN_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Система (1) называется *системой уравнений равновесия.* Она представляет собой следствие бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений динамики пространственных моментов (вывод которой дан, например, в статье [3]) в случае трёхпараметрического замыкания третьего момента (см. [4]). Числа α, β и γ являются параметрами данного замыкания.

Решение системы описывает средние плотности популяций видов сообщества, а также пространственное распределение пар индивидов в стационарном случае (отсутствует динамика во времени).

Подобные задачи ранее исследовались авторами в работах [5] и [6], в которых рассматривался одновидовой случай, что приводило к одному интегральному уравнению. В первой статье к изучаемому уравнению для установления достаточных условий существования решения применялся обобщённый принцип Лере–Шаудера. Во второй статье введение пространств функций, интегрируемых с точностью до константы, позволило применить принцип Банаха. Идеи этих статей частично использованы в настоящей работе, но с применением более общего принципа неподвижных точек и принципа Лере–Шаудера–Банаха, предложенного М.А. Красносельским (см. [7]).

Основная цель работы – найти достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения системы (1) с учётом условий (2). Для этого система рассматривается в виде единого операторного уравнения в терминах некоторого специального банахова пространства. После этого оператор, порождённый уравнением, исследуется на предмет наличия неподвижных точек. Кроме того, показывается, что неподвижная точка исследуемого оператора не может быть тривиальной. Заметим, что леммы, приведённые в пунктах 1 и 2, имеют технический характер и могут быть доказаны с использованием стандартной техники из курса функционального анализа.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим матричное банахово пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$, т.е. пространство матриц, компонентами которых являются элементы $\mathbb{B}$, а норма определяется по правилу

$$\|F\|_{m\times n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|, \tag{3}$$

где

$$F=[F_{ij}]_{i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}}\in\mathbb{B}^{m\times n}.$$

Очевидно, что полученное пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$ с нормой (3) также является банаховым, и для него имеет место следующий критерий компактности.

Лемма 1. *Множество $M\subset\mathbb{B}^{m\times n}$ компактно в пространстве $\mathbb{B}^{m\times n}$ тогда и только тогда, когда каждое из множеств $M|_{ij}$ при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ компактно в $\mathbb{B}$, где*

$$M|_{ij}=\{F_{ij}:F\in M\}.$$

Из этой леммы напрямую следует связь компактности оператора, действующего в матричных пространствах, с компактностью его сужений на всевозможные компоненты образа.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ – банаховы пространства. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\mathbb{B}_1^{m_1\times n_1}$ в $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$, компактен тогда и только тогда, когда одновременно компактны все операторы следующего вида:*

$$\mathcal{A}_{ij}F=(\mathcal{A}F)_{ij},\quad i=\overline{1,m_2},\quad j=\overline{1,n_2},$$

т.е. сужения оператора $\mathcal{A}$ на всевозможные компоненты пространства $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$.

В дальнейшем будем рассматривать специальное функциональное пространство $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, введённое в статье [6], состоящее из функций вида

$$f(x)=F(x)+\eta,\quad \text{где}\quad F\in L_1(\mathbb{R}^N),\quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Для удобства изложения будем обозначать функцию $F\in L_1(\mathbb{R}^N)$ и число $\eta\in\mathbb{R}$, соответствующие функции $f\in\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, через $\mathcal{F}f$ и $\mathcal{N}f$ соответственно. Введённое пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\widehat{L_1}}=\|\mathcal{F}f\|_{L_1}+|\mathcal{N}f|. \tag{4}$$

Установим критерии предкомпактности множеств из пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$.

Лемма 3. *Множество K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}K$ предкомпактно в $L_1(\mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{N}K$ предкомпактно в $\mathbb{R}$, где*

$$\mathcal{F}K = \{\mathcal{F}f : f \in K\}, \quad \mathcal{N}K = \{\mathcal{N}f : f \in K\}.$$

Формулировка леммы 3 имеет весьма общий характер. Намного удобнее пользоваться следующим (специальным) критерием.

Лемма 4. *Множество K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) существует число $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in K$ справедливо неравенство $\|f\|_{\widehat{L_1}} < M$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что при выполнении для произвольного $h \in \mathbb{R}^N$ условия $\|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$ и для любой функции $F \in \mathcal{F}K$ справедливо неравенство $\int_{\mathbb{R}^N} |F(x+h) - F(x)|\, dx < \varepsilon$.

Доказательство. Согласно лемме 3 множество K предкомпактно тогда и только тогда, когда предкомпактны множества $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$. Таким образом, если K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, то для множества $\mathcal{F}K$ выполнен критерий Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено, что с учётом определения нормы (4) влечёт справедливость условий 1) и 2).

С другой стороны, если упомянутые выше условия леммы верны, то множество $\mathcal{F}K$ удовлетворяет критерию Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено, т.е. удовлетворяет условию теоремы Больцано–Вейерштрасса. Следовательно, оба они предкомпактны в соответствующих пространствах, а значит, K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Лемма доказана.

2. Некоторые операторы, действующие в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Исследуем некоторые отображения, действующие в банаховом пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

Рассмотрим класс интегрируемых существенно ограниченных функций

$$BL_1(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N) : \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| < +\infty\}$$

и введём обозначение

$$\|\varphi\|_{BL_1} = \max\{\|\varphi\|_{L_1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi|\}.$$

Пусть $\Phi \in (BL_1(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ и $\mathcal{M}$ – оператор, действующий на элементы $F \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{M}F = \Phi \odot F$, где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц.

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{M}$ является линейным оператором в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, имеющим норму $\|\mathcal{M}\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Для элемента $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ корректно определена операция свёртки

$$[f * \varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}f(x-y)\varphi(y)\, dy + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, dy.$$

Рассмотрим аналог этой операции в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Пусть

$$\varphi_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^N), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Определим оператор $\mathcal{C}$, действующий на элементы $F \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу

$$\mathcal{C}F = [[\varphi_{ij} * F_{ij}]]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{5}$$

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{C}$, определяемый выражением (5), является линейным компактным оператором, действующим в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, с нормой $\|\mathcal{C}\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{L_1}$.*

Замечание 1. Компактность оператора $\mathcal{C}$ доказывается при помощи лемм 1, 2 и 4.

Помимо линейных операторов рассмотрим так называемые квадратичные операторы. Будем называть оператор $\mathcal{A}: X \to Y$ *квадратичным*, если существует такой билинейный оператор $\mathcal{B}: X \times X \to Y$, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\mathcal{A}x = \mathcal{B}(x, x).$$

Будем называть K-*нормой* квадратичного оператора $\mathcal{A}$, действующего из банахова пространства $\mathbb{B}_1$ с нормой $\|\cdot\|_1$ в банахово пространство $\mathbb{B}_2$ с нормой $\|\cdot\|_2$, число

$$\|\mathcal{A}\|_K = \sup_{x\in\mathbb{B}_1\setminus\{\theta_1\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|_2}{\|x\|_1^2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_2.$$

где θ_1 – это нулевой элемент пространства $\mathbb{B}_1$.

Замечание 2. K-норма квадратичного оператора, действующего в банаховых пространствах, не превосходит нормы порождающего его билинейного оператора.

Лемма 7. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, а $\mathcal{A}: \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathbb{B}_1$ имеет место оценка*

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}\|(\|x\|_1 + \|y\|_1)\|x - y\|_1.$$

Доказательство. Исходя из билинейности оператора $\mathcal{B}$, имеем

$$\mathcal{B}(x,x) - \mathcal{B}(y,y) = \mathcal{B}(x,x) - \mathcal{B}(x,y) + \mathcal{B}(x,y) - \mathcal{B}(y,y) = \mathcal{B}(x, x-y) + \mathcal{B}(x-y, y).$$

Значит,

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 = \|\mathcal{B}(x, x-y) + \mathcal{B}(x-y, y)\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}(x, x-y)\|_2 + \|\mathcal{B}(x-y, y)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathcal{B}\| \cdot \|x\|_1 \|x-y\|_1 + \|\mathcal{B}\| \cdot \|x-y\|_1 \|y\|_1 = \|\mathcal{B}\|(\|x\|_1 + \|y\|_1)\|x-y\|_1.$$

Замечание 3. Действующий в банаховых пространствах квадратичный оператор $\mathcal{A}$, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$, является липшицевым в любом шаре радиуса R с центром в нуле с константой липшицевости $L = 2R\|\mathcal{B}\|$.

Приведём примеры квадратичных операторов, действующих в $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Пусть

$$\varphi_{ij} \in BL_1(\mathbb{R}^N), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим билинейный оператор $\mathcal{S}$, действующий на элементы $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу

$$\mathcal{S}(F,G) = \left[\sum_{k=1}^{n}([\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}] + [\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}])\right]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{6}$$

Лемма 8. *Норма билинейного оператора $\mathcal{S}$, определяемого выражением (6), не превосходит числа $2 \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Определим билинейный оператор $\mathcal{P}$ следующим образом:

$$(\mathcal{P}(F,G))(x) = \left[\sum_{k=1}^{n}([\varphi_{ik} * F_{jk}](-x) + [\varphi_{jk} * F_{ik}](x))G_{ij}(x)\right]_{i,j=\overline{1,n}}, \tag{7}$$

где $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

Лемма 9. *Норма билинейного оператора $\mathcal{P}$ не превосходит числа $2 \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Пусть задан набор числовых констант $\{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} : i,j,k = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим билинейный оператор, действующий на элементы $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}(F,G) = \left[\mathcal{N}F_{ij}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ijk}\mathcal{N}G_{ik}\right]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{8}$$

Лемма 10. *Норма билинейного оператора* $\mathcal{R}$ *не превосходит числа*

$$\max_{p,q,r=\overline{1,n}}|\lambda_{pqr}|.$$

Замечание 4. Очевидно, что образ оператора $\mathcal{R}$ лежит в пространстве числовых матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$, поэтому если он ограничен, то и компактен.

3. Исследование системы уравнений равновесия. Запишем систему (1) в терминах пространства $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Для этого введём новые неизвестные функции

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{N_i}. \tag{9}$$

Условия (2) поведения вторых пространственных моментов на бесконечности позволяют заключить, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} Q_{ij}(x) = N_j, \quad i,j = \overline{1,n},$$

и что неизвестные функции Q_{ij} можно искать в пространстве $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. В таком случае можно полагать, что $\mathcal{N}Q_{ij} = N_j$.

Будем всюду далее дополнительно считать, что ядра разброса и конкуренции существенно ограничены. Запишем систему (1) после замены (9) в операторной форме. Пусть

$$M = \operatorname{diag}\{\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n\}, \quad W = [\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}]_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \Omega = [(\widetilde{\alpha}(b_i+b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i+d_j))^{-1}]_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Пусть также $\mathcal{C}$ – оператор, аналогичный оператору свёртки (5) с $\varphi_{ij} = \overline{m_i} + \overline{m}_j$; $\mathcal{S}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором самосвёртки (6), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; $\mathcal{P}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным свёрточно-мультипликативным оператором (7), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; а $\mathcal{R}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным скалярно-матричным оператором (8), для которого $\lambda_{ijk} = s_{ik} + s_{jk}$. Рассмотрим оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{E}F = \Omega \odot (2M + \mathcal{C}F - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F),$$

где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц. Заметим, что операторное уравнение $Q = \mathcal{E}Q$ эквивалентно системе (1) после замены (9). В дальнейшем будем называть оператор $\mathcal{E}$ *оператором равновесия*.

Таким образом, задача об отыскании равновесных пространственных моментов сведена к задаче нахождения неподвижной точки оператора равновесия. Прежде чем переходить к исследованию существования неподвижной точки оператора равновесия, отметим следующий, важный с биологической точки зрения, факт.

Теорема 1. *Неподвижная точка оператора равновесия не может быть нулевым элементом пространства* $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

Доказательство. Обозначим нулевые элементы пространств $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ и $L_1(\mathbb{R}^N)$ через Θ и θ_{L_1} соответственно. Рассмотрим действие оператора $\mathcal{E}$ на элементе Θ покомпонентно. Пусть $i = \overline{1,n}$, тогда

$$(\mathcal{E}\Theta)_{ii}(x) = 2\overline{m}_i(x) + 2[\overline{m}_i * 0](x) - 2\overline{w}_{ii}(x)\cdot 0 - \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik} * 0](-x) + [\overline{w}_{ik} * 0](x))\cdot 0 -$$

$$- \widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik}\cdot 0 * 0](-x) + [\overline{w}_{ik}\cdot 0 * 0](x)) - 2\widetilde{\beta}\cdot 0\cdot\sum_{k=1}^{n}s_{ik}\cdot 0 = 2\overline{m}_i(x).$$

Поскольку в постановке задачи $b_i > 0$, а $\|m_i\|_{L_1} = 1$, то $\overline{m}_i = b_i m_i \neq \theta_{L_1}$. Таким образом, $(\mathcal{E}\Theta)_{ii} \neq \theta_{L_1} = \Theta_{ii}$, а значит, $\mathcal{E}\Theta \neq \Theta$, т.е. Θ не является неподвижной точкой оператора равновесия. Теорема доказана.

В дальнейшем будем обозначать

$$\mu = \max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{m}_i + \overline{m}_j\|_{L_1} = \max_{i,j=\overline{1,n}} (b_i + b_j) = 2 \max_{i=\overline{1,n}} b_i,$$

$$\nu = 2 \max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{w}_{ij}\|_{BL_1}, \quad \xi = \max_{i,j,k=\overline{1,n}} |s_{ik} + s_{jk}| = 2 \max_{i,j=\overline{1,n}} s_{ij}, \quad \eta = \max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}\|_{BL_1},$$

$$\omega = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\Omega_{ij}| = \left(\min_{i,j=\overline{1,n}} |\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j)| \right)^{-1}.$$

Будем предполагать, что параметры биологической модели и замыкания подобраны так, что величина ω определена корректно, т.е. выполнено условие

$$\min_{i,j=\overline{1,n}} |\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j)| > 0. \tag{10}$$

Используя известные принципы Банаха и Лере–Шаудера, можно доказать обобщённый принцип существования неподвижной точки оператора, действующего в банаховом пространстве, который не является ни сжимающим, ни компактным.

Теорема 2 [7]. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в некотором банаховом пространстве $\mathbb{B}$, причём $\mathcal{A}$ – компактный, а $\mathcal{B}$ – сжимающий. Пусть $B \subset \mathbb{B}$ является замкнутым выпуклым ограниченным множеством, причём для любых $x, y \in B$ справедливо*

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in B,$$

тогда у оператора $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ существует по крайней мере одна неподвижная точка в B.

Применим данную теорему для нахождения достаточных условий существования у оператора равновесия неподвижной точки.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (10), $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$, и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности s_{ij}, не равный нулю. Пусть также*

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega} \right)^2 - 8(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu) \sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant 0,$$

а положительное число R такое, что

$$\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1, \quad \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} - \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)} \leqslant R \leqslant \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} + \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)}.$$

Тогда у оператора равновесия существует неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле.

Доказательство. Представим оператор равновесия в виде суммы $\mathcal{K} + \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{K}F = \Omega \odot (\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F), \quad \mathcal{H}F = \Omega \odot (2M - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F).$$

Согласно лемме 6 и замечанию 4 операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}$ компактны, поэтому и оператор $\mathcal{K}$ компактен, поскольку растяжение (умножение на константу) не влияет на компактность, а сумма компактных операторов является компактным оператором. В свою очередь, оператор $\mathcal{H}$ является липшицевым в любом шаре радиуса R с центром в нуле, так как из лемм 5, 8, 9 и замечания 1 следует

$$\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} \leqslant \omega(\|W \odot (F - G)\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}| \cdot \|\mathcal{P}F - \mathcal{P}G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \|\mathcal{S}F - \mathcal{S}G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R)\|F - G\|_{n\times n}$$

для любых $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ с нормой, не превосходящей числа R. Кроме того, $\mathcal{H}$ – сжимающий оператор в данном шаре, если $\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1$.

Пусть $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, причём их нормы не превосходят числа R. Тогда можно установить следующую оценку:

$$\|\mathcal{K}F + \mathcal{H}G\|_{n\times n} = \|\Omega \odot (\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F + 2M - W \odot G - \widetilde{\beta}\mathcal{P}G - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}G)\|_{n\times n} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|(\|\mathcal{R}F\|_{n\times n} + \|\mathcal{P}G\|_{n\times n}) + 2\|M\|_{n\times n} + \|W \odot G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \|\mathcal{S}G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\mu\|F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|(\xi\|F\|^2_{n\times n} + \nu\|G\|^2_{n\times n}) + 2\sum_{i=1}^n b_i + \eta\|G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}|\nu\|G\|^2_{n\times n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left((|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + (\mu + \eta)R + 2\sum_{i=1}^n b_i\right).$$

Для того чтобы норма оператора $\mathcal{K}F + \mathcal{H}G$ не превосходила числа R, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + (\mu + \eta)R + 2\sum_{i=1}^n b_i \leqslant \frac{R}{\omega},$$

т.е.

$$(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right)R + 2\sum_{i=1}^n b_i \leqslant 0.$$

Из условий теоремы следует, что $a = |\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu > 0$, поэтому для выполнения упомянутого выше неравенства необходимо, чтобы рассматриваемый квадратный трёхчлен имел вещественные корни, т.е. чтобы его дискриминант

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right)^2 - 8(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)\sum_{i=1}^n b_i$$

был неотрицательным. В таком случае корни будут равны

$$R_{1,2} = \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} \pm \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)}$$

и при всех $R \in [R_1, R_2]$ исследуемое неравенство будет выполнено.

Таким образом, если величина D не меньше нуля, а положительное число R такое, что справедливы неравенства

$$\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1, \quad \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} - \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)} \leqslant R \leqslant \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} + \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)},$$

то для операторов $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ и шара радиуса R с центром в нуле выполнены все условия теоремы 2, а значит, у оператора равновесия существует по крайней мере одна неподвижная точка в рассматриваемом шаре.

Отметим, что условие $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$ нужно только для того, чтобы коэффициент при старшей степени в возникающем при доказательстве теоремы квадратном трёхчлене не обращался в нуль. Однако из невыполнения данного условия не следует отсутствие неподвижной точки у оператора равновесия. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (10),* $\widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} = 0$, *а*

$$\rho = \frac{1}{\omega} - \mu - \eta > 0.$$

Тогда оператор равновесия имеет неподвижную точку в шаре радиуса

$$R = \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

с центром в нуле.

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{E}$ в виде суммы $\mathcal{K}+\mathcal{H}$ аналогично доказательству теоремы 3 и получим

$$\mathcal{K}F = \Omega\odot\mathcal{C}F, \quad \mathcal{H}F = \Omega\odot(2M - W\odot F).$$

При этом для любых $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} \leqslant \omega\|W\odot(F-G)\|_{n\times n} \leqslant \omega\eta\|F-G\|_{n\times n}.$$

Так как $\omega^{-1}-\mu-\eta>0$, а $\mu>0$, то $\omega\eta<1$, а значит, $\mathcal{H}$ – сжимающий всюду оператор. При этом если нормы элементов F и G не превосходят числа R, то

$$\|\mathcal{K}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} = \|\Omega\odot(\mathcal{C}F + 2M - W\odot G)\|_{n\times n} \leqslant \omega(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + 2\|M\|_{n\times n} + \|W\odot G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\mu\|F\|_{n\times n} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i + \eta\|G\|_{n\times n}\right) \leqslant \omega\left((\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Поэтому если

$$\left(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\right)R + 2\sum_{i=1}^{n} \leqslant 0,$$

то норма $\mathcal{K}F - \mathcal{H}G$ также не будет превосходить R. Решением данного неравенства относительно R с учётом

$$\mu+\eta-\frac{1}{\omega} = -\rho < 0$$

является множество

$$R \geqslant \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

С учётом компактности оператора $\mathcal{K}$ и сжимаемости оператора $\mathcal{H}$ всюду из теоремы 2 следует, что в шаре радиуса

$$R = \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

с центром в нуле у оператора равновесия существует неподвижная точка. Теорема доказана.

Заключение. В рамках данной работы была изучена система нелинейных интегральных уравнений (1) с дополнительными условиями (2). Данная система возникает в биологической модели У. Дикмана и Р. Лоу, описывающей многовидовые сообщества неподвижных организмов. Для исследования разрешимости данная система была сформулирована в виде единого операторного уравнения в специальном банаховом пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Было показано, что порождаемый этим уравнением оператор равновесия при определённых условиях на параметры замыкания α, β, γ, а также на скалярные параметры биологической модели b_i, d_i и s_{ij}, представим в виде суммы $\mathcal{K}+\mathcal{H}$, где оператор $\mathcal{K}$ является компактным, а $\mathcal{H}$ – сжимающим в шаре пространства $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ определённого радиуса R с центром в нуле. Это позволило, применив обобщённый принцип Лере–Шаудера–Банаха, доказать существование неподвижной точки оператора равновесия в этом шаре, что равносильно существованию решения исходной системы уравнений равновесия. Также было показано, что получаемое решение не может быть тривиальным, а значит, рассматриваемое состояние равновесия не является состоянием вымирания сообщества.

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены Никитиным А.А. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Eds. U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge, 2000. P. 252–270.
2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Eds. U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge, 2000. P. 412–455.
3. *Plank M.J., Law R.* Spatial point processes and moment dynamics in the life sciences: a parsimonious derivation and some extensions // Bull. Math. Biol. 2015. V. 77. № 4. P. 586–613.
4. *Murrell D., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. of Theoretical Biology. 2004. V. 229. № 3. P. 421–432.
5. *Николаев М.В., Никитин А.А.* Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1209–1217.
6. *Николаев М.В., Дикман У., Никитин А.А.* Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. № 1. С. 35–39.
7. *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. № 1 (63). С. 123–127.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Высший университет Окинавского института
науки и технологий, г. Онна, Япония,
Международный институт прикладного
системного анализа, г. Лаксенбург, Австрия,
Высший университет повышения квалификации,
г. Хаяма, Япония

Поступила в редакцию 11.04.2022 г.
После доработки 28.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1251–1265

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ЗАДАННОГО НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

 А. А. Полосин

Как известно, одномерные интегральные уравнения типа свёртки, рассматриваемые на конечном отрезке, в общем случае не решаются в квадратурах, в отличие от аналогичных уравнений, рассматриваемых на всей прямой или на полупрямой. По этой причине при исследовании их спектра приходится использовать те или иные асимптотические методы. В работе рассмотрен интегральный оператор типа свёртки с логарифмическим ядром, заданный на конечном отрезке. С помощью преобразования Фурье задача последовательно сведена к задаче сопряжения и к сингулярному (особому) интегральному уравнению на полупрямой, интегральный оператор в котором не является сжимающим. Показано, что главная часть полученного интегрального уравнения допускает обращение в явном виде. Рассмотрены случаи четной и нечетной собственной функции, в каждом из которых найдена асимптотика собственных значений и собственных функций исходного оператора.

DOI: 10.31857/S0374064122090096, EDN: CITTKO

В работе [1] найдена асимптотика собственных значений интегрального уравнения переноса

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{|t-x|^{\alpha}}, \quad x \in [-1,1], \quad 0<\alpha<1.$$

В статьях [2, 3] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов свёртки

$$(Au)(\tau) = \int\limits_{0}^{T} k(t-\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $K(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $K(cx) = c^{-\gamma}K(x)$ для любого $c>0$ и любого вещественного x, где $0<\gamma<1$.

В работе [4] предложен метод решения уравнений типа свёртки, заданных на конечном отрезке, в случае, когда известны два частных решения, отвечающих правым частям специального вида. В [5] получена асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с ядром $k(x) = (\pi x)^{-1}\sin(lx)$, $l>0$, заданного на отрезке $[-1,1]$. В настоящей работе исследована асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром.

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|t-x|}u(t)\,dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Пусть параметр $\lambda \gg 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что собственная функция является либо чётной, либо нечётной. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1°. Искомая функция чётная (и действительнозначная): $u(x) = u(-x)$. Положим

$$v(x) = \int\limits_0^x u(t)\,dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Легко видеть, что $v(x)$ – нечётная функция. Проинтегрируем правую часть уравнения (1) по частям и получим

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{v(t)\,dt}{t-x} + 2v(1)w(x), \tag{2}$$

где

$$w(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\frac{1}{1-x^2}.$$

В дальнейшем будем придерживаться общей схемы, описанной в [6, с. 201]. Продолжим уравнение (2) на всю вещественную прямую, доопределив функции $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ нулём вне отрезка $[-1,1]$:

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-x} + 2v(1)w(x) + f_+(x-1) + f_+(-x-1), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{3}$$

где

$$f_+(x) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{v(t)\,dt}{t-x-1}, & x > 0,\\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Применим к соотношению (3) преобразование Фурье с масштабированным аргументом. Введём обозначения

$$U(p) = \int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda px}u(x)\,dx, \quad W(p) = \int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda px}w(x)\,dx,$$

тогда $U(0) = 2v(1)$,

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda px}v(x)\,dx = \frac{U(0)\cos(\lambda p) - U(p)}{i\lambda p}, \quad W(p) = \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda px}\ln\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

и (3) перейдёт в уравнение

$$\frac{|p|-1}{|p|}e^{i\lambda p}U(p) + U(0)\frac{1+e^{2i\lambda p}}{2|p|} - U(0)e^{i\lambda p}W(p) - e^{2i\lambda p}F^+(p) = F^+(-p). \tag{5}$$

Заметим, что $F^+(0)$ существует, так как $f_+(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +\infty$ в силу нечётности функции $v(x)$.

Обозначим $D_0(p)=1+1/|p|$, $D(p)=p^2D_0(p)/(p^2-1)$ и определим каноническую функцию $X(z)$ задачи сопряжения аналитических функций, удовлетворяющую соотношению $D(p)==X^+(p)/X^-(p)$ (см. [7, с. 176]). Для этого положим $D_0(p)=X_0^+(p)/X_0^-(p)$, где

$$\ln X_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D_0(t)\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{|t|}\right)\frac{dt}{t-z}$$

и

$$X^+(z)=z^2X_0^+(z)/(z^2-1),\quad X^-(z)=X_0^-(z).$$

Отметим, что $X(\infty)=1$. Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{p^2-1}{p^2}\frac{e^{i\lambda p}U(p)}{X_0^+(p)}+(1+|p|)\left(U(0)\frac{1+e^{2i\lambda p}}{2p^2X_0^+(p)}-\frac{U(0)e^{i\lambda p}W(p)+e^{2i\lambda p}F^+(p)}{|p|X_0^+(p)}\right)=\frac{F^+(-p)}{X_0^-(p)}. \tag{6}$$

Определим функцию $\Phi(z)$ следующим образом:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z^2}\dfrac{e^{i\lambda z}U(z)}{X_0^+(z)}+(1+z\operatorname{sgn}\operatorname{Re}z)\times\\ \times\left(U(0)\dfrac{1+e^{2i\lambda z}}{2z^2X_0^+(z)}-\dfrac{U(0)e^{i\lambda z}W(z)+e^{2i\lambda z}F^+(z)}{z(\operatorname{sgn}\operatorname{Re}z)X_0^+(z)}\right), & \operatorname{Im}z>0,\\ F^+(-z)/X_0^-(z), & \operatorname{Im}z<0.\end{cases}$$

В силу (6) функция $\Phi(z)$ является аналитической во всей плоскости, за исключением верхней мнимой полуоси, имеет в нуле особенность интегрируемого порядка и исчезает на бесконечности. Следовательно,

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+i\infty}\frac{U(0)e^{i\lambda t}W(t)+e^{2i\lambda t}F^+(t)-U(0)(1+e^{2i\lambda t})/2}{tX_0^+(t)(t-z)}\,dt.$$

Отсюда вытекает, что при $\operatorname{Im}z>0$

$$F^+(z)=\frac{X^-(-z)}{\pi i}\int\limits_0^{+i\infty}\frac{U(0)e^{i\lambda t}W(t)+e^{2i\lambda t}F^+(t)-U(0)(1+e^{2i\lambda t})/2}{tX_0^+(t)(t+z)}\,dt.$$

Таким образом, на верхней мнимой полуоси $z=iy$, $0<y<+\infty$, относительно функции $\varsigma(y)=e^{-\lambda y}F^+(iy)/X_0^-(-iy)$ получаем уравнение

$$\varsigma(y)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)}\frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\varsigma(s)\,ds=\zeta(y), \tag{7}$$

где

$$\zeta(y)=U(0)\frac{e^{-\lambda y}}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+e^{-2\lambda s}-2e^{-\lambda s}W(is)}{sX_0^+(is)(s+y)}\,ds.$$

Изучим поведение канонической функции на мнимой оси. Так как

$$\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{1}{u}\frac{du}{u^2+1}=0,$$

то

$$\ln X_0^+(is) = \frac{s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\biggl(1+\frac{1}{t}\biggr)\frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{1+su}{su}\frac{du}{u^2+1} = \ln\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+su)}{u^2+1}\,du =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{s}{\pi}\frac{\ln s}{s-1} + \frac{s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\operatorname{arcctg} u - \frac{1}{1+u}\biggr)\frac{du}{1+su},$$

поэтому

$$X_0^+(is) = \frac{1+O(s\ln s)}{\sqrt{s}}, \quad s\to+0; \tag{8}$$

так как $\ln X_0^-(-is) = -\ln X_0^+(is)$, то $X_0^-(is) = \sqrt{s}(1+O(s\ln s))$ при $s\to+0$. Таким образом,

$$\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} = 1+O(s\ln s), \quad s\to+0.$$

Соответственно представим уравнение (7) в виде

$$\varsigma(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+y)}\varsigma(s)\frac{ds}{s+y} = \tilde{\zeta}(y), \quad 0<y<+\infty, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\zeta}(y) = \zeta(y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1\biggr)\frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\varsigma(s)\,ds.$$

Здесь $\varsigma(y) = O^*(1/\sqrt{y})$ при $y\to+0$ и $\varsigma(+\infty)=0$. Отметим также, что общий случай уравнения (9) с параметром рассматривался автором в статье [8].

Уравнение (7) аналогично уравнению, к которому была сведена задача в работе [1], однако (и это отличие весьма существенно) в данном случае интегральный оператор – не сжимающий. Далее покажем, что уравнение (7) однозначно разрешимо.

Выразив искомую функцию через решение уравнения (7) из соотношения (5):

$$U(p) = (|p|(U(0)W(p) + e^{i\lambda p}F^+(p) + e^{-i\lambda p}F^+(-p)) - U(0)\cos(\lambda p))/(|p|-1),$$

получим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи – условие на спектр:

$$W(1) + 2\operatorname{Re}(e^{i\lambda}F^+(1)/U(0)) = \cos\lambda. \tag{10}$$

Теперь стандартным образом продолжим уравнение (9) на всю вещественную ось, обозначив $k(y) = \exp(-\lambda|y|)/y$, $-\infty<y<+\infty$, и положим $\varsigma_+(y) = \varsigma(y)$, $\varsigma_-(y)=0$, $\tilde{\zeta}_+(y) = \tilde{\zeta}(y)$ при $y>0$, $\varsigma_+(y) = \tilde{\zeta}_+(y) = 0$ при $y<0$. В результате получим

$$\varsigma_+(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(s+y)\varsigma_+(s)\,ds = \varsigma_-(s) + \tilde{\zeta}_+(y), \quad -\infty<y<+\infty. \tag{11}$$

Введём обозначения

$$\Sigma^\pm(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipy}\varsigma_\pm(y)\,dy, \quad \mathrm{Z}^+(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{ipy}\tilde{\zeta}_+(y)\,dy, \quad -\infty<p<+\infty.$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipy}k(y)\,dy = 2i\operatorname{arctg}\frac{p}{\lambda} = \ln\frac{\lambda+ip}{\lambda-ip},$$

то уравнение (11) в образах Фурье будет иметь вид

$$\Sigma^+(p) + \frac{2i}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{p}{\lambda}\Sigma^+(-p) = \Sigma^-(p) + \mathrm{Z}^+(p), \quad -\infty < p < +\infty. \tag{12}$$

Определим следующую функцию:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Sigma^+(z) - \mathrm{Z}^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{\lambda-iz}{\lambda+iz}\Sigma^+(-z) + \Sigma^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

тогда в силу (12)

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-i\infty}^{-i\lambda}\Sigma^+(-t)\frac{dt}{t-z}$$

или

$$\Sigma^+(z) - \mathrm{Z}^+(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{i\lambda}^{+i\infty}\Sigma^+(t)\frac{dt}{t+z}.$$

В результате получим уравнение относительно функции Σ^+:

$$\Sigma^+(i\lambda y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\Sigma^+(i\lambda s)\frac{ds}{s+y} = \mathrm{Z}^+(i\lambda y), \quad 1 < y < +\infty,$$

или

$$\Sigma^+(i\lambda e^x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\Sigma^+(i\lambda e^t)\frac{e^{(t-x)/2}\,dt}{2\operatorname{ch}((x-t)/2)} = \mathrm{Z}^+(i\lambda e^x), \quad 0 < x < +\infty. \tag{13}$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$. Введём функции

$$H^+(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{(ip+\varepsilon)x}\Sigma^+(i\lambda e^x)\,dx, \quad G^+(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{(ip+\varepsilon)x}\mathrm{Z}^+(i\lambda e^x)\,dx,$$

далее продолжим уравнение (13) стандартным образом на всю вещественную ось и перейдём к образам Фурье:

$$(1+\Omega(p))H^+(p) = H^-(p) + G^+(p), \quad -\infty < p < +\infty,$$

где

$$\Omega(p) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(\varepsilon-1/2+ip)s}\,ds}{2\operatorname{ch}(s/2)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi(p+i(1/2-\varepsilon)))}.$$

В силу соотношений

$$\operatorname{Re}\Omega(p) = \frac{\operatorname{ch}(\pi p)\sin(\pi\varepsilon)}{\operatorname{sh}^2(\pi p)+\cos^2(\pi\varepsilon)} > 0, \quad \operatorname{Im}\Omega(p) = -\frac{\operatorname{sh}(\pi p)\cos(\pi\varepsilon)}{\operatorname{sh}^2(\pi p)+\cos^2(\pi\varepsilon)}$$

индекс данной задачи сопряжения в рассматриваемом классе решений равен нулю, поэтому задача однозначно разрешима.

Факторизуем коэффициент задачи сопряжения следующим образом:

$$\frac{1}{1+\Omega(p)}=\frac{E^+(p)}{E^-(p)},$$

где

$$E^+(p)=\frac{\Gamma^2(3/4-\varepsilon/2-ip/2)}{\Gamma(1-\varepsilon/2-ip/2)\Gamma(1/2-\varepsilon/2-ip/2)},\quad E^-(p)=\frac{\Gamma(\varepsilon/2+ip/2)\Gamma(1/2+\varepsilon/2+ip/2)}{\Gamma^2(1/4+\varepsilon/2+ip/2)},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда

$$\frac{H^+(p)}{E^+(p)}-\frac{H^-(p)}{E^-(p)}=\frac{G^+(p)}{E^-(p)}$$

и решение примет вид

$$H^+(z)=\frac{E^+(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(t)/E^+(t)}{1+\Omega(t)}\frac{dt}{t-z},$$

$$e^{\varepsilon x}\Sigma^+(i\lambda e^x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ipx}\,dp\,\frac{E^+(p)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(t)/E^+(t)}{1+\Omega(t)}\frac{dt}{t-p},\quad x>0.$$

Вычислим теперь интегралы с помощью вычетов. Внутренний интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(t)/E^+(t)}{1+\Omega(t)}\frac{dt}{t-p}=2\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{\ln s+b_m}{1/2+\varepsilon+2m+ip}+\frac{1}{(1/2+\varepsilon+2m+ip)^2}\right)\frac{\mathrm{Z}^+(i\lambda s)\,ds}{s^{3/2+2m}},$$

где

$$a_m=\frac{\Gamma(5/4+m)\Gamma(3/4+m)}{(m!\pi)^2},\quad b_m=\frac{\Gamma'(1+m)}{\Gamma(1+m)}-\frac{\Gamma'(3/4+m)}{2\Gamma(3/4+m)}-\frac{\Gamma'(5/4+m)}{2\Gamma(5/4+m)},\quad m=0,1,2,\ldots$$

Заметим, что $a_m>0$. Покажем, что и коэффициент b_m положителен. Действительно,

$$b_m=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\ln\frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(3/4+x)\Gamma(5/4+x)}\right)_{x=m},\quad \frac{d}{dx}\frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(3/4+x)\Gamma(5/4+x)}=\frac{Q(x)}{B^2(3/4+x,1/4)},$$

$$Q(x)=B(3/4+x,1/4)\frac{d}{dx}B(1+x,1/4)-B(1+x,1/4)\frac{d}{dx}B(3/4+x,1/4)=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 t^{x-1/4}s^x\ln\frac{s}{t}(1-t)^{-3/4}(1-s)^{-3/4}\,ds\,dt=\iint\limits_{0<t<s<1}\frac{(ts)^{x-1/4}(s^{1/4}-t^{1/4})\ln(s/t)}{((1-t)(1-s))^{3/4}}\,ds\,dt>0.$$

Внешний интеграл равен $(y>1)$

$$\Sigma^+(i\lambda y)=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_m a_k}{y^{3/2+2k}}\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{(m+k+1)^3}+\frac{\ln s+b_m+\ln y+b_k}{(m+k+1)^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{(\ln s+b_m)(\ln y+b_k)}{m+k+1}\right)\frac{\mathrm{Z}^+(i\lambda s)\,ds}{s^{3/2+2m}}.$$

Возвращаясь к исходным функциям, получаем решение уравнения (9):

$$\varsigma(y) = \tilde{\zeta}(y) + \int\limits_0^{+\infty} \Xi(y,t)\tilde{\zeta}(t)\,dt, \quad 0 < y < +\infty,$$

здесь

$$\Xi(y,t) = \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \Omega(\tau,s) e^{-\lambda(\tau y + st)}\,d\tau\,ds,$$

$$\Omega(\tau,s) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_m a_k}{s^{3/2+2m}\tau^{3/2+2k}}(A_{mk} + B_{mk}\ln s + B_{km}\ln\tau + C_{mk}\ln s\ln\tau),$$

$$A_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^3} + \frac{b_m + b_k}{(m+k+1)^2} + 2\frac{b_m b_k}{m+k+1},$$

$$B_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2b_k}{m+k+1}, \quad C_{mk} = \frac{2}{m+k+1}.$$

Очевидно, что все эти коэффициенты положительны.

Таким образом, уравнение (7) принимает вид

$$\varsigma(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1\right)K(y,s)\varsigma(s)\,ds = \zeta(y) + \int\limits_0^{+\infty}\Xi(y,t)\zeta(t)\,dt, \quad 0 < y < +\infty, \tag{14}$$

где

$$K(y,s) = \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} + \int\limits_0^{+\infty}\Xi(y,t)\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{s+t}\,dt.$$

Рассмотрим банахово пространство $\tilde{C}$, состоящее из функций вида $f(x) = g(x)/\sqrt{x}$, где $g(x) \in C[0,+\infty)$, с нормой $\|f\|_{\tilde{C}} = \max\limits_{0<x<+\infty} |\sqrt{x}f(x)|$. Покажем, что интегральный оператор в левой части (14) является сжимающим в этом пространстве. В самом деле, в силу (8) существует такая константа $C_0 > 0$, что справедлива оценка

$$\left|\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1\right| \leqslant \frac{s|\ln s|}{C_0 + s|\ln s|}, \quad 0 < s < +\infty. \tag{15}$$

В силу (15) справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{s}}\left|\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1\right|K(y,s)\,ds \leqslant I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{\sqrt{y}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_0 + |s\ln s|}\frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\,ds \leqslant \frac{C_1'}{\pi\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\ln s|}{\sqrt{s}}e^{-\lambda s}\,ds \leqslant C_1\frac{\ln\lambda}{\lambda},$$

$$I_2 \leqslant \frac{\lambda\sqrt{y}}{\pi^2}\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}|\Omega(\tau,\xi)|e^{-\lambda\tau y}K_2(\xi)\,d\tau\,d\xi,$$

$$K_2(\xi) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_0 + s|\ln s|}\frac{e^{-\lambda(s+(1+\xi)t)}}{s+t}\,ds\,dt.$$

Так как

$$K_2(\xi)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_0+s|\ln s|}\frac{e^{-\lambda(s+v)}}{(1+\xi)s+v}\,ds\,dv=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda U}\,dU\int\limits_0^{U}\frac{\sqrt{V}|\ln V|}{C_0+V|\ln V|}\frac{dV}{U+\xi V}\leqslant\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda U}h(U)\,dU,$$

$$h(U)=\frac{1}{U}\int\limits_0^{U}\frac{\sqrt{V}|\ln V|dV}{C_0+V|\ln V|}\sim C_2'\sqrt{U}\ln\frac{1}{U},\quad U\to+0,$$

то $K_2(\xi)\leqslant C_2''\lambda^{-3/2}\ln\lambda$, и для I_2 справедлива оценка

$$I_2\leqslant C_2''\frac{\ln\lambda}{\lambda}\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}|\Omega(\tau,\xi)|\sqrt{\lambda\tau y}e^{-\lambda\tau y}\frac{d\tau\,d\xi}{\sqrt{\tau}}\leqslant C_2'''\frac{\ln\lambda}{\lambda}\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}|\Omega(\tau,\xi)|\frac{d\tau\,d\xi}{\sqrt{\tau}}\leqslant C_2\frac{\ln\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, норма интегрального оператора из соотношения (14) оценивается как $O(\lambda^{-1}\ln\lambda)$. Следовательно,

$$F^+(iy)=e^{\lambda y}X_0^-(-iy)\biggl(\zeta(y)+\int\limits_0^{+\infty}\Xi(y,t)\zeta(t)\,dt\biggr)\biggl(1+O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\biggr)\biggr),\quad 0<y<+\infty.$$

Изучим условие (10). Продолжив полученное решение аналитически в верхнюю полуплоскость, получим

$$\frac{F^+(1)}{U(0)}=\frac{X_0^-(-1)}{\pi^2}(J_1-J_2+J_3-J_4)\biggl(1+O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\biggr)\biggr),$$

где

$$J_1=\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+e^{-2\lambda s}}{2sX_0^+(is)}\frac{ds}{s-i},\quad J_2=\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda s}W(is)}{sX_0^+(is)}\frac{ds}{s-i},$$

$$J_3=\lambda\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+e^{-2\lambda s}}{2sX_0^+(is)}\frac{ds\,dt}{s+t}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)e^{i\lambda\tau}e^{-\lambda\xi t}\,d\tau\,d\xi,$$

$$J_4=\lambda\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda s}W(is)}{sX_0^+(is)}\frac{ds\,dt}{s+t}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)e^{i\lambda\tau}e^{-\lambda\xi t}\,d\tau\,d\xi.$$

В силу свойства (8) для канонической функции существует такая константа $C_{00}>0$, что

$$\biggl|\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\biggr|\leqslant\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_{00}+s|\ln s|},\quad 0<s<+\infty. \tag{16}$$

Представим первый интеграл в виде $J_1=J_{11}+J_{12}+J_{13}$, где

$$J_{11}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{ds/(s-i)}{sX_0^+(is)}=\mathrm{const},\quad J_{12}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-2\lambda s}}{\sqrt{s}}\frac{ds}{s-i}=\frac{i\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\lambda}}+O(\lambda^{-3/2})=O\biggl(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\biggr),$$

$$J_{13}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\biggr)\frac{e^{-2\lambda s}\,ds}{s-i}.$$

Из неравенства (16) следует, что

$$|J_{13}| \leqslant \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s}|\ln s|}{\sqrt{s^2+1}} e^{-2\lambda s}\,ds = O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{3/2}}\biggr).$$

Таким образом, $J_1 = J_{11} + O(1/\sqrt{\lambda})$.

Второй интеграл представим в виде $J_2 = J_{21} + J_{22}$, где

$$J_{21} = \pi\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s} W(is)\,ds}{\sqrt{s}(s-i)} = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} J_{211}(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad J_{211}(t) = \int\limits_0^2 \biggl(\ln\frac{1}{x(2-x)}\biggr)\frac{\sqrt{x}\,dx}{t-ix},$$

$$J_{22} = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^2 \ln\frac{1}{x(2-x)}\,dx \int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}}\biggr)\frac{e^{-\lambda sx}\,ds}{s-i}.$$

Так как

$$J_{211}(t) = i\int\limits_0^2 \biggl(\ln\frac{1}{x(2-x)}\biggr)\frac{dx}{\sqrt{x}} - \int\limits_0^2 \biggl(\ln\frac{1}{x(2-x)}\biggr)\frac{it}{t-ix}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 8i\sqrt{2}\ln\frac{e}{2} - i\sqrt{t}\biggl(\ln\frac{1}{t}\int\limits_0^{1/t}\frac{\sqrt{2}}{1-2iy}\frac{dy}{\sqrt{y}} + \int\limits_0^{1/t}\ln\biggl(\frac{1}{4y}\biggr)\frac{\sqrt{2}}{1-2iy}\frac{dy}{\sqrt{y}} + \int\limits_0^{1/t}\ln\biggl(\frac{1}{1-ty}\biggr)\frac{\sqrt{2}}{1-2iy}\frac{dy}{\sqrt{y}}\biggr) =$$

$$= 8i\sqrt{2}\ln\frac{e}{2} - \pi i^{3/2}\sqrt{t}\ln\frac{1}{2t} + \sqrt{t}\frac{\pi^2 i^{5/2}}{2} + O\biggl(t\ln\frac{1}{t}\biggr), \quad t\to+0,$$

то

$$J_{21} = 4i\sqrt{2\pi\lambda}\ln\frac{e}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{i}}\ln\lambda + O(1).$$

Далее, в силу (16)

$$|J_{22}| \leqslant \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^2 \ln\frac{1}{x(2-x)}\,dx\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_{00}+s|\ln s|}\frac{e^{-\lambda sx}\,ds}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} J_{221}(t)\,dt,$$

где

$$J_{221}(t) = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{t}|\ln(t/x)|}{C_{00}x + t|\ln(t/x)|}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t^2+x^2}}\ln\frac{1}{x(2-x)}\,dx.$$

Так как

$$J_{221}(t) = \int\limits_0^{2/t}\frac{|\ln y|}{C_{00}y + |\ln y|}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+y^2}}\ln\frac{1}{ty(2-ty)}\,dy = O\biggl(\ln\frac{1}{t}\biggr), \quad t\to+0,$$

то

$$|J_{22}| \leqslant \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} O\biggl(\ln\frac{1}{t}\biggr)\,dt = O(\ln\lambda).$$

Таким образом, $J_2 = 4i\sqrt{2\pi\lambda}\ln(e/2) + O(\ln\lambda)$.

Третий интеграл запишем в виде $J_3 = J_{31} + J_{32}$, где

$$J_{31} = \lambda \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+e^{-2\lambda s}}{2\sqrt{s}}\frac{ds\,dt}{s+t}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)e^{i\lambda\tau}e^{-\lambda\xi t}\,d\tau\,d\xi,$$

$$J_{32} = \lambda \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+e^{-2\lambda s}}{2}\left(\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\frac{ds\,dt}{s+t}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)e^{i\lambda\tau}e^{-\lambda\xi t}\,d\tau\,d\xi.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$J_{31} = \frac{\sqrt{\pi\lambda}}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)e^{i\lambda\tau}\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\xi/2-1}}{\sqrt{\xi-2}}+\frac{\pi}{\sqrt{\xi}}\right)d\tau\,d\xi = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Аналогично с помощью (16) оценивается и J_{32}, откуда следует, что $J_3 = O(1/\sqrt{\lambda})$.

Четвёртый интеграл представим в виде $J_4 = J_{41} + J_{42}$, где

$$J_{41} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda(sx+\xi t)}}{\sqrt{s}}\frac{ds\,dt}{s+t},$$

$$J_{42} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\right)e^{-\lambda sx}e^{-\lambda\xi t}\frac{ds\,dt}{s+t}.$$

Тогда

$$J_{41} = \frac{\lambda^2}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\sqrt{x}\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda u}\,du\int\limits_{-u}^{u}\frac{dv/\sqrt{u+v}}{(\xi+x)u+(\xi-x)v} =$$

$$= \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\rho_1(\tau)\,d\tau = i\rho_1(0)\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

здесь

$$\rho_1(\tau) = \int\limits_0^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi+1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\ln\frac{1}{2\eta-\eta^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{2-\eta}}\frac{d\eta}{\sqrt{\xi+\eta}},$$

$$\rho_1(0) = \int\limits_0^{+\infty}\Omega(1,\xi+1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\ln\frac{1}{2\eta-\eta^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{2-\eta}}\frac{d\eta}{\sqrt{\xi+\eta}} > 0$$

в силу отмеченных выше свойств функции $\Omega(\tau,s)$.

Далее,

$$J_{42} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty+i0}e^{i\lambda\tau}\rho_2(\tau)\,d\tau = \frac{i\lambda}{2\pi}\rho_2(0)+\frac{i\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\rho_2'(\tau)e^{i\lambda\tau}\,d\tau = \frac{i\lambda}{2\pi}\rho_2(0)+\ldots,$$

где

$$\rho_2(\tau) = \int\limits_2^{+\infty}\Omega(\tau+1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^{2}\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\right)e^{-\lambda sx}e^{-\lambda\xi t}\frac{ds\,dt}{s+t}.$$

В силу неравенства (16) значение

$$\rho_2(0)=\int\limits_2^{+\infty}\Omega(1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^2\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{1}{sX_0^+(is)}-\frac{1}{\sqrt{s}}\biggr)e^{-\lambda sx}e^{-\lambda\xi t}\frac{ds\,dt}{s+t}$$

оценивается следующим образом:

$$|\rho_2(0)|\leqslant\int\limits_2^{+\infty}\Omega(1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^2 J_{421}(\xi,x)\ln\frac{1}{2x-x^2}\,dx,$$

где

$$J_{421}(\xi,x)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_{00}+s|\ln s|}e^{-\lambda(sx+\xi t)}\frac{ds\,dt}{s+t}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{ux}|\ln(u/x)|}{C_{00}x+u|\ln(u/x)|}\frac{e^{-\lambda(u+v)}dudv}{\xi u+xv}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\,dy\int\limits_0^{y/x}\frac{|\ln t|}{C_{00}+t|\ln t|}\frac{\sqrt{t}\,dt}{y+(\xi-x)t}\leqslant\frac{1}{\xi-x}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\,dy\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\ln t|}{C_{00}+t|\ln t|}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{C_{42}/\lambda}{\xi-x},$$

поэтому

$$|\rho_2(0)|\leqslant\frac{C_{42}}{\lambda}\int\limits_2^{+\infty}\Omega(1,\xi-1)\,d\xi\int\limits_0^2\ln\frac{1}{2x-x^2}\frac{dx}{\xi-x}=O\biggl(\frac{1}{\lambda}\biggr).$$

Таким образом, $J_{42}=O(1)$ и $J_4=i\rho_1(0)\sqrt{\lambda/\pi}+O(1)$.

В результате окончательно имеем

$$\frac{F^+(1)}{U(0)}=\frac{X_0^-(-1)}{i\pi^{5/2}}\sqrt{\lambda}\biggl(4\pi\sqrt{2}\ln\frac{e}{2}+\rho_1(0)+O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\sqrt{\lambda}}\biggr)\biggr).$$

Так как

$$W(1)=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^1\cos(\lambda x)\ln\frac{1}{1-x^2}\,dx=\sin\lambda\frac{\ln\lambda}{\pi}\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{\ln\lambda}\biggr)\biggr),$$

то условие (10) определяет асимптотическое поведение собственных значений, отвечающих чётным собственным функциям:

$$\lambda_n^{(1)}=\pi n+\theta_1+O\biggl(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\biggr),\quad n\to\infty,$$

где $\theta_1=\mathrm{const}$.

2°. Искомая функция нечётная: $u(x)=-u(-x)$. Положим

$$v(x)=-\int\limits_x^1 u(t)\,dt.$$

Очевидно, что $v(x)$ – чётная функция, определённая на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Проинтегрировав уравнение (1) по частям, получим

$$u(x)=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^1\frac{v(t)\,dt}{t-x},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Общая схема дальнейших рассуждений почти такая же, как в п. 1°. Продолжим это уравнение на всю вещественную прямую, доопределив функции $u(x)$ и $v(x)$ нулём вне отрезка $[-1,1]$:

$$u(x)=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-x}+f_+(x-1)-f_+(-x-1),\quad -\infty<x<+\infty,$$

где функция $f_+(x)$ определяется по формуле (4) и $f_+(x)=O(x^{-1})$ при $x\to+\infty$ в силу чётности функции $v(x)$.

Обозначив

$$U(p)=\int\limits_{-1}^{1}e^{i\lambda px}u(x)\,dx,\quad U(0)=0,\quad \int\limits_{-1}^{1}e^{i\lambda px}v(x)\,dx=-\frac{U(p)}{i\lambda p},$$

перейдём в последнем уравнении к образам Фурье:

$$\left(1-\frac{1}{|p|}\right)U(p)=e^{i\lambda p}F^+(p)-e^{-i\lambda p}F^+(-p).$$

Коэффициент $D(p)$ и каноническая функция $X(z)$ такие же, что и в п. 1°. Определим функцию $\Phi(z)$ по правилу

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z^2}\dfrac{e^{i\lambda z}U(z)}{X_0^+(z)}-\left(1+\dfrac{1}{z\operatorname{sgn}\operatorname{Re}z}\right)\dfrac{e^{2i\lambda z}F^+(z)}{X_0^+(z)}, & \operatorname{Im}z>0,\\ -\dfrac{F^+(-z)}{X_0^-(z)}, & \operatorname{Im}z<0.\end{cases}$$

Аналогично рассуждениям п. 1° имеем

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+i\infty}\frac{e^{2i\lambda t}F^+(t)}{tX_0^+(t)}\frac{dt}{t-z};$$

так как в нижней полуплоскости $F^+(-z)=-X^-(z)\Phi(z)$, то в верхней полуплоскости

$$F^+(z)=-\frac{X^-(-z)}{\pi i}\int\limits_{0}^{+i\infty}\frac{e^{2i\lambda t}F^+(t)}{tX_0^+(t)}\frac{dt}{t+z};$$

из соотношения

$$U(p)=|p|\frac{e^{i\lambda p}F^+(p)-e^{-i\lambda p}F^+(-p)}{|p|-1}$$

вытекает условие на спектр:

$$\operatorname{Im}\left(e^{i\lambda}F^+(1)\right)=0. \tag{17}$$

Таким образом, на верхней мнимой полуоси $z=iy$, $0<y<+\infty$, получаем уравнение относительно функции $\varsigma(y)=e^{-\lambda y}F^+(iy)/X_0^-(-iy)$:

$$\varsigma(y)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)}\frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\varsigma(s)\,ds=0,$$

которое аналогично п. 1° запишем в виде

$$\varsigma(y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\varsigma(s)\,ds = \tilde{\zeta}(y), \tag{18}$$

где

$$\tilde{\zeta}(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1\right)\frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y}\varsigma(s)\,ds.$$

Сохранив обозначения из п. 1°, приходим к уравнениям

$$\varsigma_+(y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(s+y)\varsigma_+(s)\,ds = \varsigma_-(s) + \tilde{\zeta}_+(y), \quad -\infty < y < +\infty;$$

$$\Sigma^+(p) - \frac{2i}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{p}{\lambda}\Sigma^+(-p) = \Sigma^-(p) + \mathrm{Z}^+(p), \quad -\infty < p < +\infty.$$

Определим теперь функцию

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Sigma^+(z) - \mathrm{Z}^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{\lambda+iz}{\lambda-iz}\Sigma^+(-z) + \Sigma^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

тогда

$$\Sigma^+(z) = \mathrm{Z}^+(z) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{i\lambda}^{+i\infty}\Sigma^+(t)\frac{dt}{t+z},$$

и получим задачу сопряжения

$$(1-\Omega(p))H^+(p) = H^-(p) + G^+(p), \quad -\infty < p < +\infty,$$

индекс которой, в отличие от п. 1°, равен единице.

Факторизуем коэффициент задачи сопряжения

$$\frac{1}{1-\Omega(p)} = \frac{E^+(p)}{E^-(p)},$$

где

$$E^+(p) = \frac{\Gamma^2(1/4-\varepsilon/2-ip/2)}{\Gamma(1-\varepsilon/2-ip/2)\Gamma(1/2-\varepsilon/2-ip/2)}, \quad E^-(p) = -\frac{\Gamma(\varepsilon/2+ip/2)\Gamma(1/2+\varepsilon/2+ip/2)}{\Gamma^2(3/4+\varepsilon/2+ip/2)}.$$

У однородной задачи сопряжения существует нетривиальное решение $E(z)$, исчезающее на бесконечности, а общее решение неоднородной задачи сопряжения имеет вид

$$H^+(z) = CE^+(z) + \frac{E^+(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(t)/E^+(t)}{1-\Omega(t)}\frac{dt}{t-z},$$

здесь C – произвольная постоянная, которую в дальнейшем будем считать действительной.

Соответственно,

$$e^{\varepsilon x}\Sigma_0^+(i\lambda e^x) = \frac{!}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}E^+(p)\,dp,$$

$$e^{\varepsilon x}\Sigma^+(i\lambda e^x) = e^{\varepsilon x}\Sigma_0^+(i\lambda e^x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\,dp\frac{E^+(p)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(t)/E^+(t)}{1-\Omega(t)}\frac{dt}{t-p}, \quad x > 0.$$

Вычислив интегралы, получим решение уравнения (18):

$$\varsigma(y) = \varsigma_0(y) + \tilde{\zeta}(y) + \int\limits_0^{+\infty} \Xi(y,t)\tilde{\zeta}(t)\,dt,$$

$$\varsigma_0(y) = \frac{\lambda}{\pi} 2C \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \int\limits_1^{+i\infty} e^{-\lambda ys} \frac{\ln s + \tilde{b}_k}{s^{2k+1/2}}\,ds, \quad \Xi(y,t) = \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \Omega(\tau,s) e^{-\lambda(\tau y + st)}\,d\tau\,ds,$$

$$\Omega(\tau,s) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{a}_m \tilde{a}_k}{s^{5/2+2m}\tau^{1/2+2k}} (A_{mk} + B_{mk}\ln s + B'_{km}\ln\tau + C_{mk}\ln s\ln\tau),$$

$$A_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^3} + \frac{\hat{b}_m + \tilde{b}_k}{(m+k+1)^2} + 2\frac{\hat{b}_m\tilde{b}_k}{m+k+1},$$

$$B_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2\tilde{b}_k}{m+k+1}, \quad B'_{km} = \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2\hat{b}_m}{m+k+1}, \quad C_{mk} = \frac{2}{m+k+1},$$

$$\tilde{a}_k = \frac{\Gamma(1/4+k)\Gamma(3/4+k)}{(k!\pi)^2}, \tilde{b}_k = \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} - \frac{\Gamma'(1/4+k)}{2\Gamma(1/4+k)} - \frac{\Gamma'(3/4+k)}{2\Gamma(3/4+k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\hat{a}_m = \frac{\Gamma(5/4+m)\Gamma(7/4+m)}{(m!\pi)^2}, \hat{b}_m = \frac{\Gamma'(1+m)}{\Gamma(1+m)} - \frac{\Gamma'(5/4+m)}{2\Gamma(5/4+m)} - \frac{\Gamma'(7/4+m)}{2\Gamma(7/4+m)}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Рассмотрим банахово пространство $\hat{C}$, состоящее из функций вида $f(x) = g(x)(1+|\ln x|)/\sqrt{x}$, где $g(x) \in C[0,+\infty)$, с нормой $\|f\|_{\hat{C}} = \max\limits_{0<x<+\infty} |\sqrt{x} f(x)/(1+|\ln x|)|$. Аналогично п. 1° доказывается, что интегральный оператор в выражении для $\tilde{\zeta}(y)$ в условии (17) является сжимающим в этом пространстве, и его норма оценивается как $O(\lambda^{-1}\ln^3\lambda)$. Следовательно,

$$F^+(iy) = e^{\lambda y} X_0^-(-iy)\zeta_0(y)\left(1 + O\left(\frac{\ln^3\lambda}{\lambda}\right)\right), \quad 0 < y < +\infty,$$

а условие (17) принимает вид

$$\operatorname{Im}\left(ie^{i\lambda} X_0^-(-1)\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k\tilde{b}_k\right)\left(1 + O\left(\frac{\ln^3\lambda}{\lambda}\right)\right) = 0.$$

Покажем, что $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k\tilde{b}_k > 0$. В самом деле, достаточно заметить, что при $x > 0$

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) > \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

откуда следует оценка $\tilde{b}_k > b_k$.

Таким образом, получаем асимптотическое поведение собственных значений, отвечающих нечётным собственным функциям:

$$\lambda_n^{(2)} = \pi n + \theta_2 + O\left(\frac{\ln^3 n}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

где $\theta_2 = \mathrm{const}$.

Автор признателен Е.И. Моисееву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood–Riseman integral equation // J. of Math. Physics. 1971. V. 12. № 1. P. 83-92.
2. *Пальцев Б.В.* Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
3. *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свёртки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
4. *Сахнович Л.А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 4. С. 69–129.
5. *Полосин А.А.* О спектре и собственных функциях оператора свёртки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1180–1194.
6. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
8. *Полосин А.А.* О решении одного сингулярного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 710–714.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.
После доработки 25.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1266–1273

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23+517.958:537.812

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОТКРЫТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

© 2022 г. Ю. Г. Смирнов, Ю. А. Петрова

Исследованы свойства спектра резонансных частот в задаче о колебаниях объёмных магнитодиэлектрических резонаторов. Доказана теорема о дискретности спектра резонансных частот в задаче о колебаниях в объёмных резонаторах. Задача сведена к анализу системы объёмных сингулярных интегральных уравнений, определяющей голоморфную фредгольмову оператор-функцию спектрального параметра. Решена система уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром с помощью сведения её к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Получено и исследовано характеристическое уравнение радиально-трёхслойного шара, справедливое при произвольных размерах и проницаемостях слоёв.

DOI: 10.31857/S0374064122090102, EDN: JTGWFC

1. Постановка задачи в общем случае. Рассмотрим задачу об электромагнитных колебаниях магнитодиэлектрических объёмных резонаторов в наиболее общем случае, когда среда в резонаторе является неоднородной и анизотропной, т.е. тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости – это произвольные кусочно-гладкие функции координат.

Пусть Q – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂Q.

Рассмотрим следующий класс задач электродинамики. Среда области Q характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$, которые представляют собой матрицы-функции размерности 3×3, а компоненты этих тензоров являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат. Точнее, пусть область Q разбивается на конечное число подобластей Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i; $\overline{Q}=\bigcup_i \overline{Q}_i$; $Q_i\bigcap Q_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Будем предполагать, что $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ являются сужениями на Q_i функций, заданных на более широком множестве, т.е. $\hat{\varepsilon}(x)=\hat{\varepsilon}_i(x)$, $\hat{\mu}(x)=\hat{\mu}_i(x)$ при $x\in Q_i$, $\hat{\varepsilon}_i\in C^3(\overline{B})$, $\hat{\mu}_i\in \in C^3(\overline{B})$, где B – открытый шар, содержащий Q, $\overline{Q}\subset B$. На ∂Q_i будем определять только предельные значения функций $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ с разных сторон в точках гладкости поверхности.

В $\mathbb{R}^3\setminus\overline{Q}$ (вне области Q) среда изотропна, а $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0=\mathrm{const}$ и $\hat{\mu}=\mu_0=\mathrm{const}$.

Сформулируем задачу определения электромагнитных колебаний с временно́й зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота, следующим образом: найти векторные непрерывно дифференцируемые в Q_i и вне $\overline{Q}$ функции электромагнитного поля, которые удовлетворяют в областях гладкости параметров среды уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\hat{\mu}\mathbf{H} \tag{1}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}-ik_0 ru\right)=0,\quad r:=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \tag{2}$$

где $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ $(\operatorname{Im}\varepsilon_0=0,\ \operatorname{Im}\mu_0=0,\ \operatorname{Re}\varepsilon_0>0,\ \operatorname{Re}\mu_0>0)$, а u – любая из декартовых компонент полей $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$.

Далее, функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть непрерывными вплоть до границ ∂Q_i (с каждой стороны) на гладких частях поверхностей разрыва проницаемостей ∂Q_i и удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей:

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q_i}=0,\quad [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q_i}=0, \tag{3}$$

где запись $[\,\cdot\,]|_{\partial Q_i}$ обозначает разность следов с разных сторон ∂Q_i. Здесь τ – касательный вектор к ∂Q_i. Обозначения именно гладких частей границ ∂Q_i будем оговаривать отдельно.

Кроме того, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять условию ограниченности энергии в любом конечном объёме пространства, т.е условию

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3). \tag{4}$$

Решения задачи (1)–(4) будем называть *классическими решениями.*

2. Теоремы о фредгольмовости системы интегральных уравнений. Будем рассматривать задачи в анизотропной среде. Они могут быть сведены к системе объёмных сингулярных интегральных уравнений относительно электромагнитного поля в области Q (см. [1]):

$$\mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - \mathrm{v.p.}\int\limits_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \mathrm{grad})\,\mathrm{grad}\, G(R)\, dy -$$

$$- k_0^2 \int\limits_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) G(R)\, dy - i\omega\mu_0 \int\limits_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) \times \mathrm{grad}\, G(R)\, dy = 0, \quad x \in Q, \tag{5}$$

$$\mathbf{H}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I})\mathbf{H}(x) - \mathrm{v.p.}\int\limits_Q ((\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y), \mathrm{grad})\,\mathrm{grad}\, G(R)\, dy -$$

$$- k_0^2 \int\limits_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) G(R)\, dy + i\omega\varepsilon_0 \int\limits_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) \times \mathrm{grad}\, G(R)\, dy = 0, \quad x \in Q, \tag{6}$$

где v.p. – главное значение интеграла по Коши; $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$; $\hat{\mu}_r = \hat{\mu}/\mu_0$; $\hat{I}$ – единичный тензор; G – функция Грина (фундаментальное решение) для уравнения Гельмгольца:

$$G(R) = \frac{\exp(ik_0 R)}{4\pi R}, \tag{7}$$

$R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$; $\times$ – обозначение векторного произведения.

Далее будем использовать гильбертово пространство шестимерных вектор-функций $L_2(Q)$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int\limits_Q \mathbf{U}(x)\mathbf{V}^*(x)\, dx.$$

Отметим, что оператор уравнений (5) и (6) определён в пространстве $L_2(Q)$ (см. работы [2, с. 61; 3, с. 138]).

Систему уравнений (5), (6) согласно [2, с. 63] можно записать в эквивалентной форме, т.е. в виде интегро-дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{E}(x) - \mathrm{grad}\,\mathrm{div} \int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)\, dy - k_0^2 \int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)\, dy -$$

$$- i\omega\mu_0\, \mathrm{rot} \int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)\, dy = 0, \quad x \in Q, \tag{8}$$

$$\mathbf{H}(x) - \mathrm{grad}\,\mathrm{div} \int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)\, dy - k_0^2 \int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)\, dy +$$

$$+ i\omega\varepsilon_0\, \mathrm{rot} \int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)\, dy = 0, \quad x \in Q. \tag{9}$$

Выражения (8), (9) при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ являются интегральными представлениями и определяют электромагнитное поле вне области Q по найденному значению полей в Q, удовлетворяющих условию излучения, а значит, остаются справедливыми. Однако в этой области интегральные представления полей не будут иметь сингулярности, поскольку $\hat{\varepsilon}_r(x) = \hat{I}$, $\hat{\mu}_r(x) = \hat{I}$, $x \in \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$.

Теперь рассмотрим вопрос о фредгольмовости интегральных уравнений. Дадим несколько определений, которые используем в дальнейшем.

Определение 1. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A^*, также определённый в H, называется *сопряжённым* к A, если равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть *нулями оператора* A. Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ – размерность подпространства нулей сопряжённого оператора A^*. Разность $\operatorname{Ind} A = n(A) - n(A^*)$ называется *индексом оператора* A.

Определение 2. Если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны и индекс линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, равен нулю, то такой оператор называется *фредгольмовым.*

Рассмотрим сначала интегральное уравнение в анизотропной диэлектрической среде, т.е. в среде с постоянной всюду в $\mathbb{R}^3$ и равной μ_0 магнитной проницаемостью. Тогда система интегральных уравнений (5), (6) сводится к объёмному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в области Q:

$$\mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - \text{v.p.}\int\limits_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \operatorname{grad}) \operatorname{grad} G(R)\, dy -$$

$$- k_0^2 \int\limits_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) G(R)\, dy = 0, \quad x \in Q. \tag{10}$$

Теорема 1 [1]. *Пусть $\hat{\mu} = \mu_0$ в $\mathbb{R}^3$, а тензор-функция $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ имеет обратную в каждой точке из $\overline{Q}$. Тогда оператор сингулярного интегрального уравнения (10) фредгольмов в пространстве $L_2(Q)$.*

Теперь рассмотрим задачи рассеяния на магнитодиэлектрическом теле, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат в Q, а поверхности разрыва параметров удовлетворяют приведённым выше условиям.

Запишем систему сингулярных интегральных уравнений (5), (6) в символическом виде:

$$A(\omega)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\hat{S} & -i\omega\mu_0\hat{F}\\ i\omega\varepsilon_0\hat{F} & \hat{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E}\\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где вид операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ следует из (5), (6). Очевидно, что оператор $\hat{S}$ является сингулярным оператором в $L_2(Q)$, а оператор $\hat{F}$ – компактным. Здесь $L_2(Q)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом шестимерных вектор-функций.

Рассмотрим следующее уравнение в $L_2(Q)$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\hat{S} & 0\\ 0 & \hat{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E}\\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

По доказанному выше оператор уравнения (12) будет фредгольмовым в $L_2(Q)$, так как система уравнений (12) распадается на два независимых уравнения вида (10). Оператор уравнения (11) также является фредгольмовым оператором в пространстве $L_2(Q)$, так как отличается от оператора уравнения (12) прибавлением к нему компактных операторов $\hat{F}$. Получаем следующее утверждение.

Теорема 2 [1]. *Пусть тензор-функции $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ и $\hat{\mu}_r(x) - \hat{I}$ имеют обратные в каждой точке из $\overline{Q}$. Тогда оператор системы сингулярных интегральных уравнений (5), (6) фредгольмов в пространстве $L_2(Q)$.*

3. Теорема о дискретности спектра оператор-функции. Рассмотрим оператор-функцию $A(\omega) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ как функцию комплексной переменной $\omega \in \mathbf{C}$.

Утверждение. *На всей комплексной плоскости $\omega \in \mathbf{C}$ оператор-функция $A(\omega) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ является голоморфной.*

Доказательство следует из того, что ядро (7) интегральных операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ является аналитической функцией параметра ω.

Будем говорить, что в области Q выполнены условия C, если эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) + \hat{\varepsilon}_i^*(x))/2$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/2$ положительно определены, а тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) + \hat{\varepsilon}_i^*(x))/(2i)$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/(2i)$ определены неотрицательно. Символ * обозначает транспонированный тензор с комплексно-сопряжёнными элементами.

Известно, что при выполнении условий C при вещественных ω задача (11) имеет только тривиальное решение (см. [1]). В этом случае оператор-функция $A(\omega) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет непустое резольвентное множество. Получаем следующий основной результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия C и тензор-функции $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ и $\hat{\mu}_r(x) - \hat{I}$ имеют обратные в каждой точке из $\overline{Q}$. Тогда спектр оператор-функции $A(\omega) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ является дискретным множеством изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.*

Доказательство следует из теоремы о голоморфной оператор-функции [4, с. 39], утверждения и теоремы 2.

В открытых объёмных магнитодиэлектрических резонаторах могут существовать только комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [5, с. 34; 6, с. 384]. Это значит, что вещественные положительные характеристические числа у оператор-функции $A(\omega) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ отсутствуют. Все комплексные резонансные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Физическая интерпретация комплексных резонансных частот подробно изложена в книге [6, с. 385].

4. Постановка задачи на трёхслойном сферическом резонаторе. Перейдём к частному случаю описанной выше задачи и рассмотрим трёхслойный шар радиуса r_3, расположенный в изотропной среде (рис. 1). Он представляет собой систему из внутреннего шара радиуса r_1 и сферически симметричных диэлектрических слоёв с постоянными диэлектрическими и магнитными проницаемостями

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r \leqslant r_1; \\ \varepsilon_2, & r_1 \leqslant r_2; \\ \varepsilon_3, & r_2 \leqslant r_3; \\ \varepsilon_4, & r_3 \leqslant r; \end{cases} \quad \mu(r) = \begin{cases} \mu_1, & r \leqslant r_1; \\ \mu_2, & r_1 \leqslant r_2; \\ \mu_3, & r_2 \leqslant r_3; \\ \mu_4, & r_3 \leqslant r, \end{cases}$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_{0j}(1 + i\delta_{0j})$, $\mu_j = \mu_{0j}$; ε_{0j} и μ_{0j} $(j = \overline{1,4})$ – относительные диэлектрические и магнитные проницаемости; $\operatorname{tg}\delta_{0j}$ – тангенс угла диэлектрических потерь j-го слоя. На рис. 1 зачернён слой, заполняемый исследуемым веществом.

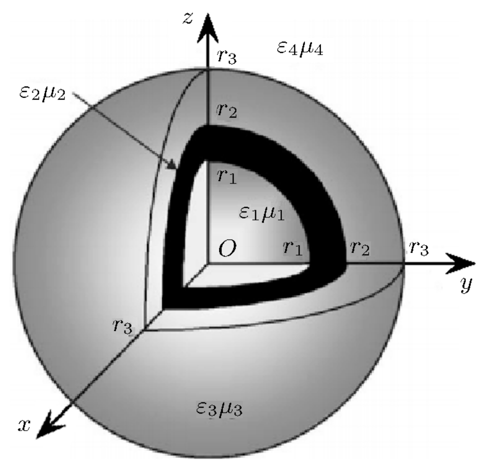

Рис. 1. Геометрия задачи [7].

Решение уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. В сферической системе координат получим дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов вида

$$\left(T_j + \frac{\Delta_\perp}{r^2}\right) U_j^E(r,\theta,\phi) = 0, \quad \left(T_j + \frac{\Delta_\perp}{r^2}\right) U_j^H(r,\theta,\phi) = 0, \tag{13}$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \quad T_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_j^2.$$

где $\chi_j = \sqrt{\varepsilon_j, \mu_j}k$, $k = \omega/c$, c – скорость света.

Решения уравнений (13) удовлетворяют конечности амплитуд полей колебаний в центре сферы $(r = 0)$, отсутствию приходящей и наличию уходящей волны при $r \to \infty$, непрерывности тангенциальных компонент полей на поверхностях раздела сред.

Функции $U_j^S(r,\theta,\phi)$ представим в виде

$$U_j^S(r,\theta,\phi) = \sum_q R_{j,q}^S(r) P_n^m(\cos\theta)\exp(im\phi),$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединённые полиномы Лежандра первого рода, функции $R_{j,q}^S(r)$ описывают распределение по радиальной координате полей S-типа q-й моды в j-й области. Индекс q содержит индексы m и n, которые обозначают соответственно число вариаций поля по азимутальному углу ϕ, а при $m = 0$ – по полярному углу θ сферической системы координат, связанной с осью Oz.

Соотношения, определяющие компоненты q-й моды E-типа, в сферической системе координат приобретают вид

$$H_{q,r}(r,\theta,\phi) = 0, \quad E_{q,r}(r,\theta,\phi) = \left[\varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]U_q^E(r,\theta,\phi),$$

$$H_{q,\theta}(r,\theta,\phi) = -\frac{ik\varepsilon(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial U_q^E(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}, \quad E_{q,\theta}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_q^E(r,\theta,\phi)}{\partial\theta\partial r},$$

$$H_{q,\phi}(r,\theta,\phi) = \frac{ik\varepsilon(r)}{r}\frac{\partial U_q^E(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}, \quad E_{q,\phi}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 U_q^E(r,\theta,\phi)}{\partial\phi\partial r},$$

а для колебаний H-типа имеем

$$E_{q,r}(r,\theta,\phi) = 0, \quad H_{q,r}(r,\theta,\phi) = \left[\varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]U_q^H(r,\theta,\phi),$$

$$E_{q,\theta}(r,\theta,\phi) = \frac{ik\mu(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial U_q^H(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}, \quad H_{q,\theta}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_q^H(r,\theta,\phi)}{\partial\theta\partial r},$$

$$E_{q,\phi}(r,\theta,\phi) = -\frac{ik\mu(r)}{r}\frac{\partial U_q^H(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}, \quad H_{q,\phi}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 U_q^H(r,\theta,\phi)}{\partial\phi\partial r}.$$

Функции $R_q^S(r)$, определяющие распределение по радиальной координате полей парциальной q-й моды S-типа, описываются соотношениями

$$R_q^S(r) = \begin{cases} A_{q,1}^S j_n(\chi_1 r), & 0 \leqslant r \leqslant r_1, \\ A_{q,2}^S j_n(\chi_2 r) + B_{q,2}^S \eta_n(\chi_2 r), & r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \\ A_{q,3}^S j_n(\chi_3 r) + B_{q,3}^S \eta_n(\chi_3 r), & r_2 \leqslant r \leqslant r_3, \\ A_{q,4}^S h_n^{(1)}(\chi_4 r), & r_3 \leqslant r. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $A_{q,j}^S$, $B_{q,j}^S$ – амплитуды колебаний S-типа в j-й области; $j_n(x)$, $\eta_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции, связанные отношениями вида $z_n(x) = \sqrt{\pi x/2}Z_{n+1/2}(x)$ с цилиндрическими функциями Бесселя $J_{n+1/2}(x)$, Неймана $N_{n+1/2}(x)$ и Ханкеля $H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ соответственно.

Граничные условия на j-й поверхности раздела сред выполняются при

$$\zeta_j R_q^S(\chi_j r_j) = \zeta_{j+1} R_q^S(\chi_{j+1} r_j) \quad \text{и} \quad \left.\frac{dR_q^S(\chi_j r)}{dr}\right|_{r=r_j} = \left.\frac{dR_q^S(\chi_{j+1} r)}{dr}\right|_{r=r_j}.$$

Здесь $\zeta_j = \varepsilon_j$ для E-типа и $\zeta_j = \mu_j$ для H-типа колебаний. Пусть указанные равенства выполнены. Введём обозначения $z_{i,j} = z_n \ (\chi_i r_j)$ и получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных $A^S_{q,j}$, $B^S_{q,j}$:

$$\zeta_1 A^S_{q,1} j_{1,1} = \zeta_2 (A^S_{q,2} j_{2,1} + B^S_{q,2}\eta_{2,1}), \quad \chi_1 A^S_{q,1} j'_{1,1} = \chi_2 (A^S_{q,2} j'_{2,1} + B^S_{q,2}\eta'_{2,1}),$$

$$\zeta_2 (A^S_{q,2} j_{2,2} + B^S_{q,2}\eta_{2,2}) = \zeta_3 (A^S_{q,3} j_{3,2} + B^S_{q,3}\eta_{3,2}), \quad \chi_2 (A^S_{q,2} j'_{2,2} + B^S_{q,2}\eta'_{2,2}) = \chi_3 (A^S_{q,3} j'_{3,2} + B^S_{q,3}\eta'_{3,2}),$$

$$\zeta_3 (A^S_{q,3} j_{3,3} + B^S_{q,3}\eta_{3,3}) = \zeta_4 A^S_{q,4} h^{(1)}_{4,3}, \quad \chi_3 (A^S_{q,3} j'_{3,3} + B^S_{q,3}\eta'_{3,3}) = \chi_4 A^S_{q,4} h^{(1)'}_{4,3}. \tag{15}$$

Штрих у сферических функций обозначает операцию дифференцирования по аргументу.

Все амплитуды в соотношениях (14) определяются через $A^S_{q,2}$ следующим образом:

$$B^S_{q,2} = -\frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1\eta_2]_1} A^S_{q,2}, \quad A^S_{q,3} = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} \frac{j_{2,3}[j_1\eta_2]_1 - \eta_{2,3}[j_1 j_2]_1}{j_{3,2}[h_4\eta_3]_3 - \eta_{3,2}[h_4 j_3]_3} \frac{[h_4\eta_3]_3}{[j_1\eta_2]_1} A^S_{q,2},$$

$$B^S_{q,3} = -\frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4\eta_3]_3} A^S_{q,3}, \quad A^S_{q,1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\left[j_{2,1} - \frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1\eta_2]_1}\eta_{2,1}\right] A^S_{q,2}, \quad A^S_{q,4} = \frac{\zeta_3}{\zeta_4 h_{4,3}}\left[j_{3,3} - \frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4\eta_3]_3}\eta_{3,3}\right] A^S_{q,3}.$$

Здесь

$$[f_i g_j]_k = q_i f'_{i,k} g_{j,k} - q_j f_{i,k} g'_{j,k}, \quad q_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{\zeta_i}.$$

Условие существования нетривиальных решений системы (15) приводит к характеристическому уравнению

$$[h_4 j_3]_3 \times \{[j_1\eta_2]_1 [j_2\eta_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2\eta_3]_2\} = [h_4\eta_3]_3 \times \{[j_1\eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2\}. \tag{16}$$

5. Численное исследование характеристического уравнения. Характеристическое уравнение (16) при заданных параметрах структуры определяет комплексные частоты собственных колебаний, т.е. соотношение между волновым числом χ и радиусом r. Моды диэлектрического шара описываются с помощью индексов m, n, q. Индекс q вводится из-за необходимости определения: какому множеству решений соответствует то или иное значение собственной частоты. Индекс показывает число узлов поля, лежащих внутри шара, и прямо пропорционален нулям функции Бесселя этого шара.

Далее численно исследуем структуру, в которой параметры внутреннего шара и внешнего слоя совпадают $(\varepsilon_1 = \varepsilon_3;\ \mu_1 = \mu_3)$, а изучаемое вещество заполняет средний слой. При этом уравнение (16) принимает вид

$$[h_4 j_3]_3 \times \{[j_3\eta_2]_1 [j_2\eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2\eta_3]_2\} = [h_4\eta_3]_3 \times \{[j_3\eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2\}. \tag{17}$$

Если перенести правую часть равенства (17) влево, то получим дисперсионное уравнение для вычисления собственных значений χ в виде

$$\begin{aligned}\Delta(\chi) = [h_4 j_3]_3 \times \{[j_3\eta_2]_1 [j_2\eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2\eta_3]_2\} - \\ - [h_4\eta_3]_3 \times \{[j_3\eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2\} = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Представим $\chi = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда, взяв вещественную и мнимую части от выражения (18), получим систему вещественных дисперсионных уравнений для определения вещественной и мнимой частей волнового числа χ:

$$\Delta_1(\alpha,\beta) := \operatorname{Re}\Delta(\chi) = 0, \quad \Delta_2(\alpha,\beta) := \operatorname{Im}\Delta(\chi) = 0. \tag{19}$$

Для определения набора (α,β) решим систему уравнений (19) с помощью метода пристрелки (рис. 2).

Разместив обе кривые (решения каждого уравнения в (19)) на одной плоскости, определим их точки пересечения, которые являются решением исходной задачи. Измельчая сетку, можно добиться необходимой точности решений.

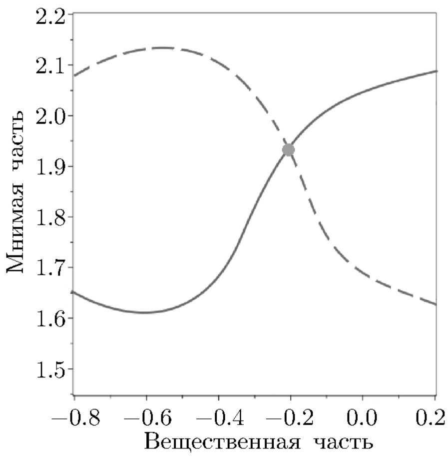

Рис. 2. Численное решение системы (19): сплошная кривая – решение первого уравнения системы (19); штриховая – решение второго уравнения системы (19); точка пересечения кривых является решением системы (19).

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных выше, приведём численное исследование характеристического уравнения (получены графики зависимости волнового числа χ от круговой частоты ω) с разными значениями относительной диэлектрической проницаемости среднего слоя ε_{02} и толщины $\Delta = r_2 - r_1$.

Параметры, общие для всех расчётов, выбраны следующим образом. Исследуем, помещённую в вакуум структуру с радиусами $r_1 = 3.6$, $r_2 = 3.7$ и $r_3 = 3.9$ см. Магнитная проницаемость всех этих сред равна единице. Внутренний шар и наружный слой изготовлены из фторопласта с параметрами: $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{03} = 2.07$, $\operatorname{tg}\delta_{01} = \operatorname{tg}\delta_{03} = 1.7 \cdot 10^{-4}$. Средний слой заполнялся бензином ($\varepsilon_{02} = 1.88$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 3.3 \cdot 10^{-3}$), воздухом ($\varepsilon_{02} = 1.0$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 0$), этиловым спиртом ($\varepsilon_{02} = 4.1$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 3.05 \cdot 10^{-1}$), трансформаторным маслом ($\varepsilon_{02} = 2.2$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 4.5 \cdot 10^{-2}$) и плавленым кварцем ($\varepsilon_{02} = 3.6$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 1.2 \cdot 10^{-4}$).

Расчёты на рис. 3 выполнены при $\Delta = 0.1$ см (сплошной линией показаны решения первого уравнения в (19), штриховой – второго, точки – приближённое решение системы, собственное значение волнового числа χ). Из графиков видно, что колебаниям E-типа соответствуют меньшие значения волновых чисел, чем колебаниям H-типа. Это прослеживается и в других вычислениях. Модули максимальных значений волнового числа принадлежат решению системы H-типа, когда средний слой заполнен этиловым спиртом.

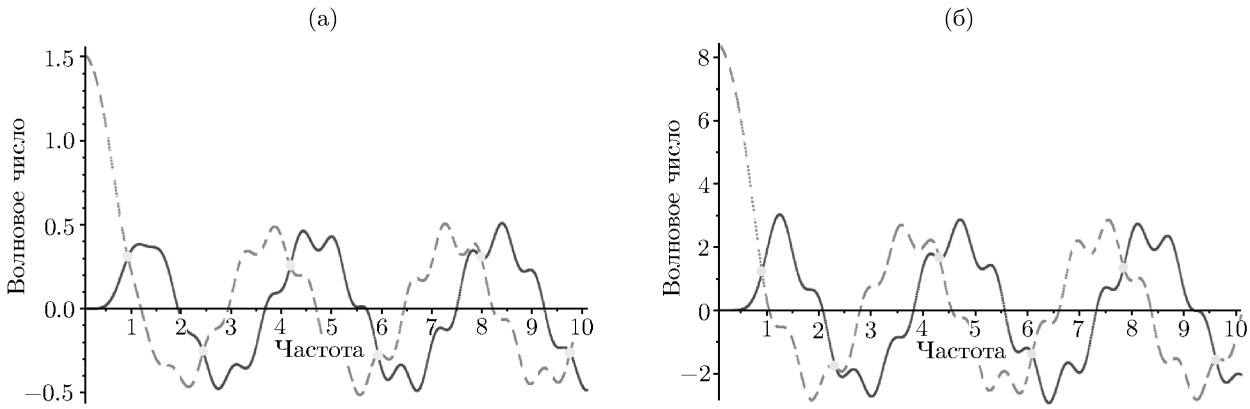

Рис. 3. Численное решение системы (19) для колебаний E- и H-типа. Средний слой заполнен бензином. $\varepsilon_{02} = 1.88$, $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{03} = 2.07$, $\operatorname{tg}\delta_{02} = 3.3 \cdot 10^{-3}$, $\operatorname{tg}\delta_{01} = \operatorname{tg}\delta_{03} = 1.7 \cdot 10^{-4}$, $r_1 = 3.6$, $r_2 = 3.7$, $r_3 = 3.9$.

Предложенный метод нахождения нескольких первых частот для различных материй и размеров среднего слоя трёхслойного шара верен.

На рис. 4 рассмотрен резонатор при заполнении среднего слоя различными диэлектриками. Показана зависимость значений вещественной и мнимой частей решения системы от толщины среднего слоя. На графиках видно, что значения значительно отличаются, что даёт возможность однозначно идентифицировать исследуемые вещества, а значит, и по-новому их исследовать.

Результаты. В работе рассмотрена задача об электромагнитных колебаниях магнитодиэлектрического объёмного резонатора в наиболее общем случае. Исследованы свойства и доказана дискретность спектра резонансных частот. Задача сведена к анализу системы интегро-дифференциальных объёмных сингулярных уравнений по области неоднородности. Доказано, что оператор-функция, определяемая системой интегро-дифференциальных уравнений, является голоморфной функцией спектрального параметра, а при некоторых дополнительных условиях на тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости – функцией в выбранном пространстве.

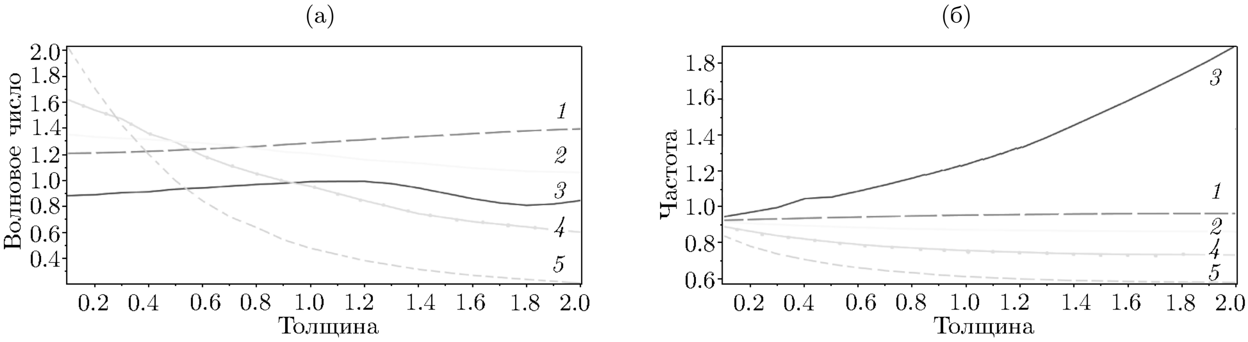

Рис. 4. Зависимости мнимой (а) и вещественной (б) частей решения (19) собственных колебаний H-типа от толщины среднего слоя, заполненного: *1* – бензином, *2* – трансформаторным маслом, *3* – воздухом, *4* – плавленым кварцем, *5* – этиловым спиртом.

Исходная модельная задача сведена к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Полученное характеристическое уравнение (16) исследовано для случая, когда параметры структуры внутреннего и внешнего шаров совпадают. Решения этого уравнения позволяют изучить зависимость комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого вещества от параметров резонатора при известных его спектральных характеристиках.

Предложен численный метод, основанный на нахождении корней характеристического уравнения с помощью метода пристрелки. Разработан алгоритм в системе компьютерной математики Maple, применённый для исследования структуры среднего слоя, заполненного бензином, воздухом, этиловым спиртом, трансформаторным маслом и плавленым кварцем. Проиллюстрированы зависимости решения системы от частот, а также значений волнового числа/частоты от радиуса. Численные результаты, полученные на основе разработанных в данной работе методов, совпадают с данными, полученными ранее другими методами [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б., Смирнов Ю.Г.* Теоремы единственности и существования решения задач рассеивания электромагнитных волн на трёхмерных анизотропных телах в дифференциальной и интегральной постановке // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 85–94.
2. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М., 1998.
3. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М., 2016.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
5. *Ильченко М.Е., Взятышев В.Ф., Гассанов Л.Г. и др.* Диэлектрические резонаторы. М., 1989.
6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
7. *Суворова О.А., Филиппов Ю.Ф.* Трёхслойный шаровой резонатор для измерения диэлектрических проницаемостей веществ // Радиофизика и радиоастрономия. 2007. Т. 12. № 2. С. 214–222.

Пензенский государственный университет,
Научно-исследовательский центр
"Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике",
г. Пенза

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
После доработки 25.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1274–1283

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛЯХ РЫНКА, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Арутюнов, Н. Г. Павлова

Изучен вопрос существования вектор-функций равновесных цен в моделях рынка, описываемых дифференциальными уравнениями. В исследуемых моделях спрос и предложение зависят не только от цен на товары, но и от скоростей изменения цен. Достаточные условия существования равновесия в таких моделях получены как следствия теорем о существовании точек совпадения отображений, действующих из q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства цен в метрическое пространство приобретаемых наборов товаров.

DOI: 10.31857/S0374064122090114, EDN: JTJTNX

Введение. При моделировании рынка большое значение имеет фактор времени. Известный экономист Фридрих Август фон Хайек в 1936 г. писал: “Ход времени весьма важен для придания понятию равновесия какого-либо смысла. Об этом стоит упомянуть, поскольку многие экономисты оказались, похоже, неспособны найти место для времени в равновесном анализе и потому предположили, что понятие равновесия должно рассматриваться как вневременное. Подобное представление мне кажется лишённым смысла.” Динамические модели “спрос-предложение”, учитывающие фактор времени, более адекватно, чем статические, описывают процессы современного рынка, происходящие в долгосрочные рыночные периоды. С помощью динамических моделей экономических систем решаются многие задачи государственного экономического планирования, многие макро- и микроэкономические задачи маркетинга и др. Особый интерес представляют модели процессов рынка, описываемые дифференциальными уравнениями (динамические модели с непрерывным временем), которые изучались Дж.К. Эвансом, Р.Г.Д. Алленом, Дж.Р. Хиксом, Д. Гейлом, Р. Солоу, П.А. Самуэльсоном и другими (см., например, [1–4]). Важной проблемой при изучении таких моделей является получение условий существования положения равновесия (в случае рынка многих товаров – вектор-функции равновесных цен). До настоящего времени были получены лишь условия существования равновесия в некоторых специальных случаях, в частности, в одномерных моделях или многомерных линейных моделях. Для многомерных нелинейных динамических моделей, учитывающих специфику пространства цен, вопрос существования равновесия до сих пор оставался открытым. Для получения достаточных условий существования равновесия в этих моделях можно применить результаты теории накрывающих отображений, а именно, они могут быть получены как следствие теорем о существовании точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений, действующих в абстрактных квазиметрических пространствах (в этом случае вектор-функция равновесных цен рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения). Этот подход (для статических моделей) уже был применён авторами в статьях [5, 6]. Однако достаточные условия существования равновесных вектор-функций цен в динамических моделях рынка многих товаров в случае, если спрос и предложение зависят от времени и скорости изменения цен, до сих пор не были получены.

В данной работе результаты, полученные в [7–10], используются для вывода достаточных условий существования равновесия в рыночных моделях, которые учитывают влияние фактора времени, а спрос и предложение зависят не только от текущих цен на товары, но и от скорости изменения цен. Ещё одной отличительной чертой настоящей работы является рассмотрение пространства цен как q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства, что позволяет более точно описать процессы рынка, в отличие от существующих моделей, не учитывающих возможности внешнего (в том числе государственного) регулирования цен.

1. Динамические модели рынка многих товаров. Рассмотрим динамическую модель рынка многих товаров, обобщающую модель Аллена–Эванса.

Пусть на рынке представлено $n \in \mathbb{N}$ товаров, причём i-й товар в момент времени $t \in \in [t_1, t_2]$, где $t_2 > t_1 \geqslant 0$ заданы, для потребителя имеет цену $p_i = p_i(t) \in [c_{1i}, c_{2i}]$, $i = = \overline{1,n}$. Здесь $c_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1n})$ и $c_2 = (c_{21}, \ldots, c_{2n})$, $c_{2i} > c_{1i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, – заданные векторы, определяющие естественные ограничения на цены. Кроме того, известны значения цен в момент времени t_1: $p(t_1) = \bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$.

Предположим также, что заданы числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$ и определяющая возможности внешнего регулирования цен функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $X = [c_{11}, c_{21}] \times \ldots \times [c_{11}, c_{21}]$, удовлетворяющая условиям

$$\rho_X(p;p^*) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad p = p^*, \tag{1}$$

$$\rho_X(p;p^*) \leqslant q_0 \rho_X(p^*;p) \quad \text{для любых} \quad p, p^* \in X, \tag{2}$$

$$\rho_X(p;p^*) \leqslant q_1 \rho_X(p;p^{**}) + q_2 \rho_X(p^{**};p^*) \quad \text{для всех} \quad p, p^*, p^{**} \in X. \tag{3}$$

Функция ρ_X позволяет учитывать в исследуемой модели специфику пространства цен, в частности, отличие механизмов повышения и понижения цен.

На скорости изменения цен накладываются условия $\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \ldots, \dot{p}_n(t)) \in P$ для почти всех (п.в.) значений t, где $P \subseteq \mathbb{R}^n$ – заданное замкнутое множество.

Спрос совокупного потребителя описывается отображением

$$D : P \times X \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n, \quad D = D(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $D_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, – объём приобретаемого в момент времени t i-го товара. Предложение совокупного производителя описывается отображением

$$S : P \times X \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n, \quad S = S(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $S_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, – объём произведённого и предлагаемого в момент времени t на рынке i-го товара.

Отображения предложения S и спроса D предполагаются непрерывными по t, кроме того, отображение предложения предполагается накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму, отображение спроса – липшицевым по первому и второму аргументу.

Под динамической моделью "спрос–предложение" с непрерывным временем будем понимать набор

$$\sigma = (D(\dot{p}(t), p(t), t), S(\dot{p}(t), p(t), t), t_1, t_2, \bar{p}, P, c_1, c_2, q_0, q_1, q_2). \tag{4}$$

Определим полное метрическое (как обычно, под *полным метрическим пространством* понимаем метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства) пространство $AC_\infty([t_1, t_2], \bar{p}, P)$ абсолютно непрерывных функций $p : [t_1, t_2] \to X$ таких, что $\dot{p} \in L_\infty([t_1, t_2], P)$, $p(t_1) = \bar{p}$, с метрикой

$$\rho_{AC_\infty([t_1,t_2],\bar{p},P)}(p, p^*) = \rho_{L_\infty([t_1,t_2]),P)}(\dot{p}, \dot{p}^*).$$

Определение 1. Пусть $\delta \in (0, t_2 - t_1)$. *Положением равновесия* в модели (4), отвечающим значению δ, называется абсолютно непрерывная функция $p^\delta : [t_1, t_1 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, производная которой существенно ограничена и для которой выполняются условия

$$p(t_1) = \bar{p} := (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n),$$

$$D(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t), \quad \dot{p} \in P \quad \text{для любого} \quad t \in [t_1, t_1 + \delta].$$

Для получения достаточных условий существования положения равновесия в моделях рынка будем рассматривать равновесие как точку совпадения соответствующих отображений спроса и предложения, действующих из q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства цен в метрическое пространство приобретаемых наборов товаров.

2. Формализация задачи и вспомогательные результаты. Для описания пространства цен необходимо следующее

Определение 2 [10]. Пусть заданы множество X и числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$. Функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию (1) (аксиома тождества), условию (2) (аксиома q_0-симметрии) и условию (3) ((q_1, q_2) – обобщённое неравенство треугольника), называется *q_0-симметрической (q_1, q_2)-квазиметрикой*, а пара (X, ρ_X) – *q_0-симметрическим (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством.*

Пространства такого типа являются объектами интенсивного исследования (см., например, работы [10–14]) и имеют широкое применение в теории оптимизации и аппроксимации, выпуклом анализе и в различных прикладных областях. В настоящей статье описание пространства цен как q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства позволяет построить модель, более точно описывающую процессы рынка и учитывающую специфику пространства цен на товары.

Фиксируем числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$. Рассмотрим q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) и метрическое пространство (Y, ρ_Y). Относительно функции ρ_Y подразумеваем выполненными обычные аксиомы метрики. Введём в рассмотрение множества

$$B_X(x, r) = \{\bar{x} \in X : \rho_X(x, \bar{x}) \leqslant r\}, \quad B_Y(y, r) = \{\bar{y} \in Y : \rho_Y(y, \bar{y}) \leqslant r\},$$

которые будем называть шарами радиуса r с центром в точке x и с центром в точке y соответственно. Отметим, что шар $B_Y(y, r) \subseteq Y$ является замкнутым, а шар $B_X(x, r) \subseteq X$ замкнутым множеством может не быть (относительно топологии на X, порождаемой функцией ρ_X).

Будем говорить, что последовательность $\{x_i\}$ q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ_X) сходится к $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(x_0, x_i) = 0$. Последовательность $\{x_i\}$ будем называть *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех натуральных чисел m и n таких, что $n > m > N$, выполняется неравенство $\rho_X(x_m, x_n) < \varepsilon$. Как обычно, под полнотой пространства (X, ρ_X) будем понимать сходимость любой фундаментальной последовательности к элементу этого пространства. Отметим, что в полном q_0-симметрическом (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве предел фундаментальной последовательности может быть не единственным.

В теории неявных уравнений (как алгебраических, так и дифференциальных), к решению которых сводится задача поиска положений рыночного равновесия, большую роль играют накрывающие и липшицевы отображения.

Определение 3. Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subseteq \Psi(B_X(x, r)) \quad \text{для любого} \quad r \geqslant 0, \quad x \in X.$$

Определение 4. Пусть задано $\beta > 0$. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется *β-липшицевым*, если

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in X.$$

Определение 5. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$, $\{y_i\} \subset Y$, сходящихся к точкам x_0 и y_0 соответственно, и таких, что $(x_i, y_i) \in \operatorname{gph} \Psi = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Psi(x)\}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, выполняется условие $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph} \Psi$.

Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi : X \to Y$ и числа $\alpha > \beta \geqslant 0$.

В статье [10] получена теорема, содержащая условия, гарантирующие существование точки совпадения у отображений, действующих в квазиметрических пространствах. Для её формулировки введём следующие обозначения:

$$S(\theta, 0) = 0, \quad S(\theta, n) = \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}, \quad \theta \in [0, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : q_2 \beta^j < \alpha^j\},$$

а в предположении, что $q_0^2\beta < \alpha$, определим число

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : q_1(q_0^2\beta)^j < \alpha^j\}.$$

Теорема 1 (о существовании точек совпадения) [10]. *Предположим, что q_0-симметрическое $(q1, q2)$-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является полным. Пусть отображение Ψ является α-накрывающим и замкнутым, а отображение Φ – липшицевым с константой $\beta < \alpha$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ, что имеет место оценка*

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(x_0, \eta) \leqslant \frac{q_1^2\alpha^{m_0-1}S(q_2\beta/\alpha, m_0-1) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если выполняется дополнительное условие $q_0^2\beta < \alpha$, то имеют место оценки

$$\rho_X(\xi, x_0) \leqslant q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)),$$

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(\eta, x_0) \leqslant q_0q_2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Применим эту теорему для получения условий разрешимости уравнения вида $F(x, x) = y$ относительно x. Для этого сформулируем следующее

Определение 6 [8]. Пусть заданы число $\alpha > 0$ и множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *условно α-накрывающим относительно множеств U и V*, если для любых $u \in U$ и $r > 0$ таких, что $B_X(u, r) \subseteq U$, имеет место включение

$$\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r) \bigcap V \bigcap \Psi(U).$$

Пусть заданы полное q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X), метрическое пространство (Y, ρ_Y), отображение $F : X \times X \to Y$, числа $\alpha > \beta \geqslant 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ и точка $\hat{x} \in X$. Положим

$$R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}, \quad \hat{y} = F(\hat{x}, \hat{x}),$$

$$r(y) = \gamma(n_0)\rho_Y(y, \hat{y}), \quad \gamma(n_0) = q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}},$$

$$\hat{U}(y) = B_X(\hat{x}, r(y)) \quad \text{для любого} \quad y \in Y. \tag{5}$$

Следующая теорема, обобщающая теорему 1 из [9] на случай квазиметрических пространств, даёт достаточные условия для разрешимости уравнения $F(x, x) = y$ относительно x.

Теорема 2. *Предположим, что при любом $x_2 \in U = B_X(\hat{x}, R_1)$ отображение $F(\,\cdot\,, x_2)$ является условно α-накрывающим относительно шаров U, $V(x_2) = B_Y(F(\hat{x}, x_2), \alpha R_2)$, а при любом $x_1 \in U$ отображение $F(x_1, \cdot)$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица с константой β такой, что $q_1q_0^2\beta < \alpha$.*

Предположим также, что для всех $y \in B_Y(\hat{y}, \alpha R_2)$ и для всех сходящихся последовательностей $u_i \to u$, $u_i, u \in U$, из равенства $\lim\limits_{i\to\infty} F(u_i, u) = y$ следует равенство $F(u, u) = y$.

Тогда для любого $y \in Y$, для которого выполняются следующие условия:

$$\rho_Y(y, \hat{y}) \leqslant \frac{1}{\gamma(n_0)}R_{\min}, \tag{6}$$

$$y \in \bigcap_{x_2 \in \hat{U}(y)} F(U, x_2), \tag{7}$$

существует решение $x \in U$ *уравнения* $F(x,x) = y$, *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(x,\hat{x}) \leqslant r(y) = \gamma(n_0)\rho_Y(y,\hat{y}).$$

Доказательство. Из условий (5) и (6) следует, что для всех $y \in Y$ справедливо неравенство $r(y) \leqslant R_1$ и, значит, $\hat{U}(y) = B_X(\hat{x}, r(y)) \subseteq U = B_X(\hat{x}, R_1)$.

Далее, в силу условной α-накрываемости отображения $F(\,\cdot\,, x_2)$ относительно шаров U и $V(x_2)$ и включения (7) получаем, что для любого $y \in Y$ существует точка $\xi \in X$ такая, что

$$F(\xi,\hat{x}) = y, \quad \rho_X(\hat{x},\xi) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(\hat{y},y). \tag{8}$$

Также в силу условной α-накрываемости отображения $F(\,\cdot\,, x_2)$ относительно шаров U и $V(x_2)$ и включения (7) имеем, что для любых $y \in Y$ и $\xi \in S(y)$, где множество $S(y)$ состоит из точек $\xi \in \hat{U}(y)$, для которых найдутся точки $x_2 \in U(y)$ такие, что $F(\xi, x_2) = y$ и $\rho(\xi, x_2) \leqslant$ $\leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y, F(y,y))$, существует точка $\hat{\xi} \in X$ такая, что выполняются условия

$$F(\hat{\xi},\xi) = y, \quad \rho_X(\xi,\hat{\xi}) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(F(\xi,\xi),y). \tag{9}$$

Для нахождения решения уравнения $F(x,x) = y$ (для всех y, удовлетворяющих условиям теоремы) применим метод итераций. Для этого построим следующую последовательность $\{u_i\}$.

Положим $u_0 = \hat{x}$. В силу условия (8) существует элемент $u_1 \in X$ такой, что $F(u_1,u_0) = y$ и

$$\rho_X(u_0,u_1) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\hat{y},y) = \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}r(y) \leqslant r(y).$$

Следовательно, $u_1 \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$.

В силу условия (9) существует $u_2 \in X$, что $F(u_2,u_1) = y$ и

$$\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(F(u_1,u_1),y) = \frac{1}{\alpha}\rho_Y(F(u_1,u_1),F(u_1,u_0)).$$

По условию теоремы при любом $x_1 \in U$ отображение $F(x_1,\cdot\,)$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица с константой β, следовательно

$$\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(u_1,u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\,\frac{q_0\beta}{\alpha}r(y),$$

откуда получим неравенства

$$\rho_X(u_0,u_2) \leqslant q_1\rho_X(u_0,u_1) + q_2\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left(q_1 + \frac{q_0q_2\beta}{\alpha}\right)r(y) \leqslant r(y),$$

а, значит, $u_2 \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$.

Следуя указанному алгоритму, построим последовательно элементы u_3, u_4, … На i-м шаге получим элемент $u_i \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$ такой, что $F(u_i,u_{i-1}) = y$ и справедлива оценка

$$\rho_X(u_{i-1},u_i) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\,\frac{q_0^{i+1}\beta^{i+1}}{\alpha^{i+1}}r(y). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\rho_X(u_{i-1},u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left((1-q_2)q_1^{i+1} + q_2q_1^{i+1}\left(q_1 - \frac{q_0^{i+2}\beta^{i+2}}{\alpha^{i+2}}\right)\left(q_1 - \frac{q_0\beta}{\alpha}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left(q_1^{i+1} + q_2q_1^{i+1}\left(S\left(\frac{q_0\beta}{q_1\alpha}; i+2\right) - 1\right)\right) \leqslant r(y).$$

Таким образом, $u_i \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$. Кроме того, в силу (11) расстояния между построенными последовательными элементами u_{i-1} и u_i оценивается соответствующими членами убывающей геометрической прогрессии, последовательность $\{u_i\} \subset \hat{U}(y)$ является фундаментальной. Тогда в силу полноты пространства X существует (возможно, не единственный) элемент $x \in \hat{U}(y)$, являющийся пределом этой последовательности.

Далее, имеем

$$\rho_Y(F(u_i, x), y) = \rho_Y(F(u_i, x), F(u_i, u_{i-1})) \leqslant \beta\rho_X(x, u_{i-1}) \to 0, \quad i \to \infty.$$

Из последнего выражения следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Вопрос о существовании положения равновесия в модели рынка (4) в настоящей статье сводится к вопросу существования локального решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для не разрешённого относительно производной дифференциального уравнения, содержащего дополнительные ограничения на производную искомой функции

$$f(\dot{x}, x, t) = 0, \quad \dot{x} \in P, \quad t \in [t_1, t_2], \tag{11}$$

$$x(a) = \hat{x}, \tag{12}$$

где $P \subseteq \mathbb{R}^n$ – заданное замкнутое множество, $\hat{x} \in X$.

Будем предполагать, что функция $f : P \times X \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

1) $f(\,\cdot\,, \cdot\,, t)$ непрерывна для п.в. $t \in [t_1, t_2]$;

2) $f(\xi, x, \cdot\,)$ измерима для всех $(\xi, x) \in P \times X$;

3) для любого $\rho > 0$ найдётся такое число M, что для любых $(\xi, x) \in P \times X$, удовлетворяющих неравенству $||(\xi, x)||_{AC_\infty} \leqslant \rho$, и для п.в. $t \in [t_1, t_2]$ имеет место оценка $|f(\xi, x, t)| \leqslant M$.

Пусть $\delta \in (0, t_2 - t_1)$. *Решением задачи Коши* (12), (13), соответствующим значению δ, на отрезке $[t_1, t_1 + \delta]$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x^\delta : [t_1, t_1 + \delta] \to X$, производная которой существенно ограничена, для неё справедливо равенство (13), а для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ выполняется условие (12).

Следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3 из работы [9] на случай квазиметрических пространств, содержит условия, гарантирующие существование локального решения задачи Коши (12), (13).

Теорема 3 (о существовании локальных решений дифференциального уравнения). *Предположим, что существуют числа $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\nu > 0$, $\delta \in (0, t_2 - t_1]$ и функция $u_0 \in L_\infty([t_1, t_2], P)$ такие, что выполняются следующие условия:*

1) существует число $\alpha > 0$ такое, что для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ и всех $x \in B_X(\bar{x}, \nu)$ отображение $f(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров

$$U(t) = B_P(u_0(t), R_1), \quad V(x, t) = B_{\mathbb{R}^m}(f(u_0(t), x, t), \alpha R_2);$$

2) для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ и всех $x \in B_X(\bar{x}, \nu)$ выполнено включение $0 \in f(U(t), x, t)$;

3) существует неотрицательное число $L < \dfrac{\delta\alpha}{q_1 q_0^2}$ такое, что для всех $x, \tilde{x} \in B_X(\bar{x}, \nu)$, для всех функций $u \in U(t)$ и для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ выполняется неравенство

$$|f(u, x, t) - f(u, \tilde{x}, t)| \leqslant L\rho_X(x, \tilde{x});$$

4) выполняется неравенство $r_0 < R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}$, где

$$r_0 := \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} |f(u_0(t), \bar{x}, t)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta_\varepsilon \in (0, \delta]$ и соответствующее решение

$$x^{\delta_\varepsilon} \in AC_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \bar{x}, P)$$

задачи (11), (12) такие, что выполняется неравенство $\rho_{L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \Omega)}(\dot{x}^{\delta_\varepsilon}, u_0^{\delta_\varepsilon}) < r_0 + \varepsilon$, где $u_0^{\delta_\varepsilon}$ – сужение функции u_0 на отрезок $[t_1, t_1 + \delta_\varepsilon]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из работы [9] и основано на применении теоремы 2 к отображению

$$F : L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \times L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \mathbb{R}^m),$$

определяемому через оператор Немыцкого:

$$F(z_1, z_2) = N_f(z_1, Cz_2),$$

$$(N_f(z, x))(t) = f(z(t), x(t), t), \quad (Cz)(t) = \hat{x} + \int\limits_a^t z(s)ds.$$

Теорема доказана.

3. Основной результат. В следующей теореме сформулированы достаточные условия существования равновесия в динамической модели рынка (4).

Теорема 4. *Предположим, что существуют числа* $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\nu > 0$, $\delta \in (0, t_2 - t_1]$ *и функция* $u_0 \in L_\infty([t_1, t_2], P)$ *такие, что выполняются следующие условия:*

1) существует число $\alpha > 0$ *такое, что для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{p}, \nu)$ *отображение* $S(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$ *является условно* α*-накрывающим относительно шаров*

$$U(t) = B_P(u_0(t), R_1), \quad V(p, t) = B_{\mathbb{R}^n_+}(S(u_0(t), p, t), \alpha R_2);$$

2) существует число $\beta > 0$ $(\beta < \alpha)$ *такое, что*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(\tilde{u}, p, t)| \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} |u_i - \tilde{u}_i|$$

для всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, $u, \tilde{u} \in P$ *и для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$;

3) для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ *справедливо условие*

$$0 \in S(U(t), p, t) - D(U(t), p, t);$$

4) существуют числа $0 \leqslant L_S, L_D < \delta\alpha/(q_1 q_0^2)$ *такие, что для всех* $p, \tilde{p} \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, *для всех* $u \in U(t)$ *и для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *выполняются неравенства*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S_i(u, p, t) - S_i(u, \tilde{p}, t)| \leqslant L_S \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|,$$

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(u, \tilde{p}, t)| \leqslant L_D \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|;$$

5) выполняется неравенство $r_0 < R_{\min}$, *где*

$$r_0 := (\alpha - \beta)^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(u_0(t), \bar{p}, t) - D_i(u_0(t), \bar{p}, t)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существуют число* $\delta_\varepsilon \in (0, \delta]$ *и вектор-функция равновесных цен*

$$p^{\delta_\varepsilon} \in AC_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \bar{p}, P)$$

в модели (4) такие, что $\rho_{L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P)}\big(\dot{p}^{\delta_\varepsilon}, u_0^{\delta_\varepsilon}\big) < r_0 + \varepsilon$, *где* $u_0^{\delta_\varepsilon}$ *– сужение функции* u_0 *на отрезок* $[t_1, t_1 + \delta_\varepsilon]$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Psi : P \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t) - D(\dot{p}(t), p(t), t).$$

Для всех $t \in [t_1, t_1 + \delta_\varepsilon] \subseteq [t_1, t_1 + \delta]$ задача

$$D(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t), \quad p(t_1) = \bar{p}$$

равносильна уравнению $F(x, x) = y$ относительно x (скорости изменения цен), где

$$F : L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \times L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \mathbb{R}^n_+),$$

$$F(z_1, z_2) = N_f(z_1, Cz_2), \quad (Cz_2)(t) = \bar{p} + \int\limits_{t_0}^{t} z(s)ds,$$

$$N_f : AC_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \bar{p}, P) \times L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \mathbb{R}^n_+),$$
$$(N_f(z, x))(t) = \Psi(\dot{p}(t), p(t), t).$$

Из условий 1), 2) и теоремы 1 из [7] следует, что существуют положительные числа α, β $(\alpha > \beta)$ такие, что для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ и всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ отображение Ψ является условно $(\alpha - \beta)$-накрывающим относительно шаров $U(t)$ и $V(p, t)$. Кроме того, из условия 4) следует, что существует такое число $L \geqslant 0$, что справедливо неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\Psi_i(u, p, t) - \Psi_i(u, \tilde{p}, t)| \leqslant L \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|$$

для всех $p, \tilde{p} \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, для всех функций $u \in U(t)$ и для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$.

Из условия 3) следует, что $0 \in \Psi(U(t), p, t)$ для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ и всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$.

Из условия 5) имеем оценку

$$r_0 := (\alpha - \beta)^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} \max_{i=\overline{1,n}} |\Psi_i(u_0(t), \bar{p}, t)| < R_{\min}.$$

Наконец, применив теорему 3 из статьи [9] к отображению Ψ, получим утверждение настоящей теоремы. Теорема доказана.

4. Пример, иллюстрирующий основной результат. Рассмотрим модель типа (4), которая обобщает хорошо известную модель Аллена–Эванса:

$$\sigma = (a, b, \gamma, \bar{p}, c_1, c_2, d_1, d_2, t_1, t_2, q_0, q_1, q_2), \tag{13}$$

в которой спрос и предложение определяются формулами

$$D_i(\dot{p}, p, t) = a_i + b_i p_j (\dot{p}_i p_i)^{-1}, \quad S_i(\dot{p}, p, t) = \gamma_i \dot{p}_i p_i (\dot{p}_j p_j)^{-1},$$

где $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $t \in [t_1, t_2]$, а a_i, b_i, γ_i, $i = 1, 2$, – заданные положительные параметры модели.

В рассматриваемой модели приняты следующие естественные ограничения на цены и скорости изменения цен:

$$p_i(t) \in [c_{1i}, c_{2i}], \quad \dot{p}_i(t) \in [d_{1i}, d_{2i}], \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

где $c_{2i} > c_{1i} > 0$, $d_{2i} > d_{1i}$. В начальный момент времени t_1 цены на товары, присутствующие на рынке, определяются вектором

$$\bar{p} := (p_1(t_1), p_2(t_1)) = (\bar{p}_1, \bar{p}_2), \quad \bar{p}_i \in [c_{1i}, c_{2i}], \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Предложение. *Предположим, что модель (13) удовлетворяет условиям (15) и (16). Пусть также параметры этой модели удовлетворяют условию*

$$q_1 q_0^2 \max_{\substack{i,j=1,2 \\ i \neq j}} b_i c_{2i} c_{1j}^{-1} < |\min_{i=1,2} d_{1i}|^3 \max_{\substack{i,j=1,2 \\ i \neq j}} \gamma_i c_{2j} c_{1i}^{-1}.$$

Тогда существует вектор-функция равновесных цен $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ *такая, что*

$$p_i(t) \in [c_{i1}, c_{i2}], \quad \dot{p}_i(t) \in [d_{1i}, d_{2i}], \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Применив теорему Милютина о возмущениях накрывающих отображений из работы [15], получим оценку константы накрывания α отображения $S(\,\cdot\,, p, t) : P \to \to \mathbb{R}^n_+$, где $P = [d_{11}, d_{21}] \times [d_{12}, d_{22}]$:

$$\alpha \leqslant |\min_{i=1,2} d_{1i}|^3 \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} \gamma_i c_{j2} c_{i1}^{-1}.$$

Далее, получив для отображения $D(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$ оценку константы Липшица

$$\beta \geqslant \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} b_i c_{2i} c_{1j}^{-1}$$

и применив теорему 4, получим утверждение предложения.

С помощью теоремы 4 можно получить достаточные условия (в виде легко проверяемых условий на параметры модели) существования положения равновесия и в других динамических моделях рынка, например, в моделях, где предложение описывается нелинейной динамической моделью "затраты–выпуск" (см. [16, 17]), а спрос описывается динамической моделью, обобщающей модель Стоуна.

Заключение. Результаты теории накрывающих и липшицевых отображений, действующих в квазиметрических пространствах, позволяют исследовать модели рынка на предмет существования в них положения равновесия. Для этого в настоящей статье получены достаточные условия разрешимости уравнения $F(x, x) = y$ относительно x для q_0-симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, а также достаточные условия существования локального решения дифференциального уравнения.

Теоремы 2 и 3 получены Арутюновым А.В. при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00863). Теорема 4 получена Павловой Н.Г. при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание 075-00337-20-03, проект 0714-2020-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans G.C.* Mathematical Introduction to Economics. New York, 1930.
2. *Hicks J.* Value and Capital. Oxford, 1939.
3. *Samuelson P.A.* Economics: an Introductory Analysis. New York, 1948.
4. *Allen R.G.D.* Mathematical Economics. London; New York, 1960.
5. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 225–237.
6. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 3–22.
7. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. Вып. 1. С. 89–93.
8. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy S.E.* Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points // SIAM J. Optim. 2015. V. 25. № 2. P. 807–828.
9. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
10. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Накрывающие отображения и точки совпадения // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 129–132.
11. *Wilson W.A.* On quasi-metric spaces // Amer. J. Math. 1931. V. 53. № 3. P. 675–684.

12. *Бахтин И.А.* Принцип сжатых отображений в почти метрических пространствах // Функц. анализ. 1989. Вып. 30. С. 26–37.
13. *Czerwik S.* Contraction mappings in b-metric spaces // Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis. 1993. V. 1. P. 5–11.
14. *Cvetković M., Karapinar E., Rakocević V.* Some fixed point results on quasi-b-metric-like spaces // J. Inequal. Appl. 2015. V. 374. P. 1–17.
15. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. Вып. 6 (204). С. 85–148.
16. *Павлова Н.Г.* Исследование открытой динамической модели Леонтьева с непрерывным временем как линейной динамической системы с управлением // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 111–116.
17. *Pavlova N.G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model // Proc. 11th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow, 2018. P. 510–514.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 05.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1284–1293

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ТРЁХТОЧЕЧНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань, Д. Пылак

Для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами изучены устойчивые компактные разностные схемы с весами $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации. Полученные результаты обобщены на случай уравнения с переменным коэффициентом, квазилинейного и многомерного уравнений. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сильных нормах. Показано, что приведённые в работе тестовые численные расчёты согласуются с теоретическими выводами.

DOI: 10.31857/S0374064122090126, EDN: JTMPGG

Введение. Уравнения гиперболо-параболического типа, например, уравнения электромагнитного поля, зависящие от свойств среды, описывают многие важные физические процессы. Если среда однородна, то в случае её малой проводимости напряжённости электрического и магнитного полей удовлетворяют волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости упомянутые величины удовлетворяют уравнению теплопроводимости [1, с. 440–444]. При описании некоторых физических процессов термодинамики в кристаллических телах, в пористых средах используется математическая модель Каттанео, включающая уравнения гиперболо-параболического типа (см. [2]). Физический и математический смысл сопряжения уравнения гиперболического и параболического типов описывается, например, в работах [3, с. 256; 4–9].

Для приближённого решения нестационарных задач математической физики такого типа наиболее часто использовались разностные или конечно-элементные аппроксимации [3]. В настоящее время наибольший интерес представляет построение компактных схем [2, 10, 11]. Под *компактными схемами* мы понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации, записанные на стандартных для данного уравнения шаблонах.

Основополагающими работами по компактными вычислительным методам порядка аппроксимации $4+2$ (четвёртый порядок по пространственной переменной и второй по временно́й) для параболических и гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами являются работы 50-летней давности А.А. Самарского [12] и А.Н. Валиуллина и В.И. Паасонена [13].

В настоящее время компактные разностные схемы не только построены для новых классов уравнений математической физики типа уравнений Фишера, Клейна–Гордона, но и обобщены на квазилинейные уравнения [14–16].

Данная работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем $4+2$ и $4+4$ порядков точности для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. С использованием метода энергетических неравенств получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$, $C(\overline{\omega}_h)$ или $L_\infty(\omega_h)$. Кроме того, полученные результаты обобщаются на случаи уравнения с переменным коэффициентом, квазилинейного и многомерного уравнений, приводятся результаты тестовых расчётов, подтверждающих повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах. В работе используются обозначения из [3, 17].

1. Математическая модель и её свойства. В области

$$\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}, \quad \overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T], \quad \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma, \quad \Omega = \{0 < x < l\},$$

требуется найти непрерывную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в $\overline{Q}_T$ следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 u)=Lu+f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t\in(0,T],\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\Omega},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\overline{u}_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t\in(0,T].\tag{3}$$

Здесь

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \rho_1>0,\quad \rho_2\geqslant 0,\quad k>0.$$

1.1. Закон сохранения энергии для однородной дифференциальной задачи. Закон сохранения энергии является одним из фундаментальных законов природы, установленных эмпирически. Как правило, они присущи гиперболическим уравнениям. Например, известные уравнения газовой динамики выводятся из соответствующих физических законов сохранения массы, импульса и энергии. Для параболических уравнений чаще используется понятие невозрастания энергии, чем закон сохранения. Тем не менее и в этом случае они также существуют, хотя может быть и не являются очевидными (см. статьи [18, 19]). Пусть $H=L_2(0,l)$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярными произведением и нормой

$$(u,v)=\int\limits_0^l u(x)v(x)\,dx,\quad \|u\|=\sqrt{(u,u)}.$$

Неограниченный самосопряжённый положительно-определённый линейный оператор с областью определения [20]

$$D(A)=\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)\bigcap W_2^2(0,l),$$

плотной в $L_2(0,l)$, задаётся формулой

$$A(v)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad v(0,t)=v(l,t)=0,\quad k(x)\in C^1[0,l],\quad 0<k_1\leqslant k(x)\leqslant k_2.$$

Оператор A отображает множество $D(A)$ на $L_2(0,l)$. Выражение $(v,u)_A=(Av,u)$, $u,v\in D(A)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Пополняя $D(A)$ по норме $\|u\|_A=(u,u)_A^{1/2}$, получаем так называемое энергетическое пространство $H_A\subset H$.

Введём также пространство Лебега $L_2(0,t;H)$ [21, с. 383]. Функция $u(t)$ отображает интервал $(0,t)\subset\mathbb{R}$ в пространство H со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_{L_2(0,t;H)}=\int\limits_0^t(u(\xi),v(\xi))\,d\xi,\quad \|u\|_{L_2(0,t;H)}=(u,u)_{L_2(0,t;H)}^{1/2}.$$

Пусть функция $E(t)$ задана энергетическим соотношением

$$E(t)=2\rho_1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,t;H)}^2+\rho_2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2+\|u\|_A^2.$$

Заметим, что при $t=0$ значение функции $E(0)$ определяется лишь через заданные начальные условия задачи (1)–(3):

$$E(0)=\rho_2\|\overline{u}_0\|_{L_2(0,l)}^2+\|u_0\|_A^2.$$

Теорема 1. *Для решения однородной задачи (1)–(3) при*

$$f(x,t)=0 \quad \text{и} \quad \mu_1(t)=\mu_2(t)=0$$

имеет место закон сохранения

$$E(t)=E(0). \tag{4}$$

Доказательство данного утверждения является тривиальным. Действительно, умножив уравнение (1) скалярно в $L_2(0,l)$ на $2\partial u/\partial t$ и применив формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$2\rho_1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{d}{dt}\left(\rho_2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\|u\|^2_A\right)=0.$$

Интегрируя последнее соотношение на отрезке $[0,t]$, приходим к соотношению (4). Теорема доказана.

1.2. Устойчивость решения задачи по начальным данным и правой части. Понятие устойчивости является составной частью понятия корректности дифференциальной задачи и в общем случае означает непрерывную зависимость решения от входных данных φ, т.е. существование такой постоянной $\rho>0$, не зависящей от решения и входных данных, что для всех φ, $\tilde\varphi$ из некоторого допустимого множества выполняется оценка

$$\|\tilde u-u\|_1\leqslant\rho\|\tilde\varphi-\varphi\|_2,$$

где $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – некоторые нормы, $\tilde u$ – решение той же задачи с возмущёнными входными данными $\tilde\varphi$.

Наиболее часто в качестве константы ρ выбирается одна из величин: $\rho=1$ или $\rho=e^{cT}$, $c=\mathrm{const}>0$. В первом случае имеет место глобальная устойчивость при любом $t\in[0,\infty)$, во-втором – лишь до конечного момента времени.

Оценки глобальной устойчивости решения задачи вида (1)–(3), по-видимому, впервые получены в работе [22].

В данном пункте исследуется устойчивость решения задачи при неоднородных граничных условиях при условии, что это решение существует, единственно и обладает в области $\overline{Q}_T$ всеми необходимыми непрерывными производными.

Теорема 2. *Решение задачи (1)–(3) устойчиво по начальным данным, правой части, и для всех t имеет место априорная оценка*

$$\rho_2\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\tilde u-u)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\|\tilde u(t)-u(t)\|^2_A\leqslant\rho_2\|\tilde u_0-u_0\|^2_{L_2(0,l)}+\int\limits_0^t\|\tilde f(t)-f(0)\|^2\,dt. \tag{5}$$

Оценка (5) получается с помощью применения стандартной техники метода энергетических неравенств.

2. Гиперболо-параболическое уравнение с постоянными коэффициентами.

2.1. Постановка задачи и разностная схема. В области $\overline{Q}_T$ рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(3) с постоянными коэффициентами ρ_1, ρ_2, k.

На равномерной сетке узлов $\overline\omega=\overline\omega_h\times\overline\omega_\tau=\{(x_i,t_n)\in\overline{Q}_T\}$, где $\overline\omega_h=\{x_i=ih,\ 0\leqslant i\leqslant N,\ h=l/N\}=\omega_h\bigcup\{0,l\}$ и $\overline\omega_\tau=\{t_n=n\tau,\ 0\leqslant n\leqslant N_0,\ \tau=T/N_0\}=\omega_\tau\bigcup\{0\}$, заменим дифференциальную задачу разностной схемой с весами

$$\rho_1y_{\bar tt}+\rho_1\frac{h^2}{12}y_{\bar tt\bar xx}+\rho_2y_{\mathring t}+\rho_2\frac{h^2}{12}y_{\mathring t\bar xx}=ky^{(\sigma,\sigma)}_{\bar xx}+\varphi,\quad (x,t)\in\omega, \tag{6}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline\omega_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h, \tag{7}$$

$$y(0,t+\tau)=\mu_1(t+\tau),\quad y(l,t+\tau)=\mu_2(t+\tau),\quad t\in\omega_\tau, \tag{8}$$

где
$$v = v(x_i, t_n) = v_i^n, \quad \hat{v} = v_i^{n+1}, \quad \check{v} = v_i^{n-1}, \quad v_{i\pm1} = v_{i\pm1}^n,$$
$$v_{\bar{t}t} = \frac{\hat{v} - 2v + \check{v}}{\tau^2}, \quad v_{\overset{\circ}{t}} = \frac{\hat{v} - \check{v}}{2\tau}, \quad v_{\bar{x}x} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2},$$
$$v^{(\sigma,\sigma)} = \sigma\hat{v} + (1 - 2\sigma)v + \sigma\check{v} = v + \sigma\tau^2 v_{\bar{t}t}, \quad \sigma \geqslant 0, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x},$$
$$u_1(x) = \overline{u}_0 + \frac{\tau}{2\rho_1}[ku_0'' - \rho_2\overline{u}_0 + f(x, 0)].$$

Пользуясь разложениями (см. [17, гл. II; 23, гл. VII])
$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + O(h^4), \quad v_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + O(\tau^4), \quad v_{\overset{\circ}{t}} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + O(\tau^4),$$
невязку
$$\Psi = -\rho_1 u_{\bar{t}t} - \frac{h^2}{12}\rho_1 u_{\bar{t}t\bar{x}x} - \rho_2 u_{\overset{\circ}{t}} - \frac{h^2}{12}\rho_2 u_{\overset{\circ}{t}\bar{x}x} + k u_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)} + \varphi$$
разностного уравнения (6) можно записать в виде
$$\Psi = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_2\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\right) + O(h^4 + \tau^2),$$
откуда следует
$$\|\Psi\| \leqslant M(h^4 + \tau^2), \quad M = \mathrm{const} > 0. \tag{9}$$
Аналогично для погрешности аппроксимации второго начального условия в (7) имеет место оценка
$$\|\mathring{\Psi}\| = \|u_1 - u_t^0\| \leqslant M_1\tau^2, \quad M_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{10}$$

2.2. Устойчивость по начальным данным и правой части. Для исследования этих вопросов нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма [17, гл. II]. *Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке*
$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$
и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы оценки
$$\lambda_1\|y\|^2 \leqslant \|y_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \lambda_{N-1}\|y\|^2,$$
где
$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} \geqslant \frac{8}{l^2} \quad \text{и} \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}.$$

Заметим, что выражение
$$Q^n = \rho_1\|y_{\bar{t}}\|^2 + c_1\tau^2\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \frac{k}{2}(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|^2),$$
где $c_1 = \sigma - 1/2 - \rho_1 h^2/(12\tau^2)$, при выполнении условия
$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \rho_1\frac{h^2}{12\tau^2} \tag{11}$$
неотрицательно.

С учётом выражения
$$y^{(\sigma,\sigma)} = \frac{\hat{y} + \check{y}}{2} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}t}$$

разностную схему (6) можно представить в виде

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} - \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1 \frac{h^2}{12\tau^2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}t\bar{x}x} + \rho_2 y_{\overset{\circ}{t}} + \rho_2 \frac{h^2}{12} y_{\overset{\circ}{t}\bar{x}x} = k\frac{\hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}}{2} + \varphi. \qquad (12)$$

Умножая (12) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}}$ и применяя первую разностную формулу Грина и лемму, получаем следующие оценки:

$$2\tau(y_{\overset{\circ}{t}}, \rho_1 y_{\bar{t}t}) = \rho_1\tau\left(y_t + y_{\bar{t}}, \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau}\right) = \rho_1\|y_t\|^2 - \rho_1\|y_{\bar{t}}\|^2, \qquad (13)$$

$$-2\tau\left(y_{\overset{\circ}{t}}, \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1\frac{h^2}{12\tau^2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}t\bar{x}x}\right) = \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1\frac{h^2}{12\tau^2}\right)\tau^2(\|y_{t\bar{x}}]|^2 - \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2), \qquad (14)$$

$$2\tau(y_{\overset{\circ}{t}}, \rho_2 y_{\overset{\circ}{t}}) = 2\rho_2\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2, \qquad (15)$$

$$2\tau\left(y_{\overset{\circ}{t}}, \rho_2\frac{h^2}{12}y_{\overset{\circ}{t}\bar{x}x}\right) = -\rho_2\frac{\tau h^2}{6}\|y_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}]|^2 \geqslant -\rho_2\frac{2\tau}{3}\|y_{\overset{\circ}{t}}]|^2, \qquad (16)$$

$$2\tau\left(y_{\overset{\circ}{t}}, k\frac{\hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}}{2}\right) = \frac{k}{2}(\hat{y} - \check{y}, \hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}) = -\frac{k}{2}(\|\hat{y}_{\bar{x}}]|^2 + \|y_{\bar{x}}]|^2) + \frac{k}{2}(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|^2), \qquad (17)$$

$$2\tau(y_{\overset{\circ}{t}}, \varphi) \leqslant \tau\rho_2\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2 + \frac{\tau}{\rho_2}\|\varphi\|^2. \qquad (18)$$

Из (12)–(18) приходим к соотношению

$$\frac{\rho_2}{3}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2 + Q^{n+1} \leqslant Q^n + \frac{\tau}{\rho_2}\|\varphi^n\|^2,$$

или

$$Q^{n+1} \leqslant Q^n + \frac{\tau}{\rho_2}\|\varphi^n\|^2.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (11). Тогда разностная схема (6)–(8) абсолютно устойчива по начальным данным, правой части, и для её решения имеет место априорная оценка*

$$Q^{n+1} \leqslant Q^1 + \frac{\tau}{\rho_2}\sum_{k=1}^{n}\|\varphi^k\|^2. \qquad (19)$$

2.3. Сходимость разностной схемы. Подставив $z + u$ в (6)–(8) вместо y, где u – решение задачи (1)–(3), получаем для погрешности z задачу

$$\rho_1 z_{\bar{t}t} + \rho_1\frac{h^2}{12}z_{\bar{t}t\bar{x}x} + \rho_2 z_{\overset{\circ}{t}} + \rho_2\frac{h^2}{12}z_{\overset{\circ}{t}\bar{x}x} = kz^{(\sigma,\sigma)}_{\bar{x}x} + \Psi, \quad (x,t)\in\omega,$$

$$z(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad z_t(x,0) = \overset{\circ}{\Psi}, \quad x\in\omega_h,$$

$$z(0,t+\tau) = 0, \quad z(l,t+\tau) = 0, \quad t\in\omega_\tau.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (11). Тогда решение разностной схемы (6)–(8) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) и имеет место оценка*

$$\max_{t_n\in\overline{\omega}_\tau}\|y^n - u^n\|_C \leqslant M_2(h^4 + \tau^2), \quad M_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Применим теорему 3 для оценки погрешности метода. Тогда из оценок (9), (10), неравенства (19) и из неравенства теоремы вложения [17, гл. II]

$$\|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\overline{x}}]|$$

получим следующую оценку:

$$\|y^n-u^n\|_C \leqslant \sqrt{\frac{l}{2k}}\left\{\sqrt{\rho_1}\|\mathring{\Psi}\|+\tau\sqrt{c_1+\frac{k}{2}}\|\mathring{\Psi}_{\overline{x}}]|+\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}\max_{t\in\omega_\tau}\|\Psi(t)\|\right\} \leqslant M_2(h^4+\tau^2).$$

Следовательно, разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени. Теорема доказана.

Замечание 1. Заменяя разностное уравнение (6) уравнением

$$\left(\rho_1+\frac{\rho_2^2}{\rho_1}\frac{\tau^2}{12}\right)y_{\overline{t}t}+\rho_2 y_{\mathring{t}}+\rho_2\left(\frac{h^2}{12}-\frac{k}{\rho_1}\frac{\tau^2}{12}\right)y_{\mathring{t}\overline{x}x}=ky^{(\overline{\sigma},\overline{\sigma})}_{\overline{x}x}+\varphi \tag{20}$$

и аппроксимацию второго начального условия в (7) разностным уравнением

$$y_t(x,0)=u_1(x)=\left(1-\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^2}{6}-\frac{\tau^3}{24}\right)\overline{u}_0(x)+\left(\frac{\tau}{2}-\frac{\tau^2}{6}+\frac{\tau^3}{24}\right)u_0''+\left(\frac{\tau^2}{6}-\frac{\tau^3}{12}\right)\overline{u}_0''+\frac{\tau^3}{24}u_0^{(4)}+$$

$$+\left(\frac{\tau}{2}-\frac{\tau^2}{6}+\frac{\tau^3}{24}\right)f(x,0)+\left(\frac{\tau^2}{6}-\frac{\tau^3}{24}\right)\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)+\frac{\tau^3}{24}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)(x,0),\quad x\in\omega_h, \tag{21}$$

где

$$\overline{\sigma}=\frac{1}{12}\left(1-\frac{\rho_1}{k}\frac{h^2}{\tau^2}\right),\quad \varphi=f+\frac{h^2}{12}f_{\overline{x}x}+\frac{\tau^2}{12}f_{\overline{t}t}+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\tau^2}{12}f_{\mathring{t}},$$

получаем схему с четвёртым порядком аппроксимации $\Psi=O(h^4+\tau^4)$. Легко доказать, что разностная схема (20) с разностными условиями (7), (8), (21) устойчива при $\gamma=a\tau/h=1$, $a=\sqrt{k}/\sqrt{\rho_1}$, т.е. при $\tau=(\sqrt{\rho_1}/\sqrt{k})h$. Отсюда следует, что если число $\rho_1=0$ (остаётся только параболическое уравнение), то устойчивость есть только при $\tau=0$. Таким образом, схема четвёртого порядка аппроксимации для параболического уравнения всегда неустойчива.

Замечание 2. Далее обобщаем компактные разностные схемы $4+2$ порядка аппроксимации на другие случаи гиперболо-параболического уравнения, такие как уравнение с переменным коэффициентом, квазилинейные и многомерные уравнения.

а. Уравнение с переменным коэффициентом. Рассмотрим дифференциальную задачу (1)–(3) с переменным коэффициентом $k(x,t)\geqslant k_1>0$. На равномерной сетке $\overline{\omega}$ следующая разностная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком погрешности $O(h^4+\tau^2)$:

$$\rho_1 y_{\overline{t}t}+\rho_1\frac{h^2}{12}\Lambda(qy_{\overline{t}t})+\rho_2 y_{\mathring{t}}+\rho_2\frac{h^2}{12}\Lambda(qy_{\mathring{t}})=\Lambda y^{(\sigma,\sigma)}+\varphi,\quad (x,t)\in\omega,$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h,$$

$$y(0,t+\tau)=\mu_1(t+\tau),\quad y(l,t+\tau)=\mu_2(t+\tau),\quad t\in\omega_\tau,$$

где

$$\Lambda y=(ay_{\overline{x}})_x,\quad a=a(x,t)=6[q(x-h,t)+4q(x-h/2,t)+q(x,t)]^{-1},\quad q=\frac{1}{k},$$

$$\varphi=f+\frac{h^2}{12}\Lambda(qf),\quad u_1(x)=\overline{u}_0(x)+\frac{\tau}{2\rho_1}([k(x,0)u_0'(x)]'-\rho_2\overline{u}_0(x)+f(x,0)).$$

б. Квазилинейное уравнение. В области $\overline{Q}_T$ для квазилинейного гиперболо-параболического уравнения

$$\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=L\phi(u)+f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t\in(0,T],\tag{22}$$

рассмотрим начально-краевую задачу (2), (3) с условием $\phi'_u=k(u)\geqslant k_1>0$. Здесь $Lv=\partial^2v/\partial x^2$, $\rho_1>0$, $\rho_2\geqslant 0$.

На сетке узлов $\overline{\omega}$ напишем для дифференциальной задачи (22), (2), (3) следующую компактную разностную схему с весами:

$$\rho_1 y_{\bar{t}t}+\rho_1\frac{h^2}{12}y_{\bar{t}t\bar{x}x}+\rho_2 y_{\mathring{t}}+\rho_2\frac{h^2}{12}y_{\mathring{t}\bar{x}x}=(\phi(y))^{(\sigma,\sigma)}_{\bar{x}x}+\varphi,\quad (x,t)\in\omega,\tag{23}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h,\tag{24}$$

$$y(0,t+\tau)=\mu_1(t+\tau),\quad y(l,t+\tau)=\mu_2(t+\tau),\quad t\in\omega_\tau,\tag{25}$$

где

$$\varphi=f+\frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x},$$

$$u_1(x)=\overline{u}_0(x)+\frac{\tau}{2\rho_1}[L\phi(u_0(x))-\rho_2\overline{u}_0(x)+f(x,0)].$$

Аналогично случаю с постоянными коэффициентами нетрудно показать, что для погрешности аппроксимации разностной схемы (23)–(25) имеют место оценки

$$\|\Psi\|\leqslant M_1(h^4+\tau^2),\quad \|\mathring{\Psi}\|\leqslant M_2\tau^2,\quad M_1,\quad M_2 - \text{положительные константы.}$$

Для реализации этой схемы необходимо использовать итерационный метод Ньютона.

в. Многомерные уравнения. Пусть $\overline{G}=\{x=(x_1,\ldots,x_p),\ 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=\overline{1,p}\}$ является p-мерным прямоугольным параллелепипедом с границей Γ, т.е. $\overline{G}=G\bigcup\Gamma$. В цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$ для многомерного гиперболо-параболического уравнения

$$\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u+f(x,t),\quad x\in G,\quad t\in(0,T],\tag{26}$$

рассмотрим смешанную задачу

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\overline{u}_0(x),\quad x\in G,\tag{27}$$

$$u(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad t\in(0,T],\tag{28}$$

где

$$L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

k_α – положительные постоянные, $\alpha=\overline{1,p}$.

В параллелепипеде $\overline{G}$ построим разностную сетку $\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,\ldots,i_ph_p),\ i_\alpha=\overline{0,N_\alpha},\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=\overline{1,p}\}=\omega_h\bigcup\gamma_h$ и равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=\overline{0,N_0},\ \tau N_0=T\}$. Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь $\gamma_h=\{x_i\in\Gamma\}$ – множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, которые принадлежат границе Γ. На построенной сетке $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ исходную задачу (26)–(28) аппроксимируем компактной разностной схемой

$$\rho_1 y_{\bar{t}t}+\rho_1\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha y_{\bar{t}t}+\rho_2 y_{\mathring{t}}+\rho_2\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha y_{\mathring{t}}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y^{(\sigma,\sigma)}+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta y^{(\sigma,\sigma)}+\varphi,\quad (x,t)\in\omega,\tag{29}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h, \tag{30}$$

$$y(x,t+\tau)=\mu(x,t+\tau),\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau, \tag{31}$$

где

$$\Lambda_\alpha y=k_\alpha y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha},\quad \varphi=f+\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha f,\quad u_1(x)=\overline{u}_0(x)+\frac{\tau}{2\rho_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u_0(x)-\rho_2\overline{u}_0(x)+f(x,0)\right].$$

Легко показать, также как и в рассмотренных выше случаях, что разностная схема (29)–(31) аппроксимирует исходную задачу (26)–(28) с четвёртым порядком относительно пространственных переменных и со вторым относительно временно́й, т.е.

$$\|\Psi\|\leqslant M_1(|h|^4+\tau^2),\quad \|\mathring{\Psi}\|\leqslant M_2\tau^2,\quad |h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2},$$

M_1, M_2 – положительные константы.

Компактные разностные схемы $4{+}2$ порядка аппроксимации для уравнения с переменным коэффициентом и квазилинейного уравнения в многомерном случае строятся так же, как и в работах [15, 16].

3. Тестовые расчёты. В этом пункте приводятся результаты численных расчётов при решении начально-краевой задачи (1)–(3) для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. Начальные и краевые условия, правая часть уравнения определяются из точного решения

$$u(x,t)=e^{t+x}+e^{t-x}.$$

Здесь параметры задачи выбираются следующими: $\rho_1=\rho_2=1/2$, $k=1$, $l=T=1$.

Через $\|z\|_{L_\infty}$ и $\|z\|_{L_2}$ обозначим в нормах $L_\infty=C$ и L_2 погрешность метода, полученную на последнем временно́м слое $t_n=T$:

$$\|z\|_{L_\infty}=\max_{0\leqslant i\leqslant N}|y_i-u_i|,\quad \|z\|_{L_2}=\left(\sum_{i=1}^{N-1}h|y_i-u_i|^2\right)^{1/2}.$$

На рисунке численное решение и погрешность получены при $\sigma=1$, $h=0.025$ и $\tau=0.03125$.

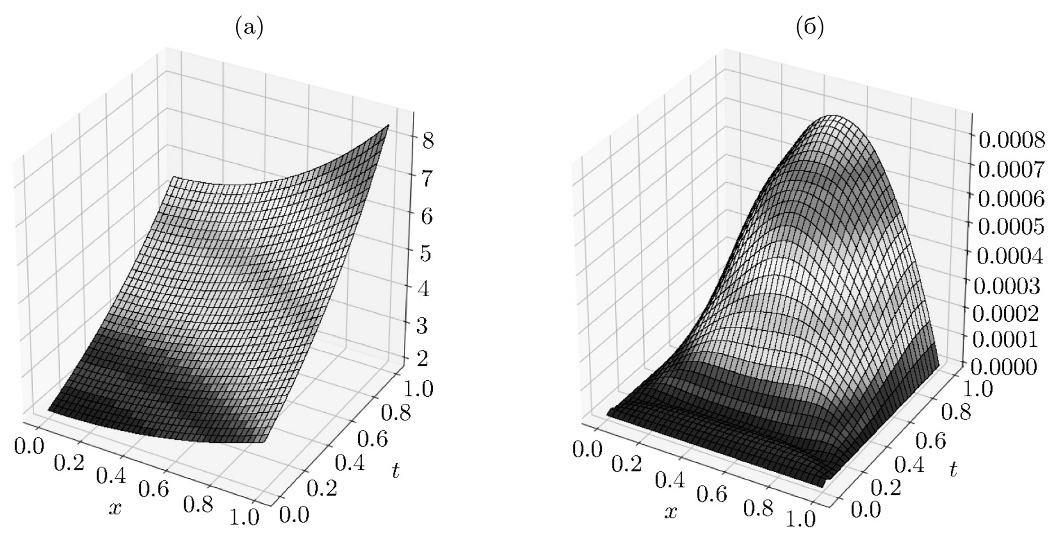

Рисунок. Численное решение (а) и погрешность (б) метода.

Порядок скорости сходимости по пространственной (p^h) и временно́й (p^τ) переменным определяется по следующим формулам:

$$p^h = \log_2 \frac{\|z(2h,\tau)\|}{\|z(h,\tau)\|}, \quad p^\tau = \log_2 \frac{\|z(h,2\tau)\|}{\|z(h,\tau)\|}. \tag{32}$$

Полученные результаты расчётов представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Скорость сходимости по временно́му направлению $(h = 0.0005)$

$\tau = 0.125$	$\|z\|_{L\infty}$	$p^\tau_{L\infty}$	$\|z\|_{L2}$	p^τ_{L2}
τ	1.35E-02	–	9.69E-03	–
$\tau/2^1$	3.12E-03	2.11653	2.32E-03	2.06053
$\tau/2^2$	7.75E-04	2.00861	5.63E-04	2.04528
$\tau/2^3$	1.93E-04	2.00648	1.39E-04	2.01826
$\tau/2^4$	4.81E-05	2.00472	3.45E-05	2.00731
$\tau/2^5$	1.20E-05	2.00222	8.62E-06	2.00325

Таблица 2. Скорость сходимости по пространственному направлению

$h = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\|z\|_{L\infty}$	$p^h_{L\infty}$	$\|z\|_{L2}$	p^h_{L2}
h	τ	8.58E-03	–	6.14E-03	–
$h/2^1$	$\tau/4^1$	4.95E-04	4.1163	3.58E-04	4.0992
$h/2^2$	$\tau/4^2$	3.07E-05	4.00832	2.21E-05	4.019
$h/2^3$	$\tau/4^3$	1.92E-06	4.00279	1.38E-06	4.00361
$h/2^4$	$\tau/4^4$	1.20E-07	3.99829	8.62E-08	3.99816
$h/2^5$	$\tau/4^5$	8.07E-09	3.89302	5.80E-09	3.89234

При рассмотрении порядка скорости сходимости по τ (табл. 1) в расчётах учитывалось выполнение неравенства $h^4 \leqslant \tau^2$, в результате чего можно было применять второе правило Рунге (32).

Так как разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по h и вторым по τ, то при рассмотрении порядка скорости сходимости по пространственному значению (табл. 2) шаги h и τ либо уменьшаются в два и четыре раза соответственно, либо выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $h^4 \geqslant \tau^2$. Тогда можно применить первое правило Рунге (32).

Значения порядка p, представленные в табл. 2, близки к четвёртому. Это означает, что построенная схема имеет четвёртый порядок точности по пространственной переменной.

Таким образом, проведённые тестовые расчёты согласуются с теоретическими выводами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Dover; New York, 1990.
2. *Huang Ya., Yin Zh.* The compact finite difference method of two–dimensional Cattaneo model // J. Funct. Spaces. 2020. V. 1. P. 1–12.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
4. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 954–962.
6. *Korzyuk V.I., Lemeshevskii S.V., Matus P.P.* Conjugation problem about jointly separate flow of viscoelastic and viscous fluids in the plane duct // Math. Model. Anal. 1999. V. 4. № 1. P. 114–123.
7. *Корзюк В.И., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Задача сопряжения о совместно-раздельном течении вязкоупругой и вязкой жидкостей в плоской трубе // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 5–8.

8. *Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В.* Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Мат. моделирование. 2010. Т. 22. № 4. P. 99–109.
9. *Врагов В.Н.* О смешанной задаче для одного класса гиперболо-параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 273–276.
10. *Vong S.W., Pang H.K., Jin X.Q.* A high–order difference scheme for the generalized Cattaneo equation // East Asian J. Appl. Math. 2012. V. 2. № 2. P. 170–184.
11. *Zhao X., Sun Z.Z.* Compact Crank–Nicolson schemes for a class of fractional Cattaneo equation in inhomogeneous medium // J. Sci. Comput. 2015. V. 62. № 3. P. 747–771.
12. *Самарский А.А.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
13. *Валиуллин А.Н., Паасонен В.И.* Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Численные методы механики сплошной среды. 1970. Т. 1. № 1. С. 17–30.
14. *Матус П.П., Утебаев Б.Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.
15. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Анъ.* Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 963–975.
16. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Анъ.* Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 120–138.
17. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
18. *Lapinska-Chrzczonowicz M., Matus P.* Exact difference scheme and difference scheme of higher order of approximation for a convection–diffusion equation. I // Ann. UMCS. Informatica AI. 2013. V. 13. № 1. P. 37–51.
19. *Матус П.П., Чурбанова Н.Г., Щадинский Д.А.* О роли законов сохранения и входных данных при возникновении режимов с обострением в квазилинейных многомерных параболических уравнениях с нелинейным источником и их аппроксимациях // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 981–989.
20. *Йованович Б.С., Матус П.П.* Коэффициентная устойчивость дифференциально-операторных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1371–1377.
21. *Wloka J.* Partial Differential Equations. Cambridge, 1987.
22. *Jovanovic B., Lemeshevsky S., Matus P.* On the stability of differential-operator equations and operator-difference schemes as $t \to \infty$ // Comput. Meth. Appl. Math. 2002. V. 2. № 2. P. 153–170.
23. *Валиуллин А.Н.* Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск, 1973.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет имени Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша,
Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
После доработки 22.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1294–1296

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.5

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Предложен метод решения задачи апостериорного оценивания начального состояния линейной сингулярно возмущённой динамической системы.

DOI: 10.31857/S0374064122090138, EDN: JTNAYU

Пусть поведение динамической системы на конечном промежутке времени $T = [0, t_1]$ описывается уравнениями

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z, \quad \mu_0 \dot{z} = A_3 y + A_4 z, \tag{1}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, A_1, A_2, A_3, A_4 – постоянные матрицы соответствующих размеров, μ_0 – некоторый малый положительный параметр. Будем считать, что матрица A_4 является устойчивой (действительные части всех её собственных значений отрицательны).

Предположим, что начальное состояние $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ системы (1) неизвестно и принадлежит множеству X_0, которое имеет вид

$$X_0 = \{(y_0, z_0): \ y_0 \in \mathbb{R}^n, \ \ z_0 \in \mathbb{R}^m, \ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*, \ \ d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*\},$$

где c_*, c^* и d_*, d^* – заданные векторы из пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Множество X_0 назовём *априорным распределением* начального состояния системы (1).

Далее за поведением системы будем следить с помощью выходных сигналов измерительного устройства

$$w(t) = l_1' y(t) + l_2' z(t) + \chi(t), \tag{2}$$

которое в каждый момент времени $t \in T$ с ошибкой $\chi(t)$ измеряет проекцию состояния $(y(t), z(t))$ системы (1) на направление (l_1, l_2), $l_1 \in \mathbb{R}^n$, $l_2 \in \mathbb{R}^m$ (символ "штрих"в формуле (2) означает операцию транспонирования). Отметим, что ошибками измерения $\chi(t)$, $t \in T$, могут быть любые кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\chi_* \leqslant \chi(t) \leqslant \chi*, \quad t \in T.$$

Пусть из устройства (2) принят сигнал $w(t)$, $t \in T$, в котором содержится информация о начальном состоянии (y_0, z_0), позволяющая уменьшить исходную неопределённость, т.е. вместо априорного распределения начального состояния, принадлежащего множеству X_0, рассматриваем апостериорное распределение, принадлежащее множеству $X(t_1)$. Оно включает те и только те элементы $(y_0, z_0) \in X_0$, которые способны вместе с некоторыми допустимыми ошибками измерения породить наблюдаемый сигнал $w(t)$, $t \in T$.

Множество $X(t_1)$ в общем случае имеет сложную структуру. Однако в конкретных задачах оптимизации системы (1) достаточно знать лишь определённые числовые характеристики этого множества. Одной из таких важнейших характеристик является его протяжённость в направлении заданного вектора (h_1, h_2), $h_1 \in \mathbb{R}^n$, $h_2 \in \mathbb{R}^m$, т.е.

$$\max\{h_1' y_0 + h_2' z_0\}, \quad (y_0, z_0) \in X(t_1). \tag{3}$$

Опишем метод решения задачи (3).

Пусть решение $(y(t), z(t))$, $t \in T$, системы (1) с начальным состоянием $y(0) = y_0$, $x(0) = z_0$ имеет вид

$$y(t) = F_1(t)y_0 + F_2(t)z_0, \quad z(t) = F_3(t)y_0 + F_4(t)z_0,$$

где $F_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, $t \in T$, – матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$\begin{pmatrix} \dot F_1 & \dot F_2 \\ \dot F_3 & \dot F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{1}{\mu_0}A_3 & \dfrac{1}{\mu_0}A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причём $\begin{pmatrix} F_1(0) & F_2(0) \\ F_3(0) & F_4(0) \end{pmatrix} = E_{n+m}$.

Тогда задачу (3) можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi_0(y_0, z_0) = h_1'y_0 + h_2'z_0 \to \max, \\ b_*(t) \leqslant a_1'(t)y_0 + a_2'(t)z_0 \leqslant b^*(t), \quad t \in T, \\ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*, \quad d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*, \end{gathered} \tag{5}$$

где $b_*(t) = w(t) - \chi^*$, $b^*(t) = w(t) - \chi_*$, $a_1'(t) = l_1'F_1(t) + l_2'F_3(t)$, $a_2'(t) = l_1'F_2(t) + l_2'F_4(t)$, $t \in T$.

Задача (5) является линейной полубесконечной экстремальной задачей с конечным числом переменных и континуумом ограничений. Метод решения подобных задач описан в работе [1].

Начальное состояние $(\tilde y_0, \tilde z_0)$ назовём *решением задачи* (5), если на нём выполняются ограничения и целевая функция достигает максимума. Построение этого состояния $(\tilde y_0, \tilde z_0)$ является сложной экстремальной задачей.

Отметим, что в общем случае начальное состояние $(\tilde y_0, \tilde z_0)$ зависит от параметра μ_0 $(\tilde y_0 = \tilde y_0(\mu_0),\ \tilde z_0 = \tilde z_0(\mu_0))$.

Исходя из поставленной задачи и следуя основному принципу асимптотических методов решения таких задач, вместо одной системы (1) с фиксированным значением параметра μ_0 рассматривается семейство систем

$$\dot y = A_1y + A_2z, \quad \mu\dot z = A_3y + A_4z \tag{6}$$

при $\mu \to 0$.

Тогда задача (5) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \varphi(y_0, z_0) = h_1'y_0 + h_2'z_0 \to \max, \\ b_*(t) \leqslant a_1'(t,\mu)y_0 + a_2'(t,\mu)z_0 \leqslant b^*(t), \quad t \in T, \\ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*, \quad d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*, \end{gathered} \tag{7}$$

где $b_*(t) = w(t) - \chi^*$, $b^*(t) = w(t) - \chi_*$, $a_1'(t,\mu) = l_1'F_1(t,\mu) + l_2'F_3(t,\mu)$, $a_2'(t,\mu) = l_1'F_2(t,\mu) + l_2'F_4(t,\mu)$, $t \in T$; $F_i(t,\mu)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, – матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (4) с заменой в нём параметра μ_0 на μ $(\mu > 0)$.

В данном случае применение метода, описанного в работе [1], вызывает серьёзные трудности, поскольку система дифференциальных уравнений (6) при малом μ является жёсткой (см. [2, с. 11–19]). В связи с этим предлагается использовать метод декомпозиции задачи (7) на две задачи меньшей размерности [3, с. 39–53].

Определение. Вектор $(\bar y_0, \bar z_0)$, $\bar y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar z_0 \in \mathbb{R}^m$, назовём *решением задачи* (7), если:

1) найдётся число $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \to 0)$ такое, что $|\varphi(\bar y_0, \bar z_0) - \varphi_0(\tilde y_0, \tilde z_0)| \leqslant \varepsilon$;

2) $\max\limits_{t\in T}\{a_1'(t,\mu)\bar y_0 + a_2'(t,\mu)\vec z_0 - b^*(t),\ b_*(t) - a_1'(t,\mu)\bar y_0 - a_1'(t,\mu)\bar z_0, 0\} = O(\mu)$;

3) $c_* \leqslant \bar y_0 \leqslant c^*$, $d_* \leqslant \bar z_0 \leqslant d^*$.

Применив метод пограничных функций [3, с. 11–16], получим

$$a_1'(t,\mu)y_0 + a_1'(t,\mu)z_0 = (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)F_0(t)y_0 + l_2'G(s)A_4^{-1}A_3y_0 + l_2'G(s)z_0 + \eta(t,\mu),$$

где $\max\limits_{t\in T}|\eta(t,\mu)| = O(\mu)$; $F_0(t)$, $t\in T$, $G(s)$, $s = t/\mu$, $s\geqslant 0$, – матричные функции размеров $n\times n$ и $m\times m$ соответственно, являющиеся решением начальных задач

$$\dot F_0 = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)F_0, \quad F_0(0) = E_n;$$

$$\frac{dG}{ds} = A_4G, \quad G(0) = E_m. \qquad (8)$$

Заметим, что в силу уравнения (8) и того, что матрица A_4 является устойчивой, имеет место оценка $||G(s)||\leqslant \alpha\exp(-\beta s)$, $s\geqslant 0$, где α, β – некоторые положительные числа. Тогда найдётся число $s^*>0$ такое, что $||l_2'G(s)||\leqslant\mu$ при $s\geqslant s^*$.

На первом этапе алгоритма с помощью метода, описанного в статье [1], решается следующая задача:

$$\begin{gathered} h_1'y_0\to\max,\\ b_*(t)\leqslant (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)F_0(t)y_0\leqslant b^*(t), \quad t\in[\mu s^*, t_1],\\ c_*\leqslant y_0\leqslant c^*. \end{gathered} \qquad (9)$$

Отметим, что подобная задача была решена в работе [4].

Второй этап алгоритма состоит в решении задачи

$$\begin{gathered} h_2'z_0\to\max,\\ b_*(\mu,s) - g(s)\leqslant l_2'G(s)z_0\leqslant b^*(\mu,s) - g(s), \quad s\in[0,s^*],\\ d_*\leqslant z_0\leqslant d^*, \end{gathered} \qquad (10)$$

где $g(s) = l_2'G(s) = A_4^{-1}\bar y_0 + (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)\bar y_0$.

Считаем, что решения $\bar y_0$ и $\bar z_0$ задач (9) и (10) соответственно являются невырожденными (см. [1]).

Нетрудно убедиться в том, что вектор $(\bar y_0, \bar z_0)$ есть решение задачи (7).

Пусть τ – текущий момент времени из промежутка T. Предположим, что к этому моменту записан сигнал измерительного устройства $w(t)$, $t\in[0,\tau]$. Устройство, решающее задачу в режиме реального времени, где вместо T берётся $T(\tau) = [0,\tau]$, назовём *оптимальным эстиматором* для системы (1). Алгоритм работы оптимального эстиматора описан в [1], однако в данном случае реализация этого алгоритма затруднена из-за жёсткости интегрирования систем, поэтому имеет смысл ограничиться построением оптимального эстиматора по предложенной выше схеме. Для решения задач вида (9), (10) в режиме реального времени, где вместо значения t_1 берётся $\tau\in[\mu s^*, t_1]$, можно использовать алгоритм, описанный в книге [2, с. 142–200].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кирилова Ф.М., Костюкова О.И.* Построение оптимальных эстиматоров для линейных динамических систем // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1. 1992. № 2. С. 45–49.
2. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жёстких систем. М., 1979.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М., 1973.
4. *Крахотко В.В., Размыслович Г.П.* Построение асимптотического решения задачи оптимального наблюдения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 264–269.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
После доработки 05.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.