

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

П И С Ь М А
В
ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

том 111

Выпуск 9

10 мая 2020

*Журнал издается под руководством
Отделения физических наук РАН*

Главный редактор В. М. Пудалов

Заместители главного редактора

Г. Е. Воловик, В. П. Пастухов

Зав. редакцией *И. В. Подыниглазова*

Адрес редакции 119334 Москва, ул. Косыгина 2

тел./факс (499)-137-75-89

e-mail letters@kapitza.ras.ru

Web-страница <http://www.jetpletters.ac.ru>

Интернет-версия английского издания
<http://www.springerlink.com/content/1090-6487>

© Российская академия наук, 2020

© Редколлегия журнала “Письма в ЖЭТФ” (составитель), 2020

Нелинейная динамика оптического параметрического осциллятора на диполяритонах

О. Ф. Васильева¹⁾, А. П. Зинган, В. В. Васильев

Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, МД 3300 Тирасполь, Молдова

Поступила в редакцию 29 марта 2020 г.

После переработки 29 марта 2020 г.

Принята к публикации 5 апреля 2020 г.

Изучена динамика диполяритонных состояний в планарном микрорезонаторе при накачке состояния, отвечающего средней диполяритонной ветви. При этом накачка осуществляется двумя лазерными импульсами с близкими частотами. Показано, что в условиях точного резонанса имеют место аперриодические и периодические режимы превращения диполяритонов накачки в диполяритоны холостых и сигнальных мод.

DOI: 10.31857/S1234567820090013

Смешанные экситон-фотонные состояния в планарных полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных состояний с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора, в результате чего формируются верхняя и нижняя микрорезонаторные экситон-поляритонные моды. Большой интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. В [14–18] при исследовании свойств оптического параметрического экситон-поляритонного осциллятора использовались два одинаковых фотона накачки на нижней ветви закона дисперсии. Однако в [19, 20] было показано, что два различных пучка накачки можно конвертировать в два вырожденных на частоте фотонов сигнальной и холостой мод. Наличие двух различных пучков накачки дает большие возможности для генерации сигнального и холостого пучков с наперед заданными свойствами. В [21–23] теоретически изучена динамика поляритонов, когда накачка осуществляется двумя лазерами с близкими частотами. Найдены аперриодические и периодические режимы превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод. Показано, что введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы.

В [24] впервые наблюдалась новая квазичастица-диполяритон – бозонная частица, которая образуется в связанных двойных квантовых ямах в микрорезонаторе. По сравнению с экситон-поляритоном диполяритон является суперпозицией фотона микрорезонатора, прямого и непрямого экситона. Здесь прямой экситон является связанным состоянием электронно-дырочной пары одной и той же ямы, а не прямой экситон образуется путем связывания электрона и дырки соседних ям. Связанное состояние фотона микрорезонатора с прямым и непрямым экситонами приводит к формированию собственных мод системы с тремя ветвями закона дисперсии, нижней, средней и верхней диполяритонными ветвями [25]. Благодаря большому дипольному моменту диполяритона он был предложен в качестве идеальной квазичастицы для генерации терагерцового излучения [26–32].

В [33] была изучена динамика экситон-диполяритонного осциллятора в синфазном режиме по двум каналам рассеяния. Показано, что в условиях точного резонанса имеет место аперриодический режим превращения диполяритонов накачки в диполяритоны холостых и сигнальных мод. В [34] была исследована динамика диполяритонных состояний по трем каналам рассеяния. Показано, что в зависимости от начальной разности фаз и начальных плотностей диполяритонов накачки, сигнальной и холостой моды возможны периодические, аперриодические режимы эволюции, а также покой системы, при отличном от нуля периоде колебаний (накачка осуществлялась в одной точке закона дисперсии). В [35] было предложено использование диполяритонов для генерации терагерцового излучения, за счет возбуждения системы двумя

¹⁾e-mail: florina_of@mail.ru

различными по частоте лазерными импульсами (накачкой).

Цель данного сообщения – изучить динамику диполяритонных возбуждений в режиме параметрического осциллятора на временах, намного меньших времени релаксации возбуждений среды при накачке средней ветви в двух близких по энергии точках закона дисперсии. Мы будем считать, что оба пучка накачки различаются по амплитуде (интенсивности), однако энергии фотонов различаются слабо. Мы считаем, что с помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных диполяритонов. Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования диполяритонов. Квантовая яма вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропусканием, отражением и потерями [24–31, 36]. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации вторичных субимпульсов излучения.

Рассмотрим ситуацию, когда диполяритоны большой плотности возбуждаются на средней ветви закона дисперсии (рис. 1) двумя мощными импульсами

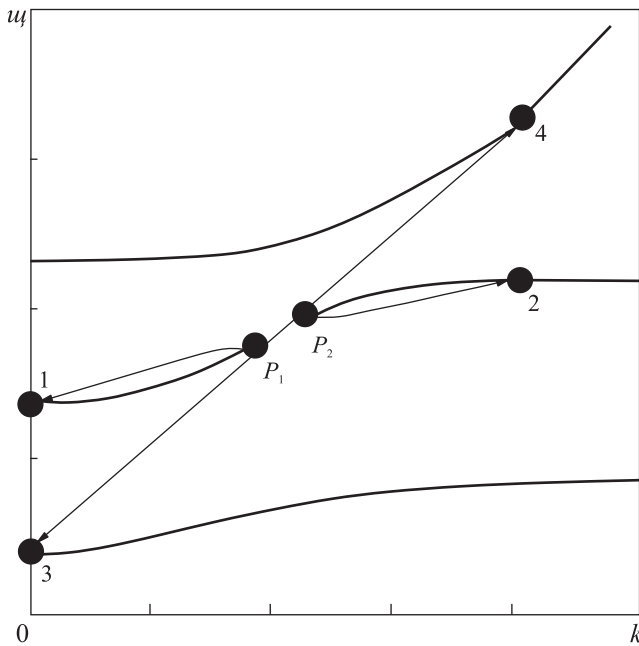


Рис. 1. Энергетическая схема диполяритонов

лазерного излучения (накачкой) [25]. При этом возможны три канала рассеяния диполяритонов, удовлетворяющие законам сохранения энергии и импульса. Один из них – это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием диполяритонов сиг-

нальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии. Другой канал – это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием сигнального диполяритона на нижней ветви и холостого диполяритона на верхней ветви закона дисперсии. Наконец, третий канал – это рассеяние сигнального и холостого диполяритонов средней ветви в сигнальный диполяритон нижней ветви и холостой диполяритон верхней ветви. При больших уровнях возбуждения плотности диполяритонов на указанных модах могут быть достаточно большими. Переходы по каждому из указанных каналов могут происходить как в прямом, так и в обратном направлениях. Это и определяет динамику изменения плотностей диполяритонов на каждой моде. Гамильтониан взаимодействия, описывающий процесс параметрического рассеяния *pump*-диполяритонов в диполяритоны сигнальной и холостой мод, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & \hbar g_1 (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_2 \hat{a}_1) + \\ & + \hbar g_2 (\hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_3 \hat{a}_4) + \\ & + \hbar g (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ \hat{a}_1 \hat{a}_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где g_1 , g_2 и g – константы взаимодействия по каждому каналу рассеяния, $\hat{a}_{p_{1,2}}$ и \hat{a}_i ($i = 1, \dots, 4$) – операторы уничтожения диполяритонов накачки первого и второго импульсов, а также сигнальной ($i = 1, 3$) – и холостой ($i = 2, 4$) мод соответственно.

Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов $\hat{a}_{p_{1,2}}$ и \hat{a}_i ($i = 1, \dots, 4$). Усредняя эту систему и используя приближение среднего поля (*mean field approximation*), получаем следующую систему эволюционных уравнений для комплексных амплитуд диполяритонов $a_{p_{1,2}} = \langle \hat{a}_{p_{1,2}} \rangle$, $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$ ($i = 1, \dots, 4$):

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{p_1} = & \omega_{p_1} a_{p_1} + g_1 a_{p_2}^* a_1 a_2 + g_2 a_{p_2}^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_{p_2} = & \omega_{p_2} a_{p_2} + g_1 a_{p_1}^* a_1 a_2 + g_2 a_{p_1}^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_1 = & \omega_1 a_1 + g_1 a_2^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_2^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_2 = & \omega_2 a_2 + g_1 a_1^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_1^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_3 = & \omega_3 a_3 + g_2 a_1^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_4^* a_1 a_2, \\ i\dot{a}_4 = & \omega_4 a_4 + g_2 a_3^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_3^* a_1 a_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_{p_{1,2}}$, ω_i ($i = 1, \dots, 4$) – собственные частоты диполяритонов. В условиях точного резонанса, когда $\omega_{p_1} + \omega_{p_2} = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$, решения этих уравнений ищем в виде: $a_{p_{1,2}} = A_{p_{1,2}} \exp(i\varphi_{p_{1,2}})$, $a_i = A_i \exp(i\varphi_i)$ ($i = 1, \dots, 4$), где $A_{p_{1,2}}$, A_i и $\varphi_{p_{1,2}}$, φ_i – действительные амплитуды и фазы. Вводя далее плотности диполяритонов $N_{p_{1,2}} = A_{p_{1,2}}^2$, $N_j = A_j^2$ ($j = 1, 2, 3, 4$),

мы приходим к следующей системе нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{p_1} = \dot{N}_{p_2} = & -2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}} \times \\ & \times (g_1\sqrt{N_1N_2}\sin\theta_{12} + g_2\sqrt{N_3N_4}\sin\theta_{34}), \\ \dot{N}_1 = \dot{N}_2 = & 2\sqrt{N_1N_2} \times \\ & \times (g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}\sin\theta_{12} + g\sqrt{N_3N_4}\sin(\theta_{12} - \theta_{34})), \\ \dot{N}_3 = \dot{N}_4 = & 2\sqrt{N_3N_4} \times \\ & \times (g_2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}\sin\theta_{34} - g\sqrt{N_1N_2}\sin(\theta_{12} - \theta_{34})), \\ \dot{\theta}_{12} = & g_1 \left(-\sqrt{N_1N_2} \frac{N_{p_1} + N_{p_2}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}} + (N_1 + N_2) \sqrt{\frac{N_{p_1}N_{p_2}}{N_1N_2}} \right) \times \\ & \times \cos\theta_{12} - g_2(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_3N_4}{N_{p_1}N_{p_2}}} \cos\theta_{34} + \\ & + g\sqrt{N_3N_4} \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1N_2}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{34} = & g_2 \times \\ & \times \left(-(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_3N_4}{N_{p_1}N_{p_2}}} + \frac{(N_3 + N_4)\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}}{\sqrt{N_3N_4}} \right) \times \\ & \times \cos\theta_{34} - g_1(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_1N_2}{N_{p_1}N_{p_2}}} \cos\theta_{12} + \\ & + g\sqrt{N_1N_2} \frac{N_3 + N_4}{\sqrt{N_3N_4}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta_{12} = \varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} - \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta_{34} = \varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} - \varphi_3 - \varphi_4$.

Отметим, что вклад в динамику диполяритонов в уравнениях (2)–(3) вносят только слагаемые, соответствующие индуцированным переходам между различными диполяритонными состояниями. При больших уровнях возбуждения именно эти слагаемые являются определяющими. Считаем, что характерные времена спонтанных процессов намного больше характерных времен индуцированных переходов, так что за время протекания индуцированных переходов спонтанные переходы не успевают совершиться. Поэтому далее мы ими пренебрегаем.

Дополним систему (3) начальными условиями: $N_{p_1}|_{t=0} = N_{p_10}$, $N_{p_2}|_{t=0} = N_{p_20}$, $N_j|_{t=0} = N_{j0}$ ($j = 1, \dots, 4$), $\theta_{12}|_{t=0} = \theta_{12,0}$, $\theta_{34}|_{t=0} = \theta_{34,0}$. Из (3) удастся получить следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} N_{p_1} + N_{p_2} + 2(N_1 + N_3) &= N_{p_10} + N_{p_20} + 2(N_{10} + N_{30}), \\ N_2 - N_1 &= N_{20} - N_{10}, \quad N_4 - N_3 = N_{40} - N_{30}, \\ g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\cos\theta_{12} + g_2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_3N_4}\cos\theta_{34} + \\ &+ g\sqrt{N_1N_2N_3N_4}\cos(\theta_{12} - \theta_{34}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= g_1\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}}\cos\theta_{12,0} + \\ &+ g_2\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{30}N_{40}}\cos\theta_{34,0} + \\ &+ g\sqrt{N_{10}N_{20}N_{30}N_{40}}\cos(\theta_{12,0} - \theta_{34,0}), \end{aligned} \quad (4)$$

которые представляют собой законы сохранения чисел частиц в системе и закон сохранения энергии.

Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений (3) в общем случае не представляется возможным. Поэтому далее рассмотрим ряд частных случаев.

Если рассматривать решения системы уравнений при равенстве нулю начальных плотностей диполяритонов сигнальной и холостой мод на верхней и нижней ветвях закона дисперсии $N_{30} = N_{40} = 0$, то система уравнений (3) значительно упрощается и приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{N}_{p_1} = \dot{N}_{p_2} &= -2g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\sin\theta_{12}, \\ \dot{N}_1 = \dot{N}_2 &= 2g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\sin\theta_{12}, \\ \dot{\theta}_{12} &= g_1 \times \\ & \times \left(-\sqrt{N_1N_2} \frac{N_{p_1} + N_{p_2}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}} + (N_1 + N_2) \sqrt{\frac{N_{p_1}N_{p_2}}{N_1N_2}} \right) \cos\theta_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (5), получаем интегралы движения

$$\begin{aligned} N_{p_1} + N_1 &= N_{p_10} + N_{10}, \\ N_{p_2} + N_1 &= N_{p_20} + N_{10}, \\ N_2 - N_1 &= N_{20} - N_{10}, \\ \cos\theta_{12} &= \frac{\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}} \cos\theta_{12,0} \end{aligned} \quad (6)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии $N_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \pm 2g_1(N_1(N_1 + N_{20} - N_{10})(N_{p_10} + N_{10} - N_1) \times \\ & \times (N_{p_20} + N_{10} - N_1) - N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}\cos^2\theta_{12,0})^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) видно, что особенности эволюции плотности диполяритонов $N_1(t)$ определяются начальными плотностями N_{10} , N_{20} и N_{p_10} , N_{p_20} , начальной разностью фаз $\theta_{12,0}$, а также направлением изменения начальной скорости $\dot{N}_1(t)|_{t=0}$, т.е. знаками (+) и (–) в (7). Если начальная разность фаз $\theta_{12,0} = \pm(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то мгновенная разность фаз $\theta_{12}(t)$ в процессе эволюции сохраняется равной $\theta_{12,0}$. Поэтому рассмотрим наиболее простой случай

эволюции, когда $\theta_{12,0} = \pm(2n+1)\pi/2$. В этом случае, используя интегралы движения, уравнение (7) можно привести к виду:

$$\dot{N}_1^2 + W(N_1) = 0, \quad (8)$$

где $W(N_1)$ – потенциальная и \dot{N}_1^2 – кинетическая энергии эквивалентного нелинейного осциллятора. Потенциальная энергия $W(N_1)$ определяется выражением:

$$W(N_1) = -4g_1^2 N_1(N_1 + N_{20} - N_{10}) \times \\ \times (N_{p10} + N_{10} - N_1)(N_{p20} + N_{10} - N_1). \quad (9)$$

Вид решения $N_1(t)$ уравнения (8) определяется корнями алгебраического уравнения $W(N_1) = 0$, которые зависят от начальных параметров системы $N_{10}, N_{20}, N_{p10}, N_{p20}$.

Рассмотрим эволюцию системы, когда начальная плотность накачки первого импульса больше начальной плотности накачки второго импульса $N_{p10} > N_{p20}$. При этом будем считать, что начальная плотность диполяритонов холостой моды больше начальной плотности сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии $N_{20} > N_{10}$. Уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора $W(N_1) = 0$ в этом случае имеет четыре действительных корня, которые располагаются в следующем порядке: $N_{10} + N_{p10} > N_{10} + N_{p20} > 0 > N_{10} - N_{20}$. Динамика системы в этом случае является периодической (рис. 2а), диполяритоны накачки попарно превращаются в диполяритоны сигнальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии и обратно. Решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{20} - N_{10})(N_{p20} + N_{10})\operatorname{sn}(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}{N_{p20} + N_{20} - (N_{p20} + N_{10})\operatorname{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (10)$$

где $\operatorname{sn}(x)$ – эллиптическая функция Якоби, $f(\varphi_0, k) = F(\varphi_0, k) - K(k)$, $F(\varphi_0, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k и параметром φ_0 , $K(k)$ – полный эллиптический интеграл [37, 38]. Величины k и φ_0 выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{20} + N_{p10})(N_{10} + N_{p20})}{(N_{10} + N_{p10})(N_{20} + N_{p20})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{20} + N_{p20})N_{10}}{(N_{10} + N_{p20})N_{20}}}. \quad (11)$$

Из (10) легко получить амплитуду A и период T колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{10} + N_{p20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что амплитуда колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии определяется начальной плотностью диполяритонов накачки второго импульса, т.е. наименьшей плотностью накачки. Амплитуда колебаний линейно растет с ростом N_{10} и N_{p20} . Что касается периода колебаний, то с ростом начальной плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии, период колебаний монотонно уменьшается.

Если $N_{20} < N_{10}$, то уравнение $W(N_1) = 0$ имеет четыре действительных корня которые располагаются следующим образом: $N_{10} + N_{p10} > N_{10} + N_{p20} > N_{10} - N_{20} > 0$. Динамика системы в этом случае также является периодической (рис. 2б) и решение уравнения (9) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{10} - N_{20})(N_{p20} + N_{10})}{N_{p20} + N_{10} - (N_{p20} + N_{20})\operatorname{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (13)$$

где k и φ_0 выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{10} + N_{p10})(N_{20} + N_{p20})}{(N_{10} + N_{p20})(N_{20} + N_{p10})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{10} + N_{p20})N_{20}}{(N_{20} + N_{p20})N_{10}}}. \quad (14)$$

Из (13) можно получить амплитуду A и период T колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{20} + N_{p20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}}. \quad (15)$$

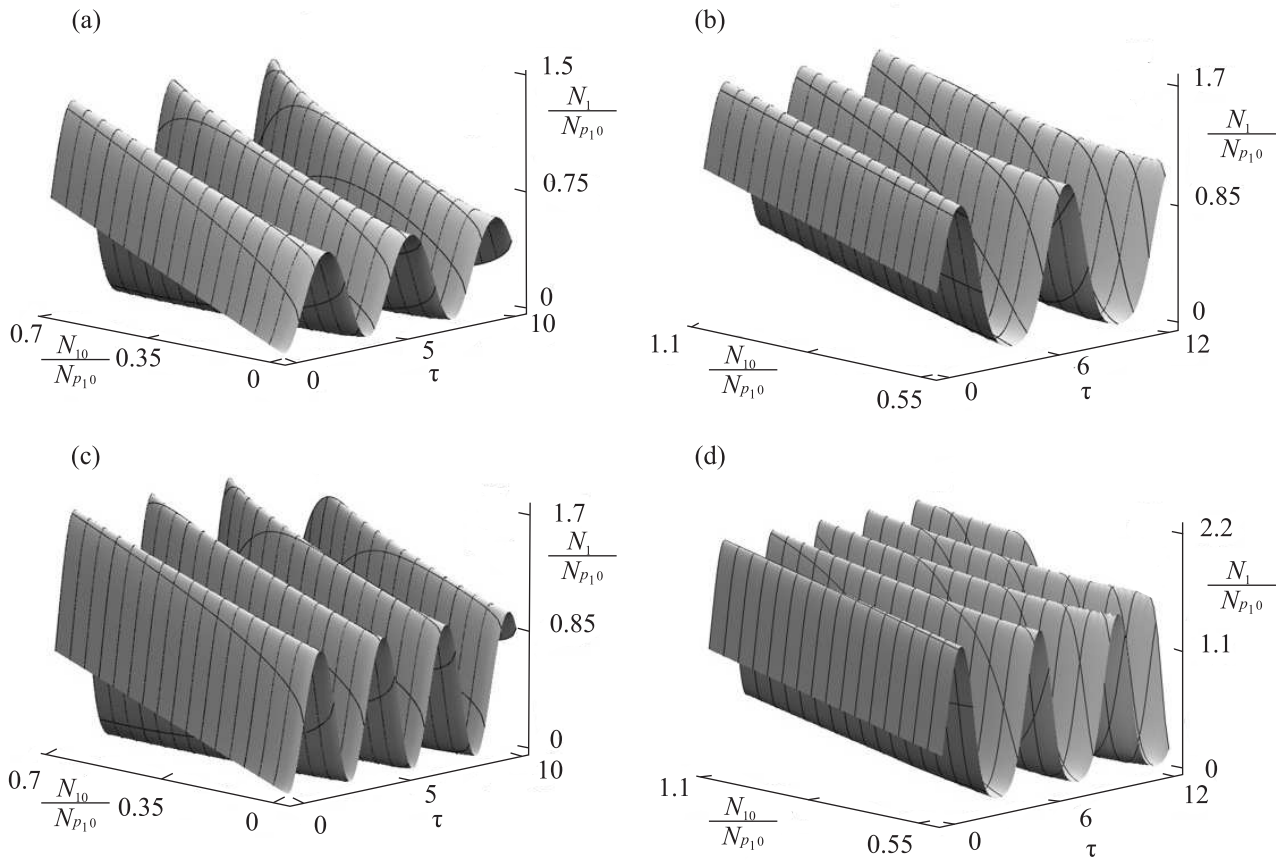


Рис. 2. Временная эволюция плотности диполяритонов N_1/N_{p10} в зависимости от нормированной начальной плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии и при фиксированных значениях начальных плотностях диполяритонов $N_{20}/N_{p10} = 0,8$, $N_{p20}/N_{p10} = 0,6$ (a); $N_{20}/N_{p10} = 0,5$, $N_{p20}/N_{p10} = 0,6$ (b); $N_{20}/N_{p10} = 0,8$, $N_{p20}/N_{p10} = 1,6$ (c); $N_{20}/N_{p10} = 0,5$, $N_{p20}/N_{p10} = 1,6$ (d). Здесь $\tau = g_1 t$

Если начальная плотность накачки первого импульса меньше начальной плотности накачки второго импульса $N_{p10} < N_{p20}$. При этом будем считать, что $N_{20} > N_{10}$, уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора $W(N_1) = 0$ также имеет четыре действительных корня $N_{10} + N_{p20} > N_{10} + N_{p10} > 0 > N_{10} - N_{20}$. Эволюция диполяритонов является периодической (рис. 2c) и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{20} - N_{10})(N_{p10} + N_{10})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}{N_{p10} + N_{20} - (N_{p10} + N_{10})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}. \quad (16)$$

Величины k и φ_0 выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{20} + N_{p20})(N_{10} + N_{p10})}{(N_{10} + N_{p20})(N_{20} + N_{p10})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{20} + N_{p10})N_{10}}{(N_{10} + N_{p10})N_{20}}}. \quad (17)$$

Амплитуда A и T период колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{10} + N_{p10}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что амплитуда колебаний определяется наименьшей плотностью накачки.

Если $N_{20} < N_{10}$, уравнение $W(N_1) = 0$ по-прежнему имеет четыре действительных корня $N_{10} + N_{p_{20}} > > N_{10} + N_{p_{10}} > N_{10} - N_{20} > 0$ и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{10} - N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}{N_{p_{10}} + N_{10} - (N_{p_{10}} + N_{20})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p_{20}} + N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (19)$$

где k и φ_0 выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{10} + N_{p_{20}})(N_{20} + N_{p_{10}})}{(N_{10} + N_{p_{10}})(N_{20} + N_{p_{20}})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{10} + N_{p_{10}})N_{20}}{(N_{20} + N_{p_{10}})N_{10}}}. \quad (20)$$

Из (19) амплитуда A и период T колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{20} + N_{p_{10}}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p_{20}} + N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}}. \quad (21)$$

Из (19) и рисунка 2d, видно, что эволюция системы является периодической.

На рисунке 2 представлены графики временной эволюции плотности диполяритонов сигнальной моды. Эволюция системы представляет собой периодические превращения диполяритонов сигнальной и холостой мод в диполяритоны накачки обоих импульсов и обратно. Амплитуда колебаний линейно увеличивается с ростом начальной плотности диполяритонов сигнальной (холостой) моды на средней ветви закона дисперсии.

Если в начальный момент времени плотность диполяритонов сигнальной и холостой моды на средней ветви закона дисперсии равны $N_{20} = N_{10}$, то уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора $W(N_1) = 0$ имеет один двукратно вырожденный корень, равный нулю. Эволюция диполяритонов в этом случае будет аperiodической (рис. 3) и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{ab \left(\frac{b}{a} - \frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}} \right) (1 - \text{th}^2(\pm \sqrt{ab}g_1 t))}{a \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}}} \text{th}(\pm \sqrt{ab}g_1 t) \right)^2 - b \left(\sqrt{\frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \text{th}(\pm \sqrt{ab}g_1 t) \right)^2}, \quad (22)$$

где $a = N_{p_{10}} + N_{10}$, $b = N_{p_{20}} + N_{10}$.

На рисунке 3 представлена аperiodическая эволюция плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии. Из (22) и рисунка 3 видно, что решение со знаком “+” монотонно растет со временем от значения $N_1 = N_{10}$ до предельного значения $N_1 = N_{p_{20}} + N_{10}$, затем происходит монотонное убывание плотности диполяритонов сигнальной моды до нуля, чем эволюция и завершается. Если рассматривать решение (22) со знаком “-”, то плотность диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии монотонно уменьшается от значения $N_1 = N_{10}$ до нуля. Таким образом, все диполяритоны сигнальной моды попарно превратились в диполяритоны накачки обоих импульсов, чем эволюция и завершилась. Процесс эволюции происходит с истощением диполяритонов сигнальной (холостой) моды.

Если в начальный момент времени отсутствуют либо диполяритоны накачки первого импульса, ли-

бо диполяритоны накачки второго импульса, то, как видно из (4), будет работать только третий канал рассеяния, т.е. будут возникать периодические и аperiodические режимы превращения диполяритонов сигнальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии в диполяритоны сигнальной и холостой моды на верхней и нижней ветви закона дисперсии без участия диполяритонов накачки обоих импульсов [34].

Таким образом, при накачке средней диполяритонной ветви в двух близких точках закона дисперсии возможен периодический и аperiodический процессы превращения пары диполяритонов накачки обоих импульсов в диполяритоны сигнальной и холостой мод. Также необходимо отметить, что при накачке диполяритонной ветви в одной точке закона дисперсии при начальной разности фаз $\theta_{12,0} = \pm(2n + 1)\pi/2$ наблюдался только аperiodический режим эволюции превращения пары диполяритонов

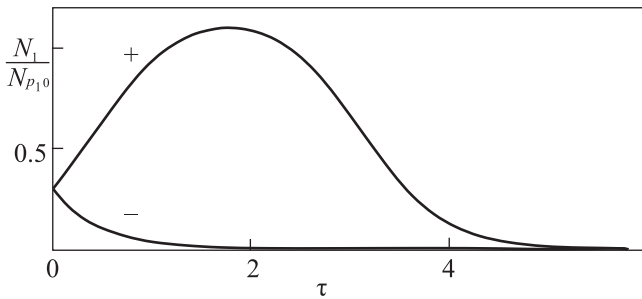


Рис. 3. Временная эволюция плотности диполяритонов N_1/N_{p10} при фиксированных значениях начальных плотностей диполяритонов $N_{10}/N_{p10} = N_{20}/N_{p10} = 0.3$, $N_{p20}/N_{p10} = 0.8$. Здесь $\tau = g_1 t$

накачки в диполяритоны сигнальной и холостой мод [34]. Таким образом, введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы и к возникновению новых бифуркационных переходов от аperiodического режима эволюции к периодическому.

1. A. V. Kavokin and G. Malpuech, *Thin Films, Nanostructures: Cavity Polaritons*, ed. by V. M. Agranovich and D. Taylor, Elsevier, Amsterdam (2003).
2. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
3. A. Kavokin, *Appl. Phys. A* **89**, 241. (2007).
4. M. M. Glazov and K. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 245317 (2006).
5. I. A. Shelykh, R. Johne, D. D. Solnyshkov, A. V. Kavokin, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **76**, 155308 (2007).
6. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **63**, 193305 (2001).
7. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **62**, R4825 (2000).
8. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
9. J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **62**, R16247 (2000).
10. C. Ciuti, *Phys. Rev. B* **69**, 245304 (2004).
11. P. Schwendimann, C. Ciuti, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **68**, 165324 (2003).
12. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. Porras, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **65**, 073309 (2002).
13. I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, and G. Malpuech, *Phys. Status Solidi B* **242**, 2271 (2005).
14. О. Ф. Васильева, П. И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* **115**, 922 (2013).

15. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *Оптика и спектроскопия* **111**, 831 (2011).
16. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *ФТТ* **53**, 1216 (2011).
17. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanophotonics* **6**, 061805 (2012).
18. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanoelectronics and Optoelectronics* **9**, 295 (2014).
19. C. J. Mc Konstrie, S. Radic, and M. G. Raymer, *Opt. Express* **12**, 5037 (2004).
20. Y. Okawachi, M. Yu. K. Luke, D. O. Carvalho, S. Ramelow, A. Farsi, M. Lipson, and A. L. Gaeta, *Opt. Lett.* **40**, 5267 (2015).
21. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, П. И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* **125**, 425 (2018).
22. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, В. В. Васильев, *ЖЭТФ* **157**(1), 144 (2020).
23. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, В. В. Васильев, *Оптика и спектроскопия* **128**(2), 242 (2020).
24. P. Cristofolini, G. Christmann, S. I. Tsintzos, G. Deligeorgis, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, *Science* **336**, 704 (2012).
25. A. V. Nalitov, D. D. Solnyshkov, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **90**, 235304 (2014).
26. О. Кюриенко, А. В. Kavokin, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 176401 (2013).
27. K. Kristinsson, О. Кюриенко, T. C. H. Liew, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. B* **88**, 245303 (2013).
28. K. Kristinsson, О. Кюриенко, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. A* **89**, 023836 (2014).
29. О. Кюриенко, I. A. Shelykh, and T. C. H. Liew, *Phys. Rev. A* **90**, 033807 (2014).
30. I. A. Shelykh, О. Кюриенко, K. Kristinsson, and T. C. H. Liew, *Proc. Intern. Const. Nanomaterials: Applications and Properties* **3**, 02NAESF03 (2014).
31. J.-Y. Li, S.-Q. Duan, and W. Zhang, *EPL* **108**, 67010 (2014).
32. О. Кюриенко, О. V. Kibis, and I. A. Shelykh, *Opt. Lett.* **42**(12), 2398 (2017).
33. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *Письма в ЖЭТФ* **102**(9), 665 (2015).
34. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, И. В. Белоусов, *ЖЭТФ* **153**(2), 179 (2018).
35. A. Seedhouse, J. Wilkes, V. D. Kulakovskii, and E. A. Muljarov, *Opt. Lett.* **44**(17), 4339 (2019).
36. T. Byrnes, G. V. Kolmakov, R. Y. Kezerashvili, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B* **90**, 125314 (2014).
37. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Физматлит, М. (1963).
38. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, М. (1971).

О возможности голографической записи в отсутствие взаимной когерентности опорного и предметного пучков

Р. М. Архипов^{+*×1)}, М. В. Архипов⁺¹⁾, Н. Н. Розанов^{*×1)}

⁺ Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

^{*} Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

[×] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 2 апреля 2020 г.

После переработки 10 апреля 2020 г.

Принята к публикации 10 апреля 2020 г.

Для голографической записи волнового поля объекта используется интерференционная картина, создаваемая опорной волной и волной, рассеянной объектом. Необходимым в традиционной голографии является требование взаимной когерентности опорного и предметного пучков. Однако, как показано в данной заметке, осуществить голографическую запись информации об объекте можно и без когерентности между ними, даже воспользовавшись излучением от разных источников. Подобная запись может быть осуществлена с применением импульсов субциклового или униполярного излучения, когда в качестве записывающей среды используется резонансная среда с большим временем фазовой памяти T_2 . В таком случае в среде регистрируется картина интерференции отраженного от объекта субциклового или униполярного импульса с волной поляризации среды, созданной таким же коротким импульсом. Когерентность обеспечивается волной поляризации, которая при взаимодействии с отраженным от объекта излучением наведет в среде решетку заселенностей. Эта решетка будет повторять картину интерференции в аналогичном голографическом процессе с монохроматическим источником с длиной волны, равной длине волны резонансного перехода в среде.

DOI: 10.31857/S1234567820090025

Регистрация информации об объекте оптически методами возможна разными способами. В обычном фотоаппарате регистрируется лишь пространственное распределение интенсивности света в изображении. В середине прошлого века Габором [1] был предложен двухступенчатый метод получения оптического изображения, названный голографией. Согласно [1], в среде записывается картина интерференции рассеянного объектом излучения с когерентной ей опорной волной. Поскольку в интерференционной картине присутствует информация не только об интенсивности, но и о фазе рассеянной волны, голограмма позволяет при ее освещении исходной опорной волной получить копию волны, рассеянной объектом. Для данной концепции голографии существенна взаимная когерентность опорной волны с волной, рассеянной объектом в месте регистрации голограммы. Поэтому первые качественные голограммы появились лишь после появления лазеров, обладающих большой длиной когерентности излучения (эксперименты Лейта и Упатниекса в наклон-

ных пучках [2], схема Денисюка во встречных пучках [3]). С тех пор были разработаны схемы записи не только стационарных объектов, но и быстро изменяющих свои параметры [4–6], предложены различные среды для регистрации голограмм [6]. Голограммы могут быть как стационарные, получаемые, например, в фотографическом процессе, так и нестационарные, которые возникают в результате нелинейного воздействия света на вещество, а затем исчезают после окончания воздействия света [7].

Во всех вариантах современной голографии используется интерференция света, для которой необходима взаимная когерентность опорного и предметного пучков. Еще раз отметим, что монохроматическое и импульсное квазимонохроматическое лазерное излучение используется для создания в различных веществах пространственных решеток поглощения и преломления в средах при интерференции двух и более пучков света.

Так ли необходима когерентность опорного и предметного пучков и их одномоментное перекрытие в регистрирующей среде?

Уже сравнительно давно был осознан тот факт, что создание решеток заселенностей, получение мо-

¹⁾ e-mail: arkipovrostislav@gmail.com; m.arkhipov@spbu.ru; nnrosanov@mail.ru

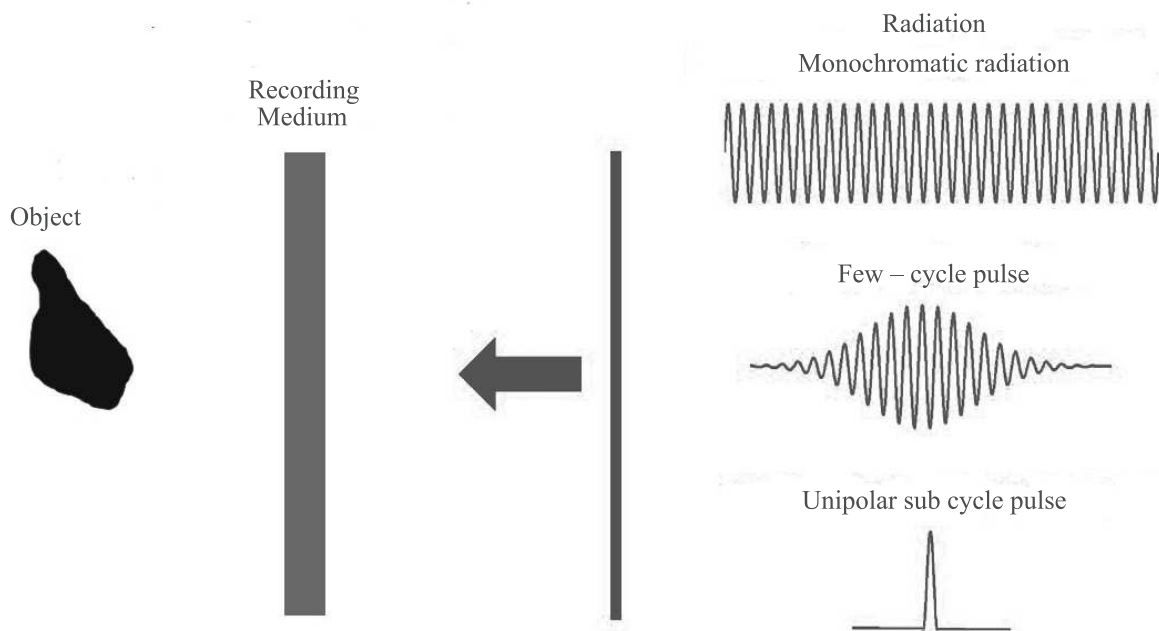


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема записи голограммы

дуляции поглощения и преломления в веществе может происходить и без одномоментного перекрытия лазерных пучков в среде. Этот эффект был продемонстрирован в экспериментах по наблюдению фотонного эха [8, 9]. Также этот способ создания решеток был предложен для так называемой эхо-голографии – методе записи и восстановления волновых фронтов, когда объектный, опорный и сигнальный лучи проходят через среду, но одномоментно не перекрываются в ней, который предложен Штырковым и Самарцевым в [10] и развит в дальнейших работах [11–16]. Детальный обзор достигнутых в этом направлении результатов представлен в [17] и цитируемой литературе. В эхо-голографии необходимо, чтобы взаимодействие импульсов со средой было когерентным, т.е. длительность импульсов и промежутки времени между приходом их в область регистрации были бы значительно меньше времени релаксации поляризации T_2 среды. Однако в упомянутых работах требовалась когерентность между опорной и предметной волной, хотя они и были разнесены настолько, что не могли непосредственно интерферировать друг с другом.

Рассмотрим физический механизм создания решеток без непосредственной интерференции волн [8, 9]. Он связан с взаимодействием падающего импульса с волной макроскопической поляризации среды, наведенной в среде предыдущим импульсом. Наведение когерентности в многоуровневой среде широкополосными предельно короткими импульсами

при исследовании разновидностей фотонного эха обсуждалось в работах [18–23]. А возможность наведения решеток с помощью последовательности аттосекундных импульсов, как биполярных одноцикловых, так и униполярных субцикловых изучалась как в двухуровневых средах [24–27], так и в многоуровневых средах [28, 29]. Такой подход открывает новые возможности получения информации с предельным временным разрешением в интерферометрических и голографических экспериментах и, как покажем ниже, не требует когерентности опорного и предметного пучков в обычном понимании.

В качестве примера разберем схему записи волнового поля во встречных пучках. На рисунке 1 показаны отражающий излучение объект, среда, где будет фиксироваться картина интерференции опорного и предметного импульса, и три варианта плоской волны. В первом случае традиционной голографии объект освещается монохроматической волной, он должен быть неподвижен, иначе произойдет размывание интерференционной картины, и двойное расстояние от объекта до среды, где происходит запись, должно быть меньше длины когерентности в излучении.

Если объект освещается коротким световым импульсом, содержащим много циклов колебаний, то требование перекрытия импульсов в среде накладывает дополнительное ограничение на удаленность объекта и “глубину сцены” объекта. Для коротких импульсов, как мы уже отмечали, можно избежать ограничений на длительность импульса, если обой-

тись без перекрытия лазерных пучков в среде – без одномоментного присутствия опорного и предметного пучка в регистрирующей среде, если воспользоваться волной поляризации в среде, которую создаст падающий импульс. Но при этом останется требование на неподвижность объекта – его смещение за время экспозиции не должно сильно смещать частоту излучения и положение полос интерференции. Решить эту проблему может радикальное сокращение длительности вплоть до одноцикловых, субцикловых и униполярных импульсов. В настоящий момент уже доступны субцикловые аттосекундные импульсы в оптическом диапазоне частот [30–32], а также субцикловые импульсы в ТГц диапазоне частот [33–37]. Проблема получения униполярного света и его применение для эффективного воздействия на микрообъекты активно обсуждается в литературе, см. обзоры [38, 39] и цитируемую литературу. Используя униполярные субцикловые импульсы, мы разрешим противоречие, существующее в обычной интерферометрии и голографии, где для высокого контраста полос и большой глубины сцены необходимо иметь монохроматический свет, а для разрешения во времени нам нужны в пределе практически немонахроматические импульсы, которые обладают широким спектром и малой длительностью. Мы уходим от прямой интерференции световых пучков, они не перекрываются одномоментно в среде, поэтому длительность импульса не важна. При этом высокая монохроматичность у нас фактически остается и передается в волну поляризации материи, ибо она свободно осциллирует на собственной частоте в течение времени T_2 . И с ней уже может взаимодействовать очень короткий импульс. Причем чем он короче, тем “точнее” будет его действие.

В предельном случае униполярного импульса пропадают ограничения, связанные со скоростью движения отражающей поверхности объекта, так как отраженный униполярный импульс лишь изменит свою полярность, а эффект Доплера сократит или увеличит его длительность. В свою очередь, зафиксированная в среде картина останется стационарной в течение времени фазовой памяти T_2 среды (отметим, ее можно будет скопировать на стационарный носитель). Отметим, что идея применения интерференции волн поляризации с субцикловыми и униполярными импульсами позволяет, по нашему мнению, достичь предельного временного разрешения в интерферометрических и голографических схемах. Понятно, что для субцикловых и униполярных импульсов такие понятия, как взаимная когерентность, длина когерентности, по существу, не

вообще применимы и лишены того смысла, который они имеют для многоцикловых световых полей. Так, если у нас есть два источника униполярных импульсов, их излучение можно использовать независимо для создания опорного и предметного пучка. В обычной голографии использование двух разных лазеров в таких целях практически невозможно.

Создание стационарных решеток двумя униполярными короткими импульсами вытекает из рассмотрения их действия на двухуровневую [24–27] и многоуровневую среду, которое было сделано в работах [28, 29]. Так, согласно [40], вероятность перехода системы из основного состояния в k -е возбужденные в первом порядке теории возмущений вычисляется по формуле:

$$w_{1k} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int V_{1k} e^{i\omega_{1k}t} dt \right|^2. \quad (1)$$

Здесь ω_{1k} – частота перехода, d_{1k} – дипольный момент перехода, $V_{1k} = -d_{1k}E(t)$, $E(t)$ – электрическое поле импульсов, \hbar – приведенная постоянная Планка.

Пусть на систему воздействует пара униполярных импульсов гауссовой формы, имеющих в общем виде разные амплитуды и длительности τ_1 и τ_2 :

$$E(t) = E_1 \exp[-t^2/\tau_1^2] + E_2 \exp[-(t - \Delta)^2/\tau_2^2] \quad (2)$$

(Δ – задержка между импульсами). Тогда из (1) имеем [29]:

$$w_{1k} = \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} S_{E1}^2 \exp\left[-\frac{\omega_{1k}^2 \tau_1^2}{2}\right] + \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} S_{E2}^2 \exp\left[-\frac{\omega_{1k}^2 \tau_2^2}{2}\right] + 2 \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} S_{E1} S_{E2} \exp[-\omega_{1k}^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)/4] \cos(\omega_{1k} \Delta) \quad (3)$$

(S_{E1} и S_{E2} – электрические площади импульсов, $S_E \equiv \int E(t)dt$). Если длительность импульса короче периода резонансного перехода среды ($\omega_{1k} \tau_{1,2} \ll 1$), то экспоненты в (3) можно считать равными 1. Тогда для вероятности перехода имеем

$$w_{1k} = \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} (S_{E1}^2 + S_{E2}^2 + 2S_{E1} S_{E2} \cos \omega_{1k} \Delta). \quad (4)$$

В указанном приближении формула (4) представляет собой выражение для вероятности перехода системы под действием пары дельтаобразных импульсов. Отметим, что вывод данных выражений (3)–(4) основан на теории возмущения, когда амплитуда падающего поля считается слабой, что позволяет не учитывать ионизацию. Из (3)–(4) видно, что и в случае возбуждения системы парой униполярных

импульсов результат воздействия определяется электрической площадью импульсов и задержкой между ними. Если импульсы распространяются навстречу друг другу в протяженной среде с малой концентрацией частиц, то данная формула может быть интерпретирована как наведение гармонической решетки заселенностей в резонансной среде, которая будет совпадать с интерференционной картиной, создаваемой двумя когерентными монохроматическими источниками с частотой ω_{1k} и разностью хода Δ . Численные оценки по формуле (3) дают максимальное значение вероятности $w_{1k} \sim 0.1$ при $\tau_1 = \tau_2 = 100$ ас, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^7$ В/см, $\omega_{1k} = 1.9 \cdot 10^{15}$ рад/с, $d_{1k} = 15$ Д.

Таким образом, разности заселенностей в системе резонансных уровней повторяют картину интерференции, которая возникла бы в аналогичной стационарной голографической схеме с использованием соответствующего когерентного монохроматического источника. А в ситуации с субцикловыми униполярными импульсами для ее получения не требуется когерентность между опорным и предметным пучком.

Отметим, что, если в традиционной голографии не требуется высокая когерентность среды, а требуется высокая когерентность излучения, то в рассмотренной нами ситуации все наоборот. Для среды необходима когерентность (большое значение времени релаксации поляризации T_2 резонансных переходов), при отсутствии когерентности у излучения в привычном понимании этого термина.

Таким образом, в работе показано, что при использовании униполярных субцикловых импульсов и резонансных сред с большим временем релаксации T_2 , возможна реализация голографии со сверхвысоким временным разрешением при отсутствии когерентности между опорным и предметным пучками. Сокращение длительности вплоть до субциклового не является чисто инженерно-техническим решением, позволяющим автоматически получить высокое временное разрешение в голографической записи, а подразумевает совсем иную физику процесса записи информации.

Для практической реализации необходимо использование сред с большими значениями времен фазовой памяти T_2 . К ним относятся различные газы и пары щелочных металлов (натрий, рубидий и т.д.), в которых значение времени T_2 лежит в наносекундном диапазоне. Именно в них когерентные явления хорошо изучены [41]. Также следует отметить и квантовые точки, значения времен релаксации в которых может достигать десятков – сотен наносекунд при

низких температурах [42]. Следует также отметить кристаллы, содержащие примесные редкоземельные ионы, в которых время фазовой релаксации при низких температурах может достигать рекордных величин – от нескольких секунд до нескольких часов [43].

Исследование Р. М. Архипова в части применения униполярных импульсов для сверхбыстрого управления решетками населенностей в резонансной среде выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект # 19-72-00012). Проблема получения и применения униполярных импульсов света в голографии поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 20-32-70049). Исследования М. В. Архипова поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 20-02-00872 А).

1. D. Gabor, Nature **161**, 777 (1948).
2. E. N. Leith and J. Upatnieks, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 1123 (1962).
3. Ю. Н. Денисюк, Оптика и спектроскопия **15**, 522 (1963).
4. Ю. И. Островский, Голография, Наука, Л. (1970).
5. Ю. И. Островский, М. М. Бутусов, Г. В. Островская, Голографическая интерферометрия, Наука, М. (1977).
6. R. Collier, C. Burckhardt, and L. Lin, Optical holography, Academic Press, N.Y. (1971).
7. H. J. Eichler, P. Günter, and D. W. Pohl, Laser-Induced Dynamic Gratings, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., Tokyo (1981).
8. I. D. Abella, N. A. Kurnit, and S. R. Hartmann, Phys. Rev. **141**, 391 (1966).
9. Е. И. Штырков, В. С. Лобков, Н. Г. Ярмухаметов, Письма в ЖЭТФ **27**, 685 (1978) [E. I. Shtyrkov, V. S. Lobkov, N. G. Yarmukhametov, JETP Lett. **27**, 648 (1978)].
10. Е. И. Штырков, В. В. Самарцев, Резонансная динамическая голография и оптическое сверхизлучение, в кн. Электромагнитное сверхизлучение, КФ АН СССР, Казань (1975), с. 398.
11. В. В. Самарцев, Е. И. Штырков, ФТТ **18**, 3140 (1976).
12. Е. И. Штырков, В. В. Самарцев, Оптика и спектроскопия **40**, 392 (1976).
13. E. I. Shtyrkov and V. V. Samartsev, Physics Status Solidi (a) **45**, 647 (1978).
14. L. A. Nefediev and V. V. Samartsev, Physics Status Solidi (a) **88**, 631 (1985).
15. Л. А. Нефедьев, Изв. АН СССР. Сер. Физ. **50**, 1551 (1986).
16. Л. А. Нефедьев, В. В. Самарцев, Оптика и спектроскопия **62**, 701 (1987).

17. Е. И. Штырков, *Оптика и спектроскопия* **114**, 105 (2013) [E. I. Shtyrkov, *Optics and Spectroscopy* **114**, 96 (2013)].
18. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **67**, 887 (1998) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, *JETP Lett.* **67**, 934 (1998)].
19. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, *Оптика и спектроскопия* **90**, 788 (2001) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, *Optics and Spectroscopy* **90**, 707 (2001)].
20. С. В. Сазонов, *Оптика и спектроскопия* **94**, 453 (2003) [S. V. Sazonov, *Optics and Spectroscopy* **94**, 400 (2003)].
21. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123**, 919 (2003) [S. V. Sazonov and A. F. Sobolevskii, *JETP* **96**, 807 (2003)].
22. Н. В. Знаменский, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 440 (2007) [N. V. Znamenskii and S. V. Sazonov, *JETP Lett.* **85**, 358 (2007)].
23. Н. В. Знаменский, С. В. Сазонов, *Оптика и спектроскопия* **104**, 415 (2008) [N. V. Znamenskii and S. V. Sazonov, *Optics and Spectroscopy* **104**, 378 (2008)].
24. R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Opt. Lett.* **41**, 4983 (2016).
25. R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Sci. Rep.* **7**, 12467 (2017).
26. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, И. Бабушкин, Н. Н. Розанов, *Квантовая электроника* **47**, 589 (2017) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, I. Babushkin, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, *Quantum Electronics* **47**, 589 (2017)].
27. R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, I. Babushkin, and N. N. Rosanov, *Las. Phys. Lett.* **14**, 095402 (2017).
28. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Квантовая электроника* **49**, 958 (2019) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, *Quantum Electronics* **49**, 958 (2019)].
29. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **128**, 106 (2020) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, *Optics and Spectroscopy* **128**, 102 (2020)].
30. H.-C. Wu and J. Meyer-ter-Vehn, *Nat. Photonics* **6**, 304 (2012).
31. M. T. Hassan, T. T. Luu, A. Moulet, O. Raskazovskaya, P. Zhokhov, M. Garg, N. Karpowicz, A. M. Zheltikov, V. Pervak, F. Krausz, and E. Goulielmakis, *Nature* **530**, 66 (2016).
32. J. Xu, B. Shen, X. Zhang, P. Zhokhov, Y. Shi, L. Ji, L. Zhang, T. Xu, W. Wang, X. Zhao, and Z. Xu, *Sci. Rep.* **8**, 2669 (2018).
33. K. Reiman, *Rep. Prog. Phys.* **70**, 1597 (2007).
34. H. G. Roskos, M. D. Thomson, M. Kress, and T. Loeffler, *Laser Photonics Rev.* **1**, 349 (2007).
35. Y. Gao, T. Drake, Z. Chen, and M. F. DeCamp, *Opt. Lett.* **33**, 2776 (2008).
36. P. A. Obraztsov, T. Kaplas, S. V. Garnov, M. Kuwata-Gonokami, A. N. Obraztsov, and Y. P. Svirko, *Sci. Rep.* **4**, 4007 (2014).
37. Е. А. Пonomareva, S. A. Stumpf, A. N. Тсупкин, and S. A. Kozlov, *Opt. Lett.* **44**, 5485 (2019).
38. Р. М. Архипов, А. В. Пахомов, М. В. Архипов, И. Бабушкин, Ю. А. Толмачев, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 388 (2017) [R. M. Arkhipov, A. V. Pakhomov, M. V. Arkhipov, I. Babushkin, and Yu. A. Tolmachev, *JETP Lett.* **105**, 408 (2017)].
39. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. А. Шимко, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 9 (2019) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. A. Shimko, and N. N. Rosanov, *JETP Lett.* **110**, 15 (2019)].
40. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М. (1989) [L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, Pergamon, Oxford (1974)].
41. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, М. (1978) [L. Allen and J. H. Eberly, *Optical resonance and two-level atoms*, Wiley, N.Y. (1975)].
42. M. Bayer and A. Forchel, *Phys. Rev. B* **65**, 041308 (2002).
43. W. R. Babbitt and T. Mossberg, *Opt. Commun.* **65**, 185 (1988).

Разности инвариантов узлов-мутантов и их дифференциальное разложение

Л. Бишлер^{+*×1)}, Сасвати Дхара^{°1),2)}, Т. Григорьев^{∇1)}, А. Мионов^{+*×1)}, А. Морозов^{*×∇1)},
Ан. Морозов^{*×∇1)}, П. Рамадеви^{°1),2)}, Вивек Кумар Сингх^{°1),2)}, А. Слепцов^{*×∇1)}

⁺ Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

^{*} Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

[×] Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия

[°] Физический факультет, Индийский Институт Технологии Бомбея, 400076 Мумбаи, Индия

[∇] Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 8 апреля 2020 г.

После переработки 8 апреля 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Мы вычисляем разности инвариантов ХОМФЛИ-ПТ для пар узлов-мутантов, раскрашенных представлениями $SL(N)$, достаточно большими для того, чтобы различить эти узлы. Эти пары мутантов включают в себя мутанты-претцели, для различения которых минимально необходимо представление, описываемое диаграммой Юнга [4, 2]. Мы обсуждаем дифференциальное разложение для разностей, оказывающееся нетривиальным для мутантов с ненулевыми дефектами. Наиболее эффективным техническим методом в этом случае является стандартный подход Решетихина–Тураева.

DOI: 10.31857/S1234567820090037

1. Введение. Различать разные узлы – одна из основных целей теории узлов. Наиболее удобным и универсальным способом делать это является вычисление и сравнение их полиномиальных инвариантов. Достаточно сильный инвариант, который при этом можно явно вычислить, – полиномы ХОМФЛИ-ПТ [1, 2], которые (при правильной нормировке) являются полиномами от двух переменных q и A . С физической точки зрения, они являются наблюдаемыми (средними значениями петель Вильсона) в трехмерной теории Черна–Саймонса. При подстановке $A = q^N$ эти полиномы описывают наблюдаемые (средние значения петель Вильсона) в теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ или $SL(N)$ и $q := \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa+N}\right)$, где κ – константа связи [3]. Эти полиномы также зависят от представления R калибровочной группы, бегущего вдоль вильсоновской линии.

Сложнее всего различить узлы из семейства узлов-мутантов. Их можно получать друг из дру-

га с помощью специальных преобразований – мутаций (см. раздел 2). Полиномы этих узлов совпадают во всех симметрических и даже прямоугольных представлениях R [4, 5] (на самом деле это такие представления, разложение квадратов которых не содержит нетривиальных кратностей [6, 7]). Таким образом, для того чтобы различить эти узлы, необходимо изучать смешанные представления. Самое простое из них – представление $R = [2, 1]$, и оно действительно позволяет различить некоторые узлы-мутанты [6, 7]. Однако, как показал Х. Мортон [8] (см. также [7]), существуют мутанты, которые обладают еще большей степенью симметрии. Эти мутанты не различаются представлением $R = [2, 1]$, необходимо хотя бы представление $R = [4, 2]$. Изучение полиномов этих узлов и разностей между ними – сложная задача, которая интересна как с точки зрения теории узлов, так и с точки зрения теории представлений. На данный момент пары мутантов, которые не различаются представлением $R = [4, 2]$, не найдены.

Наиболее эффективным методом вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ является подход Решетихина–Тураева (РТ), который впервые был предложен в [9–11] и основывается на использовании \mathcal{R} -матриц квантовой группы $U_q(SL(N))$. Его

¹⁾ mila-bishler@mail.ru; saswati123@phy.iitb.ac.in;
grigorev.ta@phystech.edu; mironov@ipi.ru; morozov@itep.ru;
andrey.morozov@itep.ru; ramadevi@phy.iitb.ac.in;
vivek.singh@fuw.edu.pl; sleptsov@itep.ru

²⁾ Saswati Dhara, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh.

современная форма, которую иногда называют современным методом РТ, использует для \mathcal{R} -матриц особый базис, который не зависит от N . Этот метод был развит в ряде статей [12–20], применялся для вычисления полиномов большого количества узлов и зацеплений, и оказался технически гораздо более сильным в большинстве случаев. Однако, как мы подчеркиваем в настоящем письме, для некоторых задач РТ-метод в первоначальной формулировке оказывается более прямолинейным и быстрым, хотя и не всегда позволяет получить полиномы, зависящие от переменных q, A . Причина этого в том, что для применения современной РТ-техники необходимо знание матриц Рака, которые очень сложно найти в рассматриваемых случаях. Мы опишем эти подходы более подробно в разделе 3.

Мы использовали РТ-метод для вычисления разностей между полиномами узлов-мутантов в представлениях $R = [3, 1]$ и $R = [4, 2]$ при некоторых значениях N . Для $[3, 1]$ нам удалось проделать вычисления вплоть до $N = 7$. Это позволило найти общие ответы для произвольного N в этих случаях и, таким образом, вычислить соответствующие полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Для представления $R = [4, 2]$ нам удалось вычислить разности только для $N = 3, 4$. Мы изучили свойства этих разностей (см. раздел 4) и их дифференциальных разложений.

Дифференциальное разложение [16, 21–27], которое является сравнительно новым и сильным инструментом в теории узлов, часто позволяет угадать ответы для полиномов узлов, изучить их различные свойства и дает много новых идей. Оно достаточно просто устроено для узлов с нулевым дефектом [23] и становится менее тривиальным в других случаях. К сожалению, узлы-мутанты обычно имеют ненулевой дефект. Результаты, полученные нами, показывают, что дифференциальное разложение узлов-мутантов имеет достаточно интересные свойства, мы обсуждаем их в разделе 5.

2. Узлы-мутанты. В первую очередь давайте обсудим, что такое узлы-мутанты. Узлы-мутанты – это семейства узлов, которые связаны друг с другом специальной операцией – мутацией (см. рис. 1). Для проведения мутации необходимо вырезать часть узла с двумя входящими и двумя исходящими линиями внутри 3-сферы. Такую вырезанную часть узла, которую технически называют 2-танглом, поворачивают на 180 градусов и вклеивают обратно. Получившийся узел называют мутантом исходного узла.

Очевидно, что, для того чтобы эти узлы были различны, и часть узла внутри 3-сферы, и внешняя часть узла должны быть нетривиальными. По

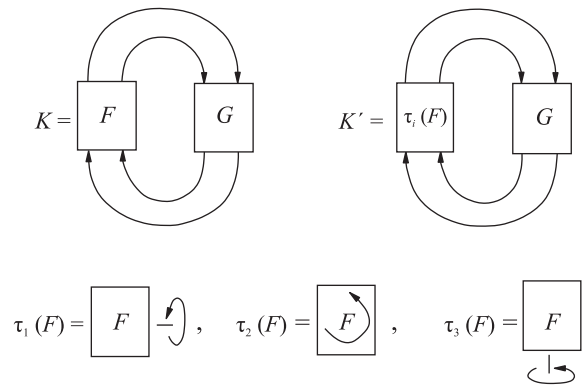


Рис. 1. Процедура мутации

этой причине узлы-мутанты являются узлами с большим числом пересечений. Простейшие пары узлов-мутантов имеют, по крайней мере, 11 пересечений, одна из этих пар состоит из известных узлов Конвея и Киношиты–Терасаки. Однако в случае узлов с 11 пересечениями узлы-мутанты появляются только парами. Мы считаем, что существует большое число операций мутации, порождающих семейства узлов-мутантов с количеством пересечений больше 11, но они выходят за рамки нашего обсуждения.

Существует семейство узлов, которые называют узлами-претцелями, изображенное на рис. 2, и кото-

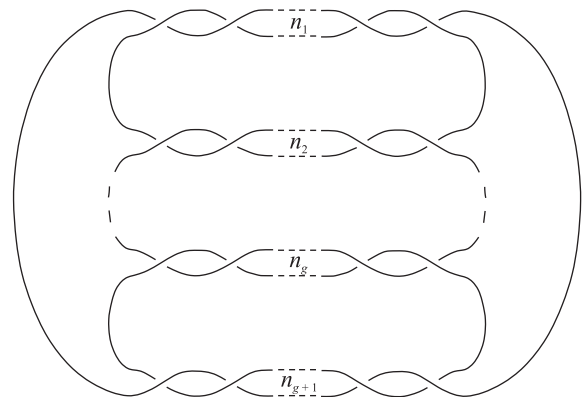


Рис. 2. Узлы-претцели $K(n_1, n_2, \dots, n_g, n_{g+1})$

рые включают в себя много новых мутантов, полученных с помощью мутаций 2-танглов. Они являются обобщением торических узлов, о которых многое известно. Узлы-претцели можно поместить на поверхность рода g . Однако, в отличие от торических узлов, на одну ручку можно поместить только две нити, см. рис. 2. Узлы-претцели параметризуют числом пересечений на каждой ручке.

Легко увидеть, что перестановка чисел между ручками в точности отвечает мутации. Таким обра-

зом, начиная с рода 4, появляются пары мутантов. Для двух и трех ручек мутация дает в точности тот же узел, однако для старших родов существуют более широкие наборы мутантов. Заметим, что среди этих претцелевых пар мутантов некоторые принадлежат классу мутантов, обладающих более высокой симметрией и различимых только представлением $R = [4, 2]$ (см. рис. 3 и [7]).

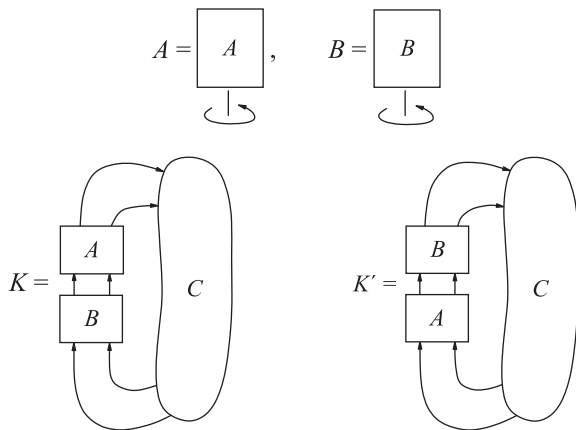


Рис. 3. Узлы-мутанты с большей степенью симметрии из [8]

3. \mathcal{R} -матричный РТ-подход. Подход Решетина–Тураева (РТ) возникает естественным образом, если средние значения петель Вильсона [3] вычисляются во временной калибровке [24, 25]. Тогда каждое пересечение на диаграмме узла (проекция узла на двумерную плоскость) связано с \mathcal{R} -матрицей. Можно начать с универсальной квантовой \mathcal{R} -матрицы для $U_q(SL(N))$ и вычислить $U_q(SL(N))$ -матрицу в конкретных представлениях с помощью генераторов квантованной универсальной обертывающей алгебры:

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \prod_{\beta \in \Phi^+} \exp_q((q - q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta), \tag{1}$$

где E_β, F_β и h_β являются генераторами квантованной универсальной обертывающей алгебры:

$$\begin{aligned} [h_i, E_j] &= a_{ij} E_j, & [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, & [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Свертка \mathcal{R} -матриц в пересечениях на диаграмме узла по линиям между пересечениями и последующее вычисление взвешенного следа [9] позволяет получить полином ХОМФЛИ-ПТ. В отличие от первоначального определения полиномов через скейн-соотношения [1] этот подход одинаково хорошо ра-

ботает для любого представления R . Однако при использовании универсальной \mathcal{R} -матрицы вычисления необходимо делать отдельно для каждого N .

Более продвинутый современный РТ-метод [14, 15] использует \mathcal{R} -матрицы в базисе сплетающих операторов. Когда \mathcal{R} -матрица действует на тензорное произведение двух представлений V_1 и V_2 , можно рассмотреть разложение произведения по неприводимым представлениям $V_1 \otimes V_2 = \oplus_Q \mathcal{M}_{V_1 V_2}^Q \cdot Q$. Так как \mathcal{R} -матрица коммутирует с копроизведением [28], на неприводимые представления она действует умножением на число $\pm q^{C_2(Q)}$ [29], где $C_2(Q)$ – это собственное значение второго оператора Казимира в представлении Q .

Давайте рассмотрим \mathcal{R} -матрицу в базисе неприводимых представлений, или, лучше сказать, в пространстве сплетающих операторов и представим узел как замыкание n -нитевой косы. Тогда ответ для полинома ХОМФЛИ-ПТ $\mathcal{H}_V^K(A, q)$ узла \mathcal{K} , раскрашенного представлением V , разделяется на две части: одна зависит от группы, другая зависит от узла [14, 15]:

$$\mathcal{H}_V^K(A, q) = \sum_{Q \in V^{\otimes n}} S_Q^*(A, q) B_Q^K(q). \tag{3}$$

С этого момента мы ассоциируем с представлением Q соответствующую ему диаграмму Юнга. S_Q^* – это квантовая размерность представления Q квантовой группы $U_q(SL(N))$. Квантовая размерность равна полиному Шура S_Q в некоторой специальной точке [30, разд. 7.1.6]. Она не зависит от узла, и зависит от N через переменную $A = q^N$. С другой стороны, B_Q^K вычисляется для конкретного узла как след произведения \mathcal{R} -матриц и не зависит от A или N . Важно, что оба этих фактора зависят только от диаграммы Юнга Q , а вся зависимость от A скрыта в фиксированных полиномах от A – квантовых размерностях. Это означает, что современный РТ-подход позволяет вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для всех N сразу, в отличие от стандартного РТ-подхода, который мы используем в данной работе.

Тем не менее, у современного РТ-подхода имеются большие трудности. Во-первых, необходимо использовать представление узла в виде косы, которое, в случае мутантов, содержит большое число нитей. Во-вторых, несмотря на то, что \mathcal{R} -матрицы в пространстве сплетающих операторов устроены просто, их необходимо дополнительно вращать при переходе к другим парам нитей в косе [14, 15]. Это вращение производится матрицами Рака, вычисление которых является очень непростой задачей, особенно в случа-

як больших представлений [31, 32] и большого числа нитей в косе [14], которыми мы здесь интересуемся.

В вычислениях, о которых идет речь в этой работе, мы не использовали базис неприводимых представлений для \mathcal{R} -матриц и изучали полиномы узлов и их разности для конкретных значений N , которые в некоторых случаях удалось продолжить на произвольные N .

4. Разности полиномов узлов-мутантов. В [6, 7, 20] мы использовали современный РТ-подход для вычисления разностей инвариантов для узлов-мутантов с 11 пересечениями. Мы установили, что эти разности очень хорошо факторизуются. Они равны

$$\Delta H_{[2,1]}^{\text{mutant}} = A^\gamma \cdot f(A, q) \cdot \text{Mt}_{[2,1]}(q), \tag{4}$$

где γ – целое число, $\text{Mt}_{[2,1]}(q)$ – функция, зависящая только от q , и

$$f(A, q) := \{q\}^4 \cdot [3]^2 D_3^2 D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}^2, \tag{5}$$

где [...] обозначает q -число, $\{q\} := q - q^{-1}$, и факторы

$$D_k := Aq^k - A^{-1}q^{-k} \tag{6}$$

называются дифференциалами. Отметим, что H в ур. (4) обозначает нормированные полиномы ХОМФТИ-ПТ, при этом полные полиномы (средние Вильсона) обозначаются \mathcal{H} в (3).

В данной работе, используя подход, описанный в предыдущем разделе и основанный на \mathcal{R} -матрицах при конкретных N , мы вычислили разности между полиномами узлов-мутантов в представлениях [3, 1] и [4, 2]. Ответы получились достаточно громоздки, их можно найти как в более детальной публикации [33], так и на специальном интернет-ресурсе [34].

Для представления [3, 1] нам сначала удалось вычислить разности для нескольких значений N . Это позволило построить полные ответы для произвольного N и, таким образом, получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ, раскрашенные представлением [3, 1]. Эти разности, однако, не факторизуются так же полно, как в случае представления [2, 1]. Тем не менее в них выделяется структура дифференциалов:

$$\Delta H_{[3,1]}^{\text{mutant}} = \{q\}^4 \cdot [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} \cdot \text{Mt}_{[3,1]}(A, q). \tag{7}$$

Когда дифференциалы D_{-i} появляются в качестве множителя, это значит, что разность инвариантов равна нулю для группы $U_q(SL(i))$. Таким образом, мы видим, что разности между полиномами узлов-мутантов для представления [2, 1] обращаются в нуль для групп $U_q(SL(2))$ и $U_q(SL(3))$, и для представления [3, 1] для группы $U_q(SL(2))$. Эти результаты оче-

видны для группы $U_q(SL(2))$, так как разности исчезают для любых симметрических представлений, как было упомянуто во Введении. Это менее тривиально для $U_q(SL(3))$ (см. [4]). Дифференциалы D_i с положительными i имеют тот же смысл для транспонированного представления R . Представление $R = [2, 1]$ не меняется при этом преобразовании, а представление $R = [3, 1]$ преобразуется в $R = [2, 1, 1]$. Таким образом, мы заключаем, что разность для $R = [2, 1, 1]$ исчезает для группы $U_q(SL(4))$.

Для представления [4, 2] нам не удалось сконструировать ответ для произвольного N . Однако у нас получилось вычислить ответы для мутантов-pretцелей для групп $U_q(SL(3))$ и $U_q(SL(4))$.

5. Дифференциальное разложение. Цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ обладают дополнительной структурой, которую называют дифференциальным разложением (ДР) [16, 21–27]. Она связана с теорией представлений [16, 17]. Простейший пример ДР появляется уже в фундаментальном представлении: так как для абелевой $U(1)$ теории Черна–Саймонса, т.е. для $A = q$, нормированные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в топологическом фрейминге тривиальны, мы получаем

$$H_{[1]}(A, q) = 1 + D_1 D_{-1} \cdot F_{[1]}(A, q) \tag{8}$$

с новым, более простым полиномом Лорана $F_{[1]}(A, q)$. Если продолжить эти рассуждения и обратить внимание на другие N , можно получить общую структуру разложения цветных полиномов по произведениям независимых от узла комбинаций Z_R^Q различных дифференциалов D_k :

$$H_R^K(A, q) = \sum_{Q \in M_R} Z_R^Q(A, q) \cdot F_R^K(A, q). \tag{9}$$

Важным параметром дифференциального разложения является дефект δ_K узла K . Он определяется как степень полинома Александра, то есть специализации фундаментального полинома ХОМФТИ-ПТ в точке $A = 1$:

$$H_{[1]}^K(A, q) \Big|_{A=1} = \sum_{j=-\delta_K-1}^{\delta_K+1} a_j q^{2j}. \tag{10}$$

Дифференциальное разложение наиболее сложно устроено в случае ненулевого дефекта, к которому относятся узлы-мутанты. Об общей теории дифференциального разложения пойдет речь в других работах, здесь же мы только обсудим конкретную проблему, возникающую для пар узлов-мутантов.

Рассмотрим разность дифференциальных разложений для полиномов ХОМФЛИ-ПТ пары узлов-мутантов. Мы обозначим эту разность через Δ . Мож-

но предположить, что вклад в нее вносят только недиагональные композитные представления, такие как $X_2 := ([2], [1, 1]) \oplus ([1, 1], [2])$ и $X_3 := ([3], [2, 1]) \oplus ([2, 1], [3])$. Мы, однако, допускаем также дополнительное преобразование некоторых ДР-коэффициентов, которое остается ненаблюдаемым в лидирующем порядке, но может внести вклад в старшие представления, это преобразование мы обозначим δ . В первом смешанном представлении из [7, ур. (106)] и [27, ур. (14)–(17)] можно получить выражение, зависящее от двух неизвестных функций вида

$$\begin{aligned} \Delta H_{[2,1]} &= \\ &= \frac{[3]}{[2]^2} \left(\underbrace{D_0^2}_{\times 0} + \underbrace{[3]D_2D_{-2}}_{\times \{q\}^4 [2]^2 \cdot \delta F_{[1]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4 [3]^2 D_2 D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]})} = \\ &= \{q\}^4 \cdot [3]^2 D_3^2 D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}. \end{aligned} \quad (11)$$

Величина δF_1 обозначает возможное перераспределение коэффициентов между разными членами дифференциального разложения для двух мутантов, которое при этом не влияет на правую часть выражения, однако может проявить себя в разности между мутантами в старших представлениях. Естественно предположить, что она равна нулю, однако мы оставляем эту возможность открытой.

Аналогично, для следующего смешанного представления

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]} &= \frac{[4]}{[3]} \left(\underbrace{D_1 D_0}_0 + \underbrace{\frac{[4]}{[2]} D_3 D_{-2}}_{\times \{q\}^4 [3]^2 \cdot \delta F_{[1]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4 [4]^2 [2] D_3 D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]})} + \\ &+ \frac{[4]}{[3]^2} \left(\underbrace{D_3 D_1^2 D_0}_{\times 0} + \underbrace{[4][2] D_4 D_3 \overline{D_0} D_{-2}}_{\times \{q\}^4 [3]^2 \cdot \delta F_{[2]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4 [4]^2 [2] D_4 D_3 \overline{D_0} D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_3} - \delta F_{[2]})} = \\ &= \{q\}^4 \cdot [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} \cdot \text{Mt}_{[3,1]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь мы сталкиваемся со следующей проблемой: все члены в последней строке делятся на D_4 , кроме $\Delta F_{X_2} \neq 0$.

Существует по крайней мере два возможных выхода из этой ситуации. Первая возможность заключается в том, чтобы допустить $\delta F_{[1]} \neq 0$. Например, пусть

$$\Delta F_{X_2} = D_3^2 D_0 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]} \delta F_{[1]} = D_3 D_2 D_1 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}$$

так, что $\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]} = -[2] \{q\}^2 D_3 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}$. Тогда мы получим:

$$\{q\}^4 [4]^2 [2] D_2 D_{-2} \left(\Delta F_{X_2} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{[3]}\right)}_{\frac{[4]}{[3][2]}} \delta F_{[1]} \right) =$$

$$= \{q\}^4 [4]^2 [2] D_2 D_{-2} D_3 D_{-3}^2 \underbrace{\left(D_3 D_0 - \frac{[4]}{[3][2]} D_2 D_1 \right)}_{\frac{D_4 D_{-1}}{[3]}} \cdot \text{Mt}_{[2,1]},$$

которое делится на D_4 . Однако теперь возникает новая потенциальная проблема: мы получаем $D_4 D_{-1}$, а не $D_4 D_0$, однако D_0 с чертой может отсутствовать в дифференциальном разложении для ненулевого дефекта. В любом случае, еще большее количество других факторов должно сойтись...

Другая возможность заключается в том, чтобы обратить внимание на $F_{[3,1]}$, который не участвовал в вышеизложенном вычислении разностей и может отличаться для разных мутантов. В случае $H_{[2,1]}$ у нас получалось $\Delta F_{[2,1]} = 0$, потому что эта разность также входит в выражение для разности в прямоугольном представлении $H_{[2,2]}$, которая не различает мутантов, т.е. $\Delta H_{[2,2]} = 0$. Однако $H_{[3,3]}$ содержит вклады от *двух* непрямоугольных структур, таким образом, $F_{[3,1]}$ и $F_{[3,2]}$ могут быть ненулевыми и компенсировать друг друга в нулевой разности в прямоугольном представлении $\Delta H_{[3,3]}$.

6. Заключение. Это письмо является кратким изложением наших результатов для полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов. Эти полиномы и особенно разности между ними представляют большой интерес со многих точек зрения. Нам удалось сконструировать разности между полиномами в представлении $R = [3, 1]$ для всех узлов-мутантов с 11 пересечениями. Они оказались менее структурированными, чем ответы в случае представления $[2, 1]$, тем не менее зависимость от представления в них достаточно нетривиальная. Мы также изучили дифференциальное разложение этих разностей, связанное со свойствами представлений, для которых они вычислены. В частности, мы нашли тонкое место в дифференциальном разложении мутантов, которое требует дальнейшего изучения в случае узлов с ненулевыми дефектами. Осталось неизученным, что происходит для старших представлений.

Мы также вычислили разности между полиномами узлов-мутантов в представлении $[4, 2]$, но только для групп $U_q(SL(3))$ и $U_q(SL(4))$, что недостаточно для того, чтобы найти общий ответ, однако позволило нам различить узлы-мутанты. Для того чтобы найти полные инварианты ХОМФЛИ-ПТ, необходимо либо применить другие подходы, либо серьезно оптимизировать компьютерные программы.

Наша работа была частично поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (Л. Бишлер, А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов, А. Слепцов), грантом

- президента Российской Федерации МК-2038.2019 (Л. Бишлер, Ан. Морозов), грантами РФФИ 19-01-00680 (А. Миронов), 19-02-00815 (А. Морозов), 20-01-00644 (Ан. Морозов, А. Слепцов), 18-31-20046-мол-а-вед (А. Слепцов), совместными грантами 19-51-50008-ЯФ-а (Л. Бишлер, А. Миронов, Ан. Морозов), 19-51-53014-ГФЕН-а, 18-51-05015-Арм-а, 18-51-45010-ИНД-а (Л. Бишлер, А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов, А. Слепцов), П. Рамадеви, Вивек Кумар Сингх и Сасвати Дхара благодарят грант ДНТ-РФФИ (INT/RUS/RFBR/P-231) за поддержку. Работа также частично финансировалась РФФИ и ННФБ в соответствии с исследовательским проектом 19-51-18006 (А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов). Вивек Кумар Сингх хотел бы поблагодарить Индийский Институт Научного Образования и Исследования, Пуна (Индия), где он частично занимался данной работой во время своего визита в качестве приглашенного исследователя. А. Миронов, А. Морозов и П. Рамадеви признательны Институту теоретической физики им. Кавли за гостеприимство и Национальному научному фонду за частичную поддержку по гранту NSF PHY1748958.
-
1. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12**(2), 239 (1985).
 2. J. H. Przytycki and P. Traczyk, *J. Knot Theor.* **4**, 115 (1987); arXiv:1610.06679.
 3. E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **121**, 351 (1989).
 4. H. R. Morton and H. J. Ryder, *Geom. Topol. Monogr.* **1**, 365 (1998); arXiv:math/9810197.
 5. H. R. Morton and P. R. Cromwell, *J. Knot Theory Ramif.* **5**, 225 (1996).
 6. S. Nawata, P. Ramadevi, and Vivek Kumar Singh, *J. Knot Theory Ramif.* **26**(14), 1750096 (2017); arXiv:1504.00364.
 7. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, and Vivek Kumar Singh, *JHEP* **1507**, 109 (2015); arXiv:1504.00371.
 8. H. R. Morton, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **146**, 95 (2009); arXiv:0705.1321.
 9. V. G. Turaev, *Invent. Math.* **92**, 527 (1988).
 10. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Commun. Math. Phys.* **127**, 1 (1990).
 11. N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invent. Math.* **103**, 547 (1991).
 12. P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, and R. K. Kaul, *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 3205 (1994); hep-th/9401095.
 13. S. Nawata, P. Ramadevi, and Zodinmawia, *J. Knot Theory Ramif.* **22**, 13 (2013); arXiv:1302.5144.
 14. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *JHEP* **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
 15. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, in *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer*, ed. by A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, and E. Scheidegger (World Scientific Publishins Co.Pte.Ltd. (2013), p. 101; arXiv:1112.5754.
 16. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *AIP Conf. Proc.* **1562**(1), 123 (2013); arXiv:1306.3197.
 17. C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, *Phys. Lett. B* **778**, 197 (2018); arXiv:1709.09228.
 18. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *JHEP* **2018**, 128 (2018); arXiv:1804.07278.
 19. A. Mironov and A. Morozov, *JETP Lett.* **107**, 728 (2018); arXiv:1804.10231.
 20. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh, and A. Sleptsov, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 085201 (2017); arXiv:1601.04199.
 21. N. M. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, *Experimental Math.* **15**, 129 (2006); arXiv:math/0505662.
 22. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *JHEP* **7**, 131 (2012); arXiv:1203.5978.
 23. Ya. Kononov and A. Morozov, *JETP Lett.* **101**, 831 (2015); arXiv:1504.07146.
 24. A. Morozov and A. Smirnov, *Nucl. Phys. B* **835**, 284 (2010); arXiv:1001.2003.
 25. A. Morozov and A. Smirnov, in *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*, Proceedings of the International School of Subnuclear Physics, ed. by A. Zichichi, Erice, Sicily, Italy, 29 August-7 September 2009, World Scientific, v. 47, p. 489; arXiv:0910.5011.
 26. S. Arthamonov, A. Mironov, and A. Morozov, *Theor. Math. Phys.* **179**, 509 (2014); arXiv:1306.5682.
 27. A. Morozov, arXiv:1903.00259.
 28. N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadjan, and L. D. Faddeev, *Algebra and Analysis* **1**, 178 (1989).
 29. M. Gould and Y. Zhang, *J. Math. Phys.* **35**(12), 6757 (1994); arXiv:hep-th/9311041.
 30. A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, World Scientific (1997); <https://www.springer.com/la/book/9783642646010>.
 31. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, *Pisma v ZhETF* **104**, 52 (2016); arXiv:1605.03098.
 32. A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, *Pis'ma v ZhETF* **106**, 607 (2017); arXiv:1709.02290.
 33. L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh, and A. Sleptsov, to be published.
 34. <http://knotbook.org>.

Вклад структурных дефектов в интенсивность квазизапрещенных рентгеновских отражений алмаза: сравнение данных рентгеновской топографии и инфракрасной спектроскопии

А. А. Ширяев^{+*1)}, Д. А. Золотов[×], Е. М. Супрун[°], И. Г. Дьячкова[×], С. А. Ивахненко[°], В. Е. Асадчиков[×]

⁺Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН, 119071 Москва, Россия

^{*}Институт геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии (ИГЕМ) РАН, 119017 Москва, Россия

[×]Федеральный научно-исследовательский центр “Кристаллография и фотоника” РАН, 119333 Москва, Россия

[°]Институт сверхтвердых материалов им. В. Н. Бакуля НАН Украины, 04074 Киев, Украина

Поступила в редакцию 9 апреля 2020 г.

После переработки 10 апреля 2020 г.

Принята к публикации 10 апреля 2020 г.

Представлено дальнейшее развитие подхода к исследованию дефектов в совершенных кристаллах с алмазной решеткой на основе рентгеновской топографии в квазизапрещенном отражении 222. Для синтетических алмазов различных типов проведено сравнение пространственного распределения интенсивности рентгеновских отражений 111 и 222 с распределением точечных дефектов. Установлена перспективность использования рентгеновской топографии с использованием квазизапрещенного отражения 222 для исследования слабых напряжений в совершенных кристаллах.

DOI: 10.31857/S1234567820090049

Введение. Как известно, в структуре алмаза (пространственная группа $Fd\bar{3}m$), отражения от плоскостей 222 являются запрещенными из-за симметрии. Однако ангармоничность атомных колебаний и ковалентный характер межатомных связей ведут к отклонениям формы электронного облака от сферичности, что и объясняет появление в экспериментах запрещенных отражений (например, 222, 442, 622 для алмаза или кремния), иногда называемых “квазизапрещенными”. Изучение таких отражений является одним из немногих прямых методов исследования распределения валентных электронов в твердых телах [1–4]. Значительный интерес также представляет возможность изучения влияния точечных и протяженных дефектов в кристаллах на распределение электронной плотности [5–9].

Рентгеновская топография является одним из основных неразрушающих методов исследования реальной структуры кристаллов. На примере алмаза было показано [10, 11], что рентгеновская топография в квазизапрещенных отражениях может дать информацию о пространственном распределении не только протяженных, но и некоторых видов точечных дефектов, а также может быть использована для уточнения моделей строения дефектов. С целью

развития данного подхода в настоящей работе изучены высококачественные синтетические алмазы с различными концентрациями примесных дефектов. Полученные с помощью инфракрасной (ИК) спектроскопии карты пространственного распределения N- и B-содержащих точечных дефектов сопоставлены с рентгенотопографическими изображениями в разрешенном 111 и квазизапрещенном 222 отражениях.

Образцы и методы. В работе изучены кристаллы алмаза трех типов: 1) кристаллы, в которых концентрация азота меньше 10^{18} см^{-3} (тип Па, “безазотные”); 2) бор-содержащий (тип Пб); 3) с азотом в неагрегированной форме, т.е. в виде одиночных замещающих атомов азота (С-дефекты, тип Пв). ИК-спектры кристаллов приведены на рис. 1. Концентрация примеси азота в кристалле Пв до 220 at. ppm (ppm – *parts per million*, использованы калибровки из [12]); концентрация нескомпенсированного бора в кристалле типа Пб – 1–1.5 at. ppm (по калибровкам из [13]). Образцы выращены в области термодинамической стабильности алмаза при давлениях 5.7–6.1 ГПа и температуре 1420–1500 °С. Использованы ростовые системы на основе сплавов растворителей Fe-Ni (алмазы типа Пв); Fe-Al и Fe-Co с добавлением геттеров азота (Zr, Ti) для типов Па и Пб. Скорость роста составляла до 1–2 мг/ч. Выращивание монокристаллов алмаза проводили методом темпе-

¹⁾e-mail: shiryayev@phyc.che.ac.ru; a_shiryayev@mail.ru

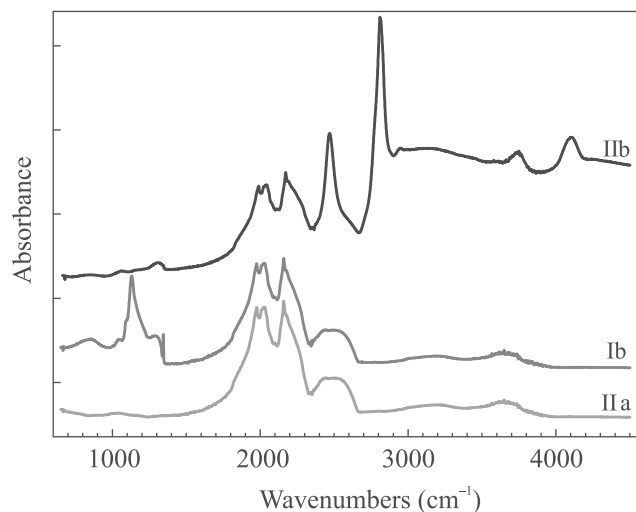


Рис. 1. (Цветной онлайн) Характерные спектры ИК-поглощения изученных алмазов. Кривые смещены по вертикали для ясности

ратурного градиента с использованием аппаратуры высокого давления типа “Тороид”. Для кристаллов характерен кубооктаэдрический габитус, размер 4–6 мм; вес 0.1–0.25 карат. Плотность включений, дислокаций и других протяженных дефектов низка, однако в некоторых образцах присутствуют “конусовидные” дефекты [14], детально изученные в работе [15] и представляющие собой пучки дислокаций, декорированные включениями.

Рентгеновские топограммы в максимуме кривой качания были получены на лабораторном рентгеновском дифрактометре ДИТОМ-М [16]. В качестве источника использовалась рентгеновская трубка с характеристической линией $\text{Mo K}_{\alpha 1}$ (энергия 17.478 кэВ), выделяемой монохроматором из асимметрично срезанного кристалла кремния (111). Расстояние “монохроматор–образец” составляет 1000 мм. Применение асимметрично срезанного кристалла с коэффициентом асимметрии $\beta \sim 10$ обеспечивало необходимую ширину пучка для облучения всего исследуемого кристалла алмаза. Измерения дифракционного контраста производились в геометрии Лауэ. Пространственное разрешение топограмм определяется размером чувствительного элемента детектора (ПЗС-камера) и составляет 9 мкм. В эксперименте расстояние “образец–детектор” выбиралось как можно меньше и составило порядка 30 мм, для уменьшения рассеяния рентгеновского излучения на дефектах с целью усиления контрастности изображения. Время экспозиции для отражений 111 составляло 2000 с, для отражения 222 было увеличено до 6000 с, так как в этом случае интенсивность суще-

ственно ниже. Однако изображения на топограммах в квазизапрещенном отражении 222 имеют невысокую контрастность и зернистость.

Карты пространственного распределения ИК-активных дефектов получены на Фурье-спектрометре SpectrumOne (Perkin Elmer), оснащенным ИК-микроскопом AutoImage. Спектры регистрировались с апертурой размером 50–200 мкм, в каждой точке записано не менее 50 сканов. Для построения карт распределения дефектов после вычитания фоновой линии проводилась нормировка поглощения на интенсивность поглощения алмазной решеткой (волновое число 1980 cm^{-1}). Интенсивность поглощения одиночным замещающим атомом азота (С-дефект) оценивалась по основной полосе с максимумом 1135 cm^{-1} [12]. В случае бор-содержащего алмаза (тип IIb) преимущественно изучалось распределение полосы с максимумом 2800 cm^{-1} , соответствующей электронным переходам на возбужденный уровень акцепторного бора.

Результаты и обсуждение. На рисунках 2–4 представлены рентгеновские топограммы образцов и карты распределения основных примесных дефектов, полученные с помощью ИК-спектроскопии. Для алмазов типов IIa и IIb (рис. 2, 3) наблюдается качественное соответствие топограмм для двух разных рефлексов с векторами дифракции \mathbf{h} [111] и [222]. На топограммах с использованием отражения 111 хорошо видны пучки дислокаций, ошибки упаковки и зоны пластической деформации. Те же самые дефекты проявляются и на топограммах отражения 222 (рис. 2b, d, рис. 3b), однако отдельные дислокации в пучках практически не разделяются. Потеря контрастности объясняется не только низким отношением сигнал/шум, но и большой длиной экстинкции данного отражения и, следовательно, очень высокой чувствительностью к небольшим напряжениям [10].

В алмазе типа IIa концентрация примесных и собственных точечных дефектов слишком мала и их вклад в интенсивность рентгеновских отражений ничтожен. Более интересным является кристалл типа IIb. Примесь бора в изученном образце распределена очень неоднородно (рис. 3с), что отражает зависимость концентрации бора от ростового сектора алмаза. Интенсивность отражения 222 положительно коррелирует с интенсивностью полосы 2800 cm^{-1} в ИК спектрах (рис. 3b, c). Однако максимальная концентрация нескомпенсированного бора в изученном образце не превышает 1.5 at. ppm. Хотя фактически оценивается разность концентраций бора и азота, отсутствие заметного поглощения азотными дефектами позволяет утверждать, что общая концентра-

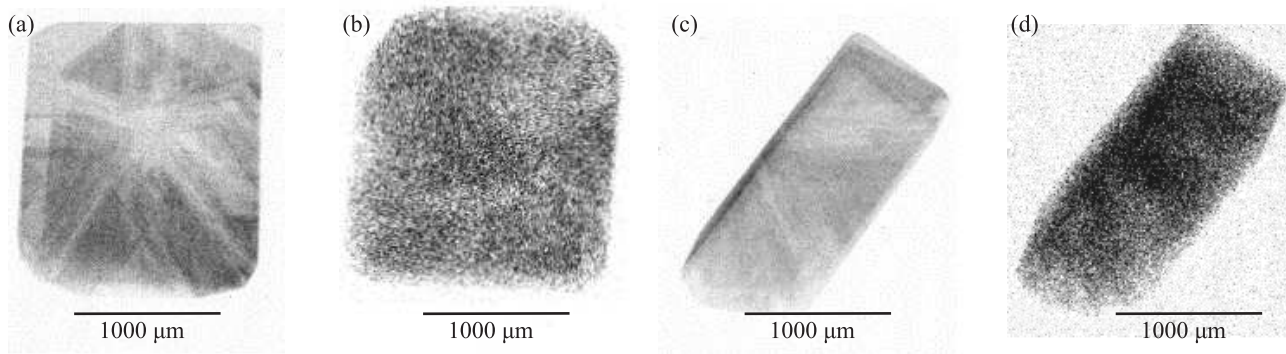


Рис. 2. Сравнение рентгеновских топограмм образца алмаза типа IIa при разных углах поворота кристалла: (a), (c) – отражение (111); (b), (d) – отражение (222). Вектор дифракции направлен вверх

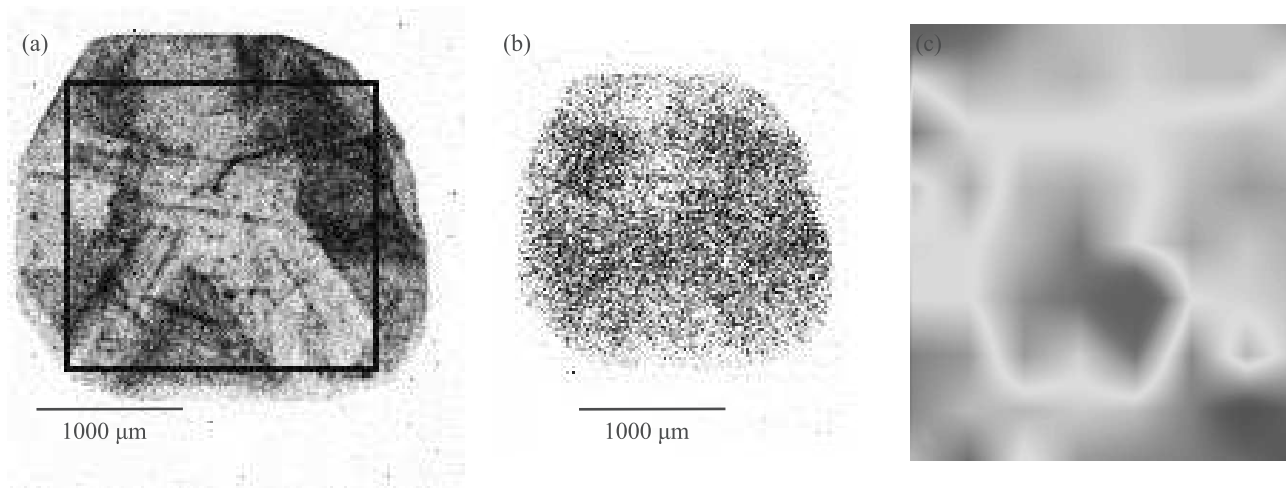


Рис. 3. (Цветной онлайн) Сравнение рентгеновских топограмм образца алмаза типа IIb: (a) – отражение (111); (b) – отражение (222). Вектор дифракции направлен вверх. На рис. (a) квадратом показана область ИК-карты (c). (c) – Карта распределения интенсивности ИК полосы 2800 см^{-1} . ИК поглощение пропорционально интенсивности желтого цвета

ция примесных дефектов в изученном образце также не превышает единиц ppm. С учетом близости атомных радиусов бора и углерода такие концентрации примеси не могут существенно влиять на интенсивность рентгеновских отражений. Таким образом, особенности топограммы в отражении 222 для данного образца объясняются различиями совершенства кристаллической решетки в различных ростовых секторах алмаза, а не распределением примесных дефектов.

Неожиданным результатом является равномерность распределения интенсивности отражения 222 для алмаза с С-дефектами (тип IIb) (рис. 4). Именно эти дефекты заметно влияют на параметр решетки алмаза и вносят существенные возмущения в распределение электронной плотности [17], что позволило выявить корреляции между их пространственным

распределением и топограммами в отражении 222 в работе [11]. Хотя в изученном кристалле выявлена как яркая секториальная неоднородность распределения С-дефектов (рис. 4f), так и присутствие дислокаций (рис. 4a, c, e), на топограммах в отражении 222 наблюдается лишь довольно равномерное почернение. По всей видимости, это несоответствие является следствием небольших по абсолютной величине напряжений, возникающих в объеме всего кристалла из-за разницы параметра решетки кубических и октаэдрических секторов алмаза. Хотя эти напряжения не проявляются на топографии в отражении 111, высокая чувствительность (квази)запрещенных отражений именно к слабым напряжениям объясняет их проявление в виде равномерного почернения на топограмме 222. В работе [11] изучались тонкие алмазные пластины, вырезанные в направлении (110).

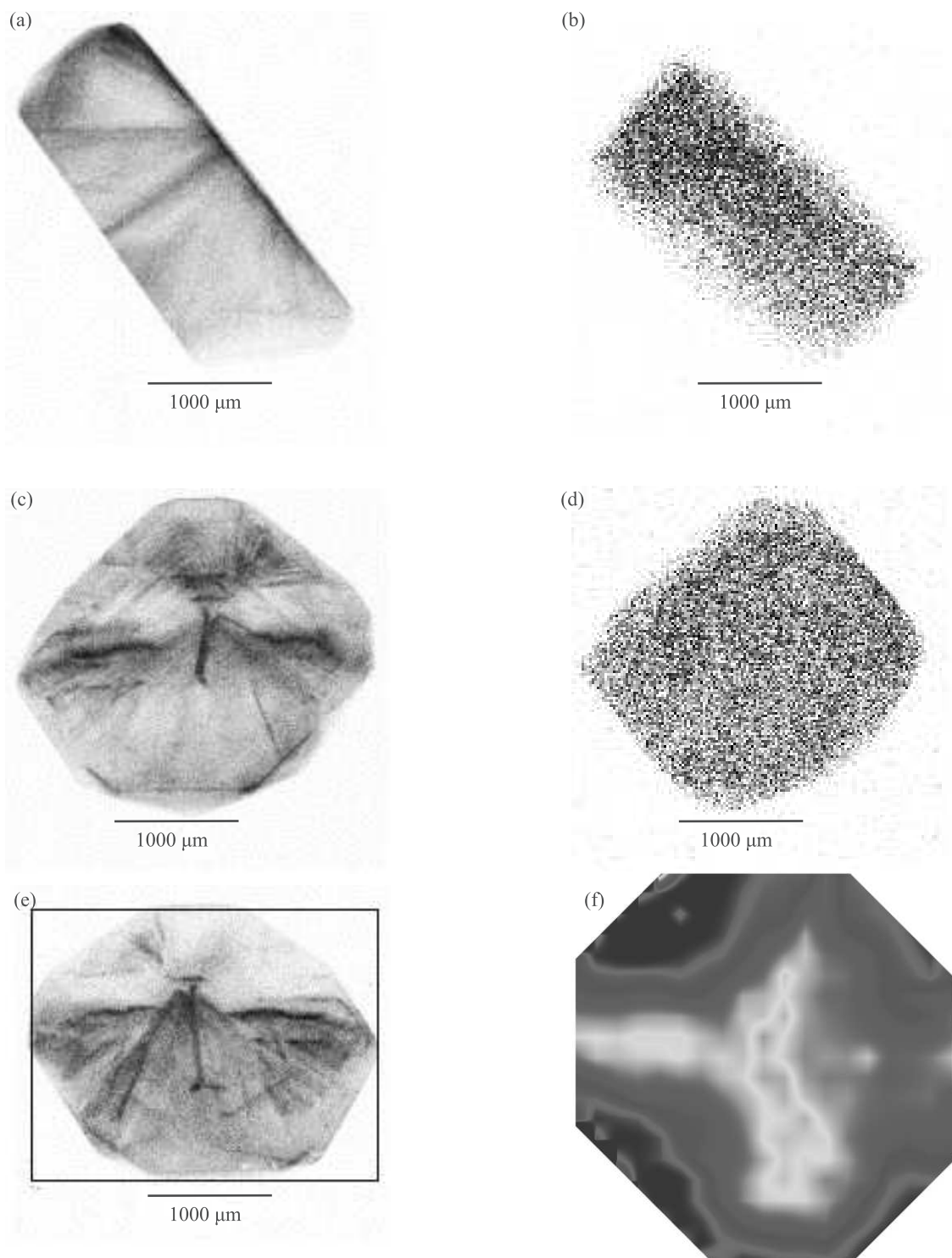


Рис. 4. (Цветной онлайн) Сравнение рентгеновских топограмм образца алмаза типа Ib при разных углах поворота кристалла: (a), (c), (e) – отражение 111; (b), (d) – отражение 222. Вектор дифракции направлен вверх. Квадрат на рис. (e) соответствует области ИК карты (f). (f) – Карта распределения интенсивности ИК-полосы 1135 см^{-1} . ИК поглощение пропорционально интенсивности желтого цвета

В этом случае вклад межсекториальных напряжений уменьшается, что и позволило выделить вклад то-

чечных дефектов. Следует отметить, что вывод работы [18] об отсутствии влияния дефектов на интен-

сивность запрещенных отражений в кремнии может быть объяснен именно особенностями подготовки образцов.

Выводы. Проведенное изучение алмазов различных типов (IIa, IIb, Ib) показало высокую чувствительность метода рентгеновской топографии при использовании квазизапрещенного отражения 222 к слабым напряжениям, создаваемым различными дефектами в совершенных кристаллах. Для некоторых образцов выявлена неоднородность распределения интенсивности квазизапрещенных отражений по сечению кристаллов, вызванная протяженными и, в ряде случаев, точечными дефектами. Установлено, что большая длина экстинкции запрещенных отражений накладывает существенные ограничения на выбор образцов для исследования, так как даже небольшие напряжения могут существенно снижать информативность метода. Для многих образцов выявлена неоднородность распределения интенсивности квазизапрещенных отражений по сечению кристаллов, вызванная протяженными и, в ряде случаев, точечными дефектами. Таким образом, применение таких отражений для анализа распределения электронной плотности, структурных факторов и других прецизионных исследований требует тщательного подбора образцов для минимизации вклада дефектов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН в части проведения рентгеновских экспериментов и интерпретации полученных данных.

1. B. Dawson, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **298**, 264 (1967).
2. Ю. А. Розенберг, Л. И. Клешинский, Н. В. Шохирев, В. И. Сизых, Ю. М. Ротнер, ФТТ **29**, 1241 (1987) [Yu. A. Rosenberg, L. I. Kleshinskii, N. V. Shokhiev, A. I. Kolosovskii, V. I. Sizykh, and Yu. M. Rotner, Sov. Phys. Solid State **29**, 710 (1987)].
3. M. A. Spackman, Acta Crystallogr. A **47**, 420 (1991).
4. I. R. Entin and I. A. Smirnova, Acta Crystallogr. A **45**, 577 (1989).
5. T. Takama, K. Tsuchiya, K. Kobayashi, and S. Sato, Acta Crystallogr. A **46**, 514 (1990).
6. I. Fujimoto, S. Nishine, T. Yamada, M. Konagai, and K. Takahashi, Jpn. J. Appl. Phys. **31**, L296 (1992).
7. Е. Н. Овчинникова, В. Е. Дмитриенко, К. А. Козловская, А. Рогалев, Письма в ЖЭТФ **110**(8), 563 (2019).
8. A. Bauer, P. Reischauer, J. Krausslich, N. Schell, W. Matz, and K. Goetz, Acta Crystallogr. A **57**, 60 (2001).
9. M.-I. Richard, T. H. Metzger, V. Holy, and K. Nordlund, Phys. Rev. Lett. **99**, 225504 (2007).
10. А. А. Ширяев, Э. Х. Мухамеджанов, А. Э. Волошин, А. Н. Морковин, М. М. Борисов, С. В. Титков, Письма в ЖЭТФ **88**(10), 767 (2008) [A. A. Shiryaev, E. Kh. Mukhamedzhanov, A. E. Voloshin, A. N. Morkovin, M. V. Borisov, and S. V. Titkov, JETP Lett. **88**, 670 (2008)].
11. A. A. Shiryaev, F. Masiello, J. Hartwig, I. N. Kupriyanov, T. A. Lafford, S. V. Titkov, and Y. N. Palyanov, J. Appl. Crystallogr. **44**, 65 (2011).
12. I. Kiflawi, A. E. Mayer, P. M. Spear, J. A. Van Wyk, and G. S. Woods, Philos. Mag. B **69**(6), 1141 (1994).
13. D. Howell, A. T. Collins, L. C. Loudin, P. L. Diggle, U.F.S. D’Haenens-Johansson, K. V. Smit, A. N. Katrusha, J. E. Butler, and F. Nestola, Diam. Relat. Mater. **96**, 207 (2019).
14. Е. М. Супрун, В. А. Каленчук, С. А. Ивахненко, А. М. Куцай, В. В. Лысаковский, О. А. Заневский, В. Дуфу, В. Шенлинь, Сверхтвердые материалы **38**(6), 3 (2016) [E. M. Suprun, V. A. Kalenchuk, S. A. Ivakhnenko, A. M. Kutsai, V. V. Lysakovskii, O. A. Zanevskii, V. Dufu, and V. Shenlin’, J. Superhard Mater. **38**, 377 (2016)].
15. А. А. Ширяев, Д. А. Золотов, Е. М. Супрун, С. А. Ивахненко, А. А. Аверин, А. В. Бузмаков, В. В. Лысаковский, I. G. Dyachkova, and V. E. Asadchikov, Cryst. Eng. Comm. **20**, 7700 (2018).
16. Д. А. Золотов, А. В. Бузмаков, Д. А. Елфимов, В. Е. Асадчиков, Ф. Н. Чуховский, Кристаллография **62**(1), 12 (2017) [D. A. Zolotov, A. V. Buzmakov, D. A. Elfimov, V. E. Asadchikov, and F. N. Chukhovskii, Crystallogr. Rep. **62**(1), 20 (2017)].
17. P. R. Briddon and R. Jones, Physica B **185**, 179 (1993).
18. R. Corella and A. Merlini, Phys. Status Solidi **18**, 157 (1966).

Многорезонаторная квантовая память с переключателем

С. А. Моисеев¹⁾, Н. С. Перминов¹⁾

Казанский квантовый центр, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ, 420111 Казань, Россия

Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского, ФИЦ, Казанский научный центр РАН, 420029 Казань, Россия

Поступила в редакцию 5 апреля 2020 г.

После переработки 5 апреля 2020 г.

Принята к публикации 6 апреля 2020 г.

В работе исследована схема многорезонаторной квантовой памяти, основанная на системе из четырех взаимодействующих резонаторов, связанных через общий резонатор с внешним носителем при помощи переключаемой связи. Используя алгебраические методы, оптимизированы параметры резонаторов и частотный спектр изучаемой системы, при которых показана возможность высокоэффективного управляемого обратимого переноса информации в квантовую память с произвольным долгим хранением. Обсуждаются возможные применения разрабатываемой схемы для квантового процессинга.

DOI: 10.31857/S1234567820090050

Введение. Работы по созданию высокоэффективной квантовой памяти (КП), работающей в оптическом и микроволновом диапазоне частот, вызывают растущий интерес в связи с необходимостью решения широкого круга задач в сфере квантовых информационных технологий [1]. Особое внимание привлекает проблема создания полномасштабного многокубитового квантового компьютера, использующего сверхпроводящие кубиты, создание которого затрудняется относительно малым временем жизни сверхпроводящих кубитов, которое ограничено сверху временем ~ 100 мкс [2–4]. Вместе с тем, появление такого компьютера представляется возможным при использовании многокубитовой КП, обладающей значительно большим временем жизни. В настоящее время отсутствует КП, параметры которой удовлетворяли бы требованиям, необходимым для использования в квантовом компьютере, хотя есть основания полагать, что такая КП может быть создана, если в качестве носителей квантовой информации использовать микроволновые резонаторы, обладающие большой добротностью и способные увеличить время жизни кубитов до десятков миллисекунд. Другим многообещающим, но более сложным подходом к созданию КП представляется использование электрон-ядерных спиновых ансамблей, которые могут сохранять квантовую информацию в течение единиц и сотен секунд [5, 6].

В создании КП ключевой проблемой остается реализация управляемого высокоэффективного интерфейса (ВИ) [7, 8], призванного обеспечивать обратимый

перенос кубитов (ниже микроволновых фотонов) из волноводного тракта, или квантовых процессоров в КП с последующим восстановлением фотонов в произвольный момент времени. Ниже мы изучаем возможность реализации высокоэффективной широкополосной резонаторной КП, способной также выступать в роли ВИ для различных схем квантовой памяти.

Создание ВИ налагает ряд требований на параметры микроволновых фотонов и стационарных кубитов, на способы реализации их взаимодействия и приводит к необходимости решения соответствующих задач квантовой динамики. Так, использование высокочастотного микроволнового резонатора в качестве КП [9, 10] допускает эффективные операции только с однофотонными волновыми пакетами специальной (экспоненциально нарастающей) временной формы [11], что экспериментально продемонстрировано для микроволновых фотонов с эффективностью 99.41 % и квантовой точностью сохранения исходного состояния 97.4 % [9]. Однако сложность в приготовлении специальной временной формы волновых пакетов и конечное время срабатывания переключателя [10] накладывает серьезные практические ограничения в работе такой памяти. Также большие трудности возникают в достижении эффективности переноса > 99.9 % при использовании такой КП. Эти проблемы определяют важность поиска более совершенных подходов к созданию КП на высокочастотных резонаторах.

В настоящей работе мы следуем подходу, предложенному недавно в наших работах [12–14], где показано, что система связанных резонаторов, облада-

¹⁾e-mail: s.a.moiseev@kazanqc.org; nperminov@kazanqc.org

ющая заданной спектральной структурой резонансных линий способна выполнять роль ВИ при работе с широкополосными световыми и микроволновыми импульсами произвольной временной формы. Эти преимущества возникают благодаря возможности согласования импедансов КП и внешнего волновода в широком спектральном диапазоне частот работы КП. Вместе с тем, время восстановления сигнального микроволнового импульса в работах [12–14] было зафиксировано временной задержкой $T = 2\pi/\Delta$, аналогично AFC протоколу [15] (см. также работу [16], где впервые было предложено формирование сигналов эха в системе осцилляторов, обладающих периодическим набором частот). Ниже мы рассматриваем схему КП на системе из четырех взаимодействующих резонаторов, связанную с внешним носителем (квантовым процессором) через управляемый во времени переключатель и исследуем возможность увеличения времени жизни такой КП от характерных значений $T_1 = 2\pi/\Delta$ до времен в несколько единиц T_1 . Мы оптимизируем параметры и частотные характеристики такой КП для получения обратимой динамики и сверхвысокой эффективности работы КП в режиме увеличенного времени хранения, что требуется для использования в квантовом компьютере.

Теоретическая модель. Изображенная на рис.1 предлагаемая схема КП включает 4 резонатора, 3 из которых $(x_{1,2,3}(t))$ связаны с общим резонатором $y_1(t)$, соединенным через контролируемую связь $k(t)$ с внешним резонатором (сверхпроводящим сигнальным кубитом) $y_2(t)$.

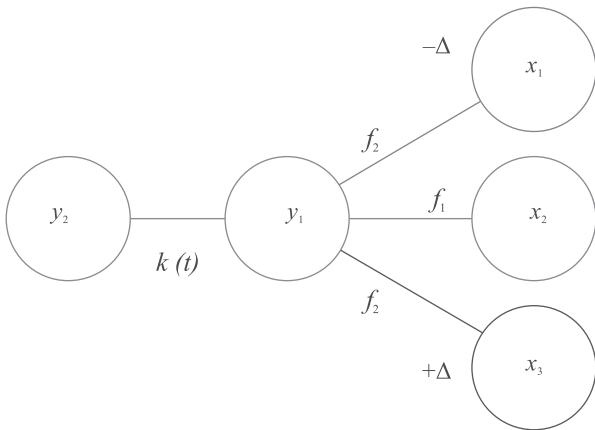


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема четырехрезонаторной КП, соединенной через переключатель с внешним резонатором

Учитывая высокую добротность резонаторов, мы пренебрегаем затуханием в уравнениях движения изучаемой системы на временах $t \ll 2Q/(\Delta_n + \Delta_0)$

(Q – добротность, $(\Delta_n + \Delta_0)$ – частоты резонаторов ($n = 1, 2, 3$)), и, используя Гамильтониан

$$H = \Delta_0 \sum_{m=1,2} a_m^\dagger a_m + \sum_{n=1,3} (\Delta_n + \Delta_0) b_n^\dagger b_n + [k(t)a_1^\dagger a_2 + f_1 a_1^\dagger b_2 + f_2 a_1^\dagger (b_1 + b_3) + \text{h.c.}], \quad (1)$$

записанный в частотных единицах (где $\Delta_1 = -\Delta$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = \Delta$, а f_1 и f_2 – постоянные связи трех резонаторов с общим резонатором, Δ_0 – частоты общего и внешнего резонатора), получим для амплитуд волновой функции $|\Psi(t)\rangle = [\sum_m y_m(t)a_m^\dagger + \sum_n x_n(t)b_n^\dagger]|0\rangle$, соответствующей однофотонному возбуждению в изучаемой системе, следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} [\partial_t + i\Delta]x_1(t) + if_2y_1(t) &= 0, \quad \partial_t x_2(t) + if_1y_1(t) = 0, \\ [\partial_t - i\Delta]x_3(t) + if_2y_1(t) &= 0, \\ \partial_t y_1(t) + ik(t)y_2(t) + if_1x_2(t) + if_2[x_1(t) + x_3(t)] &= 0, \\ \partial_t y_2(t) + ik(t)y_1(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $|0\rangle$ – основное состояние мод резонаторов. В работе [10] в качестве переключателей использовались джозефсоновские контакты, где анализировалась применимость управляемой во времени связи $k(t)$ между резонаторами.

Обратимая динамика и оптимизация свойств КП. В рассматриваемой задаче мы изучаем условия реализации высокоэффективного обратимого переноса возбуждения из сигнального кубита в резонаторы КП, полагая начальное состояние $y_2(0) = 1$, $y_1(0) = x_{1,2,3}(0) = 0$. Для строго обратимой динамики требуется соблюдение условия кратности [17] или эквидистантности [13–16] собственных частот системы взаимодействующих резонаторов. Мы интересуемся двумя режимами работы КП. Режим сохранения квантовой информации имеет место при отключении КП от сигнального кубита, когда $k(t > t_{\text{rec}}) = 0$ (t_{rec} – время загрузки сигнального кубита в КП), а режим загрузки характеризуется ненулевой постоянной k , подлежащей определению.

Работа рассматриваемой КП требует одновременной оптимизации параметров всей системы в каждом из двух режимов. Свободных параметров в рассматриваемой общей задаче оптимизации недостаточно, чтобы строго удовлетворить обратимости одновременно сразу для нескольких режимов использования КП. В зависимости от последовательности оптимизации разных режимов можно получать различные параметры и результаты качества оптимизации для

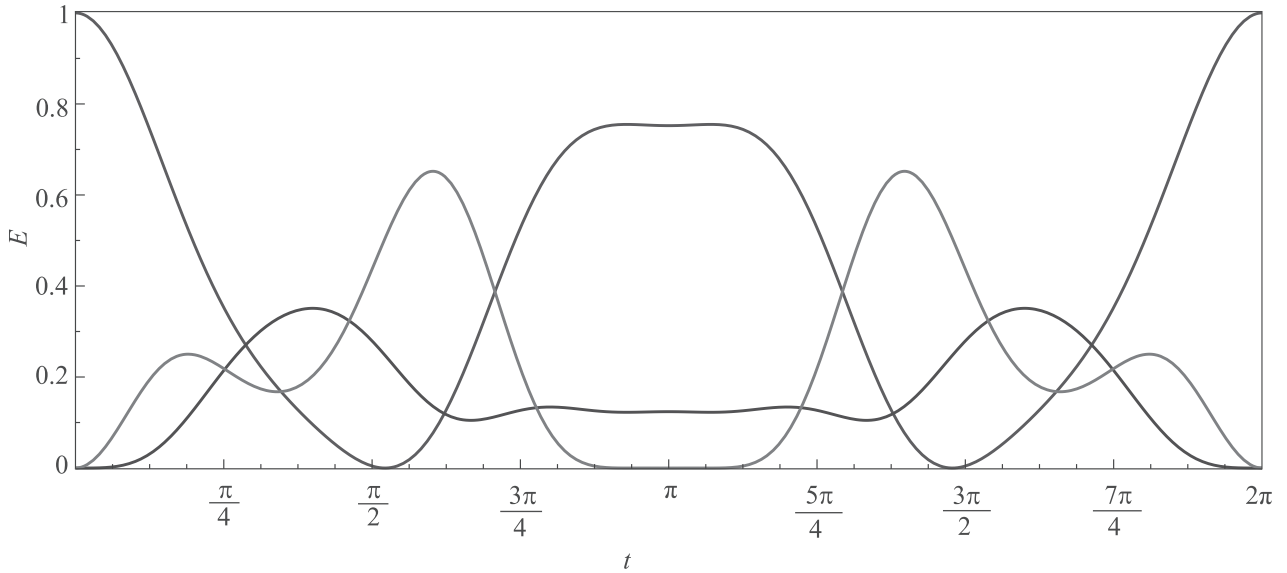


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость вероятности возбуждения $E(t)$ в различных резонаторах для одного цикла хранения: $E[x_2](t)$ – красная линия, $E[x_1](t)$ – синяя линия (совпадает с $E[x_3](t)$), $E[y_1](t)$ – зеленая линия

каждого из режимов и для работы всей системы в целом, так что возможность полной оптимизации не очевидна. Так как режим хранения информации (в отличие от режима загрузки) может представлять собой множество циклов, то неточности оптимизации стадии хранения могут накапливаться на каждом цикле и способны сильнее сказываться на эффективности работы системы. Поэтому мы начнем оптимизацию со стадии хранения в КП при отключенной связи ($k = 0$). Это стадия должна обеспечивать высокую обратимость КП для различных времен хранения информации $T = T_1, 2T_1, 3T_1, \dots, qT_1$ (T_1 – один цикл стадии хранения), пока связь общего резонатора с внешним резонатором не будет восстановлена.

Стадия хранения ($k = 0$). Для получения обратимой динамики в течение многих циклов $q = 2, 3, \dots$ мы накладываем условие кратности частот в системе взаимодействующих резонаторов. Ниже мы требуем, чтобы собственные частоты 4-х взаимодействующих резонаторов были кратны (не эквидистантны) и имели вид $\omega_n = [-4, -1, 1, 4]$, что отлично от оригинального AFC-протокола [15], где частоты строго эквидистантны. В этом случае из анализа уравнений (2) при $k = 0$ получим следующие условия на исходные свободные параметры системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= [[25 - 2f_2^2]^{1/2} + [9 - 2f_2^2]^{1/2}]/2, \\ f_1 &= [[25 - 2f_2^2]^{1/2} - [9 - 2f_2^2]^{1/2}]/2. \end{aligned} \tag{3}$$

Наличие 4-х частот означает, что взаимодействие между резонаторами снимает исходное вырождение частот двух резонаторов y_1, y_2 , формируя кратное распределение частот с масштабным фактором 1.5 в разнице соседних собственных частот. Задавшись при этом начальным состоянием амплитуд в блоке КП вида: $x_1(0) = x_3(0) = y_1(0) = 0, x_2(0) = 1$, для вероятности возбуждения микроволнового фотона в резонаторах КП $E[x_{1,2,3}] = |x_{1,2,3}(t)|^2$ в течение одного цикла хранения получим динамику, изображенную на рис. 2.

Как видно на рис. 2, состояние системы с высокой точностью возвращается в первоначальное при $t = 2\pi$. Примечательно, что вблизи момента времени $t = \pi$ получившееся возбуждение распределено только между модами трех резонаторов x_1, x_2, x_3 (для любого выбора f_2 при выполнении условия (3)). В этом случае моды 4-х резонаторов КП переходят в состояние, близкое к так называемому “темному” состоянию, когда амплитуды возбуждения трех резонаторов удовлетворяют условию $x_2(t) \approx -2x_1(t)f_2/f_1$ (где учтено $x_1(t) = x_3(t)$) в течение всего временного плато вблизи $t = \pi$, при котором мода общего резонатора практически не возбуждается ($y_1(t) \approx 0$ и $\partial_t y_1(t) \approx 0$), несмотря на ее взаимодействие с модами x_1, x_2, x_3 . Это так называемое состояние кутрита $|\Psi(\pi)\rangle = \sum_n x_n(\pi)b_n^\dagger|0\rangle$ относительно медленно меняется во времени вблизи $t = \pi$, пока с высокой точностью соблюдаются фазовые соотношения между резонансными модами x_1, x_3 и x_2 , но последние постепенно изменяются во времени в силу частотной

расфазировки. Однако если в момент времени $t = \pi$ все исходные частоты резонаторов сделать одинаковыми $\Delta(t) \rightarrow 0$, то сформировавшееся “темное” состояние будет сохраняться на большее время, определяемое в пределе лишь добротностью резонаторов.

Отметим, что рассмотренный сценарий работы резонаторов допускает реконфигурацию за счет изменения свободного параметра f_2 (при сохранении условий (3)). При этом вблизи $t = \pi$ также будет возникать соответствующее квазиравновесное “темное” состояние, но с новым измененным распределением энергии между модами резонатора x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющими условию $x_2 \approx -2x_1f_2/f_1$. В этой работе мы не приводим явные формулы для длительности временного плато и возможные значения f_1, f_2 , которые достаточно сложны и позволяют контролировать значение $E[x_2](t = \pi)$ приблизительно в пределах от 0.3 до 1. Например, при $f_2 = 1.8687$: $\Delta = 2.8322, f_1 = 1.4124$ создается состояние кутрита с амплитудами $x_1 \cong x_3 \cong -2^{1/2}/4, x_2 \cong 3^{1/2}/2$ при $t = \pi$, которое определяет кратное деление вероятности распределения исходного состояния между тремя резонаторными модами x_1, x_2, x_3 в отношении 1 : 6 : 1.

Наличие плато дает важную для практической реализации возможность использовать центральный резонатор y_1 с относительно меньшей добротностью и позволяет относительно медленно включать/выключать связь $k(t)$ этого резонатора с внешним резонатором (кубитом). Более того, в этот период времени открывается возможность запускать в резонаторы КП дополнительное излучение, не выпуская наружу уже запасенную в КП энергию. В этих условиях многорезонаторный блок КП (являющийся многоуровневой системой, как и ее отдельный резонатор) допускает специфическое когерентное сложение и интерференцию квантовых состояний разных логических кубитов, что представляет интерес использовать его в квантовых вычислениях и метрологии.

Стадия загрузки ($k \neq 0$). Далее, мы оптимизируем систему резонаторов при связи с внешним резонатором ($k = \text{const} \neq 0$). Для обеспечения временной обратимости в загрузке и восстановления сигнального поля, мы вновь накладываем условие кратности собственных частот в виде $\omega_n/s = [-n_1, -1, 0, 1, n_1]$ теперь уже для 5-ти частичной квантовой системы (где s – некоторый масштабный фактор (не обязательно рациональный), а n_1 – некоторое рациональное число). Это условие можно учесть через результаты алгебраических систем [17], контролирующих условия разрешимости системы уравнений (2), и по-

лучим условие на f_2 , как функцию от параметра связи k :

$$f_2^2 = \left((16 - n_1^2 - k^2 n_1^2)(k^2 n_1^2 + 16n_1^2 - 1) \times \right. \\ \left. \times (k^2 - 16n_1^2 + 1)(k^2 - n_1^2 + 16) \right) / \left((2k^2(n_1^2 + 1)^2 \times \right. \\ \left. \times (n_1^2(k^2 + 17)^2 - 16(n_1^2 + 1)^2)) \right). \quad (4)$$

Оптимальные параметры для переноса состояния из блока памяти в y_2 имеют вид: $[k, \Delta, f_1, f_2, s, n_1] = [1.4247, 2.8322, 1.4124, 1.8687, 1.0352, 4]$. Таким образом, пятирезонаторная система вновь покрывает широкий спектральный интервал и характеризуется кратными частотами, при этом новая линия встраивается в центр спектра, “вызывая” расталкивание боковых линий с масштабным фактором 1.0352. При этих параметрах, определяемых соотношениями (2) и (4), через время $3\pi/s$ происходит почти полная загрузка энергии из внешнего резонатора y_2 в один резонатор КП с модой x_2 , при которой эффективность переноса $E[x_2] = |x_2(t = 3\pi/s)|^2 = 0.99977$ при $y_2(0) = 1$. Без переключения через $t = 6\pi/s$ получим почти полное обращение энергии с эффективностью $\eta = (0.99977)^2 \sim 0.9995$ (см. рис. 3), что вполне отвечает требованиям квантового компьютера.

Особенностью динамики, изображенной на рис. 3, является то, что в момент полной загрузки $t = 3\pi/s$ энергия из внешнего резонатора y_2 полностью переходит в резонатор с модой x_2 , тогда как моды других резонаторов x_1, x_3 становятся пустыми в этот момент времени. Вместе с тем, наличие резонаторов x_1, x_3 делает возможным формирование широкого плато вблизи момента времени $t = 3\pi/s$. Опустошение резонаторов (x_1, x_3) и (y_1, y_2) вблизи $t = 3\pi/s$ открывает возможность динамического подключения через них внешних устройств, что расширяет функциональные возможности предложенной схемы КП.

Таким образом, используя (2) и (4), для стадии загрузки найдено значение постоянной связи $k = 1.4247$, при котором исходные четыре линии с соотношением частотных интервалов между ними [3 : 2 : 3] дополняются (благодаря связи $k(t)$) 5-й линией в центре спектра, что дает соотношение частотных интервалов [3 : 1 : 1 : 3]. Данная структура линий позволяет реализовать эффективную загрузку сигнального поля в КП, которая характеризуется широким рабочим спектральным интервалом частот. Как это видно на рис. 3, после завершения загрузки входные моды y_1 и y_2 становятся опустошенными на некоторое время, в течение которого возникает возможность отключить связь между модами y_1 и y_2

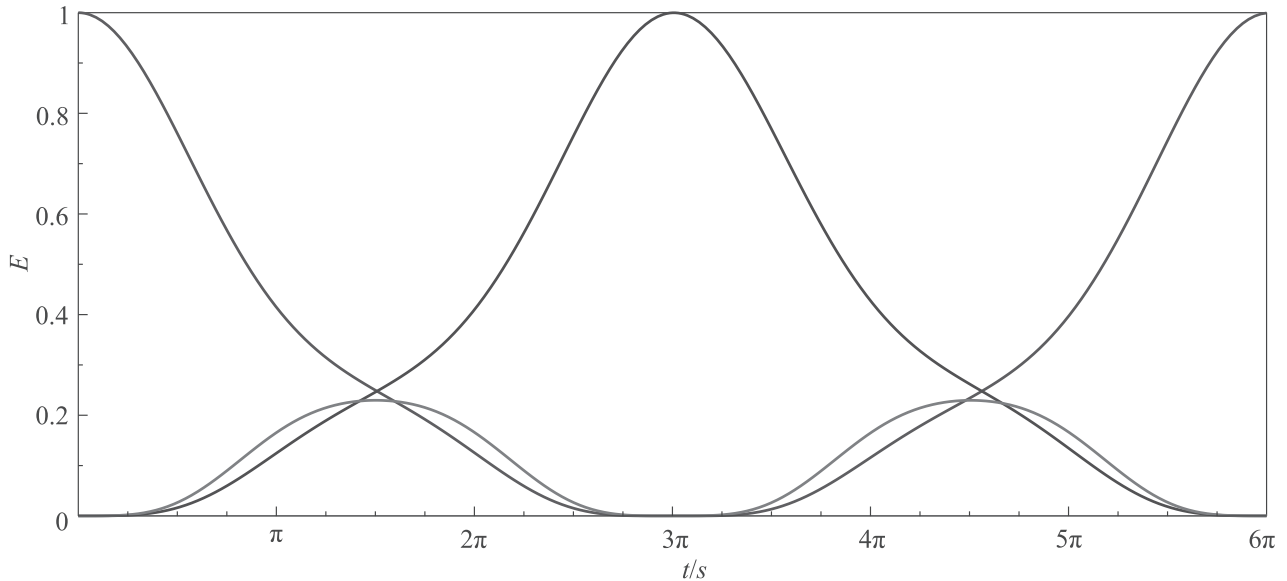


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость вероятности возбуждения $E(t)$ в резонаторах для одного полного цикла обращения без переключения: $E[y_2](t)$ – красная линия, $E[x_2](t)$ – синяя линия, $E[x_1](t)$ – зеленая линия

и не вносить существенных возмущений в КП, когда в ней возбуждается лишь x_2 , что заметно лучше использования переноса экспоненциально нарастающей моды в однорезонаторной КП, требующей использования теоретически мгновенного переключателя [9, 10].

Обсуждение и перспективы. В работе была исследована схема многорезонаторной КП с переключателем, которая демонстрирует богатые функциональные возможности для сохранения сигнальных фотонов и позволяет удобно (не слишком быстро) подключать КП к внешним устройствам. Оптимизация собственных частот показала возможность получения высокоточной обратимой динамики и эффективности переноса возбуждений одновременно в двух режимах работы КП. Режим с постоянной связью позволяет обеспечить полную загрузку и сохранение сигнала за конечное фиксированное время, а использование режима с переключением связи позволяет сохранять входное поле в течение большого числа циклов хранения.

Кроме того, предложенная схема КП позволяет разным частям схемы взаимодействовать с различными элементами квантового компьютера (долгоживущие спиновые системы, волноводные шины, процессоры, генераторы состояний), что является предметом последующих исследований. При этом сама схема обладает гибкостью в настройке собственных частот для хорошего спектрального совмещения с другими устройствами, что важно для практического использования.

Отметим также, что резонаторные системы показали эффективные возможности использования в режиме генераторов запутанных состояний [18], в качестве многокубитовых гейтов [19] и многочастичных квантовых симуляторов [20] благодаря наличию богатой динамики в системе многих тел. Предложенная схема КП допускает различные режимы соединения с внешними устройствами, которые возникают благодаря практически полной локализации возбуждения на конечное время на выбранном резонаторе. Также многорезонаторная схема КП допускает различную реконфигурацию (перестройку) своих параметров, в том числе и на стадии хранения, если имеется дополнительная возможность контроля внутренних параметров связи между резонаторами и частотами резонаторов в блоке КП. На наш взгляд, несомненный интерес представляет реализация предложенной КП на системе оптических резонаторов, в частности, на компактных Фабри–Перо резонаторах, позволяющих универсальную перестройку параметров микрорезонаторной ячейки со значительным усилением взаимодействия моды поля с атомами [21].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках темы лаборатории “Интегральная квантовая оптика” Казанского квантового центра КНИТУ – КАИ (построение модели и анализ результатов), частично поддержана в рамках бюджетной темы лаборатории Квантовой оптики и информатики КФТИ – ФИЦ КазНЦ РАН (алгебраические методы оптимизации квантовых систем), а также частично при финансовой поддержке гран-

та Российского фонда фундаментальных исследований #18-42-160007 (численное моделирование динамических свойств многофункциональной квантовой памяти).

1. G. Kurizki, P. Bertet, Y. Kubo, K. Mølmer, D. Petrosyan, P. Rabl, and J. Schmiedmayer, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **112**, 3866 (2015).
2. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. (Collaboration), *Nature* **574**, 505 (2019).
3. O. B. Kobe, J. Chuma, R. Jamisola, Jr, and M. Chose, *Engineering Science and Technology, an International Journal* **20**, 460 (2017).
4. И. Н. Москаленко, И. С. Беседин, И. А. Цицилин, Г. С. Мажорин, Н. Н. Абрамов, А. Григорьев, И. А. Родионов, А. А. Доброносова, Д. О. Москалев, А. А. Пищимова, А. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 569 (2019).
5. L. Jiang, J. S. Hodges, J. R. Maze, P. Maurer, J. M. Taylor, D. G. Cory, P. R. Hemmer, R. L. Walsworth, A. Yacoby, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin, *Science* **326**, 267 (2009).
6. M. Zhong, M. P. Hedges, R. L. Ahlefeldt, J. G. Bartholomew, S. E. Beavan, S. M. Wittig, J. J. Longdell, and M. J. Sellars, *Nature* **517**, 177 (2015).
7. X.-H. Bao, A. Reingruber, P. Dietrich, J. Rui, A. Dück, T. Strassel, L. Li, N.-L. Liu, B. Zhao, and J.-W. Pan, *Nature Phys.* **8**, 517 (2012).
8. В. М. Порозова, В. А. Пивоваров, Л. В. Герасимов, Д. В. Куприянов, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 726 (2018).
9. J. Wenner, Yi Yin, Yu Chen et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **112**, 210501 (2014).
10. E. Flurin, N. Roch, J. D. Pillet, F. Mallet, and B. Huard, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 090503 (2015).
11. J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997).
12. E. S. Moiseev and S. A. Moiseev, *Laser Phys. Lett.* **14**, 015202 (2017).
13. S. A. Moiseev, K. I. Gerasimov, R. R. Latypov, N. S. Perminov, K. V. Petrovnin, and O. N. Sherstyukov, *Sci. Rep.* **8**, 1 (2018).
14. N. S. Perminov and S. A. Moiseev, *Sci. Rep.* **9**, 1 (2019).
15. H. De Riedmatten, M. Afzelius, M. U. Staudt, C. Simon, and N. Gisin, *Nature* **456**, 773 (2008).
16. Б. Я. Дубетский, В. П. Чеботаев, *Письма в ЖЭТФ* **41**, 267 (1985) [B. Y. Dubetskii and V. P. Chebotaev, *JETP Lett.* **41**, 328 (1985)].
17. N. S. Perminov, D. Y. Tarankova, and S. A. Moiseev, *Laser Phys.* **29**, 124016 (2019).
18. W. Pfaff, C. J. Axline, L. D. Burkhardt, U. Vool, P. Reinhold, L. Frunzio, L. Jiang, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, *Nature Phys.* **13**, 882 (2017).
19. J.-X. Han, J. L. Wu, Y. Wang, Y. Y. Jiang, Y. Xia, and J. Song, *Opt. Express* **28**, 1954 (2020).
20. M. J. Hartmann, F. G. Brandao, and M. B. Plenio, *Laser Photonics Rev.* **2**, 527 (2008).
21. Д. С. Довженко, И. С. Васкан, К. Е. Мочалов, Ю. П. Ракович, И. Р. Набиев, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 12 (2019).

О побочном квантово-классическом бинарном канале утечки информации с гауссовским шумом

С. Н. Молотков¹⁾

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Академия криптографии Российской Федерации, 121552 Москва, Россия

Центр квантовых технологий, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2020 г.

После переработки 6 апреля 2020 г.

Принята к публикации 6 апреля 2020 г.

Детектирование побочного излучения передающей аппаратуры является дополнительным источником информации о передаваемых ключах. Детектирование побочного излучения в отличие от вторжения в квантовый канал связи не приводит к возмущению информационных состояний и ошибкам на приемной стороне. Оценка величины утечки информации по побочному каналу является принципиально необходимой для обеспечения криптографической стойкости систем квантовой криптографии. В работе приведен простой квантовый вывод величины утечки информации по побочному квантовому каналу с гауссовским шумом. Предложенный метод не ограничивается каналом с гауссовским шумом и применим для других типов побочных каналов утечки информации.

DOI: 10.31857/S1234567820090062

1. Введение. Побочные каналы утечки информации являются одним из эффективных способов получения информации, когда нет прямого доступа к передающей и приемной аппаратуре. Применительно к системам квантовой криптографии, кроме вторжения в квантовый канал связи, по которому передаются информационные квантовые состояния, подслушватель может детектировать побочное электромагнитное излучение, связанное с работой передающей аппаратуры. Побочное излучение коррелировано с работой аппаратуры, точнее говоря, с приготовлением состояний, отвечающих логическому биту 0 и логическому биту 1, что приводит к разному побочному излучению. Принципиальное отличие детектирования побочного излучения от атаки непосредственно на информационные состояния в квантовом канале связи, состоит в том, что детектирование побочного излучения позволяет получать информацию о передаваемых ключах и при этом не производить ошибок на приемной стороне.

Поскольку структура квантовых состояний, посылаемых с передающей станции в квантовый канал связи известна, то при атаке непосредственно на квантовые состояния в канале связи фундаментальные законы квантовой механики позволяют связать наблюдаемую ошибку на приемной стороне с верх-

ней границей утечки информации к подслушивателю. Структура состояний в побочном канале из-за макроскопически большого числа степеней свободы аппаратуры, приводящей к побочному излучению, точно неизвестна, поэтому невозможно обойтись без модельных предположений о структуре состояний в побочном канале.

После того как побочное излучение покидает источник информации (например, передающую станцию) и достигает подслушивателя, к исходному побочному сигналу примешиваются внешние шумы, которые также имеют огромное число степеней свободы, и которые также точно неизвестны.

Далее, имея в виду приложение к квантовой криптографии, будем рассматривать бинарный случай, когда передающая аппаратура – источник информации готовится случайным образом 0 и 1. С формальной точки зрения первичный источник информации связан с подслушивателем через внешнюю среду, которая искажает первичный побочный сигнал. Такая связь в классическом случае означает, что источник информации связан с подслушивателем бинарным классическим каналом связи с искажениями. Из-за огромного числа степеней свободы внешней среды, наложение множества случайных независимых величин приводит к гауссовскому распределению суммы случайных величин. По этой причине, естественным приближением для такого кана-

¹⁾e-mail: sergei.molotkov@gmail.com

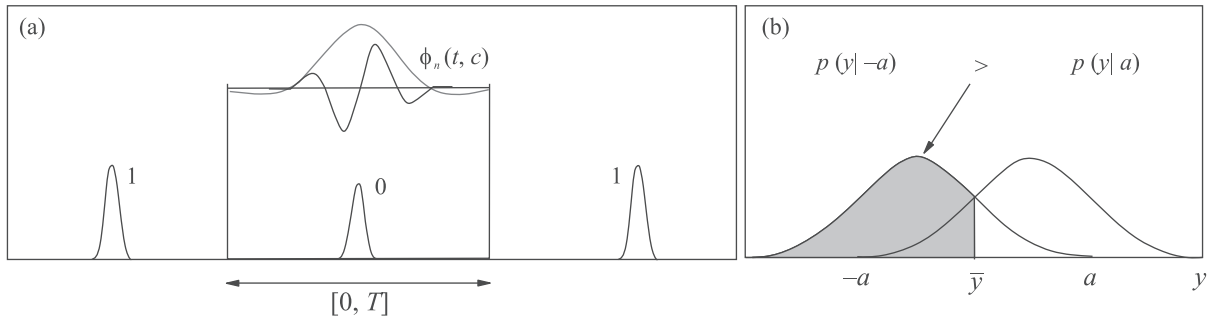


Рис. 1. (а) – Схематически показана генерация первичной информации 0 и 1. Символически показаны базичные функции вытянутого сфероида, локализованные во временном окне $[0, T]$ наблюдения подслушивателем в каждом такте сигнала в побочном канале. (б) – Условные вероятности при регистрации подслушивателем искаженных первичных сигналов, отвечающих 0 и 1. Состояния различаются по принципу максимального правдоподобия. Принимается то решение, 0 или 1, при измерении энергии сигнала, для которого вероятность при данной измеренной энергии больше. Заштрихована область энергий, при которых принимается решение о сигнале 0

ла с искажениями является приближение бинарного аддитивного гауссовского канала с белым шумом (BAWNGC – *Binary Additive White Noise Gaussian Channel*).

Точную структуру побочного сигнала невозможно контролировать, все, что возможно контролировать, так это интенсивность сигнала в разных спектральных диапазонах. Такой контроль достигается экранированием аппаратуры. В классическом случае побочный сигнал, который достигает подслушивателя, считается классическим сигналом. Применительно к квантовой криптографии такой подход является недостаточным и неудовлетворительным, по крайней мере, двум причинам. Первая причина – искаженный сигнал при достаточном экранировании может иметь предельно низкую интенсивность, фактически является квантовым состоянием, поэтому классическое рассмотрение неприемлемо. Вторая причина – подслушиватель может проводить совместные коллективные измерения как квантового состояния в побочном канале, так и квантовых информационных состояний в квантовом канале связи. Как известно, теоретически возможный максимум информации – фундаментальная верхняя граница информации – информация Холево [1–3], которая может быть получена из ансамбля квантовых состояний, достигается на коллективных измерениях. По этим причинам требуется квантовое рассмотрение состояний в побочном канале.

Цель данной работы – дать метод описания верхней границы утечки информации по побочному каналу в зависимости от “интенсивности” состояния, более точно, среднего числа фотонов в состоянии. Рассмотрение совместной атаки на информационные квантовые состояния в квантовом канале связи и де-

тектирование квантового побочного излучения, из-за ограниченности места будет приведено в отдельном сообщении.

Сначала кратко напомним классическую постановку задачи при детектировании побочных сигналов, а затем дадим квантовое описание, а также связь классического и квантового рассмотрения.

2. Классический случай, канал BAWNGC.

Имея в виду приложение к квантовой криптографии, будем считать, что первичный источник информации – аппаратура генерирует случайным образом в каждом такте логические 0 и 1 (см. рис. 1). В реальной ситуации приготовление 0 и 1 электронной аппаратурой происходит приложением импульса напряжения разной величины на фазовый модулятор, что приводит к первичному побочному сигналу разной интенсивности. После прохождения первичного сигнала через среду спектр исходного сигнала приобретает гауссовский вид для 0 и 1 (хотя выбор гауссовского вида сигнала, как будет видно ниже, не является ограничительным, можно выбрать любой другой вид). Спектр искаженного побочного сигнала, который достигает подслушивателя, является гауссовским, центрированным в окрестности исходной энергии сигналов для 0 и 1 (см. рис. 1b). В классическом случае считается, что энергия сигнала равна квадрату амплитуды сигнала [4, 5]. Пусть амплитуда сигнала есть y , тогда наблюдаемый сигнал подслушивателем для 0 и 1 центрирован в окрестности энергий $y_0 = \sqrt{-E_s}$ и $y_1 = \sqrt{E_s}$. Начало отсчета энергии не имеет значения, важно только расстояние между энергиями сигнала для 0 и 1 (см. ниже).

Детектирование искаженного сигнала подслушивателем формализуется условными вероятностями. В результате измерений подслушиватель видит рас-

пределение энергии сигналов. Условные вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} p(y|a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}, \\ p(y|-a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+a)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где для краткости введено обозначение $a = \sqrt{E_s}$, σ – дисперсии сигналов для 0 и 1 после прохождения среды, которые, для того, чтобы не загромождать выкладки, будем считать одинаковыми (обобщение на общий случай не представляет проблем). Априорные вероятности в квантовой криптографии, с которыми передающая аппаратура посылает в канал 0 и 1, считаем одинаковыми, $p(a) = p(-a) = \frac{1}{2}$.

Сигналы из-за перекрытия по спектру (см. рис. 1b) различаются подслушивателем с некоторой вероятностью ошибки. Обычно в классическом случае различение сигналов происходит по максимуму правдоподобия. При наблюдении выбирается тот сигнал, у которого вероятность больше (см. рис. 1b). Для ошибки различения получаем

$$P(\text{Err}|x = -a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\bar{y}}^{\infty} dr e^{-\frac{(r+a)^2}{2\sigma^2}} = Q\left(\frac{\bar{y}+a}{\sigma}\right), \quad (2)$$

где \bar{y} – значение, при котором условные вероятности для сигнала $y = a$ и $y = -a$ сравниваются. Аналогично для ошибки различения сигнала с $x = a$ получаем

$$P(\text{Err}|x = a) = 1 - P(\text{Err}|x = -a). \quad (3)$$

Средняя вероятность ошибки с учетом априорных вероятностей посылки сигналов, с учетом (1)–(3), равна

$$\begin{aligned} P(\text{Err}) &= P(\text{Err}|x = a)p(a) + P(\text{Err}|x = -a)p(-a) = \\ &= Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_{\text{noise}}}}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где учтено, что состояния посылаются равновероятно, и в стандартных обозначениях дисперсия сигналов выражена через интенсивность шума $\sigma^2 = \frac{N_{\text{noise}}}{2}$. При стремлении $\frac{E_s}{N_{\text{noise}}} \rightarrow \infty$ – энергия исходного сигнала велика по отношению к шуму, ошибка различения состояний в побочном канале стремится к нулю – состояния различаются подслушивателем достоверно. При стремлении $\frac{E_s}{N_{\text{noise}}} \rightarrow 0$ – малая интенсивность сигнала по отношению к шуму, вероятность ошибки различения стремится к вероятности простого угадывания, в побочном канале состояния невозможно различить.

В контексте криптографии, более значимой величиной является не ошибка различения сигналов в побочном канале, а количество информации, которую подслушиватель может получить из побочного канала. Такой величиной является взаимная информация $I(X; Y)$ (см. детали в [4, 5]). Неформально взаимная информация дает информацию в битах в пересчете на каждую посылку состояний, которую может получить подслушиватель о случайной величине, принимающей значения $x = -a, a$, когда подслушиватель имеет доступ к случайной величине y с распределениями (1). С учетом (1) для взаимной информации получаем

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \int \sum_{x=-a,a} p(x, y) \log\left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right) dy = \\ &= \int \sum_{x=-a,a} p(y|x)p(x) \log\left(\frac{p(y|x)}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')}\right) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

При равновероятном распределении 0 и 1 получаем

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \frac{1}{2} \int dy \left\{ p(y|0) \log\left(\frac{2p(y|0)}{p(y|0) + p(y|1)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + p(y|1) \log\left(\frac{2p(y|1)}{p(y|0) + p(y|1)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5), (6) дают утечку информации для классических сигналов. Состояния в побочном канале могут иметь предельно низкую интенсивность, по этой причине классическое описание становится неприемлемым. Кроме того, в контексте утечки информации в квантовой криптографии, кроме побочных каналов, имеется канал утечки при атаке на квантовые информационные состояния в квантовом канале. Для этих состояний используется квантовое описание. Поскольку подслушиватель может использовать совместную атаку на информационные состояния и состояния в побочном канале, то необходимо иметь квантовое описание утечки информации в побочном канале.

3. Постановка задачи в квантовом случае.

Для описания квантовых состояний в побочном канале необходимо выбрать набор базисных функций, по которым будет раскладываться квантовое состояние. Таким естественным набором базисных функций являются функции вытянутого сфероида. Подслушиватель измеряет состояния во временном окне в каждом такте (см. рис. 1a). Считаем, что длительность τ первичного состояния в аппаратуре в каждом такте существенно меньше длительности такта T , $\tau \ll T$. Применительно к системам квантовой криптографии, это именно так, поскольку харак-

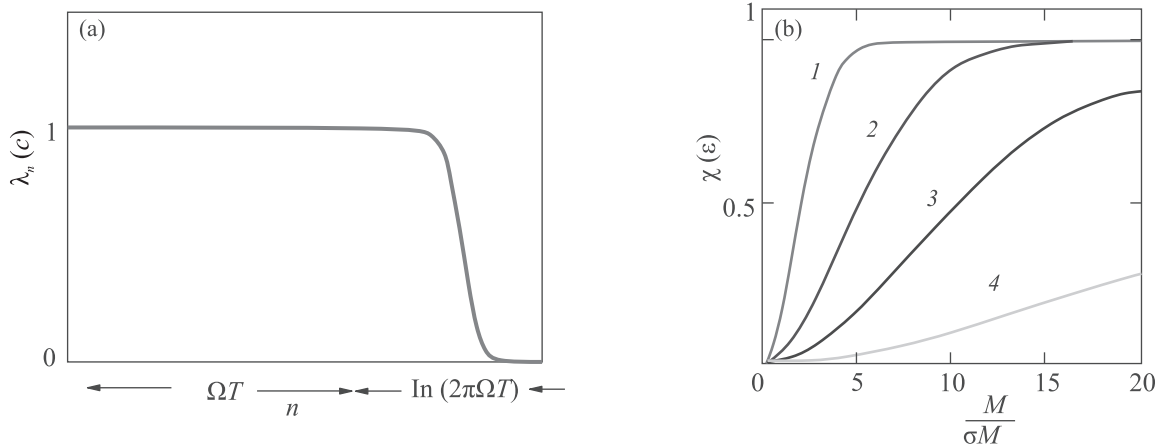


Рис. 2. (а) – Схематически показана степень локализации базисных функций вытянутого сфероида (8), (9) во временном окне наблюдения $[0, T]$ в зависимости от параметра ΩT . (б) – Величина утечки информации по побочному каналу в битах в пересчете на один такт как функция отношения $\frac{M}{\sigma M}$ при различных отношениях “сигнал-шум” $\frac{M}{\sigma M}$ – среднего числа фотонов к дисперсии. Параметр $\frac{M}{\sigma M}$ для кривых 1–4 следующий: 1 – 0.5; 2 – 0.2; 3 – 0.1; 4 – 0.05

терные времена $\tau \approx 10^{-9}$ с, а $1/T \approx 10 \div 100$ МГц ($\tau/T \approx 10^{-1} \div 10^{-2}$). Удобно ввести характерную ширину спектра первичного состояния $\Omega = \frac{1}{\tau}$, т.е. $\Omega T \gg 1$. Удобно выбрать базисные функции максимально локализованными во временном окне $[0, T]$. Условие максимальной локализации сигнала во временном окне $[0, T]$

$$\max_{\omega \in [0, \Omega]} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (7)$$

приводит к известному интегральному уравнению для (см. детали в [6–8])

$$\lambda_n(c) \phi_n(t, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin[\Omega(t-t')]}{t-t'} \phi_n(t', c) dt', \quad 2c = \Omega T. \quad (8)$$

Решением являются функции вытянутого сфероида [6–8]. При разных n и n' функции ортогональны как на конечном $[0, T]$, так и на бесконечном $(-\infty, \infty)$ интервалах,

$$\int_0^T \phi_n(t, c) \phi_{n'}(t, c) dt = \lambda_n(c) \delta_{n, n'}, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t, c) \phi_{n'}(t, c) dt = \delta_{n, n'}.$$

Степень локализации во временном окне $[0, T]$ (6) собственной функции (9) с номером n уравнения (8) дается ее собственным числом

$$\int_0^T \phi_n^2(t, c) dt = \lambda_n(c). \quad (10)$$

Для дальнейшего удобно перейти к нормированным на отрезке функциям $\sqrt{\lambda_n(c)} \phi_n(t) = \phi_n(t, c)$, параметр c фиксирован. Уникальным свойством волновых функций вытянутого сфероида является их поведение в зависимости от величины параметра ΩT . При значении параметра $\Omega T \gg 1$ имеется $N = \Omega T$ функций, которые локализованы во временном окне с субэкспоненциальной точностью [7] по параметру ΩT

$$\lambda_n(c) \sim 1 - \frac{4\sqrt{\pi} 8^n c^{n+\frac{1}{2}}}{n!} e^{-c}, \quad c = \Omega \cdot T. \quad (11)$$

Имеется $N = \Omega T$ функций с вероятностью единица, локализованных в окне $[0, T]$, примерно $\log(\Omega T)$ функций в переходной области, остальные почти равны нулю в окне $[0, T]$. Принципиальным фактом при использовании в качестве базисных функций вытянутого сфероида является следующий результат [6–8]. Для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{\Omega T \rightarrow \infty} \lambda_{\Omega T(1-\varepsilon)} = 1, \quad \lim_{\Omega T \rightarrow \infty} \lambda_{\Omega T(1+\varepsilon)} = 0. \quad (12)$$

Неформально, это означает, что имеется ΩT номеров функций, которые почти целиком локализованы во временном окне T . Для остальных номеров функции равны нулю (при этом они остаются нормированными, нормировка набирается на всем бесконечном интервале). Переходная область по номерам имеет масштаб $\sim \ln(2\pi\Omega T)$, т.е. является крайне узкой – логарифмически узкой по сравнению с ΩT (см. рис. 2а).

4. Побочный бинарный квантово-классический канал с гауссовским шумом. В качестве

базисных одночастичных состояний будем использовать функции (9), (10), $\varphi_n(\omega)$ фурье-образ от (9). Рассмотрим квантовое состояние поля, которое содержит M фотонов. Число многочастичных ортогональных векторов состояний с M фотонами, локализованных во временном окне T (таких функций $N = \Omega T$), равно числу способов размещения M фотонов по N одночастичным состояниям. Число размещений бозе-частиц по N состояниям равно [9]

$$C_{N-1+M}^M = \frac{(N-1+M)!}{(N-1)!M!}. \quad (13)$$

Отметим, что бозе-статистика возникает в различных задачах квантовой криптографии, например, при реализации квантовых генераторах случайных чисел (см. подробности в [10]).

Вектор состояния, отвечающий размещению M тождественных частиц по N одночастичным состояниям – разбиению числа $n_1 + n_2 + \dots + n_N = M$, имеет вид

$$\begin{aligned} |\Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}\rangle &= \quad (14) \\ &= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{n_1} \dots d\omega_{n_1+1} d\omega_{n_1+2} \dots d\omega_{n_2}, \\ &\quad d\omega_{n_{N-1}+1} d\omega_{n_{N-1}+2} \dots d\omega_{n_N} \\ &\quad \varphi_1(\omega_1) \varphi_1(\omega_2) \dots \varphi_1(\omega_{n_1}) \varphi_2(\omega_{n_1+1}) \varphi_2(\omega_{n_1+2}) \dots \\ &\quad \varphi_2(\omega_{n_2}) \dots \varphi_N(\omega_{n_{N-1}+1}) \varphi_N(\omega_{n_{N-1}+2}) \dots \varphi_N(\omega_{n_N}) \\ &\quad |\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_1+1}, \omega_{n_1+2}, \dots, \omega_{n_2}, \\ &\quad \omega_{n_{N-1}+1}, \omega_{n_{N-1}+2}, \dots, \omega_{n_N}\rangle. \end{aligned}$$

После прохождения через среду – максимальная энтропия достигается в том случае, когда подслушивателю доступны все C_{N-1+M}^M ортогональных различных состояний равновероятно – все состояния с данным числом фотонов M равновероятны – аналог белого шума.

Измерение над квантовыми состояниями, позволяющее различить все ортогональные состояния, локализованные во временном окне $[0, T]$, дается следующим разложением единицы

$$\begin{aligned} I_{N,M} &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=M} \mathcal{P}_T(n_1, n_2, \dots, n_N) + I_{N,M}^{\perp}, \\ I_{N,M}^{\perp} &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=M} \mathcal{P}_{\perp}(n_1, n_2, \dots, n_N), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathcal{P}_T(n_1, n_2, \dots, n_N) = |\Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}\rangle \langle \Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}|$ – проектор на квантовое состояние, локализованное во временном окне $[0, T]$, и $I_{N,M}^{\perp}$ в (15) – дополнение до полного пространства состояний на всей временной оси, $\mathcal{P}_{\perp}(n_1, n_2, \dots, n_N) = |\perp_{n_1, n_2, \dots, n_N}\rangle \langle \perp_{n_1, n_2, \dots, n_N}|$

– проектор на состояния, описывающие хвосты волновых функций вытянутого сфероида вне окна $[0, T]$. Для вероятности исходов с учетом (13)–(15) получаем

$$\begin{aligned} P_T(n_1, n_2, \dots, n_N) &= \\ &= \text{Tr}\{\mathcal{P}_T(n_1, n_2, \dots, n_N)\rho(N, M)\} = \\ &= \frac{\lambda_N(n_1, n_2, \dots, n_N)}{C_{N-1+M}^M}, \end{aligned} \quad (16)$$

поскольку $\lambda_N(n_1, n_2, \dots, n_N) = \lambda_1^{n_1}(N)\lambda_2^{n_2}(N)\dots \dots \lambda_N^{n_N}(N) \rightarrow 1$, то вероятность исходов вне временного окна $[0, T]$ стремится к нулю:

$$\begin{aligned} P_{\perp}(n_1, n_2, \dots, n_N) &= \\ &= \text{Tr}\{\mathcal{P}_{\perp}(n_1, n_2, \dots, n_N)\rho(N, M)\} = \\ &= \frac{1 - \lambda_N(n_1, n_2, \dots, n_N)}{C_{N-1+M}^M} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Парциальная матрица плотности с заданным числом фотонов, с учетом (13), (14), имеет вид

$$\rho_M = \frac{1}{N_M} \sum_{M \in \{n_1, n_2, \dots, n_N\}} |\Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}\rangle \langle \Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}|. \quad (18)$$

Выше были получены матрицы плотности при фиксированном числе фотонов M . В реальной ситуации после прохождения первичного квантового состояния из аппаратуры через среду, число фотонов не задано, а задано лишь распределение по числу фотонов. Фактически, в квантовом случае вместо классических распределений (1), подслушиватель видит не чистые состояния, а матрицы плотности, отвечающие 0 и 1, – квантовый ансамбль. Получаем

$$\rho_{0,1} = \sum_{M=0}^{\infty} P_{0,1}(M)\rho_M, \quad (19)$$

где $P_0(M)$ и $P_1(M)$ – функции распределения числа фотонов в состояниях для 0 и 1 в побочном канале. Матрицы плотности являются квантовыми аналогами классических сигналов. Условие нормировки вероятностей

$$\sum_{M=0}^{\infty} P_{0,1}(M) = 1. \quad (20)$$

В итоге, подслушиватель имеет дело с квантовым ансамблем $\mathcal{E} = \{\frac{1}{2}, \rho_0; \frac{1}{2}, \rho_1\}$. Для подслушивателя возникает ситуация квантово-классического канала побочного канала с шумом. Цель подслушивателя, имея в своем распоряжении квантовые состояния в побочном канале, ассоциированные с классическими значениями бит 0 и 1, узнать, посредством измерений

квантовых состояний, классические биты, т.е. получить классическую информацию из квантовых состояний. Максимум классической информации, которую можно получить из квантового ансамбля \mathcal{E} , дается фундаментальной величиной Холево [1–3]. Для информации Холево (см. [1–3]) получаем

$$\chi(\mathcal{E}) = H(\bar{\rho}) - \frac{1}{2}H(\rho_0) - \frac{1}{2}H(\rho_1), \quad (21)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{P_0(M) + P_1(M)}{2N_M} \times \sum_{M \in \{n_1, n_2, \dots, n_N\}} |\Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}\rangle \langle \Phi_{n_1, n_2, \dots, n_N}|, \quad (22)$$

здесь $H(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log(\rho)\}$ – энтропия фон Неймана. Вычисление энтропий дает

$$H(\bar{\rho}) = - \sum_{M=0}^{\infty} \left(\frac{P_0(M) + P_1(M)}{2} \right) \times \log \left(\frac{P_0(M) + P_1(M)}{2} \right) - \log \left(\frac{1}{N_M} \right). \quad (23)$$

$$H(\rho_{0,1}) = - \sum_{M=0}^{\infty} P_{0,1}(M) \log(P_{0,1}(M)) - \log \left(\frac{1}{N_M} \right). \quad (24)$$

Окончательно для величины Холево, с учетом (21)–(24), получаем

$$\chi(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \sum_{M=0}^{\infty} \left\{ P_0(M) \log \left(\frac{2P_0(M)}{P_0(M) + P_1(M)} \right) + P_1(M) \log \left(\frac{2P_1(M)}{P_0(M) + P_1(M)} \right) \right\}. \quad (25)$$

Неформально фундаментальная величина Холево равна количеству информации в битах, которую подслушиватель может получить из побочного канала – квантового ансамбля в пересчете на одну посылку. Формула (25) по структуре аналогична формуле (6) для взаимной информации в классическом случае. Но в отличие от классического рассмотрения квантовый аналог (25) справедлив при любой интенсивности (числа фотонов) побочного сигнала. Кроме того, как видно по выводу (25), формула (25) не ограничена гауссовским шумом и работает при любых распределениях $P_{0,1}(M)$ числа фотонов в квантовых состояниях в побочном канале утечки информации.

Интересно сравнить (25) с классическим аналогом (6), когда число фотонов становится большим. В этом случае, считая шум в побочном канале гауссовским, как и в (6), сумму в (25) можно заменить на

интеграл, $\sum_{M=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty} dM$, а в качестве распределений взять

$$P_{0,1}(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} e^{-\frac{(M-M_{0,1})^2}{2\sigma_M^2}}, \quad (26)$$

где $M_{0,1}$ – среднее число фотонов в квантовом состоянии, отвечающем первичному сигналу 0 и 1 соответственно, σ_M – дисперсия числа фотонов в состояниях – аналог интенсивности шума в побочном канале в классическом случае.

Для иллюстрации на рис. 2b приведены зависимости информации в побочном канале при различных отношениях среднего числа фотонов в состоянии к дисперсии шума $\frac{\bar{M}}{\sigma_M}$, где $\bar{M} = \frac{M_1 + M_0}{2}$. Как видно из рис. 2b, чем больше отношение $\frac{\bar{M}}{\sigma_M}$ – состояния эффективно меньше перекрываются, тем информация, получаемая из побочного канала оказывается больше.

Из-за макроскопически большого числа степеней свободы и внутренних шумов аппаратуры, состояние в побочном канале непосредственно вблизи экранированной аппаратуры будет представлять собой зашумленный сигнал, поэтому, применительно к квантовой криптографии спектральный состав и интенсивность побочного сигнала может быть измерена непосредственно вблизи экранированной аппаратуры. Консервативно в пользу подслушивателя данный сигнал может считаться сигналом, доступным для измерения подслушивателем. Таким образом может быть оценена величина утечки информации к подслушивателю. Требуемый уровень сигнала в побочном канале может регулироваться соответствующей экранировкой.

5. Заключение. Выше была получена верхняя граница утечки информации по побочному каналу, связанному с электромагнитным излучением передающей аппаратуры. Детектирование побочного излучения является информационным “бонусом” для подслушивателя, поскольку детектирование этого излучения дает дополнительную информацию о передаваемых ключах. В отличие от вторжения в квантовый канал связи детектирование в данном побочном канале не приводит к возмущению информационных состояний и ошибкам на приемной стороне.

Квантовое рассмотрение состояний в побочном канале необходимо для определения утечки информации к подслушивателю при совместном измерении информационных квантовых состояний и квантовых состояний в побочных каналах. Данный анализ требует существенно большего места, поэтому будет приведен в отдельном сообщении.

Выражаю благодарность коллегам по Академии криптографии Российской Федерации за

обсуждения и поддержку. Автор благодарит также И. М. Арбекова, С. П. Кулика за интересные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при поддержке проекта Российского научного фонда # 16-12-00015 (продолжение).

-
1. A. S. Holevo, *Probl. Inform. Transm.* **9**, 177 (1973).
 2. А. С. Холево, *УМН* **53**, 193 (1998).
 3. А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М. (2010).

4. C. E. Shannon, *Beel System Techn. J.* **XXVII**, 379 (1948).
5. T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, N.Y. (1991).
6. H. J. Landau and H. O. Pollak, *Bell Syst. Techn. J.* **40**, 65 (1961).
7. D. Slepian and H. O. Pollak, *Bell Syst. Techn. J.* **40**, 43 (1961).
8. W. H. J. Fuchs, *J. Math. Anal. Appl.* **9**, 317 (1964).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, т. V, ч. I, Наука, М. (1995).
10. С. Н. Молотков, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 374 (2017).

Сравнение методов томографии чистых и почти чистых квантовых состояний

Б. И. Бантыш¹⁾, А. Ю. Чернявский, Ю. И. Богданов

Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 апреля 2020 г.

После переработки 7 апреля 2020 г.

Принята к публикации 7 апреля 2020 г.

Квантовая томография (КТ) является наиболее информативным инструментом оценки качества приготовления и преобразования квантовых состояний. Развитие ее методов критически необходимо для отладки разрабатываемых квантовых процессоров. Существует большое число методов КТ, отличающихся как типами производимых измерений, так и способами обработки их результатов. При практическом применении КТ возникает задача сравнения различных методов, сталкивающаяся с трудностями отсутствия общей методологии оценки. В настоящей работе представлена универсальная методология оценки качества методов томографии квантовых состояний на основе численного эксперимента. Разработанная методология применена к трем методам КТ (корневому подходу, сжатым измерениям и адаптивной томографии), характеризующимся эффективной работой с почти чистыми состояниями, что актуально для современного уровня развития технологической базы эксперимента.

DOI: 10.31857/S1234567820090074

1. Введение. За последние несколько лет технологии создания квантовых вычислителей позволили оперировать квантовыми регистрами, содержащими более 50 кубитов [1, 2], однако точность приготовления состояний в таких квантовых системах пока еще недостаточно велика для успешного решения прикладных задач. Методы квантового распределения ключа в скором времени должны получить широкое распространение, позволяющее осуществлять обмен сообщениями больших объемов в режиме практически абсолютной секретности [3, 4]. Для отладки и контроля качества приготовления состояний следует прибегать к методам *квантовой томографии* (КТ) [5–8]. Выбор того или иного метода зависит от ряда факторов, включая экспериментальную сложность реализации, типы рассматриваемых состояний, вычислительную сложность обработки результатов измерений и т.д. Несмотря на то, что большинство методов позиционируются как универсальные, их точность может существенно зависеть от такого рода факторов.

Важно отметить, что в современных квантовых регистрах возможно создание квантовых состояний, близких к чистым. Все собственные значения, кроме одного, матрицы плотности почти чистого состояния, близки к нулю. Более того, при не слишком высоких объемах выборки такая слабая засоренность

состояния оказывается пренебрежимо малой по сравнению со статистическими флуктуациями, а сами состояния проявляют себя как чистые [9]. В таких условиях методы, реконструирующие матрицу плотности общего вида, оказываются неэффективными, поскольку закладывают избыточное число параметров в модель квантового состояния. К таким методам можно отнести линейную инверсию с проецированием [10], стандартную выпуклую оптимизацию [11], метод на основе разложения Холецкого [12], проективный градиентный спуск [13, 14] и другие.

Известно, что томография квантовых состояний неполного ранга посредством такого рода неэффективных методов приводит к сходимости потерь точности по закону $\propto 1/N^{1/2}$, где N – полный объем выборки по всем измерениям (число представителей квантового статистического ансамбля) [9, 15–18]. В то же время, для наиболее эффективных методов томографии можно добиться сходимости $\propto 1/N$.

Для рассматриваемой нами задачи существует ряд методов, которые направлены на то, чтобы приблизиться к зависимости $\propto 1/N$. При практическом экспериментальном применении КТ естественным образом возникает необходимость сравнения качества различных ее методов. Не менее важны такие сравнения и при создании новых методов КТ. Однако задача сравнения сталкивается с трудностями отсутствия общей методологии оценки: в работах рассматриваются разные задачи и условия тестиро-

¹⁾e-mail: bbantysh60000@gmail.com

вания, используются также и различные показатели эффективности. К примеру, в работе [19] по сжатым измерениям (*compressed sensing*) при представлении результатов основной упор делается на сравнении протоколов измерений различной размерности, в то время как на зависимости от объема выборки акцентируется меньше внимания. В работе [20] по томографии с использованием корневого подхода демонстрация метода производится на примере только одного смешанного состояния. Сравнение методов в работе [9] по адаптивной томографии производится только для случайных (по мере Хаара) чистых состояний и случайных (по мере Бюреса) смешанных состояний, что не позволяет судить об эффективности метода применительно к почти чистым состояниям.

Описанная проблема осложняется еще и тем, что большинство методов КТ оказываются непростыми в реализации. Это не позволяет выполнить быстрое сравнение методов в каких-то частных случаях для определения наиболее эффективного из них.

В настоящей работе мы предлагаем универсальную методологию практической оценки качества методов томографии квантовых состояний и применяем ее к методам на основе выпуклой оптимизации, корневого подхода, сжатых измерений и адаптивной томографии. Краткие описания методов представлены в разделе 2. Для каждого метода производится множество численных экспериментов в одних и тех же условиях, после чего производится анализ, основанный на заранее заданных количественных показателях эффективности, сформулированных в разделе 3. По результатам выполненного анализа мы произвели сравнение методов (раздел 4), которое показало их относительную эффективность по отношению друг к другу, а также выявило некоторые весьма существенные тонкие различия.

2. Описание методов. Ниже мы приводим краткое описание всех рассматриваемых нами методов. Каждый метод определяется как типом проводимых измерений, так и способом обработки результатов измерений. Отметим, что все рассматриваемые методы основаны на факторизованных измерениях (каждый кубит измеряется независимо от других), поскольку такие измерения наиболее просты и актуальны с точки зрения практической реализации.

2.1. Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, метод наименьших квадратов для матрицы плотности (FMUB-LSDM). В основе метода лежит нахождение параметров матрицы плотности общего вида путем минимизации квадратов разниц теоретических (на основе оценки мат-

рицы плотности) и экспериментальных частот различных событий (LSDM – *least squares for density matrix*). Для обеспечения физически корректного результата данная минимизация выполняется с ограничением на неотрицательную определенность матрицы плотности. Такая задача эффективно решается методами выпуклой оптимизации [11]. В качестве протокола измерений мы рассматриваем факторизованный протокол их взаимно-несмещенных базисов (FMUB – *factorized mutually unbiased bases*): каждый кубит измеряется независимо в трех взаимно-несмещенных базисах, соответствующих операторам Паули σ_x , σ_y и σ_z [21]. При этом на измерение каждого базиса отводится одинаковое число представителей статистического ансамбля. Решение оптимизационной задачи выполняется на базе открытой программной библиотеки по выпуклой оптимизации CVX [22].

2.2. Метод максимального правдоподобия с использованием корневого подхода. Метод максимального правдоподобия является одним из наиболее распространенных методов статистической реконструкции квантовых состояний. При определенных достаточно общих условиях метод обладает оптимальными асимптотическими свойствами [23].

2.2.1. Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, корневого подход с известным рангом (FMUB-RootTR). При корневом оценивании параметров квантового состояния вместо непосредственно самой матрицы плотности рассматривается ее квадратный корень: матрица ψ размерности $d \times r$ такая, что матрица плотности есть $\rho = \psi\psi^\dagger$. Здесь ранг состояния r может принимать значения от 1 до d (d – размерность гильбертова пространства). Сам поиск максимума правдоподобия для ψ сводится к решению квазилинейного уравнения методом простых итераций [20, 24].

Случай $r = 1$ описывает модель чистого квантового состояния, а случай $r = d$ – полностью смешанного. В рамках метода FMUB-RootTR мы используем значение r_t , отвечающее истинному рангу (*TR – true rank*) матрицы плотности состояния, который мы считаем априори известным. Заметим, что при выборе $r = d$ мы получаем оценку, которая численно совпадает с теми оценками, которые дают методы на основе разложения Холецкого [12] и проективного градиентного спуска [13, 14].

Как и в случае с FMUB-LSDM, мы рассматриваем факторизованный протокол MUB измерений. Реконструкция квантового состояния с использованием корневого подхода производится на основе его открытой программной реализации [25].

2.2.2 *Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, корневой подход с адекватным рангом (FMUB-RootAR)*. Часто в эксперименте нет априорной информации об истинном ранге изучаемого квантового состояния. Выбор адекватного ранга (AR – *adequate rank*) тогда осуществляется на основе критерия хи-квадрат [20]. Для этого в настоящей работе поочередно перебирались значения r от 1 до d , выполнялась реконструкция состояния и оценивалось p -value модели P_r согласно критерию хи-квадрат. Если для некоторого значения ранга было выполнено условие $P_r \geq \alpha$, где $\alpha = 5\%$ есть уровень значимости, то процедура останавливалась, и ранг $r_t = r$ выбирался в качестве истинного. Процедура также останавливалась в том случае, если $P_{r+1} < P_r$ (тогда $r_t = r$). Описанный алгоритм означает, что в качестве нулевой статистической гипотезы выбирается состояние с минимальным рангом (в частности, чистое), при этом $\alpha = 5\%$ задает так называемую вероятность ошибки первого рода (отклонить нулевую гипотезу при условии, что она верна). Кроме того, такая процедура способна обеспечить определенную экономию вычислительных затрат за счет меньшего обращения к моделям более высокого ранга.

2.3. *Измерение операторов Паули, подход сжатых измерений (Pauli-CS)*. Подход сжатых измерений (CS – *compressed sensing*) является расширением метода наименьших квадратов, в котором вместе с суммой квадратов минимизируется также след матрицы плотности [19, 26]:

$$\rho = \arg \min_{X \geq 0} \left[\frac{1}{2} \|O_T(X) - O_M\|_2^2 + \frac{4M}{\sqrt{N}} \text{Tr} X \right]. \quad (1)$$

Здесь $O_T(X)$ и O_M есть вектора соответственно теоретических (на основе матрицы плотности X) и экспериментальных средних значений наблюдаемых, отвечающих различным измерениям. Протокол измерений задается тензорным произведением набора операторов Паули совместно с единичным оператором σ_0 : $P_n = \{\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}^{\otimes n}$. На измерение каждой наблюдаемой отводится одинаковое число представителей статистического ансамбля. В оригинальных работах [19, 26] также рассматриваются образованные подмножествами операторов из P_n протоколы, которые не являются информационно полными для матриц плотности общего вида. Здесь, однако, мы будем рассматривать только полный набор из 4^n измерений.

Для решения оптимизационной задачи (1) использовалась открытая программная библиотека по выпуклой оптимизации CVX [22].

2.4. *Адаптивная томография*. Во введении мы упоминали, что методы, восстанавливающие матрицу плотности общего вида, неэффективны в задаче томографии чистых и почти чистых состояний. Этот недостаток может быть устранен посредством выбора подходящего протокола измерений: такого, который увеличивает информацию о компонентах матрицы плотности с малыми весами. Это достигается надлежащим поворотом многокубитового протокола измерений таким образом, чтобы один из проекторов оказался ортогональным как можно большему числу главных компонент матрицы плотности изучаемого состояния. Поскольку истинное состояние неизвестно, это достигается адаптивным путем: с появлением новых результатов измерений выполняется оценка матрицы плотности и подбираются необходимые измерения для следующей итерации [9, 18, 27–29].

2.4.1. *Факторизованные ортогональные измерения, метод максимального правдоподобия для матрицы плотности (FO-MLDM)*. Адаптивный протокол факторизованных ортогональных (FO – *factorized orthogonal*) измерений, предложенный в работе [9], подразумевает реализацию итерационной процедуры, на каждом шаге которой на основе всех произведенных ранее измерений находится оценка $\hat{\rho}$ матрицы плотности. После этого вычисляется факторизованный n -кубитный вектор $|\varphi\rangle_1 \otimes \dots \otimes |\varphi\rangle_n$ ортогональный не более, чем к $K_{\max} = n$ главным компонентам $\hat{\rho}$. Затем векторы $|\varphi\rangle_1, \dots, |\varphi\rangle_n$ дополняются до полных ортонормированных однокубитных базисов, в которых и выполняются следующие измерения. Оценка $\hat{\rho}$ матрицы плотности на каждом итерационном шаге осуществлялась методом максимального правдоподобия (MLDM – *maximum-likelihood for density matrix*). В оригинальной статье это выполнялось посредством ускоренного проективного градиентного спуска. При моделировании мы использовали корневой подход полного ранга (см. раздел 2.2.1). Как и в работе [9], на измерение нового базиса приходилось $N_k = \max(100, \lfloor N_0/30 \rfloor)$ представителей статистического ансамбля. Здесь N_0 – суммарное число представителей, измеренных на предыдущих итерациях.

2.4.2. *Факторизованные ортогональные измерения во взаимно-несмещенных базисах, метод максимального правдоподобия для матрицы плотности (FOMUB-MLDM)*. Метод FO-MLDM не может быть применен к томографии одиночного кубита, поскольку ортогональные измерения в этом случае определяются всегда однозначно, и в результате итера-

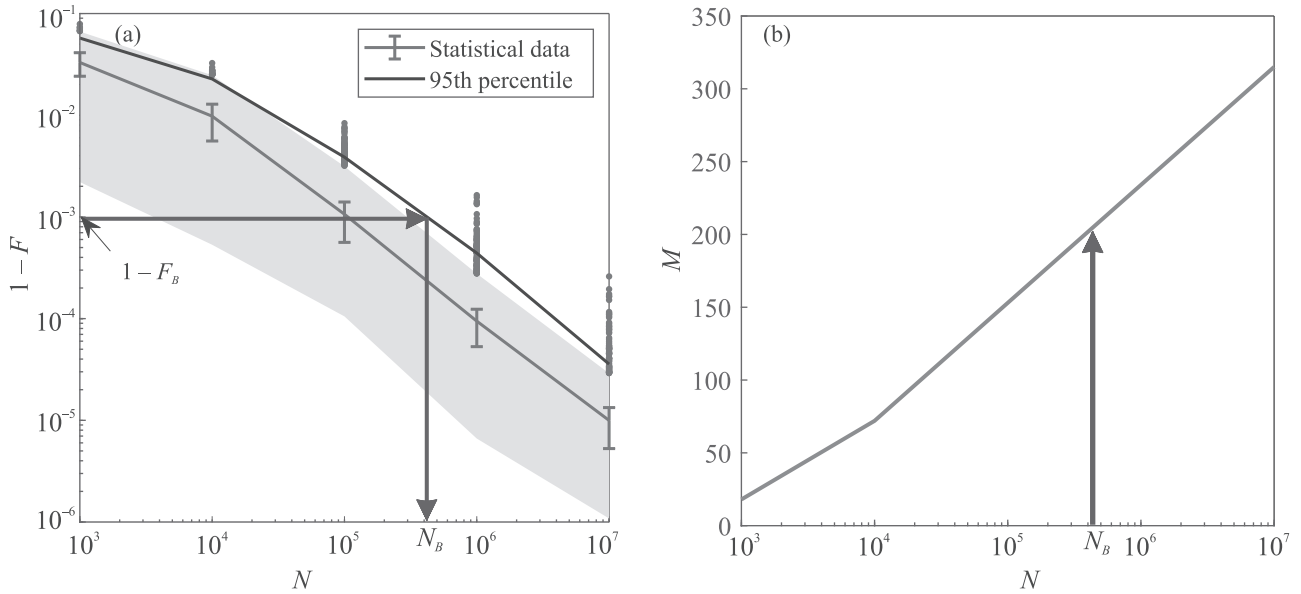


Рис. 1. (Цветной онлайн) Метод определения ресурсов на основе полученных статистических данных. (а) – Вычисляется 95-й процентиль (95th percentile) потерь точности для каждого значения полного объема выборки N . Для выбранного значения гарантированной точности F_B вычисляется требуемое значение N_B с использованием линейной интерполяции (в логарифмическом масштабе). (б) – Вычисляется количество измерений по значению в точке N_B

ций не возникает информационной полноты²⁾. Кроме того, вычислительная сложность метода, обусловленная необходимостью поиска оптимального базиса на каждом адаптивном шаге, затрудняет его многократное моделирование для накопления достаточной статистики, в особенности, когда требуется проводить анализ для больших значений N . Эти особенности побудили нас к созданию на основе FO-MLDM нового адаптивного протокола, в котором на каждом итерационном шаге происходит унитарный “поворот” однокубитового набора MUB так, чтобы один из его векторов совпал с $|\varphi\rangle_j$ ($j = 1, \dots, n$). Таким образом, на каждом шаге формируются информационно полные измерения каждого кубита, причем одно из них совпадает с тем, которое производится на каждой итерации в рамках метода FO-MLDM³⁾. Такой подход может быть применен к анализу однокубитных состояний и позволяет реже производить поиск ортогональных факторизованных измерений.

²⁾ Информационная полнота по отношению к текущей оценке состояния может быть достигнута добавлением новых измерений, близких к уже найденному [32].

³⁾ Это справедливо только для рассматриваемых здесь двухуровневых подсистем. Для подсистем размерности 3 и выше дополнение $|\varphi\rangle_j$ до базиса не однозначно и поэтому, как правило, не совпадает ни с одним из базисов преобразованного MUB.

Число представителей ансамбля, приходящихся на каждый измерительный базис, мы также брали равным N_k .

3. Методология анализа. Одна из основных характеристик КТ – это *точность* реконструкции неизвестного квантового состояния, которую можно получить, имея в распоряжении определенное число представителей статистического ансамбля N (объем выборки). В качестве меры точности мы рассматриваем распространенную меру *fidelity*, задающую вероятность совпадения между истинной σ и реконструированной ρ матрицами плотности: $F = (\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}})^2$ [30]. В реальных экспериментах, однако, часто ставится обратный вопрос: сколько ресурсов необходимо задействовать, чтобы обеспечить требуемый уровень точности (*fidelity benchmark*) F_B ? В качестве базовых ресурсов мы рассматриваем:

- объем выборки N_B – данное число определяет требуемое количество одинаково приготовленных представителей неизвестного квантового состояния;
- число *различных* измерительных базисов M_B – эта характеристика описывает, сколько раз необходимо перестроить конфигурацию измерительной установки за время одного томографического эксперимента.

Рассматриваемые характеристики вычисляются для двух различных групп состояний: случайные чистые состояния (СЧС) и деполяризованные случайные чистые состояния (ДСЧС). Рассматривают-

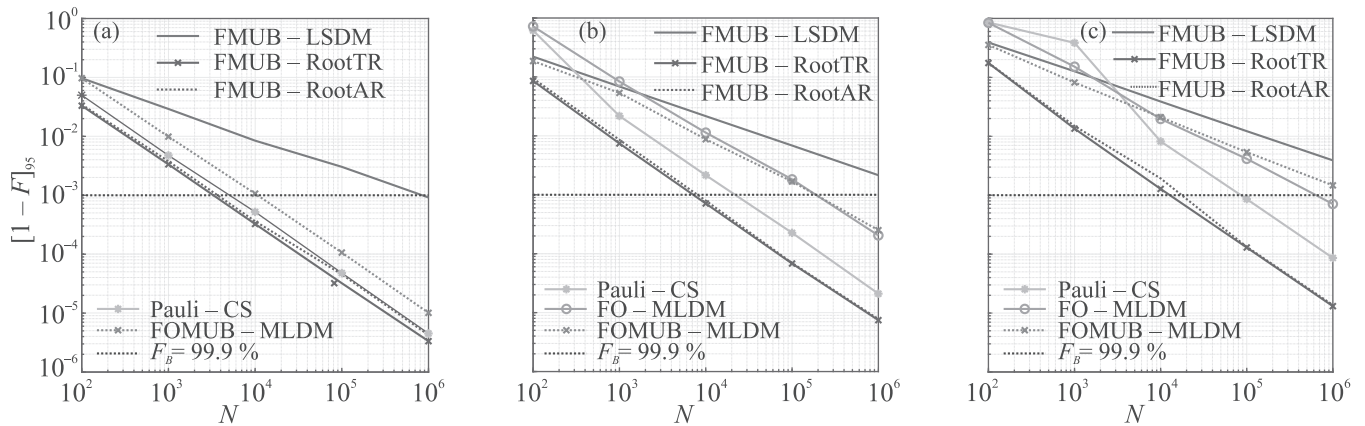


Рис. 2. (Цветной онлайн) Значение 95-го перцентиля потерь точности для различных методов томографии в зависимости от объема выборки. Отражены случаи томографии случайных чистых состояний для одного (а), двух (b) и трех (c) кубитов. Горизонтальная линия откладывает эталонное значение потерь точности $1 - F_B$

ся системы из n кубитов. Соответствующие квантовые состояния заданы в гильбертовом пространстве размерности $d = 2^n$. Поскольку точность сама является случайной величиной, для определения исследуемых характеристик необходимо произвести большой набор численных томографических экспериментов. Заметим, что во многих важных случаях возможна априорная оценка качества томографических протоколов с использованием универсального распределения точности [20]. Кроме того, точность зависит от самих исследуемых состояний, которые мы выбираем случайно в каждом эксперименте. Для СЧС состояние $|\psi\rangle$ генерируется по мере Хаара [31]. Для ДСЧС матрица плотности выбирается на основе случайного чистого состояния по формуле $\rho = (1 - p)|\psi\rangle\langle\psi| + p \cdot I_d/d$, где I_d – единичная матрица размерности $d \times d$, p – равномерно распределенная случайная величина от 0 до 0.1.

Для вычисления ресурсов, требуемых методу КТ, мы используем следующий алгоритм (рис. 1):

1. Выполняется серия из 1000 независимых численных экспериментов по КТ для различных значений объема выборки N . В каждом эксперименте генерируется случайное состояние и выполняется симуляция его измерений методом Монте-Карло. Протокол измерений определяется методом КТ. По результатам измерений выполняется реконструкция состояния и определяется точность F .

2. Для каждого N вычисляется 95-й перцентиль (перцентиль) потерь точности $[1 - F]_{95}$.

3. Выбирается эталонное значение точности F_B .

4. Выполняется линейная интерполяция зависимости $\log[1 - F]_{95}$ от $\log N$ и определяется объем выборки N_B , для которого $[1 - F]_{95} = 1 - F_B$.

5. Выполняется линейная интерполяция зависимости M от $\log N$ и определяется значение M_B в точке $\log N_B$.

Использование 95-го перцентиля потерь точности позволяет говорить нам о том, что, имея в распоряжении N_B представителей квантового состояния, метод позволяет получить точность не хуже F_B с вероятностью 95 %. Выбор линейной интерполяции зависимости $\log[1 - F]_{95}$ от $\log N$ обусловлен тем, что, как отмечалось выше, для КТ имеет место зависимость $1 - F \propto 1/N^q$, где $0 < q \leq 1$.

4. Сравнение методов. Ниже мы приводим полученные результаты сравнения различных методов томографии. В качестве эталонного значения точности была взята величина $F_B = 99.9\%$. Были рассмотрены системы из одного, двух и трех кубитов. Отметим, что для всех методов использовались одни и те же состояния. Методы, основанные на идентичных протоколах измерений (например, протоколе FMUB), оперировали одними и теми же статистическими данными.

4.1. Случайные чистые состояния (СЧС). Рисунок 2 отражает результаты моделирования для теста случайных (по мере Хаара) чистых состояний. Соответствующие количественные оценки представлены в табл. 1.

4.2. Деполяризованные случайные чистые состояния (ДСЧС). На рисунке 3 и в табл. 2 показаны результаты моделирования для деполяризованных случайных чистых состояний. Анализ метода FO-MLDM в данных условиях не проводился в силу довольно высокой вычислительной сложности. Заметим, что оценка квантового состояния с использованием корневого подхода с известным рангом (FMUB-

Таблица 1. Результат количественного оценивания ресурсов, затрачиваемых различными методами КТ для достижения точности $F_B = 99.9\%$ в случае СЧС-теста

	1 кубит		2 кубита		3 кубита	
	N_B	M_B	N_B	M_B	N_B	M_B
FMUB-LSDM	847 475	3	$> 10^6$	9	$> 10^6$	64
FMUB-RootTR	3 302	3	7 163	9	12 796	27
FMUB-RootAR	3 690	3	8 022	9	17 596	27
Pauli-CS	5 080	4	21 859	16	85 581	64
FO-MLDM	–	–	188 490	157	638 732	194
FOMUB-MLDM	10 667	71	187 391	175	$> 10^6$	> 297

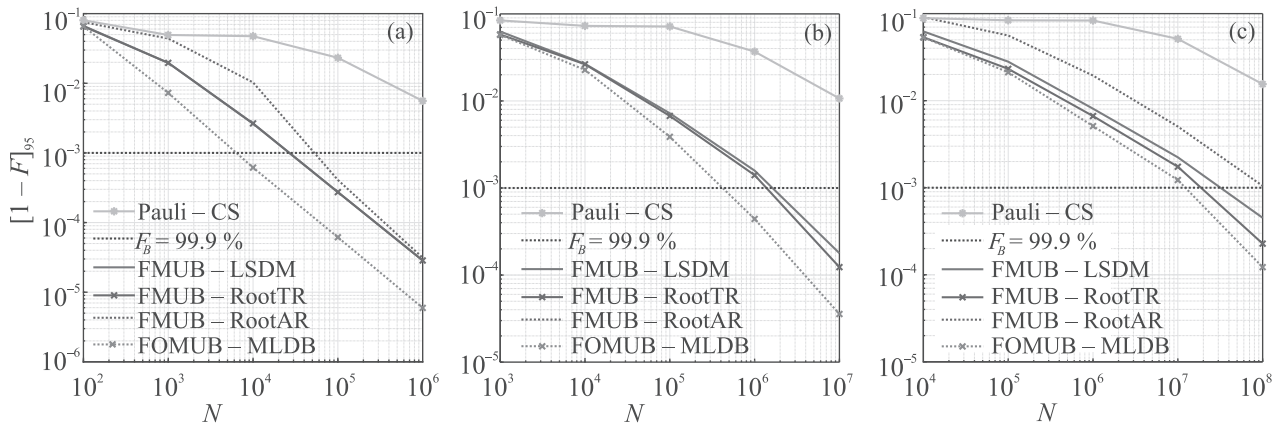


Рис. 3. (Цветной онлайн) Значение 95-го процента потерь точности для различных методов томографии в зависимости от объема выборки. Отражены случаи томографии деполаризованных случайных чистых состояний для одного (а), двух (б) и трех (с) кубитов. Горизонтальная линия откладывает эталонное значение потерь точности $1 - F_B$

RootTR) в данном случае, когда ранг истинного квантового состояния является полным ($r_t = d$), численно эквивалентна любой оценке матрицы плотности общего вида методом максимального правдоподобия (MLDM).

5. Обсуждение результатов. В настоящее время существует большое число методов КТ. Анализ эффективности различных методов на основе лишь изучения соответствующих публикаций представляет собой весьма непростую задачу, так как условия, в которых эти методы тестируются, могут существенно различаться. В данной работе мы предложили общую методологию количественного сравнения различных методов КТ. В ее основе лежит моделирование реальных экспериментальных условий, идентичных для каждого из рассматриваемых методов томографии. Выбирая в качестве основы некоторое эталонное значение точности, которое необходимо достичь в эксперименте по КТ, мы вычисляем ресурсы, необходимые каждому методу для достижения такого значения.

Полученные результаты выявили тонкие и весьма существенные различия между несколькими ме-

тодами томографии чистых и почти чистых квантовых состояний для систем размерности от одного до трех кубитов. Для чистых состояний корневой подход (FMUB-RootTR, FMUB-RootAR), сжатые измерения (Pauli-CS) и факторизованные ортогональные измерения (FO-MLDM) позволили приблизиться к сходимости потерь точности вида $\propto 1/N$. Константы пропорциональности, однако, отличаются: корневой подход показал наилучшие характеристики по объему требуемых ресурсов. Разница в константе для метода Pauli-CS, возможно, может быть частично компенсирована переходом от анализа средних значений наблюдаемых к частотам различных исходов. Для FO-MLDM, как отмечали авторы оригинальной статьи [9], показатели могут быть улучшены, если на каждом адаптивном шаге вместо реконструкции матрицы плотности общего вида рассматривать матрицу плотности с ограниченным рангом. При восстановлении матрицы плотности общего вида методом наименьших квадратов (FMUB-LSDM), как и ожидалось, потери точности убывают приблизительно как $1/N^{1/2}$. Адаптивный метод на основе протокола измерений в факторизованных взаимно-несмещенных

Таблица 2. Результат количественного оценивания ресурсов, затрачиваемых различными методами КТ для достижения точности $F_B = 99.9\%$ в случае ДСЧС-теста

	1 кубит		2 кубита		3 кубита	
	N_B	M_B	N_B	M_B	N_B	M_B
FMUB-LSDM	26 732	3	1 624 133	9	31 844 790	27
FMUB-RootTR	26 862	3	1 379 537	9	18 751 495	27
FMUB-RootAR	52 829	3	4 388 900	9	$> 10^8$	27
Pauli-CS	$> 10^6$	4	$> 10^7$	16	$> 10^8$	64
FOMUB-MLDM	6 361	58	420 015	203	12 261 609	388

базисах (FOMUB-MLDM), являющийся своего рода объединением FMUB-LSDM и FO-MLDM, был разработан нами в ходе моделирования и сравнения различных методов. Для него, в случае чистых состояний, с увеличением размерности системы сходимость потерь точности постепенно ухудшалась от закона $1/N$ к закону $1/N^{1/2}$.

Оценка матрицы плотности общего вида методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов дает оптимальную сходимость вида $1/N$ для смешанных состояний, но только в том случае, если все собственные значения матрицы плотности достаточно велики. В противном случае такая сходимость наблюдается лишь при весьма большом объеме выборки. Наш количественный анализ для случая почти чистых состояний показал, что можно добиться перехода к закону $1/N$ и при меньших значениях N , используя метод FOMUB-MLDM, в котором однокубитовые наборы MUB на каждом адаптивном шаге “поворачиваются” ортогонально текущей оценке состояния.

Методы FMUB-RootAR и Pauli-CS дают существенно меньшую точность в задаче томографии почти чистых состояний, но универсальность FMUB-RootAR, обусловленная возможностью адаптации ранга модели состояния под имеющиеся статистические данные, позволяет переходить к закону $1/N$ существенно раньше, чем при использовании Pauli-CS. Заметим, что метод адаптивных сжатых измерений, описанный в работе [29], способен обеспечивать высокую точность для состояний произвольного уровня засоренности. Однако, как и любые другие существующие адаптивные методы, это требует значительных затрат на вычисление протокола и на многократную подстройку измерительной аппаратуры для изменения базиса измерений.

Развитие предложенной в данной работе методологии и приобщение к ней других методов томографии позволит со временем систематизировать знания по данной области и получить общую картину

эффективности методов в приложении к различным практически важным задачам.

6. Выводы. В работе представлен основанный на численном эксперименте подход к оценке качества методов КТ при восстановлении чистых и почти чистых состояний. Главной сравнительной мерой является необходимое число измерений для достижения заданной точности, что актуально для современных экспериментальных задач. Проведены анализ и сравнение шести современных методов КТ. Полученные результаты и сама методология могут быть использованы как для выбора метода и числа измерений в эксперименте, так и при разработке и оптимизации новых методов КТ. Для квантовых состояний, близких к чистым, актуальной задачей является дальнейшее развитие адаптивных стратегий квантовых измерений. Такие стратегии должны обеспечивать, при заданных ограничениях на имеющиеся экспериментальные ресурсы, максимум информации о компонентах матрицы плотности с малыми весами.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К. А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме # 0066-2019-0005.

Авторы также выражают благодарность Глебу Стручалину за ценные обсуждения и помощь в проведении вычислений.

1. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. (Collaboration), Nature **574**, 505 (2019).
2. H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletic, and M. D. Lukin, Nature **551**, 579 (2017).
3. К. А. Балыгин, В. И. Зайцев, А. Н. Климов, А. И. Климов, С. П. Кулик, С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **105**, 570 (2017).
4. К. А. Балыгин, В. И. Зайцев, А. Н. Климов, С. П. Кулик, С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **106**, 451 (2017).
5. K. Banaszek, M. Cramer, and D. Gross, New J. Phys. **12**, 125020 (2013).

6. G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, *[Quantum State Estimation] Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2004), v. 649, 519 p.
7. G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, *Adv. Imaging Electron Phys.* **128**, 206 (2003).
8. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 299 (2009).
9. G. I. Struchalin, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. A* **98**, 032330 (2018).
10. J. A. Smolin, J. M. Gambetta, and G. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 070502 (2012).
11. M. D. de Burgh, N. K. Langford, A. C. Doherty, and A. Gilchrist, *Phys. Rev. A* **78**, 052122 (2008).
12. K. Banaszek, G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, *Phys. Rev. A* **78**, 052122 (2008).
13. E. Bolduc, G. C. Knee, E. M. Gauger, and J. Leach, *Quantum Inf.* **3**, 44 (2017).
14. J. Shang, Z. Zhang, and H. K. Ng, *Phys. Rev. A* **95**, 062336 (2017).
15. Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов, С. П. Кулик, Е. В. Морева, А. А. Соловьев, *ЖЭТФ* **140**, 224 (2011).
16. F. Huszár and N. M. T. Houlby, *Phys. Rev. A* **85**, 052120 (2012).
17. E. Bagan, M. A. Ballester, R. D. Gill, R. Muñoz-Tapia, and O. Romero-Isart, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 130501 (2006).
18. S. S. Straupe, *JETP Lett.* **104**, 510 (2016).
19. S. T. Flammia, D. Gross, Y.-K. Liu, and J. Eisert, *New J. Phys.* **14**, 095022 (2012).
20. Ю. И. Богданов, *ЖЭТФ* **135**, 1068 (2009).
21. I. Bengtsson, *AIP Conference Proceedings* **889**, 40 (2007).
22. M. Grant and S. Boyd, *CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta [Electronic resource]*; URL: <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
23. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics, Inference and Relationship*, Charles Griffin & Company Ltd., London (1961), v. 2.
24. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, A. N. Penin, A. A. Zhukov, L. C. Kwek, C. H. Oh, and M. K. Tey, *Phys. Rev. A* **70**, 042303 (2004).
25. Quantum tomography by MLE and root approach [Electronic resource]; URL: <https://github.com/PQCLab/RootTomography>, 2019.
26. A. Steffens, C. A. Riofrio, W. McCutcheon, I. Roth, B. A. Bell, A. McMillan, M. S. Tame, J. G. Rarity, and J. Eisert, *Quantum Sci. Technol.* **2**, 025005 (2017).
27. C. Ferrie, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 190404 (2014).
28. C. Granade, J. Combes, and D. G. Cory, *New J. Phys.* **18**, 033024 (2016).
29. D. Ahn, Y. S. Teo, H. Jeong, F. Bouchard, F. Hufnagel, E. Karimi, D. Koutny, J. Řeháček, Z. Hradil, G. Leuchs, and L. L. Sanchez-Soto, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 100404 (2019).
30. A. Uhlmann, *Phys. Rev. A* **62**, 032307 (2000).
31. K. Życzkowski and H.-J. Sommers, *J. Phys. A Math. Gen.* **34**, 7111 (2001).
32. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, B. I. Bantysh, and Yu. A. Kuznetsov, *Proc. SPIE* **11022**, 110222O (2019).

Quantum \mathcal{R} -matrices as universal qubit gates

*N. Kolganov^{+*1)}, An. Morozov^{+**×1)}*

⁺ *Moscow Institute of Physics and Technology, 141701 Dolgoprudny, Russia*

^{*} *Institute for Theoretical and Experimental Physics, 117218 Moscow, Russia*

[×] *Institute for Information Transmission Problems, 127994 Moscow, Russia*

Submitted 7 April 2020
Resubmitted 10 April 2020
Accepted 10 April 2020

DOI: 10.31857/S1234567820090086

Quantum computers is quite a hot topic nowadays. They are a very promising device and method of solving lots of problems. The main problem of the quantum computers from the practical point of view is the high probability of errors. Since it has quantum nature the states are not stable and can dissolve or change. This limits the time the quantum computer can work and the size of the programs it can run. To deal with these problems the quantum correction algorithms are usually used. These algorithms imply that instead of physical qubits the logical qubits, consisting of several physical ones, are considered. The physical qubits inside of the logical qubit are regularly entangled with each other thus providing an error corrections. However, the quantum computer with such error corrections require many more physical qubits which is also a big problem at the current stage.

Another approach is to try to use qubit models where the states are more stable. One of the approaches is to make the states topological, as those are usually much harder to change. This leads to the idea of the topological quantum computer. Many of the models of this quantum computer behave under the laws of the topological 3d Chern–Simons theory. There are different models where the Chern–Simons is an effective theory which in future could provide us with the topological quantum computer [1].

The main observables, studied in the Chern–Simons theory are Wilson-loop averages, and this loops are usually thought to be related to quantum programs or algorithms. As we know these Wilson-loop averages are equal to the knot invariants. According to the Reshetikhin–Turaev approach [2], these knot invariants can be constructed from the \mathcal{R} -matrices. In this sense these matrices provide an elementary building blocks from which the whole knot is constructed. In quantum information theory such building blocks are called uni-

versal quantum gates. In [3] it was suggested that quantum \mathcal{R} -matrices can indeed be used as universal quantum gates.

In the present papers we continue these studies with the goal of studying the properties of the \mathcal{R} -matrices as quantum gates and how different other gates can be constructed from them using Solovay–Kitaev algorithm [4, 5]. We construct an approximation for one-qubit Hadamard and $\pi/8$ gates from fundamental \mathcal{R} and Racah matrices. The generalization to larger matrices and higher representations is a work in progress.

We study the simplest topological theory which is the Chern–Simons theory. It's a 3d topological gauge theory with Wilson-loop averages as their most interesting observables. These Wilson-loop averages for the $SU(N)$ gauge group are equal to HOMFLY-PT polynomials. HOMFLY-PT polynomials depend on two variables A and q , which are connected to the parameters of the theory:

$$q = \exp \frac{2\pi i}{k + N}, \quad A = q^N. \quad (1)$$

The HOMFLY-PT polynomials can be calculated as a product of quantum \mathcal{R} -matrices – the solutions of Yang–Baxter equation, this is called Reshetikhin–Turaev (RT) approach. One of the crucial properties of the \mathcal{R} -matrix is that it acts in the same way on all elements of the representation of the corresponding quantum group. Thus one can move to the \mathcal{R} -matrix in the space of intertwining operators, which describes how it acts on all irreducible representations in the tensor product of a pair of representations. The eigenvalues of such \mathcal{R} -matrices are described in a very simple way for any representation Q from the product of two representations R [2]:

$$\lambda_Q = \epsilon_Q q^{\kappa_Q - 4\kappa_R} A^{-|R|}. \quad (2)$$

The physically meaningful Chern–Simons theories has integer k and of course integer N . This means that both q and A are roots of unity. Thus the \mathcal{R} -matrix in the space of intertwining operators is unitary.

¹⁾e-mail: nikita.kolganov@phystech.edu; andrey.morozov@itep.ru

We use the \mathcal{R} -matrices which appear for the two-bridge knots. Namely there appear two diagonal \mathcal{R} -matrices and two Racah matrices which give the non-diagonal matrices. In this letter we mainly discuss the fundamental representation. In this case these matrices are [6]:

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} q/A & \\ & -1/qA \end{pmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -A \end{pmatrix}, \\
 S &= \frac{1}{\sqrt{(q+q^{-1})(A-A^{-1})}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{A}{q} - \frac{q}{A}} & \sqrt{Aq - \frac{1}{Aq}} \\ \sqrt{Aq - \frac{1}{Aq}} & -\sqrt{\frac{A}{q} - \frac{q}{A}} \end{pmatrix}, \\
 \bar{S} &= \begin{pmatrix} \frac{q-q^{-1}}{A-A^{-1}} & \frac{\sqrt{(Aq - \frac{1}{Aq})(\frac{A}{q} - \frac{q}{A})}}{A-A^{-1}} \\ \frac{\sqrt{(Aq - \frac{1}{Aq})(\frac{A}{q} - \frac{q}{A})}}{A-A^{-1}} & -\frac{q-q^{-1}}{A-A^{-1}} \end{pmatrix}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

We use these \mathcal{R} -matrices as universal quantum gates, which are a set of elementary operations, from which the quantum programs and algorithms are constructed. To use our suggest quantum gates we apply the Solovay–Kitaev theorem [4], which says that if there is a set of universal quantum gates then any program or algorithm represented by unitary matrix, can be approximated in a logarithmic time and with logarithmic number of operators. It can be proven by providing a specific algorithm constructing such an approximation, which we refer as Solovay–Kitaev algorithm [5]. The pseudocode of this algorithm reads

```

Algorithm 1 Solovay–Kitaev algorithm
function Solovay–Kitaev (gate  $U$ , depth  $n$ )
  if  $n = 0$  then
    return Basic–Approximation ( $U$ )
  else
     $U_{n-1} \leftarrow$  Solovay–Kitaev( $U$ ,  $n - 1$ )
     $V, W \leftarrow$  GC-Decompose( $U U_{n-1}^\dagger$ )
     $V_{n-1} \leftarrow$  Solovay–Kitaev( $V$ ,  $n - 1$ )
     $W_{n-1} \leftarrow$  Solovay–Kitaev( $W$ ,  $n - 1$ )
    return  $V_{n-1} W_{n-1} V_{n-1}^\dagger W_{n-1}^\dagger U_{n-1}$ 

```



Fig. 1. First approximation for Hadamard gate, knots 7_4 , 9_{23} , 7_4 , 9_{23} , 9_4 , accuracy $\epsilon = 0.0068$, $N = 2$, $k = 13$

We suggest to use the known polynomials and corresponding products of \mathcal{R} -matrices for knots up to some number of crossings (for example 11 or 12) as a basic approximation. Using this we construct, as an example, approximations for Hadamard (see Fig. 1) and $\pi/8$ -gates E , which are the most common universal quantum gates:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

We are grateful for very useful discussions to A. Andreev, N. Tselousov, S. Mironov, A. Sleptsov, and A. Popolitov.

This work was supported by Russian Science Foundation grant # 18-71-10073.

Full text of the paper is published in JETP Letters journal. DOI: 10.1134/S0021364020090027

1. C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008); arXiv:0707.1889.
2. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *JHEP* **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
3. D. Melnikov, A. Mironov, S. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Nucl. Phys. B* **926**, 491 (2018); arXiv:1703.00431.
4. A. Y. Kitaev, *Russian Math. Surveys* **52**, 1191 (1997).
5. Ch.M. Dawson and M.A. Nielsen, *Quantum Info. Comput.* **6**(1), 81 (2006); quant-ph/0505030.
6. A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, *JHEP* **07**, 069 (2015); arXiv:1412.8432.

Определение фотофизических параметров твердых растворов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$ в суспензиях с помощью теории Джадда–Офельта

С. А. Буриков⁺¹⁾, О. Д. Котова⁺, О. Э. Сарманова⁺, С. В. Кузнецов^{*}, В. Ю. Пройдакова^{*}, В. В. Воронов^{*},
П. П. Федоров^{*}, С. В. Падаева⁺, Т. А. Доленко⁺

⁺ Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

^{*} Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 апреля 2020 г.

После переработки 3 апреля 2020 г.

Принята к публикации 3 апреля 2020 г.

В работе представлены результаты применения теории Джадда–Офельта для определения времени жизни возбужденного состояния новых твердых растворов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$ в суспензиях диметилсульфоксида. Сравнительный анализ полученных в эксперименте и рассчитанных теоретически значений времен жизни возбужденного состояния твердых растворов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$ показал, что модель Джадда–Офельта адекватно описывает фотофизические процессы в исследованных веществах.

DOI: 10.31857/S1234567820090098

1. Введение. В современной биологии и медицине большое внимание уделяется разработке методов неинвазивного исследования и контроля процессов, протекающих в живых организмах, в том числе на клеточном уровне. Одним из наиболее перспективных является метод оптической визуализации [1], в котором широко используется люминесцентная спектроскопия [2–4]. Для реализации этого метода, как правило, в клетки и в биоткани внедряются специально синтезированные частицы, обладающие интенсивными люминесцентными свойствами [5–6]. В настоящее время с этой целью широко используются органические красители [6], комплексы на основе благородных и тяжелых металлов [7, 8], квантовые точки [9], люминесцентные белки [10], углеродные наночастицы [11, 12], комплексы на основе редкоземельных ионов (РЗИ) [13].

Одной из основных проблем оптической визуализации биологических объектов является наличие флуоресценции естественных флуорофоров биологической ткани – аутофлуоресценции [14], спектр которой перекрывается со спектром фотолюминесценции самих наночастиц. Существуют различные подходы к решению этой проблемы. Один из них заключается в применении методов машинного обучения для анализа спектров. Так, для выделения полезного сигнала люминесценции углеродных наночастиц на фоне люминесценции биологической среды успешно рекомендовал себя метод искусственных нейронных се-

тей [15]. Другой подход основан на синтезе веществ (как правило, с использованием РЗИ), в которых можно реализовать режим возбуждения антистоксовой люминесценции [16]. Еще одним перспективным способом избавиться от аутофлуоресценции является время-разрешенная спектроскопия [17]. Так как время жизни флуоресценции естественных флуорофоров, как правило, составляет единицы наносекунд [17], то для успешной визуализации необходимо использовать наночастицы с временами жизни излучательных состояний, лежащими в микро- и миллисекундном диапазоне. В этом контексте весьма перспективными являются ионы редкоземельных элементов, так как они обладают относительно долгоживущими возбужденными состояниями [18].

В последнее время разработаны неорганические кристаллические наноструктуры, состоящие из матрицы, легированной одним [17] или несколькими ионами лантаноидов [16, 19]. Комбинация малых размеров кристаллических частиц и наличие легирующих примесей РЗИ – люминесцентных центров – обеспечивает высокую эффективность и стабильность люминесценции таких материалов по сравнению со многими другими упомянутыми люминофорами, что обуславливает расширение потенциальных областей их применения. Хорошо известно, что окружающая матрица существенно изменяет свойства внедренных в нее РЗИ [20]. Более того, при переходе к наноразмерным образцам эти изменения становятся более значимыми. При уменьшении размера происходит искажение структуры, влияющее на ло-

¹⁾e-mail: sergey.burikov@gmail.com

кальное окружение РЗИ: изменяются их люминесцентные свойства – квантовая эффективность, радиационное время жизни, безызлучательная релаксация, механизмы передачи энергии возбуждения. Поэтому очень важно исследовать фотофизические состояния таких комплексов, уметь определять параметры этих состояний и анализировать механизмы передачи энергии.

Ионы редкоземельных элементов интересны тем, что для них разработан теоретический метод, позволяющий рассчитывать многие фотофизические параметры, такие как излучательные времена жизни состояний, вероятности переходов, внутренний квантовый выход по спектрам поглощения или люминесценции [21–24]. Такие расчеты проводят с помощью теории Джадда–Офельта [21–23]. Используя эту теорию, можно рассчитать параметры электрических и магнитных дипольных переходов между штарковскими подуровнями РЗИ без знания явного вида волновых функций электрона в кристаллическом поле. Таким образом, модель Джадда–Офельта многократно упрощает расчеты и позволяет теоретически предсказывать характеристики твердых растворов лантаноидов без их экспериментальных измерений [23]. Легирование различных матриц ионами европия представляет особый интерес, так как именно для этого иона теория упрощается и позволяет оценивать времена жизни люминесценции исключительно по форме спектров люминесценции, в то время как для прочих ионов лантаноидов для решения той же задачи необходимо использовать и спектры поглощения [23]. Однако, как указывалось ранее, свойства ионов существенно зависят от матриц, в которые они внедрены. Поэтому необходимо всегда проводить оценку корректности применения теории Джадда–Офельта для новых комплексов РЗИ.

Авторами настоящей работы исследуются новые твердые растворы на основе матрицы NaGdF_4 низкотемпературной модификации, легированные ионами европия. В последние десятилетия наблюдается значительный рост интереса к неорганическим фторидам [25], особенно к структуре NaGdF_4 [26]. Препараты на основе NaGdF_4 гексагональной модификации могут быть использованы в качестве материала-тераностика для магнитно-резонансной томографии, рентгеновской, стоковой и ап-конверсионной биовизуализации, так как они обладают низкой токсичностью [27]. Следует отметить, что к настоящему моменту не проводились исследования фотофизического состояния комплексов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$, в том числе, с помощью теории Джадда–Офельта.

В данной работе проведена оценка корректности применения теории Джадда–Офельта для расчета времени жизни возбужденного состояния новых комплексов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$. Представлены результаты сравнительного анализа экспериментально измеренных и теоретически рассчитанных значений времен жизни возбужденного состояния указанных комплексов в суспензиях. Еще раз показана перспективность применения комплексов $\text{NaGdF}_4 : \text{Eu}$ для оптической визуализации в биотканях посредством время-разрешенной спектроскопии.

2. Теория Джадда–Офельта для определения фотофизических параметров ионов редкоземельных элементов. Теория Джадда–Офельта используется для описания фотофизических процессов, протекающих в наноконкомплексах, легированных РЗИ, и получения ряда их спектроскопических параметров, таких как силы осцилляторов переходов, параметры интенсивности Джадда–Офельта, излучательные времена жизни состояний, вероятности спонтанных переходов [21–23]. Преимущество теории заключается в том, что для ее использования в общем случае необходим только спектр поглощения и показатель преломления образца.

Вероятность оптических переходов между уровнями РЗИ определяется взаимодействием 4f-электронов с полем кристаллической матрицы. Воздействие окружения матрицы, т.е. ее кристаллическое поле, рассматривается как возмущение Гамильтониана свободного иона, “смешивающее” состояния противоположной четности и обеспечивающее наличие дипольных переходов внутри 4f-оболочки.

Рассмотрим интенсивности переходов между двумя уровнями. В общем случае сила осциллятора электрического дипольного оптического перехода из начального состояния α в конечное состояние β будет иметь вид:

$$f = \frac{8\pi^2 m c}{3h\tilde{\lambda}(2J+1)e^2} n \left(\frac{n^2+2}{3n} \right)^2 \times \sum |\langle \alpha J M | \mathbf{P} | \beta J' M' \rangle|^2, \quad (1)$$

где m – масса электрона, n – показатель преломления, $\tilde{\lambda}$ – длина волны перехода, J – полный угловой момент начального состояния.

Полагая, что все Штарковские компоненты начального состояния заселены одинаково и что случай оптически изотропен, получим, что сила осциллятора электрического дипольного перехода из начально-

го состояния $\langle \varphi_a |$ на все Штарковские компоненты конечного состояния $|\varphi_b \rangle$ [21, 22]:

$$f = \frac{8\pi^2 mc}{3h\tilde{\lambda}(2J+1)e^2} n \left(\frac{n^2+2}{3n} \right)^2 \times \sum_{\lambda=2,4,6} \Omega_\lambda |\langle \varphi_a \| U^{(\lambda)} \| \varphi_b \rangle|^2, \quad (2)$$

где $\langle \varphi_a \| U^{(\lambda)} \| \varphi_b \rangle$ – приведенные матричные элементы единичных тензорных операторов (их значения практически не зависят от типа кристаллической матрицы; для многих редкоземельных элементов они были рассчитаны [28, 29]), Ω_λ – параметры интенсивности Джадда–Офельта.

Отметим, что в таком случае выражение для силы осциллятора дипольного перехода представлено в виде суммы произведений двух параметров, один из которых зависит исключительно от типа кристаллической матрицы (параметр интенсивности Джадда–Офельта), а второй (тензорный оператор) зависит только от типа РЗИ.

В общем случае сила осциллятора электрического дипольного перехода может быть выражена через интегральное сечение поглощения на этом переходе:

$$f = \frac{9mcn}{\pi e^2 (n^2+2)^2 N_0} \int k(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda}, \quad (3)$$

где N_0 – концентрация РЗИ, $k(\tilde{\lambda})$ – коэффициент поглощения, n – показатель преломления. Таким образом, измеряя интегральное сечение поглощения перехода и вычисляя с помощью выражения (3) силу осциллятора дипольного перехода, можно определить параметры интенсивности Джадда–Офельта Ω_λ . В свою очередь, с их помощью можно вычислить такие важные спектроскопические характеристики, как вероятность спонтанных излучательных переходов, коэффициент ветвления и излучательное время жизни уровня.

Европий обладает двумя уникальными свойствами, позволяющими рассчитывать параметры Джадда–Офельта только с помощью спектров люминесценции. Во-первых, в спектре люминесценции европия присутствует разрешенный магнитный дипольный переход ${}^5D_0 - {}^7F_1$, интенсивность которого практически не зависит от окружающей кристаллической матрицы и точечной симметрии люминесцирующего центра. Таким образом, можно оценить значение силы осциллятора магнитного дипольного перехода f_{MD} и с ее помощью оценить вероятность спонтанного перехода $A_1 = \frac{64\pi^4}{3h} \tilde{k}_1^3 n^3 f_{\text{MD}}$. Во-вторых, все значения $|\langle J \| U^{(\lambda)} \| J' \rangle|^2 \equiv U^{(\lambda)}$ для

электрических дипольных переходов с уровня 5D_0 равны нулю, за исключением переходов на ${}^7F_\lambda$, $\lambda = 2, 4, 6$. Для них $U^{(2)} = 0.0032$, $U^{(4)} = 0.0023$, $U^{(6)} = 0.0002$ [29].

Чтобы вычислить вероятности спонтанных переходов ${}^5D_0 - {}^7F_{2,4,6}$, необходимо сравнить интегральные интенсивности этих переходов с соответствующей величиной для ${}^5D_0 - {}^7F_1$ [30]:

$$A_\lambda = A_1 \frac{I_\lambda \tilde{k}_1}{I_1 \tilde{k}_\lambda}, \quad (4)$$

где $I_\lambda = \int I_\lambda(\tilde{k}) d\tilde{k}$ – интегральная интенсивность перехода с 5D_0 на ${}^7F_\lambda$, $\tilde{k} = \int \frac{\tilde{k} I_\lambda(\tilde{k})}{I_\lambda} d\tilde{k}$ – среднее волновое число [см^{-1}], $\lambda = 1, 2, 4, 6$, $n = n(\tilde{\lambda})$ – значение показателя преломления.

С учетом связи между вероятностями спонтанных излучательных переходов и параметрами Джадда–Офельта:

$$A(J'; J) = \frac{64\pi^4 e^2}{3h(2J+1)\tilde{\lambda}^3} \left[n \left(\frac{n^2+2}{3n} \right)^2 S_{\text{ED}} + n^3 S_{\text{MD}} \right], \quad (5)$$

где S_{ED} , S_{MD} – интенсивность линии электрического и магнитного дипольного перехода:

$$S_{\text{ED}} = \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\lambda=2,4,6} \Omega_\lambda |\langle J' \| U^{(\lambda)} \| J \rangle|^2, \quad (6)$$

$$S_{\text{MD}} = \frac{1}{4mc^2} \sum_{\lambda=2,4,6} \Omega_\lambda |\langle J' \| L + 2S \| J \rangle|^2. \quad (7)$$

Решая систему уравнений, можно найти параметры Джадда–Офельта.

Далее становится возможным рассчитать такие величины, как излучательное время жизни, коэффициенты ветвления, сечение вынужденного излучения, квантовую эффективность люминесценции, оптическое усиление, квантовый выход и эффективность сенсбилизации [31].

Например, суммируя по всем излучательным переходам из начального состояния $|J\rangle$, можно найти излучательное время жизни уровня $|J'\rangle$:

$$\tau_r = \frac{1}{\sum_J A(J'; J)}. \quad (8)$$

3. Материалы и эксперимент. В качестве объектов исследования выступали суспензии новых твердых растворов на основе матриц NaGdF_4 , легированных ионами Eu , в диметилсульфоксиде (ДМСО). Образцы отличались концентрацией Eu в

матрице (5, 8 и 10 мол. %). В дальнейшем они будут обозначаться К5, К8 и К10 в соответствии с концентрацией европия.

3.1. Синтез и характеристика твердых растворов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$.

Наночастицы $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ были синтезированы сольвотермальным методом синтеза в высококипящем растворителе по методике, описанной ранее в [19, 32]. Ацетаты европия и гадолиния марки чистоты 99.99 (ЛАНХИТ, Россия) добавляли к олеиновой кислоте (ВЕКТОН) и 90% октадецен-1 (ВЕКТОН). Реакционную смесь нагревали до 130 °С при перемешивании в атмосфере аргона до полного растворения осадка, далее в вакууме удаляли воду и уксусную кислоту. NaOH и NH_4F марки чистоты Х.Ч. (ЛАНХИТ) растворяли в метаноле марки чистоты ОС.Ч. (ХИММЕД). В реакционную смесь при комнатной температуре добавляли смесь растворов NaOH и NH_4F , нагревали всю смесь до 50–60 °С и выдерживали при этой температуре в течение одного часа, после чего метанол удаляли в вакууме. После удаления всего метанола реакционную смесь нагревали до 290 °С и выдерживали в течение 1.5 ч, а затем охлаждали до 25 °С. Осадок наночастиц отделяли от раствора центрифугированием (Eppendorf 5804, 6500 об/мин, 5 мин). Полученные наночастицы три раза последовательно диспергировали в хлороформе и промывали 96% этанолом.

Рентгенофазовый анализ был проведен на дифрактометре Bruker D8 Discover с $\text{CuK}\alpha$ -излучением. Параметры решетки были рассчитаны в программе Powder 2.0 ($\Delta Q < 10$). Рентгенограмма типичного синтезированного образца $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ представлена на рис. 1. Сравнение рентгенограммы с базой данных JCPDS 27-0699 ($a = 6.020 \text{ \AA}$, $c = 3.601 \text{ \AA}$) для $\beta\text{-NaGdF}_4$ не выявило дополнительных пиков, что свидетельствует о синтезе однофазных образцов низкотемпературной гексагональной фазы. Результаты расчета параметров решетки представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты синтеза образцов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$

Состав	Параметры решетки образцов, \AA
К5 – $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ (5 мол. %)	$a = 6.041(2)$, $c = 3.592(1)$
К8 – $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ (8 мол. %)	$a = 6.040(3)$, $c = 3.594(3)$
К10 – $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ (10 мол. %)	$a = 6.042(2)$, $c = 3.595(2)$

В дальнейшем из полученных порошков $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ были приготовлены суспензии в ДМСО с концентрацией 4.3 г/л. Методом дина-

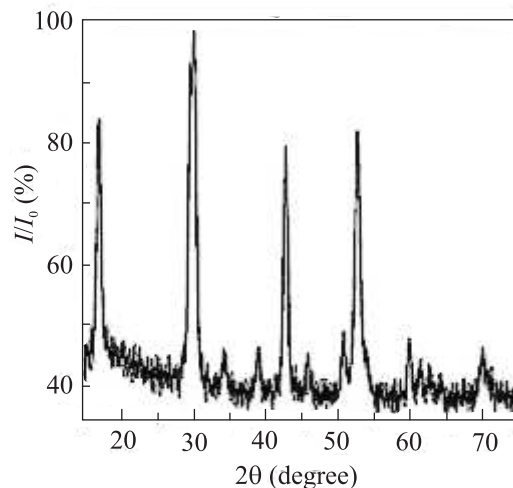


Рис. 1. Рентгенограмма образца К8 – $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ (8 мол. %)

мического светорассеяния был определен их размер в суспензии, оказавшийся равным 264 нм.

3.2. Фотoluminesцентная спектроскопия. Люминесцентные свойства полученных суспензий были исследованы с помощью спектрофлуориметра Solar CM2203 (Беларусь) в 90°-геометрии при комнатной температуре. Для измерений использовали стандартные кварцевые кюветы для флуориметрии с длиной оптического пути 10 мм. Прибор использовался в режиме регистрации фосфоресценции, т.е. регистрация спектров осуществлялась с задержкой в 20 мкс относительно возбуждающего импульса ксеноновой лампы. Спектральное разрешение составляло 10 нм.

4. Результаты и обсуждение.

4.1. Время-разрешенная спектроскопия твердых растворов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ в ДМСО. Были получены спектры возбуждения фосфоресценции всех исследуемых суспензий в диапазоне 250–600 нм при регистрации фосфоресценции на длине волны 616 нм (рис. 2). Установлено, что оптимальной для интенсивной люминесценции образцов является длина волны возбуждения 272 нм.

Полученные спектры фосфоресценции исследованных твердых растворов европия в области 575–775 нм при возбуждении на длине волны 272 нм представлены на рис. 3. На рисунке отмечены электронные переходы в европии, которым соответствует данная полоса фосфоресценции.

Кинетики затухания фосфоресценции $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ измерялись при возбуждении светом с длиной волны 272 нм и регистрировались на длинах волн 590, 616, 690 нм, соответствующих положениям максимумов самых интенсивных полос

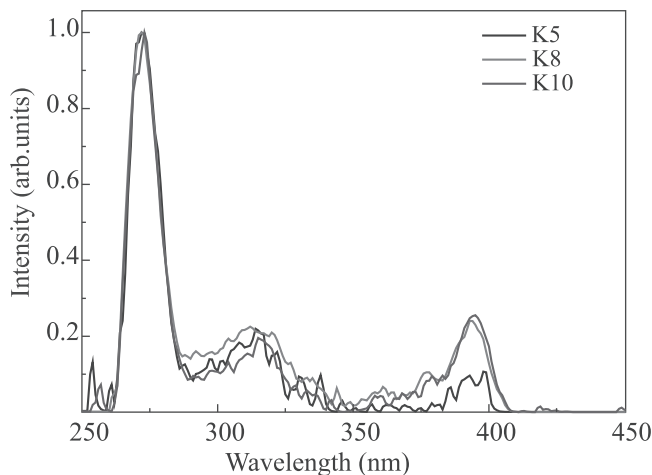


Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектры возбуждения фосфоресценции исследуемых образцов. Спектры нормированы на максимум интенсивности

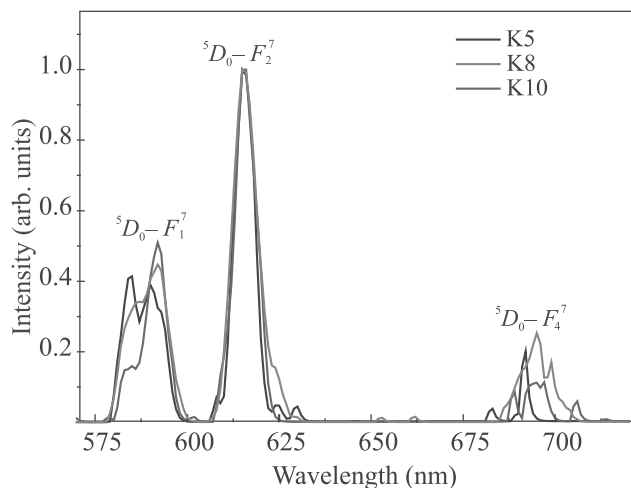


Рис. 3. (Цветной онлайн) Спектры люминесценции образцов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ при возбуждении на длине волны 272 нм. Спектры нормированы на максимум интенсивности

спектра (рис. 3). Для каждого образца проводилось по 3–5 повторений регистрации кинетик затухания фосфоресценции. Обработка кинетики затухания заключалась в построении зависимостей от времени в полулогарифмическом масштабе, определении прямолинейного участка, нахождении коэффициента линейной регрессии для данного участка и расчете времени жизни фосфоресценции возбужденного состояния европия. Значения времени жизни усреднялись по количеству повторений для одного и того же образца, затем рассчитывалась среднеквадратичная погрешность измерения.

На рисунке 4 представлена полученная кинетика затухания фотолюминесценции для твердого раствора К8. В таблице 2 представлены измеренные времена затухания фосфоресценции исследованных твердых растворов для разных полос спектра и среднее время затухания.

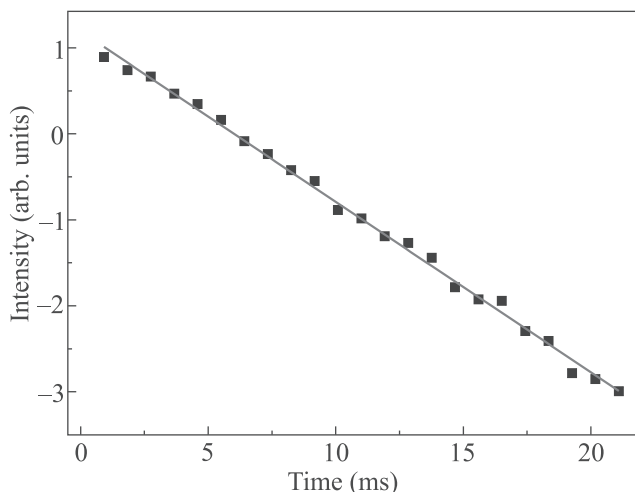


Рис. 4. (Цветной онлайн) Кинетика затухания фосфоресценции образца К8 – $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ с содержанием европия 8% – в полулогарифмическом масштабе. Концентрация твердого раствора в суспензии 4.3 г/л

Точность определения времени затухания составляла в среднем 0.3 мс.

Как видно из табл. 2, для всех образцов были получены близкие значения времен затухания фосфоресценции. Для образца с наибольшей концентрацией европия (10%) время оказалось несколько меньше, что может быть связано с тем, что при высоких концентрациях европия в матрице повышается вероятность безызлучательной дезактивации возбужденного состояния (концентрационное тушение).

4.2. Применение теории Джарда–Офельта для определения времени жизни возбужденного состояния твердых растворов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$. Для необходимых расчетов было использовано программное обеспечение JOEs [31]. Параметры Джарда–Офельта рассчитывались по формуле:

$$\Omega_\lambda = \frac{f_{\text{MD}} \bar{k}_1^3}{e^2 \bar{k}_\lambda^3 U(\lambda)} \frac{9n_1^3}{n_\lambda (n_\lambda^2 + 2)^2} \frac{J_\lambda}{J_1}, \quad (9)$$

где $J_\kappa = \int I_\kappa(\tilde{k}) d\tilde{k}$ – интегральная интенсивность перехода с 5D_0 на ${}^7F_\kappa$, $\bar{k}_\kappa = \int \frac{\tilde{k} I_\kappa(\tilde{k})}{J_\kappa} d\tilde{k}$ – среднее волновое число [см^{-1}], $\kappa = 1, 2, 4, 6$, $n = n(\lambda)$ – значение показателя преломления, принятое для исследуемых частиц равным $n = 1.45$ [33].

Таблица 2. Измеренные времена затухания фосфоресценции твердых растворов NaGdF₄:Eu

Образец	Время затухания фосфоресценции, мс			
	Полоса 590 нм	Полоса 616 нм	Полоса 690 нм	Среднее время затухания
K5 (5 % Eu)	5.6	5.3	5.7	5.5
K8 (8 % Eu)	5.4	5.5	6.2	5.7
K10 (10 % Eu)	5.4	4.7	4.7	4.9

Таблица 3. Измеренные экспериментально и рассчитанные значения времен жизни возбужденного состояния твердых растворов NaGdF₄:Eu

Образец	Время жизни возбужденного состояния (рассчитанное), мс	Время затухания фотолуминесценции (эксперимент), мс
K5 (5 % Eu)	7.5	5.5
K8 (8 % Eu)	6.9	5.7
K10 (10 % Eu)	7.1	4.9

Для случая с европием:

$$f_{ED}^{\lambda} = e^2 \Omega_{\lambda} U^{(\lambda)}, \quad (10)$$

где $e = 4.803 \cdot 10^{-10}$ – элементарный заряд [СГСЭ], $h = 6.63 \cdot 10^{-27}$ – постоянная Планка [эрг · с].

С учетом рассчитанных параметров Джадда–Офельта были определены вероятности излучательных переходов:

$$A_{\lambda} = \frac{64\pi^4}{3h} \tilde{k}_{\lambda}^3 \frac{n_{\lambda}(n_{\lambda}^2 + 2)^2}{9} f_{ED}^{\lambda}, \quad (11)$$

$$A_1 = \frac{64\pi^4}{3h} \tilde{k}_1^3 n_1^3 f_{MD}.$$

$A_R = \sum A_i$ – общая вероятность излучательных переходов.

Далее было определено радиационное время жизни:

$$\tau_{\text{calc}}^{\text{rad}} = \frac{1}{A_R}. \quad (12)$$

Рассчитанные значения времен жизни возбужденного состояния представлены в табл. 3. Для сравнения в той же табл. 3 представлены средние значения времен затухания фотолуминесценции, полученные из экспериментальных измерений.

Сравнительный анализ полученных в эксперименте и рассчитанных значений времени жизни возбужденного состояния твердых растворов NaGdF₄:Eu (табл. 3) показывает, что теоретически рассчитанные времена больше экспериментально измеренных. Это объясняется тем, что теоретически рассчитываются времена, учитывающие только излучательную релаксацию возбужденных состояний, а экспериментально полученные из кинетик

затухания значения времен жизни учитывают как излучательную, так и безызлучательную релаксацию.

Таким образом, полученные результаты подтверждают корректность применения теории Джадда–Офельта для расчета времени жизни возбужденного состояния твердых растворов NaGdF₄:Eu.

Выводы. В данной работе впервые проведена оценка корректности применения теории Джадда–Офельта для расчета времени жизни возбужденного состояния новых твердых растворов NaGdF₄:Eu в суспензиях ДМСО. Были экспериментально измерены времена жизни затухания фотолуминесценции и теоретически рассчитаны излучательные времена жизни возбужденных состояний исследованных твердых растворов. В результате сравнительного анализа получено хорошее согласие значений этих параметров. Таким образом, модель Джадда–Офельта адекватно описывает фотофизические процессы в исследованных образцах. Показана перспективность применения твердых растворов NaGdF₄:Eu для оптической визуализации в биотканях посредством время-разрешенной спектроскопии.

Работа была выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 18-02-01023-а.

1. R. Weissleder and M. J. Pittet, *Nature* **452**(7187), 580 (2008).
2. P.N. Prasad, *Introduction to Nanomedicine and Nanobioengineering*, Wiley-Interscience, Hoboken (2012).
3. I.L. Medintz, H.T. Uyeda, E.R. Goldman, and H. Mattoussi, *Nature Mater.* **4**, 435 (2005).

4. K. Welsher, Z. Liu, S.P. Sherlock, J.T. Robinson, Z. Chen, D. Daranciang, and H.J. Dai, *Nature Nanotech.* **4**, 773 (2009).
5. M. Ryvolova, J. Chomoucka, J. Drbohlavova, P. Kopel, P. Babula, D. Hynek, V. Adam, T. Eckschlager, J. Hubalek, M. Stiborova, J. Kaiser, and R. Kizek, *Sensors* **12**(11), 14792 (2012).
6. K. Wang, X. Zhang, X. Zhang, B. Yang, Z. Li, Q. Zhang, Z. Huangand, and Y. Wei, *Macromol. Chem. Phys.* **216**, 678 (2015).
7. A. Llevot and D. Astruc, *Chem. Soc. Rev.* **41**(1), 242 (2012).
8. Q. Zhao, C. Huang, and F. Li, *Chem. Soc. Rev.* **40**(5), 2508 (2011).
9. B. A. Kairdolf, A. M. Smith, T. H. Stokes, M. D. Wang, A. N. Young, and S. Nie, *Rev. Anal. Chem.* **6**, 143 (2013).
10. K. B. Bravaya, B. L. Grigorenko, A. V. Nemukhin, and A. I. Krylov, *Acc. Chem. Res.* **45**, 265 (2012).
11. N. Prabhakar, T. Näreoja, E. von Haartman, D. SenKaraman, S.A. Burikov, T. A. Dolenko, T. Deguchi, V. Mamaeva, P.E. Hanninen, I.I. Vlasov, O. A. Shenderovah, and J. M. Rosenholm, *Nanoscale* **7**, 10410 (2015).
12. J. M. Rosenholm, I. I. Vlasov, S. A. Burikov, T. A. Dolenko, and O. A. Shenderova, *J. Nanosci. Nanotechnol.* **15**, 959 (2015).
13. I. Hemmila and V. Laitala, *J. Fluoresc.* **15**(4), 529 (2005).
14. M. Zellweger, *Fluorescence spectroscopy of exogenous, exogenously-induced and endogenous fluorophores for the photodetection and photodynamic therapy of cancer*, EPFL, Lausanne (2000).
15. T. A. Dolenko, S. A. Burikov, A. M. Vervalde, I. I. Vlasov, S. A. Dolenko, K. A. Laptinskiy, J. M. Rosenholm, and O. A. Shenderova, *J. Biomed. Opt.* **19**(11), 117007 (2014).
16. O. E. Sarmanova, S. A. Burikov, and T. A. Dolenko, *Proc. SPIE* **11067**, 110671E (2019).
17. H. Schneckenburger, M. Wagner, P. Weber, W.S. Strauss, and R. Sailer, *J. Fluoresc.* **14**(5), 649 (2004).
18. N. E. Borisova, A. V. Ivanov, A. V. Kharcheva, T. B. Sumyanova, U. V. Surkova, P. I. Matveev, and S. V. Patsaeva, *Molecules* **25**, 62 (2020).
19. J. Liu, G. Chen, S. Hao, and C. Yang, *Nanoscale* **9**, 91 (2017).
20. Y. Li, J. Zhang, X. Zhang, Y. Luo, S. Lu, X. Ren, X. Wang, L. Sun, and C. Yan, *Chem. Mater.* **21**, 468 (2009).
21. B. R. Judd, *Phys. Rev.* **127**, 750 (1961).
22. G. S. Ofelt, *J. Chem. Phys.* **37**, 511 (1962).
23. B. M. Walsh, *Judd–Ofelt theory: Principles and practices*, ed. by B. Di Bartolo and O. Forte, *Advances in Spectroscopy for Lasers and Sensing*, Springer Verlag, Berlin **21**, 403 (2006).
24. Ю. В. Князев, А. В. Лукоянов, Ю. Н. Кузьмин, S. Gupta, K. G. Suresh, *Письма в ЖЭТФ* **150**(4), 738 (2016).
25. Т. Т. Басиев, А. Я. Карасик, А. А. Корниенко, А. Г. Папашвили, К. К. Пухов, *Письма в ЖЭТФ* **78**(5), 768 (2003).
26. D. V. Pominova, I. D. Romanishkin, V. Y. Proydakova, P. V. Grachev, A. S. Moskalev, A. V. Ryabova, V. I. Makarov, K. G. Linkov, S. V. Kuznetsov, O. V. Uvarov, and V. B. Loschenov, *Methods Appl. Fluoresc.* **8**, 025006 (2020).
27. W. H. Tse, L. Chen, C. M. McCurdy, C. M. Tarapacki, B. A. Chronik, and J. Zhang, *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **97**, 2678 (2019).
28. M. J. Weber, *Phys. Rev. APS* **171**(2), 283 (1968).
29. W. T. Carnall, P. R. Fields, and B. G. Wybourne, *J. Chem. Phys.* **42**, 3797 (1965).
30. S. Nigam, V. Sudarsan, and R. K. Vatsa, *Eur. J. Inorg. Chem.* **2013**(3), 357 (2013).
31. A. Ćirić, S. Stojadinović, M. Sekulić, and M. D. Dramicanin, *J. Luminesc.* **205**, 351 (2018).
32. V. Sedov, S. Kuznetsov, A. Martyanov, V. Proydakova, V. Ralchenko, A. Khomich, V. Voronov, S. Batygov, I. Kamenskikh, D. Spassky, S. Savin, and P. Fedorov, *ACS Appl. Nano Mater.* **3**, 1324 (2020).
33. A. Bednarkiewicz, A. Mech, M. Karbowski, and W. Strek, *J. Luminesc.* **114**, 247 (2005).

Иерархия времен открытых оптических квантовых систем и роль эффективного гамильтониана при применении приближения белого шума

А. И. Трубилко, А. М. Башаров¹⁾

Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 196105 С.-Петербург, Россия

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Кафедра математики и математических методов физики Московского физико-технического института, 141701 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 3 апреля 2020 г.

После переработки 3 апреля 2020 г.

Принята к публикации 4 апреля 2020 г.

Иерархия характерных времен естественным образом служит обоснованием необходимости перехода от исходного “точного” гамильтониана открытой квантовой системы и ее окружения к приближенному эффективному гамильтониану для дальнейшего использования марковского приближения и модели дельта-коррелированного окружения открытой системы. Переход к эффективному гамильтониану в рамках алгебраической теории возмущений позволяет учитывать интерференционные каналы релаксации и своеобразную интерференцию случайных процессов, которые невозможно обнаружить и отсутствуют при использовании приближения вращающейся волны. Показано, что в случае ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов своеобразная интерференция приводит к невинеровской динамике ансамбля.

DOI: 10.31857/S1234567820090104

1. Особенностью теоретического анализа оптических открытых систем является необходимость построения эффективного гамильтониана для каждого рассматриваемого случая взаимодействия электромагнитных полей с квантовой системой. Этот этап часто опускается. Вместо построения эффективного гамильтониана предполагается описание процессов взаимодействия в приближении вращающейся волны [1] и дальнейшее получение кинетического уравнения системы. Или вообще используется готовое кинетическое уравнение [2, 3].

Подход с использованием приближения вращающейся волны упускает из рассмотрения процессы второго порядка по взаимодействию с широкополосными квантованными полями, а также разного рода интерференционные процессы (см., например, [4, 5] и приведенные в работах ссылки). Типичный пример широкополосного квантованного поля дает вакуумное электромагнитное поле.

Использование готового кинетического уравнения часто выводит исследователя за рамки применимости этого уравнения, например, при рассмотрении дисперсионных пределов. Анализ таких ситуаций приведен в работах [6–8].

У разработчиков новых подходов к получению кинетического уравнения при формулировке исследуемых моделей и их теоретическом описании проявляется желание применить разработанные общие методы для получения кинетического уравнения (*master equation*) непосредственно к исходному гамильтониану системы, чтобы, как бы, точнее описать исходную систему. Такой подход также является весьма распространенным [9, 10]. В другой классической монографии [11] вообще не обсуждается проблема формулировки исходного гамильтониана для последующего получения кинетического уравнения.

Но давно было замечено [12], что применительно к квантовому осциллятору, взаимодействующему с широкополосным квантованным полем, использование исходного и как бы точного гамильтониана приводит к некорректному результату. Корректный результат получается при применении общих методов теории открытых квантовых систем не к исходному гамильтониану осциллятора, взаимодействующего с квантованным широкополосным полем, а к гамильтониану в приближении вращающейся волны.

Главным отличием приближения вращающейся волны является отсутствие в операторе взаимодействия быстроменяющихся во времени слагаемых, если его рассматривать в представлении взаимодей-

¹⁾e-mail: basharov@gmail.com

ствия. Природу и важность этого факта не рассматривали в контексте задач теории открытых квантовых систем. В упомянутых монографиях [9, 10] разработанные новые методы получения кинетического уравнения для открытых квантовых систем применялись как к гамильтониану в приближении вращающейся волны, так и к исходному гамильтониану взаимодействия, содержащему в представлении взаимодействия как медленно меняющиеся функции времени, так и быстро меняющиеся. Но каких-либо общих выводов из сравнения результатов применения общих подходов к различным гамильтонианам сделано не было.

Следует заметить, что упомянутые работы использовали наиболее эффективное приближение в теории открытых квантовых систем – марковское приближение. В рамках марковского подхода все общие методы теории открытых квантовых систем, так или иначе, используют представления о белом шуме – квантовом или классическом случайном процессе с нулевым временем корреляции. Общие основания здесь лежат в “вездесущности” центральных предельных теорем.

Впервые представления о белом шуме были применены Ланжевенем [13] в теории броуновского движения. Динамика броуновской частицы определялась масштабом времени, задаваемым коэффициентом вязкого трения и размерами частицы, тогда как время корреляции случайной силы, введенной в рассмотрение Ланжевенем, было существенно меньше и могло быть положено равным нулю. Это позволило впервые эффективно применить представления о белом шуме и получить результаты, согласующиеся с другими теориями.

2. В открытых оптических квантовых системах существуют характерные времена, которые, в большинстве случаев, ничтожно малы и никак не могут рассматриваться больше времени корреляции квантового белого шума. Но время корреляции квантового белого шума равно нулю! Таким временем в теории открытых квантовых оптических систем является, например, время “оборота” электрона вокруг ядра. В оптике это время порядка 10^{-15} с. Будем рассматривать эту величину как имя нарицательное, говоря о быстрых процессах, связанных со структурой рассматриваемых объектов. Если взаимодействие с окружением рассматривать в марковском приближении, то формальное определение марковского процесса взаимодействия сводится к аппроксимации термостата математическим белым шумом с нулевым временем корреляции. При этом еще есть характерное время усреднения τ_{av} , если гово-

рим о времени корреляции, причем должно выполняться условие $\tau_{av} \gg \tau_{cor}$. При переходе к реальным системам, где все времена конечны, соотношение упомянутых величин требует детализации и учета при построении модели. Поскольку наряду со временем корреляции термостата τ_{cor} есть характерный и очень малый масштаб 10^{-15} с изменения быстроменяющихся слагаемых гамильтониана открытой системы, то время корреляции термостата не может быть порядка 10^{-15} с – оно его существенно превосходит, $\tau_{cor} \gg 10^{-15}$ с, поскольку здесь идет реальный и достаточно инерционный процесс межчастичных взаимодействий, приводящий к установлению равновесия внутри самого термостата. Кроме того, должно быть выполнено условие $\gamma^{-1}, \tau_d \gg \tau_{av} \gg \tau_{cor} \gg 10^{-15}$ с, где τ_d – характерное время динамики открытой системы, γ^{-1} – характерное время ее релаксационной динамики. В реальной физической ситуации открытой квантовой оптической системы это невозможно! Поэтому, чтобы применять какие-либо общие методы для получения кинетического уравнения рассматриваемой открытой системы, основанные на представлении о белом шуме, необходимо, прежде всего, построить модель рассматриваемой системы и избавиться от быстро меняющихся слагаемых в гамильтониане. Речь идет о быстроменяющихся слагаемых в представлении взаимодействия. Таким образом, необходима процедура, состоящая в построении модели и ее гамильтониана без быстроменяющихся слагаемых в представлении взаимодействия. Это мы называем построением эффективного гамильтониана открытой системы, т.е. по заданному исходному гамильтониану необходимо построить эффективный гамильтониан и уже для него развивать марковское приближение и представления о белом шуме. Если в эффективном гамильтониане не будет быстроменяющихся во времени слагаемых, то будет оправданным полагать $\tau_{cor} = 0$, поскольку в отсутствии быстроменяющихся во времени слагаемых условие $\gamma^{-1}, \tau_d \gg \tau_{av} \gg \tau_{cor}$ вполне можно удовлетворить. К такой модельной системе можно успешно применять приближение белого шума! Заметим, что такой анализ теории открытых оптических квантовых систем отсутствует в известных монографиях [9–11].

3. Под эффективным гамильтонианом квантовой системы имеют в виду различные представления. Помимо простого отбрасывания “неудобных” слагаемых, широко используют различные преобразования. В квантовой теории большинство таких преобразований используют унитарную симметрию квантовой теории. Так с самого зарождения кван-

товой механики – в работе ван Флека [14] унитарное преобразование стало применяться для исключений неудобных слагаемых. А в работах [15–17] развит метод непрерывного унитарного преобразования гамильтониана, приводящего к его диагонализации. Подход с использованием диагонализации исходного гамильтониана известен как глобальный подход [18] и во многих работах сравнивают результаты, полученные в рамках глобального подхода и подхода, основанного на тех или иных приближениях. В последнем случае говорят о локальном подходе. Стоит отметить, что при использовании марковского приближения глобальный подход в оптических квантовых системах зачастую является избыточным и удобнее пользоваться локальным подходом. Реальная суть локального подхода в свете отмеченной иерархии характерных времен системы должна состоять, прежде всего, в исключении быстроменяющихся слагаемых в представлении взаимодействия.

Еще Крыловым, Боголюбовым и Митропольским [19, 20] разработан метод усреднения дифференциальных уравнений, содержащих слагаемые с разными масштабами изменения во времени. В монографии [21] этот метод применен к дифференциальным уравнениям, описывающим динамику квантовых оптических систем. В монографии [22] изложен алгебраический вариант метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, а в работе [23] для исключения быстроменяющихся во времени слагаемых предложено использовать унитарное преобразование исходного гамильтониана. Этот подход отличается от других подходов [24–28] с использованием унитарной симметрии квантовой теории (сравнение двух подходов можно найти в [29]). Использование унитарной симметрии квантовой теории в построении эффективного гамильтониана с целью исключения переменных, быстроменяющихся во времени в представлении взаимодействия, приводит к формулировке оригинальной теории возмущений, которую естественно называть алгебраической теорией возмущений (аналогично [22]). Эту теорию удобно применять к квантовым открытым системам [4, 30] и в нашем случае такое применение состоит в следующем.

В расширенном пространстве состояний открытой системы и квантованного электромагнитного поля исходный гамильтониан H^{Ini} определяет уравнение Шредингера для волнового вектора: $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi^{S+F}\rangle = H^{\text{Ini}} |\Psi^{S+F}\rangle$. Предположения о характере начального состояния $|\Psi^{S+F}\rangle$ при $t = 0$ в алгебраической теории возмущений делаются после построения эффективного гамильтониана задачи.

Это же касается и формулировки марковского приближения.

Чтобы удобнее было отделять быстроменяющиеся слагаемые во времени от медленно меняющихся, необходимо перейти в представление взаимодействия, в котором остаются только операторы взаимодействия между элементами системы $V_S(t)$ и между системой и окружением системы $V_{S-F}(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi^{S+F}(t)\rangle = (V_{S-F}(t) + V_S(t)) |\Psi^{S+F}(t)\rangle. \quad (1)$$

Здесь явное написание аргумента времени служит указанием на использование представления взаимодействия.

Важно отметить, что часто взаимодействие между элементами системы является следствием взаимодействия между системой и окружением. Примером здесь служит диполь-дипольное взаимодействие между атомами атомного ансамбля, рассматриваемого как открытая система в электромагнитном широкополосном окружении [31]. Поэтому одна из идей глобального подхода к открытым системам [32] о необходимости диагонализации гамильтониана открытой системы перед дальнейшим ее изучением, вообще говоря, в открытых оптических квантовых системах не актуальна. При этом мнение об “ущербности” локального подхода находит опору в ошибочных выводах, подобных [33], где вместо использования алгебраической теории возмущений и анализа характерных времен задачи приближение вращающейся волны использовано за рамками его применимости.

В силу унитарной симметрии квантовой теории перейдем от исходных векторов и операторов к преобразованным по формулам

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{T}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad \mathcal{T}(t) = e^{-iS(t)}, \quad S^+(t) = S(t).$$

Преобразованный вектор будет удовлетворять уравнению Шредингера $i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \tilde{H}(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle$ с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde{H}(t) = \mathcal{T}(t) V(t) \mathcal{T}^+(t) - i\hbar \mathcal{T}(t) \frac{d}{dt} \mathcal{T}^+(t),$$

$$V(t) = V_{S-F}(t) + V_S(t).$$

В дальнейшем удобно использовать формальное решение уравнение Шредингера для оператора эволюции $U(t, t_0)$ с преобразованным гамильтонианом, которое выражается с помощью Т-оператора

$$U(t, t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t \tilde{H}(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \times$$

$$\times \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \tilde{H}(t') \tilde{H}(t'') dt' dt'' + \dots = \overleftarrow{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}(t') dt' \right),$$

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = U(t, t_0) |\tilde{\Psi}(0)\rangle.$$

Алгебраическая теория возмущений основана на разложении генераторов преобразования во времени $\tilde{H}(t)$ и рассматриваемого унитарного преобразования $S(t)$ в ряд по константам взаимодействий

$$S(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(2,0)}(t) + \dots,$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) = & \tilde{H}^{(1,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1)}(t) + \tilde{H}^{(1,1)}(t) + \\ & + \tilde{H}^{(2,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,2)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Левый индекс каждой пары верхних индексов описывает порядок слагаемого по константе связи γ_{S-F} между открытой системой и окружением, а правый индекс – порядок по константе g_S между элементами системы. Реально порядок взаимодействия с полями грубо определяется отношением энергии взаимодействия между полями к энергии кванта осциллятора, а параметров взаимодействия может быть несколько в силу возможности участия нескольких полей и/или различных элементов системы.

С учетом формулы Бейкера–Хаусдорфа (см., например, [27, 34]) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(1,0)}(t)}{dt} + V_{S-F}(t), \\ \tilde{H}^{(0,1)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(0,1)}(t)}{dt} + V_S(t), \\ \tilde{H}^{(1,1)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(1,1)}(t)}{dt} - \frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), V_S(t)] - \\ & - \frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), \tilde{H}^{(0,1)}(t)] - \frac{i}{2} [S^{(0,1)}(t), V_{S-F}(t)] - \\ & - \frac{i}{2} [S^{(0,1)}(t), \tilde{H}^{(1,0)}(t)], \quad (2) \\ \tilde{H}^{(2,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(2,0)}(t)}{dt} - \\ & - \frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), V_{S-F}(t)] - \frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0)}(t)], \end{aligned}$$

Формулы (2) могут лежать в основе разных алгоритмов построения эффективного гамильтониана. Алгебраическая теория возмущений следует идеям метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского и определяет такой отбор слагаемых в формулах (2) – в представлении взаимодействия в слагаемых $\tilde{H}^{(1,0)}(t)$, $\tilde{H}^{(0,1)}(t)$ и др. эффективного гамильтониана

$H^{\text{Eff}}(t) = \tilde{H}^{(1,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1)}(t) + \tilde{H}^{(1,1)}(t) + \tilde{H}^{(2,0)}(t) + \dots$ должны остаться только величины, медленно меняющиеся во времени [4, 23, 34]. Это условие однозначно определяет (в предположении адиабатического включения полей) величины $S^{(i,j)}$ и накладывает ограничение на спектр мод широкополосных полей, учитываемых в эффективном гамильтониане $H^{\text{Eff}}(t)$ [4, 5, 34–36]. Тогда величины $S^{(i,j)}$ вбирают в себя все быстро меняющиеся во времени величины и можно упростить выражения (2), представив их в виде

$$\tilde{H}^{(1,0)}(t) = V'_{S-F}(t), \quad \tilde{H}^{(0,1)}(t) = V'_S(t),$$

$$\tilde{H}^{(1,1)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), V''_S(t)]' - \frac{i}{2} [S^{(0,1)}(t), V''_{S-F}(t)]',$$

$$\tilde{H}^{(2,0)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), V''_{S-F}(t)]', \quad (3)$$

$$\tilde{H}^{(0,2)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(0,1)}(t), V''_S(t)]'$$

...

Одним штрихом обозначено выражение, представленное в виде суммы слагаемых, из которой исключены все слагаемые, содержащие быстро меняющиеся функции времени. Двумя штрихами отмечено выражение, после отбрасывания из его составляющих всех медленно меняющихся слагаемых.

Подчеркнем, что работ, в которых использовался подход на основе формул Бейкера–Хаусдорфа, слишком много, чтобы их перечислять, но в них были дальше применены другие принципы отбора слагаемых (в дополнение к [25–27], см. [37–42]). При этом в качестве основы для отбора слагаемых в эффективный гамильтониан нигде не рассматривалась иерархия характерных времен задачи, как и требование отсутствия быстроменяющихся во времени слагаемых в представлении взаимодействия. Во многих работах просто исключалось линейное по константе связи слагаемое при рассмотрении многофотонных процессов [38–40].

Слагаемые $\tilde{H}^{(1,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,1)}(t)$ в случае однофотонных резонансов [32] отвечают приближению вращающейся волны, т.е. эффективный гамильтониан, ограниченный этими слагаемыми,

$$H^{\text{Eff}}(t) = \tilde{H}^{(1,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1)}(t) \equiv H^{RW}(t) \quad (4)$$

и есть используемый в многочисленных подходах к теории открытых систем.

Однако, если в качестве эффективного гамильтониана выбрать, например, такой

$$H^{\text{Eff}}(t) = \tilde{H}^{(1,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1)}(t) + \tilde{H}^{(1,1)}(t), \quad (5)$$

то он будет описывать новый канал взаимодействия и релаксации открытой системы.

4. Обсудим типичный пример, описываемый взаимодействием (5) – один осциллятор связан с другими, которые в свою очередь взаимодействуют с общим термостатом. Операторы взаимодействий здесь такие

$$V_{S-F}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{\omega} \gamma_{S-F,j} (c_j e^{-i\omega_j t} + c_j^+ e^{i\omega_j t}) (a_{\omega} e^{-i\omega t} + a_{\omega}^+ e^{i\omega t}),$$

$$V_S(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{\omega} g_{sj} (c_j e^{-i\omega_j t} + c_j^+ e^{i\omega_j t}) (c_s e^{-i\omega_s t} + c_s^+ e^{i\omega_s t}).$$

Здесь частоты осцилляторов и их бозонные операторы рождения и уничтожения ω_j , c_j^+ , c_j , $j = 1, \dots, N$. Введен индекс s для выделенного осциллятора, который не взаимодействует напрямую с термостатом. Подчеркнем, что осциллятор s есть элемент открытой системы и не взаимодействует с окружением открытой системы, т.е. в начальном операторе взаимодействия отсутствует слагаемое, которое описывает его взаимодействие с окружением открытой системы. Будем считать, что все другие осцилляторы одинаковые $\omega_j = \omega_c$, $j = 1, \dots, N$, и вместе с выделенным осциллятором образуют открытую систему. Эта ситуация отличается от двойственной ситуации, в которой “другие” осцилляторы различны и моделируют термостатное окружение первого осциллятора.

Пусть только один осциллятор рассматривается в качестве “других”, $N = 1$. Тогда возможны такие характерные случаи. Случай “изолированного” выделенного осциллятора. У этого осциллятора появляется свой канал релаксации [5], которого в приближении вращающейся волны не существует и поэтому в принципе невозможно в общепринятом приближении описать. С точностью до слагаемых первого порядка (приближение вращающейся волны) осцилляторы ведут себя как независимые, поскольку в (4)

$$\tilde{H}^{(1,0)}(t) = V'_{S-F}(t), \quad \tilde{H}^{(0,1)}(t) = V'_S(t) = 0.$$

Однако во втором порядке имеем в (5)

$$\tilde{H}^{(1,1)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(1,0)}(t), V''_S(t)]' - \frac{i}{2} [S^{(0,1)}(t), V''_{S-F}(t)]'.$$

Это слагаемое определяет прямой распад “изолированного” осциллятора в термостат, с которым связан другой осциллятор. При этом происходит взаимодействие осцилляторов с квантами термостата, частоты

которых лежат в различных областях спектра, которые далеки друг от друга и не перекрываются между собой.

Тот же канал будет и в случае двухфотонной связи между обсуждаемыми осцилляторами [7], однако обычно, при обсуждении многоквантовых взаимодействий внутри системы такие процессы остаются незамеченными (см., например, [40, 41]).

Алгебраическая теория возмущений позволяет учесть и следующее слагаемое $\tilde{H}^{(2,0)}(t)$ и/или $\tilde{H}^{(0,2)}(t)$. Пусть теперь в открытой системе отсутствует осциллятор s и открытая система состоит из N одинаковых осцилляторов, операторы рождения и уничтожения которых c^+ и c . Эти осцилляторы взаимодействуют с общим термостатным полем окружения, но совсем не взаимодействуют между собой. Такая модельная система может описывать пучок световодов, многоканальный направленный ответвитель [43] и т.п. Будем говорить об ансамбле резонаторов, связанных на зеркале с общим электромагнитным полем окружения. Тогда

$$H^{\text{Eff}}(t) = \tilde{H}^{(1)}(t) + \tilde{H}^{(2)}(t). \quad (6)$$

Здесь возникает своеобразная интерференция, в которой конкурируют процессы ухода фотона из резонатора в окружающее поле и процесс переизлучения фотона – аналог высокочастотного штарк-эффекта в атомах, – когда число фотонов в резонаторе не меняется. Общий оператор взаимодействия, после перенормировки частоты и формулировки марковского приближения [1, 4, 34], дается выражением

$$\tilde{H}^{(1)} = \gamma \sum_{\omega} (C a_{\omega}^+ e^{i(\omega - \omega_c)t} + C^+ a_{\omega} e^{-i(\omega - \omega_c)t}),$$

$$\tilde{H}^{(2)}(t) = \gamma^{(2)} N \sum_{\omega, \omega'} a_{\omega}^+ a_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t}. \quad (7)$$

Здесь γ – константа связи осциллятора открытой системы с полем общего термостата, $\gamma^{(2)} \sim \gamma^2$. При этом $C = \underbrace{c \otimes \dots \otimes c}_N$ – операторы уничтожения осцилляторов действуют в разных пространствах состояний каждого осциллятора (резонатора).

Уравнение Шредингера $i\hbar \frac{d|\tilde{\Psi}(t)\rangle}{dt} = H^{\text{Eff}}(t)|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ с гамильтонианом (6), (7) математически не определено, однако приобретает корректный статус как квантовое стохастическое дифференциальное уравнение [1, 4, 34] в случае дельта коррелированности фотонов окружения $\langle a_{\omega} a_{\omega'}^+ \rangle = \delta(\omega - \omega')$. При этом стохастическое дифференциальное уравнение для оператора эволюции $U(t) \equiv U(t, t_0)$ имеет стандартный общий вид [4, 11]

$$dU(\bar{t}) = -H^{\text{Eff}-S}(\bar{t}) dt U(\bar{t}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(Y + \frac{Y_{\Lambda}^e + iY_{\Lambda}}{(Y_{\Lambda})^2} Y d\bar{t} + Y + \frac{Y_{\Lambda}^e}{Y_{\Lambda}} dB(\bar{t}) + \right. \\
 & \left. + \frac{Y_{\Lambda}^e}{Y_{\Lambda}} Y dB^+(\bar{t}) + Y_{\Lambda}^e d\Lambda(\bar{t}) \right) U(\bar{t}). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Здесь $Y = \bar{\gamma}C$, $Y_{\Lambda} = \bar{\gamma}^{(2)}N$, $Y_{\Lambda}^e = e^{-iY_{\Lambda}} - 1$. Введены стандартные операторы, определяющее квантовое стохастическое уравнение невинеровского типа [43]:

$$\begin{aligned}
 B(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} dt' a(t'), \quad \Lambda(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} dt' a^+(t')a(t'), \\
 a(\bar{t}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} e^{-i(\bar{\omega} - \bar{\omega}_c)\bar{t}} a_{\bar{\omega}},
 \end{aligned}$$

а также их дифференциалы Ито, удовлетворяющие алгебре Хадсона–Партасорати [43]:

$$\begin{aligned}
 d\Lambda(\bar{t}) &= \Lambda(\bar{t} + d\bar{t}) - \Lambda(\bar{t}), \quad dB(\bar{t}) = B(\bar{t} + d\bar{t}) - B(\bar{t}), \\
 d\Lambda(\bar{t})d\Lambda(\bar{t}) &= d\Lambda(\bar{t}), \quad dB(\bar{t})dB^+(\bar{t}) = d\bar{t}, \\
 d\Lambda(\bar{t})dB^+(\bar{t}) &= dB^+(\bar{t}), \quad dB(\bar{t})d\Lambda(\bar{t}) = dB(\bar{t}), \\
 d\Lambda(\bar{t})dB(\bar{t}) &= d\Lambda(\bar{t})d\bar{t} = dB^+(\bar{t})d\Lambda(\bar{t}) = \\
 &= dB^+(\bar{t})d\bar{t} = dB(\bar{t})d\bar{t} = d\bar{t}d\bar{t} = 0.
 \end{aligned}$$

Черта над символом отмечает его обезразмеренный вариант, например, $\bar{t} = \omega_c t$.

Зависимость от N коэффициента $Y_{\Lambda} = \bar{\gamma}^{(2)}N$ перед дифференциалом Ито считывающего процесса $d\Lambda(\bar{t})$ и считывающее свойство $dB(\bar{t})d\Lambda(\bar{t}) = dB(\bar{t})$ обеспечивают рост влияния слагаемых второго порядка малости с ростом N . Тогда константа связи $\bar{\gamma}$ перенормируется, как и в случае атомной открытой системы [45–48], и в обычных ситуациях все процессы в рассматриваемой системе могут быть описаны обычными формулами с заменой $\bar{\gamma} \rightarrow 2\bar{\gamma} \frac{1 - \cos(\bar{\gamma}^{(2)}N)}{(\bar{\gamma}^{(2)}N)^2}$. Здесь роль такой перенормировки зависит от числа N осцилляторов в ансамбле. Возможна такая идеализованная ситуация, когда $\bar{\gamma}^{(2)}N = 2\pi$ и процессы второго порядка полностью подавят процессы первого порядка! Однако в оценке реальной ситуации необходимо помнить о сделанном марковском приближении и процедуре введения квантовых случайных процессов.

Выявленная перенормировка константы релаксации открытой системы есть результат отмеченной выше своеобразной интерференции, в которой хоть и конкурируют, казалось бы, несоизмеренные процессы первого и второго порядка алгебраической теории возмущений, но процесс второго порядка обладает

считывающим свойством и “встраивается” в процессы первого порядка. Это и нашло отражение в именно такой перенормировке константы $\bar{\gamma}$.

5. Таким образом, алгебраическая теория возмущений дает путь решения проблемы, связанной с соотношением времени корреляции случайных полей, моделирующих термостат, и наличием быстропеременных слагаемых в оптических системах, характерное время изменения которых много меньше времени корреляции шумовых полей. При этом возникают новые аспекты, которые не учитывались ранее без применения алгебраической теории возмущений. Важным следствием переосмысления уравнения Шредингера как квантового стохастического уравнения является необходимость учета слагаемых более высокого порядка в открытых оптических системах, поскольку именно они ответственны за своеобразный новый тип интерференции. Наконец, квантовое стохастическое уравнение (8), которое получается в рамках алгебраической теории возмущений, является универсальным [4, 11], управляется всеми основными квантовыми случайными процессами – рождающим, уничтожающим и считывающим [4, 44–51], чего нет в подходах [1, 9, 10].

Обсуждая иерархию характерных времен открытой оптической системы не следует забывать факты, установленные еще в 1950-х гг. [52, 53]. Марковское приближение приводит к экспоненциальной динамике открытой системы, которая не может быть “вечной”. За масштабом времен, много больших γ^{-1} , наступает царство редких событий, которые представленная теория неспособна пока описывать.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 19-02-00234a).

1. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000, 2004).
2. G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
3. V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Rep. Math. Phys.* **13**, 149 (1978).
4. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **142**, 419 (2012).
5. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **157**, 74 (2020).
6. А. М. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, *Phys. Rev. A* **74**, 042313 (2006).
7. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 505 (2019).
8. А. М. Basharov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **613**, 012007 (2015).
9. L. Accardi, Y. G. Lu, and I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin (2002).

10. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, OUP, Oxford (2002).
11. А. С. Холево, *Квантовая вероятность и квантовая статистика. Итоги науки и техн. Совер. пробл. математики. Фунд. Направления*, ВИНТИ **83**, 3 (1991).
12. D. F. Walls, *Z. Phys.* **234**, 231 (1970).
13. P. Langevin, *C.R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530 (1908).
14. J. H. van Vleck, *Phys. Rev.* **33**, 467 (1929).
15. F. Wegner, *Ann. Phys.* **3**, 77 (1994).
16. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **48**, 5863 (1993).
17. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **49**, 4214 (1994).
18. A. E. Teretenkov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **22**(04), 1930001 (2019).
19. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, РХД, М. (2004) (переиздание книги 1937 г.).
20. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИФМЛ, М. (1958).
21. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, М. (1977).
22. V. N. Bogaeviski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer, Berlin (1991).
23. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, *ЖЭТФ* **84**, 487 (1983).
24. H. Frohlich, *Phys. Rev.* **79**, 845 (1950).
25. W. Heitler, *The quantum theory of radiation*, Clarendon Press, Oxford (1954).
26. Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус, *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*, Наука, М. (1972).
27. M. Wagner, *Unitary transformations in solid state physics*, North-Holland, Amsterdam (1986).
28. H. Haas, D. Puzzuoli, F. Zhang, and D. G. Cory, *J. Phys.* **21**, 103011 (2019).
29. А. М. Башаров, *Оптика и спектроскопия* **128**, 186 (2020).
30. А. М. Башаров, *Оптика и спектроскопия* **116**, 532 (2014).
31. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and atoms. Introduction to quantum electrodynamics*, Wiley, N.Y. (1997).
32. P. P. Hofer, M. Perarnau-Llobet, L. D. M. Miranda, G. Haack, R. Silva, J. B. Brask, and N. Brunner, *New J. Phys.* **19**, 123037 (2017).
33. A. Levy and R. Kozloff, *EPL* **107**, 20004 (2014).
34. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).
35. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **102**, 1126 (1992).
36. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **156**, 407 (2019).
37. H. Frohlich, H. Pelzer, and S. Zienau, *Philos. Mag.* **44**, 329 (1953).
38. M. Takatsuji, *Phys. Rev.* **11**, 619 (1975).
39. С. Д. Ганичев, С. А. Емельянов, Е. Л. Ивченко, Е. Ю. Перлин, И. Д. Ярошецкий, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 479 (1983).
40. С. Д. Ганичев, С. А. Емельянов, Е. Л. Ивченко, Е. Ю. Перлин, Я. В. Терентьев, А. В. Федоров, И. Д. Ярошецкий, *ЖЭТФ* **91**, 1233 (1986).
41. R. Ramesh and M. S. Krishnan, *J. Chem. Phys.* **114**, 5967 (2001).
42. G. V. Varada and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **45**, 6721 (1992).
43. G. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, N.Y. (2008).
44. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Comm. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).
45. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 28 (2011).
46. А. М. Basharov, *Phys. Rev. A* **84**, 013801 (2011).
47. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 151 (2018).
48. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 555 (2018).
49. В. П. Белавкин, *УМН* **47**, 47 (1992).
50. А. М. Chebotarev, *Lectures on quantum probability*, Sociedad Matematica Mexicana, Mexico (2000).
51. K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhauser, Basel (1992).
52. Л. А. Халфин, *ДАН СССР* **115**, 277 (1957).
53. Л. А. Халфин, *ЖЭТФ* **33**, 1371 (1958).

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

П И С Ь М А
В
ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

том 111

Выпуск 10

25 мая 2020

*Журнал издается под руководством
Отделения физических наук РАН*

Главный редактор В. М. Пудалов

Заместители главного редактора

Г. Е. Воловик, В. П. Пастухов

Зав. редакцией *И. В. Подыниглазова*

Адрес редакции 119334 Москва, ул. Косыгина 2

тел./факс (499)-137-75-89

e-mail letters@kapitza.ras.ru

Web-страница <http://www.jetpletters.ac.ru>

Интернет-версия английского издания
<http://www.springerlink.com/content/1090-6487>

© Российская академия наук, 2020

© Редколлегия журнала “Письма в ЖЭТФ” (составитель), 2020

Отклик на субмиллиметровое излучение СИНИС приемника с электронным охлаждением

А. А. Гунбина^{+*}, С. А. Лемзяков^{×°}, М. А. Тарасов[∇], В. С. Эдельман^{×1)}, Р. А. Юсупов[∇]

⁺Институт прикладной физики РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

^{*}Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 603950 Н. Новгород, Россия

[×]Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия

[°]Московский физико-технический институт (государственный университет), 141701 Долгопрудный, Россия

[∇]Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 марта 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

Экспериментально изучен отклик на субмиллиметровое излучение приемника, сформированного на кремниевой подложке в виде метаматериала – матрицы 10×10 разрезных колец, соединенных туннельными структурами сверхпроводник–изолятор–нормальный металл–изолятор–сверхпроводник (СИНИС). При малых по сравнению со сверхпроводящей щелью напряжениях электронная температура T_e при температуре подложки $T \sim 0.1$ К равна ~ 0.23 К из-за перегрева паразитным излучением, при 0.3 К $T_e \approx T$. В обоих случаях при росте напряжения T_e снижается из-за электронного охлаждения и достигает 0.19 К при напряжении, соответствующем максимальному отклику. При $T = 0.1$ К отклик в 5–6 раз превышает отклик при $T \sim 0.3$ К. Таким образом, электронное охлаждение не обеспечивает такой же чувствительности приема, как и охлаждение приемника в целом.

DOI: 10.31857/S1234567820100018

Характерной особенностью туннельных структур вида сверхпроводник–изолятор–нормальный металл–изолятор–сверхпроводник (СИНИС) является эффект охлаждения нормального элемента при протекании тока. Он вызывается тем, что при напряжении U на сверхпроводник–изолятор–нормальный металл (СИН) переходе ниже значения $V_{\text{gap}} = k\Delta_c/e$ (Δ_c , К – энергетическая щель сверхпроводника), ток создается наиболее энергичными электронами. Из-за этого возникает поток тепла, направленный из нормального металла в сверхпроводник. При этом полная мощность, которая складывается из джоулева нагрева $I \cdot U$ и мощности электронного охлаждения, рассеивается в сверхпроводящих элементах и приводит к их перегреву относительно холодной подложки. Она частично передается нормальному металлу из-за обратного туннелирования и переноса фононами и зачастую может оказаться меньше мощности охлаждения. В таком случае электронная температура нормального металла T_e может стать значительно ниже температуры подложки.

Авторы работы [1] обратили внимание на то, что это свойство может оказаться полезным при использовании СИНИС структур для регистрации терагерцового излучения, исходя из того, что чувствительность таких приемников тем выше, чем ниже их температура. В дальнейшем эта идея широко пропагандировалась как способ достичь предельной чувствительности приемников, используя относительно простую технологию охлаждения откачкой жидкого ^3He , а не более сложные и дорогие методы (см., например, [2, 3] и ссылки в этих публикациях).

Однако охлаждение электронной системы не эквивалентно охлаждению образца как целого. К примеру, в [3] отмечалось, что фоновая температура T_{ph} мало меняется при охлаждении. В [3] считалось, что темп обмена энергией между электронами и фононами описывается выражением $P_{\text{e-ph}} = \Sigma v(T_e^5 - T_{\text{ph}}^5)$, где Σ – постоянная взаимодействия, а v – объем образца. Поэтому, например, при $T \sim 0.3$ К при уменьшении электронной температуры примерно в два раза теплообмен определяется фоновой температурой, а при $T \sim 0.1$ К – более высокой электронной температурой, и отклики будут сильно различаться.

¹⁾e-mail: vsedelman@yandex.ru

Другое обстоятельство, которое радикально отличает работу СИНИС приемника терагерцового излучения от болометра, регистрирующего нагрев на постоянном или сравнительно низкочастотном токе, это значительное превышение энергии кванта излучения $\hbar\omega$ над kT . Так, при частоте 350 ГГц, отвечающей окну прозрачности атмосферы Земли, $\hbar\omega/k \approx 17$ К. Как отмечено в [4], электроны, поглощающие такие кванты, в среднем приобретают энергию порядка 8–9 К и далее происходит сложный многоступенчатый процесс релаксации с испусканием и поглощением фононов и электрон-электронным взаимодействием. Он начинается с очень быстрым рождением энергичных фононов и продолжается все более и более медленными процессами. При этом характерные времена уже при энергии частиц порядка 2 К сравниваются со временем туннелирования порядка десятка наносекунд и энергичные электроны покидают нормальный металл до того, как в электронной системе устанавливается состояние, описываемое фермиевским распределением с температурой T_e . Как показано в [4], максимальный отклик достигается при сопротивлении СИН переходов с площадью 1 мкм^2 порядка 10 кОм, что на порядок превышает сопротивление обычно исследовавшихся структур, демонстрирующих электронное охлаждение. Явное проявление отсутствия равновесия в электронной системе при облучении СИНИС приемника на частоте ≈ 350 ГГц наблюдалось в работах [5].

Ниже описаны эксперименты, доказывающие различие реакции СИНИС приемников терагерцового излучения при одинаковой электронной температуре, но при разных температурах образца. Измерения проведены с плоскостной приемной структурой из метаматериала на кремниевом чипе [6], представляющей собой матрицу 10×10 идентичных элементов, включенных по постоянному току последовательно. Каждый элемент – четыре сектора разрезанного кольца из алюминия с внешним диаметром 54 мкм, в разрывах которых включены СИНИС переходы. Площадь матрицы 0.38 мм^2 . Структура туннельных переходов – нормальный электрод из алюминия толщиной 14 нм на подслое железа 1.2 нм, подавляющем сверхпроводимость. Окисная пленка толщиной менее 1 нм служит изолятором между нормальным и сверхпроводящим алюминиевым слоем толщиной 80 нм. Площадь каждого перехода 1 мкм^2 , перемычка между нормальными слоями в СИНИС структуре $1 \times 0.1 \text{ мкм}$. Нормальное сопротивление r_n переходов 1.15 кОм, полное сопротивление структуры $R_n = 230 \text{ кОм}$. По сравнению с приемниками с малым числом

элементов напряжение на многоэлементной структуре достигает десятки милливольт, а не сотни микровольт. Из-за этого сигнал/шум много больше, чем у одиночных СИНИС, что важно как при измерении отклика, особенно при относительно высокой температуре, так и при вычислении электронной температуры для нормального электрода, в котором поглощается излучение.

При измерениях использовалась управляемая от компьютера плата ввода-вывода NI USB 6289 ADC/DAC. При регистрации ВАХ структуры через нее пропускался ток, определяемый номиналом резисторов, включенных последовательно с задающим напряжением ЦАП. Напряжение на структуре усиливало в 100 раз инструментальным усилителем, работающим при комнатной температуре, и оцифровывалось АЦП. Измерения проводились при температурах чип 0.09–0.5 К с использованием микрокриостата растворения [7].

Отклик на электромагнитное излучение определялся с помощью теплового источника – нагреваемой током пленки нихрома с сопротивлением порядка 300 Ом/□, нанесенной на сапфировую подложку толщиной 0.3 мм. Ток подводился по медным проводочкам диаметром 0.02 мм с длиной ~ 1 см, с помощью которых он крепился к держателю с температурой 0.4–0.5 К. Это позволяло нагревать пленку до 7–8 К при подводе мощности на уровне десятков микроватт без значительного влияния на работу криостата.

Измеренная при “холодном” излучателе вольт-амперная характеристика при температуре чипа $T = 0.095$ К, приведена на рис. 1. Отвечающее этой

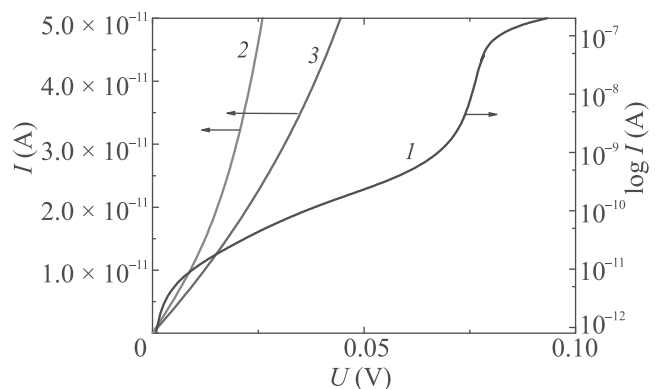


Рис. 1. (Цветной онлайн) Вольт-амперная характеристика метаструктуры при $T = 0.095 \pm 0.01$ К: 1 – в логарифмическом масштабе; 2 – начальный участок при малых напряжениях; 3 – расчетный андреевский ток

ВАХ динамическое сопротивление $R_d(U = 0) = 920 \text{ МОм}$ и $R_d(U = 0)/R_n = 4000$. При таком боль-

шом отношении сопротивлений, как правило, проявляется андреевский ток, превышающий одноэлектронный туннельный ток [8]. Как было установлено в цитируемой работе, для СИН переходов с подавлением сверхпроводимости нормального электрода магнитным подслоем сохраняется только та компонента андреевского тока, которая обязана диффузионному движению возбуждений в сверхпроводящем электроде. При малых напряжениях вдали от щели она имеет вид, согласно работе [9]:

$$I_s = K_s \frac{eU/k\Delta_c}{\sqrt{1 - eU/k\Delta_c}}.$$

Электронная температура T_e нормальных элементов определяется по одноэлектронному току. Чтобы его выделить из полного тока экспериментальной ВАХ, нужно вычесть андреевский вклад, подобрав коэффициент K_s таким, чтобы при малых напряжениях T_e менялась незначительно. Это очевидное требование основано на том, что при малых напряжениях как нагрев, так и охлаждение не могут существенно повлиять на температуру. Реально учет андреевского тока оказался нужен при напряжениях, меньших $(0.2-0.3) \cdot k\Delta_c/e$, поскольку при больших напряжениях его вклад пренебрежимо мал. Расчет T_e проводился по известной формуле туннельной теории для одночастичного тока, приведенной в работах [10, 11]:

$$I = \frac{1}{eR_n} \int_{-\infty}^{+\infty} N_S(E)[n_N(E - eU) - n_S(E)]dE.$$

Здесь R_n – нормальное сопротивление перехода, $N_S(E) = \frac{|E|\Theta(|E| - k\Delta_c)}{\sqrt{E^2 - (k\Delta_c)^2}}$ – плотность состояний в сверхпроводнике согласно теории БКШ, $n_N(E, T_e)$, $n_S(E, T_S)$ – фермиевская функция распределения в нормальном металле и сверхпроводнике. В формулу формально входит температура сверхпроводника, однако если симметризовать подынтегральное выражение, то получается более удобная для применения формула, не содержащая членов, зависящих от температуры сверхпроводника [12]:

$$I = \frac{1}{eR_n} \int_0^{+\infty} N_S(E)[n_N(E - eU) - n_N(E + eU)]dE.$$

Для каждой точки измеренной вольт-амперной характеристики с помощью численного интегрирования подбиралась величина электронной температуры T_e так, чтобы отличие между измеренным током и значением выражения в правой части этой

формулы отличались не более, чем на сотую долю процента, что заведомо превышает точность измерений. Важно отметить, что полученное таким способом значение электронной температуры в общем случае зависит от используемых параметров перехода. И если для малых напряжений на переходе это влияние относительно слабое, то для напряжений, близких к величине $V_{\text{gap}} = k\Delta_c/e$, оно существенно. Для матричных структур ситуация усугубляется наличием небольшого разброса в параметрах для разных переходов, что подтверждается размытостью минимума дифференциального сопротивления. Поэтому результаты расчетов вблизи щели ($U > 0.8k\Delta_c$) могут быть существенно искажены. Кроме того, в целом к результатам расчета температур надо относиться с осторожностью, поскольку в основе расчетов лежит предположение о равновесии электронной системы, т.е. описываемое фермиевской функцией распределения электронов по энергиям. Как отмечалось ранее, при облучении энергичными квантами это условие не гарантировано.

Результаты расчета T_e по ВАХ, измеренным при температурах T чип 0.095 и 0.316 К как с “холодным” излучателем, так и с нагретым до 7.05 К представлены на рис. 2. Там же приведены зависимости

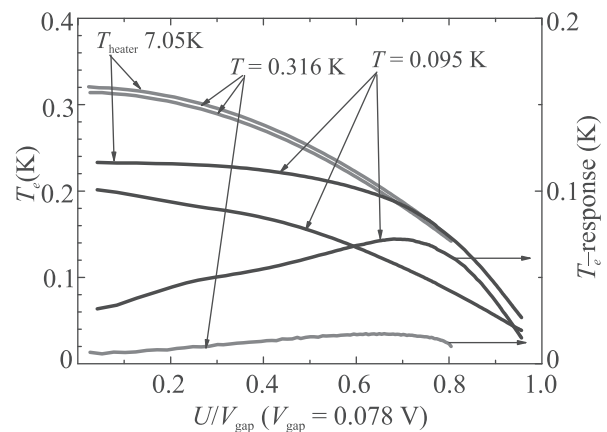


Рис. 2. (Цветной онлайн) Расчетные зависимости от приведенного напряжения T_e и $T_e - T$ при двух температурах $T = 0.095 \pm 0.01$ К и $T = 0.316 \pm 0.02$ К при холодном излучателе и нагретом до 7.05 ± 0.1 К

от напряжения на структуре изменений температуры $T_e - T$ при воздействии излучения. Как следует из приведенных результатов, при $T = 0.095$ К электронная температура при $U \ll V_{\text{gap}}$ значительно выше этого значения. Такое различие обычно наблюдается для СИНИС приемников и, по-видимому, это обусловлено паразитным излучением, проникающим из комнаты [13]. При дополнительном облучении от

нагретого источника T_e заметно возрастает. При росте напряжения во всех приведенных на рис. 2 случаях наблюдается электронное охлаждение. Отметим, что вызванная облучением добавка температуры при 0.095 К выше, чем при 0.316 К, при низких напряжениях примерно в 5 раз. Это по порядку величины соответствует ожидаемому отношению температурных откликов при электрон-фононном взаимодействии, когда при одинаковой поглощаемой мощности можно ожидать, что $\delta T_e(T = 0.095 \text{ К})/\delta T_e(T = 0.316 \text{ К}) \approx (0.316/0.2)^4 \approx 6$.

На рисунке 3 приведены определяемые непосредственно по измеренным ВАХ отклики по напряжению и току

$$U(I, T_{\text{heater}} \approx 0.5 \text{ К}) - U(I, T_{\text{heater}} = 7.05 \text{ К}),$$

$$I(U, T_{\text{heater}} = 7.05 \text{ К}) - I(U, T_{\text{heater}} \approx 0.5 \text{ К}).$$

Видно, что отклик по напряжению при обоих значениях T максимален при приведенном напряжении примерно 0.65, когда электронные температуры практически равны. При этом при $T = 0.095 \text{ К}$ он в 5.3 раза больше, чем при 0.316 К. Отклик по току несколько больше при более высокой температуре. Но это преимущество с практической точки зрения эфемерно, поскольку сам ток при этой температуре на порядок больше и вклад его флуктуаций в шумы втрое больше, чем при $T = 0.095 \text{ К}$. К тому же и фонный шум тоже соответственно больше.

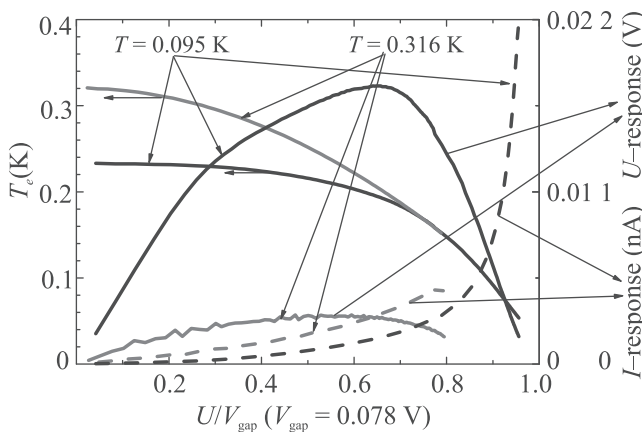


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость от приведенного напряжения на приемнике электронной температуры нормальных элементов (шкала слева) и откликов по напряжению и току (шкалы справа) при температурах $T = 0.095 \pm 0.01 \text{ К}$ и $T = 0.316 \pm 0.02 \text{ К}$ при облучении от нагретого до $7.05 \pm 0.1 \text{ К}$ источника

Для сравнения с результатами работы [3] воспользуемся предложенным в ней методом оценки

мощности излучения P_{rad} , поглощаемого приемной структурой, исходя из уравнения теплового баланса, которое при $U \ll V_{\text{gap}}$ имеет вид $P_0 + P_{\text{rad}} = \Sigma \nu (T_e^5 - T_{\text{ph}}^5)$, где P_0 – паразитное излучение, проникающее из комнаты. Если изменение температуры при воздействии облучения мало, то это выражение сводится к $P_{\text{rad}} = 5 \Sigma \nu (T_e^4 - T_{\text{ph}}^4) \delta T_e$. Учитывая, что в этой работе конструкция СИНИС элементов подобна использовавшимся в нашей работе, используем значение $\Sigma = 1.3 \text{ нВт} \cdot \text{К}^{-5} \cdot \text{мкм}^{-3}$ из [3]. Тогда при температуре 0.095 К и при $\delta T_e \ll T_e$ получим $P \approx 0.01 \text{ пВт}$, а для всей структуры, содержащей 400 СИНИС – $4 \pm 0.4 \text{ пВт}$. Согласно рис. 3, максимальный отклик на излучение равен $4 \cdot 10^9 \text{ В/Вт}$, что в 5 раз больше, чем при примерно такой же мощности, поглощаемой приемником, но при температуре подложки 0.2 К, приведенный в [3].

Таким образом, прямой эксперимент опровергает ожидания обойти без снижения реальной температуры СИНИС приемника для достижения предельной чувствительности приема. Замена криостатов растворения на криостаты с откачкой ^3He не принципиальна, учитывая возможность построения автономных компактных микрокриостатов растворения [7].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФП РАН (#0027-2019-0003) и ИРЭ РАН (#0030-2019-0003). Изготовление и исследование образцов произведено с использованием уникальной научной установки (УНУ #352529).

1. L. S. Kuzmin, I. A. Devyatov, and D. Golubev, Millimeter and Submillimeter Waves IV. – International Society for Optics and Photonics **3465**, 193 (1998).
2. Л. С. Кузьмин, УФН **175**(5), 549 (2005).
3. L. S. Kuzmin, A. L. Pankratov, A. V. Gordeeva, V. O. Zbrozhek, V. A. Shamporov, L. S. Revin, A. V. Blagodatkin, S. Masi, and P. de Bernardis, Communications Physics **2**, 104 (2019).
4. И. А. Девятков, П. А. Крутицкий, М. Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **84**(2), 61 (2006).
5. М. А. Тарасов, В. С. Эдельман, Sumedh Mahashabde, Л. К. Кузьмин, ЖЭТФ **146**(1), 123 (2014).
6. M. Tarasov, A. Sobolev, A. Gunbina, G. Yakorov, A. Chekushkin, R. Yusupov, S. Lemzyakov, V. Vdovin, and V. Edelman, J. Appl. Phys. **125**, 174501 (2019).
7. В. С. Эдельман, ПТЭ **2**, 159 (2009).
8. А. В. Селиверстов, М. А. Тарасов, В. С. Эдельман, ЖЭТФ **151**, 151 (2017).

9. F. W. J. Hekking and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **49**, 6847 (1994).
10. I. Giaever and K. Megerle, Phys. Rev. **122**, 1101 (1961).
11. A. S. Vasenko, E. V. Bezuglyi, H. Courtois, and F. W. Hekking, Phys. Rev. B **81**(9), 094513 (2010).
12. F. Giazotto, T. T. Heikkilä, A. Luukanen, A. M. Savin, and J. P. Pekola, Rev. Mod. Phys. **78**(1), 217 (2006).
13. A. Di Marko, V. F. Maisi, J. P. Pekola, and J. Hekking, Phys. Rev. B **88**, 174507 (2013).

Гиперпуассоновская статистика фотонов

Ю. И. Богданов⁺¹⁾, Н. А. Богданова⁺, К. Г. Катамадзе^{+*}, Г. В. Авосопянц^{*}, В. Ф. Лукичев⁺

⁺ Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

^{*} Центр квантовых технологий, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 апреля 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

Получено и исследовано статистическое распределение для числа бозонов в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Полученное гиперпуассоновское распределение определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией и содержит в качестве своих частных предельных случаев распределение Пуассона, а также одномодовое и многомодовое тепловые распределения. Разработанная модель может быть эффективно использована для описания термодинамических свойств ограниченных квантовых систем, а также в задачах статистического восстановления оптических квантовых состояний, процессов и детекторов.

DOI: 10.31857/S123456782010002X

1. Введение. Исследование статистики фотонов и фотоотсчетов является одной из базовых технологий квантовой оптики. Часто в экспериментах статистика фотонов описывается одним из следующих распределений: распределение Пуассона (например, для когерентных состояний), распределение Бозе–Эйнштейна (для тепловых состояний) и биномиальное распределение (для описания преобразования фоковских состояний на светоделителе). В то же время, в реальных экспериментах статистика фотонов и фотоотсчетов детекторов часто отличается от указанных распределений в силу разного рода экспериментальных условий и особенностей оборудования. В этой связи представляется актуальным поиск таких распределений для статистики фотонов и фотоотсчетов, которые описывали бы более широкий круг экспериментальных условий и включали бы указанные выше простейшие распределения в качестве своих частных или предельных случаев.

Так, с 1970-х гг. прошлого века для генерации квазитепловых квантовых состояний используют лазерное излучение, претерпевающее рассеяние на стохастических диффузорах, таких как вращающийся матовый диск [1–5], акустооптический модулятор [6] и т. п. Во всех таких системах в качестве исходных выступают генерируемые лазерными источниками когерентные квантовые состояния с пуассоновской статистикой. Инжиниринг других квантовых состояний осуществляется посредством преоб-

разования когерентных состояний на неоднородных линейных оптических элементах, включающих вращающиеся матовые диски, диафрагмы, светоделители, линзы и т. п. Оказывается, что в результате преобразований на случайных неоднородностях исходное распределение Пуассона превращается в распределение, относящееся к классу так называемых компаунд-распределений Пуассона [7, 8]. В частности, в случае экспоненциального компаундера, когда параметр среднего в распределении Пуассона становится случайной величиной с экспоненциальным распределением, когерентное состояние с пуассоновской статистикой превращается в тепловое состояние со статистикой Бозе–Эйнштейна. Более широкий класс компаунд-распределений Пуассона, куда входит и многомодовое тепловое состояние, возникает, если вместо экспоненциального распределения в качестве компаундера выступает гамма-распределение. По сравнению с естественными источниками теплового излучения рассматриваемые здесь квазитепловые источники света часто более удобны для задач квантовой оптики, поскольку позволяют генерировать гораздо более высокое число фотонов в расчете на одну моду и имеют существенно более высокие времена когерентности, которыми можно управлять в широких пределах от миллисекунд до десятков секунд. С практической точки зрения рассматриваемые здесь распределения важны для описания статистики лазерного излучения, прошедшего через флуктуирующие среды, например, через турбулент-

¹⁾e-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

ные атмосферные оптические каналы [9, 10] или через флуктуирующие оптические волокна [11–14].

Еще одним важным примером является описание отличий статистики фотоотсчетов от исходной статистики фотонов в силу неединичной квантовой эффективности и темновых шумов. В простейших моделях статистика фотоотсчетов детекторов сводится к свертке исходной статистики фотонов с биномиальным распределением, которое определяется эффективностью детектора и с пуассоновским распределением, которое определяется действием шумов. В более общих моделях статистика детекторов фотонов определяется POVM-разложением, которое может быть довольно сложным. В частности, при использовании многопиксельных детекторов, разрешающих число фотонов, возникает ситуация, когда каждый отдельный пиксель имеет свои индивидуальные значения квантовой эффективности и темновых шумов, что приводит к различным распределениям по числу фотонов [15, 16]. Такие детекторы в последнее время нашли применение в квантовых генераторах случайных чисел для задач квантовой криптографии [17–20], поэтому адекватное описание статистики фотоотсчетов в таких системах весьма важно. Заметим, что при этом система квантового распределения ключа должна непосредственно опираться на фундаментальные статистические распределения квантовой статистики [21, 22]. Неоднородность характеристик рассматриваемых детекторов приводит к тому, что их эффективность становится случайной величиной, а исходное биномиальное распределение для числа отсчетов при регистрации фоковского состояния с заданным числом фотонов превращается в компаунд-распределение, аналогично тому, как это было описано выше для квазитепловых источников. Оказывается, что если в качестве компаундера выступает бета-распределение, то биномиальное распределение превращается в распределение Пойа, описывающее фундаментальную статистику фотонов [23, 24]. Число фотонов в исходном состоянии становится случайной пуассоновской величиной, когда мы переходим от регистрации труднодоступных фоковских состояний к регистрации когерентного лазерного излучения. В этом случае распределение Пойа превращается в гиперпуассоновское распределение, являющееся предметом настоящей работы. В то же время, как будет показано ниже, это новое статистическое распределение можно получить, основываясь не только на феноменологических соображениях, но и на общих свойствах статистики бозонов. С точки зрения фундаментальной квантовой статистической физики полученное статистиче-

ское распределение описывает число бозонов в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Возникающее распределение определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией. С практической точки зрения инжиниринга квантовых состояний важность полученного распределения обусловлена тем, что оно является естественным обобщением ряда хорошо известных распределений квантовой оптики. В качестве асимптотических предельных форм гиперпуассоновского распределения выступают, в частности, одномодовые и многомодовые тепловые распределения, а также распределение Пуассона. Будучи гибким инструментом анализа данных по статистике фотонов и фотоотсчетов, разработанная модель может быть эффективно использована в задачах статистической реконструкции распределений, включая задачи томографии квантовых состояний, процессов и детекторов.

2. Описание статистики бозонов с использованием распределения Пойа. Известно, что общее число возможных состояний (статистический вес) $\Omega(k, M)$ в системе из k бозонов и M уровней задается следующей формулой [25]:

$$\Omega(k, M) = C_{M+k-1}^k. \quad (1)$$

Здесь $C_{M+k-1}^k = \frac{(M+k-1)!}{k!(M-1)!}$ – биномиальный коэффициент, задающий число сочетаний из $M+k-1$ элементов по k элементов. На языке оптики мы можем говорить о k фотонах, распределенных по M различным модам.

Рассмотрим подсистему из m мод ($m \leq M$). Найдем вероятность $P(j|k, m, M)$ обнаружить ровно j фотонов в выделенной m -модовой подсистеме, при условии, что в полной M -модовой системе имеется ровно k фотонов. В соответствии с классической формулой вероятностей имеем [23, 26]:

$$P(j|k, m, M) = \frac{C_{m+j-1}^j C_{M-m+k-j-1}^{k-j}}{C_{M+k-1}^k}. \quad (2)$$

Здесь статистический вес C_{M+k-1}^k в системе из k фотонов и M мод есть величина, которая задает знаменатель – полное число равновозможных элементов (исходов). Числитель (число благоприятствующих исходов) – это произведение двух множителей: первый – это статистический вес в системе из j фотонов и m мод в выбранной подсистеме, второй – это статистический вес в системе из $k-j$ оставшихся фотонов и $M-m$ оставшихся мод.

С использованием гамма-функции полученный результат можно записать также в следующей форме:

$$P(j|k, m, M) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(M)\Gamma(m+j)\Gamma(M-m+k-j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(m)\Gamma(M-m)\Gamma(M+k)}. \tag{3}$$

Формула (3) является более общей по сравнению с формулой (2), поскольку допускает также и нецелые значения для параметров m и M . Это важно, в частности, для задач квантовой томографии, поскольку указанные параметры могут выступать в качестве подгоночных при обработке экспериментальных данных.

В теории вероятностей и статистике полученное распределение называют распределением Пойа [27, 28]. Это распределение находит применение в различных областях, в том числе при описании эпидемий заразных заболеваний [27], а также в задачах обеспечения качества в микроэлектронике [24]. Из приведенного выше рассмотрения мы видим также, что распределение Пойа имеет непосредственное отношение и к фундаментальным аспектам статистики фотонов и бозонов в целом [23, 26].

Производящая функция распределения Пойа выражается через гипергеометрическую функцию [24]

$$G(z|k, m, M) = F(-k, m, M, (1-z)). \tag{4}$$

Заметим, что для гипергеометрической функции также используют обозначение ${}_2F_1$.

Мы видим, что в форме (4) рассматриваемое распределение выражается в наиболее простом компактном виде. Такая компактная форма позволяет нам легко рассчитать различные моменты распределения Пойа в соответствии с известными правилами теории вероятностей [27, 28]. Например, вычисляя первую производную в точке $z = 1$, непосредственно находим математическое ожидание распределения

$$\mu = G'(1|k, m, M) = \frac{km}{M}. \tag{5}$$

Аналогично, вторая производная в точке $z = 1$ даст второй факториальный момент

$$G^{(2)}(1) = M[k(k-1)] = \frac{k(k-1)m(m+1)}{M(M+1)}.$$

В результате получим важную с точки зрения квантовой оптики автокорреляционную функцию второго порядка $g^{(2)}$:

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}(1)}{\mu^2} = \frac{M}{M+1} \frac{m+1}{m} \frac{k-1}{k}. \tag{6}$$

Второй факториальный момент непосредственно позволяет нам рассчитать также дисперсию распределения:

$$D = G^{(2)}(1) + \mu - \mu^2 = \frac{km(M-m)(M+k)}{M^2(M+1)}. \tag{7}$$

Распределение Пойа является естественным обобщением хорошо известного биномиального распределения [24]. Биномиальное распределение можно рассматривать как предельный случай распределения Пойа при достаточно больших M и m . Действительно, пусть $M \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, а $\theta = \frac{m}{M} \rightarrow \text{const}$. Тогда в рассматриваемом пределе возникает производящая функция биномиального распределения, задающего число “успехов” в серии из k независимых испытаний с вероятностью “успеха” в отдельном испытании, равной θ :

$$F(-k, m, M, (1-z)) \rightarrow (1-\theta(1-z))^k. \tag{8}$$

Не менее важно, что формула (4) для производящей функции распределения Пойа позволяет нам также легко получить термодинамический предел для бозонов. Этот предел возникает тогда, когда рассматривается конечная подсистема бесконечно большой системы (числа M и k бесконечно велики, а число m конечно). Формально, пусть $M \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, а $\mu_0 = \frac{k}{M} \rightarrow \text{const}$. Тогда в рассматриваемом пределе возникает производящая функция m -модового бозонного состояния:

$$F(-k, m, M, (1-z)) \rightarrow (1+\mu_0(1-z))^{-m}. \tag{9}$$

Полученное многомодовое тепловое распределение относится к классу так называемых компаунд-распределений Пуассона и находит важные применения в задачах инжиниринга квантовых состояний [7, 8].

Мы видим, что распределение Бозе–Эйнштейна, один из краеугольных камней квантовой статистической физики, является непосредственным предельным случаем более общего распределения Пойа. В свою очередь, распределение Пойа, будучи более общим, открывает путь к описанию термодинамических свойств ограниченных квантовых систем, когда полное число мод M и число частиц k в системе не являются предельно большими величинами.

Интересно отметить, что производящая функция гипергеометрического распределения, описывающего фермионы, формально получается из производящей функции распределения Пойа, описывающего бозоны, посредством замены знака у параметров распределения: $M \rightarrow -M$, $m \rightarrow -m$,

$$G(z|k, m, M) = F(-k, -m, -M, (1-z)). \tag{10}$$

С физической точки зрения, распределения, описывающие бозоны и фермионы (Пойа и гипергеометрическое) возникают в рамках разных выборочных схем на основе урн с шарами [23]. С математической же точки зрения, эти распределения можно описывать в рамках одной и той же выборочной схемы, если допустить нефизические отрицательные значения для чисел шаров в урне. Гипергеометрическое распределение можно интерпретировать в рамках схемы Пойа (с возвращением и добавлением шаров) с отрицательным числом шаров (в духе Дирака: имеем $(-M)$ шаров, из которых $(-m)$ – красные). Наоборот, распределение Пойа можно интерпретировать в рамках схемы без возвращения с отрицательным числом шаров. Формулы (4) и (10) описывают такое соответствие явно. На наш взгляд, с точки зрения квантовой статистической физики распределение Пойа следует называть гипергеометрическим распределением бозонного типа, а обычное гипергеометрическое распределение – гипергеометрическим распределением фермионного типа.

Мы рассмотрели случай, когда полное число частиц k в системе является строго фиксированной величиной. Такие состояния, однако, весьма трудны для практической реализации. Намного более практичной является ситуация, когда полное число частиц в системе не фиксировано, а само является случайной величиной. Наиболее типичным источником фотонов в современных физических экспериментах и квантовых технологиях является лазер, генерирующий когерентное излучение. Как известно, статистика когерентного излучения является пуассоновской. Таким образом, возникает задача о нахождении распределения вероятностей в условиях, когда полное число частиц в бозонной системе имеет распределение Пуассона. Соответствующая задача рассмотрена в следующем разделе.

3. Статистика числа бозонов в подсистеме в условиях, когда полное число частиц в системе имеет распределение Пуассона. Как известно, число фотонов в когерентном состоянии описывается распределением Пуассона, которое, в свою очередь, характеризуется следующей производящей функцией:

$$G(z|\lambda) = \exp(-\lambda(1-z)). \quad (11)$$

Здесь λ – параметр распределения Пуассона, задающий среднее число фотонов в квантовом состоянии.

Хорошо известно, что производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению отдельных производящих функций [27, 28], поэтому, как нетрудно видеть из (11), сумма

независимых пуассоновских случайных величин тоже является пуассоновской случайной величиной. При этом параметр среднего числа фотонов результирующего распределения будет суммой вкладов от отдельных независимых пуассоновских величин: $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$ (здесь m – полное число слагаемых).

В оптических экспериментах широко используются источники фотонов, формируемые лазерным излучением, проходящим через вращающийся матовый диск [2]. При этом различные неоднородности матового диска порождают пуассоновские потоки с существенно различными интенсивностями. В результате, возникающее суммарное излучение оказывается в близком соответствии с рассматриваемой здесь моделью, определяемой суммой независимых пуассоновских случайных величин. Заметим, что излучение, обусловленное соседними неоднородностями матового диска, может быть в той или иной степени коррелировано, однако данный эффект может быть нивелирован посредством определенного прореживания потока фотонов [7, 8].

Известно, что излучение матового диска может служить хорошей имитацией для генерации тепловых состояний, имеющих распределение Бозе–Эйнштейна [2]. Модель, представленная в настоящем разделе, позволяет не только объяснить генерацию тепловых состояний, но и описать более широкий круг явлений, которые можно отнести к термодинамике ограниченных оптических квантовых систем.

Пусть полное число фотонов n в системе есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним λ . Усреднение распределения Пойа (4) с использованием распределения Пуассона приведет нас к новому распределению, производящая функция которого определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией (*degenerate (confluent) hypergeometric function*):

$$G(z|m, M, \lambda) = \Phi(m, M, -\lambda(1-z)). \quad (12)$$

Заметим, что для вырожденной гипергеометрической функции также используют обозначение ${}_1F_1$. Полученное распределение будем называть гиперпуассоновским распределением (*hyper-Poisson distribution*). С точки зрения квантовой статистической физики это распределение можно охарактеризовать как конфлюэнтное гипергеометрическое распределение бозонного типа (*boson type confluent hypergeometric distribution*).

Вывод формулы (12) основан на следующем тождестве, которое можно проверить непосредственно,

основываясь на определении гипергеометрических функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(-n, m, M, (1-z)) \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \Phi(m, M, -\lambda(1-z)). \quad (13)$$

Производящая функция (12) порождает следующее распределение вероятностей:

$$P(k|m, M, \lambda) = \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M+k)} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} \frac{\lambda^k}{k!} \Phi(m+k, M+k, -\lambda). \quad (14)$$

Таким образом, полученное распределение задает вероятность обнаружить ровно k фотонов в выделенной m -модовой подсистеме, при условии, что в полной M -модовой системе число фотонов определяется распределением Пуассона со средним λ .

Производящая функция (12) позволяет непосредственно получить важные статистические характеристики рассматриваемого распределения. Вычисляя три первые производные от производящей функции (12), получаем следующие выражения для трех первых факториальных моментов распределения:

$$G^{(1)}(1) = M[k] = \mu = \frac{m}{M} \lambda, \quad (15)$$

$$G^{(2)}(1) = M[k(k-1)] = \frac{m(m+1)}{M(M+1)} \lambda^2, \quad (16)$$

$$G^{(3)}(1) = M[k(k-1)(k-2)] = \frac{m(m+1)(m+2)}{M(M+1)(M+2)} \lambda^3. \quad (17)$$

Заметим, что факториальные моменты могут быть приближенно оценены по экспериментальным данным, если рассматриваемые математические ожидания заменить выборочными средними. При этом первый факториальный момент, задаваемый формулой (15), определяет математическое ожидание (среднее) μ рассматриваемой случайной величины. Вторым и третьим факториальными моментами, задаваемыми формулами (16) и (17), служат основой для вычисления автокорреляционных функций $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ второго и третьего порядка соответственно:

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}(1)}{\mu^2} = \frac{m+1}{m} \frac{M}{M+1}, \quad (18)$$

$$g^{(3)} = \frac{G^{(3)}(1)}{\mu^3} = \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} \frac{M^2}{(M+1)(M+2)}. \quad (19)$$

Полученные формулы показывают, что экспериментальное оценивание автокорреляционных функций второго и третьего порядка позволяет приближенно восстановить по экспериментальным данным неизвестные параметры распределения m и M . Из формул (18) и (19) непосредственно получаем:

$$m = \frac{2[g^{(3)} - (g^{(2)})^2]}{(g^{(2)})^2 + g^{(2)}g^{(3)} - 2g^{(3)}}, \quad (20)$$

$$M = \frac{2[g^{(3)} - (g^{(2)})^2]}{2(g^{(2)})^2 - g^{(2)} - g^{(3)}}. \quad (21)$$

Таким образом, гиперпуассоновское распределение – это распределение с двумя независимыми автокорреляционными функциями $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$, что иллюстрируют формулы (18) и (19). Заметим, что для обычного распределения Пуассона коэффициенты $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ тривиальны (оба заведомо равны 1), а для компаунд-распределения Пуассона эти коэффициенты жестко связаны между собой [7, 8].

Используя второй факториальный момент, можно получить следующее выражение для дисперсии D рассматриваемого распределения:

$$D = \frac{m}{M} \lambda \left(1 + \frac{\lambda(M-m)}{M(M+1)} \right). \quad (22)$$

Заметим, что в реальных экспериментах и квантовых технологиях среднее число фотонов λ в пуассоновском состоянии зачастую неизвестно априори. Однако, имея экспериментальную оценку среднего числа отсчетов $M[k] = \mu$, и вычисляя параметры распределения m и M по формулам (20) и (21), легко находим:

$$\lambda = \frac{M}{m} \mu. \quad (23)$$

Как уже отмечалось выше, распределение Пойа является базовой моделью для обобщения биномиального распределения. Так, в рамках простейшей модели, статистика числа фотонов, регистрируемая фазово-нечувствительным детектором, есть биномиальная случайная величина, в которой в качестве вероятности “успеха” выступает эффективность детектора η [29]. В более общей модели, основанной на распределении Пойа, эффективность детектора η сама становится случайной величиной, имеющей бета-распределение с параметрами $a = m$ и $b = M - m$ [24]. В условиях тестирования такого детектора посредством когерентного излучения от лазерного источника, статистика зарегистрированного числа фотонов описывается представленной выше моделью с неизвестными параметрами m , M и λ , которые могут

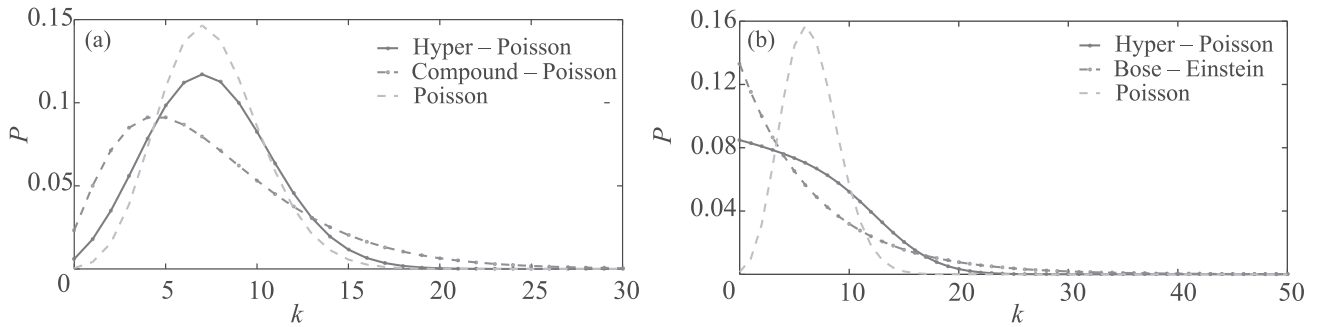


Рис. 1. (Цветной онлайн) Иллюстрация гиперпуассоновского распределения в сравнении с распределением Пуассона и компаунд-распределением Пуассона (тепловым состоянием). Параметры задачи: (a) – $m = 3, M = 4, \lambda = 10$; (b) – $m = 1, M = 2.3, \lambda = 15$

быть оценены по формулам (20), (21) и (23). Отметим также, что как параметры бета-распределения величины m и M могут быть нецелыми, выступая в качестве подгоночных параметров при обработке экспериментальных данных.

Как было показано выше, в предельном случае, когда $M \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$, а $\theta = \frac{m}{M} \rightarrow \text{const}$, распределение Пойа превращается в биномиальное распределение. В этом случае, рассматриваемое здесь гиперпуассоновское распределение превращается в обычное распределение Пуассона со средним числом отсчетов $\mu = \theta\lambda = \frac{m}{M}\lambda$:

$$\Phi(m, M, -\lambda(1 - z)) \rightarrow \exp(-\mu(1 - z)). \quad (24)$$

Рассмотрим теперь термодинамический предел полученного гиперпуассоновского распределения (12). Пусть $M \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty$, а $\mu_0 = \frac{\lambda}{M} \rightarrow \text{const}$. Тогда, в рассматриваемом пределе снова возникает производящая функция m -модового бозонного состояния, отвечающего компаунд-распределению Пуассона [7, 8]:

$$\Phi(m, M, -\lambda(1 - z)) \rightarrow (1 + \mu_0(1 - z))^{-m}. \quad (25)$$

Полученный результат вполне аналогичен предельному переходу (9) в распределении Пойа, только ранее среднее число фотонов в расчете на одну моду определялось фиксированным числом частиц k в системе в соответствии с формулой $\mu_0 = \frac{k}{M}$, а теперь – средним числом частиц λ в пуассоновском состоянии в соответствии с формулой $\mu_0 = \frac{\lambda}{M}$.

Таким образом, мы можем рассматривать три типа распределений Пуассона различной степени общности. Наиболее общее распределение – это трехпараметрическое гиперпуассоновское распределение (12). Наряду с этим распределением, важное значение имеют и две его предельные формы: двухпараметрическое компаунд-распределение Пуассона, задающее m -модовое бозонное состояние, описываемое

компаунд-распределением Пуассона (25), а также обычное однопараметрическое распределение Пуассона (24).

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены все три рассматриваемых распределения вероятностей.

На представленных рисунках для всех трех распределений одинаковы средние значения, а, кроме того, для теплового и гиперпуассоновского распределений совпадают также и значения чисел выделенных мод m . Мы видим, что визуально гиперпуассоновское распределение занимает промежуточное положение между двумя своими предельными формами, задающимися распределением Пуассона и тепловым состоянием соответственно; при это рисунок (a) отвечает многомодовому тепловому состоянию, а рисунок (b) – одномодовому тепловому состоянию.

4. Выводы. Рассмотрена задача о распределении числа бозонов (в частности, фотонов) в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц в системе является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона.

Получено новое гиперпуассоновское распределение, которое по своей математической природе может быть охарактеризовано как конфлюэнтное гипергеометрическое распределение бозонного типа и которое является естественным обобщением как обычного распределения Пуассона, так и известного компаунд-распределения Пуассона.

Представлены возможные приложения полученного распределения для описания различных систем генерации и регистрации фотонов. Полученное новое статистическое распределение будет применено нами к задаче квантовой томографии детекторов.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К. А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме # 0066-2019-0005 при поддержке

Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 20-32-70153 и 19-32-90212) и Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант # 17-13-334-1).

1. C. W. Helstrom, Proc. Phys. Soc. **83**, 777 (1964).
2. F. T. Arecchi, Phys. Rev. Lett. **15**, 912 (1965).
3. F. T. Arecchi, A. Berné, and P. Bulamacchi, Phys. Rev. Lett. **16**, 32 (1966).
4. B. Crosignani, B. Daino, and P. Di Porto, J. Appl. Phys. **42**, 399 (1971).
5. T. Gonsiorowski and J. C. Dainty, J. Opt. Soc. Am. **73**, 234 (1983).
6. M. V. Chekhova, S. P. Kulik, A. N. Penin, and P. A. Prudkovsky, Opt. Commun. **132**, 15 (1996).
7. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, and V. F. Lukichev, Optoelectron. Instrum. Data Process. **52**, 475 (2016).
8. Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, A. A. Kalinkin, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **96**, 063803 (2017).
9. K. S. Kravtsov, A. K. Zhutov, I. V. Radchenko, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **98**, 063831 (2018).
10. Z. Chen, S. Cui, L. Zhang, C. Sun, M. Xiong, and J. Pu, Opt. Express **22**, 18278 (2014).
11. J. Yamine, A. Tadjé, M. Dossou, L. Bigot, and E. R. Andresen, APL Photonics **4**, 022904 (2019).
12. G. Nicholson and D. J. Temple, J. Light. Technol. **7**, 1197 (1989).
13. G. Rademacher, R. S. Luis, B. J. Puttnam, Y. Awaji, and N. Wada, Opt. Express **25**, 12020 (2017).
14. P. S. Y. Poon and C. K. Law, Phys. Rev. A **77**, 032330 (2008).
15. Y. Cai, Y. Chen, X. Chen, J. Ma, G. Xu, Y. Wu, A. Xu, and E. Wu, Appl. Sci. **9**, 2638 (2019).
16. A. Migdall, S. V. Polyakov, J. Fan, and J. C. Bienfang, *Single-Photon Generation and Detection: Physics and Applications*, Elsevier Science, Waltham, Massachusetts (2013), 570 p.
17. M. Ren, E. Wu, Y. Liang, Y. Jian, G. Wu, and H. Zeng, Phys. Rev. A **83**, 023820 (2011); <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.023820>.
18. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **106**, 470 (2017).
19. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP **126**, 728 (2018).
20. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, A. I. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **105**, 606 (2017).
21. S. N. Molotkov, JETP Lett. **105**, 395 (2017).
22. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **106**, 470 (2017).
23. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, and G. V. Avosopiants, *Theoretical and experimental study of multi-mode thermal states with subtraction of a random number of photons*, Proc. SPIE **11022**, 110222L (15 March 2019); arXiv:1906.06384 [quant-ph].
24. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, and V. L. Dshkhunyan, Russian Microelectronics **32**, 51 (2003).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, М. (1995), ч. 1, 608 с.
26. K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, N. A. Bogdanova, Yu. I. Bogdanov, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **101**, 013811 (2020).
27. W. Feller, *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Wiley, N.Y., London, Sydney (1968).
28. *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*, ред. Ю. В. Прохоров, Издательство “Большая Российская энциклопедия”, М. (1999), 912 с.
29. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

Формирование и затухание вихревого движения на поверхности жидкости (Миниобзор)

С. В. Филатов, А. А. Левченко¹⁾, Л. П. Межов-Деглин

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 13 апреля 2020 г.

После переработки 13 апреля 2020 г.

Принята к публикации 14 апреля 2020 г.

В этом кратком обзоре представлены результаты экспериментальных исследований, которые выполнялись в рамках проекта Российского научного фонда # 17-01525. Изучались процессы формирования и затухания вихревых структур на поверхности воды. Вихревые движения в жидкости возбуждались гравитационными волнами, распространяющимися на поверхности под углом друг к другу. Показано, что процесс формирования и затухания завихренности на поверхности может быть описан суммой двух механизмов: стоковым увлечением и генерацией соленоидального течения взаимодействующими между собой нелинейными поверхностными волнами. Установлено, что после включения (или выключения) волновой накачки на временах, меньших времени вязкого затухания волны, процессы формирования и затухания вихревых структур обусловлены изменениями в волновой системе. На временах, много больше времени вязкого затухания, процесс формирования обусловлен только нелинейным механизмом генерации завихренности, а процесс затухания обусловлен вязкими потерями. В промежуточном временном интервале интенсивное взаимодействие вихрей приводит к перераспределению энергии между разными масштабами.

DOI: 10.31857/S1234567820100031

Введение. Волны и вихри играют определяющую роль в динамике атмосферы и океанов на Земле [1–3]. В этих системах происходит, в основном, поглощение солнечной энергии и последующее ее перераспределение по поверхности планеты. Две системы непрерывно взаимодействуют друг с другом: атмосфера получает энергию от более теплых вод и суши, энергия ветра разгоняет волны на поверхности, волны на поверхности, возбуждаемые ветрами в атмосфере, генерируют вихри в океане, которые в свою очередь изменяют распределение температурного поля и влияют на формирование ветра. Кроме этого, система волн на поверхности воды взаимодействует с вихревым движением на поверхности и в объеме океанов. Можно сказать, что именно от состояния этих двух глобальных систем зависят условия жизни и деятельности человека.

В теории поведение этих двух сложных нелинейных систем описывают в рамках статистического подхода. В настоящее время развиты общие методы, описывающие механизмы формирования турбулентных энергетических каскадов, как в системе нелинейных волн, так и в системе вихрей [1–4], развиты

компьютерные программы моделирования процессов взаимодействия нелинейных систем.

Таким образом, изучение механизмов взаимодействия волновых и вихревых систем важно и актуально для понимания глобальных процессов в атмосфере и в океане.

Впервые генерацию вихревого движения на поверхности воды нелинейными волнами наблюдали при изучении параметрической неустойчивости в сосуде, совершающем вертикальные колебания [5] (Фарадеевская неустойчивость [6]). Совсем недавно [7, 8] мы обнаружили новый механизм генерации вихрей нелинейными волнами на поверхности воды: взаимодействие двух нелинейных взаимно перпендикулярных волн одинаковой частоты приводит к формированию на поверхности жидкости квадратной решетки из вихрей с периодом, равным длине волны возбуждения [8, 9]. В дальнейшем было экспериментально показано, что генерация вихрей обусловлена взаимодействием нелинейных волн, распространяющихся под углом друг к другу, так что генерация вихрей не является уникальной особенностью волн Фарадея, как предполагалось в работе [5].

Каскад энергии в системе вихрей, формирование которого наблюдали в работах [10, 11], был похож

¹⁾e-mail: levch@issp.ac.ru

на обратный каскад, присущий двумерным системам [3, 4, 12, 13]. Эти результаты были получены на глубокой воде, и скорости жидкости существенно зависели от всех трех координат. Однако формирование обратного турбулентного каскада энергии, в результате которого на поверхности формируются крупномасштабные вихри, невозможно объяснить в рамках трехмерного подхода. В работах [14, 15] мы показали, что подобные крупномасштабные вихри формируются в результате нелинейного взаимодействия волн, которые возникают в результате распада волны на частоте накачки. Энергия, которая поступает в процессе волновой накачки, переносится в большие масштабы по системе волн, и далее она передается в вихревое движение.

В настоящее время работы по изучению вихревых течений, порождаемых поверхностными волнами, находятся в самом начале, поэтому имеется большое число задач, которые только предстоит решить. Наши исследования направлены на экспериментальное исследование некоторых из этих задач: во-первых – формирование вихревого движения нелинейными поверхностными волнами, и во-вторых – затухание вихрей после выключения накачки.

Теоретическая модель, описывающая формирование вихрей волнами, была предложена в [8], где было показано, что за генерацию завихренности на поверхности жидкости ответственно нелинейное взаимодействие поверхностных волн. Результаты прямых измерений [9] подтвердили предсказанную теорией зависимость завихренности от амплитуды и разности фаз для волн, распространяющихся вдоль поверхности под углом в 90° . Вертикальная завихренность на поверхности жидкости Ω определяется как

$$\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad (1)$$

где V_x и V_y – компоненты скорости жидкости.

В соответствии с предсказаниями теории [8] в случае, когда на свободной поверхности жидкости возбуждаются стоячие волны на частоте ω в двух взаимно перпендикулярных направлениях, завихренность Ω , которую рассчитывают по трекам декорирующих частиц, локализованных в тонком слое под поверхностью, зависит от амплитуды волн H_1 и H_2 , волнового вектора κ , и разности фаз между волнами ψ :

$$\Omega = -(1 + \sqrt{2}) \sin \psi H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx) \sin(ky). \quad (2)$$

В случае волн, бегущих по поверхности, завихренность не зависит от разности фаз ψ и описывается выражением

$$\Omega = (1 + \sqrt{2}) H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx - ky). \quad (3)$$

Как видно из выражений (2) и (3), завихренность на поверхности определяется суммой двух членов [10–16]. Первый член обусловлен стоковым увлечением, а за второй ответственно нелинейное взаимодействие волн (эйлерово течение).

Процесс формирования вихревого движения волнами может существенно измениться при возникновении примесной пленки на исходно чистой поверхности жидкости [17, 18], например, при конденсации на поверхности воды примесных паров из окружающей атмосферы. Поэтому при проведении измерений для правильного учета влияния объемной вязкости на процесс генерации завихренности нелинейными волнами и последующее затухание вихрей при выключении волновой накачки необходимо тщательно контролировать состояние поверхности жидкости.

При учете влияния тонкой сжимаемой поверхностной пленки установившееся распределение завихренности на поверхности Ω , которая формируется при взаимодействии двух перпендикулярных волн, можно описать выражением [18]:

$$\Omega = \left[1 + \sqrt{2} + \frac{\varepsilon^2}{2\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} \right] \Lambda, \quad (4)$$

где

$$\Lambda = -H_1 H_2 \omega k^2 \sin(\psi) \sin(kx) \sin(ky) \quad (5)$$

и $\gamma = \sqrt{\nu k^2 / \omega} \ll 1$ – безразмерный параметр, характеризующий слабое затухание волны на чистой поверхности жидкости. Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, ε – параметр, учитывающий наличие вязких потерь в пленке. В отсутствие пленки $\varepsilon = 0$ и формула (4) переходит в (2).

После включения волновой накачки процесс формирования эйлеровой завихренности Ω_E на поверхности жидкости [18] описывается выражением (6)

$$\Omega_E(t) = \left[\frac{\varepsilon^2}{2\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \right] \Lambda \times \text{Erf}(\sqrt{2\nu k^2 t}), \quad (6)$$

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\zeta e^{-\zeta^2}.$$

Что существенно для эксперимента, на коротких временах, $t \ll \tau_{\text{vis}}$, эйлерова компонента завихренности должна возрастать в среднем по корневому закону,

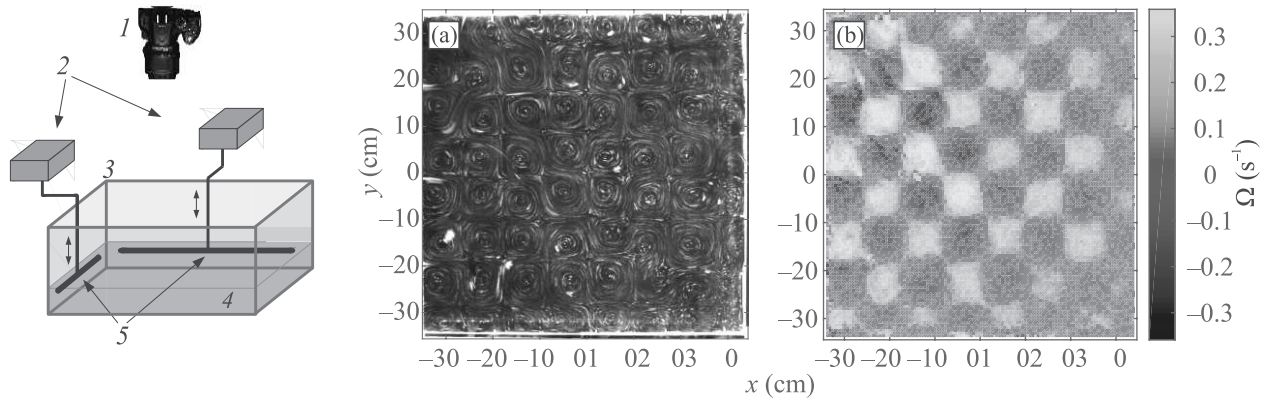


Рис. 1. (Цветной онлайн) Рисунок из работы [15]. (а) – Схема экспериментальной установки. 1 – видеокамера; 2 – саб-вуферы; 3 – плунжеры; 4 – прозрачная ванна размерами $70 \times 70 \times 25 \text{ см}^3$; 5 – слой воды. Рисунок из работы [9]. (б) – Левый кадр – треки полиамидных частиц на поверхности воды, которые наблюдали при накачке двумя плунжерами на частоте 3 Гц с угловой амплитудой волны в центре ванны 0.035 рад; правый кадр – распределение завихренности на поверхности при разности фаз между волнами $\psi = 90^\circ$

$\Omega_E \sim (2\nu k^2 t)^{1/2}$, а на временах $t \gg \tau_{\text{vis}}$ завихренность будет возрастать по экспоненциальному закону, $\Omega_E \sim (1 - \exp(-2\nu k^2 t))$. Таким образом, при длительной волновой накачке изменение амплитуды завихренности будет связано только с эйлеровым движением жидкости, возбуждаемым нелинейными волнами, тогда как стоковая завихренность Ω_S к этому времени выйдет на константу. Тем не менее, достичь стационарного распределения завихренности, описываемого выражением (2), на больших временах не очень сложно, так как при длительной накачке на поверхности должно успеть сформироваться крупномасштабное вихревое течение [19], которое уменьшает значение амплитуды завихренности узлов решетки в силу их растяжения [20].

После выключения накачки волны и вихри на поверхности затухают в результате вязкого трения. Характерные времена вязкого затухания в объеме жидкости t_{vis} зависят от масштаба структуры L и коэффициента кинематической вязкости жидкости ν , $t_{\text{vis}} \sim L^2/\nu$ [21]. Поэтому если при длительном возбуждении волн на поверхности жидкости в результате их нелинейного взаимодействия сформировались вихри масштаба, сравнимого с размером экспериментальной ячейки, их можно будет наблюдать и после полного затухания поверхностных волн.

В цели настоящих экспериментов входило изучение процессов формирования вихревого движения поверхностными гравитационными волнами, наблюдение вихревого движения масштаба больше длины волны накачки, а также исследование процессов затухания вихревого движения после выключения накачки.

Естественно, что время формирования решетки вихрей гравитационными волнами определяется вязким временем τ_{vis} и временем пробега волной τ_{lf} расстояния между противоположными стенками прямоугольной экспериментальной ванны. При этом время формирования вихрей большого масштаба определяется интенсивностью нелинейных процессов, и зависит, в основном, от частоты и амплитуды волн накачки. При постановке исследований, обсуждаемых в настоящем обзоре, частоту и амплитуду волн выбирали таким образом, чтобы можно было проследить за процессами формирования решетки вихрей, возникновением крупномасштабного вихря, сравнимого с размерами ванны, и за процессами затухания вихрей.

Были предприняты специальные усилия, чтобы доказать, что завихренность, генерируемая нелинейными волнами, действительно обусловлена двумя вкладками: стоковым увлечением и соленидальным течением, формируемым волнами в вязком подслое (эйлерова завихренность). В настоящий обзор вошли материалы, которые ранее были опубликованы в работах [18–20, 22–25].

Экспериментальная методика. Схема установки и пример решетки вихрей, сформированной стоячими взаимно перпендикулярными волнами на поверхности воды, показаны на рис. 1. Воду заливают в прозрачную прямоугольную ванну 3 размерами $70 \times 70 \times 25 \text{ см}^3$, изготовленную из листового стекла толщиной 1 см. Толщина слоя воды составляет примерно 10 см. Для возбуждения волн на поверхности воды используются два горизонтальных плунжера 5, изготовленных из трубки из нержавеющей

стали диаметром 10 мм. Плунжеры наполовину погружены в воду и совершают вертикальные колебания. Для создания вертикальных колебаний плунжеров используются сабвуферы 2 (TS-W254R фирмы Pioneer, номинальной мощностью 250 Вт).

Для регистрации вихревого движения поверхность воды декорируется белыми частичками полиамида PA-12. Средний размер полиамидных частиц 30 мкм. На поверхности воды частицы собираются в плоские агрегаты – трассеры, средним диаметром 0.2–0.3 мм. Чтобы не возникало паразитной засветки, съемки проводили в затемненном помещении. Трассеры на поверхности подсвечиваются светодиодами, расположенными по периметру ванны. Для записи явлений на поверхности жидкости использовали фотокамеру Canon EOS 70D с частотой записи 24 (25) кадров в секунду, соединенную с наружной системой записи и обработки результатов наблюдений. Такая частота съемки позволяет выбирать снимки колеблющейся поверхности, находящейся в одной фазе волны и исключать из дальнейшей обработки осциллирующую составляющую перемещения пробной частицы, плавающей на поверхности. Для выявления треков движения частиц на поверхности снимки суммируются. Обработка полученных изображений программой PIVLab [26] позволяет вычислить скорости движения частиц вдоль поверхности V_x и V_y , затем рассчитать вертикальную завихренность на поверхности по формуле (1) и распределение энергии по поверхности, воспользовавшись выражением

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \rho (V_x^2 + V_y^2). \quad (7)$$

Распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ вычисляется усреднением по кольцу в k -пространстве:

$$E(k) = \frac{1}{2S\Delta k} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} [|V_k|^2], \quad (8)$$

где интегрирование проводится по кольцу $k < q < k + \Delta k$. Полученное значение нормируется на площадь поверхности жидкости S . Здесь V_k – фурье-компонента скорости частицы.

Амплитуду волн на поверхности воды рассчитывали по измеряемой скорости колебаний частиц в волновом поле по методике, описанной в работе [14], а также по перемещению точек трафарета, расположенного на дне ванны, при отклонении поверхности воды от равновесной плоской формы, возбуждаемой волной, как описано в статье [25].

Применение описанной выше методики измерения завихренности предполагает, что скорость

неконтролируемого течения жидкости на поверхности много меньше скорости соленоидального течения, формируемого нелинейными поверхностными волнами. Чтобы свести к минимуму скорость конвективного течения, возникающего из-за перепада температуры между придонными и поверхностными слоями жидкости, дно и боковые стенки экспериментальной ванны были теплоизолированы – покрыты слоем пенопласта толщиной 5 см. Для предотвращения конденсации примесей из окружающего воздуха при длительных экспериментах сверху ванна была закрыта прозрачным стеклом.

При изучении проникновения завихренности в объем жидкости применялась методика лазерного листа [27]. Лазерный луч, проходя через цилиндрическую линзу, раскрывался в расходящийся плоский лист толщиной около 1 мм, так что подсвечивались только те частицы полиамида, которые находились в плоскости листа. Частицы, имеющие нулевую плавучесть, были предварительно отобраны из порошка PA-12 в разделительной колонне.

Экспериментальные результаты. На рисунке 2 показана зависимость от времени модуля завихренности $|\Omega|(t)$ на поверхности воды, на которой

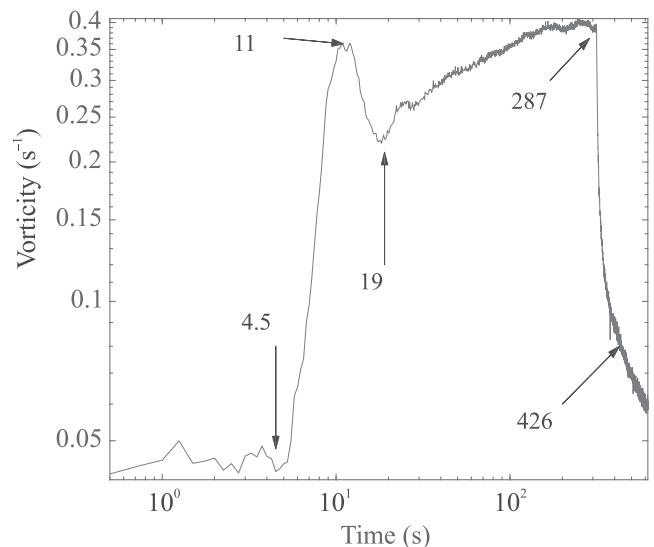


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость модуля завихренности $|\Omega|$ от времени при включении в момент $t = 4.5$ с и выключении в момент $t = 287$ с возбуждения поверхностных волн на частоте 4 Гц с угловой амплитудой, равной 0.1 рад

возбуждаются стоячие волны на частоте $f = 4$ Гц с угловой амплитудой H , равной 0.1 рад. Разность фаз волн, распространяющихся в перпендикулярных направлениях, составляет 90° . Через 4.5 с после нача-

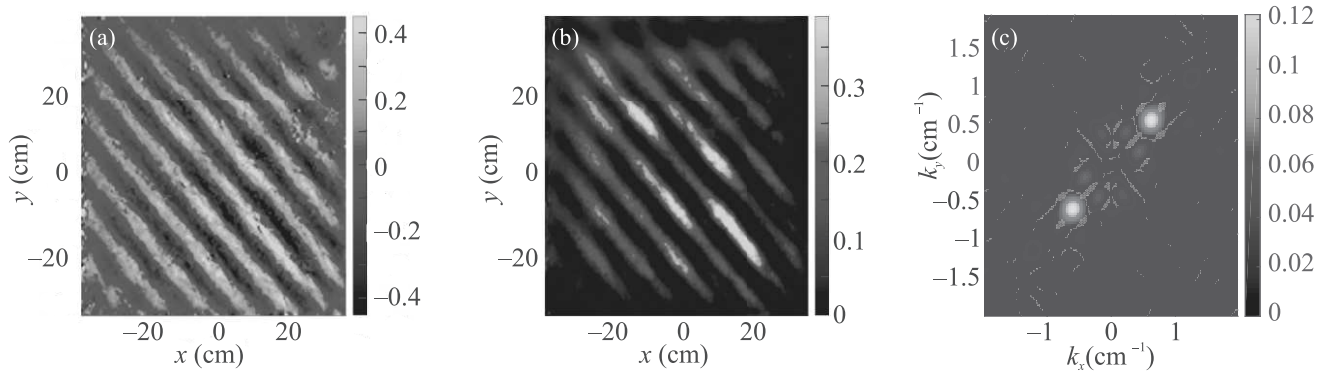


Рис. 3. (Цветной онлайн) Распределение завихренности Ω (a) и энергии $E(xy)$ (b) по поверхности воды после накачки в течение 3.5 с волнами с угловой амплитудой, равной 0.1 рад на частоте 4 Гц. (c) – Фурье-распределение энергии в k -пространстве

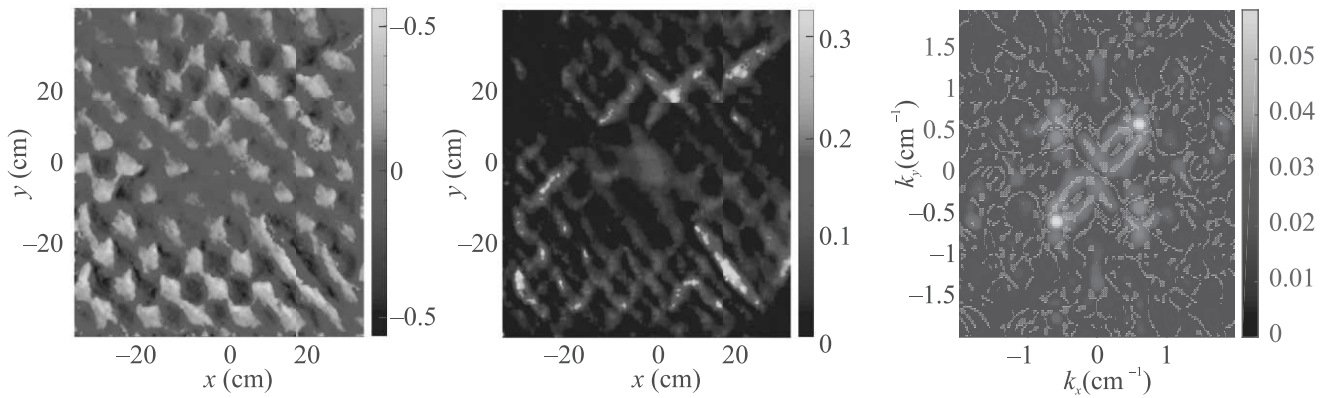


Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Распределение завихренности по поверхности после возбуждения поверхности волнами на частоте 4 Гц с угловой амплитудой 0.1 рад в течение 19 с. (b) – Распределение энергии по поверхности $E(xy)$. (c) – Фурье-распределение энергии в k -пространстве

ла записи на приводы плунжеров подали переменное напряжение. Видно, что сначала амплитуда модуля завихренности быстро возрастает и достигает максимума, а потом значительно уменьшается. Начиная с 20-й секунды, модуль завихренности вновь растет и выходит на стационарное значение приблизительно к 200-й секунде. В момент $t = 287$ с волновую накачку выключают, и завихренность на поверхности воды начинает быстро затухать.

На рисунке 3 показано распределение завихренности $\Omega(xy)$ (рис. 3a) и энергии $E(xy)$ (рис. 3b) по поверхности воды после накачки в течение 3.5 с волнами с угловой амплитудой, равной 0.1 рад на частоте 4 Гц. Через 3.5 с после включения накачки распределение завихренности по поверхности $\Omega(xy)$ на рис. 3a представляет собой систему валов, идущих параллельно диагонали экспериментальной ванны, как это и предсказывается формулой (3).

Распределение энергии по поверхности $E(xy)$ на рис. 3b выглядит аналогично распределению $\Omega(xy)$.

Отметим, что амплитуда распределения энергии вдоль диагональных валов изменяется почти в четыре раза (при этом скорость изменяется в два раза). На рисунке 3c показано Фурье-распределение энергии в пространстве волновых векторов. На рисунке видны два хорошо выраженных пика, имеющих координаты в k -пространстве, равные $(0.64 \text{ см}^{-1}; 0.64 \text{ см}^{-1})$ и $(-0.64 \text{ см}^{-1}; -0.64 \text{ см}^{-1})$. Так как волновой вектор волны на частоте 4 Гц равен 0.64 см^{-1} , очевидно, что масштаб возникшей структуры совпадает с длиной волны накачки.

Через 19 с после включения накачки распределения как энергии, так и завихренности существенно изменяются. На рисунке 4a, где показано распределение завихренности Ω по поверхности, хорошо видна решетка вихрей, которая уже начала размываться вихревыми течениями большого масштаба. Это отчетливо видно в центре рис. 4a и b. В распределении энергии по поверхности $E(xy)$ можно отметить присутствие пиков, отражающих решетку вих-

рей, а также наличие предпочтительного направления вдоль диагонали, идущей от нижнего правого угла к верхнему левому. В Фурье-распределении энергии по волновым векторам (рис. 4с) имеются четыре хорошо выраженные пика, свидетельствующие о наличии квадратной решетки. Однако их интенсивность попарно отличается примерно вдвое. Кроме этого, можно отметить присутствие энергии на масштабах как больше, так и меньше масштаба накачки, равного 0.64 см^{-1} .

Напомним, что групповая скорость $V_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ гравитационной волны определяется выражением $V_{gr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$ и составляет $\approx 19.6 \text{ см/с}$ для волны частотой 4 Гц. Расстояние от плунжера до стенки ванны волна пробегает за время $\tau_{tf} = 68/19.6 = 3.5 \text{ с}$. На рисунке 3 приведены распределения завихренности и энергии по поверхности в момент, когда бегущие волны от плунжеров достигли противоположных стенок ванны. Из рисунка 2 видно, что максимальная завихренность достигается к 7-й секунде после включения накачки, за время удвоенного пробега волны от стенки до стенки, т.е. когда на поверхности успела сформироваться решетка вихрей. Последующее уменьшение модуля завихренности связано, по-видимому, с биениями, возникающими в системе стоячих волн, так как частота накачки, равная $f_r = 4.00 \text{ Гц}$, немного меньше резонансной частоты резонансной моды нашей ванны, $f_r = 4.075 \text{ Гц}$. К 25-й секунде переходные процессы в системе стоячих волн практически завершились – на кривой $\Omega(t)$ наблюдается только небольшой второй пик. Расстояние по времени между двумя пиками составляет приблизительно 12 с, что близко к обратной разности частоты накачки и резонансной частоты, $(f_r - f_p)^{-1} = 13 \text{ с}$.

После прохождения минимума завихренность $\Omega(t)$ возрастает в интервале от 19-й до 150-й секунды, и к 200-й секунде выходит на стационарное значение. Рост Ω обусловлен генерацией эйлеровой завихренности в вязком подслое, толщина которого $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ равна приблизительно 40 мкм, что меньше размера полиамидных частиц, т.е. все декорирующие частицы увлекаются течением жидкости. Отличие экспериментальной зависимости $\Omega(t)$ от предсказаний теории (3) может быть связано с развитием крупномасштабного вихревого течения. Отметим, что в разных измерениях кривые $\Omega(t)$ после максимума могут кардинально различаться. По-видимому, это связано со структурой больших вихрей, случайным образом возникающих на поверхности воды после включения накачки.

Чтобы ослабить нелинейное взаимодействие вихрей и процесс передачи энергии в большие масшта-

бы в системе волн, эксперименты были проведены на вязких растворах вода–глицерин при малых амплитудах накачки. Эффективное число Рейнольдса для рассматриваемых экспериментов можно оценить как $Re = \Omega/(\nu k^2) \approx 1$. В этом случае решетка вихрей сохраняется при больших временах накачки. На рисунке 5 приведена зависимость завихренности от времени $|\Omega|(t)$ на поверхности 38% раствора вода–глицерин после включения накачки волн с крутизной $kH_1 = 5.4 \cdot 10^{-3}$ и $kH_2 = 4.8 \cdot 10^{-3}$. Массовая плотность жидкости $\rho = 1.091 \text{ г/см}^3$, кинематическая вязкость $\nu = (3.1 \pm 0.05) \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ (это было измерено специально с помощью вискозиметра).

На рисунке 5а показана экспериментальная зависимость модуля завихренности от времени $|\Omega|(t)$, кривая 1, а также приведены результаты теоретического расчета по формуле (6) – кривая 2. Модуль завихренности вихревых течений можно описать как сумму дрейфа Стокса и вклада Эйлера, т.е. $\Omega = \Omega_S + \Omega_E$. Оба вклада одинаково зависят от горизонтальных координат (в том числе от знака), поэтому $|\Omega| = |\Omega_S| + |\Omega_E|$. Зависимость стоковского вклада от времени довольно проста: $|\Omega_S| = e^{2kz} |\Lambda(t)|$, и это слагаемое легко найти, воспользовавшись выражением (5), поскольку мы измеряем $H_{1,2}(t)$ и $\psi(t)$ (см. кривую 3 на рис. 5а).

Эйлеров вклад $|\Omega_E|$ описывается уравнением (6). Следовательно, единственным неизвестным параметром является модуль эластичности пленки ϵ . Варьируя решение по этому параметру и находя наилучшее соответствие экспериментальным данным, получаем $\epsilon = 0.33 \pm 0.02$, что соответствует синей кривой 2 на рис. 5а. Пунктирными горизонтальными линиями показаны значения завихренности для случая свободной поверхности $\epsilon = 0$ и для найденного параметра $\epsilon = 0.33$. Видно, что при одинаковом волновом движении наблюдаемые в данных измерениях вихревые течения были бы в несколько раз слабее, если бы поверхность жидкости не была загрязнена.

В наших экспериментах эйлерово время $t_E = 2\nu k^2$ составляет $\approx 125 \text{ с}$ и оказывается значительно длиннее стоковского времени $t_S \approx 10 \text{ с}$, которое определяли по затуханию волн (рис. 5б). Поэтому два механизма можно хорошо разделить по временной зависимости $|\Omega|(t)$ (рис. 5а). Колебания с периодом $\approx 24 \text{ с}$, которые видны на экспериментальной кривой формирования, соответствуют случаю биения волн. С учетом этого замечания можно заключить, что экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с аналитическими расчетами.

При выключении накачки амплитуда колебаний плунжеров падает до нуля в течение одной секун-

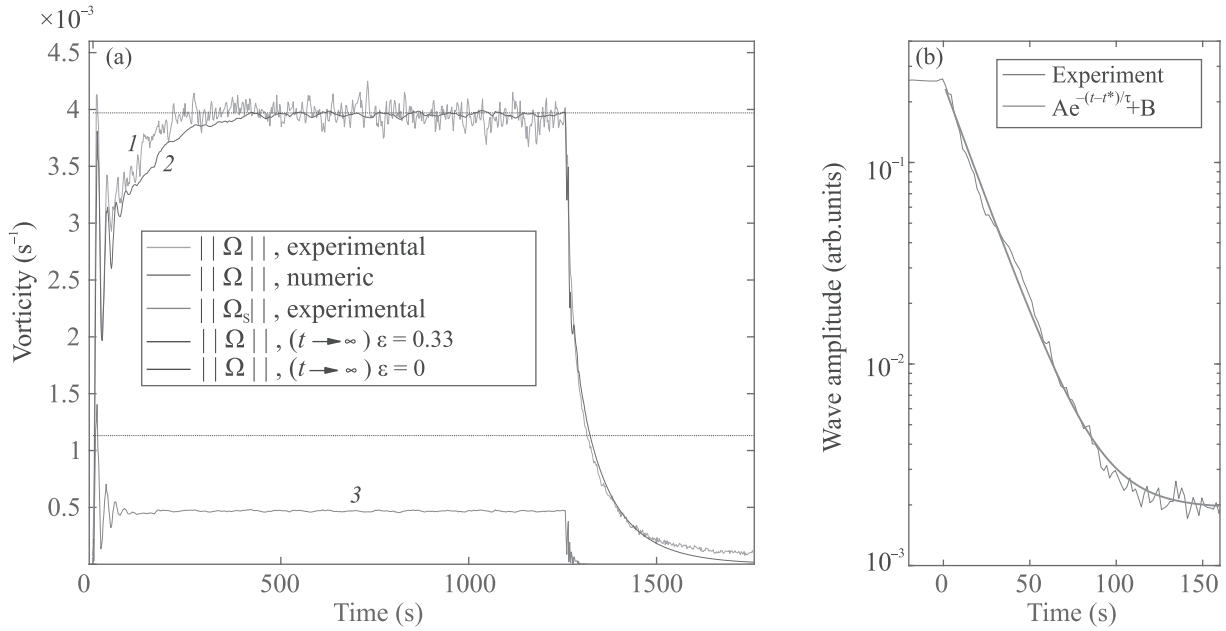


Рис. 5. (Цветной онлайн) (а) – Завихренность $|\Omega| = |\Omega_S| + |\Omega_E|$ как функция времени для 38 % раствора глицерина и воды. Зеленая кривая 1 соответствует экспериментальным данным, а синяя кривая 2 показывает результаты численного расчета по формуле (9) (см. ниже). Красная кривая 3 демонстрирует зависимость стоковского вклада $|\Omega_S|$ от времени, найденную по экспериментально измеренным значениям амплитуд волн $H_{1,2}(t)$ и $\psi(t)$. Пунктирные горизонтальные прямые показывают временные асимптотические решения для случая свободной чистой поверхности $\varepsilon = 0$ и для найденного параметра $\varepsilon = 0.33$. (б) – Затухание амплитуды волны после выключения накачки. Сплошная красная линия – расчет по формуле $A = Ae^{-\Delta t/\tau} + B$

ды. Этим определяется начальная стадия процесса затухания возбуждений в жидкости. Эта стадия и последующая эволюция завихренности на поверхности жидкости хорошо различимы на рис. 5а. Видно, что наблюдается хорошее согласие между экспериментальными данными и аналитическими кривыми. Здесь важно отметить, что вклад стоковского дрейфового движения затухает намного быстрее, чем вклад эйлерова течения, это позволяет в нашем эксперименте наблюдать вихревые течения тогда, когда волновое движение уже затухло. Эти наблюдения однозначно доказывают существование вклада эйлеровой составляющей в вихревые течения и показывают, что соотношение $t_E \gg t_S$ справедливо.

Отметим, что при распространении волны вдоль поверхности возникают как вертикальные, так и горизонтальные колебания жидкости. Это позволяет рассчитать амплитуду волновых колебаний, измерив только горизонтальную скорость по методике, описанной в [25]. На рисунке 6 показана зависимость измеренной в эксперименте амплитуды колебаний поверхности воды от времени $H(t)$ после выключения накачки на частоте 3 Гц. Видно, что в течение первых нескольких минут амплитуда волны колеблется относительно среднего положения.

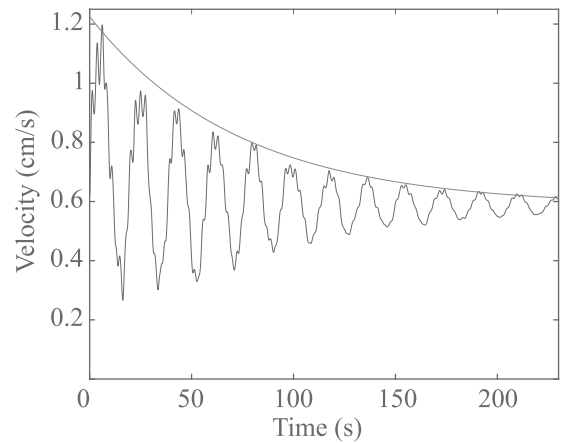


Рис. 6. (Цветной онлайн) Зависимость от времени амплитуды колебаний поверхности воды после выключения накачки на частоте 3 Гц. Сплошная кривая – зависимость $0.58 + 0.60e^{-t/75}$

Колебания амплитуды волны экспоненциально затухают с характерным временем τ около 75 с. Сплошная кривая на рис. 6 соответствует функции $0.58 + 0.60e^{-t/75}$. Следовательно, затухание волн на поверхности можно приблизительно описать формулой

$$H_x = H_0(1 + \sin(\omega_0 t)e^{-t/\tau}), \quad (7)$$

где $\omega_0 \approx 0.34 \text{ с}^{-1}$, и оцененное по экспериментальной зависимости время $\tau_s \approx 75 \text{ с}$. Зная зависимость амплитуды волны от времени, можно установить эволюцию во времени стокового вклада в завихренность по формуле (3):

$$\Omega_S \sim H_x H_y \sim H_0^2(1 + 2 \sin(\omega_0 t)e^{-t/\tau} + \sin^2(\omega_0 t)e^{-2t/\tau}). \quad (8)$$

Усредняя по периоду $2\pi/\omega_0$, получим

$$\langle \Omega_S \rangle \sim H_0^2(1 + 1/2e^{-2t/\tau}). \quad (9)$$

Из выражений (8), (9) видно, что амплитуда завихренности на поверхности жидкости, вызванная стоковым дрейфом, должна осциллировать, и ее амплитуда колебаний должна уменьшаться с характерным временем $\tau/2$. Среднее значение завихренности Ω_S также должно уменьшаться с характерным временем около 37 с. Однако, как видно на рис. 7, наблюдавшееся в экспериментах поведение

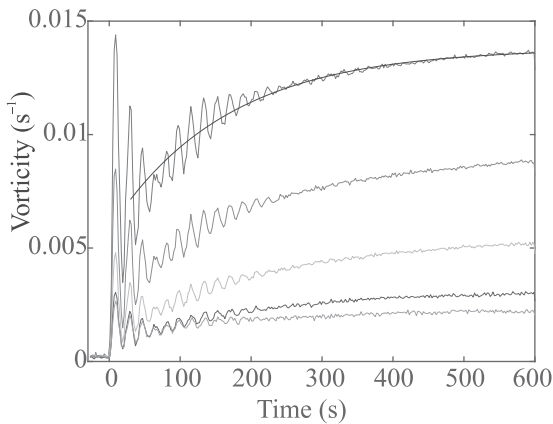


Рис. 7. (Цветной онлайн) Зависимость от времени среднего модуля завихренности вихревой решетки $|\Omega|$ в слое воды на разных глубинах: равных сверху вниз $z = 0.5, 1.25, 2.0, 2.75$ и 3.5 см . Сплошная линия соответствует зависимости $(1.4 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-3})e^{-t/165}$. Амплитуда волны на частоте накачки равняется 0.5 мм

$\Omega_S(t)$ противоположно этому: среднее значение амплитуды завихренности вихревой решетки $|\Omega|$ со временем только увеличивается. Таким образом, рассчитанная по результатам измерений зависимость завихренности вихревой решетки от времени не может быть объяснена вкладом только стокова увлечения. На рисунке 7 видно, что биение волны затухает к 300-й секунде после включения накачки, завихренность Стокса Ω_S достигает постоянного значения, и на больших временах изменение амплитуды завихренности связано только с эйлеровым движением жидкости, возбужденным нелинейными волнами.

Рассмотрим теперь распределение завихренности по глубине воды. На рисунке 8 представлена зави-

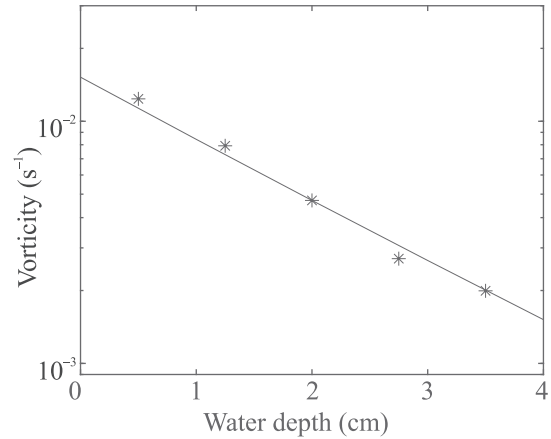


Рис. 8. (Цветной онлайн) Распределение среднего модуля завихренности решетки вихрей по глубине жидкости на 600-й секунде после включения накачки. Сплошная прямая соответствует функции $|\Omega| = 6.3 \times 10^{-3}(e^{-2kz} + e^{-\sqrt{2}kz})$

симость модуля завихренности вихревой решетки от глубины z на 600-й секунде после включения накачки. Полагаем, что к 600-й секунде значение завихренности в узлах решетки вихрей близко к стационарному значению, описываемому формулой (5). Распределение завихренности по глубине описывается суммой двух членов [8]

$$\Omega(z) = (e^{-2kz} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}kz})\Lambda. \quad (10)$$

На рисунке 8 сплошной линией показана зависимость, пропорциональная $e^{-2kz} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}kz}$, где $k = 0.36 \text{ см}^{-1}$. Видно, что наблюдается хорошее согласие между экспериментальными точками и теоретической зависимостью (5).

Итак, экспериментально показано, что в формировании завихренности поверхностными волнами вносят вклад два механизма: стоково увлечение и генерация вихревого движения в вязком подслое нелинейными волнами – эйлерово течение. Присутствие упругой пленки на поверхности жидкости увеличивает значительно вклад эйлерова течения. Вихревое течение со временем распространяется в объеме жидкости. В стационарном состоянии распределение завихренности по глубине хорошо описывается в рамках развитой теоретической модели [8].

Распад решетки вихрей. На рисунке 9а–с показаны треки полиамидных частиц перед выключением накачки на частоте 3 Гц, которая длилась разное время. После 5 с накачки на поверхности сформирована вихревая решетка с периодом, равным длине

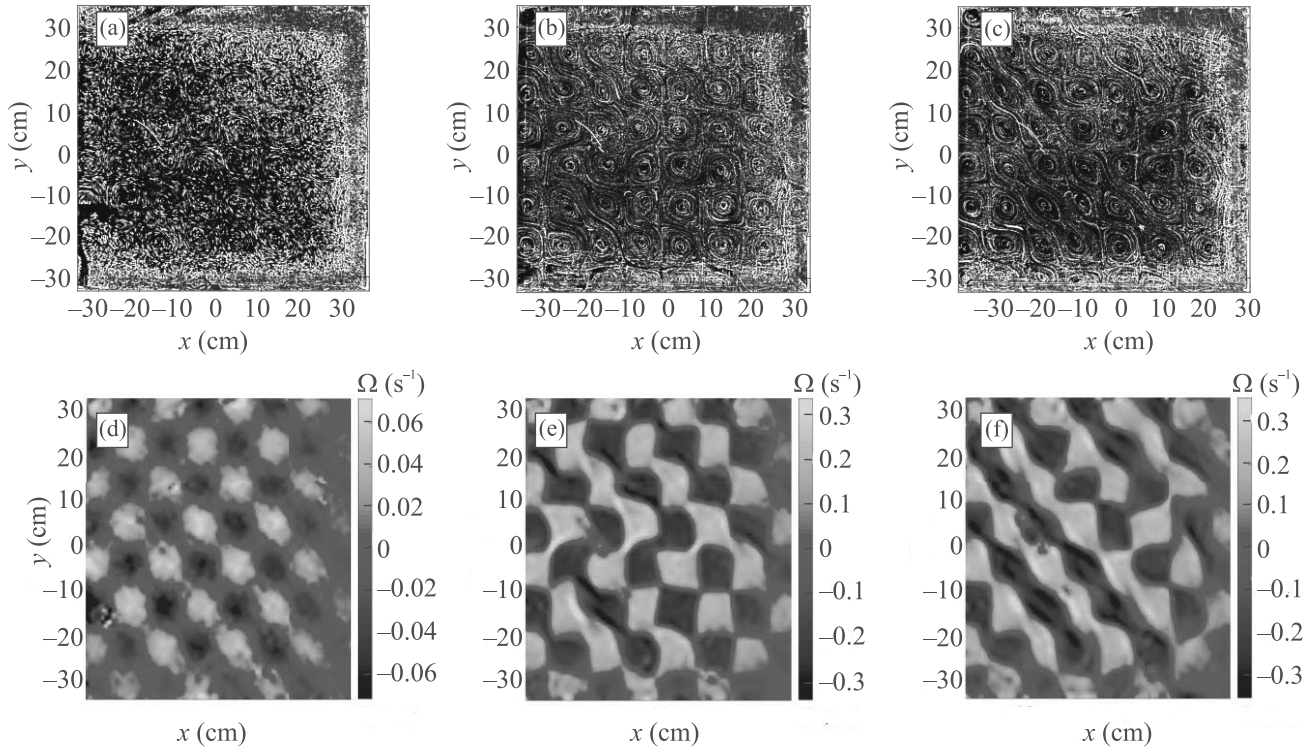


Рис. 9. (Цветной онлайн) Треки полиамидных частиц (a)–(c) и распределение завихренности (d)–(f) на поверхности воды после возбуждения поверхности взаимно перпендикулярными стоячими волнами частотой 3 Гц и амплитудой 0.062 рад при накачке в течение 5, 60 и 300 с

волны накачки. Через 60 с после начала накачки наблюдается объединение соседних узлов решетки в единые вихри большего масштаба. Это хорошо видно в верхнем правом углу рис. 2b, c. Через 300 с процесс объединения в единый вихрь нескольких узлов решетки виден более отчетливо. На распределении завихренности по поверхности (рис. 9d–f) этот процесс прекрасно виден. Через 5 с после включения накачки решетка выглядит совершенной, через 60 с решетка выглядит деформированной, а через 300 с на поверхности появляются валы, направленные по диагонали ванны, что свидетельствует об установлении движения частиц, направленного от одной стенки ванны к противоположной. Тут следует отметить, что в выбранных нами условиях накачки крупномасштабные вихри не успевают сформироваться.

На рисунке 10 приведены зависимости от времени энергии вихревого движения на поверхности воды в интервале волновых векторов от 0 до 2.5 см^{-1} после выключения накачки. Вихри генерируются двумя перпендикулярно распространяющимися волнами с разностью фаз, равной 90° . Частота волн накачки равняется 3 Гц. Угловая амплитуда волны в установившемся режиме составляет 0.062 рад. До момента выключения накачки поверхность воды воз-

буждается плунжерами в течение 5, 60 и 300 с. Результаты измерений показаны на рис. 10a в двойном логарифмическом масштабе, а на рис. 10b – в полулогарифмических координатах.

Хорошо видно, что после выключения накачки зависимость от времени энергии вихревого движения $E(t)$ определяется длительностью времени накачки. Сразу после выключения длительной накачки энергия быстро убывает. Убывание энергии можно описать экспоненциальной зависимостью $E \sim \exp(-t/\tau_1)$ с характерным временем τ_1 , равным приблизительно 7 с для всех трех кривых. На рисунке 10b прекрасно видно, что после 60 и 300 с накачки затухание энергии вихревого движения на больших временах, более 100 с после выключения накачки, происходит по экспоненциальному закону $E \sim \exp(-t/\tau_2)$ с характерным временем, близким к $\tau_2 = 130 \pm 20 \text{ с}$ для кривой 2 и $180 \pm 20 \text{ с}$ – для кривой 3. Отметим, что после накачки в течение 5 с второй экспоненциальный участок кривой $E(t)$ не наблюдается, по-видимому, из-за близости измеряемых величин скорости движения частиц к пределу чувствительности нашей методики.

На рисунке 11 показаны зависимости от времени плотности энергии W на разных масштабах волно-

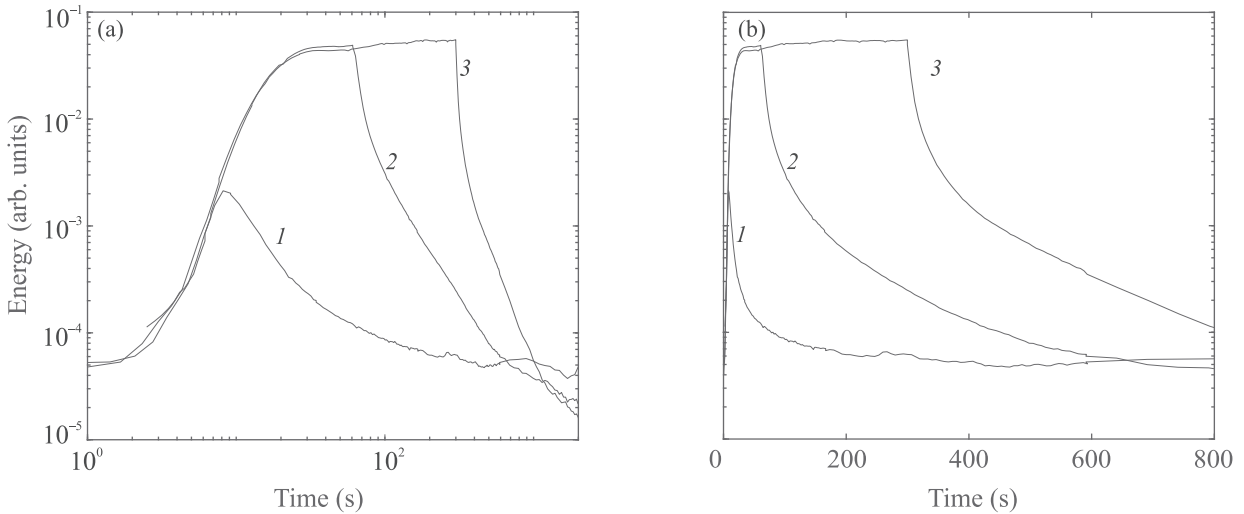


Рис. 10. (Цветной онлайн) Зависимость энергии вихревого движения от времени $E(t)$ при длительности волновой накачки в течение 5 (кривая 1), 60 (кривая 2) и 300 с (кривая 3). Частота накачки 3 Гц, амплитуда волны в установившемся режиме 0.062 рад. (а) – Двойной логарифмический масштаб. (б) – Полулогарифмический масштаб

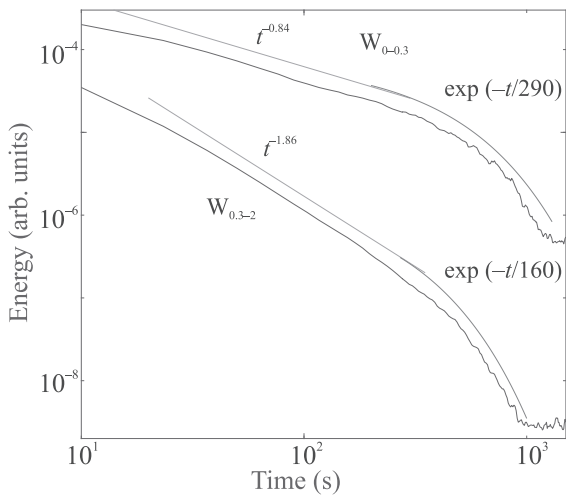


Рис. 11. (Цветной онлайн) Зависимость плотности энергии \mathbf{W} от времени после выключения накачки на разных масштабах волновых векторов. Верхняя кривая – плотность энергии в круге волновых векторов диаметром 0.3 см^{-1} ; нижняя кривая – в кольце, ограниченном радиусами $0.3\text{--}2 \text{ см}^{-1}$. Амплитуда волн накачки 0.093 рад. Прямые синие линии соответствуют степенной зависимости (верхняя часть $t^{-0.8}$, нижняя – $t^{-1.86}$). Красные кривые (наложены на экспериментальные кривые при t свыше 100 с) соответствуют экспоненциальным зависимостям (верхняя кривая – $\exp(-t/290)$, нижняя – $\exp(-t/160)$)

вых векторов, в круге $0\text{--}0.3 \text{ см}^{-1}$ $W_{0-0.3}(t)$ и в кольце $0.3\text{--}2 \text{ см}^{-1}$ $W_{0.3-2}(t)$ после выключения накачки. На первом этапе, сразу после выключения накачки, приблизительно до 20-й секунды, энергия уменьшается

из-за затухания волнового движения. Это приводит к уменьшению стока вклада в суммарную завихренность и, следовательно, в энергию вихревого течения.

Хорошо видно, что во временном интервале от 20 до 250 с экспериментальные данные хорошо описываются степенными зависимостями $\mathbf{W} \sim t^m$ с показателями m , равными -1.86 и -0.84 . Степенные зависимости свидетельствуют о наличии развитого нелинейного взаимодействия между вихревыми структурами [28, 29]. Оценка числа Рейнольдса по выражению $Re \sim \Omega L^2/\nu$ дает значение, близкое к $Re \sim 1000$ при возбуждении вихревого движения в течение 300 с волнами с амплитудой 0.031 рад, $Re \sim 2000$ – при возбуждении волнами амплитудой 0.062 рад и $Re \sim 4000$ – при накачке волнами амплитудой 0.093 рад. Таким образом, следует отметить, что вихревое движение является сильно нелинейным, что и приводит к сильному вихревому взаимодействию.

На рисунке 10 видно, что экспоненциальное затухание энергии начинается приблизительно с 250-й секунды после выключения накачки. Энергия вихрей к этому времени уменьшается в несколько сотен раз, число Рейнольдса падает до $Re \sim 100$, и процесс нелинейного взаимодействия вихрей останавливается. На больших временах затухание обусловлено вязкими потерями, поэтому энергия уменьшается экспоненциально с характерными временами, равными $\tau_1 = 160$ с в кольце радиусом от 0.3 до 2 см^{-1} и $\tau_2 = 290$ с в круге радиусом 0.3 см^{-1} .

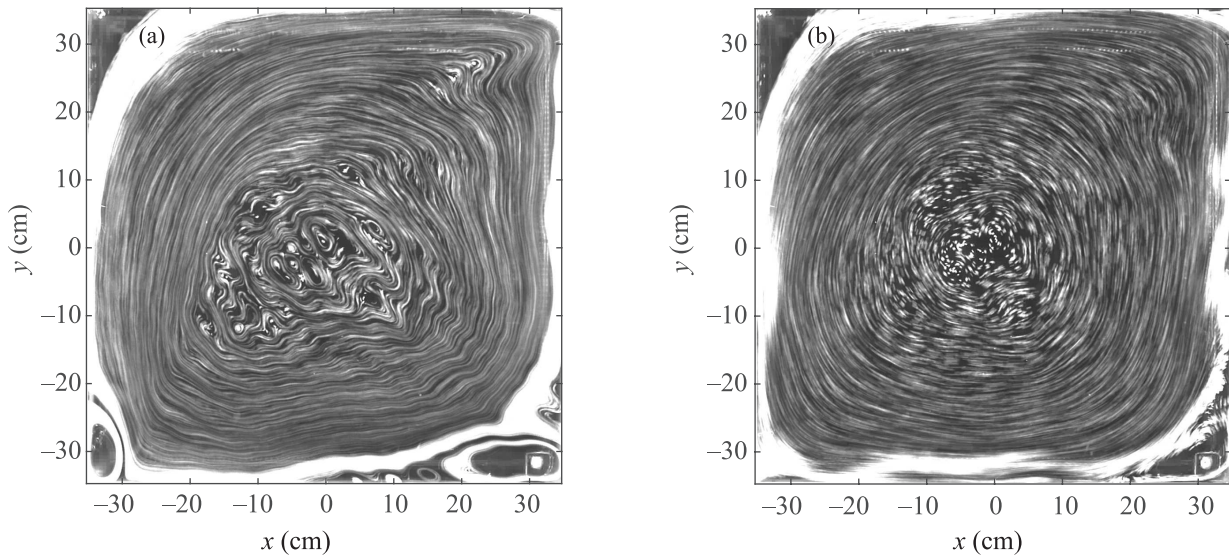


Рис. 12. (а) – Треки полиамидных трассеров на поверхности воды, сформировавшиеся через 20 мин после включения накачки двумя плунжерами частотой 6 Гц. (б) – Треки трассеров на поверхности воды, которые сформировались через 20 с после выключения накачки

Время затухания вихря размером $L = 2\pi/0.3 \approx 20$ см, обусловленное вязкими потерями в объеме жидкости, можно оценить как $\sim L^2/\nu \approx 4 \cdot 10^4$ с. Это время более чем на два порядка больше, чем экспериментально измеренное время затухания, следовательно, вихри проникают в объем жидкости и сильно взаимодействуют с дном и стенками экспериментальной ванны, а также теряют энергию в примесной пленке, образующейся на поверхности воды при длительных измерениях.

В области от 1000 до 1500 с затухание вихревого движения в интервале от 0.3 до 2 см^{-1} закончилось, плотность энергии достигла уровня шума. Однако в круге радиусом 0.3 см^{-1} плотность энергии $W_{0-0.3}$ продолжает экспоненциально уменьшаться до уровня шума.

Таким образом, в процессе затухания решетки вихрей, сформированной взаимодействием нелинейных гравитационных волн на поверхности жидкости, наблюдается нелинейное взаимодействие вихревых течений. Энергия переносится в большие масштабы за счет слияния вихрей решетки. На коротких временах энергия уменьшается экспоненциально в результате затухания стока увлекаемого, а на длинных – из-за вязких потерь.

Затухание крупномасштабных вихрей. Увеличение амплитуды и длительности волновой накачки приводит к формированию на поверхности воды крупномасштабного вихревого течения [19]. При непрерывной накачке вихревая решетка со временем разрушается с образованием вихрей большего

масштаба. В вихревом движении формируется распределение энергии по волновому вектору – прямой каскад энергии [14, 15]. В системе нелинейных волн энергия накачки переносится в крупные масштабы, а затем передается в вихревое движение. Поэтому затухание вихревого движения, сформированного поверхностными волнами, определяется процессами, протекающими как в системе поверхностных волн, так и в вихревом движении. Такими процессами являются нелинейное взаимодействие в системах волн и вихрей, приводящее к перераспределению энергии в пространстве волновых векторов, и перевод энергии волн и вихрей в тепло в результате вязких потерь в объеме жидкости, а также в результате трения о дно и стенки рабочей ванны. Затухание турбулентных распределений в системах капиллярных и гравитационных волн было исследовано недавно в работах [30, 31].

На рисунке 12а показаны треки трассеров из полиамидных частиц, которые сформировались на поверхности воды в результате непрерывной волновой накачки на частоте 6 Гц в течение 20 мин. Хорошо видно, что перед выключением накачки на поверхности успел сформироваться вихрь размером, близким к длине прямоугольной ванны, а также множество мелких вихрей, формирующих решетку с периодом, равным длине волны накачки. В углах ванны расположились смазывающие вихри с завихренностью, противоположной по знаку завихренности большого вихря.

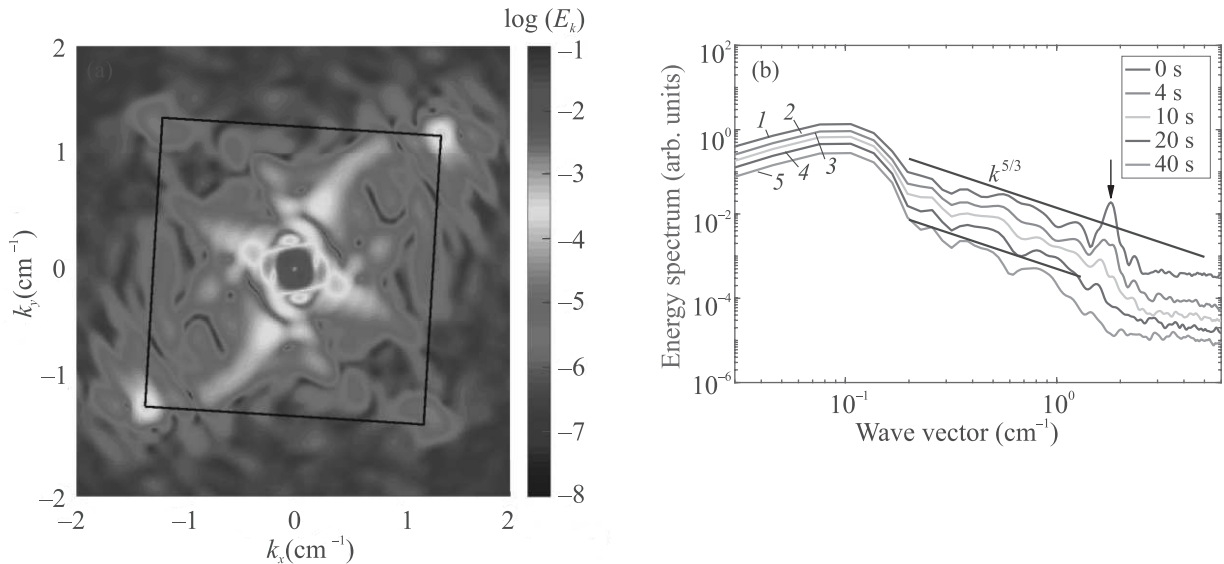


Рис. 13. (Цветной онлайн) (а) – Распределение энергии вихрей $E(k_x, k_y)$ в векторном пространстве через 20 мин после непрерывной волновой накачки на частоте 6 Гц двумя плунжерами. (б) – Одномерное распределение энергии вихревого движения $E(k)$ по волновым векторам. Кривая 1 – после 20 мин непрерывной накачки на частоте 6 Гц, кривые 2–5 – через 4, 10, 20, 40 с после выключения накачки

Через 20 с после выключения накачки на поверхности наблюдается один вихрь максимальных размеров, рис. 12б. В то же время вихри малых размеров на поверхности воды почти полностью исчезли, лишь несколько небольших вихрей наблюдаются в углах ванны.

На рисунке 13 показано распределение вихревой энергии в двумерном векторном пространстве $E(k_x, k_y)$, в диапазоне векторов κ от 0 до 2 см^{-1} , которое сформировалось на поверхности через 20 мин непрерывной накачки двумя плунжерами на частоте 6 Гц. Обратим внимание на присутствие четырех пиков, соединенных прямыми линиями на рис. 13а. Эти пики в распределении вихревой энергии свидетельствуют о формировании на поверхности воды решетки вихрей в результате нелинейного взаимодействия между собой волн частотой 6 Гц [8]. Хорошо видно, что квадрат слегка повернут вокруг центра рис. 13а. Эти изменения положения пиков в κ -пространстве обусловлены “сносом” малых вихрей решетки большим вихрем, сформировавшимся на поверхности воды.

Как видно на рис. 13а, величина смещения узла решетки на уровне $\kappa \approx 1.3 \text{ см}^{-1}$ равна приблизительно $\Delta\kappa \approx 0.2 \text{ см}^{-1}$. Характерное время смещения узла решетки $\Delta\tau$ по порядку величины близко к периоду волны накачки, поэтому положим $\Delta\tau \leq 0.16 \text{ с}$. Полагая, что смещение узлов решетки в реальном пространстве $\Delta L = V_{\text{сн}} \Delta\tau$, где $V_{\text{сн}}$ – скорость смещения

вихря, легко получить оценку для скорости сноса узлов решетки большим вихрем из простого соотношения:

$$\kappa + \Delta\kappa = 2\pi / (L + \Delta L),$$

где L – расстояние между узлами решетки.

Отсюда скорость смещения $V_{\text{сн}} = (2\pi / (\Delta\kappa + \kappa) - L) / \Delta\tau \approx 1 \text{ см/с}$.

С другой стороны, среднюю азимутальную скорость в большом вихре легко оценить из соотношения $\Omega \cdot R / 2 \approx V_{\text{аз}}$, где R – радиус вихря. Подставляя $\Omega = 0.1 \text{ см}^{-1}$, $R = 25 \text{ см}$, получим, что средняя азимутальная скорость $V_{\text{аз}} \approx 1.25 \text{ см/с}$. Найденное значение $V_{\text{аз}}$ оказывается близко к экспериментально найденной скорости смещения вихрей решетки $V_{\text{сн}} \approx 1 \text{ см/с}$. Это свидетельствует в пользу того, что большой вихрь на поверхности воды деформирует решетку вихрей, создаваемую взаимодействием нелинейных волн накачки. Отметим также пики, составляющие ромб вблизи центрального пика. Эти пики свидетельствуют об образовании решетки волнами частотой 3 Гц, возникшими в результате распада волны накачки частотой 6 Гц и распространяющимися под углом друг к другу [15].

Через 20 с после выключения накачки узлы вихревой решетки на поверхности успели затухнуть. Напомним, что энергия в вихревое движение поступает из волнового поля, причем она поступает в узлы вихревой решетки, а затем распространяется по

разным масштабам. На рисунке 13b видно, что к 20-й секунде энергия волнового движения на частоте накачки падает почти в десять раз, так что энергия практически перестает поступать в вихревое движение. Приведенные одномерные распределения вихревой энергии по волновому вектору $E(\kappa)$ были получены в разные моменты времени: распределение 1 сформировалось после 20-ти минут накачки, кривые 2–5 получены через 4, 10, 20 и 40 с после выключения накачки. На кривой 1 четко различаются два пика. Первый пик, отмеченный стрелкой при волновом векторе $\kappa = 1.85 \text{ см}^{-1}$, соответствует энергии, сосредоточенной в вихревой решетке, созданной нелинейными волнами. Второй мощный пик при волновом векторе $\kappa \approx 0.12 \text{ см}^{-1}$ соответствует энергии, сосредоточенной в крупномасштабном вихре, прекрасно видимом на рис. 1a. Распределение энергии в интервале волновых векторов κ от 0.2 до 6 см^{-1} можно описать в среднем степенной функцией, пропорциональной $\kappa^{-5/3}$, характерной для прямых каскадов вихревой энергии на глубокой воде [4]. Турбулентное распределение сформировалось на волновых векторах как выше, так и ниже вектора волны накачки. Через 4 с после выключения накачки (кривая 2) пик на волновом векторе $\kappa = 1.85 \text{ см}^{-1}$ заметно уменьшился, но он еще виден на кривых 3–5, полученных через 10, 20 и 40 с после выключения накачки. Наиболее быстро энергия затухает на волновых векторах, превосходящих 2 см^{-1} . Каскад энергии затухает со стороны больших волновых векторов – край распределения $E(\kappa)$ перемещается в сторону малых волновых векторов. Важно отметить, что все распределения энергии $E(\kappa)$, полученные до 40 с, в интервале волновых векторов $0.2\text{--}2 \text{ см}^{-1}$ можно описать степенной функцией, пропорциональной $\kappa^{-5/3}$. Для наглядности на рис. 13b приведены две прямые линии, пропорциональные $\kappa^{-5/3}$, подчеркивающие сохранение функциональной зависимости. Такое поведение затухания турбулентного каскада свидетельствует о квазистационарном режиме затухания, когда энергия в каскад поступает из области больших масштабов. При этом энергия перераспределяется по каскаду за время нелинейного взаимодействия вихрей, которое много короче времени затухания большого вихря.

Квазиadiaбатическое затухание турбулентного каскада энергии наблюдалось ранее в системе капиллярных волн на поверхности жидкого водорода [30]. Энергия каскада была сосредоточена в основном в первом пике, который, затухая, поставлял энергию в турбулентный каскад. При этом время распростра-

нения энергии по каскаду оказалось значительно меньше характерного времени затухания первого основного пика.

Нужно подчеркнуть, что отмеченный стрелкой на рис. 13b пик энергии на распределении 1 сформировался в результате взаимодействия между собой нелинейных волн накачки. На рисунке 13b хорошо видно, что по мере затухания положение максимума пика смещается в сторону малых волновых векторов: от 1.85 см^{-1} после накачки в течение 20 мин до 1.7 см^{-1} через 40 с после выключения накачки. Как можно оценить из рис. 13b, амплитуда пика энергии большого вихря при $\kappa = 0.12 \text{ см}^{-1}$ за это время уменьшилась более, чем в 4 раза, что привело к уменьшению средней скорости сноса вихрей $V_{\text{сн}}$ вдвое и, соответственно, к ослаблению степени деформации решетки вихрей.

На рисунке 14 представлена зависимость амплитуды пика энергии вихря при волновом векторе

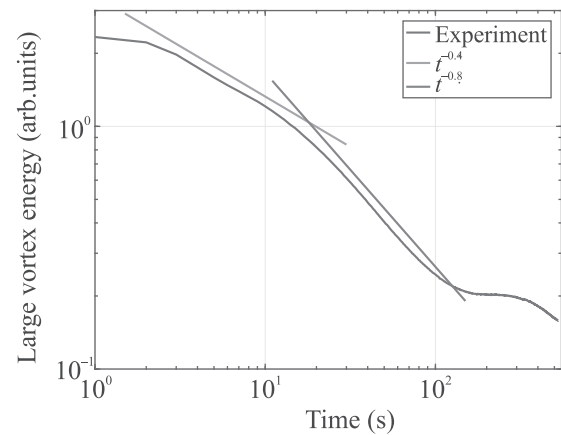


Рис. 14. (Цветной онлайн) Зависимость амплитуды пика энергии вихря при волновом векторе $\kappa = 0.12 \text{ см}^{-1}$ от времени после выключения накачки

$\kappa = 0.12 \text{ см}^{-1}$ от времени после выключения накачки в двойном логарифмическом масштабе. Отчетливо видно, что на зависимости $E(t)$ можно выделить четыре участка. На первом отрезке от 0 до 3 с экспериментальные данные хорошо описываются экспоненциальной функцией $E(t) \sim \exp(-t/\tau_{tn})$ с характерным временем $\tau_{tn} = 8 \pm 1 \text{ с}$. Уменьшение энергии связано с затуханием волнового движения после выключения накачки. Далее хорошо выделяются два участка со степенной зависимостью энергии от времени: на втором участке от 3 до 20 с $E(t) \sim t^{-0.4}$, и на третьем участке от 30 до 100 с $E(t) \sim t^{-0.8}$, где уменьшение энергии обусловлено передачей энергии по каскаду в результате нелинейного взаимодействия большого и малых вихрей. На четвертом участке от

200 до 600 с зависимость $E(t)$ опять близка к экспоненциальной $E(t) \sim \exp(-t/\tau_2)$ с характерным временем $\tau_2 = 930$ с, т.е. наблюдается экспоненциальное затухание классического вихря в результате его трения о стенки и дно ванны [21], так как время вязкого затухания свободного вихря, которое можно оценить как $L^2/\nu \sim 10^5$ с, существенно больше τ_2 .

Таким образом, затухание развитого турбулентного каскада, как показали измерения, происходит в квазиadiaбатическом режиме. В течение длительного времени после выключения накачки, когда транспорт энергии по каскаду обусловлен в основном нелинейным взаимодействием между вихрями, сохраняется степенное распределение энергии по волновому вектору.

Закключение. Процессы формирования вихревого движения нелинейными гравитационными волнами, а также затухание вихрей, определяются экспериментально измеряемыми параметрами: временем затухания волны (стоксово время), временем вязкого затухания волны (эйлерово время) и временем пробега волны накачки от плунжеров до противоположной стенки.

Появление упругой пленки на поверхности жидкости существенно изменяет динамику формирования завихренности и приводит к значительному увеличению эйлерова вклада.

Результаты изучения процессов формирования завихренности после включения накачки можно описать только с учетом вкладов двух механизмов генерации завихренности: стоксова и эйлерова течения.

Завихренность, которая формируется нелинейными поверхностными волнами, проникает в объем жидкости. Распределение завихренности по глубине слоя жидкости хорошо описывается в рамках модели, учитывающей стоксовы и эйлеровы вклады. При формировании вихревой решетки на поверхности энергия переносится в большие масштабы в результате слияния вихрей.

Распад вихревой решетки после выключения накачки происходит в нелинейном режиме. При числах Рейнольдса Re порядка 1000 наблюдается степенная зависимость энергии от времени. На больших временах затухания, при числах Рейнольдса $Re \approx 100$ и менее вихри затухают классически экспоненциально в результате вязких потерь.

Затухание развитого каскада энергии вихревого течения, сформированного на поверхности воды в результате взаимодействия нелинейных волн, происходит в квазиadiaбатическом режиме. Энергия поступает в каскад со стороны большого масштаба, устанавливается прямой каскад, энергия по каскаду пе-

реносится на малые масштабы, где и затухает в результате вязких потерь.

1. V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).
2. А. С. Монин, Г. М. Жихарев, УФН **160**, 1 (1990).
3. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 549 (1980).
4. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
5. A. von Kameke, F. Huhn, G. Fernandez-Garcia, A. P. Muñuzuri, and V. Pérez-Muñuzuri, Phys. Rev. Lett. **107**, 074502 (2011).
6. M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London **121**, 299 (1831).
7. С. В. Филатов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **102**, 486 (2015).
8. S. V. Filatov, V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles, M. Y. Brazhnikov, A. A. Levchenko, and V. V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **116**, 054501 (2016).
9. С. В. Филатов, С. А. Алиев, А. А. Левченко, Д. А. Храмов, Письма в ЖЭТФ **104**, 714 (2016).
10. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, and M. Shats, Phys. Rev. Lett. **110**, 194501 (2013).
11. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, Phys. Rev. X **4**, 021021 (2014).
12. B. H. Burgess and R. K. Scott, J. Fluid Mech. **811**, 742 (2017).
13. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **106**, 633 (2017).
14. С. В. Филатов, Д. А. Храмов, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **106**, 330 (2017).
15. С. В. Филатов, А. В. Орлов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **108**, 550 (2018).
16. O. N. Mesquita, S. Kane, and J. P. Gollub, Phys. Rev. A **45**, 3700 (1992).
17. V. M. Parfenyev and S. S. Vergeles, Phys. Rev. Fluids **3**, 064702 (2018).
18. V. M. Parfenyev, S. V. Filatov, M. Yu. Brazhnikov, S. S. Vergeles, and A. A. Levchenko, Phys. Rev. Fluids **4**, 114701 (2019).
19. С. В. Филатов, Д. А. Храмов, А. М. Лихтер, А. А. Левченко, Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования **12**, 73 (2017).
20. S. V. Filatov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, Physics of Wave Phenomena **27**, 327 (2019).
21. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Fluid Mechanics, Pergamon, N.Y. (1989), v. 6.
22. S. V. Filatov and A. A. Levchenko, Journal of Surface Investigations **14**(4), (2020).

23. S. V. Filatov, A. A. Levchenko, and D. A. Khramov, *Results in Physics* **13**, 102229 (2019).
24. S. V. Filatov, A. A. Levchenko, A. M. Likhter, and L. P. Mezhev-Deglin, *Mater. Lett.* **254**, 444 (2019).
25. С. В. Филатов, А. А. Левченко, М. Ю. Бражников, Л. П. Межов-Деглин, *ПТЭ* **5**, 135 (2018).
26. W. Thielicke and E. J. Stamhuis, *J. Open Research Software* **2**(1), 30 (2014).
27. H. Xia and M. Shats, *Int. J. Mod. Phys. Conference Series* **19**, 257 (2012).
28. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
29. А. А. Пельменев, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 545 (2019).
30. G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, M. Yu. Brazhnikov, L. P. Mezhev-Deglin, A. N. Silchenko, and P. V. E. McClintock, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 074501 (2004).
31. F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon, and M. Berhanu, *Phys. Rev. E* **93**, 043110 (2016).

Магнетоосцилляции заряда полевого транзистора, обусловленные индуцированным микроволновым излучением неравновесным распределением электронов по энергии

С. И. Дорожкин⁺¹⁾, А. А. Капустин⁺, В. Уманский^{*2)}, Ю. Х. Смет^{×2)}

⁺Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черногловка, Россия

^{*}Department of Physics, Weizmann Institute of Science, 76100 Rehovot, Israel

[×]Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, D-70569 Stuttgart, Germany

Поступила в редакцию 6 апреля 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

Подтверждено возникновение под микроволновым излучением неравновесной функции распределения электронов по энергии, порождающей магнетоосцилляции сопротивления двумерных электронных систем. Данное утверждение основывается на наблюдении индуцированного микроволновым излучением изменения заряда полевого транзистора с каналом, образованным двухслойной электронной системой. Наблюдавшиеся периодичность и биения магнетоосцилляций заряда объясняются перераспределением электронов между слоями, происходящим вследствие соответствующего неравновесного заполнения электронных состояний.

DOI: 10.31857/S1234567820100043

Одним из наиболее ярких эффектов в фотоотклике высокоподвижных двумерных электронных систем (ДЭС) на облучение микроволнового диапазона является появление магнетоосцилляций сопротивления (см. обзор [1] и ссылки в нем), периодичность которых в обратном магнитном поле определяется условием $\omega/\omega_c = k$, где $\omega/2\pi$ – частота излучения, $\omega_c = eH/m^*$ – циклотронная частота (H – магнитное поле, перпендикулярное плоскости ДЭС, m^* – эффективная масса электронов), $k = 1, 2, \dots$. Такие осцилляции (в англоязычной литературе *microwave induced resistance oscillations*, MIRO) были обнаружены в двумерных электронных системах на основе гетероструктур GaAs/AlGaAs [2, 3], гетеропереходов ZnO/MgZnO [4], а также в двумерных дырочных системах в гетероструктурах Ge/SiGe [5]. Оказалось, что в условиях эксперимента выполняются обычные соотношения между компонентами тензоров магнетосопротивления и магнетопроводимости [6], и MIRO находятся в фазе с магнетоосцилляциями диссипативной проводимости в силу того, что холловское сопротивление ρ_{xy} значительно больше диссипативного ρ_{xx} . Отметим, что аналогичные осцилляции проводимости наблюдались и в невырожденной элект-

ронной системе на поверхности жидкого гелия [7]. Фактически индуцированные излучением осцилляции диссипативной проводимости были предсказаны [8, 9] задолго до их экспериментального наблюдения. Эти предсказания были основаны на рассмотрении вклада в проводимость ДЭС процессов поглощения фотона, сопровождающихся упругим рассеянием электрона на статических дефектах. Позднее они были подтверждены многочисленными расчетами, базирующимися на этой идее (см., например, работы [10–12]). Для объяснения MIRO был также предложен целый ряд других механизмов, из которых мы упомянем формирование неравновесной функции распределения электронов по энергии [13, 14], классический эффект памяти [15], учитывающий корреляцию актов упругого рассеяния электронов и работающий в отсутствие квантования Ландау, а также многочастичный плазмонный механизм [16]. До настоящего времени не удалось определить экспериментально вклад в MIRO каждого из перечисленных механизмов. Осцилляции с периодом MIRO были также обнаружены в микроволновых фото-ЭДС [17–19] и фототоке, а также в индуцированном излучением изменении заряда полевого транзистора с ДЭС [19]. Последовавшие теоретические работы [20, 21] показали, что эти эффекты возникают в результате загиба зоны проводимости около контак-

¹⁾ e-mail: dorozh@issp.ac.ru

²⁾ V. Umansky, J. H. Smet.

тов, использующихся для измерения фотогальванических сигналов, или около края затвора, как это было предположено в работе [19], и обусловлены нарушением соотношения Эйнштейна между проводимостью и коэффициентом диффузии двумерных электронов в неравновесном состоянии под облучением. В результате оказалось, что перечисленные результаты также могут быть описаны в терминах изменений диссипативной проводимости, происходящих под облучением [20, 21]. Существование механизма, обусловленного неравновесным заполнением электронных состояний, недавно было продемонстрировано в работе [22]. В этой работе в полевом транзисторе с каналом, образованным двумя двумерными слоями электронов, были обнаружены индуцированные излучением магнетоосцилляции емкости (*microwave induced capacitance oscillations*, MICO) с периодом, определяемым разностью плотностей электронов в слоях, дополнительно промодулированные на частоте MIRO. Было показано, что эти осцилляции могут быть результатом перераспределения электронов между слоями, происходящего вследствие формирования под облучением неравновесной функции распределения электронов по энергии, способной объяснить возникновение и периодичность MIRO. В данной работе мы сообщаем о наблюдении подобных MICO магнетоосцилляций в заряде полевого транзистора с двухслойной электронной системой, демонстрируем их связь с перераспределением электронов между слоями, а также обсуждаем возможность одновременного объяснения этих осцилляций с наблюдавшимися MIRO.

Схема образца и измерительная схема приведены на рис. 1. Исследуемая квазидвумерная электронная система создавалась в квантовой яме GaAs шириной 60 нм, входящей в состав гетероструктуры GaAs/AlGaAs. На расстоянии 850 нм ниже (на рис. 1 левее) квантовой ямы был создан слой сильно легированного GaAs, выполняющий роль затвора полевого транзистора (Backgate). Электроны в квантовую яму поступали из слоя доноров (DL), расположенного на расстоянии 65 нм над ямой, создавая слой L1, а также из источника постоянного напряжения, включенного между затвором и электронной системой. Плотность электронов в квантовой яме n_s контролировалась затворным напряжением V_{BG} и изменялась в пределах $(1.7-2.4) \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, определяемых отсутствием токов утечки. При $V_{BG} < 0.15 \text{ В}$ ($n_s < 1.8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$) в яме заполнена только одна подзона размерного квантования, соответствующая слою L1 около верхней стенки ямы. При $V_{BG} > 0.15 \text{ В}$ около нижней стенки ямы возникает второй слой

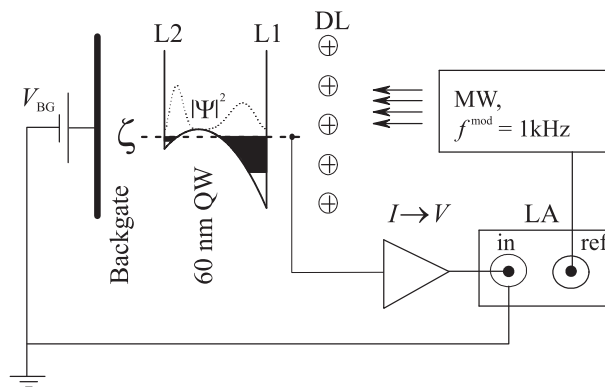


Рис. 1. Схема образца и измерений фототока, индуцированного модулированным по мощности микроволновым излучением. Показан профиль дна асимметричной квантовой ямы GaAs (QW) шириной 60 нм, в которой заполнены две подзоны размерного квантования (темные области), соответствующие двум слоям электронов L1 и L2, расположенным около дальней и ближней к затвору (Backgate) стенок ямы. ζ – общий уровень электрохимического потенциала слоев. Пунктирными линиями схематически показано распределение плотности электронов в яме. DL – слой положительно заряженных доноров. Усилитель тока ($I \rightarrow V$) подключен к исследуемой электронной системе. Сигнал с выхода усилителя подается на вход фазочувствительного детектора (Lock-in Amplifier, LA). При измерениях фототока используется 100 %-ная модуляция мощности излучения частотой 1 кГц

электронов L2 (вторая подзона). При этом наблюдается скачок емкости между затвором и электронной системой, соответствующий уменьшению расстояния между ними примерно на 34 нм (см. сплошную кривую на рис. 4b). Омические контакты к электронной системе и затвору создавались контролируемой диффузией сплава NiGeAu с поверхности образца на глубину масштаба 300 нм. При этом области над контактами к затвору были предварительно протравлены. В результате контакты к электронной системе закорачивают оба слоя и остаются изолированными от затвора. Электроны в разных слоях имеют одинаковый электрохимический потенциал ζ . Образец имеет латеральную геометрию холловского мостика, обеспечивающую измерения магнетосопротивления и холловского сопротивления. Во всем исследованном интервале плотностей электронов среднее значение их подвижности, определенное из величин проводимости и плотности электронов, оставалось выше $4 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{Вс}$. Для измерений переменного тока между затвором и электронной системой использовались токовый усилитель SR 570 ($I \rightarrow V$ на рис. 1) и фазочувствительный детектор (Lock-in Amplifier SR

830). При измерениях индуцированного излучением тока заряда полевого транзистора в качестве опорного сигнала детектора использовался сигнал модуляции мощности микроволнового излучения частотой $f^{\text{mod}} = 1$ кГц. Измерялись как компонента тока в фазе с модуляцией мощности, так и сдвинутая относительно нее на 90° . Модуляция мощности была близка к 100%. Частота микроволнового излучения могла меняться в диапазоне от 54 до 78 ГГц. При измерениях емкости затворное напряжение дополнительно модулировалось сигналом от низкочастотного генератора напряжения, входящего в состав Lock-in Amplifier. Этот сигнал одновременно являлся и опорным (подробнее см. работы [23, 24]). При измерениях емкости мощность излучения была постоянной во времени. Образец помещался в сверхразмерном волноводе, представляющем собой тонкостенную трубку из нержавеющей стали диаметром 18 мм, и был погружен в жидкий ^3He , откачкой паров которого поддерживалась температура $T = 0.5$ К. Образец был ориентирован таким образом, что плоскость квантовой ямы была перпендикулярна оси волновода, которая, в свою очередь, параллельна магнитному полю сверхпроводящего соленоида.

На рисунке 2 приведен основной результат работы, состоящий в наблюдении при заполнении двух

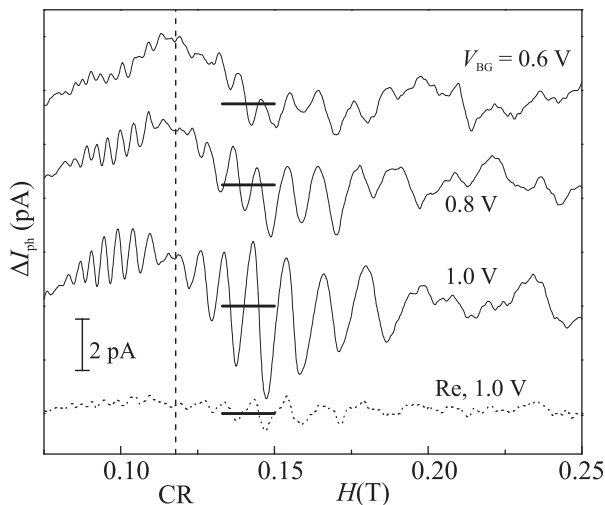


Рис. 2. Зависимости 90-градусной компоненты фототока (сплошные линии) от магнитного поля для различных значений затворного напряжения, указанных около кривых. Нулевые уровни сигнала показаны горизонтальными отрезками. Измерения выполнены под облучением частоты 54 ГГц, модулированным по мощности. Пунктирной кривой показана компонента фототока в фазе с сигналом модуляции мощности, измеренная при $V_{\text{BG}} = 1.0$ В. Вертикальная пунктирная линия отмечает положение циклотронного резонанса (CR)

электронных слоев магнетоосцилляций фототока, индуцированного микроволновым излучением модулированной мощности. Эти осцилляции соответствуют магнетоосцилляциям заряда полевого транзистора (*microwave induced charge oscillations*, МИСО) при постоянной мощности излучения. На осцилляционной картине в положении циклотронного резонанса хорошо виден узел биений осцилляций. Как следует из приведенных данных, в фототоке доминирует компонента, сдвинутая на 90° относительно осциллирующей во времени мощности излучения. В дальнейшем под фототоком будет пониматься именно эта компонента. Период магнетоосцилляций и их амплитуда возрастают с затворным напряжением, а положение узла биений не изменяется.

Для сравнения данных, получаемых разными методами, на рис. 3 результаты измерений емкости полевого транзистора (панель (a)), фототока (панель (b)), и магнетосопротивления (панель (c)) представлены в функции обратной величины магнитного поля. Для емкости и магнетосопротивления приведены данные, измеренные как под облучением, так и в его отсутствии. Очевидно, что облучение радикально меняет картины магнетоосцилляций этих величин. Анализ приведенных кривых показывает периодичность всех сигналов по обратному магнитному полю и наличие четырех разных периодов. Два периода наблюдаются на магнетоемкости (Δ_{DOS} на кривой без облучения и Δ_{MISO} на кривой под облучением) и на магнетосопротивлении (Δ_1 без облучения и Δ_{MRO} под облучением). Периодичность и форма осцилляций фототока оказались совпадающими с осцилляциями МИСО. В частности, на обеих кривых наблюдаются узлы осцилляций, положения которых совпадают с положениями точек нулевого фотоотклика в магнетосопротивлении (точки совпадения кривых под облучением и без него на рис. 3c), определяющим условием [1] $\omega/\omega_c = (k+1)/2$. Отметим, что индуцированные излучением осцилляции, особенно в магнетосопротивлении, наблюдаются в заметно более слабых полях, чем темновые осцилляции. Остановимся подробнее на определении периодов осцилляций, часть из которых будем характеризовать величинами плотности электронов, вычисляемых из соотношения $n_{\text{sj}} = 2e/h\Delta_j$. Это соотношение определяет период квантовых осцилляций плотности состояний на уровне Ферми в ДЭС с плотностью электронов n_{sj} , а также величин, связанных с этой плотностью (например, осцилляций Шубникова–де Гааза и сжимаемости электронной системы). Коэффициент 2 в этой формуле соответствует двухкратному спиновому вырождению уровней Ландау. Осцилляции

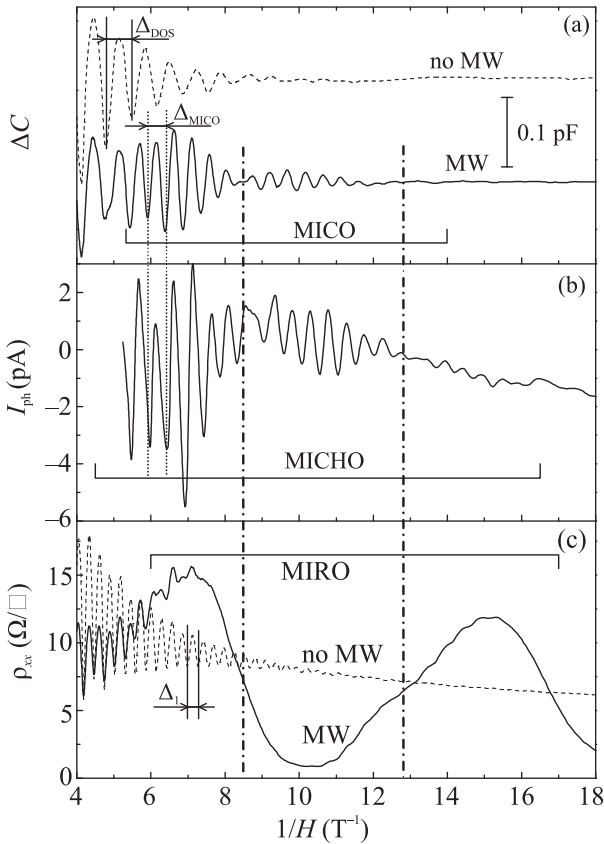


Рис. 3. Магнетоосцилляции различных сигналов (магнетоемкости (а), фототока (b) и магнетосопротивления (с)), измеренные при заполнении двух слоев ($V_{BG} = 1.0$ В) под микроволновым излучением частоты 54 ГГц (сплошные кривые) и в отсутствие облучения (пунктирные кривые). Фототок (панель (b)) измерялся под облучением, модулированным по мощности. Отмечены индуцированные микроволновым излучением магнетоосцилляции емкости (MICO, панель (a)), заряда полевого транзистора (MICH0, панель (b)), и магнетосопротивления (MIRO, панель (c)). Вертикальные штрих-пунктирные линии отмечают значения магнитных полей, при которых выполняются условия $\omega/\omega_c = 1$ (левая линия) и $\omega/\omega_c = 3/2$ (правая линия)

на темновой кривой магнетосопротивления являются осцилляциями Шубникова – де Гааза, а низкочастотные осцилляции под облучением представляют собой индуцированные излучением осцилляции сопротивления с периодом $\Delta_{MIRO} = e/m^*\omega$, который никак не связан с плотностью электронов. Оказалось, что в исследованном образце темновые осцилляции магнетосопротивления практически полностью определяются электронами слоя L1, имеющими большие плотность и подвижность. При заполнении двух слоев их период $\Delta_1 = 2e/hn_{s1}$ практически не зависит от затворного напряжения (см. треугольники на рис. 4b) вследствие слабой зависи-

мости n_{s1} от V_{BG} , являющейся результатом экранировки электрического поля в полевом транзисторе электронами слоя L2. Этот факт был дополнительно подтвержден сравнением полной плотности электронов в системе, полученной из измерений холловского сопротивления, и плотности электронов в слое L2 [22]. Осцилляции на темновых кривых магнетоемкости при заполнении двух электронных слоев происходят от квантовых осцилляций сжимаемости электронов [25] в слое L2, ближайшем к затвору [22, 23]. Их период $\Delta_{DOS} = 2e/hn_{s2}$ определяется плотностью электронов n_{s2} в этом слое и уменьшается (см. емкостные кривые на рис. 4а) при увеличении V_{BG} , что соответствует возрастанию n_{s2} (темные точки на рис. 4b). Отметим, что, как это следует из данных на рис. 2, период магнетоосцилляций фототока меняется прямо противоположным образом (см. квадраты на рис. 4b). Оказалось, что сопоставленная этому периоду плотность электронов n_l равна разности плотностей электронов в слоях $n_{s1} - n_{s2}$ (сравни круги и квадраты на рис. 4b).

Совпадение осцилляционной картины в фототоке с MICO (рис. 3) свидетельствует об их общей природе. В работе [22] возникновение и периодичность индуцированных излучением осцилляций емкости были связаны с перераспределением электронов между слоями, обусловленном формированием неравновесной функции распределения по энергии, которая для двухслойной электронной системы была получена в работе [26]. При этом изменение плотности электронов в слоях имеет вид [22]:

$$\delta n_{s1} = -\delta n_{s2} = -d_1 d_2 \frac{m^* \hbar \omega}{\pi \hbar^2} \frac{P_\omega}{4} \sin \frac{2\pi\omega}{\omega_c} \sin \frac{2\pi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\hbar\omega_c}. \quad (1)$$

Здесь n_{sj} – плотности электронов в слоях ($j = 1, 2$), ε_j – соответствующие энергии доньев подзон размерного квантования, $d_j = \exp(-\pi/\omega_c \tau_j)$ – факторы Дингла в подзонах, τ_j – квантовые времена релаксации электронов, P_ω – безразмерный фактор, пропорциональный мощности микроволнового излучения, поглощаемой ДЭС.

Формула (1) была получена в предположении неизменности полного заряда в электронной системе, т.е. ее изолированности от внешних источников. В таком случае перераспределение электронов должно приводить к изменению разности потенциалов между затвором и электронной системой. В нашем эксперименте разность потенциалов является заданной, так что следует ожидать, что перераспределение электронов изменит полный заряд электронной системы. Очевидно, что это изменение заряда должно

быть пропорционально изменению плотности электронов $\delta n_{s2} = -\delta n_{s1}$. На основании этих соображений при использовании модулированного по мощности излучения ($P_\omega(t) \propto \sin(2\pi f^{\text{mod}}t)$) следует ожидать появления тока перезарядки полевого транзистора

$$I_{\text{ph}} \propto \frac{d\delta n_{s2}}{dt} \propto d_1 d_2 \cos(2\pi f^{\text{mod}}t) \sin \frac{2\pi\omega}{\omega_c} \sin \frac{2\pi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\hbar\omega_c}. \quad (2)$$

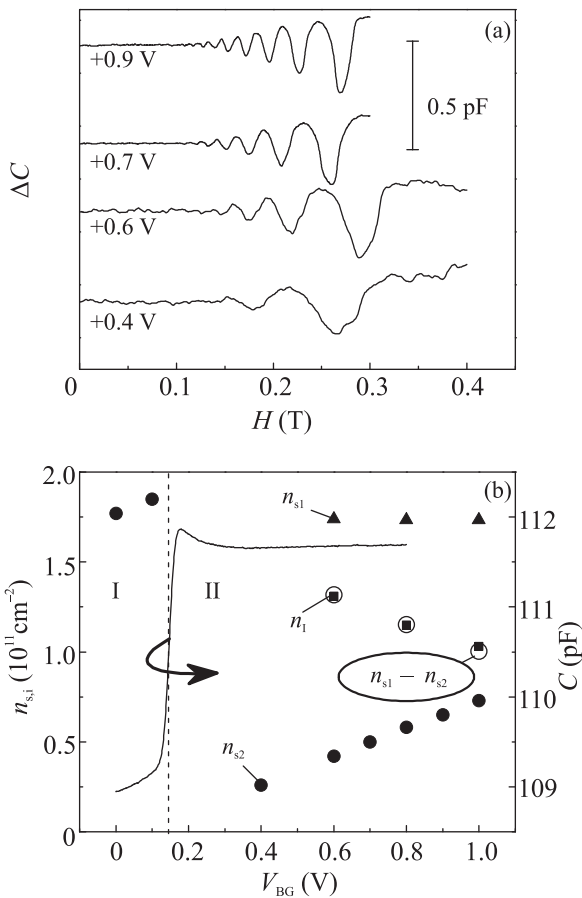


Рис. 4. (а) – Зависимость темновой емкости полевого транзистора от магнитного поля для различных значений затворного напряжения, указанных около кривых. (б) – Зависимости от затворного напряжения плотности электронов в слоях L1 (n_{s1} , треугольники) и L2 (n_{s2} , точки), плотности n_l , определенной из периода магнетоосцилляций фототока (квадраты), а также разности плотностей $n_{s1} - n_{s2}$ (круги). Значения соответствующих величин определяются левой осью. Сплошной линией показана зависимость темновой емкости полевого транзистора от затворного напряжения при $H = 0$ (правая ось)

Эта формула полностью согласуется с полученными нами результатами, как по фазе наблюдаемо-

го фототока, так и по виду его осцилляционной зависимости от величины магнитного поля. Действительно, нетрудно проверить, что установленная экспериментально периодичность осцилляций фототока совпадает с описываемой формулой (2) в силу одновременного выполнения условий $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = k\hbar\omega_c$ и $(n_{s1} - n_{s2}) = 2keH/h$, $k = 1, 2, \dots$ при соизмеримости межподзонального и циклотронного расщеплений. В условиях эксперимента $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \gg \hbar\omega$, так что последний множитель в формуле (2) описывает высокочастотные магнетоосцилляции, а множитель $\sin 2\pi\omega/\omega_c$ модулирует их амплитуду, приводя к узлам биений при $\omega = (k + 1)\omega_c/2$ (см. рис. 2 и 3b). Сильное монотонное затухание амплитуды осцилляций при уменьшении магнитного поля связано с факторами Дингла.

Из данных рисунка 3b можно оценить максимальное наблюдаемое изменение числа электронов в системе: $\Delta N \simeq 10^4$. Для сравнения, полное число электронов в исследованном образце при $V_{\text{BG}} = 0$ равно $N \simeq 10^9 \gg \Delta N$.

Остановимся на отличии наших результатов для магнетосопротивления от полученных ранее в работах [27, 26] на образцах с двухслойными электронными системами, создаваемыми в двойных квантовых ямах, где на темновых кривых наблюдались магнетоосцилляции межподзонального рассеяния (MISO) с периодом $\Delta_{\text{MISO}} = 2e/h(n_{s1} - n_{s2})$, а под облучением возникала интерференция MISO и MIRO. Хотя отсутствие в наших данных осцилляций магнетосопротивления, обусловленных межподзональным рассеянием, могло бы быть связано с его малой вероятностью [28], возможно, усиливающейся под облучением (см., например, [29, 30]), на наш взгляд, более вероятным объяснением является выполнение в исследованном образце соотношения $d_1 \gg d_2$. Действительно, как следует из формулы (10) работы [26], при таком условии в темновых кривых магнетосопротивления доминируют осцилляции Шубникова–де Гааза от слоя L1, а облучение приводит только к появлению MIRO, аналогично однослойной электронной системе, как это и наблюдается на рис. 3с. Перераспределение же заряда описывается формулой (1) независимо от соотношения между d_1 и d_2 . Отметим, что аналогичное различие между факторами Дингла ($d_1 \gg d_2$) было обнаружено в работе [31], выполненной на подобном образце с задним затвором.

В заключение, в полевом транзисторе с двухслойной электронной системой обнаружен эффект индуцированного микроволновым излучением изменения заряда, величина которого осциллирует в функции обратного магнитного поля. Осцилляционная кар-

тина формируется магнетоосцилляциями двух разных частот. Период высокочастотных осцилляций не зависит от частоты микроволнового излучения и определяется условием кратности разности плотностей электронов в слоях вырожденности уровня Ландау, что эквивалентно соизмеримости межподзонного расщепления и циклотронной энергии. Низкочастотные осцилляции отражают соизмеримость круговой частоты излучения и циклотронной частоты электронов. Такая картина магнетоосцилляций заряда радикально отличается от наблюдавшейся в работе [19], где в полевом транзисторе с однослойной электронной системой наблюдались осцилляции только меньшей из частот. Объяснение полученных результатов оказывается возможным только при использовании неравновесной функции распределения электронов по энергии, предложенной для описания индуцированных излучением магнетоосцилляций сопротивления двумерных электронных систем.

В. Уманский и Ю. Х. Смет благодарны German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development (GIF) за поддержку.

1. I. A. Dmitriev, A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, and M. A. Zudov, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1709 (2012).
2. M. A. Zudov, R. R. Du, J. A. Simmons, and J. L. Reno, *Phys. Rev. B* **64**, 201311(R) (2001).
3. P. D. Ye, L. W. Engel, D. C. Tsui, J. A. Simmons, J. R. Wendt, G. A. Vawter, and J. L. Reno, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 2193 (2001).
4. D. F. Kärcher, A. V. Shchepetilnikov, Yu. A. Nefyodov, J. Falson, I. A. Dmitriev, Y. Kozuka, D. Maryenko, A. Tsukazaki, S. I. Dorozhkin, I. V. Kukushkin, M. Kawasaki, and J. H. Smet, *Phys. Rev. B* **93**, 041410(R) (2016).
5. M. A. Zudov, O. A. Mironov, Q. A. Ebner, P. D. Martin, Q. Shi, and D. R. Leadley, *Phys. Rev. B* **89**, 125401 (2014).
6. C. L. Yang, M. A. Zudov, T. A. Knuttila, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 096803 (2003).
7. R. Yamashiro, L. V. Abdurakhimov, A. O. Badrutdinov, Yu. P. Monarkha, and D. Konstantinov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 256802 (2015).
8. В. И. Рыжий, *ФТТ* **11**, 2577 (1969).
9. В. И. Рыжий, Р. А. Сурис, Б. С. Щамахалова, *ФТП* **20**, 2078 (1986).
10. A. C. Durst, S. Sachdev, N. Read, and S. M. Girvin, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 086803 (2003).
11. V. Ryzhii and R. Suris, *J. Phys: Condens. Matter* **15**, 6855 (2003).
12. X. L. Lei and S. Y. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226805 (2003).
13. S. I. Dorozhkin, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 681 (2003).
14. I. A. Dmitriev, M. G. Vavilov, I. L. Aleiner, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. B* **71**, 115316 (2005).
15. Y. M. Beltukov and M. I. Dyakonov, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 176801 (2016).
16. В. А. Волков, Э. Е. Тахтамиров, *ЖЭТФ* **131**, 681 (2007).
17. R. L. Willett, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 026804 (2004).
18. А. А. Быков, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 281 (2008).
19. S. I. Dorozhkin, I. V. Pechenezhskiy, L. N. Pfeiffer, K. W. West, V. Umansky, K. von Klitzing, and J. H. Smet, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 036602 (2009).
20. I. A. Dmitriev, S. I. Dorozhkin, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **80**, 125418 (2009).
21. S. I. Dorozhkin, I. A. Dmitriev, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **84**, 125448 (2011).
22. S. I. Dorozhkin, A. A. Kapustin, V. Umansky, K. von Klitzing, and J. H. Smet, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 176801 (2016).
23. S. I. Dorozhkin, A. A. Kapustin, I. B. Fedorov, V. Umansky, K. von Klitzing, and J. H. Smet, *J. Appl. Phys.* **123**, 084301 (2018).
24. А. А. Капустин, С. И. Дорожкин, И. Б. Федоров, В. Уманский, Ю. Х. Смет, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 407 (2019).
25. T. P. Smith, B. B. Goldberg, P. J. Stiles, and M. Heiblum, *Phys. Rev. B* **32**, 2696 (1985).
26. S. Wiedmann, G. M. Gusev, O. E. Raichev, T. E. Lamas, A. K. Bakarov, and J. C. Portal, *Phys. Rev. B* **78**, 121301(R) (2008).
27. А. А. Быков, Д. Р. Исламов, А. В. Горан, А. И. Торопов, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 563 (2008).
28. N. C. Mamani, G. M. Gusev, T. E. Lamas, A. K. Bakarov, and O. E. Raichev, *Phys. Rev. B* **77**, 205327 (2008).
29. А. А. Быков, И. С. Стрыгин, А. В. Горан, Е. Е. Родякина, Д. В. Номоконов, И. В. Марчишин, С. Абеди, С. А. Виткалов, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 671 (2019).
30. А. А. Быков, И. С. Стрыгин, А. В. Горан, Д. В. Номоконов, И. В. Марчишин, А. К. Бакаров, Е. Е. Родякина, А. В. Латышев, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 337 (2019).
31. M. A. Zudov, I. A. Dmitriev, B. Friess, Q. Shi, V. Umansky, K. von Klitzing, and J. Smet, *Phys. Rev. B* **96**, 121301(R) (2017).

Формирование ω -фазы высокого давления в системе титан–железо при сдвиговой деформации

Б. Б. Страумал^{a,b,c,d1}, А. Р. Кильмаметов^{b,d}, А. А. Мазилкин^{a,d}, А. С. Горнакова^a, О. Б. Фабричная^e,
М. Й. Кригель^e, Д. Рафайя^e, М. Ф. Булатов^f, А. Н. Некрасов^g, Б. Барецки^d

^a Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

^b Научный центр РАН в Черноголовке, 142432 Черноголовка, Россия

^c Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”, 119049 Москва, Россия

^d Institute of Nanotechnology, Karlsruhe Institute of Technology, 76344 Eggenstein-Leopoldshafen, Germany

^e TU Bergakademie Freiberg, Institute of Materials Science, 09599 Freiberg, Germany

^f Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, 117342 Москва, Россия

^g Институт экспериментальной минералогии РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 11 апреля 2020 г.

После переработки 15 апреля 2020 г.

Принята к публикации 15 апреля 2020 г.

В данной работе изучено $(\alpha + \beta) \rightarrow \omega$ превращение под воздействием сдвиговой деформации в условиях высокого приложенного давления в сплаве Ti–4 масс. % Fe. Для деформирования сдвигом посредством кручения под высоким давлением (КВД) использовались два исходных состояния сплава, существенно различающихся по морфологии фаз и концентрации атомов железа в β -фазе. При КВД наступает стационарное состояние, в котором оба образца содержат ω -фазу высокого давления с размером зерен около 200 нм и содержанием железа, близким к номинальным 4 масс. % Fe. Таким образом, это состояние при КВД эквивалентно и не зависит от исходного структурно-фазового состава образцов. Обнаружено, что под воздействием КВД в сплавах Ti–4 масс. % Fe происходят не только мартенситные (сдвиговые) превращения в ω -фазу, но и значительный массоперенос атомов легирующего элемента. Анализ изменения крутящего момента непосредственно в процессе КВД позволил оценить скорость деформационно-индуцированного массопереноса. Скорость массопереноса на 18–19 порядков выше скорости обычной термической диффузии при температуре обработки $T_{НРТ} = 30^\circ\text{C}$, при этом она близка к значениям диффузионного массопереноса при некоторой повышенной температуре $T_{\text{eff}} = 700\text{--}800^\circ\text{C}$. Это связано с тем, что КВД повышает концентрацию дефектов решетки, что в свою очередь эквивалентно повышению температуры. Подобная комбинация ускоренного массопереноса при КВД и мартенситного (сдвигового) превращения наблюдалась нами ранее в сплавах Cu–Al–Ni с памятью формы, однако впервые изучена при формировании ω -фазы высокого давления в титановых сплавах.

DOI: 10.31857/S1234567820100055

Интенсивная пластическая деформация (ИПД) и, в частности, кручение под высоким давлением (КВД), может вызывать разнообразные фазовые превращения в твердых телах [1–7]. Среди них превращения кристаллических фаз в аморфные [8–12], а аморфных – в кристаллические [8, 13, 14]. ИПД может приводить и к конкуренции между распадом и формированием пересыщенного твердого раствора при растворении частиц второй фазы [6, 15–17]. К превращениям, вызванным ИПД, относятся и переходы между аллотропными модификациями веществ,

и, в частности – образование ω -фазы высокого давления в сплавах на основе титана, циркония и гафния [18–25]. Фазовые превращения при ИПД могут быть как мартенситными (сдвиговыми) [26–28], так и диффузионными (с переносом массы) [6, 15, 17, 28–32]. Наряду с фазовыми превращениями, при ИПД происходят и обычные для этого процесса изменения микроструктуры, и, в частности – измельчение зерен, а также упрочнение по механизму Холла–Петча [27]. В последнем случае речь идет том, что при уменьшении размера зерен возникает множество новых границ зерен, которые препятствуют движению дисло-

¹)e-mail straumal@issp.ac.ru

каций и, таким образом, увеличивают прочность материала.

Важной особенностью ИПД является то, что материал под воздействием приложенного давления поставлен в такие геометрические условия, что может накапливать предельно высокие степени деформации без своего разрушения [4, 6]. При этом понятно, что накопление дефектов решетки под воздействием деформации не может происходить бесконечно. Это означает, что в материале при ИПД начинаются процессы релаксации, и их скорость растет до тех пор, пока процессы образования дефектов и их аннигиляции не компенсируют друг друга. Тогда наступает стационарное состояние, в котором характеристики микроструктуры и фазовый состав перестают изменяться при дальнейшем увеличении деформации. Интересно отметить, что эти параметры в стационарном состоянии, как оказалось, практически не зависят от исходных структуры и свойств материала. Иными словами, стационарному состоянию при ИПД свойственна так называемая эквивиальность [33]. Это означает, что на структуру и свойства материала в стационарном состоянии влияют параметры деформирования (давление, температура, скорость деформации), но не исходное состояние. В то же время, очевидно, что путь от исходного состояния к стационарному будет сильно зависеть от исходного состояния материала. Исследование особенностей этого пути является целью данной работы.

В качестве объекта для исследования мы выбрали сплав Ti–4 масс. % Fe. В нашей недавней работе мы обнаружили, что в этом сплаве КВД вызывает практически стопроцентный переход β - и α -фаз в ω -фазу высокого давления [26]. Показано, что при добавлении железа в титан уменьшается период решетки β -фазы и ω -фазы. В результате при 4 масс. % Fe соотношение между параметрами элементарной ячейки между исходной β -фазой и ω -фазой становится практически идеальным, и сдвиг группы атомов в зернах β -фазы приводит к достаточно быстрому переходу в ω -фазу уже на ранних стадиях КВД. Это превращение идет по мартенситному (сдвиговому) механизму, без переноса массы. Если концентрация железа в титане меньше или больше четырех процентов, то объемная доля ω -фазы после воздействия КВД уменьшается. Более того, при фазовом превращении $(\alpha + \beta) \rightarrow \omega$ возникает деформационно-индуцированный массоперенос, и оно не остается полностью мартенситным [26]. В работе мы также обнаружили, что результат этого превращения практически не зависит от исходной доли α - и β -фаз в образце [26], поэтому данный объект представляется

нам идеальным для исследования путей превращения $(\alpha + \beta) \rightarrow \omega$ и достижения стационарного состояния с близкой к 100 % долей ω -фазы при кручении под высоким давлением.

Сплав Ti–4 масс. % Fe для наших опытов был выплавлен с помощью индукционной плавки в вакууме (из титана и железа чистотой 99.9 масс. %) в виде слитков диаметром 10 мм. Методом электронно-скоровой резки их разрезали на диски толщиной 0.7 мм. Эти диски были запаены в вакуумированные кварцевые ампулы с остаточным давлением $4 \cdot 10^{-4}$ Па. Ампулы с образцами отжигали в печи сопротивления СУОЛ при температурах 800 °С, 100 ч и 615 °С, 270 ч. Точки, соответствующие температурам отжига и концентрациям сплава с 4 масс. % железа, лежали на фазовой диаграмме Ti–Fe в области α Ti + β Ti [34]. После отжигов образцы закачивали в воду (ампулы при этом разбивали). После отжигов и закалки образцы подвергали КВД в камере с наковальнями Бриджмена (фирма W. Klement GmbH, Ланг, Австрия) при комнатной температуре, давлении 7 ГПа, 5 оборотов наковален со скоростью 1 об/мин. Образцы для структурных исследований механически шлифовали и полировали на алмазной пасте зернистостью до 1 мкм. Образцы после КВД вырезали на расстоянии 3 мм от центра деформированного диска. Полученные шлифы изучали с помощью растровой электронной микроскопии (РЭМ) и рентгеновского микроанализа на приборе Tescan Vega TS5130 MM, оборудованном энергодисперсионным спектрометром LINK производства фирмы Oxford Instruments. Рентгеновские дифрактограммы были получены в геометрии Брэгга–Брентано на порошковом дифрактометре Philips X'Pert с использованием излучения Cu-K α . Параметр решетки определяли с помощью программы "Fityk" [35]. Фазы в сплавах идентифицировали сравнением с данными банка фаз X'Pert HighScore Panalytical. Просвечивающая электронная микроскопия (ПЭМ) была выполнена на микроскопе TECNAI G2 FEG super TWIN (200 кВ), оборудованном энергодисперсионным спектрометром производства фирмы EDAX. Тонкопленочные образцы для ПЭМ были изготовлены методом электрополировки на устройстве Electrolyte D2 производства фирмы Struers.

Температуры отжига наших образцов были выбраны в области $\alpha + \beta$ фазовой диаграммы Ti–Fe таким образом, что температура 800 °С лежит вблизи линии транзуса (транзусом называется граница между областью $\alpha + \beta$ и однофазной β -областью на фазовой диаграмме сплавов титана). Таким образом, при температуре 800 °С, в соответствии с фа-

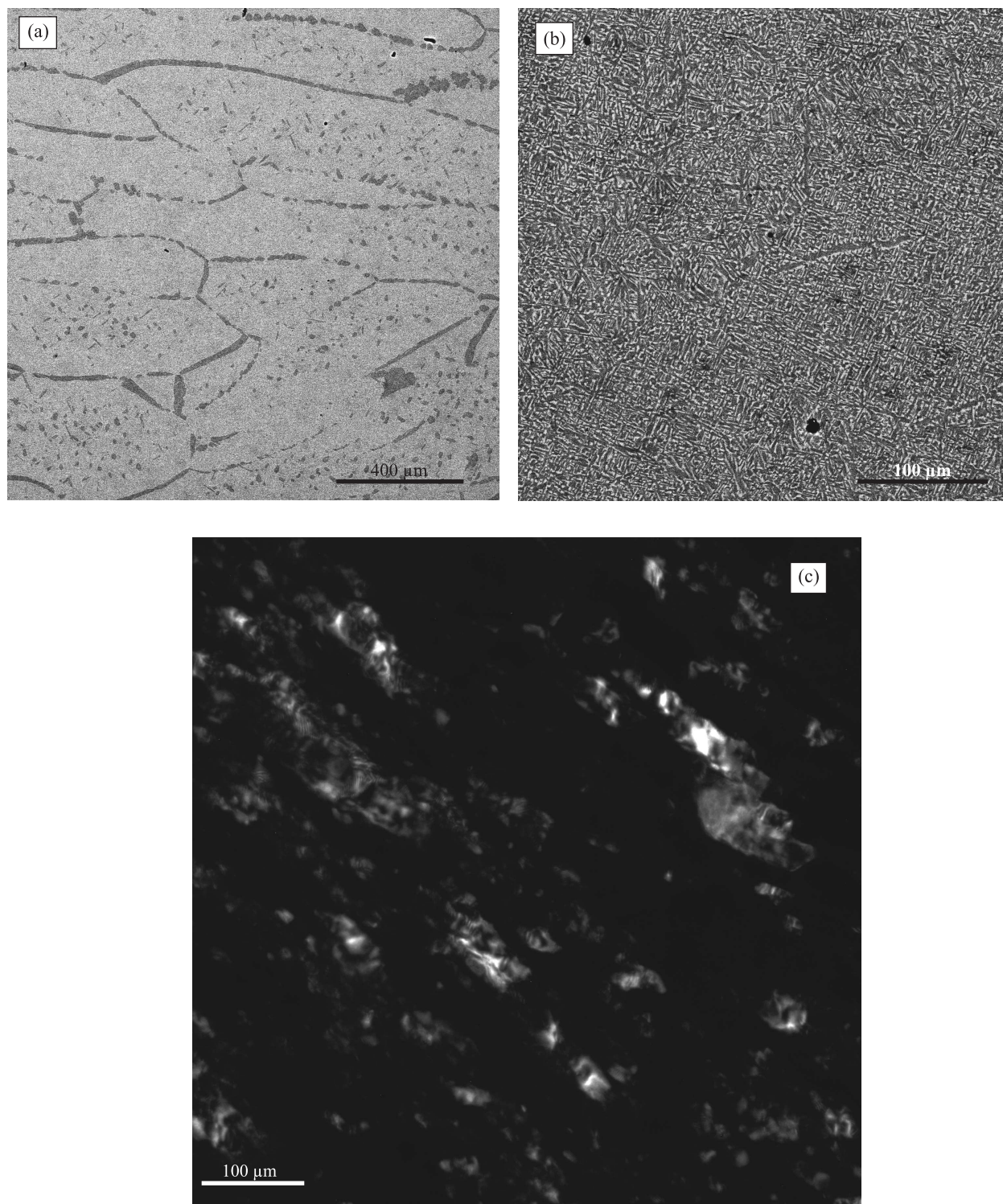


Рис. 1. РЭМ микрофотографии сплава Ti – 4 масс. % Fe, отожженного при 800°С, 100 ч (а) и 615°С, 270 ч (б). (с) – Темнопольная ПЭМ микрофотография того же сплава после КВД при 5 оборотах

зовой диаграммой, образец должен содержать большую объемную долю β -фазы и небольшое количество α -фазы. Температура 615°С тоже находится в

двухфазной области $\alpha + \beta$, но она лишь ненамного выше, чем температура эвтектидного превращения β -фазы в смесь α -фазы и интерметаллида TiFe [34].

На рисунке 1а приведена РЭМ-микрофотография образца, отожженного при температуре 800 °С. β -фаза на этой микрофотографии выглядит светло-серой, а α -фаза – темно-серой. Хорошо видно, что – как и ожидалось – β -фаза преобладает в объеме образца. При этом α -фаза располагается как в объеме зерен β -фазы в виде небольших частиц, так и по границам зерен β/β в виде сплошных прослоек или в виде цепочек частиц. В этом случае мы имеем дело с явлением так называемого “смачивания” границ зерен прослойками второй твердой фазы [36–39]. Это явление было нами подробно изучено для целого ряда сплавов на основе титана [36, 40–44], оно наблюдается, как правило, в двухфазной $\alpha + \beta$ области фазовой диаграммы. При высокой температуре α -фаза практически полностью “смачивает” все границы зерен в β -фазе, а при понижении температуры доля границ в β -фазе, полностью “смоченных” прослойками α -фазы, постепенно понижается [40–44]. Так, на рисунке 1b хорошо видно, что, действительно, доля α -фазы при температуре отжига 615 °С намного выше, чем при температуре 800 °С. При этом лишь отдельные границы между зернами β -фазы полностью покрыты прослойками α -фазы. При низких температурах полностью “смоченными” остаются границы зерен с наибольшей энергией [45]. На рисунке 1с приведена темнопольная ПЭМ микрофотография того же сплава после КВД при 5 оборотах. Видно, что зерна после КВД не вполне равноосны, а слегка вытянуты в направлении деформации, а их размер составляет 200 нм.

На рисунке 2 приведен ряд рентгеновских дифрактограмм изученного сплава после отжигов перед КВД, а также после КВД. Дифракционный спектр образца после отжига при температуре 800 °С (верхняя кривая на рис. 2а), действительно, содержит пики α - и β -фаз, причем доля α -фазы в этом образце сравнительно ниже, чем в другом исследованном состоянии. Соответственно, после отжига при температуре 615 °С доли α - и β -фаз, как и можно ожидать из фазовой диаграммы, практически равны (нижняя кривая на рис. 2а). Пунктиром показано положение пиков (110) и (200) β -фазы на верхней и нижней кривой (β -фаза содержит больше железа после отжига при 615 °С, чем после отжига при 800 °С). После КВД спектры рентгеновской дифракции двух изученных образцов (соответственно, верхняя и нижняя кривые на рис. 2b) практически неотличимы друг от друга. Они содержат главным образом пики ω -фазы при очень небольшом количестве остаточной α -фазы. Эти результаты согласуются с полученными ранее данными [26]. Таким образом, с

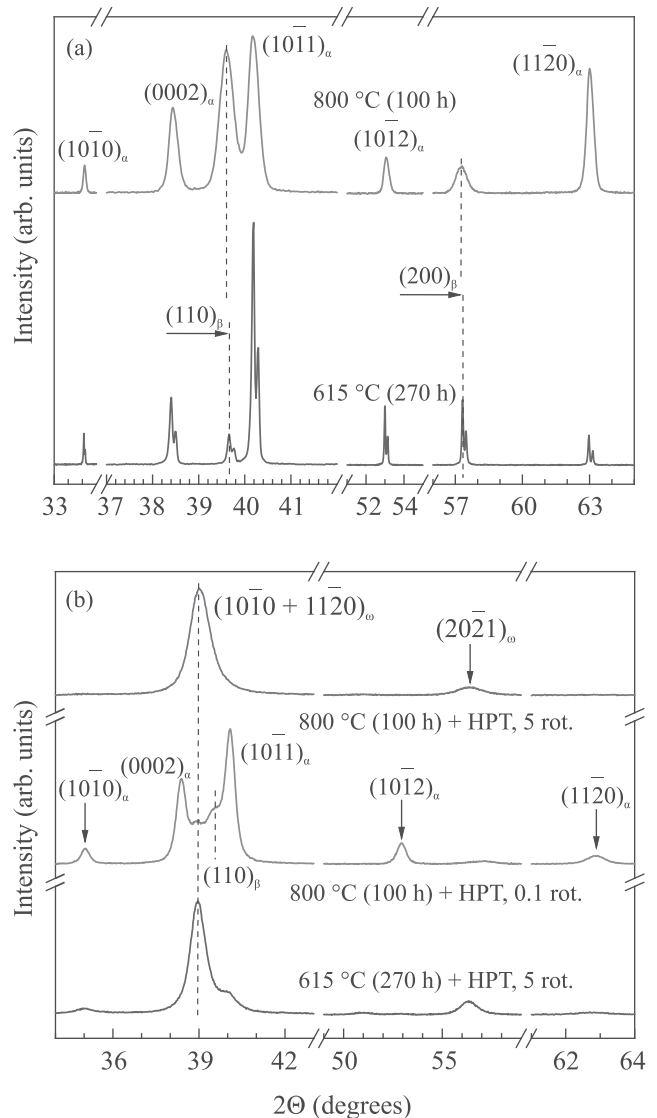


Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектры рентгеновской дифракции сплава Ti–4 масс. % Fe, отожженного при 800 °С, 100 ч и 615 °С, 270 ч. (а) – До КВД. (б) – После КВД. Верхний и нижний спектры соответствуют КВД при 5 оборотах. Средний спектр снят после 0.1 оборота плунжера на образце, отожженном при 800 °С, 100 ч

точки зрения содержания разных аллотропных модификаций титана, состояние образцов после пяти оборотов плунжера КВД эквивалентно. Иными словами, образцы содержат только ω -фазу, и их фазовый состав не зависит от фазового состава до КВД.

На рисунке 3 приведены зависимости крутящего момента при КВД от угла поворота плунжеров для двух образцов, отожженных при 800 °С (рис. 3а) и 615 °С (рис. 3б). Величина крутящего момента измеряется непосредственно в процессе КВД с помощью специального датчика. Обе кривые демонстри-

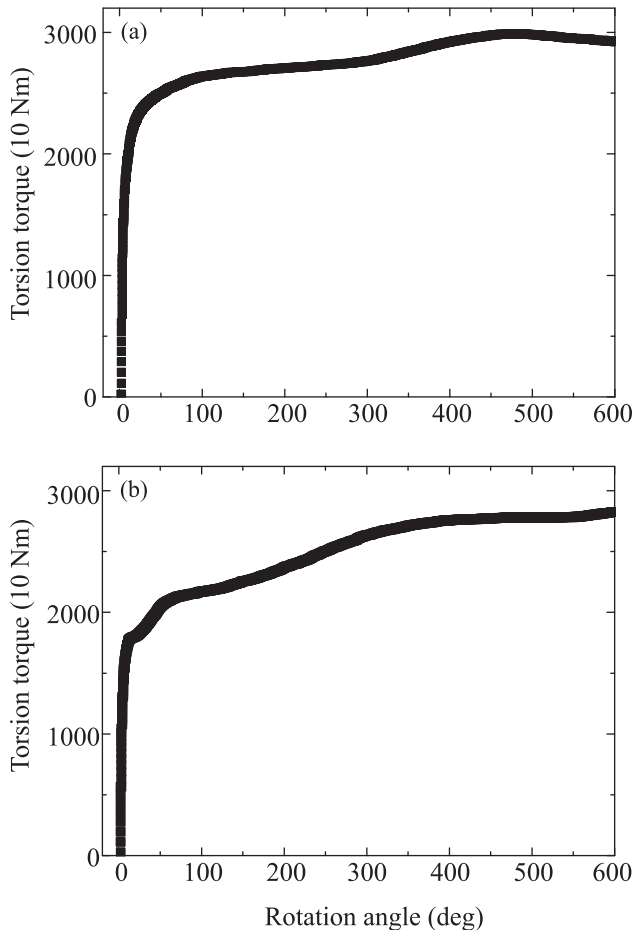


Рис. 3. Зависимости крутящего момента при КВД от угла поворота плунжера для сплава Ti–4 масс. % Fe, отожженного при 800 °С, 100 ч (а) и 615 °С, 270 ч (б)

руют быстрое возрастание крутящего момента на начальной стадии деформации (от 0 примерно до 30°). Исходно недеформированный образец упрочняется за счет измельчения структуры и увеличения плотности дислокаций. При больших углах поворота (более 400°) величина крутящего момента в обоих изученных образцах одинакова и составляет ~300 Нм. Это соответствует стационарному состоянию, в котором, как мы видели из рис. 2, образец содержит практически 100 % ω -фазы высокого давления. Участки кривых угловой зависимости крутящего момента между начальным ростом прочности и стационарным состоянием различаются. Так в образце, отожженном при температуре 800 °С, крутящий момент быстро возрастает и достигает стационарного состояния уже примерно при 100°. Это можно объяснить тем, что в исходном образце содержится большая объемная доля β -фазы, которая, в свою очередь, имеет концентрацию атомов железа, более близкую к номиналь-

ному значению в сплаве Ti–4 масс. % Fe. Как было показано ранее [26], КВД сплава с 4 масс. % Fe в β -фазе приводит к относительно быстрому превращению в фазу ω -Ti уже на ранних стадиях деформации. На рисунке 2b (средняя кривая) показана дифрактограмма образца, отожженного при температуре 800 °С, после 0.1 оборота плунжера (угол поворота ~35°). Как и верхняя кривая на рис. 2а, этот спектр содержит пики α - и β -фаз, но β -фаза уже начала исчезать, и появляется пик ω -фазы между пиками $(0002)_\alpha$ и $(110)_\beta$.

В образце, отожженном при температуре 615 °С, содержится как β -, так α -фаза. При этом α -фаза – в соответствии с фазовой диаграммой – практически не содержит железа, а в β -фаза содержит почти 10 масс. % Fe (см. сдвиг β -пиков на рис. 2а) [34]. После КВД весь образец содержит только ω -Ti с одинаковой концентрацией 4 масс. % Fe во всем объеме. Мы можем предположить, что, как и в работе [28], массоперенос предшествует мартенситному (сдвиговому) превращению. Иными словами, бедная железом α -фаза вначале механически перемешивается с богатой железом β -фазой. Именно поэтому, как нам представляется, упрочнение на ранней фазе деформации быстро заканчивается и начинается медленное и, судя по всему, двухстадийное упрочнение сплава (рис. 3b). Первая стадия проходит на участке от 20 до примерно 70°. Вторая стадия упрочнения сплава происходит на участке от 70° до ~300°. И только после этого возникает стационарное состояние, в котором образец повсюду содержит примерно 100 % ω -фазы с 4 масс. % Fe.

Таким образом, при КВД, кроме бездиффузионных (и относительно быстрых) $\alpha \rightarrow \omega$ и $\beta \rightarrow \omega$ превращений, происходят и процессы, связанные с переносом массы. Для описания массопереноса, стимулированного КВД, в сплавах меди и алюминия мы оценивали эквивалентный коэффициент диффузии [6, 15, 17, 29, 30]. Выполним эту оценку и для перемешивания в сплаве титана. В исходном состоянии (см. рис. 1b) в сплаве, отожженном при 615 °С, содержится α -фаза с почти нулевым содержанием железа и β -фаза с ~10 масс. % Fe. Размер зерен α - и β -фаз составляет примерно $L = 5$ мкм (рис. 1b). После деформации образец содержит только ω -фазу с 4 масс. % Fe (см. рис. 2) и размером зерен примерно 200 нм [26]. Время, необходимое для достижения этого стационарного состояния, составляет примерно $t = 250$ с (см. рис. 3b). Пользуясь простой формулой $L = (Dt)^{0.5}$ для массопереноса с помощью объемной диффузии, получаем оценку для коэффициента объемной диффузии $D = 10^{-13} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, необхо-

димого для получения такого результата перемешивания и переноса массы. Объемная диффузия железа в β -титане происходит с таким коэффициентом $D = 10^{-13} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ при $\sim 800^\circ \text{С}$ [46] а в α -титане – при $\sim 700^\circ \text{С}$ [47]. Экстраполяция данных по объемной диффузии железа в титане к температуре КВД $T_{\text{НРТ}} = 30^\circ \text{С}$ дает величину $D = 10^{-31} - 10^{-32} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, под воздействием КВД в сплаве титана с железом происходит ускоренный массоперенос со скоростью на 18–19 порядков выше скорости обычной термической диффузии при комнатной температуре (т.е. при температуре КВД $T_{\text{НРТ}}$), и это несмотря на то, что высокое давление само по себе существенно понижает кинетические коэффициенты массопереноса [48, 49]. Следует, однако, отметить, что в β -титане (как и в β -цирконии) величина D падает с давлением существенно медленнее, чем в в металлах с гранецентрированной кубической решеткой [50–54]. Более того, D для диффузии, например, железа и хрома намного выше, чем для самодиффузии атомов титана [52, 54]. Это объясняется тем, что диффузия в β -титане идет не только по вакансиям, но и по междоузлиям, причем возможен и краудинный механизм [50, 51, 53, 55], что проявляется в существенной нелинейности Аррениусовских зависимостей [46, 47, 50–52, 54, 55]. Подобное наложение двух или нескольких “барьерных” механизмов диффузии может приводить к разнообразным артефактам, таким как нефизически высокие значения энергии активации или даже отрицательный активационный объем [56–60].

Подобный массоперенос, ускоренный КВД, мы наблюдали ранее при изучении вызванной КВД конкуренции между распадом твердого раствора и растворением частиц в сплавах меди [6, 17, 29, 30]. Как и ранее, мы можем приписать вызванному КВД массопереносу в титане некоторую эффективную температуру $T_{\text{эф}} = 700 - 800^\circ \text{С}$ [6, 17, 27, 30]. Это явление, по всей видимости, объясняется повышенной концентрацией дефектов (в частности, вакансий) при КВД, а оно, в свою очередь, эквивалентно повышению температуры с $T_{\text{НРТ}}$ до $T_{\text{эф}}$. На самом деле, конечно же, при КВД не происходит реальное повышение температуры или ускорение диффузии [3, 5, 7, 21, 28, 29]. При КВД имеет место массоперенос на большие расстояния, много больше межатомных, составляя десятки и сотни нанометров. При этом, в действительности, рождается (и исчезает) огромное количество дефектов различных типов. Так, например, при КВД часто наблюдается аморфизация ряда сплавов, которая вовсе не происходит при их нагревании [8, 12]. В результате конечная картина процессов при КВД

оказывается похожей на ту, что наблюдается при повышении температуры [61–64].

Работа выполнена частично в рамках государственного задания ИФТТ и ИЦЧ РАН с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИФТТ РАН, а также при финансовом содействии Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-33-00473 и 19-58-06002) и Немецкого национального исследовательского общества (гранты RA 1050/20-1, IV 98/5-1, HA 1344/32-1, FA 999/1-1).

1. S. K. Pabi, J. Joardar, and B. S. Murty, Proceedings of Indian National Science Academy A **67**, 1 (2001).
2. X. Sauvage, A. Chbihi, and X. Quelenec, J. Phys. Conf. Ser. **240**, 012003 (2010).
3. V. I. Levitas and O. M. Zarechnyy, Phys. Rev. B **82**, 174123 (2010).
4. B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, Yu. Ivanisenko, A. A. Mazilkin, O. A. Kogtenkova, L. Kurmanaeva, A. Korneva, P. Zieba, and B. Baretzky, Int. J. Mater. Res. **106**, 657 (2015).
5. M. Javanbakht and V. I. Levitas, Phys. Rev. B **94**, 214104 (2016).
6. B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, A. Korneva, A. A. Mazilkin, P. B. Straumal, P. Zieba, and B. Baretzky, J. Alloys Comp. **707**, 20 (2017).
7. V. I. Levitas, Mater. Trans. **60**, 1294 (2019).
8. V. I. Levitas, Phys. Rev. Lett. **95**, 075701 (2005).
9. S. D. Prokoshkin, I. Yu. Khmelevskaya, S. V. Dobatkin, I. B. Trubitsyna, E. V. Tatyannin, V. V. Stolyarov, and E. A. Prokofiev, Acta Mater. **53**, 2703 (2005).
10. X. Sauvage, L. Renaud, B. Deconihout, D. Blavette, D. H. Ping, and K. Hono, Acta. Mater. **49**, 389 (2001).
11. A. A. Mazilkin, G. E. Abrosimova, S. G. Protasova, B. B. Straumal, G. Schütz, S. V. Dobatkin, and A. S. Bakai, J. Mater. Sci. **46**, 4336 (2011).
12. V. I. Levitas, Y. Ma, E. Selvi, J. Wu, and J. A. Patten, Phys. Rev. B **85**, 054114 (2012).
13. A. M. Glezer, M. R. Plotnikova, A. V. Shalimova, and S. V. Dobatkin, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **73**, 1233 (2009).
14. S. Hobor, Á. Revész, A. P. Zhilyaev, and Zs. Kovacs, Rev. Adv. Mater. Sci. **18**, 590 (2008).
15. B. B. Straumal, B. Baretzky, A. A. Mazilkin, F. Phillipp, O. A. Kogtenkova, M. N. Volkov, and R. Z. Valiev, Acta Mater. **52**, 4469 (2004).
16. B. B. Straumal, S. G. Protasova, A. A. Mazilkin, E. Rabkin, D. Goll, G. Schutz, B. Baretzky, and R. Valiev, J. Mater. Sci. **47**, 360 (2012).
17. B. Straumal, A. R. Kilmametov, Yu. O. Kucheev, L. Kurmanaeva, Yu. Ivanisenko, B. Baretzky, A. Korneva, P. Zieba, and D. A. Molodov, Mater. Lett. **118**, 111 (2014).

18. B. B. Straumal, A. A. Mazilkin, B. Baretzky, E. Rabkin, and R. Z. Valiev, *Mater. Trans.* **53**, 63 (2012).
19. Y. Ivanisenko, I. MacLaren, X. Sauvage, R. Z. Valiev, and H.-J. Fecht, *Acta Mater.* **54**, 1659 (2006).
20. M. T. Pérez-Prado and A. P. Zhilyaev, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 175504 (2009).
21. B. Feng and V. I. Levitas, *Mater. Sci. Eng. A* **680**, 130 (2017).
22. K. Edalati, E. Matsubara, and Z. Horita, *Metall. Mater. Trans. A* **40**, 2079 (2009).
23. B. Feng, V. I. Levitas, and M. Kamrani, *Mater. Sci. Eng. A* **731**, 623 (2018).
24. Y. Ivanisenko, A. Kilmametov, H. Roesner, and R. Valiev, *Int. J. Mater. Res.* **99**, 36 (2008).
25. B. Feng, V. I. Levitas, and W. Li, *Int. J. Plastic.* **113**, 236 (2019).
26. A. Kilmametov, Yu. Ivanisenko, A. A. Mazilkin, B. B. Straumal, A. S. Gornakova, O. B. Fabrichnaya, M. J. Kriegel, D. Rafaja, and H. Hahn, *Acta Mater.* **144**, 337 (2018).
27. A. Mazilkin, B. Straumal, A. Kilmametov, P. Straumal, and B. Baretzky, *Mater. Trans.* **60**, 1489 (2019).
28. B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, G. A. López, I. Lopez-Ferreño, M. L. No, J. San Juan, H. Hahn, and B. Baretzky, *Acta Mater.* **125**, 274 (2017).
29. B. B. Straumal, V. Pontikis, A. R. Kilmametov, A. A. Mazilkin, S. V. Dobatkin, and B. Baretzky, *Acta Mater.* **122**, 60 (2017).
30. Б. Б. Страумал, А. Р. Кильмаметов, И. А. Мазилкин, А. Корнева, П. Земба, Б. Барецки, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 622 (2019) [B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, I. A. Mazilkin, A. Korneva, P. Zięba, and B. Baretzky, *JETP Lett.* **110**, 624 (2019)].
31. Б. Б. Страумал, А. Р. Кильмаметов, Ю. О. Кучеев, К. И. Колесникова, А. Корнева, П. Земба, Б. Барецки, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 418 (2014) [B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, Yu. O. Kucheev, K. I. Kolesnikova, A. Korneva, P. Zięba, and B. Baretzky, *JETP Lett.* **100**, 376 (2014)].
32. Б. Б. Страумал, А. Р. Кильмаметов, И. А. Мазилкин, А. Корнева, П. Земба, Б. Барецки, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 622 (2019) [B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, I. A. Mazilkin, A. Korneva, P. Zieba, and B. Baretzky, *JETP Lett.* **110**, 624 (2019)].
33. L. von Bertalanffy, *Science* **111**, 23 (1950).
34. *Binary Alloy Phase Diagrams*, ed. by T. B. Massalski, 2nd ed., ASM International, Materials Park, OH (1990), 760 p.
35. M. Wojdyr, *J. Appl. Cryst.* **43**, 1126 (2010).
36. B. B. Straumal, A. S. Gornakova, Y. O. Kucheev, B. Baretzky, and A. N. Nekrasov, *J. Mater. Eng. Perform.* **21**, 721 (2012).
37. Б. Б. Страумал, Б. С. Бокштейн, А. Б. Страумал, А. Л. Петелин, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 615 (2008) [B. B. Straumal, B. S. Bokstein, A. B. Straumal, and A. L. Petelin, *JETP Lett.* **88**, 537 (2008)].
38. О. А. Когтенкова, Б. Б. Страумал, С. Г. Протасова, А. С. Горнакова, П. Земба, Т. Чеппе, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 419 (2012) [O. A. Kogtenkova, B. B. Straumal, S. G. Protasova, A. S. Gornakova, P. Zięba, and T. Czerpe, *JETP Lett.* **96**, 380 (2012)].
39. Б. Б. Страумал, О. А. Когтенкова, К. И. Колесникова, А. Б. Страумал, М. Ф. Булатов, А. Н. Некрасов, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 596 (2014) [B. B. Straumal, O. A. Kogtenkova, K. I. Kolesnikova, A. B. Straumal, M. F. Bulatov, and A. N. Nekrasov, *JETP Lett.* **100**, 535 (2014)].
40. B. B. Straumal, A. R. Kilmametov, Yu. Ivanisenko, A. S. Gornakova, A. A. Mazilkin, M. J. Kriegel, O. B. Fabrichnaya, B. Baretzky, and H. Hahn, *Adv. Eng. Mater.* **17**, 1835 (2015).
41. А. С. Горнакова, С. И. Прокофьев, Б. Б. Страумал, К. И. Колесникова, *Изв. вузов. Цвет. металл.* **57**(5), 69 (2016) [A. S. Gornakova, S. I. Prokofiev, B. B. Straumal, and K. I. Kolesnikova, *Russ. J. Non-Ferr. Met.* **57**, 703 (2016)].
42. A. S. Gornakova, B. B. Straumal, A. N. Nekrasov, A. Kilmametov, and N. S. Afonikova, *J. Mater. Eng. Perform.* **27**, 4989 (2018).
43. A. S. Gornakova, A. B. Straumal, I. I. Khodos, I. B. Gnesin, A. A. Mazilkin, N. S. Afonikova, and B. B. Straumal, *J. Appl. Phys.* **125**, 082522 (2019).
44. A. S. Gornakova, B. B. Straumal, and S. I. Prokofiev, *Adv. Eng. Mater.* **20**, 1800510 (2018).
45. Б. Б. Страумал, П. В. Проценко, А. Б. Страумал, А. О. Родин, Ю. О. Кучеев, А. М. Гусак, В. А. Мурашов, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 651 (2012) [B. B. Straumal, P. V. Protchenko, A. B. Straumal, A. O. Rodin, Yu. O. Kucheev, A. M. Gusak, and V. A. Murashov, *JETP Lett.* **96**, 582 (2012)].
46. G. B. Gibbs, D. Graham, and D. H. Tomlin, *Philos. Mag.* **8**, 1269 (1963).
47. H. Nakajima, M. Koiwa, and S. Ono, *Scripta Metall.* **17**, 1431 (1983).
48. B. B. Straumal, L. M. Klinger, and L. S. Shvindlerman, *Scripta Metall.* **17**, 275 (1983).
49. D. A. Molodov, B. B. Straumal, and L. S. Shvindlerman, *Scripta Metall.* **18**, 207 (1984).
50. H. Araki, Y. Minamino, T. Yamane, Y. Shirai, and Y. Miyamoto, *Defect Diffusion Forum* **143–147**, 125 (1997).
51. H. Araki, Y. Minamino, T. Yamane, S. Saji, S. Ogino, and Y. Miyamoto, *Journal of Japan Institute of Metals and Materials* **57**, 501 (1993).
52. H. Araki, Y. Shirai, T. Yamane, and Y. Miyamoto, *Rev. High Pressure Sci. Technol.* **7**, 676 (1998).
53. P. Knorr, J. Jun, W. Lojkowski, and Chr. Herzig, *Phys. Rev. B* **57**, 334 (1998).

54. H. Araki, T. Yaman, T. Nakatuka, and Y. Minamino, *Z. Metallkd.* **97**, 22 (2006).
55. U. Kohler and Ch. Herzig, *Phys. Status Solidi (b)* **144**, 243 (1987).
56. B. Straumal, E. Rabkin, W. Gust, and B. Predel, *Acta Metall. Mater.* **43**, 1817 (1995).
57. E. Rabkin, B. Straumal, V. Semenov, W. Gust, and B. Predel, *Acta Metall. Mater.* **43**, 3075 (1995).
58. R. F. Peart, *Phys. Stat. Sol.* **20**, 545 (1967).
59. S. D. Gertsriken and M. P. Pryanishnikov, *Fizika Metallov Metallovedenie* **2**, 297 (1960).
60. R. N. Jeffery, *Phys. Rev. B* **3**, 4044 (1971).
61. T. Kim, G. Ouyang, J. D. Poplawsky, M. J. Kramer, V. I. Levitas, J. Cui, and L. Zhou, *J. Alloys Compd.* **808**, 151743 (2019).
62. M. Kamrani, V. I. Levitas, and B. Feng, *Mater. Sci. Eng. A* **705**, 219 (2017).
63. V. I. Levitas and A. M. Roy, *Phys. Rev. B* **91**, 174109 (2015).
64. V. I. Levitas, *Int. J. Plastic.* **106**, 164 (2018).

Зондирование состояний двухзарядного акцептора в гетероструктурах на основе CdHgTe с помощью оптического затвора

И. Д. Николаев⁺, Т. А. Уаман Светикова⁺, В. В. Румянцев^{*}, М. С. Жолудев^{*}, Д. В. Козлов^{*}, С. В. Морозов^{*},
С. А. Дворецкий[×], Н. Н. Михайлов[×], В. И. Гавриленко^{*}, А. В. Иконников⁺¹⁾

⁺ Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

^{*} Институт физики микроструктур РАН – филиал Федерального исследовательского центра
Институт прикладной физики РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

[×] Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

В работе выполнены исследования спектров фотопроводимости в двойной квантовой яме HgTe/CdHgTe с нормальным зонным спектром. В спектрах фотопроводимости были обнаружены полосы fotocувствительности, связанные с ионизацией вакансии ртути – двухзарядного акцептора. Используя эффект остаточной фотопроводимости, удалось проследить трансформацию спектров фотопроводимости при прохождении положения уровня Ферми от края валентной зоны до зоны проводимости через запрещенную зону. Было показано, что наблюдаемые полосы поглощения связаны с ионизацией именно двухзарядного акцептора, а не отдельных различных однозарядных состояний.

DOI: 10.31857/S1234567820100067

1. Введение. Полупроводниковый материал CdHgTe (кадмий-ртуть-теллур, КРТ) является базовым для приемников и приемных матриц среднего инфракрасного диапазона [1]. Одним из основных его достоинств является возможность получения высококачественных твердых растворов $Cd_xHg_{1-x}Te$ практически с любой долей кадмия. При этом ширина запрещенной зоны может изменяться от 1.6 эВ (при $x = 1$) вплоть до нуля (при $x \leq 0.16-0.17$), что делает такие растворы перспективными для терагерцевой (ТГц) оптоэлектроники.

Большой контроль над зонным спектром может быть достигнут при переходе от объемных материалов к гетероструктурам с квантовыми ямами (КЯ). Последние, применительно к КЯ HgTe/CdHgTe, за последнее десятилетие вызвали огромный интерес исследователей за счет своих уникальных свойств. В качестве наиболее известных примеров можно указать переход от нормальной к инвертированной зонной структуре при увеличении ширины КЯ [2, 3] и обнаружение проводимости по краевым состояниям, топологически защищенным от обратного рассеяния, в КЯ с инвертированным спектром [4]. С точки зрения новых практических приложений, гетерострук-

туры на основе КРТ в настоящее время рассматриваются в качестве активной среды для межзонных лазеров диапазона 30–50 мкм [5, 6], недоступного квантово-каскадным лазерам на материалах АЗВ5 из-за фоновое поглощения [7].

Одной из особенностей, присущей как твердым растворам CdHgTe, так и гетероструктурам на их основе, является образование вакансий ртути даже в структурах высшего качества. Вакансия возникает из-за слабой связи Hg–Te [8]. При этом она действует как двухзарядный акцептор, поскольку, встраиваясь в кристаллическую решетку HgTe, ион ртути отдает в валентную зону два электрона. Помимо увеличения числа дырок в валентной зоне, вакансия добавляет отрицательный вклад в периодический потенциал кристаллической решетки и может оказывать значительное влияние на времена межзонной рекомбинации [9]. Последнее особенно важно для практических приложений. Кроме того, в материалах на основе КРТ существует проблема отсутствия “простого” мелкого акцептора (каким, например, является бор для кремния). Поэтому для получения структур с дырочной проводимостью часто вакансии ртути создают намеренно, например, с помощью отжига [10], что, естественно, сказывается на качестве структур.

¹⁾e-mail: antikon@physics.msu.ru

Таким образом, вакансия ртути является важной “особенностью” материалов на основе КРТ, что делает исследование ее энергетических характеристик актуальной задачей. При этом ее описание оказывается значительно более сложным по сравнению, например, с мелким водородоподобным центром. Изучению таких вакансий в твердых растворах КРТ было посвящено значительное число работ, однако данные об энергиях ионизации в них зачастую отличаются, а иногда оказываются противоречивыми. Применительно к узкозонным материалам можно рассмотреть следующие работы.

В работе [11] энергия ионизации вакансии определялась с помощью измерения пропускания в дальнем инфракрасном диапазоне. Она составляла 10–12 мэВ для растворов $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$ с $x = 0.2 - 0.4$. Такая же энергия была получена в работах [12, 13], однако, в отличие от [11], энергия ионизации существенно зависела от содержания кадмия, что может быть связано с тем, что для анализа использовались в основном транспортные методы. Зависимость от доли кадмия также отмечалась в работе [14], в которой были выявлены акцепторные состояния с энергиями ионизации 12 мэВ для $x = 0.216$ и 19 мэВ для $x = 0.234$. В работе [15] был выполнен весьма сложный анализ спектров фотолюминесценции (ФЛ) с применением деконволюции спектральных линий. В результате анализа вакансии ртути приписывалась энергия ионизации в диапазоне 12–15 мэВ.

В более поздних работах вакансии ртути в твердых растворах КРТ стали приписывать несколько энергий ионизаций. К примеру, в работе [16] в твердых растворах с x в диапазоне 0.3–0.4 по спектрам ФЛ были определены уровни акцепторов, отстоящие на 14, 18 и 27 мэВ от края валентной зоны, часть из которых связывалась с вакансиями ртути. В работе [17], завершающей серию работ этой группы, рассматривается возможность того, что при малых концентрациях кадмия ($x < 0.33$) вакансии ртути представляет собой глубокий центр с отрицательной энергией Хаббарда, или так называемый *negative U* центр, для которого энергия отрыва второй дырки от акцептора оказывается меньше, чем первой. Однако в работе [18], в которой изучались спектры ФЛ эпитаксиальных пленок $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$ с $x = 0.19 - 0.3$, было показано, что энергия отрыва первой дырки от нейтрального акцептора составляет 10 мэВ, а энергия отрыва второй дырки – 19 мэВ. Данные энергии не зависели от состава.

В то же время исследования состояний двухзарядного акцептора в гетероструктурах с квантовыми ямами на основе КРТ фактически только начинают-

ся. Можно лишь указать работы [19–21], в которых измерялись спектры ФП [19] и спектры ФЛ [20, 21] таких примесных состояний. В этих работах исследования проводились на узкозонных гетероструктурах ($E_g < 80$ мэВ) с нормальным зонным спектром. В принципе, полученные данные не противоречили друг другу – в спектрах наблюдались субщелевые полосы, часть из которых (5–16 мэВ и 20–35 мэВ) связывалась с возбуждением вакансии ртути. Тем не менее, связь наблюдаемых полос именно с двухзарядным акцептором в указанных работах устанавливалась лишь на основе расчетов.

В настоящей работе будет экспериментально продемонстрировано, что наблюдаемые в спектрах ФП в гетероструктурах на основе КРТ субщелевые особенности связаны именно с ионизацией двухзарядного акцептора, а не с ионизацией состояний двух различных однозарядных акцепторов.

2. Методика эксперимента. Исследуемая структура была выращена методом молекулярно-лучевой эпитаксии на полуизолирующих подложках GaAs (013) толщиной 400 мкм [22, 23]. На подложке выращивался буфер, состоящий из 30 нм слоя ZnTe и толстого (5 мкм) релаксированного слоя CdTe. Затем выращивалась активная часть структуры: нижний барьер $\text{Cd}_{0.64}\text{Hg}_{0.36}\text{Te}$ толщиной 30 нм, нижняя КЯ HgTe толщиной 4.5 нм, туннельно-прозрачный барьер $\text{Cd}_{0.64}\text{Hg}_{0.36}\text{Te}$ толщиной 3 нм, верхняя КЯ HgTe толщиной 4.5 нм и верхний барьер $\text{Cd}_{0.64}\text{Hg}_{0.36}\text{Te}$ толщиной 30 нм. Поверх всей структуры выращивался покровный слой CdTe толщиной 40 нм. Легирование структуры не проводилось. Наличие двух КЯ в гетероструктуре для настоящей работы не существенно. Структура была выбрана для исследования субщелевой фотопроводимости (ФП) из-за хорошо выраженного эффекта остаточной фотопроводимости (ОФП) [24]. В этой структуре пошаговая подсветка видимым светом позволяла последовательно изменять тип проводимости от дырочного к электронному, чего не наблюдалось ранее в структурах с одиночными КЯ. Таким образом, используя контролируемую подсветку, можно управлять положением уровня Ферми в исследуемом образце. Такую возможность иногда называют “оптическим затвором” (*optical gating*).

Согласно проведенным расчетам зонной структуры [25] исследуемый образец обладает нормальным зонным спектром, что подтверждается ранее выполненными магнитооптическими исследованиями (см. данные по образцу 150217 в работе [26]). Заметим, что для получения хорошего согласия между наблю-

даемыми и рассчитанными энергиями магнитооптических переходов, в [26] использовались скорректированные параметры толщин КЯ и барьера между ними. Ширина запрещенной зоны в структуре по данным магнитооптических измерений составляет ~ 75 мэВ, поэтому переходы с участием исследуемых “примесных” состояний будут наблюдаться в субщелевой области спектра.

Характеризация образцов осуществлялась с помощью исследования их электрофизических свойств. На поверхность образцов размерами 4×2 мм наносились индиевые контакты в холловской геометрии. Эти же образцы использовались при измерениях спектров ФП. Образцы размещались в светонепроницаемой вставке, полностью экранирующей их от внешнего излучения. Рядом с образцом были размещены светодиод, излучающий в синей области спектра, и миниатюрная лампа накаливания, позволявшие осуществлять контролируемую подсветку образцов. Медленно опуская вставку в сосуд Дьюара с жидким гелием, можно было проводить измерения в диапазоне температур 4.5–300 К. Внешнее магнитное поле 0.05 Тл создавалось с помощью резистивного соленоида. Ток через образец составлял 1–10 мкА. Исследовались температурные зависимости продольного и поперечных сопротивлений.

Кроме того, проводились измерения квантового эффекта Холла по двухконтактной схеме на образцах размером 5×5 мм с полосковыми омическими контактами. Структуры размещались в гелиевом криостате в центре сверхпроводящего соленоида (максимальное поле 6 Тл). Рядом с образцом был размещен “синий” светодиод.

Спектры ФП измерялись при $T = 5$ К с помощью фурье-спектрометра Bruker Vertex 70v. В качестве источника использовался глобар, в качестве светоделителя – Mylar Multilayer. Образцы размещались в проточном криостате Oxford Instruments OptistatCF, который устанавливался в спектрометр так, чтобы образец находился в фокусе пучка излучения. В криостате использовались окна из полипропилена и лавсана. Перед образцом размещался холодный фильтр из черного полиэтилена. Рядом с образцом находился “синий” светодиод. Спектральные характеристики всех используемых оптических элементов и фильтров позволяли осуществлять запись спектров в диапазоне 4–84 мэВ без внесения в спектр каких-либо резких особенностей. Спектральное разрешение составляло ≈ 1 мэВ (8 см^{-1}). Использовались те же образцы, что и при исследованиях температурных зависимостей сопротивления. Сигнал ФП снимался с токовых контактов.

3. Результаты и обсуждение. На рисунке 1 представлены температурные зависимости сопротивления и концентрации носителей в исследуемой

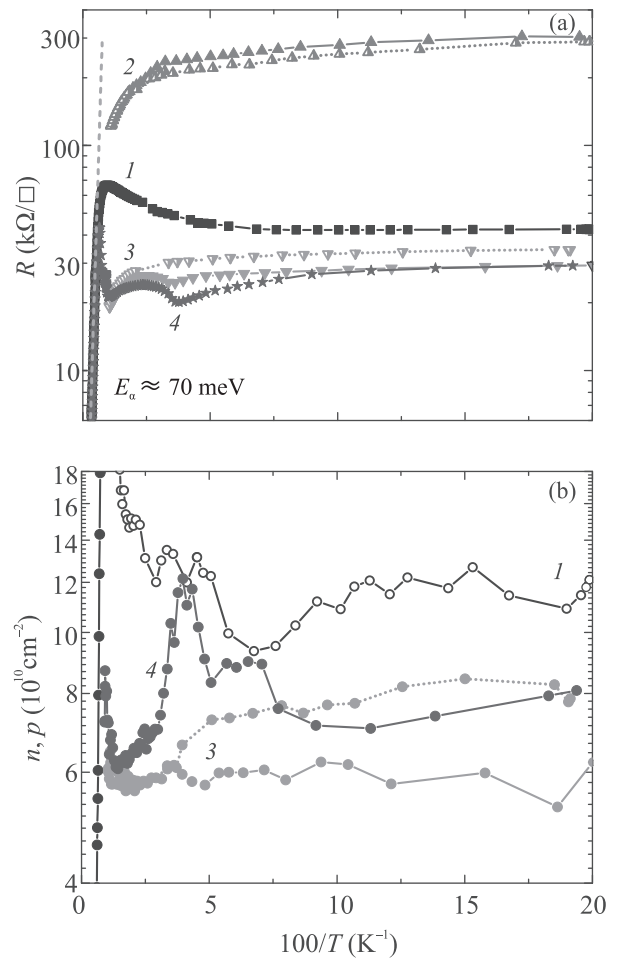


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Зависимости удельного поверхностного сопротивления двойной КЯ HgTe/CdHgTe от обратной температуры, полученные в темновых условиях (кривая 1) и после кратковременного освещения лампой накаливания (кривые 2 и 3) или “синим” светодиодом (кривая 4). Сплошные и точечные линии для кривых 2 и 3 соответствуют нагреванию и последующему охлаждению образца без включения подсветки. (б) – Зависимости концентрации носителей заряда от обратной температуры для тех же условий, что и на рис. 1а. Открытые символы соответствуют дырочному типу проводимости, сплошные – электронному

структуре. В высокотемпературной области при $T > 180$ К наблюдается активационный участок, который соответствует области собственной проводимости. Энергия активации, определенная по наклону этого линейного участка, составляет $E_a \approx 70$ мэВ, соответственно, термическая ширина запрещенной зо-

ны составляет $E_g \approx 140$ мэВ, что в два раза превышает величину, определенную ранее из спектров магнитопоглощения [26]. Предположительно, это связано со значительными флуктуациями потенциала, из-за которых термически возбужденным носителям заряда приходится дополнительно преодолевать значительный барьер до достижения порога подвижности. С понижением температуры сопротивление и концентрация выходят на постоянные значения. Концентрация в темновых условиях при низких температурах составляет $p \approx 1.1 \cdot 10^{11}$ см $^{-2}$. Проводимость при этом является *дырочной*.

После кратковременной подсветки лампой накаливания сопротивление структуры вырастает практически на порядок (кривые 2 на рис. 1). Отметим, что при нагреве до $T = 100$ К и последующем обратном охлаждении сопротивление практически не изменилось, что говорит об устойчивом эффекте ОФП. Концентрацию, равно как и подвижность, в этих условиях измерить не удастся.

После дальнейшей кратковременной подсветки при низкой температуре сопротивление образца *уменьшается* практически до первоначальных значений. Однако тип проводимости при этом оказывается *электронным*. Концентрация при этом составляет $n \approx 6 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$. Нагрев до 100 К и последующее охлаждение немного увеличивают и сопротивление, и концентрацию, что свидетельствует о падении подвижности после нагрева. Возможно, нагрев приводит к некоторому опустошению каких-либо глубоких ловушек, находящихся, например, на поверхности. Это увеличивает концентрацию электронов, но и увеличивает число рассеивающих центров, что приводит к падению подвижности. Сама подвижность в этих структурах составляет ~ 2000 см 2 /В·с для дырок и ~ 4000 см 2 /В·с для электронов при низких температурах.

Освещение структуры синим светом приводит к той же ситуации, что и вторая подсветка лампой накаливания (кривые 3 и 4 на рис. 1). Это связано с тем, что при достаточно длительном воздействии светом устанавливается какая-то "итоговая" концентрация, значение которой зависит только от длины волны [24]. Длина волны излучения используемого светодиода при $T = 4.2$ К составляет $\lambda \approx 440$ нм, максимум излучения лампы накаливания – $\lambda \approx 1500$ нм. Согласно [24], длительное воздействие светом с такими длинами волн приводит к установлению примерно одинаковой электронной концентрации для данной структуры. Таким образом, для смены типа проводимости и изменения концентрации носителей заряда за счет эффекта положительной ОФП в исследуемой

структуре можно использовать как лампу накаливания, так и "синий" светодиод. Однако с помощью светодиода удастся получать меньшие дозы подсветки и, соответственно, изменять концентрацию с меньшим шагом. Поэтому при дальнейших исследованиях мы использовали только подсветку синим светом.

На рисунке 2 показаны зависимости сопротивления структуры, измеренного по двухконтактной схеме, от магнитного поля при различных дозах подсветки "синим" светодиодом. Каждая кривая (кроме темновой) записана после выключения светодиода. Видно, что подсветка приводит сначала к *возрастанию* сопротивления, а затем, после достижения некоторого максимума, к его *убыванию*.

Также из рисунка 2 видно, что характерные значения магнитных полей, при которых начинается

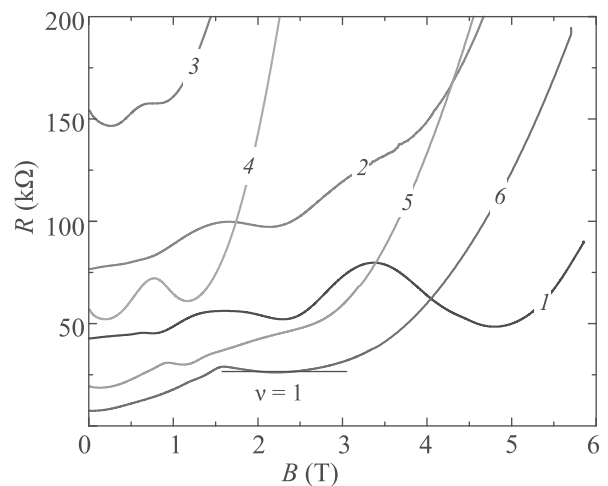


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимости сопротивления структуры от магнитного поля, полученные в темновых условиях (кривая 1) и после кратковременных подсветок синим светом (кривые 2–6). Последовательная засветка приводит сначала к росту сопротивления (кривые 1–3), а затем к уменьшению (кривые 3–6)

резкий рост сопротивления, сначала уменьшаются с дозой подсветки, а затем вновь увеличиваются. Данный резкий рост сопротивления связан с увеличением кратности вырождения уровней Ландау с ростом магнитного поля. При достаточной величине магнитного поля все носители заряда оказываются на одном уровне Ландау (ультраквантовый предел). При этом дальнейшее увеличение поля приводит к тому, что все больше носителей заряда становятся локализованными и перестают давать вклад в проводимость. Уменьшение концентрации носителей заряда, естественно, приводит к тому, что такая ситуация наступает при меньших магнитных полях.

При больших дозах подсветки, когда проводимость осуществляется электронами, на зависимостях магнитосопротивления наблюдается фундаментальное плато квантового эффекта Холла. Концентрация электронов, определенная по положению плато, соответствующему фактору заполнения $\nu = 1$ (кривая 6 на рис. 2), составляет $5.4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$, что хорошо согласуется с данными холловских измерений в слабых магнитных полях.

На темновой кривой (соответствующей дырочной проводимости) также наблюдаются проявления квантования Ландау, однако выраженных плато, как для “электронного” случая, не наблюдается. Скорее всего, это связано со сложной структурой уровней Ландау в валентной зоне в КЯ HgTe [27, 28] и, особенно, в структурах с двойными КЯ [29, 30].

Таким образом, можно утверждать, что кратковременные дозированные подсветки синим светом или светом лампы накаливания приводят к постепенному уменьшению темновой дырочной концентрации и переходу через изолирующее состояние вновь к проводящему, но уже определяемому электронами. Другими словами, при подсветке уровень Ферми, находясь сначала в валентной зоне, поднимается вверх по энергии, затем проходит запрещенную зону и, наконец, оказывается в зоне проводимости.

Перейдем теперь к рассмотрению спектров фотопроводимости. На рисунке 3 показаны спектры ФП, снятые сразу после охлаждения образца (кривая 1) и после кратковременных последовательных подсветок синим светом (кривые 2–7). На всех спектрах наблюдается полоса межзонной ФП с красной границей 70–75 мэВ. Это значение хорошо согласуется с данными, определенными из спектров магнитопоглощения [26]. Резкий спад полосы после 80 мэВ связан с падением пропускания используемого светоделиителя.

Наибольший интерес представляют субщелевые полосы ФП на 8–16 мэВ (полоса *a*) и 19–25 мэВ (полоса *b*) (рис. 3). В “темновых”²⁾ условиях (кривая 1) наблюдается только полоса *a*. Сопротивление образца при этом близко к значению темнового сопротивления на рис. 1. Кратковременная подсветка приводит к появлению в спектрах полосы *b* (кривые 2, 3 на рис. 3). Сопротивление образца при этом *увеличивается*. Дальнейшая подсветка образца вызывает уменьшение интенсивности (кривая 4) и исчезновение (кривая 5) полосы *a*, в то время как полоса

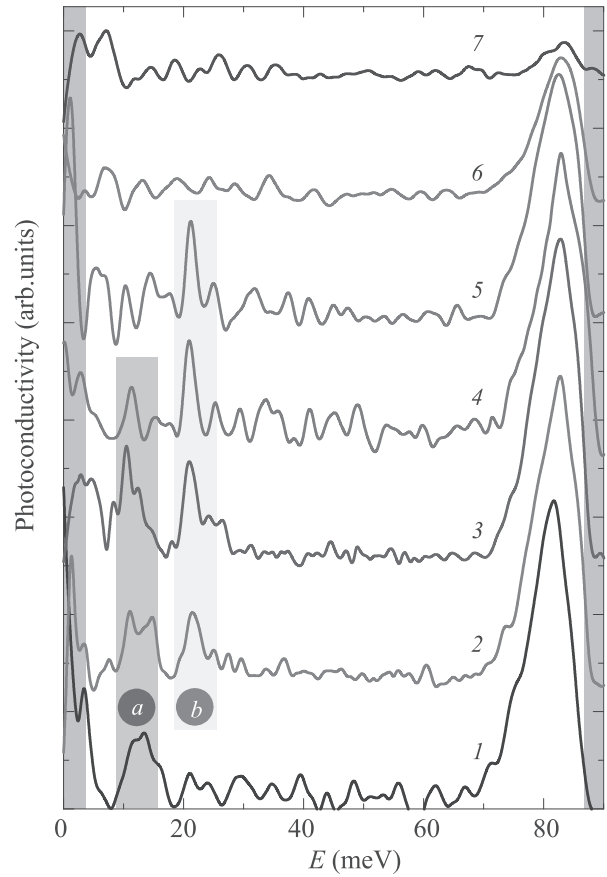


Рис. 3. (Цветной онлайн) Спектры ФП двойной КЯ HgTe/CdHgTe, полученные в “темновых” условиях (кривая 1) и после кратковременных подсветок синим светом (кривые 2–7). Кривые сдвинуты по оси ординат относительно друг друга на фиксированную величину. Полосы *a* и *b* – наблюдаемые в спектрах субщелевые особенности. Серые полосы по краям рисунка обозначают спектральные области, выходящие за пределы полосы пропускания светоделиителя Mylar Multilayer

b сохраняется. Сопротивление при этом продолжает расти, достигая максимума в несколько мегаом. Наконец, дальнейшая дозированная подсветка приводит к *уменьшению* сопротивления. При этом обе субщелевые полосы в спектрах ФП исчезают (кривые 6 и 7).

Для объяснения наблюдаемого поведения субщелевых особенностей спектров ФП обратимся к схеме, иллюстрирующей энергии ионизации двухзарядного акцептора относительно зон (рис. 4). Данная схема основана на расчете зонного спектра из работы [26] и расчете энергий ионизаций двухвалентного акцептора из работы [19] (дисперсия энергий ионизации в зависимости от положения вакансии ртути относительно центра КЯ приводит к некоторому уширению полос *a* и *b* ФП). “Удвоение” подзон валентной зоны

²⁾В данном случае слово “темновых” взято в кавычки, поскольку образец так или иначе освещается теплыми частями криостата и излучением глобара фурье-спектрометра.

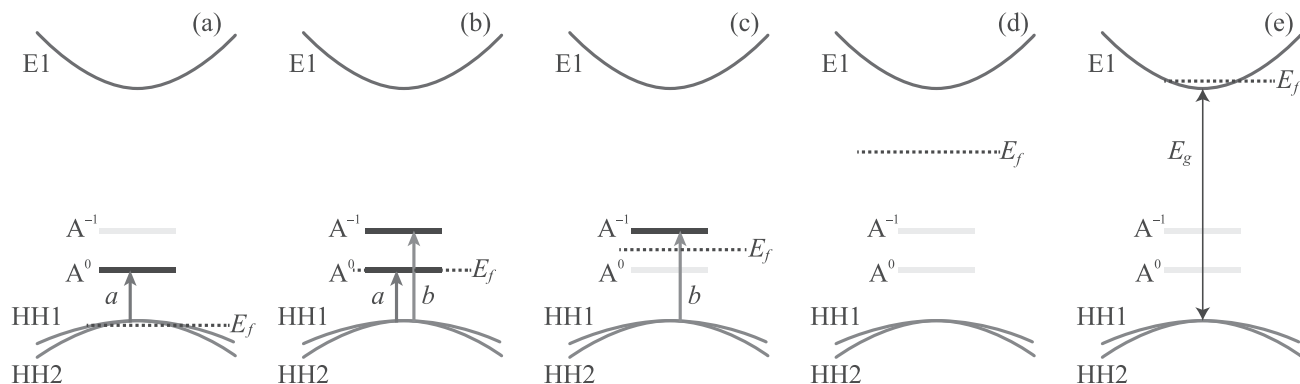


Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема, иллюстрирующая наблюдаемые в спектрах ФП примесные переходы. E1 – первая подзона размерного квантования зоны проводимости, HH1 и HH2 – подзоны валентной зоны. Схема зон взята из работы [26]. E_f – положение уровня Ферми. A^0 – энергия частичной ионизации (отрыв одной дырки) нейтральной вакансии ртути, A^{-1} – энергия полной ионизации (отрыв второй дырки) однократно ионизованной вакансии ртути (энергии отсчитываются от потолка валентной зоны). Серым цветом обозначены энергии переходов, невозможных при заданном положении уровня Ферми

возникает из-за двойной КЯ, поскольку барьер между КЯ оказывается значительно менее туннельно-прозрачным для дырок, чем для электронов. Энергия A^0 соответствует однократной ионизации нейтрального акцептора (акцептор с двумя дырками), энергия A^{-1} – отрыву второй дырки от однократно ионизованного акцептора. Энергия A^{-1} больше A^0 , поскольку из-за кулоновского взаимодействия “оторвать” одну дырку от нейтрального акцептора проще, чем “оторвать” дырку от уже отрицательно заряженного однократно ионизованного акцептора.

После охлаждения образцы обладают дырочной проводимостью, и уровень Ферми близок к потолку валентной зоны (рис. 4a). В этом случае все вакансии ртути будут нейтральными. Соответственно, в спектрах ФП будут наблюдаться переходы с энергией A^0 , соответствующие отрыву одной дырки (переходу электронов из валентной зоны на нейтральный акцептор). Именно такие переходы и отвечают за наблюдаемую в спектрах полосу a (кривая 1 на рис. 3). Важно отметить, что отсутствие полосы b на кривой 1 говорит о том, что энергии A^0 и A^{-1} соответствуют именно ионизации двухзарядного акцептора, а не каких-то двух отдельных однозарядных акцепторов. В последнем случае, в ситуации, когда уровень Ферми находится в валентной зоне, в спектрах ФП сразу бы наблюдались обе полосы a и b .

После кратковременной подсветки уровень Ферми поднимается и доходит до энергии A^0 . В этом случае часть нейтральных акцепторов становится однократно ионизованными (рис. 4b). При данных условиях в спектрах ФП будут наблюдаться обе полосы a и b , связанные с ионизацией нейтральных и

однократно заряженных акцепторов соответственно (кривые 2 и 3 на рис. 3). Дисперсия энергий ионизации в зависимости от положения вакансии ртути относительно центра КЯ приводит к тому, что полосы ФП a и b наблюдаются в некотором интервале положений уровня Ферми (интервале доз подсветки).

Дальнейшая подсветка будет приводить ко все большей ионизации нейтральных акцепторов, что приведет к уменьшению интенсивности полосы a (кривая 4 на рис. 3). Наконец, когда уровень Ферми окажется выше энергии A^0 (рис. 4c), все акцепторы будут однократно ионизованы, и в спектрах ФП останется только полоса b (кривая 5 на рис. 3).

При еще большем повышении энергии Ферми все акцепторы оказываются полностью (двукратно) ионизованными (рис. 4d), что приводит к исчезновению всех субщелевых особенностей спектров ФП (кривая 6 на рис. 3). В конце концов, при попадании уровня Ферми в зону проводимости (рис. 4e), возрастает собственная электронная проводимость образца, из-за чего зарегистрировать межзонную ФП становится сложнее (кривая 7 на рис. 3).

Спектральное положение полос a (8–16 мэВ) и b (19–25 мэВ) хорошо совпадает с данными, полученными для энергий ионизации вакансии ртути в различных одиночных КЯ HgTe с нормальной зонной структурой [19–21]. Такое совпадение вместе с наблюдаемыми изменениями интенсивностей полос при изменении положения уровня Ферми позволяют связать полосу a с ионизацией нейтральной вакансии ртути (отрыв одной дырки), а полосу b с ионизацией уже однократно ионизованной вакансии (отрыв второй дырки).

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант # 19-72-00128). Измерения магнитосопротивления были выполнены в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-1430.2020.2).

Авторы благодарят Л. С. Бовкуна за помощь в анализе транспортных измерений.

1. A. Rogalski, *Opto-Electron. Rev.* **20**, 279 (2012).
2. L. G. Gerchikov and A. Subashiev, *Phys. Status Solidi B* **160**, 443 (1990).
3. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S. C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006).
4. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X. L. Qi, and S. C. Zhang, *Science* **318**, 766 (2007).
5. V. Rumyantsev, M. Fadeev, V. Aleshkin, N. Kulikov, V. Utochkin, N. Mikhailov, S. Dvoretiskii, S. Pavlov, H.-W. Hübers, V. Gavrilenko, C. Sirtori, Z. F. Krasilnik, and S. Morozov, *Phys. Status Solidi B* **256**, 1800546 (2019).
6. G. Alymov, V. Rumyantsev, S. Morozov, V. Gavrilenko, V. Aleshkin, and D. Svintsov, *ACS Photonics* **7**, 98 (2020).
7. M. S. Vitiello, G. Scalari, B. Williams, and P. De Natale, *Opt. Express* **23**, 5167 (2015).
8. D. T. Cheung, *J. Vac. Sci. Technol. A* **3**, 128 (1985).
9. A. Rogalski, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 2267 (2005).
10. В. С. Варавин, Г. Ю. Сидоров, Ю. Г. Сидоров, *Журнал физической химии* **84**, 1605 (2010).
11. B. Li, Y. Gui, Z. Chen, H. Ye, J. Chu, S. Wang, R. Ji, and L. He, *Appl. Phys. Lett.* **73**, 1538 (1998).
12. T. Sasaki, N. Oda, M. Kawano, S. Sone, T. Kanno, and M. Saga, *J. Cryst. Growth* **117**, 222 (1992).
13. S. H. Shin, M. Chu, A. H. B. Vanderwyck, M. Lanir, and C. C. Wang, *J. Appl. Phys.* **51**, 3772 (1980).
14. S. R. Kurtz, J. Bajaj, D. D. Edwall, and S. J. C. Irvine, *Semicond. Sci. Technol.* **8**, 941 (1993).
15. F. Yue, J. Wu, and J. Chu, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 131909 (2008).
16. К. Д. Мынбаев, А. В. Шияев, Н. Л. Баженов, А. И. Ижнин, И. И. Ижнин, Н. Н. Михайлов, В. С. Варавин, С. А. Дворецкий, *ФТП* **49**, 379 (2015).
17. F. Gemain, I. C. Robin, and G. Feuillet, *J. Appl. Phys.* **114**, 213706 (2013).
18. V. V. Rumyantsev, D. V. Kozlov, S. V. Morozov, M. A. Fadeev, A. M. Kadykov, F. Teppe, V. S. Varavin, M. V. Yakushev, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretiskii, and V. I. Gavrilenko, *Semicond. Sci. Technol.* **32**, 095007 (2017).
19. Д. В. Козлов, В. В. Румянцев, С. В. Морозов, А. М. Кадыков, М. А. Фадеев, В. С. Варавин, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, В. И. Гавриленко, *Ф. Тeppe, ФТП* **50**, 1690 (2016).
20. Д. В. Козлов, В. В. Румянцев, А. М. Кадыков, М. А. Фадеев, Н. С. Куликов, В. В. Уточкин, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, В. И. Гавриленко, Х.-В. Хюберс, Ф. Тeppe, С. В. Морозов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 679 (2019).
21. Д. В. Козлов, В. В. Румянцев, С. В. Морозов, А. М. Кадыков, М. А. Фадеев, М. С. Жолудев, В. С. Варавин, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, В. И. Гавриленко, *Ф. Тeppe, ЖЭТФ* **154**, 1226 (2018).
22. N. N. Mikhailov, R. N. Smirnov, S. A. Dvoretiskii, Y. G. Sidorov, V. A. Shvets, E. V. Spesivtsev, and S. V. Rykhlitski, *Int. J. Nanotechnol.* **3**, 120 (2006).
23. S. Dvoretiskii, N. Mikhailov, Y. Sidorov, V. Shvets, S. Danilov, B. Wittman, and S. Ganichev, *J. Electron. Mater.* **39**, 918 (2010).
24. К. Е. Спиринов, Д. М. Гапонова, К. В. Маремьянин, В. В. Румянцев, В. И. Гавриленко, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, *ФТП* **52**, 1482 (2018).
25. S. S. Krishtopenko, W. Кнар, and F. Teppe, *Sci. Rep.* **6**, 30755 (2016).
26. Л. С. Бовкун, С. С. Криштопенко, А. В. Иконников, В. Я. Алешкин, А. М. Кадыков, S. Ruffenach, C. Consejo, F. Teppe, W. Кнар, M. Orlita, V. Piot, M. Potemski, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, В. И. Гавриленко, *ФТП* **50**, 1554 (2016).
27. L. S. Bovkun, A. V. Ikonnikov, V. Ya. Aleshkin, K. E. Spirin, V. I. Gavrilenko, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretiskii, F. Teppe, B. A. Piot, M. Potemski, and M. Orlita, *J. Phys. Condens. Matter* **31**, 145501 (2019).
28. K. Ortner, X. C. Zhang, A. Pfeuffer-Jeschke, C. R. Becker, G. Landwehr, and L. W. Molenkamp, *Phys. Rev. B* **66**, 075322 (2002).
29. L. S. Bovkun, A. V. Ikonnikov, V. Ya. Aleshkin, K. V. Maremyanin, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretiskii, S. S. Krishtopenko, F. Teppe, B. A. Piot, M. Potemski, M. Orlita, and V. I. Gavrilenko, *Opto-Electron. Rev.* **27**, 213 (2019).
30. М. В. Якунин, С. С. Криштопенко, С. М. Подгорных, М. Р. Попов, В. Н. Неверов, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 415 (2016).

Spin vortex lattice in the Landau vortex-free state of rotating superfluids

G. E. Volovik¹⁾

Low Temperature Laboratory, Aalto University, P.O. Box 15100, FI-00076 Aalto, Finland

Landau Institute for Theoretical Physics, 142432 Chernogolovka, Russia

Submitted 11 April 2020

Resubmitted 11 April 2020

Accepted 11 April 2020

DOI: 10.31857/S1234567820100079

In the rotating vessel the lattice of mass vortices represents the ground state or the thermal equilibrium state of the rotating superfluid. For spin vortices the situation is different. Orbital rotations do not act on the spin vortices, and the other external or internal fields are needed for the formation of the lattice, such as Dzyaloshinskii–Moriya interaction [1, 2], which leads to the formation of skyrmion lattice. Here we show that the lattice of spin vortices can be created in rotating vessel, if the formation of the mass vortices is suppressed. The Landau vortex-free state in the rotating vessel (the analog of Meissner state in superconductors) acts on spin vortices as rotation acts on mass vortices.

We start with the Bose–Einstein condensation of magnons (magnon BEC), which is realized in superfluid ³He-B as the homogeneously precessing domain (HPD) [3–5]. Magnon BEC is characterized by the density of magnons $n_M = S - S_z$, where $S = \chi H$ is spin density in magnetic field; S_z is the projection of the precessing spin on magnetic field, see review [6]. The magnon BEC has the superfluid velocity

$$\mathbf{v}_M = \frac{\hbar}{m_M} \nabla \alpha, \quad (1)$$

where α is the angle of the precession, which plays the role of the phase of magnon BEC; and m_M is magnon mass. In spin dynamics, the magnon density n_M and the phase α are canonically conjugate variables, and thus

$$\mathbf{P} = n_M \nabla \alpha = m_M n_M \mathbf{v}_M, \quad (2)$$

represents the momentum density of the magnon field.

In the moving superfluid the magnon BEC acquires the Doppler shift energy term:

$$F_{\text{mix}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = m_M n_M \mathbf{v}_M \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \quad (3)$$

Here \mathbf{v}_s and \mathbf{v}_n are correspondingly superfluid and normal velocities of the B-phase. This term, which mixes

superfluid velocity of the background mass superfluid and superfluid velocity of magnon BEC, is another realization of the Andreev–Bashkin effect in superfluid mixtures, when the superfluid current of one component depends on the superfluid velocity of another component [7]. The counterflow $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$ together with spin density plays the similar role as Dzyaloshinskii–Moriya interaction in magnets, which violates the space inversion symmetry and leads to formation of skyrmion lattices, see, e.g., [8]. The mixed term modifies the kinetic energy:

$$F_{\text{grad}} = \frac{1}{2} m_M n_M \mathbf{v}_M^2 + m_M n_M \mathbf{v}_M \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \quad (4)$$

We consider the Landau state in the container rotating with angular velocity $\mathbf{\Omega}$, when the normal component of the liquid has the solid body rotation with velocity $\mathbf{v}_n = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, while the superfluid component of the B-phase is vortex-free, $\mathbf{v}_s = 0$, and thus

$$F_{\text{grad}} = \frac{1}{2} m_M n_M (\mathbf{v}_M - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2. \quad (5)$$

This means that the Landau state in the rotating vessel acts on spin superfluid (magnon BEC) in the same way as rotation acts on mass superfluid, i.e., it should lead to formation of spin vortices, in which the phase α has 2π winding (single spin vortex has been constructed and identified [9]). So, if the creation of mass vortices is suppressed, but the creation of spin vortices is allowed, one obtains the state with the lattice of spin vortices.

The number of these spin vortices in the Landau state in rotating vessel is determined by the circulation quantum of spin vortex $\kappa_M = 2\pi\hbar/m_M$ and by angular velocity. That is why the number of spin vortices in the lattice in the Landau state can be expressed in terms of the equilibrium number of quantized mass vortices in the fully equilibrium rotating state:

$$\frac{N_{\text{spin}}}{N_{\text{mass}}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_M} = \frac{m_M}{2m_3}, \quad (6)$$

where $\kappa_3 = 2\pi\hbar/2m_3$ is the quantum of circulation in superfluid ³He-B; m_3 is the mass of ³He atom; magnon

¹⁾e-mail: grigori.volovik@aalto.fi

mass is $m_M = \omega_L/2c_s^2$, where ω_L is Larmor frequency, and c_s is the speed of spin waves in $^3\text{He-B}$ [6]. So we have two rotating states: the fully equilibrium rotating state where the mass vortices form the vortex lattice, while the spin vortices are absent; and the metastable Landau state in rotating vessel, where mass vortices are absent, while spin vortices form the lattice.

Similar effect of the formation of the vortex lattice takes place for the conventional spin vortices in the polar phase of superfluid ^3He . This phase exists in the nano-scale confinement (in the so called nafen) [10–21]. The Landau states have been observed in the polar phase in spite of zero value of the Landau critical velocity in this superfluid with Dirac nodal line [22]. According to Brauner and Moroz [23], in the presence of both the counterflow $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$ and magnetic field \mathbf{H} , the spin texture is formed, which originates from the similar mixed term in Eq. (3):

$$F_{\text{mix}} = S \nabla \alpha \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n), \quad (7)$$

where α is the angle of the unit $\hat{\mathbf{d}}$ -vector, which describes the spin part of the order parameter, and $S = \chi H$ is spin density in magnetic field. In the Landau state of the polar phase in the rotating cryostat, with $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ and $\mathbf{v}_s = 0$, the gradient energy for spin textures is:

$$F_{\text{grad}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{spin}} \left(\nabla \alpha - \frac{S}{\rho_{\text{spin}}} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right)^2, \quad (8)$$

which should lead to the lattice of spin vortices. The number of equilibrium spin vortices in the Landau state in the vessel of radius R is:

$$N_{\text{spin}} = \frac{\chi H}{\rho_{\text{spin}}} \Omega R^2. \quad (9)$$

So, in the spin-triplet superfluids, such as superfluid ^3He [24, 25], the Landau state of the superfluid in the rotating container can be the source of the formation of the vortex lattice of spin vortices. For the experimental realization of spin-vortex lattice the sufficiently large magnetic field is required. Similar phenomenon may occur in rotating neutron stars (review on superfluidity and superconductivity in neutron stars see in [26]).

This work has been supported by the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (Grant Agreement # 694248).

I thank Vladimir Eltsov for discussions.

Full text of the paper is published in JETP Letters journal. DOI: 10.1134/S0021364020100045

3. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev, Yu. M. Mukharskiy, and K. Flahbart, JETP **61**, 1199 (1985).
4. I. A. Fomin, JETP Lett. **40**, 1037 (1984).
5. I. A. Fomin, JETP **61**, 1207 (1985).
6. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, in *Novel Superfluids*, ed. by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, International Series of Monographs on Physics **156**, 253 (2013).
7. A. F. Andreev and E. P. Bashkin, JETP **42**, 164 (1975).
8. T. Kurumaji, T. Nakajima, M. Hirschberger, A. Kikkawa, Y. Yamasaki, H. Sagayama, H. Nakao, Y. Taguchi, T.-h. Arima, and Y. Tokura, Science **365**, 914 (2019).
9. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev, Yu. M. Mukharskiy, and D. A. Sergatskov, Physica B **165**, 649 (1990).
10. K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. B **73**, 060504(R) (2006).
11. R. Sh. Askhadullin, V. V. Dmitriev, D. A. Krasnikhin, P. N. Martynov, A. A. Osipov, A. A. Senin, and A. N. Yudin, JETP Lett. **95**, 326 (2012).
12. V. V. Dmitriev, A. A. Senin, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, Phys. Rev. Lett. **115**, 165304 (2015).
13. V. V. Dmitriev, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, Phys. Rev. Lett. **120**, 075301 (2018).
14. V. V. Dmitriev, M. S. Kutuzov, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, JETP Lett. **110**, 734 (2019).
15. W. P. Halperin, J. M. Parpia, and J. A. Sauls, Phys. Today **71**, 30 (2018).
16. G. E. Volovik, JETP Lett. **107**, 324 (2018).
17. J. Nissinen and G. E. Volovik, JETP Lett. **106**, 234 (2017).
18. T. Hisamitsu, M. Tange, and R. Ikeda, Phys. Rev. B **101**, 100502 (2020).
19. S. Autti, V. V. Dmitriev, J. T. Mäkinen, A. A. Soldatov, G. E. Volovik, A. N. Yudin, V. V. Zavjalov, and V. B. Eltsov, Phys. Rev. Lett. **117**, 255301 (2016).
20. J. T. Mäkinen, V. V. Dmitriev, J. Nissinen, J. Rysti, G. E. Volovik, A. N. Yudin, K. Zhang, and V. B. Eltsov, Nat. Commun. **10**, 237 (2019).
21. G. E. Volovik and K. Zhang, arXiv:2002.07578.
22. S. Autti, J. T. Mäkinen, J. Rysti, G. E. Volovik, V. V. Zavjalov, and V. B. Eltsov, arXiv:2002.11492.
23. T. Brauner and S. Moroz, Phys. Rev. B **99**, 214506 (2019).
24. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor and Francis, London (1990).
25. T. Mizushima, Ya. Tsutsumi, T. Kawakami, M. Sato, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 022001 (2016).
26. B. Haskell and A. Sedrakian, in: *The Physics and Astrophysics of Neutron Stars. Astrophysics and Space Science Library*, ed. by L. Rezzolla, P. Pizzochero, D. Jones, N. Rea, and I. Vidana, Springer, Cham (2018), v. 457.

1. I. Dzyaloshinskii, J. Phys. Chem. Solids **4**, 241 (1958).

2. T. Moriya, Phys. Rev. **120**, 91 (1960).

Расчет температурной зависимости нерелаксированного модуля сдвига высокоэнтропийных объемных аморфных сплавов на основе калориметрических данных

А. С. Макаров⁺¹⁾, Е. В. Гончарова⁺, Г. В. Афонин⁺, Ц. Ч. Цзiao^{*2)}, Н. П. Кобелев[×], В. А. Хоник⁺

⁺ Воронежский государственный педагогический университет, 394043 Воронеж, Россия

^{*} School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China

[×] Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 16 апреля 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 20 апреля 2020 г.

Предложен метод расчета температурной зависимости нерелаксированного модуля сдвига высокоэнтропийных объемных аморфных сплавов на основе данных дифференциальной сканирующей калориметрии. Показано хорошее соответствие этого метода результатам специально проведенных прецизионных измерений нерелаксированного модуля сдвига.

DOI: 10.31857/S1234567820100080

1. Введение. Высокоэнтропийные сплавы (ВЭС) – это недавно разработанные металлические материалы [1, 2], открывающие, по мнению ряда исследователей, новую эру в материаловедении и технике [3]. Изначально ВЭС были определены как сплавы, содержащие по меньшей мере пять основных металлических элементов с содержанием каждого от 5 до 35 ат. % [3]. Важнейшей характеристикой ВЭС считается энтропия смешения компонентов, которая максимальна в случае эквипроцентных составов. Обычно к ВЭС относят сплавы с энтропией смешения более $1.5R$ (R – универсальная газовая постоянная) [4]. Исходно ВЭС получали в виде однофазных твердых растворов с ГЦК, ОЦК, ГПУ и орторомбической сильно деформированной кристаллической структурой [1].

Сравнительно недавно были высказаны соображения о том, что высокая энтропия смешения будет способствовать формированию аморфного состояния [5, 6] и появились публикации о создании ВЭС в некристаллическом состоянии [7]. Такие многокомпонентные некристаллические сплавы стали называть высокоэнтропийными объемными аморфными сплавами (ВЭОАС, или HEVMGs – *High entropy bulk metallic glasses*). Несмотря на то, что объем выполненных на таких сплавах исследований относительно невелик, синтезированные к настоящему време-

ни ВЭОАС обладают рядом уникальных физическо-химических свойств, делающими перспективным их применение в ряде областей, в частности, в биомедицине [7].

Можно ожидать, что ВЭОАС, в силу их некристаллической и повышенной структурной энтропии, будут обладать выраженным явлением структурной релаксации, состоящем в непрерывном самопроизвольном изменении структуры (в пределах аморфного состояния) и сопутствующем изменении практически всех физических свойств, которое обычно интерпретируется в терминах изменения концентрации структурных “дефектов” [8]. При этом вопрос идентификации конкретных структурных “дефектов” аморфной структуры остается в целом дискуссионным.

С другой стороны, в настоящее время становится доминирующей идея о фундаментальной роли нерелаксированного (высокочастотного) модуля сдвига в описании различных релаксационных явлений в аморфных материалах [9], которая была первоначально сформулирована еще в середине прошлого века [10]. При этом нерелаксированный модуль сдвига является центральным параметром межузельной теории (МТ) [11, 12], в рамках которой удалось количественно описать довольно разнообразные релаксационные явления в аморфных сплавах, включая процессы их кристаллизации [13].

МТ предполагает, что макроскопическая релаксация аморфных сплавов формируется как результат

¹⁾ e-mail: a.s.makarov.vrn@gmail.com

²⁾ J. C. Qiao.

эволюции системы “дефектов” (кавычки далее опущены) – наномасштабных областей структуры, которые по своим свойствам аналогичны свойствам межузельных атомов в их наиболее устойчивой гантельной (расщепленной) форме, характерной для кристаллов [14]. Главная специфика этих дефектов состоит в их высокой чувствительности к действию внешнего механического сдвигового напряжения, что вызывает снижение локального модуля сдвига [15]. Соответственно, изменения концентрации дефектов отражаются в изменении макроскопической сдвиговой упругости. Можно поэтому ожидать, что релаксационные явления в аморфных сплавах, обусловленные тепловой активацией и механической нагрузкой (в пределах упругого отклика), будут в значительной степени описываться одной макроскопической характеристикой – нерелаксированным модулем сдвига. Эта величина может рассматриваться как термодинамический параметр релаксации, поскольку является второй производной термодинамического потенциала – энергии Гиббса – по сдвиговой деформации.

2. Постановка задачи. В силу вышеизложенного модуль сдвига и его температурная зависимость являются весьма важными для понимания спектра релаксационных явлений в ВЭОАС, но реализация высокоточных измерений нерелаксированного модуля сдвига является сложной в техническом плане задачей [16]. Цель настоящей работы – показать, что температурная зависимость нерелаксированного модуля сдвига ВЭОАС может быть рассчитана с хорошей точностью на основе тепловых эффектов, фиксируемых дифференциальной сканирующей калориметрией при нагреве. Физическая природа связи этих, казалось бы, разнородных явлений – сдвиговой упругости и изменения энтальпии (теплосодержания) – интерпретируется в рамках МТ естественным образом: при изменении концентрации дефектов межузельного типа выделяется или поглощается их суммарная энтальпия формирования, которая также контролируется модулем сдвига [13].

Ранее нами было показано [17], что изменение энтальпии H на единицу массы при структурной релаксации в процессе нагрева ВЭОАС $\text{Ti}_{16.7}\text{Zr}_{16.7}\text{Hf}_{16.7}\text{Cu}_{16.7}\text{Ni}_{16.7}\text{Be}_{16.7}$ может быть довольно точно описано с помощью соотношения, полученного в рамках МТ:

$$\frac{dH(T)}{dT} = \frac{\dot{T}}{\beta\rho} \left[\frac{G_{rt}}{\mu_{rt}} \frac{d\mu(T)}{dT} - \frac{dG(T)}{dT} \right], \quad (1)$$

где \dot{T} – скорость нагрева, β – безразмерный параметр релаксации, называемый сдвиговой восприим-

чивостью [13], ρ – плотность, $G(T)$ и $\mu(T)$ – температурные зависимости модуля сдвига ВЭОАС и материнского кристалла (т.е. кристалла, плавлением и последующей закалкой расплава которого изготовлялся аморфный сплав), соответственно, G_{rt} и μ_{rt} – их модули сдвига при комнатной температуре. Выражая dG из формулы (1) и интегрируя полученное соотношение от комнатной температуры до текущей температуры T , приходим к температурной зависимости модуля сдвига в виде

$$G(T) = \frac{G_{rt}}{\mu_{rt}} \mu(T) - \beta\rho \Delta H_{sr}(T), \quad (2)$$

где

$$\Delta H_{sr}(T) = \frac{1}{\dot{T}} \int [W_{\text{hebmng}}(T) - W_{cr}(T)] dT \quad (3)$$

есть изменение энтальпии в результате структурной релаксации, которое можно определить методом дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) посредством прямого измерения температурной зависимости тепловых потоков $W_{\text{hebmng}}(T)$ и $W_{cr}(T)$ для ВЭОАС и материнского кристалла соответственно. Поскольку изменения плотности при структурной релаксации аморфных сплавов измеряются долями процента, можно также принять, что $\rho = \text{const}$.

2. Методика эксперимента. Проверка уравнения (2) была выполнена с помощью серии специальных экспериментов. Для исследований были выбраны высокоэнтропийные аморфные сплавы $\text{Ti}_{16.7}\text{Zr}_{16.7}\text{Hf}_{16.7}\text{Cu}_{16.7}\text{Ni}_{16.7}\text{Be}_{16.7}$ и $\text{Zr}_{35}\text{Hf}_{17.5}\text{Ti}_{5.5}\text{Al}_{12.5}\text{Co}_{7.5}\text{Ni}_{12}\text{Cu}_{10}$ (ат. %, далее именуемые TiZrHfCuNiBe и ZrHfTiAlCoNiCu). Образцы ВЭОАС были получены методом всасывания расплава, некристалличность контролировалась рентгеновской дифракцией. Выбор указанных сплавов во многом определялся тем фактом, что они сочетают в себе высокую стеклообразующую способность (критический диаметр составляет 15 и 18 мм соответственно) и широкий температурный интервал переохлажденной жидкости [18, 19]. Возникающие при нагреве тепловые потоки измерялись с помощью дифференциального сканирующего калориметра Hitachi DSC 7020 в проточной атмосфере высокочистого (99.999 %) азота для минимизации поверхностного окисления. Масса образцов составляла 50–60 мг. Калориметр калибровался с использованием температур и энтальпий плавления высокочистых In, Sn, Pb и Al.

Модуль сдвига измерялся методом бесконтактного электромагнитно-акустического преобразования

(ЭМАП) [20]. Используемая экспериментальная установка ЭМАП позволяет определять резонансную частоту ($\approx 500\text{--}600$ кГц) поперечных колебаний в образцах размером $5 \times 5 \times 2$ мм³ с относительной погрешностью 10–100 ppm в зависимости от температуры. Абсолютное значение модуля сдвига рассчитывалось как $G(T) = G_{rt}f^2(T)/f_{rt}^2$, где G_{rt} – модуль сдвига при 310 К, $f(T)$ и f_{rt} – текущая и начальная (при $T = 310$ К) резонансные частоты, определявшиеся как максимумы соответствующих резонансных кривых при частотном сканировании. Измерения модуля сдвига проводились в вакууме ≈ 0.01 Па при скорости нагрева 3 К/мин. Абсолютная погрешность определения температуры составляла 0.2 К.

Термограммы ДСК были получены для исследованных сплавов: а) в исходном состоянии, б) после релаксации путем нагрева в состояние переохлажденной жидкости (до 687 и 720 К для ВЭОАС TiZrHfCuNiBe и ZrHfTiAlCoNiCu соответственно) и последующего охлаждения до комнатной температуры, а также в) после полной кристаллизации в результате нагрева до 870 К. Полученные результаты позволили рассчитать по формуле (3) температурную зависимость изменения энтальпии ΔH_{sr} в результате структурной релаксации.

3. Результаты и обсуждение. На рисунке 1 показана величина $\Delta H_{sr}(T)$ для ВЭОАС TiZrHfCuNiBe (а) и ZrHfTiAlCoNiCu (б) в исходном (свежезакаленном) и релаксированном (состаренном) состояниях. Видно, что в интервале от комнатной температуры до $T \approx 500$ К интенсивная структурная релаксация практически отсутствует и энтальпия изменяется мало. При более высоких температурах ΔH_{sr} для исходных образцов становится отрицательной (т.е. энтальпия при этих температурах меньше энтальпии исходного состояния при комнатной температуре) и быстро уменьшается с температурой, аналогично случаю стандартных аморфных сплавов на основе одного компонента [21, 22]. Это соответствует экзотермической структурной релаксации в интервале $500 \text{ К} < T < T_g$, интерпретируемой как термоактивируемое уменьшение концентрации дефектов вплоть до температуры стеклования T_g (показана стрелками на рис. 1). Нагрев выше T_g вызывает эндотермическую реакцию, рассматриваемую как результат генерации дефектов в состоянии переохлажденной жидкости, имеющем место выше T_g [13].

В случае релаксированного состояния экзотермическая структурная релаксация отсутствует, величина ΔH_{sr} всегда положительна и начинает быст-

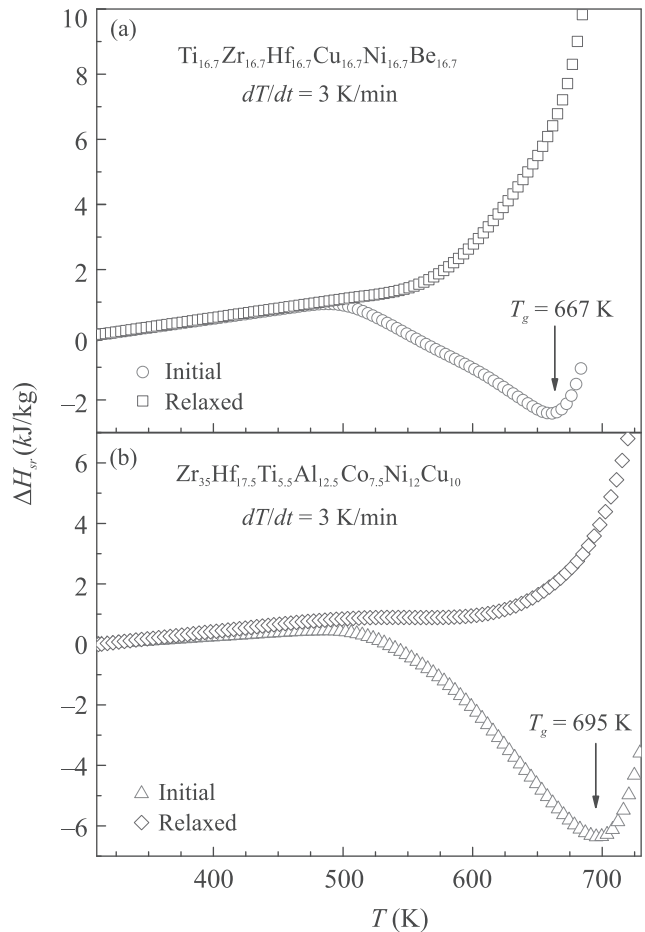


Рис. 1. (Цветной онлайн) Температурная зависимость ΔH_{sr} для ВЭОАС Ti_{16.7}Zr_{16.7}Hf_{16.7}Cu_{16.7}Ni_{16.7}Be_{16.7} (а) и Zr₃₅Hf_{17.5}Ti_{5.5}Al_{12.5}Co_{7.5}Ni₁₂Cu₁₀ (б) в исходном (initial) и релаксированном (relaxed) состояниях. Калориметрические температуры стеклования T_g показаны стрелками

ро расти по мере приближения к T_g [23], свидетельствуя о начале интенсивной эндотермической генерации дефектов в состоянии переохлажденной жидкости [13]. Следует отметить, что рис. 1 в качественном плане отражает температурное изменение концентрации дефектов в исходном и релаксированном состояниях, как было определено ранее для ряда стандартных аморфных сплавов [24, 25].

На рисунке 2а приведены экспериментальные температурные зависимости модуля сдвига ВЭОАС TiZrHfCuNiBe в исходном состоянии (exp. initial), после релаксации путем нагрева в область переохлажденной жидкости (exp. relaxed) и полной кристаллизации (exp. crystal). Измерения были выполнены при тех же условиях (скорость нагрева/охлаждения, предварительная термообработка), что и калориметрические измерения (рис. 1а). В исходном состоянии

наблюдается линейное ангармоническое уменьшение G вплоть до ≈ 500 К. Дальнейший нагрев вызывает дополнительный рост модуля сдвига, связанный со структурной релаксацией, который имеет место вплоть до температур, близких к T_g . Наконец, вблизи T_g наблюдается значительное снижение модуля сдвига, связанное с переходом в состояние переохлажденной жидкости.

Релаксированное состояние (рис. 2а) демонстрирует: а) увеличенное значение G при комнатной тем-

кристаллическом состоянии (exp. crystal) линейно уменьшается с температурой.

Аналогичные результаты по модулю сдвига были получены для ВЭОАС ZrHfTiAlCoNiCu (см. рис. 2б) в исходном аморфном состоянии (exp. initial), после релаксации путем нагрева в область переохлажденной жидкости (exp. relaxed) и полной кристаллизации (exp. crystal). Видно, что температурные зависимости G в исходном и релаксированном состояниях в целом близки к таковым для ВЭОАС TiZrHfCuNiBe (рис. 2а).

Для расчета температурной зависимости G по формуле (2) были использованы следующие параметры. Отношение модулей сдвига G_{rt}/μ_{rt} при комнатной температуре для TiZrHfCuNiBe было принято равным 0.777 и 0.817 для исходного и релаксированного состояний соответственно (рис. 2а); для ZrHfTiAlCoNiCu эти величины составили 0.781 и 0.822 (рис. 2б). Плотности для вышеуказанных сплавов были взяты равными 8030 кг/м^3 (данные работы [17]) и 7020 кг/м^3 (наши данные), соответственно. Сдвиговая восприимчивость β для обоих сплавов была принята равной 20 – типичному значению для аморфных сплавов [26]. Используемые в расчетах температурные зависимости энтальпии ΔH_{sr} показаны на рис. 1.

Результаты расчета $G(T)$ показаны на рис. 2а, б сплошными кривыми для исходных (calc. initial) и штриховыми кривыми для релаксированных состояний (calc. relaxed) исследованных ВЭОАС. Видно, что расчет хорошо воспроизводит все особенности экспериментальных зависимостей $G(T)$ обоих ВЭОАС в исходном и релаксированном состояниях: а) ангармоническое линейное снижение модуля сдвига вплоть до начала экзотермической структурной релаксации и рост G относительно ангармонической компоненты вплоть до температуры стеклования для исходных образцов, б) исчезновение обусловленного структурной релаксацией роста модуля сдвига релаксированных образцов и в) слияние зависимостей $G(T)$ для исходных и релаксированных состояний выше T_g вместе с сопутствующим ростом наклона $|dG/dT|$. При этом максимальное отклонение расчетных данных от эксперимента во всех случаях не превышает или существенно менее 0.4%. Можно констатировать, таким образом, что формализм межузельной теории дает весьма точное описание кинетики ангармонических и релаксационных изменений модуля сдвига, вызванных тепловым воздействием.

Принимая во внимание, что изменение объема (в процессе структурной релаксации или кристаллизации) аморфных сплавов обеспечивает относительно

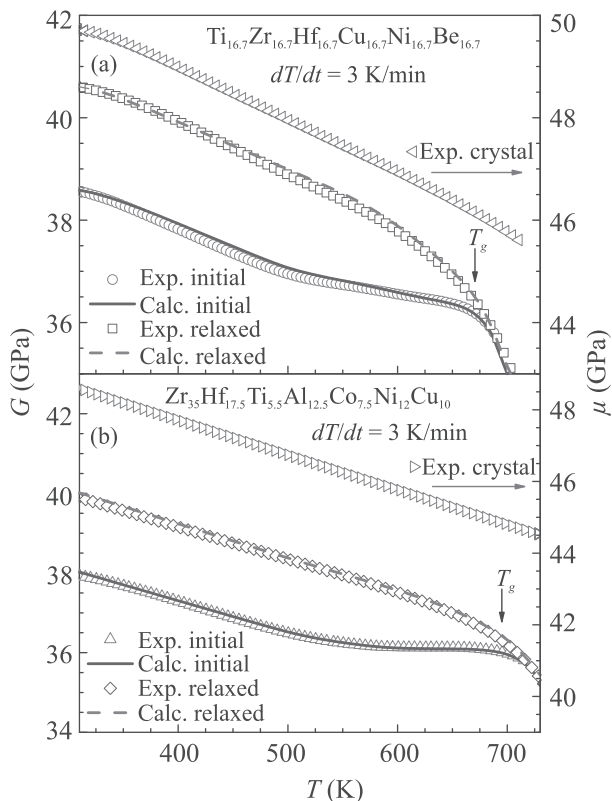


Рис. 2. (Цветной онлайн) Экспериментальные (символы) и рассчитанные (сплошная и штриховая кривые) по формуле (2) температурные зависимости модуля сдвига ВЭОАС $\text{Ti}_{16.7}\text{Zr}_{16.7}\text{Hf}_{16.7}\text{Cu}_{16.7}\text{Ni}_{16.7}\text{Be}_{16.7}$ (а) и $\text{Zr}_{35}\text{Hf}_{17.5}\text{Ti}_{5.5}\text{Al}_{12.5}\text{Co}_{7.5}\text{Ni}_{12}\text{Cu}_{10}$ (б) в исходном (initial) и релаксированном (relaxed) состояниях. Калориметрические температуры стеклования T_g показаны стрелками

пературе примерно на 5% по сравнению с исходным состоянием вследствие предшествующей структурной релаксации, б) линейное ангармоническое уменьшение модуля сдвига вплоть до ≈ 550 К и в) ускоренное (в сравнении с простым ангармонизмом) снижение G , указывающее на некоторый рост концентрации дефектов [13]. Модуль сдвига сплава в

небольшой вклад (менее 10 %) в энтальпию [27], можно принять, что $\Delta H \approx \Delta U$, где ΔU – изменение внутренней энергии. Тогда уравнение (2) можно переписать в дифференциальной форме:

$$\beta \rho dU = \frac{G_{rt}}{\mu_{rt}} d\mu - dG. \quad (4)$$

Интегрируя это уравнение, можно прийти к простому выражению для разности внутренних энергий аморфного сплава и материнского кристалла в виде $\Delta U_{g \rightarrow cr} = (\mu - G)/\beta \rho$, где все входящие в эту формулу величины определены выше. Это соотношение показывает, что избыточная внутренняя энергия аморфного сплава в сравнении с материнским кристаллом определяется просто соответствующими модулями сдвига G и μ . Смысл этого утверждения состоит в том, что, согласно МТ, избыточная энергия некристаллического состояния определяется упругой энергией системы дефектов межузельного типа, вмоложенных при закалке расплава. При кристаллизации эти дефекты исчезают, а их упругая энергия диссипирует в тепло, что было подтверждено специальными калориметрическими экспериментами [28]. Вышеприведенные результаты, таким образом, с этими экспериментами согласуются.

Ранее было показано [13], что уравнение (1), являющееся основой вышеприведенного анализа, хорошо выполняется для стандартных аморфных сплавов на основе одного или двух компонентов. В настоящей работе впервые установлено, что уравнение (2) (являющееся следствием уравнения (1)) справедливо и для случая высокоэнтропийных аморфных сплавов. Таким образом, есть основания предполагать, что межузельная теория применима для широкого круга аморфных сплавов, включая сплавы с большой структурной энтропией. Это, в свою очередь, подтверждает утверждение о том, что нерелаксированный модуль сдвига является важнейшей физической характеристикой металлического некристаллического состояния.

4. Заключение. Показано, что уравнение (2) с хорошей точностью ($\leq 0.4\%$) описывает температурные зависимости нерелаксированного модуля сдвига исследованных высокоэнтропийных аморфных сплавов в исходном (свежезакаленном) и релаксированном (состаренном) состояниях, а также в состоянии переохлажденной жидкости. Этот факт подтверждает гипотезу межузельной теории о том, что избыточная внутренняя энергия аморфного состояния в сравнении с материнским кристаллическим состоянием определяется модулями сдвига этих состояний. Разность этих модулей сдвига в свою очередь отра-

жает упругую энергию системы дефектов межузельного типа, фиксируемых в твердой аморфной структуре посредством закалки расплава.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-1101.2020.2). Ц.Ч. Цзiao выражает благодарность китайским научным фондам NSFC (National Natural Science Foundation of China) (проект 51971178) и NSF (National Science Foundation) провинции Шанси (проект 2019JM-344).

1. E. P. George, D. Raabe, and R. O. Ritchie, *Nat. Rev. Mater.* **4**, 515 (2019).
2. Y. F. Ye, Q. Wang, J. Lu, C. T. Liu, and Y. Yang, *Mater. Today* **19**, 349 (2016).
3. J. W. Yeh, S. K. Chen, S. J. Lin, J. Y. Gan, T. S. Chin, T. T. Shun, C. H. Tsau, and S. Y. Chang, *Adv. Eng. Mater.* **6**, 299 (2004).
4. Z. P. Lu, H. Wang, M. W. Chen, I. Baker, J. W. Yeh, C. T. Liu, and T. G. Nieh, *Intermetallics* **66**, 67 (2015).
5. S. Guo, Q. Hu, C. Ng, and C. T. Liu, *Intermetallics* **41**, 96 (2013).
6. M. H. Tsai and J. W. Yeh, *Mater. Res. Lett.* **4**, 515 (2014).
7. W. H. Wang, *JOM* **66**, 2067 (2014).
8. J. C. Qiao, J. M. Pelletier, N. Li, and Y. Yao, *J. Iron Steel Res. Int.* **23**, 19 (2016).
9. J. C. Dyre, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 953 (2006).
10. S. V. Nemilov, *Zh. Fiz. Khim.* **42**, 391 (1968) [*S. V. Nemilov, Rus. J. Phys. Chem.* **42**, 726 (1968)].
11. A. V. Granato, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 974 (1992).
12. A. V. Granato, *Eur. J. Phys.* **87**, 18 (2014).
13. V. A. Khonik and N. P. Kobelev, *Metals* **9**, 605 (2019).
14. W. G. Wolfer, *Fundamental properties of defects in metals*, in: *Comprehensive Nuclear Materials*, ed. by R. J. M. Konings, Elsevier, Amsterdam (2012).
15. P. A. Кончаков, А. С. Макаров, Г. В. Афонин, М. А. Крегова, Н. П. Кобелев, В. А. Хоник, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 473 (2019).
16. S. Wiederhorn, *Mechanical Properties*, in: *Springer Handbook of Materials Measurement Methods*, ed. by H. Czichos, T. Saito, and L. Smith, Springer, Berlin (2006).
17. Y. J. Duan, J. C. Qiao, D. Crespo, E. V. Goncharova, A. S. Makarov, G. V. Afonin, and V. A. Khonik, *J. Alloys Compd.* **830**, 154564 (2020).
18. H. Y. Ding, Y. Shao, P. Gong, J. F. Li, and K. F. Yao, *Mater. Lett.* **125**, 151 (2014).
19. T. Wada, J. Jiang, K. Yubuta, H. Kato, and A. Takeuchi, *Materialia* **7**, 100372 (2019).

20. А. Н. Васильев, Ю. П. Гайдуков, УФН **141**, 431 (1983) [A. N. Vasil'ev and Y. P. Gaidukov, Sov. Phys. Uspekhi **26**, 952 (1983)].
21. Z. Evenson and R. Busch, Acta Mater. **59**, 4404 (2011).
22. J. Bünz and G. Wilde, J. Appl. Phys. **114**, 223503 (2013).
23. G. Wilde, G. P. Görler, R. Willnecker, and H. J. Fecht, J. Appl. Phys. **87**, 1141 (2000).
24. A. S. Makarov, V. A. Khonik, Yu. P. Mitrofanov, A. V. Granato, D. M. Joncich, and S. V. Khonik, Appl. Phys. Lett. **102**, 091908 (2013).
25. А. С. Макаров, Ю. П. Митрофанов, Г. В. Афонин, В. А. Хоник, Н. П. Кобелев, ФТТ **57**, 965 (2015).
26. A. S. Makarov, Yu. P. Mitrofanov, G. V. Afonin, N. P. Kobelev, and V. A. Khonik, Intermetallics **87**, 1 (2017).
27. N. P. Kobelev and V. A. Khonik, J. Non-Cryst. Solids **427**, 184 (2015).
28. G. V. Afonin, Yu. P. Mitrofanov, A. S. Makarov, N. P. Kobelev, W. H. Wang, and V. A. Khonik, Acta Mater. **115**, 204 (2016).

Термопрограммируемый синтез монокристаллов квазисвободного N-графена из молекул ацетонитрила

С. Л. Коваленко, Т. В. Павлова, Б. В. Андриушечкин, К. Н. Ельцов¹⁾

Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 2020 г.

После переработки 16 апреля 2020 г.

Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

На поверхности Ni(111) реализован оригинальный термопрограммируемый рост монокристаллов азотированного графена размером с подложку. Технологический процесс включает в себя адсорбцию ацетонитрила при температуре около -10°C , флэш-прогрев образца до 140°C , отжиг при 400°C для образования сплошного эпитаксиального монослоя углерода со структурой графена. Интеркаляция золота под слой углерода на поверхности Ni(111) приводит к формированию квазисвободного монокристалла N-графена. Для определения структуры азотных центров в графене использовалась сканирующая туннельная микроскопия совместно с расчетами на основе теории функционала плотности. В частности, установлено, что азот может входить в решетку графена как в виде отдельных атомов, так и виде кластеров из двух и трех атомов. Концентрация азота в графене может составлять от 0.2 до 0.6 %.

DOI: 10.31857/S1234567820100092

В настоящее время наблюдается бум исследований в области двумерных материалов, начало которому было положено работами по отщеплению и исследованию монослоев графена и других соединений, проведенными А. Геймом с соавторами [1–3]. По прошествии более 15 лет семейство двумерных материалов существенно разрослось вплоть до самых экзотических предложений [4], появились промышленные технологии синтеза (см., например, [5] и ссылки внутри), но вопрос о создании двумерных кристаллов большого размера (1 см и более) остается актуальным. Помимо технологий синтеза чистых материалов необходимо также иметь методы контролируемого легирования для управления электронной и атомной структурой указанных материалов.

В этой связи, и в первую очередь для графена, активно развиваются методы легирования материалами III и V групп таблицы Менделеева. Наиболее используемой легирующей примесью является азот. Разделяют два подхода. Первый – легирование уже имеющегося чистого графена или его оксида. Здесь используется ионная имплантация, температурная и/или плазменная обработка в атмосфере азотсодержащих газов и т.п. Второй подход – синтез азотированного графена непосредственно из азотсодержащих углеводородов или из смеси углеводородов и азотсодержащих молекул (прекурсоров). Среди описанных в литературе методов синтеза азоти-

рованного графена (см. [6]) ни один не позволяет создавать большие монокристаллы азотированного графена (N-графена).

В данном Сообщении предлагается метод синтеза однослойного N-графена, позволяющий выращивать монокристаллы размером с подложку. За основу выбран метод термопрограммируемого роста (TPG – *thermoprogrammed growth*), использованный нами для создания монокристаллов большого размера нелегированного графена на поверхности Ni(111) [7, 8]. Суть метода TPG заключается в разделении двух стадий процесса синтеза: при комнатной температуре проводится экспонирование поверхности металла молекулами углеводородов, после чего газовая фаза снимается и образец отжигается в сверхвысоком вакууме. При использовании молекул пропилена метод TPG позволил создать на поверхности Ni(111) эпитаксиальный монослой углерода с атомной структурой графена, который после интеркаляции золота становится практически бездефектным монокристаллом квазисвободного графена размером с подложку [8].

Как было установлено в работе [7], необходимым условием для синтеза высококачественного нелегированного графена методом TPG является аккумуляция достаточного количества углерода в приповерхностной области Ni(111) при температурах ниже температуры образования карбида никеля. Для формирования N-графена к этим условиям добавляется требование наличия

¹⁾e-mail: eltsov@kapella.gpi.ru

азота на поверхности Ni(111) в процессе синтеза графена.

Ацетонитрил (C_2H_3N) был выбран нами на основе следующих соображений. Во-первых, для TPG-процесса требуется линейная азотсодержащая молекула углеводорода, потому что предполагается дегидрирование (на атомных террасах) и даже диссоциация (на краях атомных ступеней) молекулы уже при комнатной температуре аналогично поведению пропилена на поверхности Ni(111) [7–9]. Ароматические азотсодержащие молекулы типа триазина или пиридина, обычно используемые для CVD-синтеза графена [6], не подходят. Во-вторых, при дегидрировании или диссоциации молекулы атомы азота должны оставаться на поверхности никеля при температурах формирования графена. При изучении адсорбции ацетонитрила на поверхности Ni(111) авторами [10, 11] установлено, что половина молекул ацетонитрила десорбируется в молекулярной форме при температурах ниже $130^\circ C$, причем основной пик в спектрах термодесорбции имеет максимум при $80^\circ C$. Вторая же часть частично дегидрируется и трансформируется в азотсодержащие соединения, достаточно сильно связанные с поверхностью [11]. Термический выход водорода наблюдается при температурах 130 – $150^\circ C$. При дальнейшем нагревании, при температуре около $530^\circ C$, азот полностью удаляется с поверхности Ni(111), а углерод либо остается на поверхности, либо уходит в объем кристалла [11].

В соответствии с выявленными особенностями в поведении ацетонитрила на поверхности Ni(111) нами была разработана и апробирована процедура формирования эпитаксиального монослоя графена с включенными атомами азота. Для формирования квазисвободного N-графена, так же, как и в случае нелегированного графена, в интерфейс между эпитаксиальным слоем C(N) и поверхностью Ni(111) вводилось золото [8, 12].

Все технологические операции, анализ структуры и состава поверхности реализованы в единой сверхвысоковакуумной установке, оснащенной электронным оже-спектрометром (ЭОС) OPC-200 RIBER, дифрактометром медленных электронов (ДМЭ) OPC-304 RIBER, сканирующим туннельным микроскопом (СТМ) GPI300 SigmaScan (<http://www.sigmascan.ru/index.php/en/menu-uhvstm-2>), квадрупольным масс-спектрометром Q156 RIBER, ячейками напыления, системой напуска газов, системой прогрева образцов и кварцевым измерителем толщины.

При исследовании поверхности в СТМ использовались как платиново-родиевые иглы, так и

поликристаллические вольфрамовые иглы. СТМ-изображения записывались при комнатной температуре. В качестве подложки взят монокристалл никеля $6 \times 6 \times 2$ мм (Surface Preparation Laboratory <https://www.spl.eu>), рабочая поверхность которого ориентирована в плоскости (111) с точностью 0.1° . Для получения атомно-чистой монокристаллической поверхности и обеднения приповерхностной области углеродом использовались циклы ионного травления (Ar^+ , 1 кэВ, 0.1 мкА, 15 мин) и отжига ($320^\circ C$, 10 мин). В последнем цикле очистки отжиг проводился при температуре $600^\circ C$. Критерием необходимой чистоты поверхности являлось отношение интенсивностей оже-пиков остаточных загрязнений (C, S) к оже-пику Ni $L_{3M_{4,5}M_{4,5}}$, равное 0.01. При этом картины ДМЭ поверхности демонстрировали четкие пятна дифракции, а СТМ-кадры – обширные террасы, разделенные одноатомными ступенями. Поток молекул ацетонитрила подавался непосредственно на образец через 2-миллиметровый капилляр. Давление в пучке тонко регулировалось пьезокерамическим натекателем в диапазоне 10^{-5} – 10^{-9} Торр.

Анализ атомных структур, полученных при СТМ-измерениях, проводился на основе теории функционала плотности. Спин-поляризованные вычисления были выполнены в программном пакете VASP [13, 14]. Использовались обобщенное градиентное приближение (GGA) и обменно-корреляционный функционал PBE [15] с учетом ван-дер-ваальсовых взаимодействий по методу Гримме [16]. Поверхность Ni(111) моделировалась периодически повторяющимися гексагональными ячейками 6×6 , состоящими из четырех атомных слоев никеля, из которых нижние два были фиксированы. Ячейки были разделены вакуумным промежутком в 17 \AA . Атомы углерода и азота помещались на верхнюю часть ячейки и могли релаксировать в процессе вычисления. Атомы углерода в структуре графена на поверхности Ni(111) располагались в положениях над атомом никеля (op top) и г.ц.к. положениях (fcc). В расчетах использовалась сетка k -точек $6 \times 6 \times 1$. СТМ-изображения были построены в программе HiveSTM [17] в рамках приближения Терсоффа–Хаманна [18].

Энергия формирования азотных центров вычислялась по следующей формуле:

$$E_f = E_{\text{def}} - (E_{\text{Gr/Ni}} - V_C E_C + N_N E_N),$$

где E_{def} – полная энергия графена с азотным центром (дефектом) на поверхности Ni(111), $E_{\text{Gr/Ni}}$ – полная энергия бездефектного графена на поверхности Ni(111), V_C – число вакансий углерода в графене,

E_C – энергия одного атома углерода в бездефектном графене на поверхности Ni(111), N_N – число атомов азота в графене, E_N – энергия одного атома азота, адсорбированного на поверхности Ni(111). Энергия E_C вычислялась как разница полной энергии графена на поверхности Ni(111) ($E_{Gr/Ni}$) и чистой поверхности Ni(111) (E_{Ni}), деленная на число атомов углерода в суперячейке графена (N_C):

$$E_C = (E_{Gr/Ni} - E_{Ni})/N_C.$$

При вычислении энергии E_N атом азота помещался на поверхность Ni(111) в г.ц.к. положение, являющееся наиболее выгодным адсорбционным положением отдельного атома азота на Ni(111) [19]. Отметим, что при формировании графена методом TPG, атомы азота перед встраиванием в графен находятся на поверхности Ni(111), поэтому мы берем энергию адсорбированных атомов азота, а не энергию атомов (или молекул) в вакууме. Тогда энергия E_N равна разнице полной энергии поверхности Ni(111) с атомом азота на ней ($E_{N/Ni}$) и полной энергии чистой поверхности Ni(111):

$$E_N = E_{N/Ni} - E_{Ni}.$$

Процедура TPG-синтеза эпитаксиального монослоя углерода, легированного азотом, включала в себя следующие операции: 1) насыщение приповерхностной области образца Ni(111) углеродом с сохранением чистоты самой поверхности; 2) адсорбцию ацетонитрила при температуре $\approx -10^\circ\text{C}$ дозой 1000–3000 L (Ленгмюр); 3) быстрый (6–7 град/с) нагрев образца до 140°C и охлаждение естественным образом (≈ -0.5 град/с) до комнатной температуры; 4) отжиг образца при 400°C в течение $1 \div 5$ ч.

Как установлено нами при синтезе нелегированного графена [7, 8], насыщенная углеродом приповерхностная область Ni(111) является основным источником углерода для формирования углеродного монослоя на поверхности при высокотемпературном отжиге (500°C). Такое поведение характерно для синтеза графена на поверхности металлов с высоким коэффициентом растворения углерода в объеме [20]. Для насыщения углеродом приповерхностной области Ni(111) в настоящей работе (аналогично [7, 8]) использовался крекинг пропилена на горячей поверхности при температуре 600°C в течение 10 мин и давлении газа $1 \cdot 10^{-5}$ Торр вблизи поверхности ($D \approx 10^4$ L). В результате на поверхности Ni(111) формировался монослой углерода со структурой графена в виде эпитаксиальных и развернутых доменов размерами $10 \div 50$ нм (“поликристал-

лический графен”). Одновременно происходило насыщение приповерхностной области за счет диффузии атомов углерода в объем кристалла никеля. Для удаления поликристаллического графена с поверхности использовались циклы “травление (Ag^+ , 1 кэВ, 10 мин)/нагрев (10 мин, 600°C)”. Учитывая, что при этой температуре сегрегация углерода проходит гораздо менее активно, чем при 320°C [21], удавалось достаточно хорошо очистить поверхность Ni(111), сохраняя под ней растворенный углерод. Указанные циклы очистки проводились до тех пор, пока углерод практически полностью не удалялся с поверхности. В результате не более чем 3% площади образца оставалось покрытой углеродом, что соответствовало соотношению ≈ 0.02 интенсивностей оже-линий C *KLL* и Ni *L₃M_{4,5}M_{4,5}*. Линия C *KLL* имела форму, характерную для карбидов, и в СТМ-кадрах углерод (в виде поверхностного карбида никеля Ni₂C) наблюдался лишь вблизи краев атомных ступеней. Такая подготовка, в основном, предотвращала образование развернутых доменов графена при последующем TPG-синтезе, поскольку в работе [22] показано, что поверх Ni₂C графен растет с разворотом атомной решетки.

Запасенного таким образом подповерхностного углерода хватало примерно на 8–10 TPG-процессов. Для тестирования запаса подповерхностного углерода мог использоваться отжиг образца при 320°C в течение 15 мин. Установлено опытным путем, что, если растворенного углерода достаточно, то за 15 мин при температуре 320°C большая часть (80–90%) поверхности Ni(111) покрывается Ni₂C.

Ацетонитрил использовался в первую очередь как источник азота для легирования графена. Для увеличения исходной степени покрытия C₂H₃N адсорбировался на поверхность Ni(111) при пониженной температуре, обычно $-(5 \div 15)^\circ\text{C}$ [10, 11]. Так, после осаждения 2000 L ацетонитрила в оже-спектре поверхности отношение интенсивностей линий N *KLL*, C *KLL* и Ni *L₃M_{4,5}M_{4,5}* составляло 0.06 : 0.11 : 1.0. С учетом соответствующих коэффициентов чувствительности оже-линий отношение азота и углерода в адсорбированном слое составляло 1 : 2.9, что несколько меньше, чем должно быть в молекуле ацетонитрила (1 : 2). На рис. 1а показано СТМ-изображение поверхности Ni(111), записанное при комнатной температуре после указанной адсорбции. Поверхность никеля оказывается покрытой одномерными цепочками, похожими на цепочки, которые наблюдаются на поверхности Ni(111) [7, 9] после адсорбции пропилена. Характерная длина цепочек находится в диапазоне $15 \div 20$ Å.

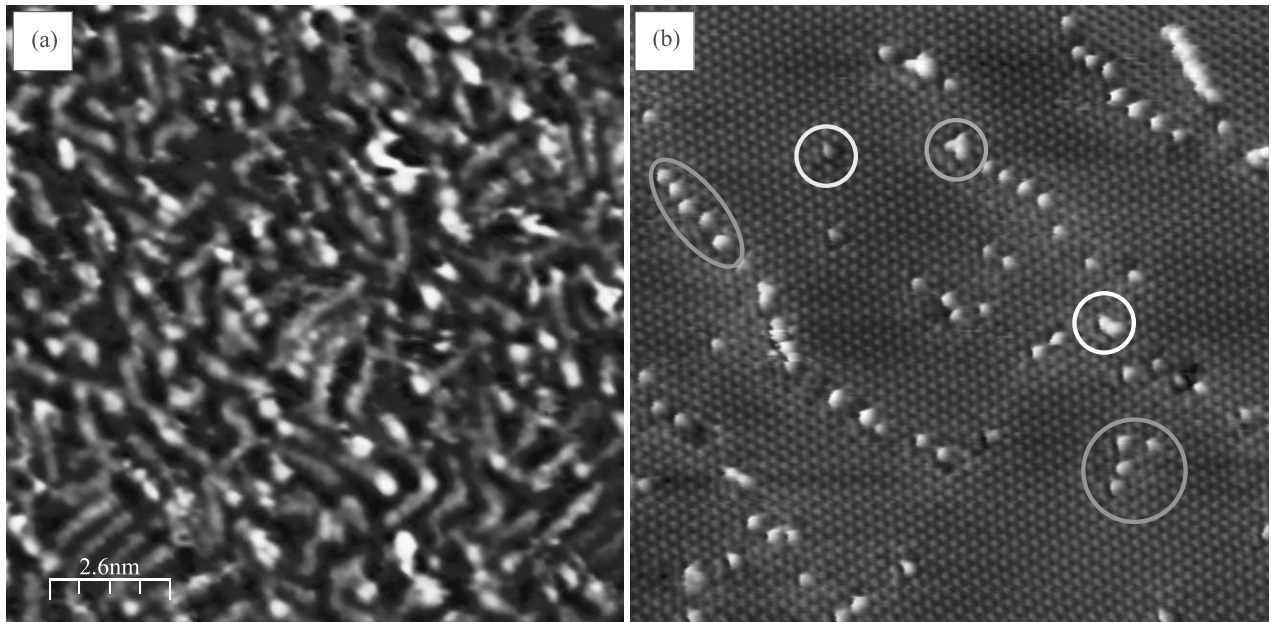


Рис. 1. (Цветной онлайн) СТМ-изображения поверхности Ni(111) после адсорбции 2000 L ацетонитрила (а), и после флэш-нагрева (140°C) и отжига при температуре 400°C в течение 5 ч (б). Размер кадров $130 \times 130 \text{ \AA}^2$ ($U_s = -14 \text{ мВ}$, $I_t = 1.4 \text{ нА}$). В синих овалах показаны как отдельные центры, так и “гирлянды” никелевых дефектов Ni-V. Желтым, зеленым и белым цветом обведены наиболее часто наблюдаемые азотные центры

В работе [9] нами установлено, что в случае адсорбции пропилена на поверхности Ni(111) энергетически наиболее выгодными являются цепочки типа C_nH_n . Именно $C_{12}H_{12}$ наиболее адекватно описывают цепочки длиной 18 \AA , наблюдаемые в работе [9]. Поскольку ацетонитрил представляет собой молекулу этана, в которой три атома водорода заменены на атом азота, то можно предположить, что наблюдаемые при комнатной температуре линейные цепочки представляют собой комбинацию из нескольких молекул ацетонитрила, в которых могут отсутствовать как атомы водорода, так и атомы азота. Для более точного анализа атомной структуры цепочек требуется специальное исследование. Тем не менее, нами были смоделированы атомные структуры типа $C_nH_{n+3}N$, которые оказались устойчивыми при $n = 11$ и хорошо описывали наиболее часто наблюдаемые цепочки длиной 18 \AA .

Флэш-нагрев поверхности, полученной в результате осаждения ацетонитрила, до 140°C приводил к уменьшению интенсивностей оже-линий углерода и азота. Соотношение интенсивностей $N KLL$, $C KLL$ и $Ni L_{3,4,5}M_{4,5}$ становилось $0.02 : 0.06 : 1.0$ и содержание азота в адсорбированном слое составляло около 20 %.

Третья стадия ТРГ-синтеза N-графена осуществлялась при минимально возможной температуре

400°C , чтобы избежать десорбции азота [11]. После 5-ти часов отжига при указанной температуре на поверхности Ni(111) формируется сплошной эпитаксиальный монослой углерода с атомной структурой графена. Соотношение интенсивностей указанных линий в оже-спектре изменилось до $0.006 : 0.38 : 1.0$. Линия $N KLL$ становится сравнимой с шумами. Оценочная концентрация азота в углеродном слое составила менее 1%. СТМ-измерения поверхности, проводимые через каждый час отжига, показали, что островки новой фазы с атомной структурой графена формируются и на террасах, и на краях ступеней. Между островками наблюдаются отдельные атомные цепочки, похожие на цепочки, представленные на рис. 1а. По мере увеличения времени отжига происходит рост островков и их агломерация с формированием сплошной пленки со структурой графена.

На рисунке 1b приведен СТМ-кадр высокого качества поверхности Ni(111), покрытой сплошным слоем углерода в структуре графена. Отчетливо видны атомные дефекты, часть из которых является атомами никеля, внедренными в бивакансии в решетке графена, так называемые Ni-V центры [7, 23] (обведены овалами синего цвета). Внедренные атомы никеля наблюдаются в виде одиночных элементов и “гирлянд”. Помимо атомов никеля на СТМ-изображении имеются атомные структуры, которые

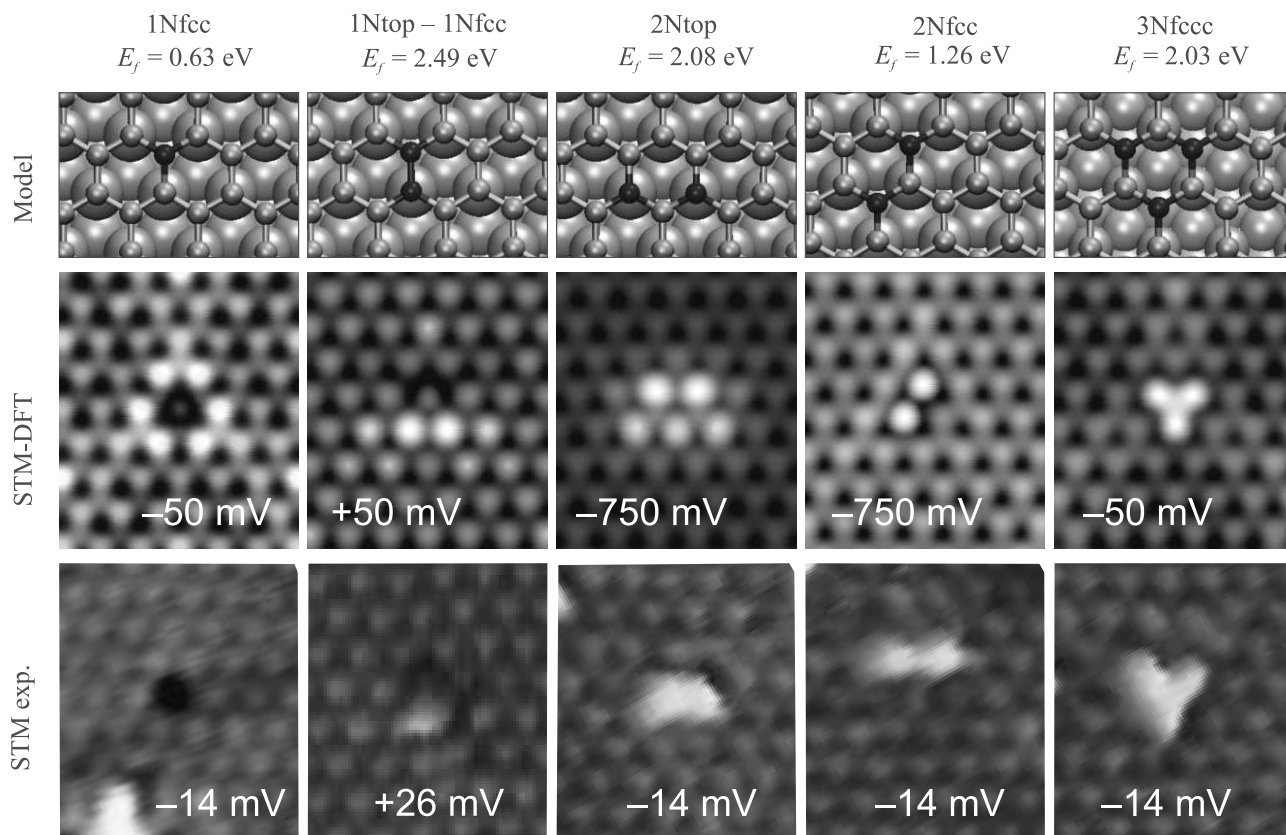


Рис. 2. (Цветной онлайн) Расчетные модели (верхняя панель), соответствующие им симулированные (средняя панель) и экспериментальные (нижняя панель) СТМ-изображения локальных структур из атомов азота, наблюдаемые в решетке эпитаксиального монослоя углерода, синтезированного TPG-методом из молекул ацетонитрила на поверхности Ni(111). Атомы азота обозначены синим цветом. Сверху над каждым столбцом указаны идентификация модели и рассчитанная энергия E_f ; цифрами на СТМ-изображениях указаны туннельные напряжения при сканировании и моделировании

мы связываем с внедрением атомов азота в решетку графена.

Нами было рассмотрено большое количество моделей для дефектов с одним, двумя и тремя внедренными атомами азота, замещающих атомы углерода в решетке, как с наличием одной вакансии рядом, так и без вакансий. На рисунке 2 приведены СТМ-изображения экспериментально наблюдаемых локальных атомных структур в решетке графена на поверхности Ni(111), расчетные модели и соответствующие симулированные СТМ-изображения атомных центров из одного и/или нескольких атомов азота. Нам не удалось с достаточной степенью достоверности сопоставить наблюдаемые СТМ-изображения расчетным изображениям для моделей с углеродной вакансией в азотном центре, и, наоборот, на наш взгляд, приведенные на рис. 2 экспериментальные данные для моделей без вакансий неплохо согласуются с расчетными. Отметим, что наиболее часто

наблюдаемыми азотными центрами являются атомные дефекты замещения атома углерода в г.д.к. положении (1Nfcc), а также центры из двух атомов азота, расположенных либо в одной, либо сразу в обеих подрешетках графена. Также наблюдаются центры из трех атомов азота. Из всех азотных центров на рис. 2 энергия формирования E_f для центра 1Nfcc является наименьшей, следовательно, его формирование является наиболее выгодным по сравнению с другими. Оценочная концентрация идентифицированных азотных центров в N-Gr/Ni(111) составляет 0.1 %, однако, возможно, что в условиях эксперимента часть азотных центров мы не можем отличить от Ni-V дефектов. В этом случае величина 0.1 % является нижней границей для определения концентрации азотных центров.

Таким образом, показано, что TPG-метод позволяет синтезировать однослойный монокристаллический эпитаксиальный N-графен на поверхности

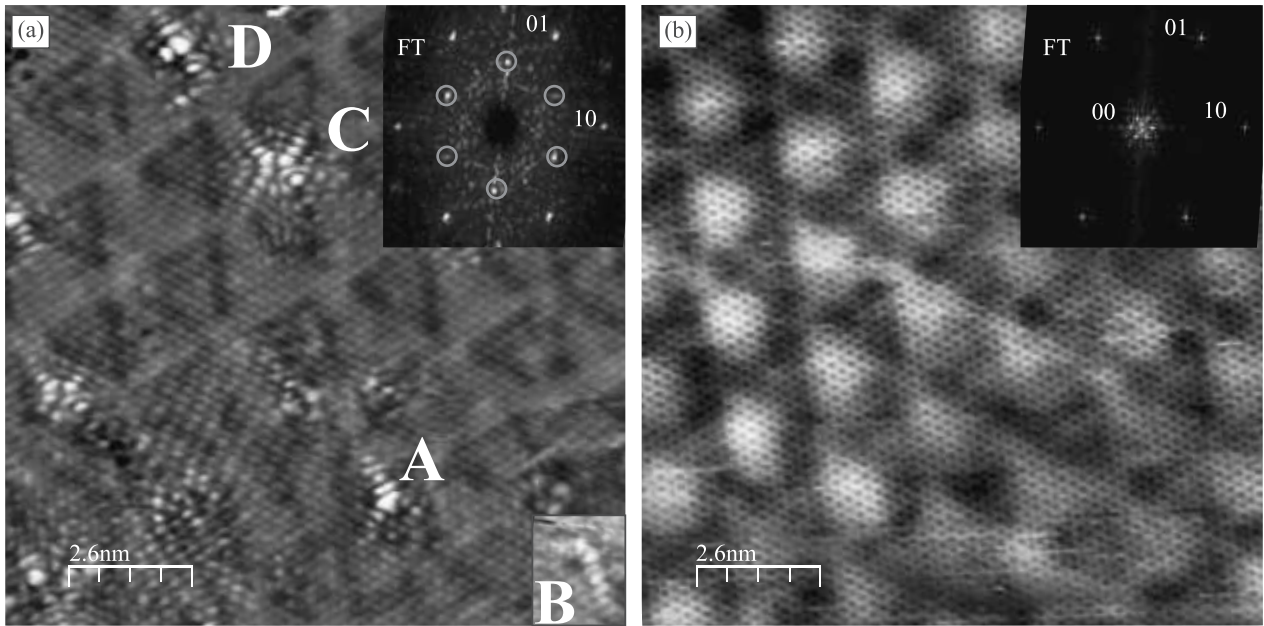


Рис. 3. (Цветной онлайн) СТМ-изображения: (а) – поверхности N-Gr/Au/Ni(111) ($U_s = -8$ мВ, $I_t = 1.2$ нА); (б) – поверхности Gr/Au/Ni(111) ($U_s = -13$ мВ, $I_t = 0.2$ нА). Соответствующие Фурье-образы (FT) приведены на вставках в правом верхнем углу. Обозначены рефлексы (00, 10 и 01) решетки графена. На обоих СТМ-кадрах видна сверхструктура петлевых дислокаций, расположенных в верхнем слое Ni(111), которая, в частности, проявляется в Фурье-образе нелегированного графена вокруг каждого рефлекса и особенно отчетливо для рефлекса (00) (б). Стоячие электронные волны, наблюдаемые в (а), формируют структуру $\sqrt{3} \times \sqrt{3}-30^\circ$, рефлексы от которой на FT обведены синими кружками. Буквами на (а) обозначены типы центров рассеяния, центр В показан в виде вставки в правом нижнем углу (а)

Ni(111). Однако сильное взаимодействие с подложкой (гибридизация π -состояний графена и d -состояний никеля) разрушает уникальные свойства, характерные для свободного графена. Одним из способов для восстановления электронных свойств графена (линейной дисперсии в K -точке зоны Бриллюэна) является интеркаляция монослоя золота в интерфейс Gr/Ni(111) [8, 12]. Для формирования слоя золота в интерфейсе N-Gr/Ni(111) мы предварительно напыляли золото на поверхность N-Gr/Ni(111) при комнатной температуре, после чего осуществлялся прогрев при 450°C в течение 10 мин. Количество напыляемого золота контролировалось кварцевым измерителем толщины. Критерием вхождения золота в интерфейс N-Gr/Ni(111) является возникновение структуры треугольных петлевых дислокаций, характерной для системы Au/Ni(111) [24], которую принципиально можно наблюдать в СТМ-изображениях графена поверх Au/Ni(111) [8]. Наблюдение сплошной атомной решетки графена, под которой располагается сеть треугольных петлевых дислокаций в верхнем атомном слое никеля, говорит о сохранении целостности графена и позволяет утверждать, что произошло

внедрение золота между графеном и поверхностью Ni(111).

На рисунке 3а представлен атомно-разрешенный СТМ-кадр поверхности N-Gr/Au/Ni(111) с однородной сетью треугольных петлевых дислокаций. Обработка СТМ-изображений дает период сети треугольных петлевых дислокаций 10.9 ± 1.5 в параметрах решетки Ni(111). Это означает, что Au находится в интерфейсе Gr/Ni(111) в виде монослоя чистого золота или слабо разбавленного Au-Ni (в основном, золото) сплава согласно работе [24]. Для сравнения с СТМ-изображением N-Gr/Au/Ni(111) на рис. 3б приведено СТМ-изображение поверхности Gr/Au/Ni(111), аналогичное полученному нами в работе [8].

В работе [25] спектральными методами показано, что после интеркаляции золота под N-графен на поверхности Ni(111), полученный CVD-методом из молекул триазина, атомы азота, ранее встроенные в графен, сохраняются. Действительно, на рис. 3а наблюдаются локальные атомные структуры с характерными интерференционными максимумами в структуре $C(0001)-\sqrt{3} \times \sqrt{3}-30^\circ$. На вставках к рис. 3а, б показаны соответствующие Фурье-образы СТМ-изображений.

После интеркаляции золота в N-Gr/Ni(111) измененный оже-сигнал от азота был на уровне шума. Тем не менее, мы считаем, что уровень легирования графена азотом остался достаточно высоким. Основанием для этого является наличие атомных центров рассеяния, наблюдаемых в СТМ-кадрах поверхности графена после интеркаляции золота (рис. 3а). Ранее нами было установлено [8], что для случая нелегированного графена, полученного при TPG-синтезе из пропилена, концентрация дефектов после интеркаляции золота сильно падает в сравнении с исходной (около 1%, Ni-V центры) и становится меньше 0.02%. После интеркаляции золота в N-Gr/Ni(111) концентрация дефектов равна $\approx 0.3\%$, что на порядок превышает характерную остаточную концентрацию дефектов для нелегированного графена и не противоречит оценке исходной концентрации азота в N-Gr/Ni(111) до интеркаляции, составляющей не менее 0.1%. Таким образом, мы полагаем, что большая часть центров электронного рассеяния, наблюдаемых в СТМ-кадрах, обусловлена внедрением атомов азота в решетку графена.

Наблюдаемые в СТМ-кадрах центры электронного рассеяния в N-Gr/Au/Ni(111) можно разделить на следующие типы (рис. 3а): А – центр в виде трехлучевой звезды; В – центр в виде ассиметричной двухлучевой звезды, где один луч практически не наблюдается; С – центр с квадратной симметрией и центр D. Интерференционная картина центра А может быть обусловлена или единичной вакансией в графене, или замещением атома углерода атомом азота, или пиридиновым центром [26, 27]. Мы исключаем одиночную вакансию, поскольку отдельных вакансий при TPG-синтезе Gr/Au/Ni(111) из молекул пропилена практически не наблюдалось. Возможность формирования пиридинового центра N-V в процессе интеркаляции золота нами не исключается, хотя наиболее вероятным источником полносимметричной картины интерференции является 1Nfcc-центр, наблюдаемый в исходной структуре N-Gr/Ni(111) (см. рис. 2). Структура центра В, в соответствие с данными работ [27, 28], хорошо объясняется замещением двух ближайших атомов углерода из одной подрешетки графена атомами азота. Центр С можно интерпретировать как замещение двух ближайших атомов углерода из разных подрешеток графена атомами азота [26, 27]. Центр D ранее наблюдался в работе [26], но своей интерпретации не получил. Мы также пока затрудняемся дать интерпретацию центра D. Более детальный анализ структуры всех наблюдаемых N-центров как до, так и после

интеркаляции золотом мы планируем сделать при пониженных температурах (LN_2 или LHe) методами сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии.

Таким образом, нами предложен и реализован новый способ синтеза азотированного графена методом TPG из ацетонитрила. Данный метод позволяет формировать на всей поверхности Ni(111) сплошной эпитаксиальный монослой углерода в структуре графена с внедренными атомами азота. Сравнение экспериментальных и модельных СТМ-изображений наблюдаемых локальных атомных структур дает основания полагать, что семейство азотных центров в монослое углерода достаточно большое и может включать в себя как одноатомные, так и двух- и трехатомные образования. Интеркаляция золота под монослой углерода позволяет сохранять азотные центры, снимая гибридизацию π -состояний графена и d -состояний никеля. Также установлено, что в интерфейсе N-Gr/Ni(111) интеркалированное золото находится в виде монослоя чистого золота или слабо разбавленного Au-Ni (в основном, золото) сплава. Концентрация азотных центров на поверхности N-графена после интеркаляции золота (не более 0.3%) по порядку величины совпадает с концентрацией азотных дефектов в N-графене/Ni(111) (не менее 0.1%). Если считать, что в среднем азотный центр содержит два атома азота, то концентрация азота в графене находится в диапазоне от 0.2 до 0.6%.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант # 16-12-00050).

Авторы выражают благодарность Межведомственному суперкомпьютерному центру РАН за предоставление вычислительных ресурсов.

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
2. K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, and A. K. Geim, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA (PNAS)* **102**, 10451 (2005).
3. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
4. А. А. Артюх, Л. А. Чернозатонский, Письма в ЖЭТФ **111**, 93 (2020).
5. A. C. Ferrari, F. Bonaccorso, V. Fal'ko et al. (Collaboration), *Nanoscale* **7**, 4598 (2015).
6. H. Xu, L. Ma, and Z. Jin, *Journal of Energy Chemistry* **27**, 146 (2018).

7. С. Л. Коваленко, Т. В. Павлова, Б. В. Андрияшечкин, К. Н. Ельцов, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 170 (2017).
8. K. N. Eltsov, S. L. Kovalenko, T. V. Pavlova, and B. V. Andryushechkin, *Atomically Controlled Surfaces Interfaces and Nanostructures*, ed. by A. Bianconi and A. Marcelli, Superstripes Press, Rome (2016), Science Series, v. 9, p. 37.
9. T. V. Pavlova, S. L. Kovalenko, and K. N. Eltsov, *J. Phys. Chem. C* **124**, 8218 (2020); <https://dx.doi.org/10.1021/acs.jpcc.9b11942>.
10. C. M. Friend, E. L. Muettterties, and J. L. Gland, *J. Phys. Chem.* **85**, 3256 (1981).
11. J. C. Hemminger, E. L. Muetttertie, and G. A. Somorjai, *JACS* **101**, 62 (1979).
12. A. Varykhalov, J. Sanchez-Barriga, A. Shikin, C. Biswas, E. Vescovo, A. Rybkin, D. Marchenko, and O. Rader, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 157601 (2008).
13. G. Kresse and J. Hafner, *Phys. Rev. B* **47**, 558 (1993).
14. G. Kresse and J. Furthmüller, *Phys. Rev. B* **54**, 11169 (1996).
15. J. P. Perdew, K. Burke, and M. Ernzerhof, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3865 (1996).
16. S. Grimme, *J. Comput. Chem.* **27**, 1787 (2006).
17. D. E. P. Vanpoucke and G. Brocks, *Phys. Rev. B* **77**, 241308 (2008).
18. J. Tersoff and D. R. Hamann, *Phys. Rev. B* **31**, 805 (1985).
19. Y. Bai, D. Kirvassilis, L. Xu, and M. Mavrikakis, *Surf. Sci.* **679**, 240 (2019).
20. Е. В. Рутьков, Е. Ю. Афанасьева, Н. Р. Галль, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 520 (2020).
21. T. Jach and J. C. Hamilton, *Phys. Rev. B* **26**, 3766 (1982).
22. P. Jacobson, B. Stger, A. Garhofer, G. S. Parkinson, M. Schmid, R. Caudillo, F. Mittendorfer, J. Redinger, and U. Diebold, *ACS Nano* **6**, 3564 (2012).
23. T. V. Pavlova, S. L. Kovalenko, B. V. Andryushechkin, G. M. Gidomirov, and K. N. Eltsov, *Physics of Wave Phenomena* **28**(3) (2020), in press.
24. J. Jacobsen, L. P. Nielsen, F. Besenbacher, I. Stensgaard, E. Lægsgaard, T. Rasmussen, K. W. Jacobsen, and J. K. Nørskov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 489 (1995).
25. D. Usachov, O. Vilkov, A. Grüneis, D. Haberer, A. Fedorov, V. K. Adamchuk, A. B. Preobrajenski, P. Dudin, A. Barinov, M. Oehzelt, C. Laubschat, and D. V. Vyalikh, *Nano Lett.* **11**, 5401 (2011).
26. F. Joucken, Ya. Tison, J. Lagoute, J. Dumont, D. Cabosart, B. Zheng, V. Repain, C. Chacon, Ya. Girard, A. R. Botello-Méndez, S. Rousset, R. Sporcken, J.-C. Charlier, and L. Henrard, *Phys. Rev. B* **85**, 161408 (2012).
27. M. Telychko, P. Mutombo, M. Ondráček, P. Hapala, F. C. Bocquet, J. Kolorenč, M. Vondráček, P. Jelínek, and M. Švec, *ACS Nano* **8**, 7318 (2014).
28. P. Jacobson, B. Stöger, A. Garhofer, G. S. Parkinson, M. Schmid, R. Caudillo, F. Mittendorfer, J. Redinger, and U. Diebold, *ACS Nano* **6**, 3564 (2012).

Comment on “Amplitude of waves in the Kelvin-wave cascade” (Pis'ma v ZhETF 111, 462 (2020))

*E. B. Sonin*¹⁾

Racah Institute of Physics, Hebrew University of Jerusalem, Givat Ram, 9190401 Jerusalem, Israel

Submitted 9 April 2020
Resubmitted 9 April 2020
Accepted 16 April 2020

DOI: 10.31857/S1234567820100109

Eltsov and L'vov [1] derived the relation between the amplitude of Kelvin waves and the energy flux in the Kelvin-wave cascade. This returns us to the rather old, but still unresolved dispute on the role of the tilt symmetry and the locality in the Kelvin-wave cascade (see Sec. 14.6 of the book [2] for references).

Kozik and Svistunov [3] investigated the Kelvin wave cascade using the Boltzmann equation for the Kelvin modes. They took into account the weak 6-waves interaction and used the locality condition similar to that in the classical Kolmogorov cascade: the energy flux in the space of wave numbers k depends only on the energy density at k of the same order of magnitude. L'vov and Nazarenko [4] challenged their analysis arguing that the cascade is connected to the 4-wave interaction despite the latter breaks the rotational invariance and does depend on the tilt of the vortex line with respect to some direction. In the general case of the n -wave interaction the expression connecting the energy flux ϵ in the k space and the energy density E_k is [2, 5]

$$E_k \sim \kappa^2 \Lambda \left(\frac{\epsilon}{\kappa^3} \right)^{\frac{1}{n-1}} k^{-\frac{n+1}{n-1}}. \quad (1)$$

Here κ is the circulation quantum and $\Lambda = \ln \frac{\ell}{a_0}$ is the large logarithm, which depends on the ratio of the intervortex distance or the vortex line curvature radius ℓ and the vortex core radius a_0 . We use notations of Eltsov and L'vov [1] and their energy normalization. Here and further on we ignore all numerical factors in our expressions as not important for our qualitative analysis.

At $n = 6$ Eq. (1) gives the spectrum $E_k \propto k^{-7/5}$ of Kozik and Svistunov [3], while at $n = 4$ one obtains

$$E_k \sim \kappa^2 \Lambda \left(\frac{\epsilon}{\kappa^3} \right)^{\frac{1}{3}} k^{-5/3}. \quad (2)$$

This agrees with the spectrum $E_k \propto k^{-5/3}$ of L'vov and Nazarenko [4].

However, L'vov and Nazarenko denied not only symmetry arguments, but also the assumption of locality. Since they believed that the Kelvin mode-mode interaction *must* depend on the tilt of the vortex line, they concluded that the interaction vertices in the Boltzmann equation are determined by divergent integrals and the locality assumption is invalid. Meanwhile, Eq. (1), as well as its particular case Eq. (2), was derived assuming locality. Instead of Eq. (2), the nonlocal scenario of L'vov and Nazarenko yields [6]

$$E_k \sim \frac{\kappa^2 \Lambda}{\Psi^{2/3}} \left(\frac{\epsilon}{\kappa^3} \right)^{\frac{1}{3}} k^{-5/3}. \quad (3)$$

Here the dimensionless parameter

$$\Psi \sim \frac{1}{\Lambda \kappa^2} \int_{k_{\min}}^{\infty} E_k dk \quad (4)$$

takes into account the effect of nonlocality since it is an integral over the whole Kelvin-wave cascade interval in the k space. The lower border of this interval is k_{\min} . From Eqs. (3) and (4) one obtains that

$$\Psi \sim \left(\frac{\epsilon}{\kappa^3 k_{\min}^2} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (5)$$

So the nonlocality does not affect the dependence on k but does change the dependence on the energy flux ϵ .

The outcome of the nonlocal scenario is not clear without an evaluation of the minimal wave number k_{\min} . In the theory of quantum turbulence k_{\min} is the wave number $\sqrt{\mathcal{L}}$, at which the crossover from the classical Kolmogorov cascade to the Kelvin-wave cascade occurs. Here \mathcal{L} is the vortex line length per unit volume in Vinen's theory of the 3D vortex tangle. On the other hand, in agreement with Eltsov and L'vov [1], the parameter Ψ determines also the ratio of the vortex line length increased by the Kelvin waves participating in the cascade to the length of the straight vortex in the ground state. The crossover is determined by the condition that this

¹⁾e-mail: sonin@mail.huji.ac.il

ratio is on the order of unity [2]. If $\Psi \sim 1$ the energy density Eq. (3) obtained from the nonlocal scenario does not differ from the energy density Eq. (2) derived under the assumption of locality. Maybe the reason for the insensitivity of the Kelvin-wave cascade to nonlocal effects deserves a further investigation, but at least it is premature to discard the locality assumption as physically irrelevant.

Also I would like to comment the statement of Eltsov and L'vov [1] that “finally the L'vov–Nazarenko model got supported by numerical simulations [7, 8]”. This can be interpreted as persisting on the previous claims of the proponents of the L'vov–Nazarenko scenario that the scenario is universal despite it breaks the tilt symmetry. The author of the present Comment thinks that it is a bad idea to check the laws of symmetry experimentally or by numerical simulations. If an experiment or a numerical simulation is in conflict with the symmetry law (e.g., the energy conservation law based also on symmetry) the experiment or the simulation must be reconsidered, but not the other way around. Suppose that there is a theory based on the crystal cubic symmetry, but they do experiments with parallelepiped samples. Disagreement with the original theory does not mean that the theory must be discarded. This does mean that one should do experiments at the conditions when the sample shape is not important, e.g., at spatial scales much less than the sample size. In numerical simulations [7, 8] the tilt symmetry was broken since the simulations dealt with the vortex stretched between two parallel surfaces. Probably the spectrum compatible with the tilt invariance could be observed at shorter scales (larger wave numbers k).

In contrast to the case of the 3D vortex tangle, in numerical simulations of the Kelvin-wave cascade in a straight vortex, the condition $\Psi \sim 1$ is not obligatory, since k_{\min} and the energy flux ϵ can be chosen inde-

pendently. All scenarios of the Kelvin-wave cascade discussed above used the theory of weak turbulence valid strictly speaking only if $\Psi \ll 1$. If $\Psi \gg 1$ the turbulence is strong and the spectrum is given by Eq. (1) at $n \rightarrow \infty$. This is the spectrum $E_k \sim 1/k$ predicted by Vinen et al. [9]. However, the condition $\Psi \sim 1$ should be imposed on the simulation parameters if one wants to reach better imitation of processes in the 3D vortex tangle.

In summary: (i) The analysis of Eltsov and L'vov [1] demonstrates that the possible nonlocality of the energy flux in the Kelvin-wave cascade has no essential effect on the Kelvin-wave cascade in the 3D vortex tangle expected by L'vov and Nazarenko. (ii) There is no conflict between the Kozik–Svistunov and the L'vov–Nazarenko scenarios. They are valid for different external conditions.

I thank Vladimir Eltsov and Victor L'vov for useful remarks.

-
1. V. B. Eltsov and V. S. L'vov, Pis'ma v ZhETF **111**, 462 (2020) [JETP Lett. **111** (2020), to be published].
 2. E. B. Sonin, *Dynamics of quantised vortices in superfluids*, Cambridge University Press, Cambridge (2016).
 3. E. Kozik and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **92**, 035301 (2004).
 4. V. S. L'vov and S. Nazarenko, Pis'ma v ZhETF **91**, 464 (2010) [JETP Lett. **91**, 428 (2010)].
 5. E. B. Sonin, Phys. Rev. B **85**, 104516 (2012).
 6. L. Boué, R. Dasgupta, J. Laurie, V. L'vov, S. Nazarenko, and I. Procaccia, Phys. Rev. B **84**, 064516 (2011).
 7. G. Krstulovic, Phys. Rev. E **86**, 055301 (2012).
 8. A. W. Baggaley and J. Laurie, Phys. Rev. B **89**, 014504 (2014).
 9. W. F. Vinen, M. Tsubota, and A. Mitani, Phys. Rev. Lett. **91**, 135301 (2003).

Reply to Comment on “Amplitude of waves in the Kelvin-wave cascade” (Pis'ma v ZhETF 111, 462 (2020))

V. B. Eltsov⁺¹⁾, V. S. L'vov*

⁺Department of Applied Physics, Aalto University, POB 15100, FI-00076 AALTO, Finland

*Department of Chemical Physics and Biological Physics, Weizmann Institute of Science, 7610001 Rehovot, Israel

Submitted 14 April 2020

Resubmitted 16 April 2020

Accepted 16 April 2020

This is a Reply to Sonin's Comment [arXiv preprint arXiv:2003.09912, 2020] on Eltsov and L'vov [Pis'ma v ZhETF **111**, 462 (2020)] in which we provide relation of the energy flux carried by the cascade to the amplitude of the excited Kelvin waves, important for analysis of future experiments.

DOI: 10.31857/S1234567820100110

In his Comment, Sonin used our paper [1] as an excuse to return to a rather old dispute on the theoretical models of the Kelvin-wave cascade. This dispute was initiated by the controversy between the Kozik–Svistunov [2] and the L'vov–Nazarenko [3, 4] energy spectra of the cascade. The discussion also included other contributions [5, 6], in particular from the author of the Comment, whose arguments were criticized in [7, 8]. Numerical simulation efforts intended to resolve the controversy were built up as well. The authors of the latest published numerical works known to us [9, 10] claim that their results support the L'vov–Nazarenko spectrum [4], including the numerical prefactor. Remarkably, these calculations were performed using different numerical approaches (Gross–Pitaevskii formalism in [9] and vortex-filament method in [10]). We should say from the outset that our paper has nothing to contribute to this extended discussion and its focus is on a different topic.

Independently of the details of the theoretical models, the generally accepted picture of quantum turbulence includes the Kelvin-wave cascade as an essential component in the low-temperature limit. There is, however, no experimental evidence so far for the existence of such cascade. The relevant difficulties are mentioned both in our paper and in the Comment. With recent progress in experimental techniques we hope that studies of the dynamics of nearly straight vortices, not hindered by the hydrodynamic energy cascade and reconnections, will become possible in near future. The purpose of our paper is to facilitate interpretation of the results of such potential experiments by providing a particular relation between the energy flux and the ampli-

tude of Kelvin waves. We stress that the target of the initial experiments would be to discriminate between dissipation originating from the Kelvin-wave cascade versus other dissipation mechanisms like acoustic or tunneling two-level system damping. Here we hope that our order-of-magnitude estimation of the expected amplitudes will be useful as well as pointing out two important parameters, the energy flux and the starting wave vector of the cascade k_{\min} , which preferably should be controlled in the experiment independently. The focus of the initial experiments will probably not be on verifying particular models of the cascade. In fact, we agree with the author of the Comment that in an experiment which probes only the longest energy-containing length scales, the discrimination between different cascade models is unlikely.

We think therefore that our paper [1] should not serve as a reason for reanimating the old debate. Of course, we do not have in mind to preclude others from continuing discussions, preferably finding new arguments. One interesting development for proponents of other theoretical models of the cascade would be to make alternative predictions for observables in single-vortex dynamics and to suggest possible experimental realizations where the difference between cascade models becomes potentially resolvable.

-
1. V. B. Eltsov and V. S. L'vov, Pis'ma v ZhETF **111**, 462 (2020).
 2. E. Kozik and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **92**, 035301 (2004).
 3. J. Laurie, V. S. L'vov, S. Nazarenko, and O. Rudenko, Phys. Rev. B **81**, 104526 (2010).
 4. V. S. L'vov and S. Nazarenko, Pis'ma v ZhETF **91**, 464 (2010).

¹⁾e-mail: vladimir.eltsov@aalto.fi

5. W.F. Vinen, *J. Phys.: Condens. Matter* **17**, S3231 (2005).
6. E. B. Sonin, *Phys. Rev. B* **85**, 104516 (2012).
7. V. V. Lebedev and V. S. L'vov, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 548 (2010).
8. V. V. Lebedev, V. S. L'vov, and S. V. Nazarenko, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 606 (2010).
9. G. Krstulovic, *Phys. Rev. E* **86**, 055301 (2012).
10. A. W. Baggaley and J. Laurie, *Phys. Rev. B* **89**, 014504 (2014).

Текущий авторский указатель томов 110 за 2019 г. и 111 за 2020 г.¹⁾

- Abbaoui S. **111**, 228 ()
- Aleshchenko Y. A. **110**, 70 (79)
- Aleshkin K. **110**, 727 (711)
- AlFiky M. T. **111**, 10 (8)
- Amata E. **110**, 323 (336)
- Amusia M. Ya. **110**, 266 (290)
- Anisimov M. A. **110**, 70 (79)
- Artamonov S. A. **110**, 266 (290)
- Audouard A. **110**, 68 (74)
- Bao X. H. **110**, 235 (254)
- Baranov M. A. **110**, 21 (25)
- Barkalov O. I. **111**, 524 ()
- Baryshnikova K. V. **110**, 21 (25)
- Baskakov A. O. **111**, 524 ()
- Bedran Z. V. **110**, 70 (79)
- Belavin A. **110**, 727 (711)
- Belyaeva T. L. **111**, 483 ()
- Belyanchikov M. A. **110**, 70 (79)
- Beneddouch Z. **111**, 228 ()
- Beysengulov N. R. **110**, 698 (697)
- Blecki J. **110**, 323 (336)
- Boukourt A. **111**, 228 ()
- Budaev V. **110**, 323 (336)
- Burtebaev N. **111**, 483 ()
- Chen Y. Y. **110**, 235 (254)
- Chernyshev B. A. **110**, 83 (97)
- Clark J. W. **111**, 86 (96)
- Danilov A. N. **111**, 483 ()
- Demyanova A. S. **110**, 83 (97);
111, 483 ()
- Dmitriev S. V. **111**, 483 ()
- Dmitriev V. V. **110**, 748 (734)
- Dolinina D. A. **110**, 755 (744);
111, 303 ()
- Dressel M. **110**, 70 (79)
- Drigo L. **110**, 68 (74)
- Dukhnenko A. V. **110**, 70 (79)
- Elsherif O. **111**, 10 (8)
- Eltsov V. B. **111**, 462 ()
- Evlyukhin A. B. **110**, 21 (25)
- Fedaruk R. **110**, 435 (441)
- Fedyanin A. A. **110**, 757 (750)
- Filipov V. B. **110**, 70 (79)
- Friesen A. V. **111**, 147 (129)
- Frizyuk K. **110**, 21 (25)
- Gao G. **110**, 235 (254)
- Gasparov V. A. **110**, 68 (74)
- Goncharov S. A. **110**, 83 (97);
111, 483 ()
- Gorbatsevich A. A. **110**, 620 (618)
- Gorshunov B. P. **110**, 70 (79)
- Grigorenko L. V. **110**, 7 (5)
- Gurov Yu. B. **110**, 83 (97);
111, 483 ()
- Hamed A. M. **111**, 10 (8)
- Iaparov B. I. **110**, 213 (231)
- Ioselevich P. A. **110**, 812 (804)
- Irkhin V. Yu. **111**, 242 ()
- Ismailova A. N. **110**, 7 (5)
- Jansitov D. **111**, 483 ()
- Japaridze G. S. **110**, 266 (290)
- Jin G. **111**, 301 ()
- Kacimi S. **111**, 228 ()
- Kadiri A. **111**, 228 ()
- Kalinovsky Yu. L. **111**, 147 (129)
- Kamenshchik A. Yu. **111**, 343 ();
111, 485 ()
- Khlebnikov S. V. **111**, 483 ()
- Khodel V. A. **111**, 86 (96)
- Khusnutdinov N. **110**, 170 (183)
- Kolganov N. **111**, 623 ()
- Komandin G. A. **110**, 70 (79)
- Komleva E. V. **110**, 595 (595)
- Kotikov A. V. **111**, 59 (67)
- Kozak L. **110**, 323 (336)
- Kutuzov M. S. **110**, 748 (734)
- Lapushkin S. V. **110**, 83 (97)
- Lebed A. G. **110**, 163 (173);
111, 249 ()
- Legen L. **110**, 323 (336)
- Li H. **110**, 323 (336)
- Louko J. **111**, 483 ()
- L'vov V. S. **111**, 462 ()
- Lysogorskiy Yu. **110**, 698 (697)
- Lyubin E. V. **110**, 757 (750)
- Lyubutina M. V. **111**, 524 ()
- Lyubutin I. S. **111**, 524 ()
- Makarov S. **110**, 21 (25)
- Marcucci F. **110**, 323 (336)
- Markevich S. A. **110**, 435 (441)
- Maslov V. A. **111**, 483 ()
- Medvedev S. A. **111**, 524 ()
- Milichko V. A. **110**, 21 (25)
- Morozov An. **111**, 623 ()
- Moskvin A. S. **110**, 213 (231)
- Msezane A. Z. **110**, 266 (290)
- Mukhin I. **110**, 21 (25)
- Muratov A. V. **110**, 70 (79)
- Naumov P. G. **111**, 524 ()
- Nemecek Z. **110**, 323 (336)
- Nikitov S. A. **110**, 628 (629)
- Nissinen J. **110**, 797 (789)
- Nozdrachev M. **110**, 323 (336)
- Nozik A. A. **110**, 81 (91)
- Ogarkova Yu. L. **111**, 524 ()
- Ogloblin A. A. **110**, 83 (97);
111, 483 ()
- Okenov A. O. **110**, 213 (231)
- Osokin S. A. **110**, 628 (629)
- Ostrovsky P. M. **110**, 812 (804)
- Pallocchia G. **110**, 323 (336)
- Panov A. V. **111**, 32 (36)
- Pantuev V. S. **110**, 81 (91)
- Pchelkina Z. V. **110**, 595 (595)
- Penionzhkevich Yu. E. **111**, 483 ()
- Petrov M. **110**, 21 (25)
- Rauch J. L. **110**, 323 (336)
- Romodina M. N. **110**, 757 (750)
- Safin A. R. **110**, 628 (629)
- Safrankova J. **110**, 323 (336)
- Saiko A. P. **110**, 435 (441)
- Sandukovskiy V. G. **110**, 83 (97)
- Savin S. **110**, 323 (336)
- Schlueter J. A. **110**, 68 (74)
- Semenov A. N. **111**, 50 (55)

¹⁾В скобках указаны номера страниц английского издания для вып. 110 (1)–111 (3).

- Sepper O. **111**, 249 ()
- Sergeev V. M. **111**, 483 ()
- Shaginyan V. R. **110**, 266 (290)
- Shalin A. S. **110**, 755 (744);
111, 303 ()
- Sharma A. S. **110**, 323 (336)
- Sharov P. G. **110**, 7 (5)
- Shchelkunov N. M. **110**, 757 (750)
- Shitsevalova N. Yu. **110**, 70 (79)
- Shubin N. M. **110**, 620 (618)
- Skryabin Yu. N. **111**, 242 ()
- Sluchanko N. E. **110**, 70 (79)
- Sobolev Yu. G. **111**, 483 ()
- Soldatov A. A. **110**, 748 (734)
- Starastin V. I. **111**, 483 ()
- Starchikov S. S. **111**, 524 ()
- Stephanovich V. A. **110**, 266 (290)
- Streltsov S. V. **110**, 595 (595)
- Subbotin A. V. **111**, 50 (55)
- Tang B. **110**, 323 (336)
- Tang Y. Z. **110**, 235 (254)
- Tan Q. **111**, 301 ()
- Tayurskii D. A. **110**, 698 (697)
- Temnikov F. V. **110**, 595 (595)
- Toneev V. D. **111**, 147 (129)
- Tronconi A. **111**, 485 ()
- Trzaska W. H. **110**, 83 (97);
111, 483 ()
- Tyurin G. P. **111**, 483 ()
- Vardanyan T. **111**, 343 ()
- Venturi G. **111**, 485 ()
- Volovik G. E. **110**, 335 (352);
110, 797 (789);
111, 441 ()
- Voronov V. V. **110**, 70 (79)
- Wang C. **110**, 323 (336)
- Wang H. **111**, 301 ()
- Woods L. M. **110**, 170 (183)
- Yudin A. N. **110**, 748 (734)
- Yulin A. V. **110**, 755 (744);
111, 303 ()
- Zakharov B. G. **110**, 361 (375)
- Zakharov M. Y. **110**, 698 (697)
- Zaoui A. **111**, 228 ()
- Zarembo K. **110**, 147 (155);
111, 173 (157)
- Zaslavskii O. B. **111**, 300 ()
- Zelenyi L. **110**, 323 (336)
- Zhang C. X. **110**, 480 (487)
- Zhukova E. S. **110**, 70 (79)
- Zhukov M. V. **110**, 7 (5)
- Zograf G. **110**, 21 (25)
- Zubkov M. A. **110**, 480 (487)
- Zuev D. **110**, 21 (25)
- Zverev M. V. **111**, 86 (96)
- Абдель-Хафиз М. **110**, 557 (562)
- Абеди С. **110**, 671 (672)
- Абрамов Н. Н. **110**, 569 (574)
- Абросимов Н. В. **110**, 677 (677)
- Авдеев М. В. **111**, 154 (139)
- Агасян Н. О. **111**, 219 ()
- Агафонцев Д. С. **110**, 106 (121)
- Агринская Н. В. **110**, 482 (495)
- Аксенов С. В. **110**, 126 (140);
111, 321 ()
- Алексеев А. М. **110**, 772 (766)
- Алексенский А. Е. **111**, 375 ()
- Альшиц В. И. **110**, 255 ()
- Амусья М. Я. **111**, 536 ()
- Амусья М. Я. **110**, 85 (102);
111, 12 (18)
- Андрейчиков М. А. **110**, 633 (635)
- Андрющенко П. Д. **110**, 700 (702)
- Антипина Л. Ю. **111**, 244 ()
- Антонов Н. Н. **111**, 291 ()
- Аплеснин С. С. **110**, 204 (223)
- Арбузова Т. И. **111**, 186 (172)
- Артюх А. А. **111**, 93 (109);
111, 469 ()
- Архипов М. В. **110**, 9 (15);
111, 586 ()
- Архипов Р. М. **110**, 9 (15);
111, 586 ()
- Асадчиков В. Е. **111**, 597 ()
- Астафьев А. А. **110**, 456 (464)
- Атанасова П. Х. **110**, 736 (722)
- Афанасьева Е. Ю. **111**, 520 ()
- Афанасьев В. П. **111**, 230 ()
- Ахматханов А. Р. **110**, 165 (178)
- Баева Э. М. **111**, 88 (104)
- Бакаров А. К. **110**, 62 (68);
110, 337 (354)
- Бакшт Е. X. **110**, 72 (85)
- Балагуров А. М. **110**, 584 (585)
- Балаев Д. А. **110**, 614 (613);
111, 197 (183)
- Балдин А. А. **111**, 291 ()
- Балтенков А. С. **111**, 12 (18);
111, 536 ()
- Банников М. И. **111**, 166 (151)
- Бантыш Б. И. **111**, 615 ()
- Барабан И. А. **110**, 799 (793)
- Барабанов А. Л. **110**, 222 (242)
- Барецки Б. **110**, 622 (624)
- Барсукова М. Г. **111**, 40 (46)
- Батыршин Э. С. **110**, 607 (607)
- Бахтизин Р. З. **111**, 396 ()
- Башаров А. М. **110**, 505 (517);
111, 632 ()
- Башакин М. В. **110**, 736 (722)
- Бегинин Е. Н. **110**, 414 (430);
110, 526 (533)
- Бежанов С. Г. **110**, 90 (107);
110, 230 (250)
- Белов Н. К. **111**, 305 ()
- Белотелов В. И. **111**, 52 (62)
- Белых С. Ф. **111**, 531 ()
- Бердников Я. А. **110**, 579 (581)
- Березуцкий А. Г. **111**, 335 ()
- Беседин И. С. **110**, 569 (574)
- Бир А. С. **110**, 348 (364)
- Бишлер Л. **111**, 591 ()
- Блошкин А. А. **110**, 393 (411)
- Бобриков И. А. **110**, 584 (585)
- Богацкая А. В. **111**, 443 ()
- Богданов Ю. И. **111**, 615 ()
- Бордонский Г. С. **111**, 311 ()
- Борисова С. Д. **110**, 190 (211)
- Босак А. А. **110**, 30 (37)
- Бояринцев Э. Л. **111**, 335 ()
- Брагинец Ю. П. **110**, 579 (581)
- Брагута В. В. **110**, 3 (1)
- Бражкин В. В. **110**, 602 (603);
110, 687 (687)
- Брискина Ч. М. **110**, 750 (739)
- Брысев А. П. **111**, 464 ()

- Бузовкин А. Б. **111**, 509 ()
- Бункин А. Ф. **111**, 464 ()
- Буньков Ю. М. **111**, 52 (62)
- Буриков С. А. **111**, 625 ()
- Буслеев Н. И. **110**, 230 (250)
- Бушуйкин П. А. **110**, 677 (677)
- Быков А. А. **110**, 62 (68);
- Быков А. А. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Бюхнер Б. **110**, 325 (342);
111, 388 ()
- Вааг А. **110**, 806 (799)
- Вагизов Ф. Г. **111**, 181 (167)
- Вайшнене Л. А. **110**, 222 (242)
- Валидов А. А. **110**, 325 (342)
- Вальков В. В. **110**, 126 (140)
- Ваньков А. Б. **110**, 268 (296)
- Варнаков С. Н. **110**, 155 (166)
- Васильева О. Ф. **111**, 579 ()
- Васильев В. В. **111**, 579 ()
- Васильев Е. В. **110**, 700 (702)
- Васильев О. А. **111**, 435 ()
- Васин А. А. **110**, 456 (464)
- Введенский Н. В. **110**, 449 (457)
- Вейко В. П. **110**, 230 (250)
- Великанов Д. А. **111**, 197 (183)
- Вергелес С. С. **111**, 509 ()
- Ветошко П. М. **111**, 52 (62)
- Вивек Кумар Сингх **111**, 591 ()
- Виглин Н. А. **110**, 248 (273)
- Викторов В. А. **111**, 291 ()
- Вильшанская Е. В. **110**, 767 (761)
- Виноградов А. Ю. **110**, 421 (436)
- Виткалов С. А. **110**, 671 (672)
- Витлина Р. З. **110**, 534 (540)
- Витрик О. Б. **110**, 759 (755)
- Владимирова Г. А. **111**, 223 ()
- Власенко В. А. **111**, 475 ()
- Волков М. К. **110**, 217 (237);
110, 376 (394)
- Волокитин А. И. **110**, 379 (397)
- Волоотовский Р. А. **110**, 700 (702)
- Волошин А. Э. **110**, 255 ()
- Воробьев А. С. **110**, 222 (242)
- Воробьев С. И. **110**, 118 (133)
- Воронин В. В. **110**, 579 (581)
- Воронов В. В. **111**, 625 ()
- Врубель И. И. **111**, 328 ()
- Вуколов В. А. **111**, 295 ()
- Вурмель С. **111**, 388 ()
- Высотин М. А. **110**, 155 (166)
- Высоцкий М. И. **110**, 633 (635)
- Гаврилкин С. Ю. **111**, 166 (151)
- Гаврюшкин П. Н. **111**, 160 (145)
- Гагарский А. М. **110**, 222 (242)
- Гадиев Р. М. **110**, 437 (447)
- Гадомский О. Н. **110**, 99 (115)
- Газизов А. Р. **110**, 772 (766)
- Гакович Б. **110**, 90 (107)
- Галиев А. Ф. **110**, 437 (447)
- Галимзянов Б. Н. **110**, 498 (511)
- Галка А. Г. **110**, 237 (262)
- Галкина Е. Г. **110**, 474 (481)
- Галкина О. **110**, 515 (523)
- Галль Н. Р. **110**, 683 (683);
111, 520 ()
- Галоян А. С. **111**, 291 ()
- Галусташвили М. В. **110**, 793 (785)
- Галынский М. В. **110**, 645 (646)
- Гапиенко В. А. **111**, 291 ()
- Гапиенко Г. С. **111**, 291 ()
- Гарифуллин И. А. **110**, 325 (342)
- Гарифьянов Н. Н. **110**, 325 (342)
- Герасимов В. В. **110**, 677 (677)
- Герасимов Р. Е. **110**, 645 (646)
- Гершензон М. Е. **111**, 237 ()
- Геталов А. Л. **110**, 118 (133)
- Гильманов М. И. **110**, 241 (266)
- Глазунов А. Л. **111**, 223 ()
- Головенчик Е. И. **110**, 118 (133)
- Головин И. С. **110**, 584 (585)
- Голуб Л. Е. **111**, 19 (24)
- Горан А. В. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Горбунов А. В. **110**, 260 (284)
- Горлова И. Г. **110**, 400 (417)
- Горайнов С. В. **111**, 230 ()
- Гресь В. Н. **111**, 291 ()
- Григорьев А. **110**, 569 (574)
- Григорьев С. В. **110**, 799 (793)
- Григорьев Т. **111**, 591 ()
- Гришин М. Я. **111**, 464 ()
- Гришин С. В. **110**, 348 (364)
- Громницкая Е. Л. **110**, 602 (603)
- Губанова Ю. А. **110**, 526 (533)
- Гумаров А. И. **110**, 197 (217)
- Гурулев А. А. **111**, 311 ()
- Гусев А. И. **111**, 190 (176)
- Гусев Г. М. **111**, 107 (121)
- Гусев Н. С. **111**, 370 ()
- Гусихин П. А. **111**, 316 ()
- Гуськов С. Ю. **111**, 149 (135)
- Давидович М. В. **110**, 465 (472)
- Данилов И. В. **110**, 602 (603)
- Данилов П. А. **110**, 759 (755)
- Данюк А. В. **110**, 421 (436)
- Даринская Е. В. **110**, 255 ()
- Дворецкий С. А. **110**, 274 (301)
- Двуреченский А. В. **110**, 393 (411)
- Дедкова А. А. **110**, 772 (766)
- Делев В. А. **110**, 607 (607)
- Демин В. А. **111**, 469 ()
- Демишев С. В. **110**, 241 (266)
- Джентшел М. **110**, 579 (581)
- Дмитриев А. А. **110**, 62 (68)
- Дмитриенко В. Е. **110**, 563 (568)
- Доброносова А. А. **110**, 569 (574)
- Долганов В. К. **110**, 539 (545)
- Долганов П. В. **110**, 539 (545)
- Доленко Т. А. **111**, 625 ()
- Дорожкин С. И. **110**, 407 (424)
- Дриаев Д. Г. **110**, 793 (785)
- Дричко И. Л. **110**, 62 (68)
- Дроздов М. Н. **111**, 531 ()
- Дубровский А. А. **110**, 614 (613)
- Дьячкова И. Г. **111**, 597 ()
- Екомасов Е. Г. **110**, 607 (607);
111, 209 (193)
- Еремеев С. В. **110**, 190 (211)
- Есин А. А. **110**, 165 (178)
- Ефимов М. А. **111**, 335 ()
- Житлухин А. М. **110**, 387 (405)
- Жукавин Р. Х. **110**, 677 (677)
- Жумагулов Я. В. **110**, 23 (31)
- Журавлева Е. Н. **110**, 443 (452)
- Журавлев А. С. **110**, 260 (284)
- Заболотский А. А. **110**, 303 (319)

- Заварцев Ю. Д. **110**, 652 (654)
 Завертяев М. В. **110**, 652 (654)
 Загуменный А. И. **110**, 652 (654)
 Задорожная Л. А. **110**, 750 (739)
 Зайцев-Зотов С. В. **110**, 56 (62);
 Зайцев-Зотов С. В. **110**, 178 (200);
111, 45 (50)
 Зарезин А. М. **111**, 316 ()
 Зарецкий Н. П. **111**, 149 (135)
 Заспел К. Э. **110**, 474 (481)
 Захаров Ю. П. **111**, 335 ()
 Зеленер Б. Б. **110**, 767 (761)
 Зеленер Б. В. **110**, 767 (761)
 Земба П. **110**, 622 (624)
 Земляная Е. В. **110**, 736 (722)
 Зинган А. П. **111**, 579 ()
 Зиняков Т. А. **111**, 65 (76)
 Злотников А. О. **110**, 126 (140)
 Золотов Д. А. **111**, 597 ()
 Зубарева О. В. **110**, 443 (452)
 Зубарев Н. М. **110**, 443 (452)
 Иванова А. К. **110**, 230 (250)
 Иванов Б. А. **110**, 474 (481)
 Иванов К. Е. **111**, 487 ()
 Иванов С. В. **110**, 297 (313)
 Ивахненко С. А. **111**, 597 ()
 Игошев П. А. **110**, 34 (41);
110, 741 (727)
 Иешкин А. Е. **111**, 531 ()
 Илюшин М. А. **111**, 291 ()
 Ионин А. А. **110**, 90 (107);
 Ионин А. А. **110**, 230 (250);
 Ионин А. А. **110**, 591 (592);
110, 759 (755)
 Иоффе А. **110**, 579 (581)
 Ирхин В. Ю. **110**, 34 (41);
110, 741 (727)
 Исхаков Р. С. **111**, 197 (183)
 Ишибаши Т. **110**, 204 (223)
 Каган М. Ю. **111**, 321 ()
 Кайсин Б. Д. **110**, 268 (296)
 Камашев А. А. **110**, 325 (342)
 Каневский В. М. **110**, 750 (739)
 Капитан В. Ю. **110**, 700 (702)
 Капитан Д. Ю. **110**, 700 (702)
 Капустин А. А. **110**, 407 (424)
 Карабут Е. А. **110**, 443 (452)
 Кардакова А. И. **111**, 88 (104)
 Карманов Д. Е. **111**, 435 ()
 Катаев В. **110**, 325 (342)
 Кац Е. И. **110**, 539 (545)
 Квачадзе В. Г. **110**, 793 (785)
 Квашнин А. Г. **111**, 380 ()
 Квашнин Д. Г. **111**, 244 ()
 Квон Э. Д. **111**, 107 (121)
 Кильмамбетов А. Р. **110**, 622 (624)
 Кириллов В. Л. **110**, 614 (613)
 Кирова Е. М. **110**, 343 (359)
 Киямов А. Г. **110**, 197 (217)
 Клавсюк А. Л. **110**, 331 (348)
 Кленов Н. В. **111**, 443 ()
 Клопотов Р. В. **111**, 464 ()
 Клумов Б. А. **110**, 729 (715)
 Ключев А. В. **110**, 112 (127)
 Книжник А. А. **111**, 305 ()
 Князев Б. А. **110**, 677 (677)
 Князев Ю. В. **110**, 614 (613)
 Ковалев И. М. **111**, 435 ()
 Ковалевский В. В. **111**, 230 ()
 Ковалевский К. А. **110**, 677 (677)
 Ковражкин Р. А. **111**, 223 ()
 Козлов В. А. **110**, 652 (654)
 Козловская К. А. **110**, 563 (568)
 Козуб В. И. **110**, 482 (495)
 Колдаева М. В. **110**, 255 ()
 Колесников С. В. **111**, 101 (116)
 Колмычек И. А. **111**, 370 ()
 Колоколов И. В. **111**, 509 ()
 Комаров Е. Н. **110**, 118 (133)
 Комиссарова М. В. **111**, 355 ()
 Компанец В. О. **111**, 27 (31)
 Кондрин М. В. **110**, 602 (603)
 Кон И. А. **111**, 45 (50)
 Коренблит С. Э. **110**, 291 (307)
 Корнева А. **110**, 622 (624)
 Корнилов В. М. **110**, 437 (447)
 Коробейщиков Н. Г. **111**, 531 ()
 Коробцев С. В. **111**, 305 ()
 Косарева О. Г. **111**, 27 (31)
 Костина Ю. В. **110**, 456 (464)
 Костин В. А. **110**, 449 (457)
 Костров А. В. **110**, 237 (262)
 Котова О. Д. **111**, 625 ()
 Котов А. Ю. **110**, 3 (1)
 Котов С. А. **110**, 118 (133)
 Красавин А. В. **110**, 23 (31)
 Крутянский Л. М. **110**, 666 (667)
 Кудрявцев А. Г. **111**, 112 (126)
 Кудрявцев К. Е. **110**, 297 (313)
 Кудряшов И. А. **111**, 435 ()
 Кудряшов С. И. **110**, 90 (107);
 Кудряшов С. И. **110**, 230 (250);
 Кудряшов С. И. **110**, 591 (592);
110, 759 (755)
 Кузмичёв А. Н. **111**, 52 (62)
 Кузнецов В. А. **110**, 260 (284)
 Кузнецов В. И. **110**, 47 (54)
 Кузнецов В. С. **110**, 72 (85)
 Кузнецов Е. А. **110**, 106 (121)
 Кузнецов С. В. **111**, 625 ()
 Кузьмин В. А. **110**, 307 (323)
 Кузьмичева Т. Е. **111**, 388 ()
 Кузьмичев С. А. **111**, 388 ()
 Кукушкин И. В. **110**, 260 (284);
 Кукушкин И. В. **110**, 268 (296);
 Кукушкин И. В. **110**, 597 (599);
111, 316 ()
 Кулагин Н. Е. **110**, 474 (481)
 Кулеш Н. А. **110**, 248 (273)
 Кулик Л. В. **110**, 260 (284)
 Куликов К. В. **110**, 149 (160)
 Кунцевич А. Ю. **111**, 166 (151)
 Курганов А. А. **111**, 435 ()
 Кутовой С. А. **110**, 652 (654)
 Кутузов А. С. **111**, 154 (139)
 Кучмижак А. А. **110**, 759 (755)
 Кучугов П. А. **111**, 149 (135)
 Лабзовский Л. Н. **110**, 363 (382)
 Лавриков А. С. **110**, 750 (739)
 Ладыгина В. П. **111**, 197 (183)
 Латышев А. В. **110**, 337 (354)
 Лачинов А. Н. **110**, 437 (447)
 Лебедев В. В. **111**, 509 ()
 Левченко А. А. **110**, 545 (551)
 Леднев В. Н. **111**, 464 ()
 Лежнев С. К. **110**, 437 (447)

- Лезова И. Е. **110**, 521 (529)
- Лерман Л. М. **110**, 474 (481)
- Литасов К. Д. **111**, 160 (145);
111, 230 ()
- Литвинов А. В. **110**, 723 (707)
- Ловцов С. В. **110**, 291 (307)
- Лукьянов А. Е. **110**, 23 (31)
- Любутин И. С. **110**, 557 (562)
- Ляпин С. Г. **110**, 687 (687)
- Лященко С. А. **110**, 155 (166)
- Магарилл Л. И. **110**, 534 (540)
- Мажорин Г. С. **110**, 569 (574)
- Мазилкин И. А. **110**, 622 (624);
111, 514 ()
- Майдыковский А. И. **111**, 370 ()
- Майлыбаев А. А. **110**, 106 (121)
- Макаров А. Г. **110**, 700 (702)
- Макарова К. В. **110**, 700 (702)
- Макаров Г. Н. **111**, 361 ()
- Максимов А. А. **110**, 806 (799)
- Максимова О. А. **110**, 155 (166)
- Малкин Б. З. **110**, 241 (266)
- Малышев М. С. **110**, 237 (262)
- Мальцев Е. И. **111**, 475 ()
- Мамин Г. В. **111**, 52 (62)
- Мамрашев А. А. **111**, 75 (85)
- Маркушев В. М. **110**, 750 (739)
- Мартовицкий В. П. **111**, 166 (151)
- Мартышкин А. А. **110**, 526 (533)
- Мартьянов О. Н. **110**, 614 (613)
- Марчишин И. В. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Маслаков К. И. **111**, 487 ()
- Массалимов Б. И. **111**, 475 ()
- Масюгин А. Н. **110**, 204 (223)
- Ма Х. **111**, 501 ()
- Медведев Д. Д. **111**, 305 ()
- Медриш И. В. **111**, 160 (145)
- Межов-Деглин Л. П. **110**, 545 (551)
- Мейлахс А. П. **111**, 375 ()
- Мельник Н. Н. **110**, 759 (755)
- Менушенков А. П. **110**, 23 (31)
- Меньшов В. Н. **110**, 777 (771)
- Милованович Д. **110**, 90 (107)
- Мильштейн А. И. **111**, 215 ()
- Минакова В. Е. **110**, 56 (62);
110, 178 (200)
- Миньков Г. М. **110**, 274 (301)
- Миронов А. **111**, 591 ()
- Мирошниченко И. Б. **111**, 335 ()
- Михайлов Н. Н. **110**, 274 (301);
111, 107 (121)
- Мицкан В. А. **110**, 126 (140)
- Моисеев С. А. **111**, 602 ()
- Мокшин А. В. **110**, 498 (511);
110, 551 (557)
- Молотков С. Н. **111**, 608 ()
- Морозов А. **111**, 591 ()
- Морозов Ан. **111**, 591 ()
- Морозов И. В. **111**, 388 ()
- Морозов С. В. **110**, 297 (313)
- Москалев Д. О. **110**, 569 (574)
- Москаленко И. Н. **110**, 569 (574)
- Музыченко Д. А. **111**, 396 ()
- Муравьев В. М. **111**, 316 ()
- Муратов А. Р. **110**, 354 (370)
- Мурзина Т. В. **111**, 370 ()
- Мусич Д. О. **110**, 99 (115)
- Мусорин А. И. **111**, 40 (46)
- Мяконьких А. В. **111**, 531 ()
- Надолинский А. М. **110**, 95 (111);
111, 61 (72)
- Надточено В. А. **110**, 456 (464)
- Назаров В. В. **110**, 237 (262)
- Назаров В. Н. **110**, 607 (607)
- Науменко Г. А. **111**, 295 ()
- Наумов С. В. **111**, 186 (172)
- Нашаат М. **110**, 149 (160)
- Неверов В. Д. **110**, 23 (31)
- Несвижевский В. В. **110**, 579 (581)
- Нефедев К. В. **110**, 700 (702)
- Нефёдов Ю. А. **110**, 597 (599)
- Никитина А. М. **110**, 56 (62)
- Никитин С. И. **110**, 197 (217)
- Никитов С. А. **110**, 526 (533)
- Никифорова П. М. **111**, 443 ()
- Николаев А. А. **110**, 3 (1)
- Николаева И. А. **111**, 27 (31)
- Николаев Н. Н. **111**, 215 ()
- Никонорова Н. А. **110**, 521 (529)
- Новиков В. А. **110**, 633 (635);
Номоконов Д. В. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Норман Г. Э. **110**, 343 (359);
Норман Г. Э. **111**, 175 (162);
111, 251 ()
- Овчинникова Е. Н. **110**, 563 (568)
- Овчинников С. Г. **110**, 155 (166)
- Одинцов С. А. **110**, 414 (430);
110, 526 (533)
- Орешкин А. И. **111**, 396 ()
- Орешкин С. И. **111**, 396 ()
- Орлинский С. Б. **111**, 52 (62)
- Орлов А. О. **111**, 311 ()
- Орлов А. П. **110**, 400 (417)
- Осипов А. А. **110**, 368 (387)
- Павлов С. Г. **110**, 677 (677)
- Павлов Т. Н. **110**, 248 (273)
- Пай Воей Ву **110**, 400 (417)
- Панайотова С. А. **110**, 736 (722)
- Панарин В. А. **110**, 72 (85)
- Панкрац А. И. **111**, 197 (183)
- Панов А. Д. **111**, 435 ()
- Панов В. И. **111**, 396 ()
- Панов Н. А. **111**, 27 (31)
- Паршин П. П. **110**, 30 (37)
- Пахомов А. В. **110**, 9 (15)
- Пацаева С. В. **111**, 625 ()
- Пеленович В. О. **111**, 531 ()
- Пельменев А. А. **110**, 545 (551)
- Перваков К. С. **111**, 475 ()
- Первишко А. А. **111**, 328 ()
- Пержу А. В. **110**, 700 (702)
- Перминов Н. С. **111**, 602 ()
- Перно Ф. **110**, 666 (667)
- Першин С. М. **111**, 464 ()
- Пестовский Н. В. **110**, 652 (654)
- Петин А. Н. **111**, 361 ()
- Петров А. А. **110**, 652 (654)
- Петров А. В. **110**, 197 (217)
- Петров И. Д. **111**, 61 (72)
- Петросян А. С. **110**, 314 (329);
111, 65 (76)
- Петруша С. В. **111**, 88 (104)
- Петрушевич Ю. В. **110**, 387 (405)
- Петухов М. Н. **111**, 396 ()
- Пех П. Л. **111**, 80 (90)

- Пивоваров А. А. **110**, 217 (237);
110, 376 (394)
- Пинто-Него Н. **110**, 515 (523)
- Писарев В. В. **110**, 343 (359)
- Подливаев А. И. **110**, 692 (691)
- Подорожный Д. М. **111**, 435 ()
- Покровский В. Я. **110**, 400 (417)
- Полников В. Г. **111**, 501 ()
- Полушина Г. Е. **110**, 521 (529)
- Полушин С. Г. **110**, 521 (529)
- Попов А. М. **111**, 443 ()
- Попов К. Е. **111**, 295 ()
- Порфирьев А. П. **110**, 759 (755)
- Посух В. Г. **111**, 335 ()
- Потапкин Б. В. **111**, 305 ()
- Потылицын А. П. **111**, 295 ()
- Преображенский В. Л. **110**, 666 (667)
- Пресняков И. А. **111**, 487 ()
- Притула И. М. **110**, 255 ()
- Пройдакова В. Ю. **111**, 625 ()
- Прошин Ю. Н. **111**, 154 (139)
- Прудковский П. А. **111**, 494 ()
- Прудкогляд А. Ф. **111**, 291 ()
- Пряников Д. С. **111**, 291 ()
- Пудалов В. М. **111**, 237 ()
- Пунегов В. И. **111**, 448 ()
- Пшеничный К. А. **110**, 799 (793)
- Разумов В. Ф. **110**, 307 (323)
- Рамадеви П. **111**, 591 ()
- Ратников П. В. **111**, 80 (90)
- Рахмонов И. Р. **110**, 149 (160);
110, 736 (722)
- Решетняк В. В. **110**, 658 (659)
- Рогалев А. **110**, 563 (568)
- Рогожин В. Б. **110**, 521 (529)
- Родин А. О. **111**, 514 ()
- Родионов А. А. **110**, 652 (654)
- Родионова В. В. **110**, 799 (793)
- Родионов И. А. **110**, 569 (574)
- Родякина Е. Е. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Розанов Н. Н. **110**, 9 (15);
111, 586 ()
- Романовский В. А. **111**, 291 ()
- Рубан В. П. **111**, 455 ()
- Руденко А. А. **110**, 759 (755)
- Руменских М. С. **111**, 335 ()
- Русина Г. Г. **110**, 190 (211)
- Рут О. Э. **110**, 274 (301)
- Рутьков Е. В. **110**, 683 (683);
111, 520 ()
- Рыбальченко Г. В. **111**, 166 (151)
- Рыбин А. Е. **110**, 700 (702)
- Рыжкин И. А. **110**, 112 (127)
- Рыжкин М. И. **110**, 112 (127)
- Рюмцев Е. И. **110**, 521 (529)
- Саакян С. А. **110**, 767 (761)
- Савинов С. Ю. **110**, 652 (654)
- Савченков Е. Н. **110**, 165 (178)
- Сагатова Д. Н. **111**, 160 (145)
- Сагатов Н. Е. **111**, 160 (145)
- Садаков А. В. **111**, 475 ()
- Садовников А. В. **110**, 414 (430);
110, 526 (533)
- Садовский М. В. **111**, 203 (188)
- Сазонов С. В. **111**, 355 ()
- Сайтов И. М. **110**, 184 (206);
111, 175 (162)
- Салахов М. Х. **110**, 772 (766)
- Салецкий А. М. **110**, 331 (348);
111, 101 (116)
- Салимов Р. К. **111**, 209 (193)
- Сальников С. Г. **111**, 215 ()
- Самарин А. Н. **110**, 241 (266)
- Самохвалов А. А. **110**, 230 (250)
- Самцевич А. И. **111**, 380 ()
- Санина В. А. **110**, 118 (133)
- Сараева И. Н. **110**, 591 (592)
- Сарманова О. Э. **111**, 625 ()
- Сасвати Дхара **111**, 591 ()
- Саутенков В. А. **110**, 767 (761)
- Сафин Т. Р. **111**, 52 (62)
- Секербаев К. С. **110**, 591 (592)
- Селезнев М. Н. **110**, 421 (436)
- Селиванов Ю. Г. **111**, 166 (151)
- Семак А. А. **111**, 291 ()
- Семенихин С. Ю. **110**, 579 (581)
- Семенов С. В. **110**, 614 (613)
- Семенов С. К. **110**, 85 (102)
- Сергеева Д. Ю. **110**, 636 (638)
- Сидоренков А. В. **111**, 101 (116)
- Силин А. П. **111**, 80 (90)
- Синицкая А. В. **110**, 291 (307)
- Сираев Ф. М. **111**, 154 (139)
- Сиразов Р. А. **110**, 314 (329)
- Ситникова А. А. **110**, 297 (313)
- Ситников М. Н. **110**, 204 (223)
- Скакун В. С. **110**, 72 (85)
- Скалдин О. А. **110**, 607 (607)
- Скрипников Л. В. **110**, 363 (382)
- Слещов А. **111**, 591 ()
- Случанко Н. Е. **110**, 241 (266)
- Смет Ю. Х. **110**, 407 (424)
- Смирнов И. Ю. **110**, 62 (68)
- Смирнов Н. А. **110**, 90 (107);
110, 230 (250)
- Смирнов С. В. **110**, 165 (178)
- Соболевский О. А. **111**, 475 ()
- Солдатов К. С. **110**, 700 (702)
- Соловьев В. А. **110**, 297 (313)
- Солодовников И. П. **111**, 291 ()
- Соменков В. А. **110**, 30 (37)
- Сорокин А. О. **111**, 34 (41)
- Сороко В. А. **111**, 469 ()
- Соснин Э. А. **110**, 72 (85)
- Сосорев А. Ю. **110**, 171 (193)
- Старостин А. Н. **110**, 387 (405);
110, 658 (659)
- Степаненко Д. И. **110**, 493 (505)
- Столяр С. В. **111**, 197 (183)
- Страумал А. Б. **111**, 514 ()
- Страумал Б. Б. **110**, 622 (624)
- Стрыгин И. С. **110**, 337 (354);
110, 671 (672)
- Супрун Е. М. **111**, 597 ()
- Сыромятников А. Г. **110**, 331 (348)
- Сырых Г. Ф. **110**, 30 (37)
- Тагиров Л. Р. **110**, 197 (217)
- Тагиров М. С. **111**, 52 (62)
- Талденков А. Н. **110**, 178 (200)
- Таран М. Д. **110**, 387 (405)
- Тарасенко В. Ф. **110**, 72 (85)
- Тарасенко С. В. **111**, 345 ()
- Тарасов А. П. **110**, 750 (739)
- Тарасов И. А. **110**, 155 (166)

- Тартаковский И. И. **110**, 806 (799)
- Татаринцев А. А. **111**, 531 ()
- Таурбаев Е. Т. **110**, 591 (592)
- Терехов В. И. **111**, 291 ()
- Терешонок М. В. **111**, 443 ()
- Тетерин А. Ю. **111**, 487 ()
- Тетерин Ю. А. **111**, 487 ()
- Тимофеев В. Б. **110**, 260 (284)
- Тимошенко В. Ю. **110**, 591 (592)
- Титова Н. А. **111**, 88 (104)
- Тищенко А. А. **110**, 636 (638)
- Ткаченко И. М. **110**, 658 (659)
- Товстун С. А. **110**, 307 (323)
- Толстогузов А. Б. **111**, 531 ()
- Трофимов О. В. **110**, 47 (54)
- Трубилко А. И. **110**, 505 (517);
111, 632 ()
- Турундаевский А. Н. **111**, 435 ()
- Тюгаев М. Д. **110**, 772 (766)
- Уманский В. **110**, 407 (424)
- Урюпин С. А. **110**, 90 (107);
110, 230 (250)
- Уханов М. Н. **111**, 291 ()
- Фабрис Ж. Ц. **110**, 515 (523)
- Фадин В. С. **111**, 3 (1)
- Фалсиано Ф. Т. **110**, 515 (523)
- Федоров А. С. **110**, 155 (166)
- Федоров В. В. **110**, 579 (581)
- Федоров И. Б. **110**, 407 (424)
- Федоров П. П. **111**, 625 ()
- Федянин А. А. **111**, 40 (46)
- Филатов Е. В. **110**, 806 (799)
- Филипов В. Б. **110**, 241 (266)
- Филиппов А. В. **110**, 387 (405);
110, 658 (659)
- Фишман А. И. **110**, 772 (766)
- Флейта Д. Ю. **111**, 251 ()
- Фоминов Я. В. **110**, 325 (342)
- Фортов В. Е. **110**, 387 (405);
- Фортов В. Е. **110**, 658 (659);
110, 767 (761)
- Фролов А. В. **110**, 400 (417)
- Фролов К. В. **110**, 557 (562)
- Фу Д. **111**, 531 ()
- Хайнеманн А. **110**, 799 (793)
- Халифа М. М. **110**, 368 (387)
- Харинцев С. С. **110**, 772 (766)
- Харитонов А. В. **110**, 772 (766)
- Хисамеева А. Р. **110**, 597 (599)
- Хоперский А. Н. **110**, 95 (111);
111, 61 (72)
- Храпай В. С. **111**, 88 (104)
- Хуснутдинов Р. М. **110**, 551 (557)
- Хьюберс Г. -В. **110**, 677 (677)
- Цвелиховская В. М. **110**, 248 (273)
- Цветков А. Ю. **111**, 166 (151)
- Цицилин И. А. **110**, 569 (574)
- Цой К. В. **111**, 514 ()
- Цхай С. Н. **110**, 652 (654)
- Цыпленьков В. В. **110**, 677 (677)
- Цяо Ф. **111**, 501 ()
- Чанг Ш. **111**, 501 ()
- Чаплик А. В. **110**, 534 (540)
- Чаповский П. Л. **111**, 75 (85)
- Чареев Д. А. **110**, 557 (562)
- Чекалин С. В. **111**, 27 (31)
- Черковец В. Е. **110**, 387 (405)
- Чернов М. Ю. **110**, 297 (313)
- Чернозатонский Л. А. **111**, 93 (109);
- Чернозатонский Л. А. **111**, 244 ();
111, 469 ()
- Чернышева Л. В. **110**, 85 (102);
111, 12 (18)
- Чернявский А. Ю. **111**, 615 ()
- Черняк А. М. **111**, 40 (46)
- Чибранов А. А. **111**, 335 ()
- Чижевский Е. Г. **111**, 166 (151)
- Чичай К. А. **110**, 799 (793)
- Чопорова Ю. Ю. **110**, 677 (677)
- Чубов Ю. В. **110**, 700 (702)
- Чубуков Д. В. **110**, 363 (382)
- Чулков Е. В. **110**, 190 (211);
110, 777 (771)
- Чумаков А. И. **110**, 30 (37);
110, 614 (613)
- Шавров В. Г. **111**, 345 ()
- Шайхисламов И. Ф. **111**, 335 ()
- Шандаров С. М. **110**, 165 (178)
- Шапиро Д. Д. **110**, 579 (581)
- Шастин В. Н. **110**, 677 (677)
- Шахмуратов Р. Н. **111**, 181 (167)
- Шахов А. М. **110**, 456 (464)
- Швец И. А. **110**, 777 (771)
- Шевелев М. В. **111**, 295 ()
- Шевцов Д. В. **110**, 155 (166)
- Шевченко Ю. А. **110**, 700 (702)
- Шелаев А. В. **110**, 772 (766)
- Шельгина С. Н. **110**, 230 (250)
- Шерстобитов А. А. **110**, 274 (301)
- Шешукова С. Е. **110**, 414 (430);
110, 526 (533)
- Шиманский С. С. **111**, 291 ()
- Шимко А. А. **110**, 9 (15)
- Шипило Д. Е. **111**, 27 (31)
- Ширяев А. А. **111**, 597 ()
- Шицевалова Н. Ю. **110**, 241 (266)
- Шкитов Д. А. **111**, 295 ()
- Шорохов А. С. **111**, 40 (46)
- Шпатаковская Г. В. **111**, 526 ()
- Шукринов Ю. М. **110**, 149 (160);
110, 736 (722)
- Шуманн И. **110**, 325 (342)
- Шумилин А. В. **110**, 482 (495)
- Шуравин Н. С. **110**, 539 (545)
- Шур В. Я. **110**, 165 (178)
- Шустин М. С. **110**, 126 (140)
- Щеголев А. Е. **111**, 443 ()
- Щепетильников А. В. **110**, 597 (599)
- Щербаков Г. В. **110**, 118 (133)
- Щербаков О. А. **110**, 222 (242)
- Эггелер Г. **111**, 514 ()
- Энкович П. В. **110**, 687 (687)
- Юсупов А. Р. **110**, 437 (447)
- Юсупов Р. В. **110**, 197 (217)
- Якимов А. И. **110**, 393 (411)
- Яковлев Д. Р. **110**, 806 (799)
- Яковлев И. А. **110**, 155 (166)
- Якушкин С. С. **110**, 614 (613)
- Янилкин И. В. **110**, 197 (217)
- Яржемский В. Г. **111**, 487 ()
- Ярославцев А. А. **110**, 23 (31)
- Ярославцев Р. Н. **111**, 197 (183)
- Ярошевич А. С. **111**, 107 (121)
- Яруллин Д. Т. **110**, 498 (511)
- Ясников И. С. **110**, 421 (436)

Инструкция для авторов

Журнал “Письма в ЖЭТФ” (и его англоязычная версия “JETP Letters”) публикует краткие статьи, требующие срочной публикации и представляющие общий интерес для широкого круга читателей-физиков. К категории срочных публикаций относятся первые наблюдения новых физических явлений и теоретические работы, содержащие принципиально новые результаты. Журнал также публикует краткие комментарии к статьям, появившимся ранее в нашем журнале. (Правила написания комментариев см. на сайте <http://www.jetpletters.ac.ru/>.)

“Письма в ЖЭТФ” является двуязычным журналом, принимая и публикуя статьи на русском и на английском языках. Все статьи на английском языке, принятые к публикации, направляются на лингвистическую экспертизу. Если английский текст признается недостаточно ясным, то редакция оставляет за собой право попросить у авторов для опубликования русскую версию статьи.

В “JETP Letters” все статьи публикуются на английском языке. Перевод русских и редактирование английских статей осуществляется в издательстве МАИК “Наука/Интерпериодика”. Русская и англоязычная версии должны быть идентичны, поскольку статья, опубликованная в обеих версиях, является одной публикацией. Хотя английская версия окончательно редактируется на месяц позже русской, в ней не должно быть дополнительных ссылок, рисунков, формул и т. п., и все утверждения должны быть одинаковы.

Размер статьи, как правило, не должен превышать **пяти** страниц русского издания, что примерно соответствует **25 KBytes** в формате LATEX, считая 1 kByte на каждый рисунок. Более точно объем текста можно оценить, оформив текст по образцу, с использованием стилевого файла jetpl.cls.

Статьи в редакцию можно направлять

– по электронной почте letters@kapitza.ras.ru – направлять текст в формате TeX, LaTeX (для статей на русском языке допускается MS Word), рисунки в формате PostScript (.ps), EncapsulatedPostScript (.eps) или PaintBrush (.psx), каждый рисунок отдельным файлом. Необходимо также приложить pdf файл статьи с встроенными рисунками.

– по почте по адресу: 117334 Москва, ул. Косыгина 2, “Письма в ЖЭТФ” – два экземпляра статьи с рисунками на отдельных страницах (для полутоновых рисунков еще один дополнительный экземпляр). К рукописи нужно приложить электронный адрес (e-mail) и почтовый адрес с индексом, фамилию, полное имя и отчество того автора, с которым предпочтительно вести переписку, а также номера его служебного и домашнего телефонов; для статей на английском языке – дополнительно CD диск с текстом в формате LATEX;

Для статей из России и других стран СНГ должно быть представлено направление от учреждения, которое будет фигурировать в титуле статьи как основное.

Решение о публикации или отклонении статей принимается на заседании редколлегии по представлению члена редколлегии по соответствующему разделу. Основанием для отклонения статьи может быть ее недостаточная актуальность, отсутствие существенного продвижения по сравнению с другими публикациями в этой области, слишком специальная тематика и др. Рецензия на отклоненные статьи, как правило, не сообщается. Авторы могут прислать отклоненную статью на повторное рассмотрение, сопроводив ее разъяснительным письмом. В этом случае статья будет направлена на дополнительное рецензирование.

Оформление рукописи

ЗАГЛАВИЕ

Инициалы и фамилии авторов

Обязательно — *Учреждения, где работают авторы (включая город и почтовый индекс; e-mail одного из авторов)*

Дата поступления

Текст аннотации

Далее следует основной текст.

Фамилии иностранных авторов пишутся в русской транскрипции, но в сноске дополнительно указывается оригинальная транскрипция. Названия мест работы за рубежом пишутся по-английски.

Обращаем внимание авторов статей на русском языке на то, что перевод фамилий с русского языка на английский производится по жестким правилам (см. Письма в ЖЭТФ, т. 58, вып. 8, с. 699). Если авторы по каким-то причинам предпочитают иную транскрипцию своей фамилии, об этом следует написать на отдельном листе.

Поскольку аннотации сейчас распространяются и отдельно от статей (базы данных, системы – On-line. и т.п.), текст аннотации должен быть самодостаточным: без ссылок на список литературы, с понятными обозначениями, без аббревиатур. Сокращения словосочетаний должны даваться заглавными буквами (без точек) и поясняться при первом их употреблении. В тексте подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье.

Цитируемая литература должна даваться общим списком в конце статьи с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой, например, [1]. Литература дается в порядке упоминания в статье. Для журнальных статей указываются сначала инициалы, затем фамилии всех авторов, название журнала, номер тома (полужирным шрифтом), первая страница и год в круглых скобках.

Для книг надо указывать инициалы и фамилии всех авторов, полное название книги, издатель, год, том, номер издания, часть, глава, страница (если ссылка на переводное издание, то обязательно в скобках нужно указать данные оригинала).

Цитирование двух или более произведений под одним номером, одного и того же произведения под разными номерами не допускается. В обозначениях и индексах не должно быть русских букв. Например, следует писать P_{opt} , а не $P_{опт}$.

В десятичных дробях вместо запятой нужно использовать точку. Векторы должны выделяться в тексте статьи полужирным шрифтом (без стрелки над ними).

Поскольку рисунки переносятся без изменений из “Писем в ЖЭТФ” в “JETP Letters” все надписи на рисунках должны быть только на английском языке. Авторов, использующих при подготовке рисунков компьютерную графику, просим придерживаться следующих рекомендаций: графики делать в рамке; штрихи на осях направлять внутрь; по возможности использовать шрифт Times; высота цифр и строчных букв должна быть в пределах $(3 \div 4)\%$ от максимального размера (высоты или ширины) рисунков, это относится и к цифрам на осях вставки; единицы измерения на осях графиков приводить в скобках. При подготовке рисунка имейте в виду, что, как правило, ширина рисунка при печати не превышает 82 мм; в исключительных случаях рисунок размещается на всей ширине листа (до 160 мм).

Рисунки публикуются “on-line” в цвете. На авторов возлагается обязанность проверить, что цветные рисунки читаемы в черно-белом печатном варианте.

Образцы оформления статьи и рисунков, а также стилевой файл можно скачать с WWW-страницы “Писем в ЖЭТФ” (<http://www.jetpletters.ac.ru/>).

Содержание
Том 111, выпуск 9
Оптика, лазерная физика

Васильева О.Ф., Зинган А.П., Васильев В.В. Нелинейная динамика оптического параметрического осциллятора на диполяритонах 579

Архипов Р.М., Архипов М.В., Розанов Н.Н. О возможности голографической записи в отсутствие взаимной когерентности опорного и предметного пучков 586

Бишлер Л., Сасвати Дхара, Григорьев Т., Миронов А., Морозов А., Морозов Ан., Рамадеви П., Вивек Кумар Сингх, Слепцов А. Разности инвариантов узлов-мутантов и их дифференциальное разложение 591

Конденсированное состояние

Ширяев А.А., Золотов Д.А., Супрун Е.М., Дьячкова И.Г., Ивахненко С.А., Асадчиков В.Е. Вклад структурных дефектов в интенсивность квазизапрещенных рентгеновских отражений алмаза: сравнение данных рентгеновской топографии и инфракрасной спектроскопии 597

Квантовая информатика

Моисеев С.А., Перминов Н.С. Многорезонаторная квантовая память с переключателем 602

Молотков С.Н. О побочном квантово-классическом бинарном канале утечки информации с гауссовским шумом 608

Бантыш Б.И., Чернявский А.Ю., Богданов Ю.И. Сравнение методов томографии чистых и почти чистых квантовых состояний 615

Kolganov N., Morozov An. Quantum \mathcal{R} -matrices as universal qubit gates 623

Разное

Буриков С.А., Котова О.Д., Сарманова О.Э., Кузнецов С.В., Пройдакова В.Ю., Воронин В.В., Федоров П.П., Пацаева С.В., Доленко Т.А. Определение фотофизических параметров твердых растворов $\text{NaGdF}_4:\text{Eu}$ в суспензиях с помощью теории Джадда–Офельта 625

Трубилко А.И., Башаров А.М. Иерархия времен открытых оптических квантовых систем и роль эффективного гамильтониана при применении приближения белого шума 632

Содержание

Том 111, выпуск 10

Оптика, лазерная физика

- Гунбина А.А., Лемзяков С.А., Тарасов М.А., Эдельман В.С., Юсупов Р.А.** Отклик на субмиллиметровое излучение СИНИС приемника с электронным охлаждением 641

Плазма, гидро- и газодинамика

- Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Катамадзе К.Г., Авосопянц Г.В., Лукичев В.Ф.** Гиперпуассоновская статистика фотонов 646

- Филатов С.В., Левченко А.А., Межов-Деглин Л.П.** Формирование и затухание вихревого движения на поверхности жидкости (Миниобзор) 653

Конденсированное состояние

- Дорожкин С.И., Капустин А.А., Уманский В., Смет Ю.Х.** Магнетоосцилляции заряда левого транзистора, обусловленные индуцированным микроволновым излучением неравновесным распределением электронов по энергии 668

- Страумал Б.Б., Кильмаматов А.Р., Мазилкин А.А., Горнакова А.С., Фабричная О.Б., Кригель М.Й., Рафайя Д., Булатов М.Ф., Некрасов А.Н., Барецки Б.** Формирование ω -фазы высокого давления в системе титан–железо при сдвиговой деформации 674

- Николаев И.Д., Уаман Светикова Т.А., Румянцев В.В., Жолудев М.С., Козлов Д.В., Морозов С.В., Дворецкий С.А., Михайлов Н.Н., Гавриленко В.И., Иконников А.В.** Зондирование состояний двухзарядного акцептора в гетероструктурах на основе CdHgTe с помощью оптического затвора 682

- Volovik G.E.** Spin vortex lattice in the Landau vortex-free state of rotating superfluids 689

- Макаров А.С., Гончарова Е.В., Афонин Г.В., Цзiao Ц.Ч., Кобелев Н.П., Хоник В.А.** Расчет температурной зависимости нерелаксированного модуля сдвига высокоэнтропийных объемных аморфных сплавов на основе калориметрических данных 691

Разное

- Коваленко С.Л., Павлова Т.В., Андрюшечкин Б.В., Ельцов К.Н.** Термопрограммируемый синтез монокристаллов квазисвободного N-графена из молекул ацетонитрила 697

Дискуссия

- Sonin E.B.** Comment on “Amplitude of waves in the Kelvin-wave cascade” (Pis'ma v ZhETF 111, 462 (2020)) 705

- Eltsov V.B., L'vov V.S.** Reply to Comment on “Amplitude of waves in the Kelvin-wave cascade” (Pis'ma v ZhETF 111, 462 (2020)) 707

Текущий авторский указатель томов 110 за 2019 г. и 111 за 2020 г.	709
Инструкция для авторов	716