Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 2

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

March–April

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 139–150

ВАЛЕРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ КОЗЛОВ (К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Академику Валерию Васильевичу Козлову, крупному российскому ученому в области теории динамических систем, классической механики и математической физики, 1 января 2020 года исполнилось семьдесят лет.

Научные интересы и достижения В.В. Козлова включают значительную часть современной математики и механики. Здесь присутствует теория чисел, вариационный анализ, риманова и симплектическая геометрия, гамильтонова динамика, классическая, статистическая, релятивистская и квантовая механика, проблема интегрируемости и теории устойчивости, эргодическая теория и анализ хаотических явлений, анализ диссипативных эффектов и трения, неголономная динамика, динамика твердого тела, биллиардные задачи, а также исследование различных моделей математической физики. Исследования Валерия Васильевича открыли новые направления в этих областях, хорошо известны специалистам и высоко ценятся как в России, так и за рубежом.

Краткий обзор научной деятельности В.В. Козлова со списком основных трудов до 2010 г. был представлен в статье, посвященной его 60-летнему юбилею (Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 3–17).

За прошедшее десятилетие В.В. Козловым получен ряд новых замечательных результатов. В частности, им были найдены препятствия к интегрируемости натуральных механических систем с потенциалами, содержащими особенности. Оказалось, что имеют место неравенства, необходимые для существования дополнительных полиномиальных по импульсам законов сохранения. Эти неравенства связывают порядки сингулярностей потенциала и топологию конфигурационного пространства. Им обнаружены и доказаны теоремы об отсутствии полиномиальных законов сохранения для газа Лоренца и газа Больцмана—Гиббса в случае некомпактного конфигурационного пространства, что имеет непосредственное отношение к старой нерешенной задаче о хаотичности таких систем.

Разработана концепция полной квадратичной интегрируемости для линейных уравнений математической физики, получен ряд неожиданных результатов в этом направлении.

В.В. Козлов работает в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. В период с 2004 по 2016 год, когда он был директором МИАН, позиции Математического института в системе российских научных организаций существенно упрочились, значительно улучшились условия работы для сотрудников института.

Много сил и энергии он отдает педагогической деятельности, являясь профессором МГУ им. М.В. Ломоносова и заведующим кафедрой Дифференциальных уравнений. Им создана ведущая в России школа по динамическим системам классической механики, двое из его учеников избраны в Российскую академию наук.

Валерию Васильевичу удивительным образом удается сочетать продуктивную научную работу с огромной организационной деятельностью, которую он проводит в Российской академии наук по организации научных исследований в нашей стране и поддержке ученых. С 2001 г. В.В. Козлов – вице-президент Российской академии наук, а с 2017 г. – академик-секретарь Отделения математических наук РАН, состоит в Совете по науке, образованию и технологиям при Президенте РФ.

В.В. Козлов – главный редактор журналов “Известия РАН. Серия Математическая” и “Regular and Chaotic Dynamics”, член редколлегии журнала “Прикладная математика и механика”.

Работа академика В.В. Козлова в качестве ученого и организатора науки получила широкое признание. Он удостоен Ломоносовской премии 1-й степени (1986), Государственной премии Российской Федерации (1994), премии имени С.В. Ковалевской Российской академии наук (2000), золотой медали Анри Пуанкаре Международной федерации нелинейных аналитиков (IFNA), золотой медали им. Леонарда Эйлера Российской академии наук (2007), Международной премии “Джили и Агостинелли” (Premio Gili Agostinelli) Туринской академии наук (2009), золотой медалью им. С.А. Чаплыгина Российской академии наук (2015). Избран иностранным членом Научного общества Сербии. Валерий Васильевич награжден Орденом Почета (1999), орденом “За заслуги перед Отечеством” IV степени (2005), III степени (2009), II степени (2014) и орденом Александра Невского (2019).

Редколлегия, редакция и читатели журнала, коллеги и ученики сердечно поздравляют Валерия Васильевича Козлова с юбилеем, желают ему доброго здоровья и дальнейших успехов в научной и организационной деятельности.

Основные публикации:

1. Полиномиальные законы сохранения для газа Лоренца и газа Больцмана–Гиббса // УМН. 2016. Т. 71. № 2 (428). С. 81–120.

2. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4 (382). С. 93–130.

3. Весовые средние, равномерное распределение и строгая эргодичность // УМН. 2005. Т. 60. № 6 (366). С. 115–138.

4. Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН. 1985. Т. 40. № 2 (242). С. 33–60.

5. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. № 1 (229). С. 3–67.

Список научных трудов, начиная с 2010 г.

2010

1. Вариационный принцип для периодических траекторий обратимых уравнений динамики // Докл. РАН. Т. 430. № 5. С. 603–605.

2. Бесконечномерные уравнения Лиувилля относительно мер // Докл. РАН. Т. 432. № 1. С. 28–32. (совм. с О.Г. Смоляновым)

3. Спектральные свойства операторов с полиномиальными инвариантами в вещественных конечномерных пространствах // Дифференциальные уравнения и топология. I. Сб. статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина. Тр. МИАН. М.: МАИК, С. 155–167.

4. Замечания о сухом трении и неголономных связях // Нелин. динам. Т. 6. № 4. С. 903–906.

5. Лагранжева механика и сухое трение // Нелин. динам. Т. 6. № 4. С. 855–868.

6. Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность // Нелин. динам. Т. 6. № 3. С. 489–512.

7. Замечания о степени неустойчивости // ПММ. Т. 74. Вып. 1. С. 18–21.

8. О вариационных принципах механики // ПММ. Т. 74. Вып. 5. С. 707–717.

2011

9. Основания статистической механики и работы Пуанкаре, Эренфестов и фон Неймана // в кн.: А. Пуанкаре, Т. и П. Эренфесты, Дж. фон Нейман. Работы по статистической механике. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед. С. 249–279. (совм. с О.Г. Смоляновым)

10. Сила Лоренца и ее обобщения // Нелин. динам. Т. 7. № 3. С. 627–634.

11. Статистическая необратимость в обратимой круговой модели Каца // Нелин. динам. Т. 7. № 1. С. 101–117.

12. Задача об устойчивости двузвенных траекторий многомерного биллиарда Биркгофа // Тр. МИАН. С. 212–230.

13. Об уравнениях движения бесстолкновительной сплошной среды // ПММ. Т. 75. Вып. 6. С. 883–900.

14. The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence // Regul. Chaotic Dyn. V. 16. № 6. P. 602–622.

15. Bogoliubov type equations via infinite-dimensional equations for measures // Quantum bio-informatics IV, QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., 28, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, P. 321–337. (совм. со Смоляновым О.Г.)

16. Меры Вигнера на бесконечномерных пространствах и уравнения Боголюбова для квантовых систем // Докл. РАН. Т. 439. № 5. С. 600–604. (совм. с О.Г. Смоляновым)

17. Statistical irreversibility of the Kac reversible circular model // Regul. Chaotic Dyn. V. 16. № 5. P. 536–549.

18. Трение по Пенлеве и Лагранжева механика // Докл. РАН. Т. 438. № 6. С. 758–761.

19. О механизме сухого трения // Докл. РАН. Т. 437. № 6. С. 766–767.

20. Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 14th IEEE Intern. IEEE Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC), P. 477–481. (совм. с А.С. Бугаевым, А.П. Буслаевым, М.В. Яшиной)

21. Некоторые математические и информационные аспекты моделирования трафика // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2011. № 4. С. 29–31. (совм. с А.С. Бугаевым, А.П. Буслаевым, М.В. Яшиной)

2012

22. Об инвариантных многообразиях неголономных систем // Нелин. динам. Т. 8. № 1. С. 57–69.

23. On Gibbs distribution for quantum systems // p-Adic Numbers Ultram. Anal. Appl. 4: 1. P. 76–83.

24. Замечания о полиномиальных интегралах высших степеней обратимых систем с торическим пространством конфигураций // Изв. РАН. Сер. Матем. Т. 76. № 5. С. 57–72. (совм. с Н.В. Денисовой, Д.В. Трещёвым)

25. On invariant manifolds of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn. V. 17. № 2. P. 131–141.

26. Расширенный метод Гамильтона–Якоби // Нелин. динам. Т. 8. № 3. С. 549–568.

27. Metropolis traffic modeling: from intelligent monitoring through physical representation to mathematical problems // Proc. Intern. Conf. on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. V. 1. P. 750–756. (совм. с А.П. Буслаевым)

28. Об инвариантных многообразиях уравнений Гамильтона // ПММ. Т. 76. Вып. 4. С. 526–539.

29. Гамильтоновы аспекты квантовой теории // Докл. РАН. Т. 444. № 6. С. 607–611. (совм. с О.Г. Смоляновым)

30. Статистическая механика одного класса диссипативных систем // ПММ. Т. 76. № 1. С. 23–35.

31. Об одном расширении метода Гамильтона–Якоби // Докл. РАН. Т. 443. № 5. С. 561–563.

32. An extended Hamilton–Jacobi method // Regul. Chaotic Dyn. T. 17. № 6. P. 580–596.

2013

33. К теореме Боля об аргументе // Матем. заметки. Т. 93. № 1. С. 72–80.

34. Теорема Эйлера–Якоби–Ли об интегрируемости // Нелин. динам. Т. 9. № 2. С. 229–245.

35. Моделирование трафика: монотонное случайное блуждание по сети // Матем. Модел., Т. 25. № 8. С. 3–21. (совм. с А.С. Бугаевым, А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым, М.В. Яшиной)

36. Замечания об интегрируемых системах // Нелин. динам. Т. 9. № 3. С. 459–478.

37. О поведении циклических переменных в интегрируемых системах // ПММ. Т. 77. Вып. 2. С. 179–190.

38. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // Regul. Chaotic Dyn. V. 18. № 4. P. 329–343.

39. Polynomial in momenta invariants of Hamilton's equations, divergent series and generalized functions // Nonlinearity. V. 26. № 3. P. 745–756.

40. Asymptotic solutions of strongly nonlinear systems of differential equations. Transl. from the 2009 Russ. 2nd ed. Springer Monogr. Math. Heidelberg: Springer, xx+262 p. (совм. с С.Д. Фуртой),

41. Общая теория вихрей. 2-е изд. М.;Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 324 с.

42. Андрей Геннадьевич Куликовский (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. Т. 68. № 6(414). С. 179–188. (совм. с А.Т. Ильичевым, Д.В. Трещёвым, А.П. Чугайновой)

2014

43. A Memoir on Integrable Systems. Springer Monogr. Math. Berlin: Springer, 480 p. (совм. с Ю.Е. Федоровым)

44. Уравнение Лиувилля как уравнение Шрёдингера // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 78. № 4. С. 109–122.

45. Remarks on integrable systems // Regul. Chaotic Dyn. V. 19. № 2. P. 145–161.

46. Conservation laws of generalized billiards that are polynomial in momenta // Russ. J. Math. Phys. V. 21. № 2. P. 226–241.

47. Динамика систем с большими гироскопическими силами и реализация связей // ПММ. Т. 78. Вып. 3. С. 307–315.

48. Флуктуации ансамблей Гиббса // Докл. РАН. Т. 458. № 1. С. 22–26.

49. On rational integrals of geodesic flows // Regul. Chaotic Dyn. V. 19. № 6. P. 601–606.

50. О рациональных интегралах геодезических потоков // Нелин. динам. Т. 10. № 4. С. 439–445.

51. On a system of nonlinear differential equations for the model of totally connected traffic // J. Concr. Appl. Math. V. 12. № 1–2. P. 86–93. (совм. с А.П. Буслаевым)

52. Behavior of pendulums on a regular polygon // J. Comm. & Comput. V. 11. № 1. P. 30–38. (совм. с А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым)

53. Exchange of stabilities in the Euler–Poincaré–Suslov systems under the change of the direction of motion // Nonlin. Dyn. & Moble Robot. V. 2. № 2. P. 199–211.

54. Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. М.: МГУ, С. 5–41. (совм. с И.В. Асташовой, А.В. Боровских, В.В. Быковым, А.Н. Ветохиным, А.Ю. Горицким, Н.А. Изобовым, Ю.С. Ильяшенко, Т.О. Капустиной, А.А. Коньковым, И.В. Матросовым, В.В. Палиным, Н.Х. Розовым, М.С. Романовым, И.Н. Сергеевым, Е.В. Радкевичем, О.С. Розановой, И.В. Филимоновой, А.В. Филиновским, Г. А. Чечкиным, А.С. Шамаевым, Т.А. Шапошниковой)

2015

55. A dynamical communication system on a network // J. Comput. Appl. Math. V. 275. P. 247–261. (совм. с А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым)

56. Dynamical systems on honeycombs // Traffic and granular flow '13. Springer, P. 441–452. (совм. с А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым, М.В. Яшиной)

57. Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector // Int. J. Comput. Math. V. 92. № 9. P. 1910–1920. (совм. с А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым)

58. Принципы динамики и сервосвязи // Нелин. динам. Т. 11. № 1. С. 169–178.

59. On real-valued oscillations of a bipendulum // Appl. Math. Lett. V. 46. P. 44–49. (совм. с А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым)

60. Динамика систем с сервосвязями. I // Нелин. динам. Т. 11. № 2. С. 353–376.

61. Coarsening in ergodic theory // Russ. J. Math. Phys. V. 22. № 2. P. 184–187.

62. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. Т. 79. Вып. 3. С. 307–316.

63. Вариационное исчисление в целом, существование траекторий в области с границей и задача Уитни о перевернутом маятнике // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 79. № 5. С. 39–46. (совм. с С.В. Болотиным)

64. Динамика систем с сервосвязями. II // Нелин. динам. Т. 11. № 3. С. 579–611.

65. Инвариантные и квазиинвариантные меры на бесконечномерных пространствах // Докл. РАН. Т. 465. № 5. С. 527–531. (совм. с О.Г. Смоляновым)

66. Обобщенная транспортно-логистическая модель как класс динамических систем // Матем. модел. Т. 27. № 12. С. 65–87. (совм. с А.С. Бугаевым, А.П. Буслаевым, А.Г. Таташевым, М.В. Яшиной)

67. Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской // Матем. сб. Т. 206. № 12. С. 29–54. (совм. с И.А. Бизяевым)

2016

68. Инвариантные меры гладких динамических систем, обобщенные функции и методы суммирования // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 80. № 2. С. 63–80.

69. Полиномиальные законы сохранения для газа Лоренца и газа Больцмана–Гиббса // УМН. Т. 71. № 2 (428). С. 81–120.

70. The phenomenon of reversal in the Euler–Poincaré–Suslov nonholonomic systems // J. Dyn. Control Syst. V. 22. № 4. P. 713–724.

71. Об уравнениях гидродинамического типа // ПММ. Т. 80. Вып. 3. С. 294–303.

72. Топология конфигурационного пространства, сингулярности потенциала и полиномиальные интегралы уравнений динамики // Матем. сб. Т. 207. № 10. С. 80–95. (совм. с Д.В. Трещёвым)

73. On the extendability of Noether's integrals for orbifolds of constant negative curvature // Regul. Chaotic Dyn. V. 21. № 7–8. P. 821–831.

74. Современные проблемы механики // Сб. статей. Тр. МИАН. М.: МАИК Наука/Интерпериодика, 351 с. (совм. с А.Г. Сергеевым)

2017

75. On the covering of a Hill's region by solutions in systems with gyroscopic forces // Nonlin. Anal. V. 148. P. 138–146. (совм. с И.Ю. Полехиным)

76. Теорема Коши о среднем и непрерывные дроби // УМН. Т. 72. № 1(433). С. 195–196.

77. On the covering of a Hill's region by solutions in the restricted three-body problem // Celest. Mech. Dyn. Astr. V. 127. № 3. P. 331–341. (совм. с И.Ю. Полехиным)

78. Топологический подход к обобщенной задаче n центров // УМН. Т. 72. № 3(435). С. 65–96. (совм. с С.В. Болотиным)

79. Топология, сингулярности и интегрируемость в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 81. № 4. С. 3–19. (совм. с С.В. Болотиным)

80. Об одной формуле суммирования расходящихся непрерывных дробей // Докл. РАН. Т. 474. № 4. С. 410–412.

81. О вещественных решениях систем уравнений // Функц. анализ и его прил. Т. 51. № 4. С. 79–83.

82. Симплектическая геометрия линейного преобразования с квадратичным инвариантом // Докл. РАН. Т. 477. № 6. С. 646–648.

83. О возвращаемости в системах с некомпактным конфигурационным пространством и неотрицательной потенциальной энергией // ПММ. Т. 81. Вып. 4. С. 371–379.

2018

84. Linear Hamiltonian Systems: Quadratic Integrals, Singular Subspaces and Stability // Regul. Chaotic Dyn. V. 23. № 1. P. 26–46.

85. Две теоремы об изоморфизмах пространств с мерой // Матем. заметки. Т. 104. № 5. С. 781–784. (совм. с О.Г. Смоляновым)

86. Задача Монжа “о выемках и насыпях” на торе и проблема малых знаменателей // Сиб. матем. ж. Т. 59. № 6. С. 1370–1374.

87. Гамильтонов подход к вторичному квантованию // Докл. РАН. Т. 483. № 2. С. 138–142. (совм. с О.Г. Смоляновым)

88. Instability, asymptotic trajectories and dimension of the phase space // Mos. Math. J. V. 18. № 4. P. 681–692. (совм. с Д.В. Трещёвым)

89. Мультигамильтоновость линейной системы с квадратичным инвариантом // Алгебра и анализ. Т. 30. № 5. С. 159–168.

2019

90. Гидродинамика и электромагнетизм: дифференциально-геометрические аспекты и аналогии // Математическая физика и приложения. Сб. статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова. Тр. МИАН. М.: МИАН, С. 148–157.

91. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // УМН. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.

92. Об уравнениях Максвелла с магнитным монополем на многообразиях // Математическая физика и приложения. Сб. статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова. Тр. МИАН. М.: МИАН, С. 52–55. (совм. с И.В. Воловичем)

93. On the dynamics of systems with one-sided non-integrable constraints // Theor. Appl. Mech. V. 46. № 1. P. 1–14.

94. Fermi-like acceleration and power-law energy growth in nonholonomic systems // Nonlinearity. V. 32. № 9. P. 3209–3233. (совм. с И.А. Бизяевым, А.В. Борисовым, И.С. Мамаевым)

95. Линейные системы с квадратичным интегралом и полная интегрируемость уравнения Шрёдингера // УМН. Т. 74. № 5(449). С. 189–190.

2020

96. Первые интегралы и асимптотические траектории // Матем. сб. Т. 211. № 1. С. 32–59.

Valeriy Vasilievich Kozlov

(On his 70th birthday)

Academician Valery Vasilievich Kozlov, a major Russian scientist in the field of the theory of dynamical systems, classical mechanics and mathematical physics, on January 1, 2020 has celebrated the seventieth birthday.

Scientific interests and achievements of V.V. Kozlov include a numerous areas of modern mathematics and mechanics, such as number theory, calculus of variations, Riemannian and symplectic geometry, Hamiltonian dynamics, classical, statistical, relativistic and quantum mechanics, the problems of integrability and stability theory, ergodic theory and analysis of chaotic phenomena, analysis of dissipative effects and friction, nonholonomic dynamics, rigid body dynamics, billiard problems, as well as the study of various models of mathematical physics. His research opened up new trends in these areas, are well known to specialists and are highly appreciated both in Russia and abroad.

The work of Academician V.V. Kozlov as a scientist and organizer of science was widely recognized. Valery Vasilievich was awarded the Mikhail Lomonosov Prize of the 1st degree (1986), the State Prize of the Russian Federation (1994), and the Kovalevskaya Prize of the Russian Academy of Sciences (2000), the Leonard Euler Gold Medal of the Russian Academy of Sciences(2007), Premio Gili Agostinelli, Accademia delle Scienze di Torino (2009), Chaplygin Gold Medal of the Russian Academy of Sciences (2015).

He is elected a foreign member of the Serbian Academy of Sciences and Arts (2012), was awarded the Order of Honor (1999), the Order “For Merit to the Fatherland” IV degree (2005), III degree (2009), II degree (2014) and the Order of Alexander Nevsky (2019).

The Editorial Board, editors, and readers of the Journal of Applied Mathematics and Mechanics, his colleagues and disciples cordially congratulate Valeriy Vasilievich Kozlov on his 70th birthday and wish him good health, fruitful creative work in science and administrative duties.

List of Main Publications

1. Polynomial conservation laws for the Lorentz gas and the Boltzmann–Gibbs gas // Russ. Math. Surv., 2016, vol. 71, no. 2, pp. 253–290.
2. The generalized Vlasov kinetic equation // Russ. Math. Surv., 2008, vol. 63, no. 4, pp. 691–726.
3. Weighted averages, uniform distribution, and strict ergodicity // Russ. Math. Surv., 2005, vol. 60, no. 6, pp. 1121–1146.
4. Calculus of variations in the large and classical mechanics // Russ. Math. Surv., 1985, vol. 40, no. 2, pp. 37–71.
5. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russ. Math. Surv., 1983, vol. 38, no. 1, pp. 1–76.

List of Scientific Papers Starting from 2010

2010

1. Variational principle for periodic orbits of invertible dynamical equations // Dokl. Math., vol. 81, no. 1, pp. 139–141.
2. Infinite-dimensional Liouville equations with respect to measures // Dokl. Math., vol. 81, no. 3, pp. 476–480. (coauthor O.G. Smolyanov)
3. Spectral properties of operators with polynomial invariants in real finite-dimensional spaces // Proc. Steklov Inst. Math., pp. 148–160.
4. Note on dry friction and non-holonomic constraints // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 6, no. 4, pp. 903–906. (in Russian)
5. Lagrangian mechanics and dry friction // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 6, no. 4, pp. 855–868. (in Russian)
6. The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 6, no. 3, pp. 489–512. (in Russian)
7. Remarks on the degree of instability // JAMM, vol. 74, Iss. 1, pp. 10–12.
8. On the variational principles of mechanics // JAMM, vol. 74, no. 5, pp. 505–512.

2011

9. Foundations of statistical mechanics and the work of Poincaré, Ehrenfest and von Neumann // in: A. Poincare, T. and P. Ehrenfesta, J. von Neumann, Works on statistical mechanics. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Sci., pp. 249–279. (coauthor O.G. Smolyanov; in Russian)
10. The Lorentz force and its generalizations // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 7, no. 3, pp. 627–634.
11. Statistical irreversibility of the Kac reversible circular model // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 7, no. 1, pp. 101–117. (in Russian)
12. Problem of stability of two-link trajectories in a multidimensional Birkhoff billiard // Proc. Steklov Inst. Math., vol. 273, pp. 196–213.
13. The equations of motion of a collisionless continuum // JAMM, vol. 75, Iss. 6, pp. 619–630.
14. The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence // Regul. Chaotic Dyn., vol. 16, no. 6, pp. 602–622.
15. Bogoliubov type equations via infinite-dimensional equations for measures // Quantum bio-informatics IV, QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., 28, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 321–337. (coauthor O.G. Smolyanov)
16. Wigner measures on infinite-dimensional spaces and the Bogolyubov equations for quantum systems // Dokl. Math., vol. 84, no. 1, pp. 571–575. (coauthor O.G. Smolyanov)

17. Statistical irreversibility of the Kac reversible circular model // Regul. Chaotic Dyn., vol. 16, no. 5, pp. 536–549.

18. Friction in the sense of Painlevé and Lagrangian mechanics // Dokl. Phys., vol. 56, no. 6, pp. 355–358.

19. On the dry-friction mechanism // Dokl. Phys., vol. 56, no. 4, pp. 256–257.

20. Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 2011 14th IEEE Intern. IEEE Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC), pp. 477–481. (coauthors A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, M.V. Yashina)

21. Some mathematical and informational aspects of traffic modeling // T-Comm, № 4, pp. 29–31. (coauthors A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, M.V. Yashina; in Russian)

2012

22. On invariant manifolds of nonholonomic systems // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 8, no. 1, pp. 57–69. (in Russian)

23. On Gibbs distribution for quantum systems // p-Adic Numb. Ultram. Anal. Appl., vol. 4, no. 1, pp. 76–83.

24. Remarks on polynomial integrals of higher degrees for reversible systems with toral configuration space // Izv. Math., vol. 76, no. 5, pp. 907–921. (coauthors N.V. Denisova, D.V. Treschev)

25. On invariant manifolds of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., vol. 17, no. 2, pp. 131–141.

26. An extended Hamilton–Jacobi method // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 8, no. 3, pp. 549–568. (in Russian)

27. Metropolis traffic modeling: from intelligent monitoring through physical representation to mathematical problems // Proc. Intern. Conf. on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, vol. 1, pp. 750–756. (coauthor A.P. Buslaev)

28. Invariant manifolds of Hamilton's equations // JAMM, vol. 76, Iss. 4, pp. 378–387.

29. Hamiltonian aspects of quantum theory // Dokl. Math., vol. 85, no. 3, pp. 416–420. (coauthor O.G. Smolyanov)

30. The statistical mechanics of a class of dissipative systems // JAMM, vol. 76, no. 1, pp. 15–24.

31. An extension of the Hamilton-Jacobi method // Dokl. Math., vol. 85, no. 2, pp. 301–303.

32. An extended Hamilton–Jacobi method // Regul. Chaotic Dyn., vol. 17, no. 6, pp. 580–596.

2013

33. On Bohl's argument theorem // Math. Notes, vol. 93, no. 1, pp. 83–89.

34. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 9, no. 2, pp. 229–245. (in Russian)

35. Traffic simulation: Monotonous random walk on the network // Math. Models &Comput. Simul., vol. 25, no. 8, pp. 3–21. (coauthors A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, M.V. Yashina; in Russian)

36. Notes on integrable systems // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 9, no. 3, pp. 459–478. (in Russian)

37. The behaviour of cyclic variables in integrable systems // JAMM, vol. 77, Iss. 2, pp. 128–136.

38. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // Regul. Chaotic Dyn., vol. 18, no. 4, pp. 329–343.

39. Polynomial in momenta invariants of Hamilton's equations, divergent series and generalized functions // Nonlinearity, vol. 26, no. 3, pp. 745–756.

40. Asymptotic Solutions of Strongly Nonlinear Systems of Differential Equations. Transl. from the 2009 Russ. 2nd ed. Springer Monogr. Math., Heidelberg: Springer, xx+262 pp. (coauthor S.D. Furta)

41. General Theory of Vortices. 2nd ed. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2013, 324 c.

42. Andrei Gennad'evich Kulikovskii (on his 80th birthday) // Russ. Math. Surv., vol. 68, no. 6, pp. 1145–1155. (coauthors A.T. Il'ichev, D.V. Trechshev, A.P. Chugainova)

2014

43. A Memoir on Integrable Systems. Springer Monogr. Math., Berlin: Springer, 480 pp. (coauthor Yu.E. Fedorov)

44. Liouville's equation as a Schrödinger equation // Izv. Math., vol. 78, no. 4, pp. 744–757.

45. Remarks on integrable systems // Regul. Chaotic Dyn., vol. 19, no. 2, pp. 145–161.

46. Conservation laws of generalized billiards that are polynomial in momenta // Russ. J. Math. Phys., vol. 21, no. 2, pp. 226–241.

47. The dynamics of systems with large gyroscopic forces and the realization of constraints // JAMM, vol. 78, no. 3, pp. 213–219.

48. Fluctuations of Gibbs ensembles // Dokl. Math., vol. 90, no. 2, pp. 622–625.

49. On rational integrals of geodesic flows // Regul. Chaotic Dyn., vol. 19, no. 6, pp. 601–606.

50. On rational integrals of geodesic flows // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 10, no. 4, pp. 439–445. (in Russian)

51. On a system of nonlinear differential equations for the model of totally connected traffic // J. Concr. Appl. Math., vol. 12, no. 1–2, pp. 86–93. (coauthor A.P. Buslaev)

52. Behavior of pendulums on a regular polygon // J. Commun.&Comput., vol. 11, no. 1, pp. 30–38. (coauthors A.P. Buslaev, A.G. Tatashev)

53. Exchange of stabilities in the Euler–Poincaré–Suslov systems under the change of the direction of motion // Nonlin. Dyn.&Mobile Robotics, vol. 2, no. 2, pp. 199–211.

54. Scientific heritage of Vladimir Mikhailovich Millionshchikov // J. Math. Sci. (N.Y.), vol. 210, no. 2, pp. 115–134. (coauthors I.V. Astashova, A.V. Borovskikh, V.V. Bykov, A.N. Vetokhin, A.Yu. Goritskii, N.A. Izobov, Yu.S. Ilyashenko, T.O. Kapustina, A.A. Kon'kov, I.V. Matrosov, V.V. Palin, N.Kh. Rozov, M.S. Romanov, I.N. Sergeev, E.V. Radkevich, O.S. Rozanova, I.V. Filimonova, A.V. Filinovskii, G.A. Chechkin, A.S. Shamaev, T.A. Shaposhnikova)

2015

55. A dynamical communication system on a network // J. Comput. Appl. Math., vol. 275, pp. 247–261. (coauthors A.P. Buslaev, A.G. Tatashev)

56. Dynamical systems on honeycombs // Traffic and granular flow '13, Springer, pp. 441–452. (coauthors A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, M.V. Yashina)

57. Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector // Intern. J. Comput. Math., vol. 92, no. 9, pp. 1910–1920. (coauthors A.P. Buslaev, A.G. Tatashev)

58. Principles of dynamics and servo-constraints // Russ. J. Nonlin. Dyn., vol. 11, no. 1, pp. 169–178. (in Russian)

59. On real-valued oscillations of a bipendulum // Appl. Math. Lett., vol. 46, pp. 44–49. (coauthors A.P. Buslaev, A.G. Tatashev)

60. The dynamics of systems with servoconstraints. I // Regul. Chaotic Dyn., vol. 20, no. 3, pp. 205–224.

61. Coarsening in ergodic theory // Russ. J. Math. Phys., vol. 22, no. 2, pp. 184–187.

62. Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems // JAMM, vol. 79, no. 3, pp. 209–216.

63. Calculus of variations in the large, existence of trajectories in a domain with boundary, and Whitney's inverted pendulum problem // Izv. Math., vol. 79, no. 5, pp. 894–901. (coauthor S.V. Bolotin)

64. The dynamics of systems with servoconstraints. II // Regul. Chaotic Dyn., vol. 20, no. 4, pp. 401–427.

65. Invariant and quasi-invariant measures on infinite-dimensional spaces // Dokl. Math., vol. 92, no. 3, pp. 743–746. (coauthor O.G. Smolyanov)

66. Generalized transport and logistics model as a class of dynamic systems // Math. Models &Comput. Simul., vol. 27, no. 12, pp. 65–87. (coauthors A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, M.V. Yashina; in Russian)

67. Homogeneous systems with quadratic integrals, Lie-Poisson quasibrackets, and Kovalevskaya's method // Sb. Math., vol. 206, no. 12, pp. 1682–1706. (coauthor I.A. Bizyaev)

2016

68. Invariant measures of smooth dynamical systems, generalized functions and summation methods // Izv. Math., vol. 80, no. 2, pp. 342–358.

69. Polynomial conservation laws for the Lorentz gas and the Boltzmann–Gibbs gas // Russ. Math. Surv., vol. 71, no. 2, pp. 253–290.

70. The phenomenon of reversal in the Euler–Poincaré–Suslov nonholonomic systems // J. Dyn. Control Syst., vol. 22, no. 4, pp. 713–724.

71. On the equations of the hydrodynamic type // JAMM, vol. 80, Iss. 3, pp. 209–214.

72. Topology of the configuration space, singularities of the potential, and polynomial integrals of equations of dynamics // Sb. Math., vol. 207, no. 10, pp. 1435–1449. (coauthor D.V. Treschev)

73. On the extendability of Noether's integrals for orbifolds of constant negative curvature // Regul. Chaotic Dyn., vol. 21, no. 7–8, pp. 821–831.

74. Modern Problems of Mechanics. Collected papers // Tr. Mat. Inst. Steklova, 295. Moscow: MAIK Nauka/Interperiodica, 351 pp. (coauthor A.G. Sergeev; in Russian)

2017

75. On the covering of a Hill's region by solutions in systems with gyroscopic forces // Nonlin. Anal., vol. 148, pp. 138–146. (coauthor I.Yu. Polekhin)

76. Cauchy's mean value theorem and continued fractions // Russ. Math. Surv., vol. 72, no. 1, pp. 182–184.

77. On the covering of a Hill's region by solutions in the restricted three-body problem // Celest. Mech. Dyn. Astr., vol. 127, no. 3, pp. 331–341. (coauthor I.Yu. Polekhin)

78. Topological approach to the generalized n-centre problem // Russ. Math. Surv., vol. 72, no. 3, pp. 451–478. (coauthor S.V. Bolotin)

79. Topology, singularities and integrability in Hamiltonian systems with two degrees of freedom // Izv. Math., vol. 81, no. 4, pp. 671–687. S.V. Bolotin,

80. A summation formula for divergent continued fractions // Dokl. Math., vol. 95, no. 3, pp. 240–242.

81. On real solutions of the systems of equations // Funct. Anal. Appl., vol. 51, no. 4, pp. 306–309.

82. Symplectic geometry of a linear transformation with a quadratic invariant // Dokl. Math., vol. 96, no. 3, pp. 625–627.

83. On reversibility in systems with a non-compact configuration space and non-negative potential energy // JAMM, vol. 81, Iss. 4, pp. 250–255.

2018

84. Linear Hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // Regul. Chaotic Dyn., vol. 23, no. 1, pp. 26–46.

85. Two theorems on isomorphisms of measure spaces // Math. Notes, vol. 104, no. 5, pp. 758–761. (coauthor O.G. Smolyanov)

86. The Monge problem of "piles and holes" on the torus and the problem of small denominators // Sib. Math. J., vol. 59, no. 6, pp. 1090–1093.

87. Hamiltonian approach to secondary quantization // Dokl. Math., vol. 98, no. 3, pp. 571–574. (coauthor O.G. Smolyanov)

88. Instability, asymptotic trajectories and dimension of the phase space // Mos. Math. J., vol. 18, no. 4, pp. 681–692. (coauthor D.V. Treschev)

89. Multi-Hamiltonian property of a linear system with quadratic invariant // St. Petersburg Math. J., vol. 30, no. 5, pp. 877–883.

2019

90. Hydrodynamics and Electromagnetism: Differential–Geometric Aspects and Analogies // Proc. Steklov Inst. Math., vol. 306, pp. 135–144.

91. Tensor invariants and integration of differential equations // Russ. Math. Surv., vol. 74, no. 1, pp. 111–140.

92. On Maxwell's equations with a magnetic monopole on manifolds // Proc. Steklov Inst. Math., vol. 306, pp. 43–46. (coauthor I.V. Volovich)

93. On the dynamics of systems with one-sided non-integrable constraints // Theor. Appl. Mech., vol. 46, no. 1, pp. 1–14.

94. Fermi-like acceleration and power-law energy growth in nonholonomic systems // Nonlinearity, vol. 32, no. 9, pp. 3209–3233. (coauthors I.A. Bizyaev, A.V. Borisov, I.S. Mamaev)

95. Linear systems with quadratic integral and complete integrability of the Schrödinger equation // Russ. Math. Surv., vol. 74, no. 5, pp. 959–961.

2020

96. First integrals and asymptotic trajectories // Sb. Math. vol. 211, no. 1.

УДК 531

О ФОРМИРОВАНИИ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

В. Ф. Журавлёв*

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

** e-mail: Zhurav@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 23.09.2019 г.
После доработки 28.11.2019 г.
Принята к публикации 02.12.2019 г.

Рассматриваются вопросы формирования обратных связей эффективности управления колебаниями осциллятора Ван-дер-Поля. Под эффективностью управления понимается выбор таких законов формирования обратных связей, которые обеспечивают наискорейший выход осциллятора на стационарный режим.
Изучаются два типа осциллятора – классический, с одной степенью свободы, совершающий прямолинейные колебания, и двумерный, совершающий плоские колебания [1]. Модель двумерного осциллятора Ван-дер-Поля используется обычно для изучения работы волнового твердотельного гироскопа (кварцевого полусферического резонатора).

Ключевые слова: пространственный осциллятор Ван-дер-Поля, постоянная Ляпунова, предельный цикл, волновой твердотельный гироскоп

DOI: 10.31857/S0032823520010105

1. Случай одномерного осциллятора с обратной связью по амплитуде. Будем рассматривать уравнение осциллятора в следующей размерной форме:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\omega(x_0^k - |x|^k)\dot{x}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

В отличие от обычных записей уравнения Ван-дер-Поля (см., напр. [2]) обратная связь здесь выбрана в более общем виде. Найдем такое $k \in (0, 1, \ldots)$, чтобы стационарное, асимптотически устойчивое решение уравнения (1.1) отвечало максимальному по модулю отрицательному показателю Ляпунова. Приведем уравнение (1.1) к нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 + \varepsilon\omega(x_0^k - |x|^k)y \end{aligned} \tag{1.2}$$

и сделаем замену переменных

$$(x, y) \to (r, \varphi): \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\omega\sin\varphi \tag{1.3}$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon\left(x_0^k - r^k|\cos\varphi|^k\right) r\sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} &= -\omega + \varepsilon\left(x_0^k - r^k|\cos\varphi|^k\right) r\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.4}$$

Полагая ε малым параметром, приходим к системе с одной быстрой (φ) и одной медленной (r) переменной. Выполним осреднение системы (1.4) по быстрой переменной [3]:

$$\begin{gathered}\dot r = \frac{\varepsilon}{2}(x_0^k - M(k)r^k)r\\ \dot\varphi = -\omega,\end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$M(k) = \begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos\varphi|^k \sin^2\varphi d\varphi & k = 2n+1\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\sin^2\varphi d\varphi & k = 2n+2\end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1.6}$$

Вычисления по формуле (1.6) дают

k	1	2	3	4	5	6
$M(k)$	0.424	0.25	0.17	0.125	0.098	0.078

Асимптотика $M(k)$ при $k \to \infty$ может быть получена для четных k при помощи формулы (см., например, [3]):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varphi\sin^2\varphi d\varphi = \frac{2}{4^n}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2(n+1))!}{(2(n+1)!)^2}\right], \tag{1.7}$$

в которой для асимптотики $n!$ используется формула Стирлинга (см. напр. [4]):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.8}$$

В результате получаем:

$$M(k) = M(2n) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \tag{1.9}$$

Стационарное решение уравнения (1.5) имеет вид

$$r = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}}, \tag{1.10}$$

соответствующее решение уравнения (1.1) в силу (1.3) таково

$$x = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}}\cos(\omega t - \varphi_0) = A\cos(\omega t - \varphi_0), \quad A = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}} \tag{1.11}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного решения (1.11), проварьировав в окрестности решения (1.10) уравнение для амплитуды в системе (1.5). Предварительно перепишем это уравнение, использовав связь амплитуды стационарного решения A с установочной амплитудой x_0 в виде:

$$\dot r = \frac{\varepsilon M(k)}{2}\left(A^k - r^k\right)r \tag{1.12}$$

Вариация решения стационарного решения (1.10):

$$r = A + \delta r \Rightarrow \delta\dot r = -\frac{1}{2}\varepsilon k M(k)A^k\delta r \tag{1.13}$$

Таким образом, характеристический показатель Ляпунова равен:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\varepsilon k M(k) A^k \tag{1.14}$$

Максимум модуля этого показателя определяется максимумом произведения $kM(k)$.

k	1	2	3	4	5	6
$kM(k)$	0.424	0.50	0.51	0.50	0.49	0.468

Видно, что этот максимум достигается при $k = 3$. При дальнейшем возрастании k функция $\tilde{\lambda}(k) = kM(k)$ монотонно убывает до нуля. Таким образом, показано, что уравнение управляемого осциллятора Ван-дер-Поля с максимальным эффектом управления по амплитуде имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\omega\left(x_0^3 - |x|^3\right)\dot{x}$$

2. Осциллятор Ван-дер-Поля с управлением по энергии колебаний. Вместо традиционной формы обратной связи в системе (1.1) рассмотрим обратную связь с управлением по энергии:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2^n \varepsilon\omega(E^n - E_0^n)\dot{x}, \tag{2.1}$$

где

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + cx^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) \tag{2.2}$$

или, в нормальной форме Коши

$$\begin{gathered} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \varepsilon\omega m\left(\left(y^2 + \omega^2 x^2\right)^n - \left(y_0^2 + \omega^2 x_0^2\right)^n\right) y \end{gathered} \tag{2.3}$$

Выполним в системе (2.3) замену переменных (1.3)

$$\begin{gathered} \dot{r} = \varepsilon m\omega^{2n+1}\left(r^{2n} - r_0^{2n}\right) r \sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} = -\omega + \varepsilon m\omega^{2n+1}\left(r^{2n} - r_0^{2n}\right)\sin\varphi\cos\varphi \end{gathered} \tag{2.4}$$

Осредняем систему (2.4) по быстрой фазе φ:

$$\dot{r} = \varepsilon m\omega^{2n}\left(r^n - r_0^n\right) r, \quad \dot{\varphi} = -\omega \tag{2.5}$$

Стационарное решение системы (2.5) имеет вид $r = r_0$, $\varphi = -\omega t + \varphi_0$, или, в исходных переменных (1.3) $x = r_0\cos(\omega t - \varphi_0)$. Для исследования устойчивости этого решения запишем уравнение в вариациях в первом уравнении системы (2.5):

$$\delta\dot{r} = n\varepsilon m\omega^{2n} r_0^n \delta r \tag{2.6}$$

Устойчивость (2.6) имеет место при $\varepsilon < 0$.

Модуль показателя Ляпунова $\lambda = n|\varepsilon| m\omega^{2n} r_0^n$ монотонно возрастает при увеличении n, что говорит о том, что управление с обратной связью по энергии колебаний является существенно более эффективным, чем управление с обратной связью по амплитуде.

3. Двумерный случай. Уравнения двумерного управляемого осциллятора Ван-дер-Поля получены в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 + q_1 = Q_1 = -d(E - 1/2)\dot{q}_1 - pKq_2 - \gamma\dot{q}_2 \\ &\ddot{q}_2 + q_2 = Q_2 = -d(E - 1/2)\dot{q}_2 + pKq_1 + \gamma\dot{q}_1 \\ &E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \quad K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Осциллятор в свободном режиме ($d = p = \gamma = 0$) описывает эллиптическую траекторию в плоскости (q_1, q_2) с произвольными главными полуосями и с произвольным наклоном большой полуоси к оси абсцисс q_1. В отличие от одномерного осциллятора Ван-дер-Поля, в котором посредством специальной обратной связи поддерживается постоянной амплитуда колебаний, в двумерном случае (3.1) можно стабилизировать энергию колебаний (коэффициент обратной связи d), площадь эллипса (квадратура с коэффициентом обратной связи p), его наклон к оси абсцисс и его прецессию (коэффициент γ). Общее решение системы (3.1) при равных нулю правых частях определяет уравнение эллиптической траектории в параметрической форме:

$$q_1 = x_1 \cos t + x_3 \sin t, \quad q_2 = x_2 \cos t + x_4 \sin t \tag{3.2}$$

Скорость движения по этой траектории:

$$\dot{q}_1 = -x_1 \sin t + x_3 \cos t, \quad \dot{q}_2 = -x_2 \sin t + x_4 \cos t \tag{3.3}$$

Произвольные постоянные (x_1, x_2, x_3, x_4) в выражениях (3.2) и (3.3) в дальнейшем будут рассматриваться как медленно меняющиеся фазовые переменные, в том случае, когда правые части не равны нулю и малы в сравнении с восстанавливающей силой осциллятора. Два первых интеграла системы (3.1) в случае $Q = 0$ представляют собой энергию колебаний:

$$E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \dot{q}_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \tag{3.4}$$

и момент количества движения (кинетический момент):

$$K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3 \tag{3.5}$$

Площадь эллипса (квадратура):

$$\pi rk = \frac{1}{2}\oint (q_1 dq_2 - q_2 dq_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)dt = \pi K, \tag{3.6}$$

где r — большая полуось эллипса, а k — малая.

Используя формулы (3.2) и (3.3) в качестве замены переменных $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \to$ $\to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в уравнениях (3.1), получим, после осреднения по времени, уравнения в фазовых переменных

$$\dot{x} = -dSe_2 - pKe_3 - \gamma e_1, \tag{3.7}$$

где

$$S = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad K = x_1 x_4 - x_2 x_3 \tag{3.8}$$

4. Базис инфинитезимальных эволюций. В четырехмерном пространстве x многообразие $K = 0$ представляет собой трехмерный конус. Если $Q \neq 0$, то точка $x(t)$ в фазовом пространстве $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ движется. В конфигурационном пространстве $q = (q_1, q_2)$ этому соответствует эволюция начальной (невозмущенной) траектории, эллипса, или отрезка прямой. Будем отталкиваться от начальной траектории в виде отрезка прямой, поскольку в приложениях это чаще всего и требуется. Имеется четыре типа простейших эволюций:

а) прецессия формы — вращение отрезка прямой в плоскости $q = (q_1, q_2)$, когда существует такая вращающаяся система координат, в плоскости $q = (q_1, q_2)$, в которой этот отрезок неподвижен;

б) изменение амплитуды колебаний, когда меняется лишь длина отрезка;

в) изменение частоты колебаний $q(t)$ вдоль неподвижного отрезка;

г) наконец, разрушение формы, это такая эволюция, которая не сводится к первым трем. Всем этим типам эволюции прямолинейной формы колебаний в плоскости $q = (q_1, q_2)$, соответствуют определенные направления движения точки $x(t)$ в фазовом пространстве. Каждому из этих направлений соответствует один из четырех векторов, образующих базис инфинитезимальных эволюций, построенный в виде [1]

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} \\ e_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ e_3 &= \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\} \\ e_4 &= \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где e_1 — определяет прецессию прямолинейной формы, e_2 — вариацию амплитуды, e_3 — разрушение прямолинейной формы и e_4 — изменение частоты.

Вычислим матрицу скалярных произведений (матрица Грама):

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} (e_1 \cdot e_1) & \cdot\ \cdot & (e_1 \cdot e_4) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ (e_4 \cdot e_1) & \cdot\ \cdot & (e_4 \cdot e_4) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x^2 & 0 & 0 & -2K \\ 0 & x^2 & 2K & 0 \\ 0 & 2K & x^2 & 0 \\ -2K & 0 & 0 & x^2 \end{matrix} \right\| \tag{4.2}$$

5. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с эффективным управлением. В [1] система (3.7) изучалась в переменных (S, K) при $\gamma = 0$. Было показано, что устойчивость многообразия $S = 0$, $K = 0$ определяется отличным от нуля коэффициентом Ляпунова по переменной S, в то время как по квадратуре устойчивость имеет место с нулевым коэффициентом Ляпунова, т.е. определяется лишь нелинейными членами. Для повышения эффективности управления достаточно в (3.7) увеличить амплитуду обратной связи при малых x, для чего (3.7) следует изменить так

$$\dot{x} = -dSe_2 - p\frac{K}{E}e_3 = -dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3 \tag{5.1}$$

S, K — (3.8). Перейдем в уравнениях (5.1)—(3.8) от переменных x к переменным S, K. Имеем

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx}\dot{x} = x\left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right) \tag{5.2}$$

В силу (4.1) $x = e_2$, а в силу (4.2) $e_2 \cdot e_3 = 2K$, поэтому (5.2) переписывается в виде

$$\dot{S} = -dS(2S + 1) - 4p\frac{K^2}{(2S + 1)} \tag{5.3}$$

Аналогично

$$\dot{K} = \frac{dK}{dx}\dot{x} = e_3\left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right) = -2dSK - 2pK \tag{5.4}$$

Тем самым, система (5.1) в переменных S, K принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -dS(2S+1) - 4p\frac{K^2}{2S+1} \\ \dot{K} &= 2(-dKS - pK) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Система (5.5) содержит особую точку $S = K = 0$, характеризующую стационарный режим колебаний с постоянной энергией $x^2 = 1$ и с равной нулю квадратурой $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Линеаризация системы (5.5) в окрестности этой точки приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -dS, \\ \dot{K} &= -2pK \end{aligned} \tag{5.6}$$

Таким образом, рассмотренное управление приводит к линейным в окрестности стационарного режима уравнениям в вариациях с характеристическими числами $-d$ и $-2p$. Поставленная цель достигнута.

В системе (3.1) новое управление выглядит так

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= -d(E - 1/2)\dot{q}_1 - p\frac{K}{E}q_2 \\ \ddot{q}_2 + q_2 &= -d(E - 1/2)\dot{q}_2 + p\frac{K}{E}q_1 \\ E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), &\quad K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2 \end{aligned}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01633).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелин. динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
3. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
5. *Bryan G.H.* Diffusion with back reaction // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1891. V. 7. P. 246–248.
6. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: A new low-nose inertial rotation sensor // in: Proc. 16 Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems, November 16–18, Los Angeles, 1982. P. 432–433.
7. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1983. С. 17–24.
8. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
9. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 15–26.
10. *Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. № 5. 1995. С. 12–24.
11. *Журавлёв В.Ф.* Решение уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Доклады РАН. 2005. Т. 404. № 4. С. 491–495.
12. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л.А., 2017. 194 с.

On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol

V. F. Zhuravlev[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
[#] *e-mail: zhurav@ipmnet.ru*

The questions of Van der Pol oscillator oscillation control efficiency are considered. By control efficiency, we mean the choice of such laws for the formation of feedbacks that ensure the oscillator reaches the stationary mode as soon as possible. Two types of oscillators are studied: the classical one, with one degree of freedom, which performs rectilinear oscillations, and the two-dimensional, which performs plane oscillations [1]. The model of a two-dimensional Van der Pol oscillator is usually used to study the operation of a hemispherical resonator gyroscope.

Keywords: Van der Pol spatial oscillator, Lyapunov constant, limit cycle, hemispherical resonator gyroscope

REFERENCES

1. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol's controlled 2D oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222. DOI:10.20537/nd1602004
2. *Andronov A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. Princeton: Univ. Press, 1949. 358 p.
3. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods in Oscillation Theory. Moscow: Nauka, 1988. 328 p. (Russian)
4. *Korn G.A., Korn Th.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover: Civil and Mechanical Engineering, 2013, 1152 p.
5. *Bryan G.H.* Diffusion with back reaction // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1891, vol. 7, pp. 246–248.
6. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: A new low-nose inertial rotation sensor // in: Proc. 16 Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems, November 16–18, Los Angeles, 1982. P. 432–433.
7. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Dynamic effects in an elastic rotating ring // Mech. Solids, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 15–21.
8. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Wave Solid-State Gyroscopes. Moscow: Nauka, 1985. 126 p. (Russian)
9. *Zhuravlev V.Ph.* Theoretical foundations of wave solid gyroscope (WSG) // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 3, pp. 3–15.
10. *Zhuravlev V.Ph., Linch D.D.* Electric model of a hemispherical resonator gyro // Mech. Solids, 1995, vol. 30, no. 5, pp. 10–21.
11. *Zhuravlev V.Ph.* On the solution of equations of the linear oscillator with respect to the matrix of the inertial trihedron // Dokl. Phys., 2005, vol. 50, no. 10, pp. 519–523.
12. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph., Zhbanov Yu.K.* Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid Gyroscope). Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 158–174

УДК 531.36:62-50

О ЧАСТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЯХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ АСИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Л. Д. Акуленко[1], **А. Н. Сиротин**[2,*]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

[2] Московский авиационный институт (государственный технический университет), Москва, Россия

**e-mail: asirotin2@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
После доработки 16.01.2020 г.
Принята к публикации 06.03.2020 г.

Исследуется задача оптимального управления переориентации асимметричного твердого тела. В качестве критерия выбран интегрально-квадратичный функционал, согласованный с инерционной симметрией тела, который характеризует суммарные энергозатраты. Управлением считается главный момент приложенных внешних сил. Получено явное описание семейства экстремалей для произвольного асимметричного твердого тела. Идея построения таких экстремалей основана на исследовании пространственно-временных деформаций решений дифференциальных уравнений Эйлера свободного вращения твердого тела.

Ключевые слова: переориентация, оптимальное управление

DOI: 10.31857/S0032823520020101

1. Введение. Изучается задача оптимального управления угловым движением абсолютно жесткого твердого тела относительно центра масс. Основной целью управления считается изменения ориентации и вектора угловой скорости от начальных значений до требуемых терминальных за конечное время так, чтобы маневру соответствовали наименьшие энергозатраты.

Задачи оптимального управления угловым движением твердого тела относятся к классу нелинейных задач и поэтому полного описания всего множества экстремалей (траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям принципа максимума Понтрягина) в настоящее время нет. Сложность общей задачи существенным образом зависит от свойств симметрии, которыми обладает вращающееся тело и согласованности этой симметрии с функционалом, характеризующим энергозатраты. Полное описание решения задачи оптимального управления отсутствует даже в простейших случаях сферической и динамической симметрии вращающегося тела.

Задачи оптимального управления переориентации и вращения твердого тела часто встречаются при изучении и формировании угловых маневров космических аппаратов, космических телескопов и т.д. и представляют собой актуальную проблему. Современные результаты [1–7] сосредоточены на получения оптимальных управлений для заданных классов траекторий и специальных свойств симметрии твердого тела.

Для класса задач оптимального управления переориентации и вращения твердого тела предложен конструктивный способ [8–10] формирования семейств аналитических экстремалей. Идея этого способа состоит в построении экстремалей на основе использования решений дифференциальных уравнений Эйлера. Точнее, угловую скорость экстремального управляемого вращения предлагается искать в виде пространственно-временной деформации решений уравнений свободного вращения твердого тела. Цель работы — применение данного подхода к построению частного семейства экстремалей для общей задачи оптимального управления переориентацией и вращением асимметричного твердого тела.

Статья состоит из пяти разделов и заключения. В Разделе 1 формулируется основная цель исследований. В Разделе 2 описаны формулировка задачи оптимального управления и формализм принципа максимума. Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы указать некоторое семейство решений прямой и сопряженной системы. В Разделе 3 представлено частное решение системы дифференциальных уравнений меньшей размерности. Одно из этих решений удается установить, и оно основано на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. В Разделе 4 показано, что для частного решения системы принципа максимума меньшей размерности восстановление экстремальной траектории принципиально возможно. В Разделе 5 построены примеры экстремальных траекторий, зависящих от инерционных характеристик твердого тела.

2. Формулировка задачи и формализм принципа максимума. В статье рассматриваются нормальные экстремальные траектории и управления углового движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс. Главный момент внешних сил, приложенных к телу, является управлением. Все используемые векторы определяются своими декартовыми прямоугольными координатами в связанной системе отсчета, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Предполагается, что в инерциальном пространстве выбрано m осей чувствительности $(m \geq 1)$, определяющими векторами $\mathbf{r}^i(t) \in S^2$, $i = 1,\ldots,m$ единичной длины, где $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 1\}$. Дифференциальные уравнения углового движения (соответственно кинематические для m ортов и динамические уравнения Эйлера для вектора угловой скорости), записанные для кинетического момента, принимаются в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad i = 1,\ldots,m \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}, \quad t \in (0,T), \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}^i : \mathbb{R} \to S^2$; $\boldsymbol{\mu} = \Lambda\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — вектор-функция кинетического момента; $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ — тензор инерции тела; $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — вектор-функция угловой скорости; $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — вектор-функция управления. Считается, что заданы краевые условия

$$\begin{gathered}\mathbf{r}^i(0) = \mathbf{p}^i, \quad \mathbf{r}^i(T) = \mathbf{q}^i, \quad i = 1,\ldots,m \\ \boldsymbol{\mu}(0) = \Lambda\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\mu}(T) = \Lambda\mathbf{w}\end{gathered} \tag{2.2}$$

определяющие требуемый маневр.

В общем случае предполагается, что твердое тело не обладает специальной симметрией и поэтому

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$$

Длительность управляемого процесса фиксирована. В качестве критерия эффективности маневра выбран интегрально-квадратичный функционал, который характеризует суммарные энергозатраты. Таким образом, изучается задача оптимального управления

$$\min \frac{1}{2} \int\limits_{[0,T]} \mathbf{u}(t) \cdot K\mathbf{u}(t)\, dt \tag{2.3}$$

где $K = K^T \geqslant 0$ и минимум ищется к траекториям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям (2.1) и краевым условиям (2.2). Предполагается, что в задаче (2.3) точная нижняя грань достигается и решение (управление) сформулированной задачи существует в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Для рассматриваемой задачи оптимального управления вводится прямая и сопряженная системы дифференциальных уравнений принципа максимума [11, 12]

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^i = \boldsymbol{\psi}_i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad i = 1,\dots,m \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + u, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma})\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\psi}^i, \boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – абсолютно-непрерывные вектор-функции. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\psi_0 \mathbf{u} \cdot K\mathbf{u}, \quad \psi_0 = \text{const} \leq 0$$

По построению получаем соответствующую каноническую гамильтонову систему

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}^i}, \quad \dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}^i}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\mu}}$$

В статье рассматриваются нормальные экстремальные траектории и управления, для которых $\psi_0 \neq 0$. Так как экстремаль можно умножить на любое положительное число, то для нормального случая верно $\psi_0 = -1$. Для нормальной экстремали и экстремальной траектории получаем условия максимума по управлению

$$\max_{\mathbf{u}}\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot K\mathbf{u}\right)$$

и, следовательно, экстремальное управление есть

$$\mathbf{u} = K^{-1}\boldsymbol{\gamma} \tag{2.5}$$

В силу управлений (2.4) и (2.5) из предположения о существовании решения в классе кусочно-непрерывных функций времени по принципу математической индукции следует вывод о том, что решения системы (2.4), (2.5) можно выбирать из класса бесконечно дифференцируемых функций времени.

Для изучения структуры дифференциальных уравнений (2.4), (2.5) будет удобно ввести вектор-функцию $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ следующего вида

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i \tag{2.6}$$

Используя тождество Якоби для векторного произведения, получаем дифференциальное векторное уравнение

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

с первым интегралом

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = h_1 = \text{const} \geq 0$$

Структура дифференциальных уравнений (2.4), (2.5) такова, что можно перейти к исследованию системы дифференциальных уравнений меньшей размерности

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + K^{-1}\boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma}) - \Lambda^{-1}\mathbf{s} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Каждое решение системы (2.4), (2.5) по построению удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.7). Обратное не очевидно, однако по решениям (2.7) можно восстановить требуемую экстремальную траекторию для (2.4), (2.5), если использовать соотношение (2.6).

Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы указать определенное семейство решений системы (2.7) и построить соответствующие решения первоначальной системы (2.4), (2.5).

3. Частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7). Общее решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.7) в данный момент неизвестно (авторам). Тем не менее, одно из этих решений удается установить, и оно основано на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. Класс решений не связан с ограничениями для симметрий тензора инерции и поэтому удается построить решения для произвольного асимметричного твердого тела.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – решение дифференциального уравнения Эйлера, соответствующее свободному вращению твердого тела

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.1}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ – вектор-функция кинетического момента. В более подробной записи для каждого вещественного t имеем

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.2}$$

Теорема. Пусть

$$K = \Lambda^{-1}, \quad h_1 > 0$$

т.е. $|\mathbf{s}| > 0$. Тогда справедливы эквивалентные утверждения для каждого момента времени $t \in [0, T]$:

(i) имеется решение $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ системы (2.7), удовлетворяющее условию

$$\operatorname{rank}(\mathbf{s}(t) | \boldsymbol{\mu}(t) | \Lambda\boldsymbol{\gamma}(t)) = 1 \tag{3.3}$$

(ii) имеется решение $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ системы (2.7) такое, что справедливы равенства

$$\mathbf{s} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z), \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{dz}{dt}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z), \quad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = \frac{d^2z}{dt^2}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \tag{3.4}$$

где $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – скалярная функция с условием

$$\frac{d^3z}{dt^3} = -1 \tag{3.5}$$

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Допустим, $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ – решение системы (2.7) с условием (3.3). Тогда имеются скалярные функции $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соответствующей гладкости, для которых справедливы равенства

$$\boldsymbol{\mu} = x\mathbf{s}, \quad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = y\mathbf{s} \tag{3.6}$$

При этом, по предположению $h_1 = |\mathbf{s}|^2 > 0$, вектор-функция $\mathbf{s}$ в нуль не обращается для каждого t и поэтому разложение корректно. Покажем, что функции x, y можно подобрать так, чтобы вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ с условием (3.6) удовлетворяли дифференциальным уравнениям (2.7).

Из первого уравнения (2.7) и разложения (3.6) получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{s}} = x\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{3.7}$$

Аналогично, используя второе уравнение (2.7) и соотношения (3.6), имеем

$$\dot{x}\mathbf{s} + x\dot{\mathbf{s}} = x^2\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + y\mathbf{s}$$

и, следовательно, в силу $h_1 > 0$ и равенства (3.7) имеем

$$\dot{x} = y \tag{3.8}$$

Наконец, используя разложение (3.6) в третьем уравнении (2.7), получаем

$$\dot{y}\Lambda^{-1}\mathbf{s} + xy\Lambda^{-1}\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = xy\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + xy\Lambda^{-1}\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) - \Lambda^{-1}\mathbf{s}$$

и поэтому

$$\dot{y} = -1$$

т.к. $h_1 > 0$.

Положим

$$\dot{z} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1 \tag{3.9}$$

и тогда

$$\dddot{z} = -1 \tag{3.10}$$

Таким образом, если s – решение дифференциального уравнения (3.7), тогда тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ с условием (3.6) и (3.10) есть некоторое решение уравнения (2.7).

Введем сложную функцию как композицию функций $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и z, т.е. рассмотрим функцию $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t))$, определенную для каждого $t \in [0, T]$. По правилу дифференцирования сложной функции [13], воспользовавшись уравнениями Эйлера (3.2) получаем

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z)}{dt} = \frac{dz}{dt}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \tag{3.11}$$

Сравнивая уравнения (3.7) с (3.11), приходим к выводу, что

$$\mathbf{s}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t)) \tag{3.12}$$

Теперь из представлений (3.6), (3.12) и (3.9) получаем требуемый результат: тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из (3.4) действительно есть некоторое решение системы (2.7).

$(ii) \Rightarrow (i)$. По построению функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из (3.4) есть сложные функции, порожденные решением $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ уравнений Эйлера (3.2) и функцией (3.5). Используем правило дифференцирования сложных функций, тогда получаем из (3.4)

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}{dt} = \frac{dz}{dt}\left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \frac{dz}{dt}\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{3.13}$$

где использовалось уравнение (3.2), или

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

Далее из (3.4) и (3.2) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda\boldsymbol{\gamma} \tag{3.14}$$

Поскольку справедливо равенство

$$\boldsymbol{\gamma}(t) \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}(t) = 0$$

из равенств (3.4) и уравнения (3.2) получаем

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma}) - \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{3.15}$$

Дифференциальные уравнения (3.13)–(3.15) совпадают с системой уравнений (2.7) и, следовательно, вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из равенства (3.4) – решения уравнения (2.7).

Выберем теперь вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ так, чтобы $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(0) \neq 0$. Из уравнения (3.1) тогда следует, что $|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(t)| > 0$ для всех вещественных t. Поэтому вектор-функция $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t))$ для всех t ненулевая, функция z не нулевая и тогда из (3.4) получаем, что векторы $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\Lambda\boldsymbol{\gamma}(t)$ коллинеарны вектору $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t)) = \mathbf{s}(t)$, что совпадает с условием (3.3).

Теорема доказана.

Формулы (3.4) в действительности определяют некоторое решение системы дифференциальных уравнений (2.7) как функции времени не явно, а посредством функций $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и z. Для построения явных представлений требуется выписать соответствующие решения уравнений Эйлера (3.1). Если твердое тело имеет ось симметрии, тогда решения уравнений свободного вращения описываются посредством тригонометрических функций времени, что приводит к появлению экстремалей [10]. В общем случае решения уравнений Эйлера (3.1) для асимметричного твердого тела определяются через эллиптические функции Якоби и гиперболические функции времени в зависимости от численных значений параметров [14–16].

Из равенств (3.4), в частности, следуют формулы

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\mathbf{s}, \qquad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = \ddot{z}\mathbf{s} \tag{3.16}$$

Решение линейного дифференциального уравнения (3.5) известно и определяется многочленом третьего порядка

$$z = -\frac{1}{6}t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \tag{3.17}$$

где a_i – постоянные.

Таким образом, описано явное частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7), которое представляет собой редукцию прямой и сопряженной системы принципа максимума решаемой задачи оптимального управления. Показано, что тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из частного решения утверждения теоремы возникает только в том случае, когда эти вектор-функции коллинеарны в каждый момент времени. Тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ порождается соответствующим решением уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела.

4. Восстановление экстремальной траектории. Формулы (3.4), согласно теореме, являются некоторым решением системы уравнения (2.7). Однако эта тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ недостаточна для восстановления соответствующей экстремальной траектории. Действительно, вектор-функции $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{u} = \Lambda\boldsymbol{\gamma}$ – это часть требуемой траектории, поэтому нужны кинематические вектор-функции $\mathbf{r}^i$. Покажем, что для частного решения системы (2.7) из теоремы восстановление экстремальной траектории принципиально возможно.

Согласно уравнениям Эйлера (3.1) функции (3.4) имеют производные любого порядка. Поэтому по функциям $\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}$ времени можно восстановить производные $\dot{\mathbf{s}}, \dot{\boldsymbol{\mu}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ явным образом путем непосредственного дифференцирования, либо использовать соотношения (3.4) в правых частях уравнений (2.7).

Выберем произвольное решение $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ уравнения Эйлера (3.1). Поскольку верно

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{const}$$

тогда, если $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(\tau) \neq 0$ для какого-либо τ, тогда $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(t) \neq 0$ и для всех вещественных t.

Пусть $m = 1$. Для удобства положим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^1 \tag{4.1}$$

Поскольку используются формулы из равенств (3.4), то вектор-функция s в нуль никогда не обращается. Пусть

$$\mathscr{A} = \{t \in \mathbb{R} : \dot{z}(t) = 0\}$$

В силу (3.9), (3.10) функция $\dot{z}$ есть многочлен второго порядка от t и поэтому множество $\mathscr{A}$ не более чем двухточечное. Таким образом, классическая мера Лебега множества $\mathscr{A}$ нулевая. Будем считать, что тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ не порождает вращения твердого тела относительно неподвижной оси в инерциальном пространстве. В противном случае восстановление экстремальной траектории тривиально. Тогда вектор $\mathbf{s}(t)$ не является собственным вектором матрицы Λ, и по этой причине векторы $\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)$ линейно независимы при $t \notin \mathscr{A}$. Далее будем считать, что все последующие рассуждения справедливы для всех $t \in [0, T] \backslash \mathscr{A}$.

По построению

$$\mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

и тогда

$$\mathbf{r} \in \mathrm{Lin}\left\{\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)\right\} = \mathrm{Lin}\left\{\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}, \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right\}$$

Предположим, что имеются скалярные функции соответствующей гладкости v, w такие, что

$$\mathbf{r} = v\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = v\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} - w(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{4.2}$$

В результате непосредственного дифференцирования получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + \dot{w}\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + v\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} + w\left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} \tag{4.3}$$

С другой стороны, из уравнения (2.1) и обозначения (4.1) имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = v\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{4.4}$$

Приравнивая правые части уравнений (4.3) и (4.4), после преобразований получаем

$$\begin{gathered}\dot{v}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + \dot{w}\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + v\left[\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} - \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right] + \\ + w\left[\left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} - \left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right] = 0\end{gathered} \tag{4.5}$$

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
f_0 = \left|\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right|^2 \\
f_1 = \left[\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet}\right] \cdot \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = \frac{1}{2}\dot{f}_0 \\
f_2 = \left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} \cdot \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) - \left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\left|\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right|^2 \\
g_0 = \left|\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right|^2 = f_0 \left|\mathbf{s}\right|^2 \\
g_1 = \left[\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} - \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right] \cdot \left[\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right] \\
g_2 = \left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} \cdot \left[\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right] = \frac{1}{2}\dot{g}_0
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

В этом случае из векторного уравнения (4.5), используя соответствующие скалярные произведения, получаем систему скалярных линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
f_0\dot{v} + f_1 v + f_2 w = 0 \\
g_0\dot{w} + g_1 v + g_2 w = 0
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

относительно переменных v, w.

Для системы (4.7) имеется первый интеграл, соответствующий требованию $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T \in S^2$. Поэтому из равенства

$$
\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \tag{4.8}
$$

следует разложение (4.2) и далее

$$
v^2 f_0 + w^2 g_0 = 1 \quad \text{или} \quad v^2 + \left|\mathbf{s}\right|^2 w^2 = f_0^{-1} \tag{4.9}
$$

Следовательно, система двух дифференциальных уравнений (4.7) может быть записана в виде одного уравнения

$$
\left(f_0\dot{v} + f_1 v\right)^2 g_0 = \left(1 - f_0 v^2\right) f_2^2 \tag{4.10}
$$

Таким образом, при $m = 1$ экстремальная траектория, соответствующая кинематическим параметрам, может быть принципиально восстановлена. Действительно, выбираем решение $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ уравнений Эйлера и соответствующую функцию z времени из (3.5). Тогда по формулам строится вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и соответствующие производные. Поскольку известны функции (4.6), из системы линейных дифференциальных уравнений (4.7), можно определить решения v, w. Теперь искомая экстремальная траектория определяется из соотношения (4.2).

Если твердое тело сферически симметричное, т.е. $\Lambda = \alpha I$, где I – единичная матрица и α – вещественное число, тогда, как следует из равенств (3.4), векторы $\mathbf{s}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\Lambda\boldsymbol{\gamma}(t) = \alpha\boldsymbol{\gamma}(t)$ коллинеарны, а экстремальная траектория соответствует вращению относительно неподвижной оси, т.е. возникает плоский поворот.

Рассмотрим теперь построение экстремальной траектории для решения кинематических уравнений (2.1) при $m = 3$. К данному моменту вектор-функция времени $\boldsymbol{\mu}$ известна и определена по формулам (3.4), если определены функции $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ и z. Следовательно, система уравнений (2.1) является системой обыкновенных линейных неавтономных дифференциальных векторных уравнений. Решение уравнений (2.1) можно записать с помощью фундаментальной матрицы $F(t) \in \mathrm{SO}(3)$

$$
\mathbf{r}^i(t) = F(t)\mathbf{r}^i(0), \quad i = 1, 2, 3
$$

где

$$\dot{F} = -S\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)F, \quad F(0) = I$$

$$S\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3^{-1}\mu_3 & \lambda_2^{-1}\mu_2 \\ \lambda_3^{-1}\mu_3 & 0 & -\lambda_1^{-1}\mu_1 \\ -\lambda_2^{-1}\mu_2 & \lambda_1^{-1}\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$. Для матричной функции F введем обозначения

$$F = \left(F^1 \middle| F^2 \middle| F^3\right)$$

где $F^i : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^2$. При этом

$$F^i \cdot F^j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Введем вектор-функции по правилам

$$\tilde{F}_1 = \mathbf{r}, \quad \tilde{F}_2 = |\mathbf{s}|^{-1}\,\mathbf{s}, \quad \tilde{F}_3 = |\mathbf{r}\times\mathbf{s}|^{-1}\,\mathbf{r}\times\mathbf{s}$$

и матричную функцию

$$\tilde{F} = \left(\tilde{F}_1 \middle| \tilde{F}_2 \middle| \tilde{F}_3\right)$$

По построению $\tilde{F}(t) \in \mathrm{SO}(3)$. В этом случае фундаментальная матрица $F(t)$ может быть описана в виде

$$F = \tilde{F}^{-1}(0)\,\tilde{F}$$

Таким образом, установлено, что тройки функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из уравнений (2.7) достаточно для исследования прямой и сопряженной систем принципа максимума из заданной задачи оптимального управления. Вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ позволяют не единственным образом восстановить экстремальную траекторию.

5. Примеры и комментарии. Частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7) согласно утверждению теоремы есть тройка функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и представляет собой часть экстремальной траектории $\left(\mathbf{r}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}\right)$, которая далее может быть восстановлена до всей траектории. Соответствующие экстремальные траектории из утверждения теоремы определяются не для всех произвольных краевых условий и даже не для всех возможных начальных условий. Класс допустимых краевых условий может быть описан следующим образом: сначала выбираются начальные условия тройки функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, а затем доопределяются возможные начальные условия кинематической части экстремальной траектории. Построенные таким образом примеры траекторий зависят от инерционных характеристик твердого тела и не всегда могут быть описаны посредством известных аналитических функций времени.

Применим уравнения Эйлера в эквивалентной координатной форме

$$\dot{\Omega}_1 = h_1\Omega_2\Omega_3, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 = h_2\Omega_1\Omega_3, \quad \dot{\Omega}_3 = h_3\Omega_1\Omega_2, \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ – вектор-функция угловой скорости свободно вращающегося тела. Поэтому верно соотношение

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \Lambda\boldsymbol{\Omega}$$

Для удобства будет рассматриваться задача оптимальной переориентации с одновременным вращением для одной оси чувствительности, т.е. положим

$$m = 1$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}^1(t) = \mathbf{r}(t)$$

Для последующих примеров функцию времени z из уравнения (3.5) теоремы выберем и зафиксируем в виде

$$z(t) = -\frac{1}{6}t^3 \tag{5.2}$$

Далее будут построены примеры экстремальных траекторий для сферически симметричного, динамически симметричного и асимметричного твердого тела соответственно.

Пусть имеется сферически симметричное тело

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad m = 1, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 0$$

Соответствующие дифференциальные уравнения (5.1) приводятся к виду

$$\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$$

и поэтому

$$\Omega_i(t) = \mathrm{const}_i = \Omega_i(0), \quad i = 1, 2, 3$$

Согласно уравнению (3.4) получаем требуемые вектор-функции

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \Lambda\mathbf{\Omega}(z) = \mathbf{\Omega}(0) \\ \boldsymbol{\mu} &= \dot{z}\tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \dot{z}\mathbf{\Omega}(0) \\ \boldsymbol{\gamma} &= \ddot{z}\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \ddot{z}\mathbf{\Omega}(0) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ таким образом соответствует вращению твердого тела относительно неподвижной оси, отвечающей вектору $\mathbf{\Omega}(0)$.

Выберем начальное условие для вектора угловой скорости свободно вращающегося сферически симметричного тела следующим образом

$$\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{e}^3 = (0, 0, 1)^T$$

В силу (5.3) получаем формулы, соответствующие экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}(0) = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{s}(t) = \mathbf{e}^3 \\ &\boldsymbol{\mu}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\mu}(t) = -\frac{1}{3}t^2\mathbf{e}^3 \\ &\boldsymbol{\gamma}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = -t\mathbf{e}^3 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Поскольку по построению (5.2) имеем

$$z(0) = \dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0$$

Восстановим допустимую экстремальную кинематическую часть траектории, т.е. в данном случае требуется построить вектор-функцию $\mathbf{r}$, соответствующую соотношениям (5.4).

Дифференциальные кинематические уравнения (2.1) для экстремальной траектории (5.4) в координатной форме принимают вид

$$\begin{pmatrix} \dot r_1 \\ \dot r_2 \\ \dot r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\dot r_1 = -\frac{1}{2}t^2 r_2, \quad \dot r_2 = \frac{1}{2}t^2 r_1, \quad \dot r_3 = 0 \tag{5.5}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (5.5) имеет вид

$$\begin{gathered} r_1(0) = \sin\varphi, \quad r_1 = \sin\left(-\frac{1}{6}t^3 + \varphi\right) \\ r_2(0) = \cos\varphi, \quad r_2 = \cos\left(-\frac{1}{6}t^3 + \varphi\right) \\ r_3(0) = 0, \quad r_3 = 0 \end{gathered} \tag{5.6}$$

где φ – соответствующая постоянная. В частном случае получим

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}^2 = (0,1,0)^T$$

при $\varphi = 0$. Таким образом, формулы (5.4), (5.6) полностью определяют частную экстремальную траекторию в рассматриваемой задаче оптимальной переориентации для сферически симметричного твердого тела.

Рассмотрим далее частные экстремали для динамически симметричного твердого тела. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1; \quad h_1 = -h_2 = \frac{1}{2}, \quad h_3 = 0$$

Соответствующие дифференциальные уравнения Эйлера (5.1) сводятся к виду

$$\dot\Omega_1 = h_1\Omega_2\Omega_3, \quad \dot\Omega_2 = -h_1\Omega_1\Omega_3, \quad \dot\Omega_3 = 0 \tag{5.7}$$

Общее решение есть

$$\Omega_1 = a\cos(bt + \varphi), \quad \Omega_2 = a\sin(bt + \varphi), \quad \Omega_3 = \text{const} \tag{5.8}$$

где a, b, φ – постоянные, не являющиеся произвольными. Подстановка решения (5.8) в систему (5.7) дает

$$\begin{gathered} -ab\sin(bt + \varphi) = h_1\Omega_3 a\sin(bt + \varphi) \\ ab\cos(bt + \varphi) = -h_1\Omega_3 a\cos(bt + \varphi) \end{gathered}$$

откуда получаем равенство

$$b = -h_1\Omega_3, \quad \Omega_3 = -bh_1^{-1}$$

т.е. свободными параметрами являются только a, b, φ.

Пусть

$$b = 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 0$$

Тогда в силу (5.8) координаты вектора угловой скорости свободно вращающегося тела имеют вид

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{2}\cos t, \quad \Omega_2(t) = \frac{1}{2}\sin t, \quad \Omega_3(t) = -2$$

Согласно уравнениям (3.4) получаем требуемые вектор-функции

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \left(\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T \\ \boldsymbol{\mu} &= -\frac{1}{2}t^2\left(\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T \\ \boldsymbol{\gamma} &= -t\left(\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T \end{aligned} \tag{5.9}$$

Начальные условия, таким образом, соответствуют допустимой экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и вектору угловой скорости свободно вращающегося тела

$$\boldsymbol{\Omega}(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)^T, \quad \mathbf{s}(0) = (1, 0, -2)^T, \quad \boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0$$

Восстановим соответствующую экстремальную кинематическую часть траектории в виде вектор-функции r, отвечающей функциям (5.9). Запишем требуемые дифференциальные уравнения (2.1) в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2\omega_3 - r_2\omega_2 \\ r_3\omega_1 - r_1\omega_3 \\ r_1\omega_2 - r_2\omega_1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\left(\frac{1}{2}\cos z, \frac{1}{2}\sin z, -2\right)^T$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (5.10) для тройки $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы для динамически симметричного тела построено в [10]. Поэтому, основываясь на этом результате, будем считать, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} r_1 &= a_{11}\cos(\theta z)\sin z + a_{12}\sin(\theta z)\cos z \\ r_2 &= a_{21}\cos(\theta z)\cos z + a_{22}\sin(\theta z)\sin z \\ r_3 &= a_{31}\sin(\theta z) \end{aligned} \tag{5.11}$$

где a_{ij}, θ — постоянные, которые требуется доопределить так, чтобы выполнялись уравнения (5.10).

Подстановка соотношений (5.11) в уравнения (5.10) после преобразований

$$\begin{aligned} &\left[-a_{11}\theta - a_{12} + 2a_{22} + \frac{1}{2}a_{31}\right]\sin(\theta z)\sin z + [a_{11} + a_{12}\theta + 2a_{21}]\cos(\theta z)\cos z = 0 \\ &\left[-a_{21}\theta + a_{22} - \frac{1}{2}a_{31} - 2a_{12}\right]\sin(\theta z)\cos z + [-a_{21} + a_{22}\theta - 2a_{11}]\cos(\theta z)\sin z = 0 \\ &\left[a_{31}\theta - \frac{1}{2}a_{11}\sin^2\theta + \frac{1}{2}a_{21}\cos^2\theta\right]\cos(\theta z) + \left[\frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{2}a_{22}\right]\sin(\theta z)\cos z\sin z = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Поскольку функция z может быть выбрана произвольно из условий (3.5), то равенства (5.12) должны быть справедливы только для соответствующих постоянных a_{ij} и θ. Таким образом, из соотношений (5.12) следует система алгебраических уравнений

$$-a_{11}\theta_1 - a_{12} + 2a_{22} + \frac{1}{2}a_{31} = 0 \tag{5.13}$$

$$a_{11} + a_{12}\theta + 2a_{21} = 0 \tag{5.14}$$

$$-a_{21}\theta + a_{22} - \frac{1}{2}a_{31} - 2a_{12} = 0 \tag{5.15}$$

$$-a_{21} + a_{22}\theta - 2a_{11} = 0 \tag{5.16}$$

$$a_{31}\theta - \frac{1}{2}a_{11}\sin^2\theta + \frac{1}{2}a_{21}\cos^2\theta = 0 \tag{5.17}$$

$$a_{12} - a_{22} = 0 \tag{5.18}$$

Вычитая (5.14) из (5.16) с учетом (5.18) получаем равенство

$$a_{11} + a_{21} = 0 \tag{5.19}$$

Подстановка (5.19) в (5.17) дает

$$2a_{31}\theta - a_{11} = 0 \tag{5.20}$$

Используя равенства (5.18) и (5.19), приходим к выводу, что равенства (5.14) и (5.16) сводятся к одному уравнению

$$a_{12}\theta - a_{11} = 0 \tag{5.21}$$

Поэтому далее из (5.20) и (5.21) получаем

$$a_{12} = 2a_{31} \tag{5.22}$$

если $\theta \neq 0$. Таким образом, из (5.18)–(5.22) получаем совокупность равенств

$$a_{11} = -a_{21} = 2a_{31}\theta \tag{5.23}$$

$$a_{12} = a_{22} = 2a_{31} \tag{5.24}$$

Из полученных соотношений выводим, что уравнения (5.13) и (5.15) эквивалентны и сводятся к решению

$$\theta^2 = \frac{5}{4} \tag{5.25}$$

Подставляя равенства (5.23)–(5.25) в уравнения (5.11), записываем

$$r_1 = 2a_{31}\theta\cos(\theta z)\sin z + 2a_{31}\sin(\theta z)\cos z = 2a_{31}(\theta\cos(\theta z)\sin z + \sin(\theta z)\cos z)$$
$$r_2 = -2a_{31}\theta\cos(\theta z)\cos z + 2a_{31}\sin(\theta z)\sin z = 2a_{31}(-\theta\cos(\theta z)\cos z + \sin(\theta z)\sin z)$$
$$r_3 = a_{31}\sin(\theta z)$$

Окончательно, используя условие нормировки (4.8) получаем выражение оставшегося параметра a_{31}

$$a_{31}^2 = \frac{1}{5}$$

Таким образом, вектор-функция орта $\mathbf{r}$ экстремальной траектории, соответствующей тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, может быть описана в виде

$$\begin{gathered}
r_1(t) = i_1\frac{2}{\sqrt{5}}\left(i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{6}t^3\right)\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right) + \sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{6}t^3\right)\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)\\
r_2(t) = i_1\frac{2^2}{\sqrt{5}}\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right) + \sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)\\
r_3(t) = i_1\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)
\end{gathered} \tag{5.26}$$

где i_1, i_2 — произвольные постоянные с условием

$$i_1, i_2 \in \{-1, 1\}$$

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{r}(0) = (0, -i_1 i_2, 0)^T = -i_1 i_2\mathbf{e}^2$$

Таким образом, формулы (5.9) и (5.26) полностью характеризуют частную экстремальную траекторию $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ в рассматриваемой задаче оптимальной переориентации для динамически симметричного твердого тела.

Наконец, рассмотрим пример частной экстремали для асимметричного твердого тела. Сначала потребуются некоторые преобразования для решений свободного вращения в форме уравнений Эйлера. Для определенности будем считать, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3; \quad h_1 > 0, \quad h_2 < 0, \quad h_3 > 0$$

Если это не так, то для твердого симметричного $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3)$ тела имеется возможность перенумеровать переменные соответствующим образом.

Для дифференциальных уравнений (5.1) введем новые переменные

$$\Omega_i = a_i \xi_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.27}$$

где a_i – постоянные, которые будут определены далее. Подстановка (5.27) в (5.1) дает

$$a_1 \dot{\xi}_1 = h_1 a_2 a_3 \xi_2 \xi_3 \tag{5.28}$$

$$a_2 \dot{\xi}_2 = h_2 a_1 a_3 \xi_1 \xi_3 \tag{5.29}$$

$$a_3 \dot{\xi}_3 = h_3 a_1 a_2 \xi_1 \xi_2 \tag{5.30}$$

Постоянные a_i выберем в уравнениях (5.28), (5.29) таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$a_1 = -h_1 a_2 a_3, \quad a_2 = h_2 a_1 a_3$$

Несложное преобразование приведет к следующему результату

$$a_2 = -i_0 |h_1|^{-1/2} |h_2|^{1/2} a_1, \quad a_3 = i_0 |h_1 h_2|^{-1/2} \tag{5.31}$$

где $i_0 \in \{-1, 1\}$. Пусть

$$k^2 = |h_2 h_3| a_1^2 = -\frac{h_3 a_1 a_2}{a_3} \tag{5.32}$$

Постоянная a_1 выбирается так, чтобы $k \in (0, 1)$.

Соотношения (5.28)–(5.32) приводят к появлению системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_2 \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 \xi_2, \quad \dot{\xi}_3 = -k^2 \xi_1 \xi_2 \tag{5.33}$$

Уравнения Эйлера (5.1), сводящиеся к уравнениям (5.33), могут быть получены не только с помощью линейных преобразований (5.27), но также с помощью других соотношений [16]. Решения системы дифференциальных уравнений (5.33) несложно теперь выразить через эллиптические функции Якоби.

Действительно, как известно ([17], §§ 22.11, 22.12), функции $\operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t, \operatorname{dn} t$ могут быть определены как решение следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} 0 = 1, &\quad (\operatorname{cn} t)^\bullet = -\operatorname{sn} t \operatorname{dn} t \\ \operatorname{sn} 0 = 0, &\quad (\operatorname{sn} t)^\bullet = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t \\ \operatorname{dn} 0 = 1, &\quad (\operatorname{dn} t)^\bullet = -k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \end{aligned} \tag{5.34}$$

с первыми интегралами

$$\operatorname{sn}^2 t + \operatorname{cn}^2 t = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 t + \operatorname{dn}^2 t = 1$$

Положим

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1; \quad h_1 = \frac{1}{3}, \quad h_2 = -1, \quad h_3 = 1$$
$$k = a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = \sqrt{3} \tag{5.35}$$
$$\xi_1(0) = 1, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \xi_3(0) = 1$$

Таким образом, решение задачи Коши (5.33), (5.35) есть

$$\xi_1(t) = \operatorname{cn} t, \quad \xi_2(t) = \operatorname{sn} t, \quad \xi_3(t) = \operatorname{dn} t$$

и, следовательно, решение уравнения Эйлера свободного вращения имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn} t, -\operatorname{sn} t, \sqrt{3}\operatorname{dn} t\right)^T \tag{5.36}$$

Теперь, согласно уравнениям (3.4), получаем требуемую тройку вектор-функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\mathbf{s} = \Lambda\boldsymbol{\Omega}(z) = \left(\sqrt{3}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T$$
$$\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\Lambda\boldsymbol{\Omega}(z) = -\frac{1}{2}t^2\left(\sqrt{3}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T \tag{5.37}$$
$$\boldsymbol{\gamma} = \ddot{z}\boldsymbol{\Omega}(z) = -t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T$$

Начальные условия соответствуют допустимой экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$, построенной по вектор-функции $\boldsymbol{\Omega}$ есть

$$\boldsymbol{\Omega}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{3}\right)^T, \quad \mathbf{s}(0) = \left(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right)^T, \quad \boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0 \tag{5.38}$$

Здесь равенство $\boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0$ возникает в силу выбранной функции z.

Восстановить соответствующую экстремальную кинематическую часть траектории r, отвечающей функциям (5.37), в явном виде не удается. Тем не менее, можно построить требуемые дифференциальные уравнения (2.1)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

Таким образом, данная система в координатной форме имеет вид

$$\dot{r}_1 = -\frac{1}{3}t^2\left(\sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_2 + \operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_3\right)$$
$$\dot{r}_2 = -\frac{1}{3}t^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_3 - \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_1\right) \tag{5.39}$$
$$\dot{r}_3 = -\frac{1}{3}t^2\left(-\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_2\right)$$

Получаемая система представляет собой систему линейных неавтономных дифференциальных уравнений с тривиальным первым интегралом (4.8). Начальные условия $r(0)$ не могут быть произвольными, но имеется ограничение

$$\mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{r}(0) = 0$$

в силу чего вектор $\mathbf{r}(0)$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{r}(0) \cdot \left(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3\right) = 0 \tag{5.40}$$

В частности, можно выбрать $\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}^2$.

Таким образом, частная экстремальная траектория $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ в задаче оптимальной переориентации для асимметричного твердого тела описывается формулами (5.37)–(5.39).

Частная экстремальная траектория, порожденная тройкой $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, обладает специфическими свойствами. В частности, из дифференциального уравнения (3.5) и соответствующего решения (3.17) можно сделать вывод, что z – многочлен третьего порядка относительно переменной t. Тогда множество $\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{R} : \dot{z}(t) = 0\}$ может быть не более чем двухточечным. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\boldsymbol{\Omega}(z) = 0, \quad t \in \mathcal{A}$$

и, следовательно, у частной экстремали может быть не более двух остановок (положений покоя).

Восстановление кинематической экстремальной траектории по тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ можно осуществить, по крайней мере, двумя способами: либо использовать результаты разд. 4, либо попытаться решить систему дифференциальных линейных неавтономных уравнений (2.1) поскольку функция времени $\boldsymbol{\mu}$ известна из (3.4).

6. Заключение. В статье рассмотрены нормальные экстремальные траектории и управления углового движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс. Установлено, что частные экстремали основаны на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. Класс решений не связан с ограничениями для симметрий тензора инерции и удается построить решения для произвольного асимметричного твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Warier R.R., Sinha A., Sukumar S.* Line-of-sight based spacecraft attitude and position tracking control // Eur. J. Control. 2016. V. 32. P. 43–53.
2. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque // Nonlin. Dyn. Syst. Theory. 2018. V. 18. № 1. P. 12–21.
3. *Nayak A., Banavar R.N., Maithripala D.H.S.* Almost-global tracking for a rigid. body with internal rotors // Eur. J. Control. 2018. V. 42. P. 59–66.
4. *Biggs J.D., Horri N.* Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems & Control Lett. 2012. V. 61. № 4. P. 609–616.
5. *Левский М.В.* Управление переориентацией космического аппарата с минимальным интегралом энергии // АиТ. 2010. № 12. С. 25–42.
6. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 140–154.
7. *Левский М.В.* Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 115–140.
8. *Акуленко Л.Д.* Аналитические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
9. *Сиротин А.Н.* Об одном семействе аналитических экстремалей в задачах оптимального управления вращением тела // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 746–764.
10. *Акуленко Л.Д., Сиротин А.Н.* Тригонометрические экстремали в задаче оптимального управления переориентацией оси динамически симметричного вращающегося тела // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 2–11.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкридзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961, 384 с.
12. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
13. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1967. 704 с.
14. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
16. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
17. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 513 с.

On Particular Extremals in the Problem of Optimal Control of the Reorientation of an Asymmetric Rotating Body

L. D. Akulenko[a] **and A. N. Sirotin**[b,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[b] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: asirotin2@yandex.ru*

The optimal control problem for the reorientation of an asymmetric solid is investigated. As a criterion, the integral-quadratic functional is selected, consistent with the inertial symmetry of the body, which characterizes the total energy consumption. The main moment of the applied external forces is considered as the control. An explicit description of the family of extremals for an arbitrary asymmetric rigid body is obtained. The idea of constructing such extremals is based on the study of spatio-temporal deformations of solutions of Euler differential equations of free rotation of a rigid body.

Keywords: reorientation, optimal control

REFERENCES

1. *Warier R.R., Sinha A., Sukumar S.* Line-of-sight based spacecraft attitude and position tracking control // Eur. J. Control, 2016, vol. 32, pp. 43–53.
2. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque // Nonlin. Dyn. Syst. Theory, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 12–21.
3. *Nayak A., Banavar R.N., Maithripala D.H.S.* Almost-global tracking for a rigid .body with internal rotors // Eur. J. Control, 2018, vol. 42, pp. 59–66.
4. *Biggs J.D., Horri N.* Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems & Control Lett., 2012, vol. 61, no. 4, pp. 609–616.
5. *Levskii M.V.* Controlling space vehicle reorientation with minimal energy integral // Automat.&Remote Control, 2010, vol. 71, pp. 2518–2533.
6. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical quasi-optimal solution for the problem on turn maneuver of an arbitrary solid with arbitrary boundary conditions // Mech. Sol., 2019, vol. 3, pp. 474–485.
7. *Levskii M.V.* Optimal control of kinetic moment during the spatial rotation of a rigid body (spacecraft) // Mech. Sol., 2019, vol. 1, pp. 92–111.
8. *Akulenko L.D.* Analytical Methods of Optimal Control (Analiticheskie metody optimal'nogo upravleniya). Moscow: Nauka, 1987. 368 pp. (in Russian)
9. *Sirotin A.N.* A family of analytic extremals in problems of the optimal control of the rotation of a body // JAMM, 2011, vol. 75, Iss. 5, pp. 522–533.
10. *Akulenko L.D., Sirotin A.N.* Trigonometric extremals in the optimal control problem of the reorientation of the axis of a dynamically symmetric rotating body // JAMM, 2013, vol. 77, Iss. 3, pp. 305–313.
11. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley, 1962. 368 p
12. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. Berlin: Springer, 2004. xiv+412 pp.
13. *Courant R.* Differential and Integral Calculus. V. 1. N.Y.: Interscience Publ., 1965. xxiii+661 pp.
14. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Berlin: Springer, 2002. iv+864 pp.
15. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Mechanics. Oxford. Pergamon Press 1969.
16. *Arnold V.I.* Mathematical methods of classical mechanics. N.Y.: Springer, 1989. xvi+520 pp.
17. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1996.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 175–181

УДК 532.5

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФУЗИОННО-ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Д. В. Георгиевский[1,2,*]

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 01.11.2019 г.
После доработки 10.01.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2020 г.

Исследуются плоские диффузионно-вихревые течения в полуплоскости вязкой несжимаемой жидкости, управляемые движением границы. На границе могут быть заданы как функции времени либо продольная скорость либо касательное напряжение. Классические автомодельные решения имеют место, если эти функции совпадают с функцией Хевисайда. Приводится постановка линеаризованной задачи относительно малых начальных возмущений, наложенных на кинематику во всей полуплоскости. Она состоит из одного бипараболического уравнения с переменными коэффициентами относительно комплекснозначной функции тока и четырех однородных граничных условий. С помощью метода интегральных соотношений выводятся экспоненциальные оценки, которые при одних значениях параметров являются оценками затухания, а при других указывают на характер роста возмущений. Анализируются некоторые характерные случаи задания скорости границы либо касательного напряжения на ней.

Ключевые слова: диффузия вихревого слоя, сдвиговое течение, касательное напряжение, несжимаемость, вязкость, малые возмущения, квадратичный функционал, затухание, экспоненциальная оценка

DOI: 10.31857/S0032823520020046

Известные в механике сплошной среды автомодельные и квазиавтомодельные диффузионно-вихревые течения в полуплоскости с заданным движением границы служат хорошим приближением при моделировании граничного управления процессами, происходящими в недоступной для приложения сил области движения среды. Важной задачей является нахождение параметров, в частности, закона движения границы, при которых малые начальные возмущения, наложенные на одномерные нестационарные диффузионно-вихревые течения, не возрастают (либо экспоненциально затухают) со временем по некоторой мере во всей полуплоскости.

1. Диффузия вихревого слоя с заданной скоростью границы полуплоскости. Пусть полуплоскость $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty,\ x_2 > 0\}$ с границей $\Sigma = \{-\infty < x_1 < \infty,\ x_2 = 0\}$ занята однородной несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ. При $t < 0$ среда покоилась, а в момент $t = 0$ граница Σ начинает двигаться вдоль самой себя с заданной кусочно-непрерывной во времени скоростью $V(t)$. Возможно наличие массовой силы F с компонентами $F_1 = 0$, $F_2 = F(x_2, t)$.

Далее будем вести изложение в безразмерном виде, включив в размерный базис тройку величин $\{\rho, \mu, V_0\}$, где V_0 — характерное значение функции $V(t)$. Так, классическая диффузия разрыва имеет место, если $V(t)$ совпадает с функцией Хевисайда $h(t)$. Здесь и далее $V(t)$ — безразмерная в упомянутом базисе скорость границы Σ.

Нестационарный одномерный сдвиг в области Ω при $t > 0$ моделируется начально-краевой задачей параболического типа

$$x \in \Omega, \quad t > 0: \quad \frac{\partial \sigma^\circ}{\partial x_2} = \frac{\partial v^\circ}{\partial t}, \quad \sigma^\circ = \frac{\partial v^\circ}{\partial x_2} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ v^\circ = V(t), \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ v^\circ \to 0 \\ x \in \Omega, \quad t \to 0^+\colon\ v^\circ \to 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

относительно функций $v^\circ(x_2, t)$ и $\sigma^\circ(x_2, t)$, являющихся компонентами v_1° и σ_{12}° вектора скорости и тензора напряжений соответственно. Остальные их компоненты таковы:

$$v_2^\circ \equiv 0, \quad \sigma_{11}^\circ = \sigma_{22}^\circ = \sigma_{33}^\circ = -p^\circ(x_2, t) = -\int F(x_2, t)dx_2 \tag{1.3}$$

Давление p° отделяется от системы уравнений (1.1) и не оказывает влияния на кинематику диффузии плоского вихревого слоя в Ω.

Точное решение начально-краевой задачи (1.1), (1.2) может быть представлено с помощью интегралов Стилтьеса

$$v^\circ = V(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^{x_2/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2} d\zeta dV(\tau) \tag{1.4}$$

$$\sigma^\circ = -\int_0^t \exp\left(-\frac{x_2^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{dV(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{1.5}$$

Здесь $dV(t)$ понимается как $\dot{V}(t)dt$ в точках непрерывности функции V и как $[V](t_k)\delta(t - t_k)dt$ в возможных точках t_k, $k = 1, 2, \ldots$, ее разрыва ($[V](t_k)$ — скачки в точках t_k; $\delta(t)$ — функция Дирака).

Наложим во всей области Ω малые начальные возмущения δv_i, δp, $\delta\sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2$, зависящие от x_1, x_2 и t, на нестационарное одномерное сдвиговое течение с параметрами (1.3)–(1.5) и исследуем развитие картины этих возмущений при $t > 0$. Предполагая, что при определенных условиях они остаются малыми и при $t > 0$ (в дальнейшем надо определить именно эти условия), дадим постановку линеаризованной задачи в возмущениях. Замкнутая система уравнений в Ω относительно трех функций $\delta v_i(x_1, x_2, t)$, $\delta p(x_1, x_2, t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} -\delta p_{,1} + \Delta\delta v_1 = \delta v_{1,t} + v^\circ \delta v_{1,1} + v_{,2}^\circ \delta v_2 \qquad -\delta p_{,2} + \Delta\delta v_2 = \delta v_{2,t} + v^\circ \delta v_{2,1} \\ \delta v_{1,1} + \delta v_{2,2} = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей координате либо по времени.

Путем введения функции тока ($\delta v_1 = \psi_{,2}$, $\delta v_2 = -\psi_{,1}$) система (1.6) стандартным образом редуцируется к одному бипараболическому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = (\Delta\psi)_{,t} + v^\circ(\Delta\psi)_{,1} - v_{,22}^\circ \psi_{,1} \tag{1.7}$$

Выберем отдельную гармонику возмущения с волновым числом $s > 0$ вдоль оси x_1:

$$\psi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_2, t)e^{isx_1} \tag{1.8}$$

и придем к уравнению относительно комплекснозначной функции φ:

$$\varphi_{,2222} - 2s^2\varphi_{,22} + s^4\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + isv^{\circ}\right)(\varphi_{,22} - s^2\varphi) - isv^{\circ}_{,22}\varphi \tag{1.9}$$

обобщающему классическое уравнение Орра–Зоммерфельда [1] на случай, когда невозмущенное течение само по себе нестационарно [2]. Заметим, что в левой части (1.9) отсутствует традиционный для уравнения Орра–Зоммерфельда в слое множитель 1/Re с числом Рейнольдса. Его невозможно составить из размерных параметров системы из-за того, что в задаче нет характерного линейного размера.

Положим, что движение границы Σ в возмущенном течении не меняется по сравнению с невозмущенным. Это означает, что

$$x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ \varphi = 0, \quad \varphi_{,2} = 0; \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ \varphi \to 0, \quad \varphi_{,2} \to 0 \tag{1.10}$$

Для анализа задачи (1.9), (1.10) воспользуемся методом интегральных соотношений, позволяющим выводить достаточные интегральные оценки затухания начальных возмущений и получившим широкое применение в линеаризованной теории гидродинамической устойчивости. В обзорах, содержащихся в [3, 4], такие оценки собраны для большого класса течений с различными: а) кинематикой невозмущенного движения (не только соответствующей сдвигу); б) определяющими соотношениями, включающими неньютоновские, вязкопластические среды, материалы с тензорно нелинейной связью напряжений и скоростей деформаций, кусочно-неоднородные и непрерывно стратифицированные среды; в) классами возмущений, удовлетворяющими либо не удовлетворяющими теореме Сквайра или аналогичным утверждениям. В публикуемой работе, как и в [2], особенностью является то, что в силу нестационарности основного течения уравнение (1.9) не содержит явно спектрального параметра, по знаку действительной части которого можно было бы судить об устойчивости возмущенной картины. Роль этого параметра выполняет частная производная по t. Присутствие такого "операторного" спектрального параметра налагает особенности на процедуру метода, и, как будет видно, в целом усложняет его.

Положим, что $\varphi(x_2,t) = \varphi_* + i\varphi_{**}$ – элемент комплекснозначного гильбертова пространства $H_2(0,\infty)$ с нормой

$$\|\varphi\|(t) = \left(\int\limits_0^{\infty} |\varphi|^2 dx_2\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

Аналитическая схема метода интегральных соотношений формально сводится к следующим процедурам. Умножим обе части (1.9) на $\overline{\varphi}(x_2,t) = \varphi_* - i\varphi_{**}$ и проинтегрируем по x_2 от нуля до бесконечности с учетом граничных условий (1.10). После преобразований запишем для действительных частей получившегося равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + s^2 I_0^2) = s\int\limits_0^{\infty} v^{\circ}_{,2}(\varphi_{,2}\overline{\varphi})_{**}dx_2 - (I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2) \tag{1.12}$$

$$I_n^2(t) = \int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial^n\varphi}{\partial x_2^n}\right|^2 (x_2,t)dx_2, \quad n = 0,1,2 \tag{1.13}$$

Неравенство Коши–Буняковского в H_2 позволяет оценить сверху первое слагаемое в правой части уравнения (1.12):

$$s\int\limits_0^{\infty} v^{\circ}_{,2}(\varphi_{,2}\overline{\varphi})_{**}dx_2 \le sq(t)\left(\int\limits_0^{\infty} |\varphi_{,2}|^2\, dx_2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\infty} |\varphi|^2\, dx_2\right)^{1/2} =$$

$$= sq(t)I_1(t)I_0(t) \le \frac{q}{2}(I_1^2 + s^2 I_0^2) \tag{1.14}$$

$$q(t) = \sup_{x_2>0}|v^{\circ}_{,2}| = \sup_{x_2>0}|\sigma^{\circ}| \tag{1.15}$$

Тогда для левой части уравнения (1.12) получим

$$\frac{d}{dt}(I_1^2 + s^2 I_0^2) \le -[2I_2^2 + (4s^2 - q)I_1^2 + s^2(2s^2 - q)I_0^2] \tag{1.16}$$

Пусть $\Lambda(s,t)$ – оценивающая функция, такая что неравенство

$$2I_2^2 + (4s^2 - q)I_1^2 + s^2(2s^2 - q)I_0^2 \ge \Lambda(I_1^2 + s^2 I_0^2) \tag{1.17}$$

справедливо для любой функции $\varphi \in H_2(0,\infty)$ с условиями (1.10). Тогда несложно вывести интегральную оценку развития возмущений

$$(I_1^2 + s^2 I_0^2)(t) \le (I_1^2 + s^2 I_0^2)(0)\exp\left(-\int_0^t \Lambda(s,\tau)d\tau\right) \tag{1.18}$$

Нахождение функций Λ связано с оценками отношений квадратичных функционалов I_n^2, $n = 0,1,2$, в пространстве $H_2(0,\infty)$. На конечном интервале эти оценки следуют из неравенств Фридрихса [5], при выводе которых используют экстремальные свойства первых положительных собственных значений соответствующих задач [6]. Не останавливаясь на возможных обобщениях неравенств Фридрихса на полубесконечный интервал, заметим, что если $\Lambda(s,t) \le 2s^2 - q(t)$, то неравенство (1.17) выполнено для любых функций $\varphi \in H_2(0,\infty)$. Выбирая для оценки минимальный из этого полуинтервала параметр Λ, равный $2s^2 - q(t)$, из оценки (1.18) получим

$$(I_1^2 + s^2 I_0^2)(t) \le (I_1^2 + s^2 I_0^2)(0)\exp\left(-2s^2 t + \int_0^t q(\tau)d\tau\right) \tag{1.19}$$

Поскольку $q(t) \ge 0$ в силу неравенства (1.15), единой равномерной по s оценки затухания начальных возмущений (даже если $\int_0^t q(\tau)d\tau$ растет при $t \to \infty$ медленнее, чем линейная функция) из соотношения (1.19) представить не удается. Видно, что коротковолновые гармоники затухают заведомо быстрее, чем длинноволновые.

Обратим отдельное внимание на случай $s = 0$, в котором δv_1 зависит только от x_2 и t, а $\delta v_2 \equiv 0$. Из соотношения (1.12) следует, что для таких одномерных возмущений имеет место достаточно грубая оценка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}I_1^2 = -I_2^2 \le 0 \Rightarrow I_1^2(t) \le I_1^2(0) \tag{1.20}$$

2. Частные случаи задания скорости границы. Остановимся ниже на некоторых характерных случаях задания скорости $V(t)$.

а) “Ступенька Хевисайда”. Пусть $V(t) = h(t)$. Тогда согласно решению (1.5)

$$\sigma^{\circ}(x_2,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x_2^2}{4t}\right), \quad q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad \int_0^t q(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{\pi}} \tag{2.1}$$

Показатель экспоненты в соотношении (1.19), равный $-2s^2 t + (\sqrt{t/\pi})/2$, стремится к минус бесконечности при $t \to \infty$ для любого волнового числа $s > 0$, что говорит о затухании возмущений в смысле интегральной меры (1.11). Но чем больше длина возмущения вдоль оси x_1, тем медленнее происходит затухание.

б) Степенной рост. Пусть $V(t) = t^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Имеем

$$\sigma^{\circ}(x_2, t) = -\gamma\int_0^t \exp\left(-\frac{x_2^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

$$q(t) = \gamma\int_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = J(\gamma)t^{\gamma-1/2}, \quad J(\gamma) = \gamma\int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}dx}{\sqrt{\pi(1-x)}} < \infty \tag{2.2}$$

$$\int_0^t q(\tau)d\tau = \frac{2J(\gamma)}{2\gamma+1}t^{\gamma+1/2}$$

Выделим три подслучая:

*б*1) $0 < \gamma < 1/2$. Тогда показатель экспоненты в неравенстве (1.19) при $t \to \infty$ стремится к минус бесконечности для любого $s > 0$, т.е. начальные возмущения со всеми гармониками экспоненциально затухают;

*б*2) $\gamma = 1/2$; $J(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. Показатель экспоненты в неравенстве (1.19) – линейная функция $(\sqrt{\pi}/2 - s^2)t$. Гармоники с волновыми числами, большими чем $4\pi/\sqrt{2}$, экспоненциально затухают;

*б*3) $\gamma > 1/2$. В этом случае скорость границы растет достаточно быстро, и о затухании возмущений ничего сказать нельзя. Неравенство (1.19) играет роль только верхней оценки роста возмущений при $t \to \infty$.

3. Диффузия вихревого слоя с заданным касательным напряжением на границе полуплоскости. Исследуем родственное предыдущему течение такой же среды, которое отличается тем, что на прямолинейной границе Σ задана не скорость, а касательное напряжение $\sigma_{12} = S(t)$, не меняющееся и в возмущенном движении [7]. В размерный базис включим теперь тройку величин $\{\rho, \mu, S_0\}$, где S_0 – характерное значение функции $S(t)$. Классическая диффузия разрыва касательного напряжения имеет место, если $S(t) = h(t)$. Как и ранее, во избежание новых обозначений в последней формуле S – уже безразмерная функция, отнесенная к S_0. Скорость границы в начальный момент времени терпит излом, но является непрерывной.

Система уравнений (1.1) и соотношения (1.3) в Ω остаются прежними, а вместо граничных и начальных условий (1.2) запишем

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ \sigma^{\circ} = S(t), \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ \sigma^{\circ} \to 0 \\ x \in \Omega, \quad t \to 0^{+}\colon\ \sigma^{\circ} \to 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Точное решение начально-краевой задачи (1.1), (3.1) имеет вид

$$\sigma^{\circ} = S(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \int_0^{x_2/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2}d\zeta dS(\tau) \tag{3.2}$$

$$v^{\circ} = S(t)x_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}\int_0^t \int_0^{y/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2}d\zeta dS(\tau)dy + v_{\Sigma}^{\circ}(t), \tag{3.3}$$

где скорость границы Σ полуплоскости определяется выражением

$$v_{\Sigma}^{\circ} = -\int_0^t\int_0^{\xi} \frac{dS(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi \tag{3.4}$$

Постановка и анализ линеаризованной задачи в возмущениях, наложенных на основное движение с параметрами (3.2)–(3.4), весьма схожи с рассмотренными в п. 1.

Остановимся на отличиях и особенностях задачи о диффузии вихревого слоя с заданным касательным напряжением.

Уравнение (1.9) относительно комплекснозначной функции $\varphi(x_2, t)$ теперь сопровождается однородными условиями

$$x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ \varphi = 0, \quad \varphi_{,22} = 0; \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ \varphi \to 0, \quad \varphi_{,22} \to 0, \tag{3.5}$$

соответствующими тому, что в возмущенном процессе граница Σ остается прямолинейной, и на ней значение касательного напряжения $S(t)$ такое же, как и в невозмущенном.

Применение метода интегральных соотношений к задаче (1.9), (3.5) непосредственно приводит к той же, что и ранее, экспоненциальной оценке (1.19). Функция $q(t)$ определяется из равенств (1.15), куда теперь надо подставить выражения (3.2)–(3.4). Остановимся на некоторых характерных случаях задания на Σ касательного напряжения $S(t)$.

а) "Ступенька Хевисайда". Пусть $S(t) = h(t)$. Тогда параметры основного течения следующие:

$$\begin{gathered}\sigma^\circ = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x_2/(2\sqrt{t})} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad q(t) \equiv 1 \\ v^\circ = x_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x_2} \int\limits_0^{y/(2\sqrt{t})} e^{-\zeta^2} d\zeta dy - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\end{gathered} \tag{3.6}$$

Модуль скорости границы $|v_\Sigma^\circ|$ равен $2\sqrt{t/\pi}$, т.е. течение неограниченно разгоняется.

Оценивающий показатель экспоненты в (1.19) – линейная функция времени $(1 - 2s^2)t$. Она стремится к минус бесконечности при достаточно больших волновых числах $s \ge 1/\sqrt{2}$. Для длинноволновых возмущений ($s < 1/\sqrt{2}$) неравенство (1.19) не является оценкой затухания.

б) Монотонный рост. Пусть $S(t)$ – неотрицательная кусочно-непрерывная монотонно неубывающая функция. Тогда $q(t) = S(t)$ и показатель экспоненты в (1.19) равен $-2s^2 t + \int_0^t dS(\tau)$. От его поведения при больших t зависит то, какой оценкой является неравенство (1.19): затухания возмущений или их роста.

Выводы. Найденные достаточные интегральные экспоненциальные оценки развития малых начальных возмущений в полуплоскости показывают, что во всех рассмотренных задачах наименее устойчивым является возмущенное движение, соответствующее гармоникам с малыми волновыми числами, т.е. длинноволновым возмущениям. В задаче о диффузии плоского вихревого слоя с заданной скоростью $V(t)$ границы степенной рост функции $V(t) = t^\gamma$ с показателем γ, меньшим чем 1/2, приводит к затуханию малых по интегральной мере пространства $H_2(0, \infty)$ кинематических возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10085 мк, 19-01-00016 а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
2. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 798–807.

3. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.

4. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.

5. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 592 с.

6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.

7. *Георгиевский Д.В.* Задачи в напряжениях диффузионно-вихревого типа в неограниченном жестковязкопластическом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 53–60.

Small Perturbations of Diffusion–Vortex Flows for Newtonian Fluid in a Half-Plane

D. V. Georgievskii[a,b,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The plane diffusion-vortex flows in a half-plane of viscous incompressible fluid which are controlled by motion of the boundary are analysed. Either shear velocity or shear stress may be given as the functions of time along the boundary. The classic self-similar solutions take place if these functions coincide with the Heaviside function. Formulation of the linearized problem with respect of small initial perturbations imposed on kinematics in all the half-plane is given. It consists of one biparabolic equation with non-constant coefficients involving one complex-valued stream function and four homogeneous boundary conditions. Using the integral relations method, the exponential inequalities which are the decay estimates or the estimates characterizing the growth of perturbations in time (in depend on values of parameters), are received. Some typical cases of choose of the boundary velocity or the boundary shear stress are investigated.

Keywords: diffusion of vortex layer, shear flow, shear stress, incompressibility, viscosity, small perturbations, quadratic functional, decay, exponential estimate

REFERENCES

1. *Betchov R., Criminale W.O.* Stability of Parallel Flows. N.Y.; London: Acad. Press, 1967.

2. *Georgievskii D.V.* Stability of an unsteady shear of Bingham medium in the plane layer // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, suppl. 2, pp. 55–63.

3. *Kozyrev O.R., Stepanyants Yu.A.* The integral relations method in the linearized theory of hydrodynamic stability // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Mekhanika Zhidkosti i Gaza. Moscow: VINITI, 1991, vol. 25, pp. 3–89. (in Russian)

4. *Georgievskii D.V.* The Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: LENAND, 2018. (in Russian)

5. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Dordrecht; Boston: Reidel, 1980.

6. *Collatz L.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Academische Verlag, 1963.

7. *Georgievskii D.V.* The problems in terms of stresses of diffusion-vortex class in infinite rigid visco-plastic space // Mech. Sol., 2018, vol. 53, no. 5, pp. 520–526.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 182–195

УДК 517.956,532.135,532.527

ВИХРЕВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ КАРМАНА В ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. А. М. Блохин[1,2,*], Р. Е. Семенко[1,2,]**

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия*
**e-mail: blokhin@math.nsc.ru*
***e-mail: r.semenko@g.nsu.ru*

Поступила в редакцию 10.07.2019 г.
После доработки 24.12.2019 г.
Принята к публикации 09.01.2020 г.

В работе рассматриваются стационарные решения для задачи о движении конечного слоя несжимаемой полимерной жидкости над бесконечным вращающимся диском. Используется представление приближенного стационарного решения, аналогичное автомодельному решению Кармана для вязкой жидкости. Приводятся примеры численных стационарных решений для различных значений параметров задачи.

Ключевые слова: реологическая модель, вращающееся движение, автомодельное решение, стационарные решения

DOI: 10.31857/S0032823520020022

Введение. Моделирование вязкоупругих жидких полимерных сред является популярной на сегодняшний день задачей, которую пока нельзя считать решенной. Сложная структура таких жидкостей, представляющая из себя длинные перепутанные макромолекулы, обладает бесконечным числом степеней свободы и создает значительные трудности при построении уравнений модели. Уравнения для законов сохранения в таких моделях замыкаются при помощи дополнительных уравнений – реологических определяющих соотношений. В настоящее время предложено значительное количество различных подходов к построению определяющих соотношений, но ни один из них нельзя считать основным и общепринятым. Также нужно заметить, что модели полимерных сред довольно сложны, и из-за этого их математические свойства, такие, как существование, единственность и устойчивость решений, в большинстве случаев остаются открытыми.

На сегодняшний день существует широкий круг теоретических работ, посвященных изучению течений вязкоупругих жидкостей в областях различной геометрии и с различными краевыми условиями [1–5]. Показано, что течения вязкоупругих полимерных жидкостей обладают сложными свойствами, исследование которых привело к появлению ряда реологических моделей жидких полимеров. Отличительная особенность течений вязкоупругих жидкостей – подтверждаемый экспериментально эффект памяти, т.е. зависимость характеристик потока и кривой течения от истории нагружений. Эффект памяти приводит к специфическому виду неустойчивости течений [6], расслоению потока (shear-banding) [1], возникновению тангенциальных разрывов [2]. В частности, на примере прямолинейного потока в среде Олдройда показано [7], что вопрос о неустойчивости течения связан с единственностью стационарных решений. В целом, имеющиеся на данный момент результаты оставляют актуальным исследование стационарных режимов течений и поиск точных и приближенных решений для течений различной геометрии. Понимание свойств стационарных течений необходимо как для анализа устойчивости течений, так и для исследования адекватности моделей текучих полимеров экспериментальным данным, что особенно важно при существующем разнообразии реологических уравнений состояния.

В основу данной работы положена сравнительно новая реологическая модифицированная модель Виноградова—Покровского [8], использующая мезоскопический подход для вывода определяющих соотношений. Другими словами, в данном подходе динамика несжимаемой жидкости описывается через статистическое моделирование движения одной макромолекулы в вязкоупругой анизотропной среде, свойства которой определяются несколькими феноменологическими параметрами. Таким образом, неизвестными функциями этой модели гидродинамики текучих полимеров, помимо привычных давления и трех компонент скорости, являются шесть компонент симметрического тензора анизотропии [1, 5, 8], отражающего форму макромолекул и их ориентацию в потоке. Особый интерес для этой модели, как и для других моделей жидких полимеров, представляют сдвиговые и вращающиеся течения, благодаря их применимости к вискозиметрии, позволяющей исследовать адекватность модели реальным полимерам.

Одним из типов течения, хорошо изученным в рамках теории вязкой ньютоновской жидкости, является течение над вращающимся диском. Его исследование восходит к работам Кармана [9], который предложил автомодельное представление для решения в случае слоя жидкости бесконечной высоты. В дальнейшем решение Кармана было развито и обобщено широким кругом авторов [10—12] для краевых условий разного вида. В частности изучалось движение тонкого слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью над вращающейся горизонтальной пластиной [13, 14], в том числе и для течений неньютоновских жидкостей [3, 15]. Далее рассматривается задача, сформулированная для модифицированной модели Виноградова—Покровского. В отличие от классической “кармановской” постановки, здесь, как и в некоторых предыдущих исследованиях [13, 14], рассматривается слой вязкоупругой жидкости конечной толщины. Однако, ниже рассматриваются приближенные решения для цилиндрической зоны малого радиуса, расположенной на оси вращения диска. Высота этой зоны, предполагаемая постоянной, определяется из условия на свободной поверхности. Стационарные решения, рассматриваемые в работе, выведены по аналогии с автомодельным решением Кармана. Вид решений приведен в первом разделе статьи. Второй раздел посвящен выводу системы обыкновенных дифференциальных уравнений для стационарных решений. Наконец, третий раздел содержит описание численного метода и примеры стационарных решений для различных значений параметров задачи.

1. Предварительные сведения. Система дифференциальных уравнений, описывающих течения несжимаемой полимерной жидкости в рамках обобщенной реологической модели Виноградова—Покровского [8], в цилиндрической системе координат r, φ, z имеет вид (см. также [4, 16]):

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{rz}}{\partial z} + \frac{a_{rr} - a_{\varphi\varphi}}{r}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}a_{r\varphi}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} + \frac{a_{rz}}{r}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{rr}}{\mathrm{d}t} - 2\left(A_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_{r\varphi}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{rz}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mathcal{L}_{rr} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{\varphi\varphi}}{\mathrm{d}t} + 2\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)a_{r\varphi} - 2\left(\frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)A_\varphi + a_{\varphi z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathcal{L}_{\varphi\varphi} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{zz}}{\mathrm{d}t} - 2\left(a_{rz}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{\varphi z}}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mathcal{L}_{zz} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{r\varphi}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)A_r + \left(a_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial z} - a_{rz}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r}A_\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_{\varphi z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mathcal{L}_{r\varphi} = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{rz}}{\mathrm{d}t} - a_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(A_r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{r\varphi}}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{a_{\varphi z}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mathcal{L}_{rz} = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{\varphi z}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)a_{rz} - \left(a_{\varphi z}\frac{\partial u}{\partial r} + A_z\frac{\partial v}{\partial z} + a_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) + \mathcal{L}_{\varphi z} = 0 \tag{1.10}$$

Здесь t – время, u, v, w – компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ в цилиндрической системе координат r, φ, z; P – давление, $a_{rr},\ldots,a_{\varphi z}$ – компоненты симметричного тензора анизотропии,

$$\mathcal{L}_{rr} = K_I a_{rr} + \beta\|\mathbf{a}_r\|^2, \quad \mathbf{a}_r = (a_{rr}, a_{r\varphi}, a_{rz})$$

$$\mathcal{L}_{\varphi\varphi} = K_I a_{\varphi\varphi} + \beta\|\mathbf{a}_\varphi\|^2, \quad \mathbf{a}_\varphi = (a_{r\varphi}, a_{\varphi\varphi}, a_{\varphi z})$$

$$\mathcal{L}_{zz} = K_I a_{zz} + \beta\|\mathbf{a}_z\|^2, \quad \mathbf{a}_z = (a_{rz}, a_{\varphi z}, a_{zz}), \quad \mathcal{L}_{r\varphi} = K_I a_{r\varphi} + \beta(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi)$$

$$\mathcal{L}_{rz} = K_I a_{rz} + \beta(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_z), \quad \mathcal{L}_{\varphi z} = K_I a_{\varphi z} + \beta(\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z), \quad \|\mathbf{a}_r\|^2 = (\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r), \quad \text{и т.д.}$$

$$A_r = a_{rr} + \mathrm{W}^{-1}, \quad A_\varphi = a_{\varphi\varphi} + \mathrm{W}^{-1}, \quad A_z = a_{zz} + \mathrm{W}^{-1}$$

$$K_I = \mathrm{W}^{-1} + (k - \beta)I/3, \quad I = a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz},$$

где k, β $(0 < \beta < 1)$ – феноменологические параметры реологической модели (см. [8, 16]), $\mathrm{Re} = (\rho u_H l)/\eta_0$ – число Рейнольдса, $\mathrm{W} = (\tau_0 u_H)/l$ – число Вайсенберга, $\rho(= \mathrm{const})$ – плотность среды, η_0, τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации, l – характерная длина, u_H – характерная скорость,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Система (1.1)–(1.10) записана в безразмерном виде: переменные t, r, z, u, v, w, P, $a_{rr},\ldots,a_{\varphi z}$ отнесены к l/u_H, l, u_H, ρu_H^2, $\mathrm{W}/3$ соответственно.

Ниже приводится алгоритм конструирования решения математической модели (1.1)–(1.10), описывающие течения вращающейся несжимаемой полимерной жидкости. Такие течения реализуются в тонком бесконечном по горизонтали слое полимерной жидкости, расположенном над вращающейся со скоростью

$$\Omega r \Lambda(t)\mathbf{e}_\varphi \tag{1.11}$$

бесконечной пластиной с одной стороны, и имеющем свободную поверхность с другой (см. рис. 1). В формуле (1.11) угловая скорость вращения пластины – $\Omega = \mathrm{const}$,

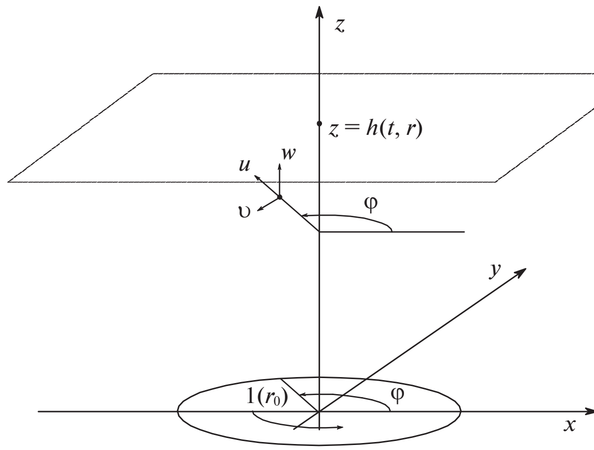


Рис. 1. Зона вращающегося движения.

$u_H = \Omega l$ – характерная скорость, $\mathbf{e}_\varphi$ – единичный вектор по азимутальной угловой координате φ (см. рис. 1). Агрегат $\Lambda(t)$ – безразмерный.

В таком случае, следуя монографии [11], а также работам [10, 13, 14], будем искать эти течения несжимаемой полимерной жидкости в "кармановском" виде, т.е. будем искать у системы (1.1)–(1.10) решения вида (см. [10, 11]):

$$u(t,r,\varphi,z) = rF(t,z) + o(r), \quad v(t,r,\varphi,z) = rG(t,z) + o(r)$$

$$w(t,r,\varphi,z) = H(t,z) + O(r), \quad P(t,r,\varphi,z) = L(t,z) + \frac{r^2}{2}K(t) + o(r^2)$$

$$\begin{aligned} a_{rr}(t,r,\varphi,z) &= A_0(t,z) + \frac{r^2}{2}A(t,z) + o(r^2) \\ a_{\varphi\varphi}(t,r,\varphi,z) &= A_0(t,z) + \frac{r^2}{2}\Phi(t,z) + o(r^2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$a_{zz}(t,r,\varphi,z) = C(t,z) + O(r), \quad a_{r\varphi}(t,r,\varphi,z) = \frac{r^2}{2}\mathcal{F}(t,z) + o(r^2)$$

$$a_{rz}(t,r,\varphi,z) = rB(t,z) + o(r), \quad a_{\varphi z}(t,r,\varphi,z) = rQ(t,z) + o(r)$$

Здесь

$$o(r) = r^2\{\ldots\}(t,z) + \ldots, \quad O(r) = r\{\ldots\}(t,z) + \ldots, \quad o(r^2) = r^3\{\ldots\}(t,z) + \ldots$$

Заметим, что у компонент a_{rr} и $a_{\varphi\varphi}$ главные члены разложения одинаковы в силу системы (1.1)–(1.10).

В реальных течениях бесконечная пластина $z = 0$ заменяется конечным диском, радиус r_0 которого выбирается в качестве обезразмеривающего масштабы длины ($l = r_0$). Поэтому, как и для вязкой несжимаемой жидкости (см. [11] и описанную там дискуссию по этому поводу), предполагается, что разложения (1.12) справедливы при малых r: $0 < r < r_* \ll 1$. В этой связи обозначения $o(r)$, $O(r)$ и т.д. вполне приемлемы.

Заметим также, что разложения (1.12) носят формальный характер до тех пор, пока не доказана сходимость соответствующих рядов.

Подставляя представление (1.12) в систему (1.1)–(1.10), собирая коэффициенты при соответствующих степенях r, получаем нестационарную систему для определения агрегатов F, G, H, A_0, A, Φ, C, $\mathcal{F}$, B, Q вида:

$$H_z = -2F \tag{1.13}$$

$$F_t + HF_z + F^2 - G^2 + K(t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{3A - \Phi}{2} + B_z\right) \tag{1.14}$$

$$G_t + HG_z + 2FG = \frac{1}{\mathrm{Re}}(2\mathcal{F} + Q_z) \tag{1.15}$$

$$H_t + HH_z + L_z = \frac{1}{\mathrm{Re}}(2B + C_z) \tag{1.16}$$

$$(A_0)_t + H(A_0)_z - 2(A_0 + \mathrm{W}^{-1})F + \mathcal{L}A_0 + \beta A_0^2 = 0 \tag{1.17}$$

$$A_t + HA_z - 4BF_z + \mathcal{L}A + 2\beta(A_0A + B^2) + \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0 = 0 \tag{1.18}$$

$$\Phi_t + H\Phi_z - 4QG_z + \mathcal{L}\Phi + 2\beta(A_0\Phi + Q^2) + \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0 = 0 \tag{1.19}$$

$$\mathcal{F}_t + H\mathcal{F}_z - 2(BG_z + QF_z) + \mathcal{L}\mathcal{F} + 2\beta(A_0\mathcal{F} + BQ) = 0 \tag{1.20}$$

$$B_t + HB_z + 2FB - (\mathrm{W}^{-1} + C)F_z + \mathcal{L}B + \beta(A_0 + C)B = 0 \tag{1.21}$$

$$Q_t + HQ_z - (\mathrm{W}^{-1} + C)G_z + \mathcal{L}Q + \beta(A_0 + C)Q = 0 \tag{1.22}$$

$$C_t + HC_z + \mathcal{L}C + \beta C^2 = 0, \tag{1.23}$$

где $\mathcal{L} = \mathrm{W}^{-1} + (k - \beta)(2A_0 + C)/3$.

Система уравнений (1.13)–(1.23) представляет собой замкнутую подсистему уравнений из бесконечной системы соотношений, возникающей после подстановки представлений (1.12) в систему (1.1)–(1.10).

В силу условий прилипания при $z = 0$ имеем:

$$F(t,0) = H(t,0) = 0, \quad G(t,0) = \Lambda(t) \tag{1.24}$$

Пусть свободная граница задается уравнением

$$z = h(t,r)$$

Следуя [17], получим для свободной границы $z = h$ условие

$$h_t + uh_r - w = 0 \tag{1.25}$$

Как и в [13, 14], будем полагать

$$h = h_* = \mathrm{const}$$

(постоянная h_* подлежит определению). Следовательно, из (1.25) получаем

$$H(t,h_*) = 0$$

2. Стационарные решения, описывающие течения “кармановского” типа вблизи оси $r = 0$. В стационарном случае математическая модель (1.13)–(1.23) примет вид (см. также (1.24)):

$$H' = -2F, \quad H(0) = 0 \tag{2.1}$$

$$(H^2 - \delta)F' = H\left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\mathrm{Re}} - K_0\right) - B\frac{(2F + \tilde{\mathcal{L}})}{\mathrm{Re}}, \quad F(0) = 0 \tag{2.2}$$

$$(H^2 - \delta)B' = (\mathrm{W}^{-1} + C)\left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\mathrm{Re}} - K_0\right) - H(2F + \tilde{\mathcal{L}})B, \quad B(0) = b_0 \tag{2.3}$$

$$(H^2 - \delta)G' = 2H\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathrm{Re}} - FG\right) - Q\frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{Re}}, \quad G(0) = \Lambda_0 \tag{2.4}$$

$$(H^2 - \delta)Q' = 2(\mathrm{W}^{-1} + C)\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathrm{Re}} - FG\right) - HQ\tilde{\mathcal{L}}, \quad Q(0) = q_0 \tag{2.5}$$

$$(H(\mathrm{W}^{-1} + A_0))' = -\hat{\mathcal{L}}A_0, \quad A_0(0) = a_{00} \tag{2.6}$$

$$(H(\mathrm{W}^{-1} + C))' = -\hat{\mathcal{L}}_0 C - 2(\mathrm{W}^{-1} + C)F, \quad C(0) = c_0 \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{H^2}{2} + L - \frac{C}{\mathrm{Re}}\right) = \frac{2B}{\mathrm{Re}}, \quad L(0) = l_0 \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} H(H^2 - \delta)A' = 4BH\left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\mathrm{Re}} - K_0\right) - 4B^2\frac{2F + \tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{Re}} - \hat{\mathcal{L}}_1 A(H^2 - \delta) - \\ - 2\beta B^2(H^2 - \delta) - \frac{(k - \beta)}{3}(A + \Phi)A_0(H^2 - \delta), \quad A(0) = a_0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} H(H^2 - \delta)\Phi' = 8QH\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathrm{Re}} - FG\right) - 4Q^2\frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{Re}} - \hat{\mathcal{L}}_1\Phi(H^2 - \delta) - \\ - 2\beta Q^2(H^2 - \delta) - \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0(H^2 - \delta), \quad \Phi(0) = \phi_0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} H(H^2 - \delta)\mathcal{F}' = 4HB\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathrm{Re}} - FG\right) - 2QB\frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{Re}} + \\ + 2QH\left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\mathrm{Re}} - K_0\right) - 2QB\frac{2F + \tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{Re}} - \\ - \mathcal{F}(H^2 - \delta)\hat{\mathcal{L}}_1 - 2\beta BQ(H^2 - \delta), \quad \mathcal{F}(0) = f_0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \delta = (\mathrm{W}^{-1} + C)/\mathrm{Re} \\ \tilde{\mathcal{L}} = (2k + \beta)A_0/3 + (k + 2\beta)C/3 + \mathrm{W}^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}} = (2k + \beta)A_0/3 + (k - \beta)C/3 + \mathrm{W}^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}}_0 = 2(k - \beta)A_0/3 + (k + 2\beta)C/3 + \mathrm{W}^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}}_1 = \mathrm{W}^{-1} + 2(k + 2\beta)A_0/3 + (k - \beta)C/3 \end{gathered}$$

При этом, $K(t) = \mathrm{const} = K_0$, $\Lambda(t) = \mathrm{const} = \Lambda_0$.

Рассматривая уравнения (2.6), (2.7), (2.9)–(2.11) при $z = 0$, получим

$$\begin{gathered} a_{00} = 0, \quad c_0 = 0, \quad a_0 = 2b_0^2(2-\beta)\mathrm{W} \\ \phi_0 = 2q_0^2(2-\beta)\mathrm{W}, \quad f_0 = 2q_0b_0(2-\beta)\mathrm{W} \end{gathered} \tag{2.12}$$

Уравнение (2.8) служит для определения $L(z)$ – давления на оси $r = 0$:

$$L(z) = -\frac{H^2(z)}{2} + \frac{C(z)}{\mathrm{Re}} + \frac{2}{\mathrm{Re}_0}\int^{z} B(s)\mathrm{d}s + L_0$$

Из уравнения (2.2) следует, что $F'(z)|_{z=0} = b_0$. Тогда из (2.1) $H''(z)|_{z=0} = -2b_0$. Учитывая условия $H(0) = 0$, $H'(z)|_{z=0} = 0$, получаем, что в окрестности нуля $H(z)$ имеет знак, обратный знаку b_0.

Можно заметить, что из (2.7) с учетом (2.1) и (2.12) следует $C(z) \equiv 0$.

Далее для простоты будем полагать, что $k = \beta$. Заметим, что численный расчет задачи (2.1)–(2.11) затруднителен из-за того, что точка $z = 0$ в силу условия $H(0) = 0$ является сингулярной для уравнений (2.6), (2.7), (2.9)–(2.11), отсутствующих в модели вихревого движения “обычной” вязкой жидкости [13]. Поэтому введем вспомогательную переменную ξ по правилу

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} = H(H^2 - \delta)$$

Отсюда получим

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} = H(H^2-\delta), \quad z|_{\xi=\xi'} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} = -2FH(H^2-\delta), \quad H|_{\xi=\xi'} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = H(H^2-\delta)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}\xi} = H(H^2-\delta)\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}z} \\ F|_{\xi=\xi'} = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{F}|_{\xi=\xi'} = f_0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Задача (2.13) может быть решена численно конечно-разностными схемами первого порядка. Однако очевидно, что точка $z = 0$, $H = 0$ является положением равновесия в фазовой плоскости (z, H). Поэтому для того, чтобы найти решение задачи (2.1)–(2.11) с независимым переменным z, необходимо найти фазовую траекторию, выходящую из точки $z = 0$, $H = 0$ в сторону положительных значений z при условии, что все остальные начальные данные (2.13) в этой точке выполняются. Такая траектория будет бесконечно приближаться к начальной точке (2.13) в силу автономности системы. Поскольку при малых положительных H производная $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\xi$ отрицательна, будем считать, что начальные данные выполняются в точке $\xi' = +\infty$.

3. Численный поиск стационарных решений. Определим следующие значения параметров задачи, которые назовем базовыми:

$$\mathrm{Re} = 1, \quad \mathrm{W} = 1, \quad \beta = 0.5, \quad b_0 = -1.5, \quad q_0 = 1, \quad K_0 = 1, \quad \Lambda_0 = 1$$

Введем для системы (2.13) разностную сетку $\xi_j = \tau j$, $j \in \mathbb{Z}$, $z_j = z(\xi_j)$ и т.д. Производные неизвестных функций будем аппроксимировать по правилу

$$\frac{\mathrm{d}z(\xi_j)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{z_{j+1} - z_j}{\tau} \quad \text{и т.д.}$$

Для τ будем использовать значение 10^{-4}. Положительные j соответствуют значениям z_j, лежащим левее (ближе к нулю) некоторой начальной точки $z_0 = z(\xi_0) > z_j$, а от-

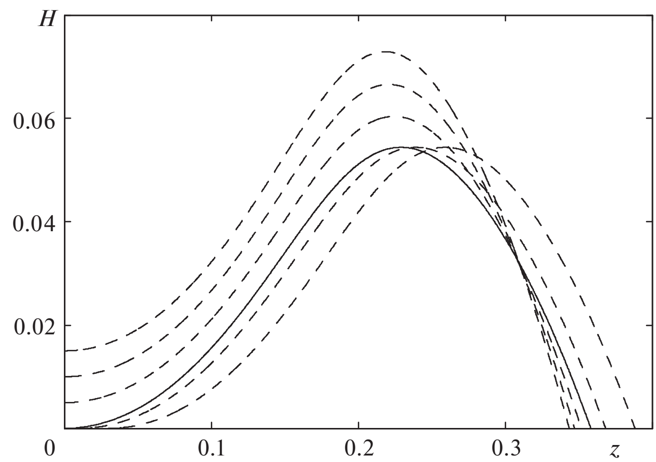


Рис. 2. Траектории решений уравнений (2.13) на плоскости (z, H).

рицательные j – значениям $z_j > z_0$, и при $\xi = -\infty$ траектория достигает свободной поверхности $z = h_*$, при которой $H(h_*) = 0$.

Рис. 2 показывает пример нескольких фазовых траекторий, спроектированных на плоскость (z, H), проходящих рядом с началом координат этой плоскости. Из них наиболее близкой к искомому решению является траектория, обозначенная сплошной линией – она выпущена вправо по z из точки $x_m = (0, 10^{-5}, 0, b_0, \Lambda_0, q_0, 0, a_0, \phi_0, f_0)$. В силу непрерывности правых частей уравнений, можно утверждать, что среди подобных траекторий будет стремящаяся к точке, соответствующей начальным данным задачи (2.13). Для того, чтобы ее найти, из некоторой стартовой точки $x^0 = (z^0, H^0, F^0, B^0, G^0, Q^0, A_0^0, A^0, \Phi^0, \mathscr{F}^0)$ выпустим численную траекторию в сторону $\xi \to +\infty$ до тех пор, пока либо z, либо H не приблизятся к нулю. Расчет останавливается при выполнении одного из условий: $z = z_J < 10^{-7}$, либо $H = H_J < 10^{-7}$, соответственно, координаты точки фазового пространства обозначим индексом J. Введем функцию ошибки

$$T(x^0) = z_J^2 + H_J^2 + F_J^2 + (B_J - b_0)^2 + (G_J - \Lambda_0)^2 + (Q_J - q_0)^2 + \\ + A_{0J}^2 + (A_J - a_0)^2 + (\Phi_J - \phi_0)^2 + (\mathscr{F}_J - f_0)^2,$$

характеризующую отклонение полученной траектории от требуемых начальных данных. Поиск искомой траектории ведется при помощи минимизации функции T. Правда, пока значения функции T корректно определены только для таких значений аргумента x^0, у которых первые две координаты положительны ($z^0 > 0$, $H^0 > 0$). Для того, чтобы итерации численного метода корректно работали, необходимо доопределить функцию T в областях $z^0 < 0$ и $H^0 < 0$ так, чтобы минимум такой функции совпадал с минимумом исходной. Для этого воспользуемся введенной ранее траекторией, выпущенной из точки x_m. Поскольку такая траектория близка к искомой, используем масштаб ее изменчивости для доопределения T. Обозначим за z_m значение $z > 0$, при котором траектория, выпущенная вправо по z из точки $x_m = (0, 10^{-5}, 0, b_0, \Lambda_0, q_0, 0, a_0, \phi_0, f_0)$ пересекает гиперплоскость $H = 0$. За H_m примем максимальное значение H на

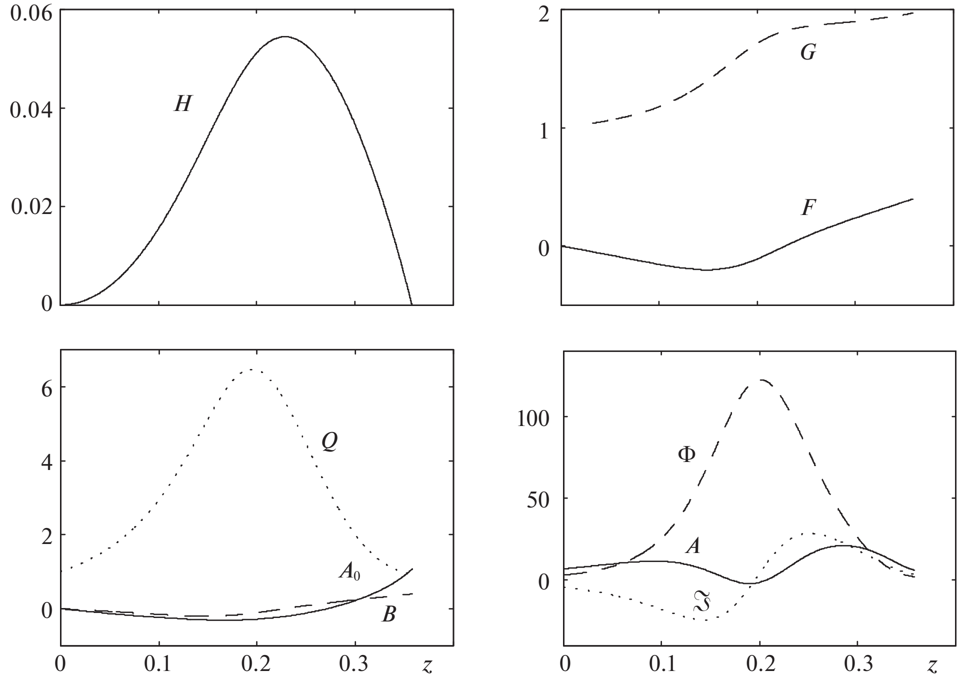


Рис. 3. Решение для базовых значений параметров.

траектории, выходящей из x_m. Так, для траектории, обозначенной сплошной линией на рис. 2, имеем $z_m = 0.358$ и $H_m = 0.054$. Тогда доопределим

$$T(x^0) = \begin{cases} z_m - z^0, & z^0 < 0, \quad H^0 > 0 \\ H_m - H^0, & H^0 < 0 \end{cases}$$

Минимум функции T будем искать симплекс-методом Нелдера–Мида при помощи функции fminsearch пакета программ MATLAB. За начальную точку метода возьмем точку x_m. Точку x^0, отвечающую минимуму функции T, будем считать точкой, лежащей на искомой траектории – решение (2.13). Выпустим из этой точки траекторию в обе стороны ($\xi \to \pm\infty$) до тех пор, пока с обеих сторон траектория не приблизится к значениям $H = 0$. Левая точка будет соответствовать значению $z = 0$, а правая – значению $h_* = z(\xi_*)$.

На рис. 3 приведены графики решений задачи (2.13) для базовых значений параметров, найденных описанным выше методом. Отметим, что главные коэффициенты разложения тензора анизотропии (A_0, B, Q) заметно меньше побочных членов (A, Φ, $\mathfrak{F}$), что еще раз подтверждает сделанное ранее замечание о том, что такое представление решения имеет смысл только в малой окрестности оси вращения $r = 0$. Также заметим, что по высоте область течения делится на две характерные подобласти – вблизи диска жидкость течет навстречу оси вращения ($F < 0$, циклонический режим), а в верхней части, напротив, течет от центра вращения ($F > 0$, антициклонический режим).

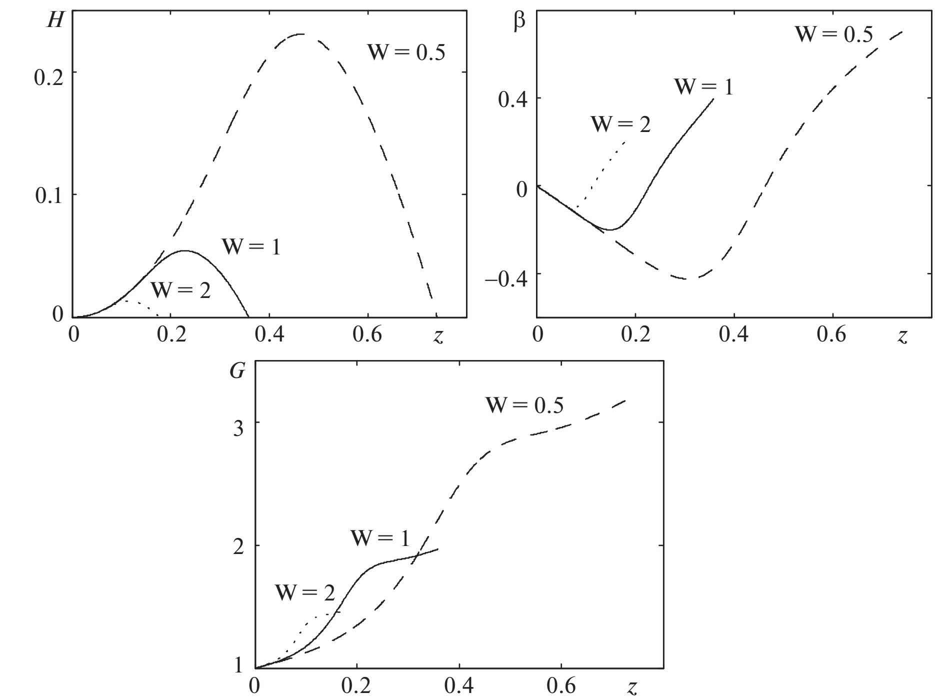


Рис. 4. Скорость жидкости при различных значениях W.

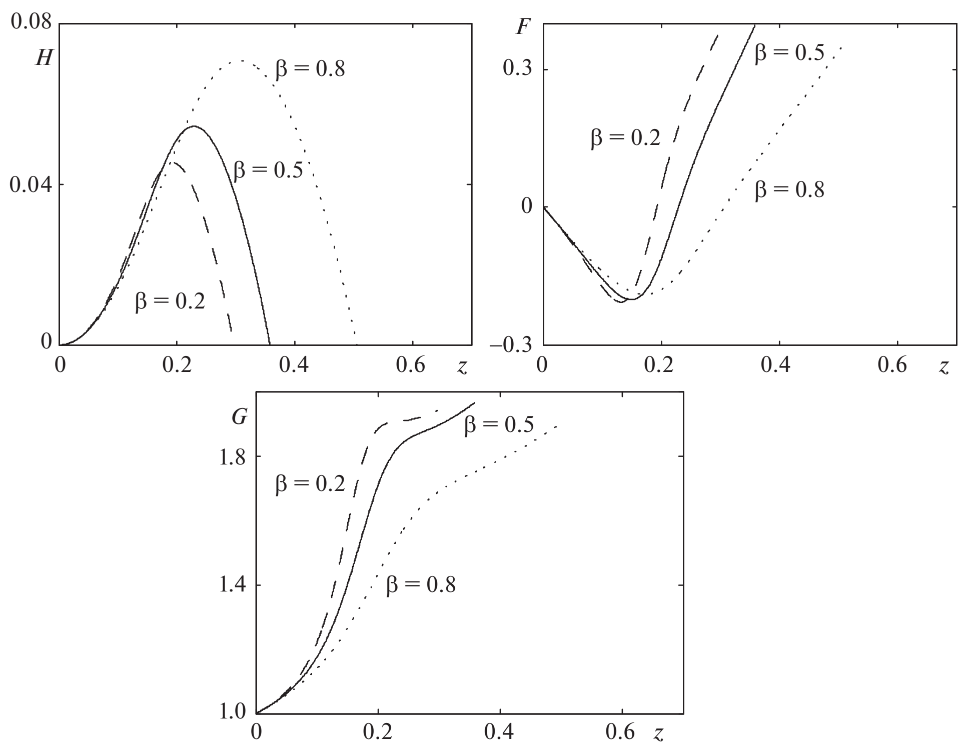


Рис. 5. Скорость жидкости при различных значениях β.

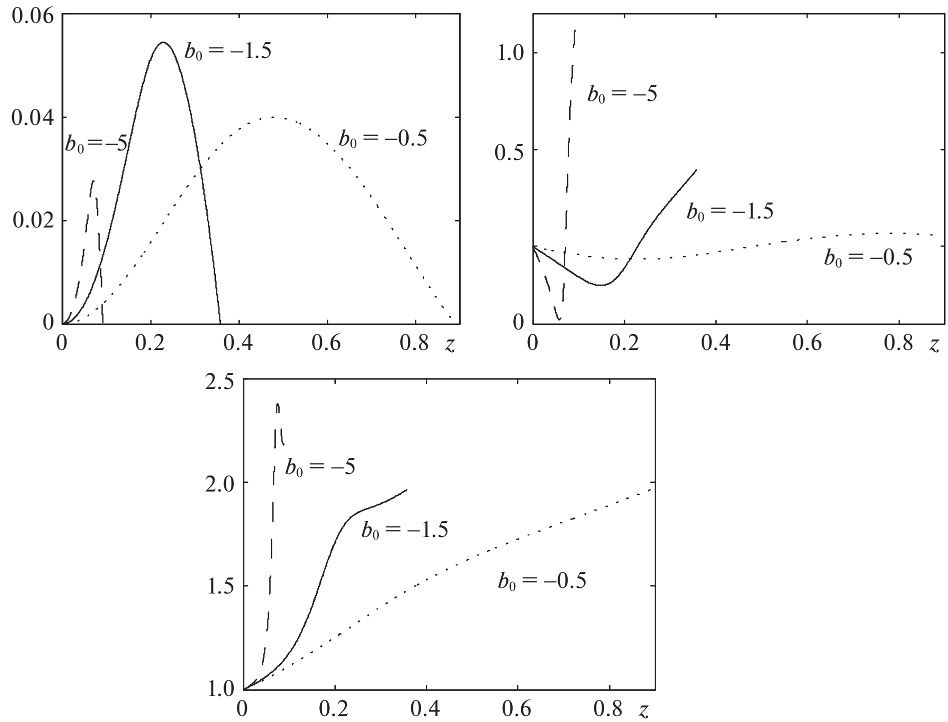


Рис. 6. Скорость жидкости при различных значениях b_0.

Рассмотрим влияние параметров задачи на профили скорости жидкости. Рис. 4 показывает различие в скорости при разных значениях числа Вайсенберга W. Видно, что большие значения W соответствуют меньшим значениям скорости и меньшей высоте вихревой зоны, но в остальном характер течения существенно не меняется. Изменение феноменологического параметра β, характеризующего размер макромолекул полимера, приводит к изменению вертикальной скорости жидкости и высоты зоны течения, но практически не влияет на радиальную и угловую компоненты скорости, см. рис. 5. Более сложным представляется влияние начальных данных компонент тензора анизотропии b_0 и q_0. Так рис. 6 показывает, что b_0 оказывает немонотонный эффект на величину скорости, а также демонстрирует несколько необычный эффект: уменьшение величины b_0 в некотором диапазоне одновременно ведет к меньшим вертикальным скоростям и к более высоким вихрям. Увеличение же b_0 приводит к более сложному поведению угловой скорости, которая, в отличие от прошлых случаев, немонотонна с ростом высоты. Малые величины начального данного q_0 (рис. 7) приводят в частности к изменению знака угловой скорости с ростом z, то есть с ростом высоты жидкость может начать закручиваться в сторону, противоположную вращению диска. Также в этом случае наблюдается сильное увеличение амплитуды угловой скорости, а также заметная асимметрии профиля вертикальной скорости H. Прочие параметры оказывают сравнительно небольшое влияние на общий характер течения жидкости, и поэтому их исследование в статье не приводится.

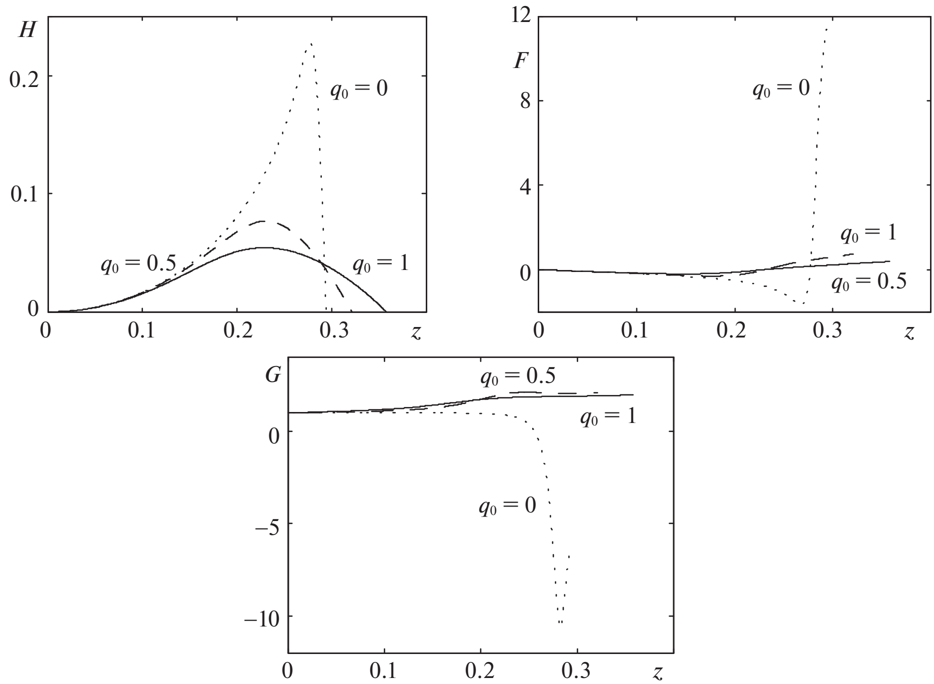


Рис. 7. Скорость жидкости при различных значениях q_0.

Заключение. В работе исследовано вращательное движение слоя полимерной жидкости конечной толщины над бесконечным вращающимся диском для модифицированной реологической модели Виноградова–Покровского. Предложен вид приближенного осесимметричного решения такой задачи для малой окрестности оси вращения диска, полученного по аналогии с автомодельным решением Кармана для вязкой жидкости. Для поиска стационарных решений нами был приведен численный алгоритм, позволяющий проинтегрировать уравнения задачи в особой точке на поверхности диска. Полученные численные примеры стационарных решений для ряда значений параметров задачи показали, что различные значения параметров могут сильно влиять на характер течения, размеры вихря, направление вращения жидкости. В отличие от предыдущих исследований, например, [13, 14], были обнаружены решения только с положительным вертикальным потоком ($H > 0$), гладких решений с нисходящим потоком найдено не было. Несмотря на отсутствие общих утверждений о единственности решений решаемых задач, численными методами обнаружить множественность решений не удалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И.* Расслоение потока жидкости с немонотонной зависимостью напряжения течения от скорости деформации // Выч. мех. сплошн. сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 68–78.
2. *Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A.* Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Mot. 2011. V. 48. № 8. P. 727–737.
3. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Об эффекте уменьшения сопротивления в микрополярной жидкости // ИФЖ. 1989. Т. 57. С. 213–219.

4. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Vortex motion of an incompressible polymer liquid in the cylindrical near-axial zone // Fluid Dyn. 2018. V. 53. № 2. P. 177–188.
5. *Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А.* Влияние числа Вайсенберга на структуру течений полимерных расплавов в каналах с внезапным сужением // Фунд. пробл. совр. материал. 2017. Т. 14. № 3. С. 332–336.
6. *Molenaar J., Koopmans R.J.* Modeling polymer melt-flow instabilities // J. Rheol. 1994. V. 38. № 1. С. 99–109.
7. *Брутян М.А., Куликовский А.Г.* Неустойчивость и неединственность квазистационарных течений вязкоупругой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 29–39.
8. *Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012. 122 с.
9. *von Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. V. 1. № 4. P. 233–252.
10. *Stewartson K.* On rotating laminar boundary layers // Freiburg Symp. Boundary Layer Res. 1957. P. 59–71.
11. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.
12. *Rogers M.H., Lance G.N.* The boundary layer on a disc of finite radius in a rotating fluid // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1964. V. 17. P. 318–330.
13. *Кострыкин С.В., Хапаев А.А., Якушкин И.Г.* Вихревые структуры в квазидвумерных течениях вязкой вращающейся жидкости // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. № 2. С. 395–407.
14. *Кострыкин С.В.* Режимы стационарных течений в задаче об интенсивной вихревой циркуляции в тонком слое вязкой вращающейся жидкости // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. № 1. С. 193–205.
15. *Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н.* О вязкопластическом течении Кармана // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 5. С. 45–49.
16. *Блохин А.М., Бамбаева Н.В.* Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // ЖВММФ. 2014. Т. 54. № 5. С. 55–69.
17. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Stationary electrohydrodynamic flows of incompressible polymeric media with strong discontinuity // J. Math. Sci. 2018. V. 231. № 2. P. 143–152.

Stationary Karman Vortex Structures in the Rotating Motion of the Incompressible Polymeric Liquid

A. M. Blokhin[a,b,#] and R. E. Semenko[a,b,##]

[a] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[b] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[#] *e-mail: blokhin@math.nsc.ru*
[##] *e-mail: r.semenko@g.nsu.ru*

The paper is dedicated to the study of the steady-state solutions for the problem of vortex motion of incompressible polymeric liquid above the infinite rotating disc. We are looking for the type of the solutions close to the self-similar Karman solution for the viscous liquid. It is obtained the examples of the numerical solutions for different values of the problem parameters.

Keywords: rheological model, rotating motion, self-similar solution, steady-state solutions

REFERENCES

1. *Kuznetsova Y.L., Skul'skiy O.I.* Shear banding of the fluid with a nonmonotonic dependence of flow stress upon strain rate // Comput. Contin. Mech., 2018, vol. 11, no. 1, pp. 68–78. (in Russian)
2. *Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A.* Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Mot., 2011, vol. 48, no. 8, pp. 727–737.
3. *Brutyan M.A., Krapivskii P.L.* On the effect of the reduction of the resistance in the micropolar fluid // J. Phys. Eng., 1989, vol. 57, pp. 213–219. (in Russian)

4. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Vortex motion of an incompressible polymer liquid in the cylindrical near-axial zone // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, no. 2, pp. 177–188.
5. *Kuznetsov A.E., Pyshnograi G.V., Cherpakova N.A.* The influence of the Weissenberg number on the structure of the polymer melts in the channels with instantaneous narrowing // Fundam. Probl. Modern Math. Sci., 2017, vol. 14, no. 3, pp. 332–336. (in Russian)
6. *Molenaar J., Koopmans R.J.* Modeling polymer melt-flow instabilities // J. Rheol., 1994, vol. 38, no. 1, pp. 99–109.
7. *Brutyan M.A., Kulikovskii A.G.* Instability and nonuniqueness of quasisteady flows of a viscoelastic liquid // Fluid Dyn., 1997, vol. 31, no. 6, pp. 819–827.
8. *Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograi G.V.* Introduction into the Mesoscopic Theory of Liquid Polymeric Systems. Barnaul: AltGPA, 2012. 122 p. (in Russian)
9. *von Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–252.
10. *Stewartson K.* On rotating laminar boundary layers // Freiburg Symp. Boundary Layer Res., 1957, pp. 59–71.
11. *Greenspan H.* The Theory of Rotating Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1968. 352 p.
12. *Rogers M.H., Lance G.N.* The boundary layer on a disc of finite radius in a rotating fluid // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1964, vol. 17, pp. 318–330.
13. *Kostrykin S.V., Khapaev A.A., Yakushkin I.G.* Vortex patterns in quasi-two-dimensional flows of a viscous rotating fluid // J. Exp. Theor. Phys., 2011, vol. 112, no. 2, pp. 344–354.
14. *Kostrykin S.V.* Steady flow regimes in the problem of intense wind-driven circulation in a thin layer of viscous rotating fluid // J. Exp. Theor. Phys., 2018, vol. 127, no. 1, pp. 167–177.
15. *Georgievskii D.V., Okulova N.N.* On the viscoplastic Karman flow // Moscow Univ. Mech. Bull., 2002, no. 5, pp. 45–49.
16. *Bambaeva N.V., Blokhin A.M.* Stationary solutions of equations of incompressible viscoelastic polymer liquid // Comp. Math. Math. Phys., 2014, vol. 54, no. 5, pp. 874–899.
17. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Stationary electrohydrodynamic flows of incompressible polymeric media with strong discontinuity // J. Math, Sci. 2018, vol. 231, no. 2, pp. 143–152.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 196–207

УДК 519.63:534.2

МЕТОД МОДОВОГО АНАЛИЗА МЕХАНОАКУСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2020 г. М. Б. Салин[1], Е. М. Соков[1], А. С. Суворов[1,*]

[1] *Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия*
**e-mail: suvorov@appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2019 г.
После доработки 14.06.2019 г.
Принята к публикации 22.10.2019 г.

В работе описывается способ решения задачи расчета акустического излучения деформируемого твердого тела, колеблющегося в сжимаемой жидкости с помощью процедур модового анализа механоакустических систем. Способ базируется на приближенном представлении функции потерь на акустическое излучение и модификации метода Ланцоша. Это позволяет построить эффективный вычислительный алгоритм нахождения излучающих звук форм резонансных колебаний и соответствующих им комплексных величин собственных частот. Проведена апробация разработанного метода на примере модельной задачи.

Ключевые слова: модовый анализ, механоакустические системы, акустическое излучение

DOI: 10.31857/S003282352002006X

Определение резонансных частот и форм колебаний деформируемых твердых тел (ДТТ) – классическая задача механики, имеющая множество практических приложений [1, 2]. Применительно к МКЭ данная проблематика освещена в большом количестве публикаций, начиная с классического труда [3]. В большинстве случаев решение таких задач ищется в приближении отсутствия диссипации на основе метода Ланцоша [4–7].

Наличие в ДТТ вязкой диссипации делает задачу поиска резонансных частот нелинейной, что существенно осложняет процедуру нахождения комплексных резонансных частот и форм колебаний. Существуют различные подходы к линеаризации и решению таких задач [8, 9]. Однако сравнение алгоритмов, представленных в современных CAE (computer-aided engineering) системах, например, ПО “ANSYS”, показывает, что вычисление резонансных частот с учетом вязкого трения требует на порядок больших временных и вычислительных затрат, нежели модовый анализ недиссипативных систем по методу Ланцоша. По этой причине в большинстве случаев вязкими потерями в высокодобротных системах пренебрегают, ссылаясь, в том числе и на то, что затухание вносит пренебрежимо малую поправку в абсолютное значение резонансной частоты, а сами по себе параметры и модели потерь для разных материалов априори не известны.

Тем не менее, в акустике для механоакустических систем “ДТТ-сжимаемая жидкость” величина потерь, связанных с акустическим излучением объектом звуковых волн, является хоть и малой, но принципиально важной в части оценки шумоизлучающей способности ДТТ. Вместе с тем, даже при отсутствии потерь на излучение, само по себе нахождение резонансных частот тел, погруженных в жидкость, не реализовано должным образом в современных программах численного моделирования, и вычисления сопровождаются критической потерей точности и расходимостью решения.

В связи с перечисленными выше ограничениями в данной работе представлена попытка адаптации метода Ланцоша под узкий класс задач нахождения собственных чисел механоакустических систем в приближении малости величины потерь на акустическое излучение.

1. Формулировка задачи на собственные числа для механоакустической системы. Конечно-элементное моделирование искомых гармонических виброакустических процессов традиционно осуществляется в пространстве двух переменных: поля перемещений $\mathbf{u}$ колеблющегося с частотой ω ДТТ, и потенциала перемещений θ, описывающего динамику жидкой среды. В такой постановке задача нахождения отклика на заданные силовые $\mathbf{b}$ воздействия в дискретном виде может быть описана системой линейных уравнений с симметричными матричными элементами, которая аналогична ранее представленной авторами [10]:

$$\left(\begin{bmatrix}[\mathbf{K}_S] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}[\mathbf{M}_S] & [\mathbf{M}_{FSI}]\\ [\mathbf{M}_{FSI}]^T & -[\mathbf{M}_F]\end{bmatrix} - \omega^4\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\mathbf{G}_F]\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\mathbf{Z}_F(\omega)]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{b}\\ 0\end{Bmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{K}_s$ и $\mathbf{M}_s$ – матрицы жесткости и масс деформируемого твердого тела, $\mathbf{M}_F$ и $\mathbf{G}_F$ – матрицы, описывающие перетекание и сжимание жидкости, $\mathbf{M}_{FSI}$ и $\mathbf{Z}_F$ – матрицы, определяющие граничные условия непротекания на поверхности контакта ДТТ-жидкость и отсутствия отражения акустических волн от границ расчетной области соответственно. Алгоритмы формирования матричных компонент $\mathbf{K}_s$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_F$ и $\mathbf{G}_F$ можно найти в классических трудах [3, 11, 12]. С процедурой эффективного формирования матрицы $\mathbf{M}_{FSI}$, которая устанавливает зависимость между $\mathbf{u}$ и θ, можно ознакомиться в [10].

Решение уравнений (1.1) для заданных внешних сил $\mathbf{b}$ может быть найдено как непосредственно на фиксированной сетке частот, так и с помощью разложения полей $\mathbf{u}$ и θ по собственным векторам $\mathbf{q}$, которые являются решением однородной задачи на собственные числа $\lambda = \omega_{\text{рез}}^2$, где $\omega_{\text{рез}}$ – резонансные частоты механоакустической системы.

Первым очевидным препятствием к решению задачи (1.1) с помощью процедур модового анализа является нелинейность задачи на собственные числа относительно $\omega_{\text{рез}}^2$, определяющаяся членами $\omega^4\mathbf{G}_F$ и $i\mathbf{Z}_F(\omega)$.

Матрица $[\mathbf{Z}_F(\omega)]$ имеет ненулевые элементы только для узлов на внешней границе расчетной области. Существует целый ряд методов описания выхода акустических волн за границы расчетной области [13–16] с использованием различных вариантов связи между значением потенциала θ и его производной по нормали к границе расчетной области θ_n. В наиболее простой, используемой ниже, импедансной формулировке такая связь может быть представлена в виде: $\theta_n = i\omega\theta/c$, где c – скорость звука в среде. Данное соотношение предполагает, что акустические волны выходят сквозь внешнюю жидкую границу конечно-элементной модели (КЭМ) в направлении близком к нормали. Применение более точного описания внешней границы могло бы внести поправку к оценке излучающей способности мод твердого тела, однако сама форма мод определяется достаточно точно уже в таком приближении границы КЭМ. С другой стороны импедансное соотношение обладает простой зависимостью от частоты, что позволяет записать $\mathbf{Z}_F$ в следующем виде:

$$[Z_F(\omega)] = \omega^3[Z], \qquad (1.2)$$

где импедансная матрица $[Z]$ является частотно независимой. В предположении, что потери на излучение вносят слабое возмущение в формы резонансных колебаний ДТТ, для соотношения (1.2) можно допустить разложение ω^3 по степеням ω^2 и ω^4 на заранее определенном интервале поиска решений $[\omega_{\min};\omega_{\max}]$. Это позволяет приближенно отнести часть потерь в матрицы масс и сжимаемости жидкости. В совокупности с использованием дополнительной переменной (как это показано ранее [19]):

$$q_p = \omega^2 q_\theta / s \tag{1.3}$$

и замены $\mu = 1/(\lambda - s)$, такой подход позволяет для решения (1.1) получить линейную задачу на собственные числа и вектора, аналогичную по своему виду описанной в [4]:

$$[\mathbf{M}]([\mathbf{K}] - s[\mathbf{M}])^{-1}[\mathbf{M}]\{q\} = \mu[\mathbf{M}]\{q\}, \tag{1.4}$$

где величина s — спектральный сдвиг, определяющий область поиска собственных чисел. Матрицы $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ и собственный вектор $\{q\}$ равны:

$$\begin{gathered}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{SM}] & -s[\mathbf{M}_{FSI}] & 0 \\ -s[\mathbf{M}_{FSI}]^T & -s^2[\mathbf{G}_{FM}] & s[\mathbf{M}_{FM}] \\ 0 & s[\mathbf{M}_{FM}] & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{M}_{FM}] \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_{\mathbf{u}} \\ q_p \\ q_\theta \end{Bmatrix}\end{gathered} \tag{1.5}$$

При этом модифицированные демпфированием материала χ и потерями на излучение матричные компоненты $\mathbf{K}_{SM}$, $\mathbf{M}_{FM}$ и $\mathbf{G}_{FM}$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}[\mathbf{K}_{SM}] = (1 + i\chi)[\mathbf{K}_S], \quad [\mathbf{M}_{FM}] = -[\mathbf{M}_F] + i\frac{a_\omega}{\omega_{\max}}[\mathbf{Z}] \\ [\mathbf{G}_{FM}] = [\mathbf{G}_F] + ib_\omega\omega_{\max}[\mathbf{Z}]\end{gathered} \tag{1.6}$$

Величины коэффициентов a_ω и b_ω определяются исходя из ширины частотного интервала, в котором матрица $\mathbf{Z}_F(\omega)$ разлагается в ряд. Например, для использованных авторами значений $\omega_{\min}/\omega_{\max} = 0.5$ (октава) по методу наименьших квадратов можно получить: $a_\omega = 0.364$ и $b_\omega = 0.662$. При этом максимальная погрешность описанного выше разложения ω^3 не превысит 7% в октаве.

2. Модифицированный сдвинутый блочный метод Ланцоша и особенности его применения к механоакустическим системам. В работе [4] описан сдвинутый блочный метод Ланцоша, применяемый для уравнений вида (1.4) в задачах строительной механики. Ограничение, присущее методу [4] и ряду аналогичных, заключается в использовании действительных значений переменных. В настоящей статье метод модифицирован и обобщен для комплекснозначных матриц и векторов. Для этого повторяется последовательность из тех же алгебраических операций, что и в классическом методе, но для комплекснозначных переменных. Правомерность данного подхода для слабодиссипативных систем подтверждается на практике большим объемом проведенных численных экспериментов.

Метод Ланцоша (как классический, так и модифицированный) позволяет приближенно представить исходную задачу на собственные числа большой размерности (1.3) приближенной задачей в виде [17]:

$$[\mathrm{T}]\{w\} = \mu^*\{w\}, \tag{2.1}$$

где μ^* – приближенные значения искомой части собственных чисел исходной задачи, а $[\mathbf{T}]$ – симметричная ленточная блочно-трехдиагональная матрица, состоящая из симметричных квадратных блоков $[\mathbf{a}]_j$ и верхнетридиагональных блоков $[\mathbf{b}]_j$:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}]_1 & [\mathbf{b}]_2^T & 0 & 0 & 0 \\ [\mathbf{b}]_2 & [\mathbf{a}]_2 & [\mathbf{b}]_2^T & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{b}]_3 & [\mathbf{a}]_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [\mathbf{a}]_j \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Размеры k каждого блока $[\mathbf{a}]$ и $[\mathbf{b}]$ подбираются исходя из оптимизации времени расчета. Авторами в расчетах использовались блоки при $k = 3$.

Матрица $[\mathbf{T}]$ формируется методом последовательных приближений, и имеет размерность существенно (на несколько порядков) меньше, чем у исходной системы. Благодаря тому, что $[\mathbf{T}]$ имеет меньшую размерность и специальный вид, нахождение ее собственных чисел оказывается более простой вычислительной операцией, чем нахождение собственных значений исходной системы.

С учетом (1.4–2.2) модифицированный алгоритм Ланцоша, развитый авторами настоящей статьи для решения акустических задач, может быть представлен в следующем виде:

1. Начало

2. Создаются $[\mathbf{v}]_0$ – нулевая и $[\mathbf{r}]_1$ – случайная матрицы (число строк соответствует числу степеней свободы, число столбцов – размеру блока, равному k)

3. Декомпозиция $[\mathbf{r}]_1$ создается таким образом, чтобы получить $[\mathbf{v}]_1$ и $[\mathbf{b}]_1$, удовлетворяющие условию: $[\mathbf{v}]_1^T[\mathbf{M}][\mathbf{v}]_1 = [\mathbf{I}]$, $[\mathbf{v}]_1[\mathbf{b}]_1 = [\mathbf{r}]_1$ и $[\mathbf{b}]_1$ – верхнетреугольная матрица размерности k (Используется метод модифицированного QR-разложения)

4. Присвоение $j = 1$, выполнение факторизации матрицы $[\mathbf{G_s}]$

5. Цикл Ланцоша

5.1. $[\mathbf{V}] = [\mathbf{V}, \mathbf{v}_j]$ (Дополнение матрицы $[\mathbf{V}]$ блоком, полученным на предыдущем этапе)

5.2. Вычисление $[\mathbf{h}]_j = [\mathbf{G_s}]^{-1}[\mathbf{M_0}][\mathbf{v}]_j$ для степеней свободы $\mathbf{u}$ и p, исходя из (2.5)

5.3. Вычисление $[\mathbf{h}]_j$ для степеней свободы θ с использованием выражения (2.4), которое будет дано ниже

5.4. $[\mathbf{h}]_j = [\mathbf{h}]_j - [\mathbf{v}]_{j-1}[\mathbf{b}]_j^T$

5.5. $[\mathbf{a}]_j = [\mathbf{v}]_j^T[\mathbf{M}][\mathbf{h}]_j$

5.6. $[\mathbf{r}]_{j+1} = [\mathbf{h}]_j - [\mathbf{r}]_j[\mathbf{a}]_j$

5.7. Поиск независимых объемов жидкости i на основе анализа суммы строк матрицы $[M_{FM}]_{\theta i}$. Вычитание из $r_{\theta i}$ его среднего значения

5.8. Ортогонализация $[\mathbf{r}]_{j+1} = [\mathbf{r}]_{j+1} - [\mathbf{V}]([\mathbf{V}]^T[\mathbf{M}][\mathbf{r}]_{j+1})$

5.9. Декомпозиция $[\mathbf{r}]_{j+1}$ аналогично п. 3, таким образом, что $[\mathbf{v}]_{j+1}^T[\mathbf{M}][\mathbf{v}]_{j+1} = [\mathbf{I}]$, $[\mathbf{v}]_{j+1}[\mathbf{b}]_{j+1} = [\mathbf{r}]_{j+1}$ и $[\mathbf{b}]_{j+1}$ – верхнетреугольная матрица

5.10. Внесение j-х блоков в систему:

5.10.1. Дополнение матрицы $[\mathbf{T}]$ блоками $[\mathbf{a}]_j$ и $[\mathbf{b}]_j$ в соответствии с (2.2), расчет и проверка сходимости собственных чисел задачи $[\mathbf{T}]\{\mathbf{W}\} = \mu^*\{\mathbf{W}\}$

5.10.2. Расчет собственных чисел μ^* для "текущей версии" $[\mathbf{T}]$. Сначала блочная матрица сводится к трехдиагональной методом итераций, на каждой итерации исключается одна ненулевая диагональ. Далее для трехдиагональной матрицы используется один из стандартных методов нахождения собственных чисел

5.10.3. Проверка сходимости собственных чисел задачи $[\mathbf{T}]\{\mathbf{W}\} = \mu^*\{\mathbf{W}\}$. Каждая j-я итерация приводит к своему набору собственных чисел μ^*, наибольшие из μ^* должны слабо меняться от итерации к итерации. Это является критерием выхода из цикла

5.11. Конец цикла при положительном результате проверки

6. Расчет собственных векторов системы: $[\mathbf{Q}] = [\mathbf{V}][\mathbf{W}]$

7. Расчет $q_\theta = s \cdot q_p/\lambda$, исходя из найденных $[\mathbf{Q}]$ и соответствующих им $\boldsymbol{\lambda}$

8. Конец

Важно перечислить основные отличия приведенного алгоритма от классической схемы [4, 17] (кроме применения комплексных переменных).

Во-первых, классический алгоритм, примененный к системе уравнений (1.4), будет содержать следующую операцию вместо п. 5.2 и 5.3:

$$[\mathrm{h}]_j = ([\mathbf{K}] - s[\mathbf{M}])^{-1}[\mathbf{M}][\mathrm{v}]_j \tag{2.3}$$

Такая операция требует факторизации плохо обусловленной матрицы $([\mathbf{K}] - s^2[\mathbf{M}])$ в силу сингулярности отдельных блоков матрицы $[\mathbf{M}_{FM}]$. Нужно отметить, что сингулярные блоки матрицы $[\mathbf{M}_{FM}]$ присущи изолированным объемам жидкости, не имеющим граничных условий в виде заданного потенциала или поглощения акустической энергии, например, жидкость со всех сторон окруженная деформируемой оболочкой.

Пусть строки векторов $\{h\}$ и $\{v\}$, соответствующие степеням свободы u, θ, p обозначаются: $\{h_u\}$, $\{h_\theta\}$, $\{h_p\}$ и $\{v_u\}$, $\{v_\theta\}$, $\{v_p\}$. Тогда выражение (2.3), по сути, представляет собой решение уравнения:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{SM}] - s[\mathbf{M}_S] & -s[\mathbf{M}_{FSI}] & 0 \\ -s[\mathbf{M}_{FSI}]^T & -s^2[\mathbf{G}_{FM}] & s[\mathbf{M}_{FM}] \\ 0 & s[\mathbf{M}_{FM}] & -s[\mathbf{M}_{FM}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_u \\ h_p \\ h_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{M}_{FM}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_u \\ v_p \\ v_\theta \end{Bmatrix}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$h_\theta = h_p - v_\theta/s \tag{2.4}$$

и в таком случае два первых уравнения преобразуются к виду:

$$[\mathbf{G}_s]\begin{Bmatrix} h_u \\ h_p \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}_0]\begin{Bmatrix} v_u \\ v_p \end{Bmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$[\mathbf{G}_s] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{SM}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S] & [\mathbf{M}_{FSI}] \\ [\mathbf{M}_{FSI}] & -[\mathbf{M}_{FM}] \end{bmatrix} - s^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{G}_{FM}] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_0] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S] & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}_{FM}] \end{bmatrix}$$

При этом матрица $[\mathbf{G}_s]$ уже не имеет сингулярных элементов и численное решение системы уравнений (2.5) становится возможно получить методами стандартных библиотек линейной алгебры, что нельзя было сделать для системы (2.3). Кроме того, сделанное преобразование позволяет существенно сэкономить ресурсы при вычислениях на компьютере.

Во-вторых, сингулярность отдельных i блоков матрицы $[\mathbf{M}_{FM}]$ приводит к невозможности обеспечения ортогональности между используемыми в цикле Ланцоша векторами r. Пусть $r_{\theta i}$ – фрагмент вектора r, характеризующий θ степени свободы для i-го независимого объема жидкости КЭМ. Пусть при этом строки и столбцы матрицы $[\boldsymbol{M}_{FM}]_{\theta i}$, соответствующие θ степеням свободы данного i-го объема жидкости, образуют сингулярную матрицу в силу того, что построчная сумма их элементов равна нулевому вектору. Тогда, если вектора $r_{\theta i}$ и $v_{\theta i}$ ортогональны друг другу, т.е. выполняется равенство:

$$\{v_{\theta i}\}^T [M_{FM}]_{\theta i} \{r_{\theta i}\} = 0,$$

для любого значения константы будет выполняться аналогичное равенство:

$$\{v_{\theta i}\}^T [M_{FM}]_{\theta i} \{r_{\theta i} + \text{const}\} = 0$$

На практике это приводит к тому, что пространство Крылова, строящееся на основе ортогональных векторов r, определяется не однозначно, а лишь с точностью до постоянной (в пространстве) величины, которая бесконечно возрастает на каждом шаге алгоритма Ланцоша. Это в итоге приводит к потере точности и появлению нефизичных решений $\mu^* \to \infty$ или $\omega \to s$.

Для того чтобы избежать данного обстоятельства можно искусственно вычесть из векторов $r_{\theta i}$ их среднее значение (п. 5.7 алгоритма) и восстановить удаленное среднее значение потенциала уже после выполнения цикла Ланцоша и с учетом (1.3) (п. 7 алгоритма).

Важно отметить, что по результатам работы алгоритма можно получить коэффициенты ζ_j, характеризующие потери энергии, возникающие вследствие акустического излучения, которое генерируется колебаниями ДТТ на резонансной частоте $\omega_{\text{рез}\, j}$ при $\chi = 0$:

$$\zeta_j = \operatorname{Im}\left(\sqrt{\lambda_j}\right) / \operatorname{Re}\left(\sqrt{\lambda_j}\right) \tag{2.6}$$

3. Синтез амплитудно-частотной характеристики по результатам модового анализа механоакустических систем. Найденные по результатам работы приведенного алгоритма собственные числа λ и вектора $\mathbf{q}$ могут использоваться для численного воспроизведения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) колебаний, возбуждаемых в механоакустической системе внешним силовым воздействием $\mathbf{b}$ путем синтеза мод. В основе данной процедуры лежит вычисление коэффициентов возбуждения γ_j мод. Каждый такой j коэффициент с учетом ортогонализации, обеспеченной при решении задачи на собственные числа (1.4), может быть записан в виде:

$$\gamma_j = \frac{\mathbf{q}_{uj}^T \mathbf{b}}{\left(\lambda_j - \omega^2\right)}$$

Здесь $\mathbf{q}_{uj}$ – выборка из j-го собственного вектора, отвечающая степеням свободы $\mathbf{u}$. При этом поле перемещений ДТТ может быть найдено в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_j \frac{\mathbf{q}_{uj}^T \mathbf{b}}{\lambda_j - \omega^2} \mathbf{q}_{\mathbf{u}j} \tag{3.1}$$

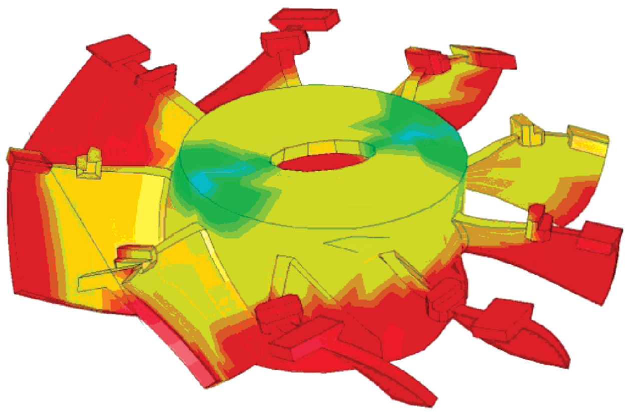


Рис. 1

Представление величины звукового давления в виде совокупности возбужденных мод, вследствие сингулярности $\mathbf{M}_F$, приводит к необходимости определения постоянной C в выражении:

$$p = \sum_j \frac{\omega^2 \mathbf{q}_{uj}^T \mathbf{b}}{s\left(\lambda_j - \omega^2\right)} \mathbf{q}_{\theta\ j} + C \tag{3.2}$$

Постоянная C может быть рассчитана исходя из анализа поведения механоакустической системы при $\omega \to 0$, путем выделения у данной механоакустической системы k (k не более 6) твердотельных степеней свободы – форм колебаний тела с нулевой частотой ($\lambda_k = 0$), при которых оно не деформируется и имеет перемещения $\mathbf{u}_{\text{т}}$. Учитывая, что для $\omega \to 0$ соотношение между $\mathbf{u}$ и p может быть записано в виде:

$$\{\mathbf{m}_{FSI}\}^T \{\mathbf{u}\} + s\{\mathbf{g}_{FM}\}^T \{p\} = 0,$$

где $\{\mathbf{m}_{FSI}\}$ и $\{\mathbf{g}_{FM}\}$ – суммы столбцов матриц $\mathbf{M}_{FSI}$ и $\mathbf{G}_{FM}$ соответственно. Исходя из этого, выражение для C может быть представлено следующим образом:

$$C = -\{\mathbf{m}_{FSI}\}^T \sum_i \frac{\mathbf{q}_{ui}^T \mathbf{b}}{sg\lambda_i} \mathbf{q}_{ui} + \{\mathbf{g}_{FM}\}^T \left\{\sum_k \frac{\mathbf{q}_{\text{т}uk}^T \mathbf{b}}{sg} \mathbf{q}_{\text{т}\theta i}\right\}, \tag{3.3}$$

где g – сумма элементов вектора $\{\mathbf{g}_{FM}\}$, i – номер деформационной моды ($\lambda_i > 0$).

4. Апробация алгоритма. В качестве примера апробации предложенных технологий модового анализа для прогнозирования АЧХ колеблющегося в безграничной жидкости тела ниже рассмотрен расчет звукового давления вблизи макета гребного винта (см. рис. 1). Модель представляет собой несколько пластин, размещенных равномерно на конической обечайке. Вокруг данного тела смоделирована жидкость, внешняя акустически прозрачная граница которой – куб – имеет габариты втрое большие, чем габариты тела.

Анализ результатов модального анализа показывает, что для подобных механоакустических систем собственные моды формируют три группы:

– моды, описывающие собственные резонансные колебания тела и сопутствующие процессы излучения звуковых волн на резонансных частотах во внешнюю среду. Пример таких колебаний приведен на рис. 1. Данные моды характеризуются малой вели-

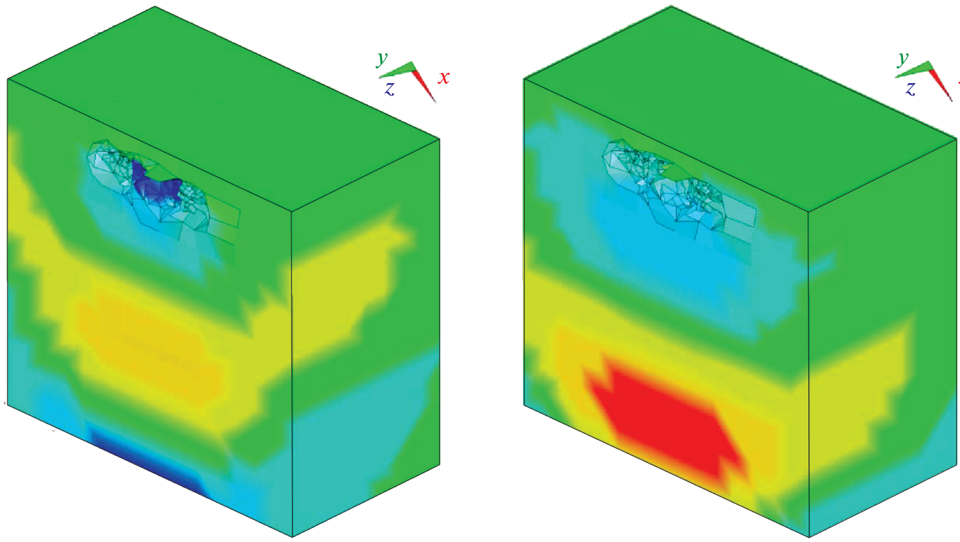


Рис. 2. Исходная мода 631.34+136.709*j* Гц.

чиной мнимой части собственной частоты ($\zeta \ll 0.1$), а также высокой сходимостью при их расчете по приведенному выше алгоритму;

– моды, позволяющие описать произвольное поле давления в объеме жидкости с помощью разложения по дискретному набору бегущих акустических волн. Пример таких форм колебаний приведен на рис. 2 (слева – действительная часть моды, справа – мнимая). Данные моды характеризуются большой величиной мнимой части собственной частоты ($0.1 < \zeta < 0.5$) и невысокой сходимостью при их расчете по приведенному выше алгоритму;

– моды, описывающие разложение поля давления на импедансных границах жидкости. Пример таких колебаний приведен на рис. 3. Данные моды характеризуются высокой величиной мнимой части собственной частоты ($\zeta > 0.5$), плохой сходимостью при их расчете по приведенному выше алгоритму, а также крайне малыми значениями уровней виброакустических полей на удалении от импедансных границ расчетной области. По-видимому существование данных мод определяется исходной математической формулировкой решаемой задачи и не несет значимого физического смысла.

Важно отметить, что моды каждого описанного выше типа характеризуются различным распределением энергии колебаний между водной средой и упругими колебаниями твердого тела. Наибольшим образом упругие колебания проявляются в модах первого типа. Такие моды при расчете АЧХ определяют акустическое поле в среде в окрестности резонансных частот. Напротив, упругие колебания твердых тел в модах третьего типа отсутствуют, что делает их ненужными для прогнозирования АЧХ. Моды второго типа, занимая промежуточное положение, вносят незначительный вклад в форму АЧХ, позволяя уточнить уровень излучения в межрезонансной области. Поэтому необходимость учета мод второго типа напрямую зависит от решаемой задачи.

Примечательно, что в качестве критерия принадлежности той или иной моды к конкретной группе выступает единственный параметр – величина потерь на излучение ζ. Таким образом, вводя в модифицированный алгоритм ограничение на ζ сверху,

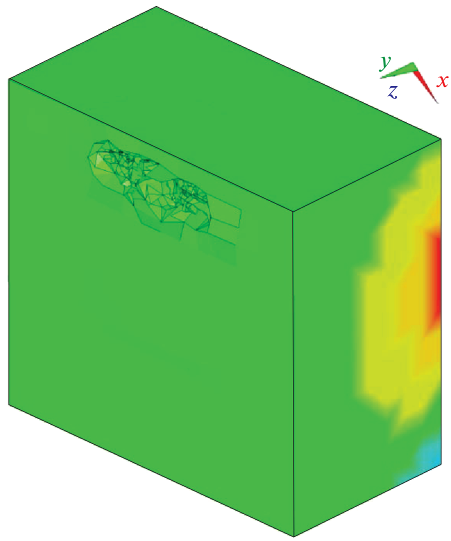


Рис. 3. Исходная мода 582.109+578.594*j* Гц.

можно существенно сэкономить временные ресурсы, избавляясь от необходимости расчета плохо сходящихся мод.

Например, на рис. 4 представлен результат прогнозирования АЧХ звукового давления для описанной выше модели в точке, лежащей на удалении от тела на импедансной границе жидкости при возбуждении макета лопасти нормальной силой. На обоих рисунках красной кривой приведены результаты прямого гармонического расчета звукового давления (без использования модального анализа). Синей пунктирной кривой представлены результаты прогнозирования звукового давления с использованием синтеза мод по описанному алгоритму, при учете мод с $\zeta < 0.5$. Зеленой пунктирной кривой также показаны результаты использования модального синтеза, но при учете лишь мод первой группы ($\zeta < 0.1$). Под прямым гармоническим анализом, результат которого был приведен на рис. 4, следует понимать явное решение системы (1.1) с ненулевой правой частью. Для получения кривой АЧХ производится перебор значений ω с достаточно мелким шагом, при этом решение (1.1) находится независимым образом для каждого из ω. Для решения (1.1) при прямом гармоническом анализе применяется метод решения СЛАУ с использованием LDL^T-факторизации.

Важно отметить, что графики приведены, в том числе, для демонстрации корректности изложенного метода аппроксимации потерь на излучение. Так, на рис. 4, слева аппроксимация при расчете мод выполнялась в диапазоне 512...1024 Гц, а на рис. 4, справа – в диапазоне 64...128 Гц.

Как видно из рисунков, использование модального синтеза является корректным только в том диапазоне, в котором осуществляется аппроксимация потерь на излучение, и влияет на результат гораздо сильнее, чем увеличение порога по ζ. Увеличение порога ζ с 0.1 до 0.5 приводит к уточнению результатов между резонансов в данном случае лишь на величину менее 3 дБ.

Оценить эффективность алгоритма можно следующим образом. Прямой гармонический анализ требует значительных временных ресурсов для расчета распределения

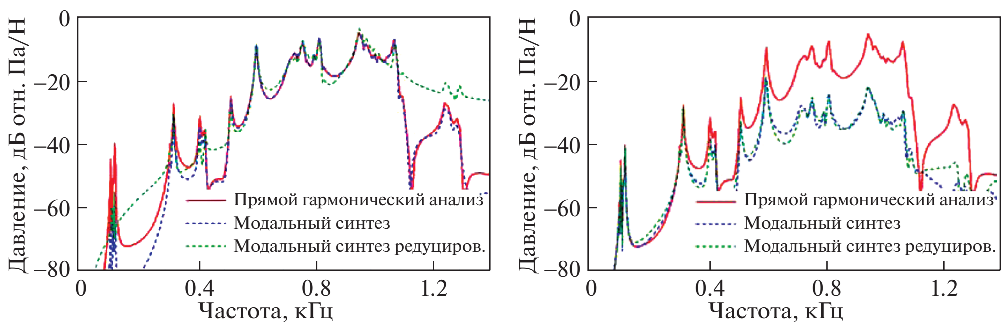


Рис. 4

поля для каждой заданной частоты ω, затрачиваемое время T_{harm} приближенно определяется выражением:

$$T_{\text{harm}} \approx N_\omega T_{\text{fact}}, \tag{3.4}$$

где N_ω – количество расчетных частот, а T_{fact} – время факторизации матрицы левой части уравнения (1.1).

При использовании вышеописанного модального алгоритма время решения задачи T_{modal} определяется временем нахождения мод, а дальнейший синтез АЧХ производится за время, пренебрежимо малое по сравнению с T_{modal} и T_{harm}. Количество мод N_λ заранее неизвестно, но, как правило, для инженерных расчетов $N_\lambda \ll N_\omega$. Таким образом, T_{modal} определяется: количеством мод N_λ, количеством выполняемых спектральных сдвигов N_s, временем факторизации матрицы G_s (п. 4 алгоритма), средним временем выполнения одной итерации Ланцоша (п. 5 алгоритма) T_{iter} и количеством необходимых итераций: ~α итераций на одну моду.

Выполненные расчеты показывают, что для матриц значительной размерности справедлива приближенная оценка $T_{\text{iter}} \gg 0.1T_{\text{fact}}$, хотя для каждой последующей итерации величина T_{iter} слабо линейно возрастает из-за увеличения размерности ортогонализируемых матриц (п.п. 5.1 и 5.8 алгоритма), т.е. можно записать:

$$T_{\text{modal}} \approx T_{\text{fact}}\left(N_s + 0.1\alpha N_\lambda\right) \tag{3.5}$$

Значение величин N_s и α существенно зависят от дискретных свойств исследуемой механоакустической системы (заполненность и размерность исходных матриц) и ширины частотного диапазона. Для задач, представляющих практический интерес справедлива оценка: $4 < \alpha < 10$ и $N_s < 5$.

Сравнивая выражения (3.4) и (3.5) можно убедиться, что модальный анализ будет эффективен по сравнению с прямым гармоническим анализом при $N_\omega > (5 + N_\lambda)$, что, как правило, выполняется в практических приложениях. Кроме этого, данный алгоритм актуален для ряда приложений, например, [18], в которых требуется представление виброакустических характеристик систем именно в виде мод, а не в виде отклика на конкретное воздействие.

Заключение. Разработан модифицированный метод Ланцоша, позволяющий производить расчет излучающих звук форм и комплексных величин собственных частот резонансных колебаний взаимодействующих с жидкостью деформируемых тел с учетом моделирования потерь на акустическое излучение.

По результатам апробации метода установлено, что метод позволяет с высокой точностью воспроизвести АЧХ звукового давления, излучаемого ДТТ в рамках заданной октавной полосы. Метод обладает высокой численной сходимостью при отношении между мнимой и действительной частями резонансной частоты $\zeta < 0.1$, что достаточно для определения величины резонансного шумоизлучения колеблющегося ДТТ.

Представленный метод может быть использован в акустическом проектировании при исследовании виброакустических характеристик корпусных конструкций.

Авторы выражают благодарность руководителю Центра гидроакустики ИПФ РАН П.И. Коротину за обсуждение результатов работы. Работа выполнена в рамках программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук, тема № 0035-2019-0018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davis R.B., Virgin L.N., Brown A.M.* Cylindrical shell submerged in bounded acoustic media: a modal approach // AIAA J. 2008. V. 46. № 3. P. 752–763.
2. *Guo W., Li T., Zhu X., Miao Y.* Sound-structure interaction analysis of an infinite-long cylindrical shell submerged in a quarter water domain and subject to a line-distributed harmonic excitation // J. Sound&Vibr. 2018. V. 422. P. 48–61.
3. *Bathe K.-J.* Finite Element Procedures. New York: Prentice Hall, 1996.
4. *Grimes R.G., Lewis J.G., Simon H.D.* A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems // SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 1994. V. 15. № 1.
5. *Cline A., Golub G., Platzman G.* Calculations of normal modes of oceans using a Lanczos method // In: *Sparse Matrix Computations*. Ed. by *Bunch J. and Rose D.* New York: Academic Press, 1976. P. 409–426.
6. *Cullum J., Donath W.E.* A block Lanczos algorithm for computing the q algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace of large sparse real symmetric matrices // Proc. 1974 IEEE Conference on Decision and Control. IEEE Comput. Soc. P. 505–509.
7. *Grimes R., Lewis J., Simon H.* Eigenvalue problems and algorithms in structural engineering // In: *Large Scale Eigenvalue Problems*. Ed. by *Cullum J. and Willoughby R.* Amsterdam: North-Holland, 1986.
8. *Veletsos A.S., Ventura C.E.* Modal analysis of non-classically damped linear systems // Earthquake Engng & Struct. Dyn. 1986. V. 14. P. 217–243.
9. *Dickens J.M., Nakagawa J.M., Wittbrodt M.J.* A critique of mode acceleration and modal tiruncation augmentation methods for modal response analysis // Comput&Struct. 1997. V. 62. № 6. P. 985–998.
10. *Суворов А.С., Соков Е.М., Артельный П.В.* Численное моделирование излучения звука с использованием акустических контактных элементов // Акуст. ж. 2014. Т. 60. № 6. С. 663–672.
11. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
12. *Hutton D.V.* Fundamentals of Finite Element Analysis. New York: McGraw-Hill Companies, 2004.
13. *Bermúdez A., Hervella-Nieto L., Prieto A., Rodrıguez R.* An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems // J. Comput. Phys. 2007. V. 223. Iss. 2. P. 469–488.
14. *Kallivokas L.F., Lee S.* Local absorbing boundaries of elliptical shape for scalar wave propagation in a half-plane // Finite Elements in Analysis and Design. 2004. V. 40 (15). P. 2063–2084.
15. *Ihlenburg F.* Finite element analysis of acoustic scattering // Appl. Math. Sci. 1998. V. 132. P. 61–99.
16. *Салин М.Б., Соков Е.М., Суворов А.С.* Численный метод исследования акустических характеристик сложных упругих систем на основе суперэлементов и аналитических граничных условий // Научно-технич. сборник “Гидроакустика”. 2011. Вып. 14. № 2. С. 36–46.
17. *Komzsik L.* The Lanczos method: evolution and application // SIAM. 2003. 87 p.
18. *Суворов А.С., Соков Е.М., Вьюшкина И.А.* Регулярный алгоритм автоматической корректировки спектральных характеристик акустических конечно-элементных моделей // Акуст. ж. 2016. Т. 62. № 5. С. 592–599.
19. *Sigrist J.-F.* Modal analysis of fluid-structure interaction problems with pressure-based fluid finite elements for industrial applications // Intern. J. Multiphys. 2007. V. 1. № 1. P. 123–149.

The Method of Modal Analysis of Mechanoacoustic Systems

M.B. Salin[a,#], E. M. Sokov[a], and A. S. Suvorov[a]

[a] *Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia*

[#]*e-mail: mikesalin@ipfran.ru*

The paper describes a method of solving the problem of calculating acoustic radiation of a deformable solid body oscillating in a compressible liquid using procedures for modal analysis of mechanoacoustic systems. The method includes an approximate representation of acoustic radiation loss function and a modified Lanczos method. This helps to construct an efficient computational algorithm for finding sound-emitting forms of resonance oscillations and the corresponding complex values of eigen frequencies. The developed method was tested using a sample model.

Keywords: modal analysis, mechanoacoustic systems, acoustic radiation

REFERENCES

1. *Davis R.B., Virgin L.N., Brown A.M.* Cylindrical shell submerged in bounded acoustic media: a modal approach // AIAA J., 2008, vol. 46, no. 3, pp. 752–763.
2. *Guo W., Li T., Zhu X., Miao Y.* Sound-structure interaction analysis of an infinite-long cylindrical shell submerged in a quarter water domain and subject to a line-distributed harmonic excitation // J. Sound&Vibr., 2018, vol. 422, pp. 48–61.
3. *Bathe K.-J.* Finite Element Procedures. N.Y.: Prentice Hall, 1996.
4. *Grimes R.G., Lewis J.G., Simon H.D.* A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems // SIAM J. Matrix. Anal. Appl., vol. 15, no. 1, pp. 1994.
5. *Cline A., Golub G., Platzman G.* Calculations of normal modes of oceans using a Lanczos method // In: Sparse Matrix Computations. *Ed. by Bunch J. and Rose D.* N.Y.: Academic Press, 1976. pp. 409–426.
6. *Cullum J., Donath W.E.* A block Lanczos algorithm for computing the q algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace of large sparse real symmetric matrices // Proc. 1974 IEEE Conference on Decision and Control. IEEE Comput. Soc., pp. 505–509.
7. *Grimes R., Lewis J., Simon H.* Eigenvalue problems and algorithms in structural engineering // In: Large Scale Eigenvalue Problems. Ed. by *Cullum J. and Willoughby R.* Amsterdam: North-Holland, 1986.
8. *Veletsos A.S., Ventura C.E.* Modal analysis of non-classically damped linear systems // Earthquake Engng & Struct. Dyn., 1986, vol. 14, pp. 217–243.
9. *Dickens J.M., Nakagawa J.M., Wittbrodt M.J.* A critique of mode acceleration and modal tiruncation augmentation methods for modal response analysis // Comput.&Struct., 1997, vol. 62, no. 6, pp. 985–998.
10. *Suvorov A.S., Sokov E.M., Artel'nyi P.V.* Numerical simulation of acoustic emission using acoustic contact elements // Acoust. Phys., 2014, vol. 60, no. 6, pp. 694–703.
11. *Zenkevich O., Morgan K.* Finite Elements and Approximation. N.Y.: Jonh Wiley & Sons Inc, 1983.
12. *Hutton D.V.* Fundamentals of Finite Element Analysis. N. Y.: McGraw-Hill Companies, 2004.
13. *Bermúdez A., Hervella-Nieto L., Prieto A., Rodrıguez R.* An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems // J. Comput. Phys., 2007, vol. 223, Iss. 2, pp. 469–488.
14. *Kallivokas L.F., Lee S.* Local absorbing boundaries of elliptical shape for scalar wave propagation in a half-plane // Finite Elements in Analysis and Design, 2004. vol. 40 (15), pp. 2063–2084.
15. *Ihlenburg F.* Finite element analysis of acoustic scattering // Appl. Math. Sci., 1998, vol. 132, pp. 61–99.
16. *Salin M.B., Sokov E.M., Suvorov A.S.* Numerical method of studying acoustic characteristics of complex elastic systems based on superelements and analytical boundary conditions// Sci.-Techn. Collect. Papers "Hydroacoustics", 2011, Iss. 14, no. 2, pp. 36–46. (in Russian).
17. *Komzsik L.* The Lanczos method: evolution and application // SIAM, 2003, 87 p.
18. *Suvorov A.S., Sokov E.M., V'yushkina I.A.* Regular algorithm for the automatic refinement of the spectral characteristics of acoustic finite element models // Acoust. Phys., 2016, vol. 62, no. 5, pp. 593–599.
19. *Sigrist J.-F.* Modal analysis of fluid-structure interaction problems with pressure-based fluid finite elements for industrial applications // Intern. J. Multiphys., 2007, vol. 1, no. 1, pp. 123–149.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 208–233

УДК 622.023.23

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД ВБЛИЗИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

© 2020 г. Н. В. Черданцев*

Федеральный исследовательский центр угля и углехимии СО РАН, Кемерово, Россия
**e-mail: nvch2014@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2019 г.
После доработки 14.06.2019 г.
Принята к публикации 22.10.2019 г.

Для эффективного применения способа направленного гидроразрыва прочных горных пород разработана модель геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку и трещину гидроразрыва. Модель построена на базе положений механики деформируемого твердого тела и линейной механики разрушения Гриффитса–Ирвина и реализована посредством метода граничных интегральных уравнений. В рамках модели проведен широкомасштабный вычислительный эксперимент для конкретных горно-геологических условий угольного месторождения. На основе анализа полученных результатов выявлен ряд особенностей в распространении трещины.

Ключевые слова: массив горных пород, горная выработка, угольный пласт, трещина гидроразрыва, критерий прочности Кулона–Мора, теория Гриффитса–Ирвина, метод граничных интегральных уравнений

DOI: 10.31857/S0032823520020034

1. Введение. Основными проблемами, возникающими при отработке угольных месторождений подземным способом, являются геодинамические события. К наиболее опасным из них относятся горные удары, внезапные выбросы угля и газа [1]. При этом смещения контура выработок достигают огромных размеров, что, как правило, приводит к аварийным и катастрофическим последствиям.

Подавляющее большинство этих событий происходит в окрестности выработок, проходимых по угольному пласту (пластовых выработок), и сопровождаются переходом пласта и окружающих пород в предельное состояние с образованием зон неупругого деформирования (предельно напряженных зон). Эти зоны относятся к зонам опорного давления и на границах с упругими областями концентрация напряжений в них достигают максимальных значений [2, 3].

В зависимости от характеристик прочности угольного пласта, вмещающих пород и глубины ведения горных работ их переход в предельное состояние при отработке пласта происходит по-разному. В одних случаях наступление предельного состояния вмещающих пород с последующим их обрушением происходит при сравнительно небольших размерах выработанного пространства и, как правило, не вызывает проблем при ведении горных работ.

Наибольшую опасность представляют случаи отработки пластов с прочными вмещающими пласт горными породами, образующими перед обрушением огромные выработанные пространства. При этом параметры опорного давления (размер предельно напряженной зоны L_p и коэффициент концентрации напряжений k_σ – отношение максимального вертикального напряжения к гравитационным напряжениям в массиве до ведения горных работ) достигают значительных величин. Зависание пород над выработкой вызывает большие смещения пород в ее кровле, а при их обрушении возникает значительная аэродинамическая волна сжатия, способная опрокинуть вентиляционную струю шахтного проветривания. Эти обстоятельства приводят к авариям и как следствие к нарушениям нормального функционирования работы горного предприятия.

В этой связи для предотвращения опасных последствий геодинамических явлений в зонах ведения горных работ применяют различные методы принудительного обрушения прочной (“тяжелой”) кровли, и наиболее эффективным среди них является метод направленного гидроразрыва. Метод заключается в искусственном нарезании щели, называемой зародышевой трещиной, в трудно обрушаемой кровле угольного пласта и последующей подачей в нее под давлением жидкости (флюида), которая, создавая высокую концентрацию напряжений у краев щели, инициирует появление и развитие трещины в прочных вмещающих породах [4]. В конечном итоге трещина полностью пересекает всю толщу прочного слоя горных пород, что и приводит к его обрушению.

Зародышевая щель образуется путем искусственного нарезания на поверхности скважины двух небольших канавок (выемок), называемых пропилами, на всю длину скважины [4]. Они расположены на противоположных концах ее диаметра (рис. 1).

Проблема эффективного использования способа гидроразрыва состоит в том, чтобы заложить рациональные параметры зародышевой трещины с целью ее оптимального распространения в породах кровли для обеспечения их регулируемого обрушения.

Поскольку необходимо обрушить прочный и мощный слой породы кровли пласта, в основном представляющей однородный и изотропный материал, то на траекторию трещины, движущейся в этом слое, наиболее существенное влияние оказывает неоднородное поле напряжений, обусловленное наличием горной выработки.

Особенно остро проблема встает на больших глубинах, когда размеры предельно напряженных зон угольного пласта значительны, а коэффициент концентрации напряжений в них достигает больших величин, намного превышающих единицу. Поэтому распределение напряжений около трещины может оказать существенное влияние на ее траекторию, значительно изменяя направление по отношению к направлению зародышевой трещины.

В этой связи разработка математической модели о состоянии углепородного массива, вмещающего пластовую выработку и трещину гидроразрыва, является важной научной и производственной задачей, позволяющей решать проблемы безопасности горных работ и повышения производительности труда на угледобывающих предприятиях.

Одной из первых работ, послуживших началом бурного применения метода гидроразрыва, является работа Ю.П. Желтова и С.А. Христиановича, обосновавших возможность и эффективность применения гидроразрыва в нефтегазовой промышленности для повышения дебета нефтеносной скважины [5]. Основываясь на методах механики деформируемого твердого тела, они успешно решили задачу о распространении трещины гидроразрыва нефтеносного пласта и ее влиянию на окружающий скважину массив.

В настоящее время имеется обширная библиография фундаментальных работ, посвященных применению гидроразрыва пластов, в том числе и направленного гидроразрыва массива горных пород [6–12], где приведены оригинальные фундаментальные решения задач гидроразрыва, построенные на методах механики твердого дефор-

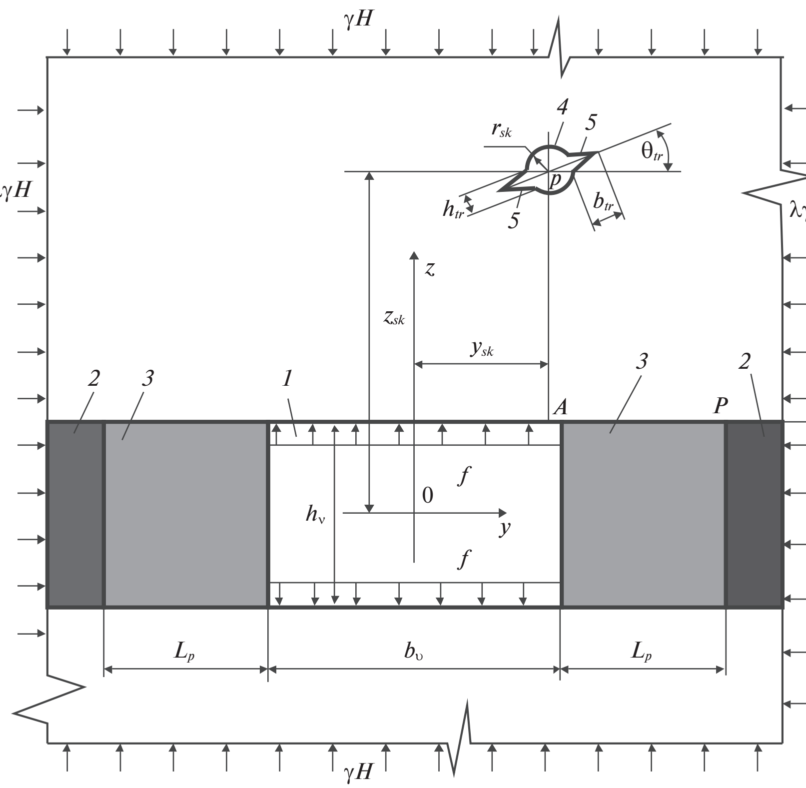


Рис. 1

мируемого тела [6–8], включая и методы гидромеханики [9–11]. Однако в подавляющем большинстве исследования касаются распространения трещин с началом у поверхности нагнетающей скважины. Полагается, что она находится в гравитационном однородном поле напряжений массива и никаких других горных объектов, создающих неоднородное поле напряжений, нет. Теоретических исследований, посвященных распространению трещин гидроразрыва в гравитационном поле напряжений массива, искаженном наличием в нем горных выработок, немного, и в них влияние выработки учитывается достаточно утрированно. Так, например, в [12] авторы производят расчет направления развития трещины в окрестности пластовой выработки, используя устаревшие представления об образовании около выработки свода давления с эллиптической формой. Полагая этот свод арочной конструкцией, они получают напряжения в ней методами строительной механики стержневых систем и используют их при расчете трещин гидроразрыва, отыскивая также и направление движения трещины. Такой подход является довольно грубым приближением в расчетах трещины, поскольку не учитывает в расчетах ни физико-механических свойств массива, ни свойств угольного пласта.

Ниже представлена модель и приведены результаты решения в плоской постановке задачи распространения трещины гидроразрыва в окрестности горной выработки, пройденной по угольному пласту.

2. Постановка и построение решения задачи о геомеханическом состоянии массива, вмещающего пластовую выработку и трещину гидроразрыва. Задача формулируется следующим образом (рис. 1). В массиве горных пород, моделируемом невесомой плоскостью, имеется выработка *1* прямоугольного сечения размерами $b_v \times h_v$, пройденная на глубине H по угольному пласту *2* на всю его мощность. В кровле и почве выработки приложена реакция крепи f. Характеристики прочности угольного пласта (σ_0 – предел прочности на одноосное сжатие, K – коэффициент сцепления, ρ – угол внутреннего трения) меньше, чем характеристики прочности пород вмещающего массива, но больше, чем характеристики (K' – коэффициент сцепления, ρ' – угол внутреннего трения) по контактам пласта с остальным массивом. Массив нагружен гравитационным давлением сверху и снизу γH (γ – средневзвешенный объемный вес налегающих пород), а с боков – $\lambda\gamma H$ (λ – коэффициент бокового давления). В краевых частях пласта образуются зоны неупругого деформирования *3* шириной L_p. В окрестности выработки для инициирования трещины в прочных породах кровли пласта пробурена скважина *4* радиусом r_{sk} с двумя треугольными выемками-пропилами *5*, расположенными на противоположных концах диаметра скважины. Размеры выемки, предназначенной для концентрации напряжений и, следовательно, инициирования трещины, h_{tr}, b_{tr}. Зародышевая трещина наклонена к горизонту под углом θ_{tr}, а давление жидкости в ней p. Система координат yOz совпадает с центральными осями выработки. Координаты скважины y_{sk}, z_{sk}. Вдоль линии APB (рис. 1) строятся графики опорного давления (эпюры напряжений) на краевую часть пласта.

В процессе решения задачи полагается:

1) трасса выработки и ось скважины параллельны, а их размеры вдоль абсциссы x значительно превосходят размеры в плоскости Oyz, в силу чего, можно считать, что породы в окрестности выработки и скважины находятся в условиях плоской деформации;

2) прочность пласта значительно ниже прочности вмещающих его пород;

3) сжимающие нормальные напряжения положительны, а растягивающие отрицательны;

4) трещина гидроразрыва распространяется в прочных, однородных и изотропных породах, и она не изменяет поля напряжений в окрестности выработки;

5) процессы фильтрации жидкости в массиве и другие ее утечки не учитываются.

В ходе решения задачи рассматриваются случаи распространения трещины в прочных породах, расположенных над пластом, для ряда глубин заложения выработки и значений начального давления p_0 в ней.

2.1. Постановка задачи о предельно напряженном состоянии пласта. Особенность задачи о напряженном состоянии массива с пластовой выработкой заключается в том, что прочность окружающих горных пород, как правило, существенно выше прочности пласта, по которому пройдена выработка. Поэтому если горные породы деформируются еще упруго, то краевые части пласта шириной L_p уже находятся в предельном состоянии.

Предельно напряженные зоны пласта начинают развиваться с его обнажения в бортах выработки при достижении вертикальным главным напряжением σ_1 (главное напряжение σ_3 на обнажении равно нулю) значения σ_0. При увеличении σ_1 зона неупругих деформаций распространяется вглубь пласта, и в этой зоне он деформируется не только по направлению его мощности, но главным образом в плоскости контактов между пластом и окружающими породами, где происходит его проскальзывание. Поскольку вдоль контактов пласта с окружающими породами возможно нарушение сплошности, проявляющееся в виде проскальзывания, то в ней будут одновременно существовать два предельных состояния равновесия: общее или обыкновенное (состояние самого пласта) и специальное (состояние по контакту пласта с окружающим массивом) [13, 14].

В этой связи в строгой математической постановке необходимо использовать два критерия перехода его в предельное состояние: общий и специальный. Эти критерии чаще всего применяются в формах с прямолинейными огибающими кругов предельных состояний по пласту и по поверхностям ослаблений (по контакту пласта с массивом), на которых характеристики прочности ниже, чем по пласту [2, 13, 14]. Эти условия совместно с дифференциальными уравнениями равновесия образуют систему разрешающих уравнений о напряженном состоянии краевой зоны угольного пласта. В задаче о состоянии пласта, находящегося в условиях плоского деформированного состояния, эта система может быть сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению гиперболического типа, которое решается методом характеристик [13]. В этом методе интегрируются дифференциальные уравнения, имеющие на характеристических линиях достаточно простую структуру. В механике деформируемого твердого тела эти линии совпадают с линиями скольжения материала [13].

Несмотря на относительно простой вид полученных дифференциальных уравнений, их интегрирование в замкнутом виде получается только на участках пласта, расположенных в непосредственной близости к его обнажению. На остальных участках его предельно напряженной зоны решение можно получить только путем вычислительной процедуры, последовательно решая три краевые задачи механики предельного равновесия сыпучих сред для ряда характерных участков этой зоны.

Из-за сложностей в решении краевых задач чаще всего для описания предельно напряженного состояния угольного пласта используют подход, разработанный Г.Л. Фисенко [2]. Он основан на многочисленных экспериментах, проведенных на многих шахтах ряда угольных месторождений, учитывает важнейшие характеристики прочности горных пород, а распределения напряжений в пласте представляются аналитическими выражениями.

Согласно этому подходу вертикальные нормальные напряжения вдоль оси пласта в предельно напряженной зоне изменяются по экспоненциальному закону

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{2\sin\rho} e^{k\left(y-\frac{1}{2}b_v\right)},$$

где

$$k = \frac{2}{h_v}\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\operatorname{tg}\rho'$$

Недостаток этого подхода состоит в том, что формула для σ_z основана на экспериментальных данных и по сути дела является эмпирической. Другой существенный недостаток этого подхода заключается в том, что нормальные и касательные напряжения на контакте пласта с окружающим массивом напрямую он не определяет, и это обстоятельство затрудняет решение упругопластической задачи о напряженном состоянии массива в окрестности выработки.

В данной статье впервые для расчета напряжений в предельно напряженной зоне пласта был использован более строгий и фундаментальный метод характеристик, реализованный путем численного решения краевых задач для ряда характерных участков этой зоны, включая участки, примыкающие к обнажению. Результаты решения изложены в работе [15].

В ней показано, что графики распределения нормальных и касательных напряжений могут быть построены как вдоль контакта пласта с окружающим массивом, так и вдоль оси пласта и представляют собой комбинацию поочередно сменяющих друг друга участков с постоянными и нелинейно возрастающими напряжениями. Для дальнейших исследований о напряженном состоянии массива горных пород эти графики следует аппроксимировать аналитическими зависимостями, в частности, полиномами. Такая замена облегчает решение упругопластической задачи при определении параметров опорного давления. Коэффициенты полинома определяются из решения системы алгебраических уравнений, число которых совпадает с количеством участков в предельно напряженной зоне слоя. Правые части уравнений этой системы равны значениям найденных напряжений на границах участков этой зоны [15].

Сравнительные оценки результатов расчета напряжений, полученные методом характеристик, с результатами расчетов напряжений по экспоненциальной формуле [2], показывают их близость лишь на достаточно узком участке предельно напряженной зоны. С увеличением длины участка разница в напряжениях существенно возрастает и может достигать значительных величин, доходя на расстоянии $4.44h_v$ до 85% [15].

2.2. Постановка упругопластической задачи о пластовой выработке. Зная характер распределения линий скольжения и напряжений на них, можно определить напряжения в любой точке предельно напряженной зоны пласта, в том числе и на границе (контакте) пласта с окружающим массивом. В этой связи замена краевой части пласта, находящейся в предельном состоянии, действующими на контакте пласта с массивом нормальными и касательными напряжениями $\sigma_{p.y}$, $\sigma_{p.z}$, $\tau_{p.yz}$, $\tau_{p.zy}$ позволяет сформулированную задачу свести к краевой задаче теории упругости. В отличие от классической задачи граничные условия формулируются не по контуру выработки, а по замкнутому контуру, включающему кровлю, почву выработки и контакт пласта с окружающим массивом на участке предельной зоны. Так, по горизонтальным участкам этого контура проекции p_z, p_y полного напряжения соответственно равны напряжениям σ_z и τ_{yz}. Тогда в граничном интегральном сингулярном уравнении краевой задачи теории упругости [16, 17] интегрирование производится по замкнутому контуру, охватывающему кровлю, почву выработки и контур предельно напряженной зоны. Это уравнение в форме, представленной в [16], принимает следующий вид [18, 19]

$$\frac{1}{2}a_q(Q_O) - \int\limits_L \Phi_{qm}(Q_O, M_O)a_m(M_O)dO_{M_O} = \left[\sigma_{e.qm}n_m(Q_O) - f(Q_O)\right](Q_O \subset L_b) + \\ + \left(\sigma_{e.qm} - \sigma_{p.qm}\right)n_m(Q_O)\left(Q_O \subset L_{op}\right), \qquad (2.1)$$

где L – внешний контур, охватывающий почву, кровлю выработки и границы предельно напряженной зоны; L_{op} – суммарный контур предельно напряженной зоны; L_b – контур, охватывающий почву и кровлю выработки, индексы q, m попеременно принимают значения 2, 3 (индекс 2 соответствует оси y, 3 – оси z); Q_O, M_O – точки на поверхности этой области; dO_{MO} – дифференциал поверхности в окрестности точки M_O; $\Phi_{qm}(Q_O, M_O)$ – тензор Грина; $n_m(Q_O)$ – вектор нормали к поверхности выработки в точке Q_O; a_q, a_m – компоненты вектора фиктивной нагрузки; $f(Q_O)$ – обобщенный вектор нагрузки, приложенный к поверхности выработки изнутри; $\sigma_{e.qm}$ – компоненты тензора естественного поля в нетронутом горными работами массиве, которые при отсутствии тектонических напряжений представляются в виде

$$\sigma_{e.y} = \sigma_{e.22} = \lambda\gamma H, \quad \sigma_{e.z} = \sigma_{e.33} = \gamma H, \quad \tau_{e.yz} = \sigma_{e.23} = 0$$

В основе численного решения интегрального уравнения (2.1) лежит метод механических квадратур [17, 20]. Для его реализации контур выработки (область L_b) разбивается на N_b элементов (граничных элементов), а контур предельно напряженной зоны (область L_{op}) на N_p элементов. Далее производится нумерация центров тяжестей этих элементов от 1 до N $(N_b + N_p)$ и замена интеграла в уравнении суммой. Произвольная точка Q_O контура области обозначается через i, а точка M_O – через k. Тогда уравнение (2.1) в компонентной форме принимает вид

$$\frac{1}{2}a_{q_i} - \sum_{\substack{j=1\\k\neq i}}^{N} \Phi_{qm_{ik}} a_{m_k} \Delta L_k = \left(\sigma_{e.qm_i} n_{q_i} - f_{q_i}\right)\left(i = 1, N_b\right) + \\ + \left(\sigma_{e.qm_i} - \sigma_{p.qm_i}\right) n_{q_i} \left(i = 1, N_p\right) \tag{2.2}$$

В уравнении (2.2) ΔL_k – размер k-го участка контура границы области интегрирования (размер граничного элемента); $\Delta L_k = \Delta L_{bk}$ при $k = 1,\ldots,N_b$, $\Delta L_k = \Delta L_{pk}$ при $k = 1,\ldots,N_p$.

Интегрирование выражения (2.2) по каждому элементу при условии, что $\sigma_{e.qm}$, $\sigma_{p.qm} f_q$, a_q постоянны в пределах каждого из них [17, 19], приводит к векторному уравнению

$$\frac{1}{2}A_{q_i} - \sum_{\substack{j=1\\k\neq i}}^{N} \Phi_{qm_{ik}} A_{m_k} \Delta L_i = \left(t_{e.qm_i} n_{q_i} - F_{q_i}\right)\left(i = 1, N_b\right) + \\ + \left(t_{e.qm_i} - t_{p.qm_i}\right) n_{q_i} \left(i = 1, N_p\right) \tag{2.3}$$

Входящие в уравнение (2.3) величины обозначают результирующие усилия, приложенные в центрах граничных элементов:

$$A_{q_i} = a_{q_i}\Delta L_i, \quad A_{m_k} = a_{m_k}\Delta L_k$$

$$t_{e.qm_i} = \sigma_{e.qm_i}\Delta L_{b_i}\left(i = 1, N_b\right), \quad t_{e.qm_i} = \sigma_{e.qm_i}\Delta L_{p_i}\left(i = 1, N_p\right)$$

$$F_{q_i} = f_{q_i}\Delta L_{b_i}\left(i = 1, N_b\right), \quad F_{q_i} = f_{q_i}\Delta L_{p_i}\left(i = 1, N_p\right)$$

Векторному уравнению (2.3) соответствуют два уравнения относительно координат этого вектора, и для их определения следует решить систему алгебраических уравнений $2(N_b + N_p) \times 2(N_b + N_p)$.

После решения системы уравнений напряжения в произвольной точке j массива определяются суммированием напряжений от действия фиктивной нагрузки и напряжений исходного гравитационного поля напряжений:

$$\sigma_{qm_j} = \sigma_{qmt_{jk}} A_{tk} + \sigma_{e.qm_j}, \tag{2.4}$$

где σ_{qmt} – компоненты фундаментального тензора третьего ранга, являющегося решением задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы на бесконечную среду [16, 17, 21].

В разрешающих уравнениях (2.1), (2.3) сформулированной задачи кроме неизвестной интенсивности фиктивной нагрузки неизвестным остается также и суммарный размер предельно напряженной, входящей в область интегрирования L уравнения (2.1). Эти неизвестные находятся в ходе реализации итерационной процедуры метода последовательных приближений, реализованной ранее [18, 19].

Описанный выше подход к решению задач о геомеханическом состоянии без учета предельно напряженных зон применялся в оценке геомеханического состояния анизотропного массива, вмещающего выработки, причем задачи решались как в двумерной постановке [22], так и в трехмерной [23, 24].

2.3. Задача о распространении трещины гидроразрыва в окрестности пластовой выработки и последовательность ее решения. Известно, что при теоретическом анализе проблемы прочности и распространения трещин в твердых деформируемых телах при квазистатических процессах используется уравнение Ирвина [25–27]

$$k_n^2 + k_t^2 = \frac{E \cdot \Gamma}{1 - \mu^2} = K_{1C}^2, \tag{2.5}$$

где k_n, k_t – коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные действием нормальной (расклинивающей) p_n и касательной p_t нагрузок на берегах трещины; E – модуль продольной упругости, а μ, как и ранее, – коэффициент Пуассона пород массива. Γ – плотность энергии разрушения материала, необходимой для образования единицы поверхности, K_{1C} – коэффициент трещиностойкости материала (справочные данные для некоторых типов горных пород приведены в [28]).

Для определения давления жидкости, при котором происходит рост трещины на определенную (заданную) величину, необходимо учесть тот факт, что приращение трещины происходит значительно быстрее, чем его заполнение жидкостью. Таким образом, пока жидкость занимает часть трещины длиной $2b$, сама длина трещины стала равна $2a = 2(b + \Delta l)$.

Существует несколько методов определения коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещины, находящейся в плоскости с "удаленными" границами, в которой поле напряжений неоднородное. Если трещина мала по сравнению с размерами плоскости и располагается внутри нее, то в качестве одного из вариантов вычисления коэффициента интенсивности напряжений могут быть взяты соотношения из [25–27]

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-b}^{b} p \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p_n \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} d\xi \tag{2.6}$$

$$k_t = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p_t \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} d\xi \tag{2.7}$$

В выражениях (2.6), (2.7) функция p_n равна напряжению, которое было бы перпендикулярным плоскости трещины, если бы она была закрыта; следовательно, напряжение находится аналитически или численно для тела без трещины. Аналогично может быть определен коэффициент интенсивности напряжений от касательного напряжения p_t.

При постоянных значениях p_n, p_t выражения для k_n, k_t после интегрирования принимают следующий вид

$$k_n = \frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} - p_n \sqrt{\pi a}, \quad k_t = p_t \sqrt{\pi a} \tag{2.8}$$

После подстановки k_n и k_t в уравнение (2.5) значение внутреннего давления в трещине, соответствующее ее продвижению на заданную величину Δl, принимает следующий вид

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}} \left(p_n + \sqrt{\frac{E \cdot \Gamma}{\pi a \left(1 - \mu^2\right)} - p_t^2} \right) \tag{2.9}$$

Значение $p_{\text{кр}}$, определяемое зависимостью (2.9), называется критическим давлением ("трещинодвижущей" силой) и оно соответствует устойчивому росту трещины [25].

Отклонения трещины от начального направления в изотропной среде следует ожидать при $k_t \neq 0$ [26, 27].

В этой связи направление продвижения трещины происходит под таким углом $\theta = \theta_c$ относительно начального ее положения, которое совпадает с направлением площадки с максимальным растягивающим напряжением. Известно, что по этой площадке отсутствует касательное напряжение, нормальное напряжение по ней является главным напряжением σ_3, а сама площадка называется главной площадкой.

Угол θ_c определяется из решения следующего тригонометрического уравнения относительно угла θ, отсчитываемого от направления трещины в момент ее “страгивания” [26, 27]

$$k_n\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+k_t\left(\cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2}\right)=0 \tag{2.10}$$

Входящие в уравнение (2.10) коэффициенты интенсивности k_n и k_t определяются согласно зависимостям (2.8), в которых нормальная и касательная нагрузки по поверхности трещины, связанные с компонентами поля напряжений (2.4), определяются по известным соотношениям напряжений по наклонным площадкам

$$p_n=\frac{\sigma_z+\sigma_y}{2}+\left(\frac{\sigma_z-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta+\tau_{yz}\sin 2\theta \tag{2.11}$$

$$p_t=\left(\frac{\sigma_z-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta+\tau_{yz}\cos 2\theta \tag{2.12}$$

Следовательно, в окрестности выработки, где поле напряжений в массиве неоднородно, трещина в общем случае распространяется не прямолинейно. С каждым новым приращением длины (циклом роста), она меняет и свое направление.

Поскольку трещина распространяется в неоднородном поле напряжений, то напряжения p_n и p_t на ее берегах в двух ее развивающихся направлениях будут различны.

Для трещины, распространяющейся прямолинейно, интегралы в выражениях (2.6), (2.7) следует представить суммой интегралов по каждому отдельному направлению

$$J_1=\int_{-a}^{a}p_n\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi=\int_{-a}^{0}p1_n\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi+\int_{0}^{a}p2_n\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi \tag{2.13}$$

$$J_2=\int_{-a}^{a}p_t\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi=\int_{-a}^{0}p1_t\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi+\int_{0}^{a}p2_t\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi \tag{2.14}$$

В выражениях (2.13), (2.14) $p1_n$, $p1_t$, $p2_n$, $p2_t$ — напряжения на поверхности трещины по разные стороны от середины, причем, $p1_n$, $p1_t$ — напряжения на левой ее ветви, а $p2_n$, $p2_t$ — на правой.

При j циклах трещина представляет собой ломаную линию в виде совокупности прямолинейных отрезков, в пределах которых напряжения p_n и p_t приняты постоянными величинами.

Если эта линия незначительно отклонятся от прямой линии, выражения (2.13), (2.14) можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered}J_1=\int_{-a}^{0}p1_n\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi+\int_{0}^{a}p2_n\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}d\xi=\\=\sum_{i=1}^{j}\int_{-\Delta l_i}^{0}p1_n\sqrt{\frac{\Delta l_i+\xi}{\Delta l_i-\xi}}d\xi+\sum_{i=1}^{j}\int_{0}^{\Delta l_i}p2_n\sqrt{\frac{\Delta l_i+\xi}{\Delta l_i-\xi}}d\xi,\end{gathered} \tag{2.15}$$

где Δl_i — длина i-го участка (отрезка) трещины (приращение трещины).

После интегрирования выражения (2.15)

$$J_1 = \sum_{i=1}^{j}\left[\pi\left(\frac{p1_{n_i} + p2_{n_i}}{2}\right) + \left(p2_{n_i} - p1_{n_i}\right)\right]\Delta l_i \tag{2.16}$$

Аналогично интегрируется выражение (2.14)

$$J_2 = \sum_{i=1}^{j}\left[\pi\left(\frac{p1_{t_i} + p2_{t_i}}{2}\right) + \left(p2_{t_i} - p1_{t_i}\right)\right]\Delta l_i \tag{2.17}$$

С учетом (2.16), (2.17) выражения интенсивности напряжений для трещины с несколькими участками принимают следующий вид

$$k_n = \frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{J_1}{\sqrt{\pi a}}, \quad k_t = \frac{J_2}{\sqrt{\pi a}} \tag{2.18}$$

После подстановки зависимостей (2.15) в выражение (2.5) и преобразования из него может быть получено выражение для критического давления для трещины с числом участков, равным j

$$p_{kp} = \frac{\pi}{2a\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}}\left(J_1 + \sqrt{\frac{E\Gamma a}{\pi(1 - \mu^2)} - J_2^2}\right) \tag{2.19}$$

В выражениях (2.9), (2.13)–(2.19)

$$a = a_j, \quad b = b_j = a_j - \Delta l_j$$

Условием, соответствующим началу развития зародышевой трещины, ее “страгивания” является условие превышения коэффициентом интенсивности k_n значения коэффициента трещиностойкости k_{1C}. У кончика зародышевой трещины k_n определяется по формуле

$$k_n = p\sqrt{\pi b_{tr}}F_{tr},$$

где F_{tr} – коэффициент, зависящий от условий нагружения тела с круговым отверстием, содержащим трещину [27].

Для зародышевых трещин, расположенных на противоположных концах диаметра скважины, коэффициент F_{tr} зависит от размера b_{tr} и диаметром скважины [27].

Очевидно также, что развитие трещины гидроразрыва возможно, если давление жидкости p, подаваемое по скважине в трещину, превысит критическое давление, определяемое по формуле (2.19). При этом его минимальное значение соответствует случаю равенства величин a и b, т.е. началу “страгивания” трещины. Из выражения (2.19) получаем

$$p_{\text{кр.min}} = \frac{1}{b}\left[J_1 + \sqrt{\frac{E\Gamma b}{\pi(1 - \mu^2)} - J_2^2}\right] \tag{2.20}$$

Коэффициенты интенсивности напряжений k_n и k_t при этом определяются по следующим формулам, вытекающим из выражения (2.18)

$$k_n = p_{\text{кр.min}}\sqrt{\pi b} - \frac{J_1}{\sqrt{\pi b}}, \quad k_t = \frac{J_2}{\sqrt{\pi b}} \tag{2.21}$$

Очевидно, что для осуществления процедуры гидроразрыва необходим предварительный выбор насосного оборудования. В первую очередь это касается его характеристики напора p_0.

При выполнении гидроразрыва прочных пород, вмещающих угольный пласт, как правило, используют насосные установки с жесткими характеристиками напор p_0, расход жидкости в единицу времени Q. К установкам с жесткими характеристиками относят насосы, у которых один из параметров Q практически не меняется при изменении другого p_0. Такие характеристики обеспечивают насосы поршневого или плунжерного типов.

В процессе гидроразрыва необходимо учитывать изменение давления жидкости при прохождении ее по трещине, обусловленное динамической вязкостью η и параметрами самой трещины: раскрытием w перед очередным циклом прорастания и ее длиной.

Градиент давления (падение давления) вдоль направления распространения трещины и расход вязкой жидкости при ламинарном движении в плоском канале связан известным законом Пуазейля [5, 10]

$$Q = -\frac{1}{3\eta} w^3 \frac{\partial p}{\partial l}, \tag{2.22}$$

в котором раскрытие трещины определяется по формуле [29]

$$w = \frac{4(1-\mu^2)}{E}(p - p_n)\sqrt{a^2 - x_{tr}^2}, \tag{2.23}$$

где x_{tr} — абсцисса, отсчитываемая от середины трещины вдоль ее оси l.

Замена градиента давления в соотношении (2.22) конечноразностным выражением через конечное давление p_1 и начальное p_0 на некотором интервале Δl по формуле

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{p_1 - p_0}{l_1 - l_0} = \frac{p_1 - p_0}{\Delta l} \tag{2.24}$$

позволяет выразить конечное давление на интервале приращения трещины через начальное давление и ряд других параметров: трещины, жидкости и окружающего породного массива. Так, например, для участка j растущей трещины из формулы (2.24) следует выражение давления в виде

$$p_j = p_{j-1} - \frac{3Q\eta}{w_j^3}\Delta l_j \tag{2.25}$$

Процесс образования и развития трещины может быть представлен двумя этапами. На первом этапе развитие трещины происходит при постепенном повышении давления жидкости, начиная с нуля. Достигнув значения $p_{\text{кр.min}}$, определяемого по формуле (2.20), трещина “страгивается”, при этом направление ее движения совпадает с направлением зародышевой трещины, поскольку на ее кончике действует только давление жидкости. При дальнейшем увеличении давления на Δp до некоторого текущего значения p трещина должна увеличить свой размер на Δl. Это приращение может быть найдено из решения трансцендентного уравнения

$$p - \frac{\pi}{2a\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}}\left(J_1 + \sqrt{\frac{E\Gamma a}{\pi(1-\mu^2)} - J_2^2}\right) = 0, \tag{2.26}$$

в котором второе слагаемое является значением критического давления, определяемого формулой (2.19) и соответствующим росту трещины. В этом уравнении значение b следует положить равным b_{tr} и после этого найти величину a. Его решение может производиться последовательными приближениями, например, увеличивая на каждом шаге итерации размер a на малую величину до тех пор, пока не будет выполнено условие (2.26). Приращение Δl определится как разность между конечной величиной a итерационного процесса и значением $b = b_{tr}$. После этого по формуле (2.23) вычисляется значение w, в котором x_{tr} следует положить, равным b_{tr}. Затем по формуле (2.25) вычисляется новое значение p, к нему добавляется очередное приращение давления Δp и начинается новый цикл первого этапа расчета трещины.

На новом цикле размер b становится равным размеру a предыдущего цикла. По формулам (2.4) вычисляются компоненты напряжений на участке приращения трещины, а по формулам (2.11), (2.12) определяются компоненты p_n и p_t, в которых $\theta = \theta_{tr}$. Далее в ходе итерационного процесса решения уравнения (2.26) определяются параметры a, b. Затем по формуле (2.23) вычисляется параметр w, в котором абсцисса x_{tr} равна значению b этого цикла. Далее по формуле (2.25) вычисляется p, потом к нему добавляется Δp, по формулам (4) компоненты напряжений, а по формулам (2.11), (2.12) определяются компоненты p_n и p_t.

Следующий цикл начинается с присвоения новому значению b значения a предыдущего этапа. Затем по формулам (2.21), в которых $p_{\text{кр.min}}$ полагается равным давлению p, вычисленному в конце предыдущего цикла, находятся k_n, k_t и подставляются в уравнение (2.10), из решения которого определяется угол θ между направлением трещины предыдущего цикла и новым направлением. Далее методом последовательных приближений решается уравнение (26) и определяется размер a, затем вычисляются параметры w, p, p_n, p_t, k_n, k_t, θ. Следующие циклы расчета трещины реализуются аналогично. Процесс счета продолжается до тех пор, пока давление жидкости в системе не достигнет своего конечного значения p_0, определяемого техническими характеристиками насосного оборудования.

Второй этап расчета трещины соответствует росту трещины при $p = p_0$. К этому моменту ее полудлина сравнима с радиусом скважины. В этом случае вполне правомерна замена отверстия трещиной и тогда ее полудлиной считается сумма полудлины трещины, полученной на первом этапе роста, и значение радиуса скважины [27]. А коэффициент F_{tr} следует принять равным единице.

Циклы второго этапа выполняются таким же образом, как и циклы первого этапа, но следует учесть, что на втором этапе прироста давления Δp нет.

Рост трещины прекращается в том случае, если давление в ней стало меньше напряжений в нетронутом массиве (на бесконечности), либо в случае прекращения подачи жидкости в трещину, ограничившись определенным числом циклов.

В ранее опубликованных работах автора [31, 32] была разработана модель распространения трещины, в которой механизм развития трещины принимался следующим. При достижении нагнетаемой жидкостью давления, определяемого формулой (2.20), трещина, полудлина которой b принимается равной сумме радиуса скважины и ширине пропила, находится в неустойчивом равновесии и для ее прорастания на Δl необходимо повысить давление до значения $p_{\text{кр}}$, вычисляемого по формуле (2.19). Тогда ее край скачком переместится в соседнюю точку. При этом направление скачка (угол $\theta = \theta_1$) определяется из решения уравнения (2.10), в котором k_n, k_t определяются по формулам (2.21). Новое направление трещины составит с горизонтом угол $\theta_2 = \theta_{tr} + \theta_1$. Для прорастания трещины еще на величину Δl давление жидкости также должно определяться по формуле (2.19), в которой $a = b + 2\Delta l$, а $b = b + \Delta l$. Новое направление скачка (угол θ_3) находится из решения уравнения (2.10), в котором k_n, k_t находятся снова по формулам (2.21), но уже с учетом нового значения b. Таким образом, давление жидкости в трещине в процессе ее роста изменяется между значениями кри-

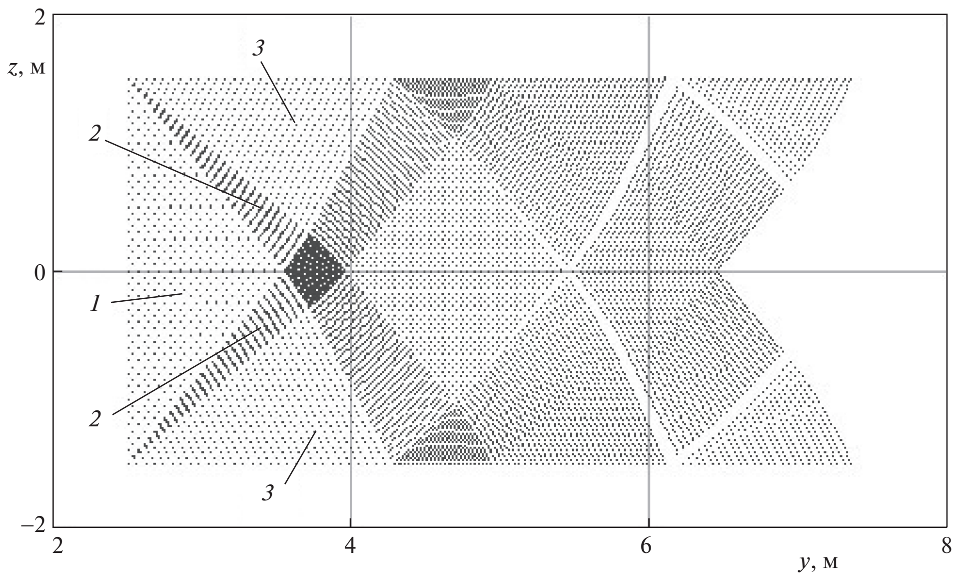


Рис. 2

тического давления, определяемого формулами (2.20) и (2.19). Следующие циклы в развитии трещины повторяются по описанному алгоритму.

Изложенный подход при расчете траектории трещины имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, в нем не учитываются характеристики жидкости. Во-вторых, не входят параметры насосного оборудования. В-третьих, величина прорастания трещины принята постоянной величиной.

Разработанная и представленная в статье модель лишена отмеченных недостатков, и она наиболее полно отражает механизм развития трещины гидроразрыва.

3. Анализ полученных результатов. В рамках рассматриваемой модели проведен вычислительный эксперимент, за исходные данные в котором приняты следующие параметры массива, выработки и зародышевой трещины: $\lambda = 1$, $\gamma = 25$ кН/м^3, $K = 0$, $\rho = 20°$, $\rho' = 10°$, $\sigma_0 = 10$ МПа, $K_{1C} = 1.66$ МПа м$^{1/2}$ ($\Gamma = 12.92 \times 10^{-5}$ МПа м), $b_v = 5$ м, $h_v = 3$ м, $f = 2$ кН/м^2, $r_{sk} = 0.021$ м, $b_{tr} = 0.008$ м, $\eta = 13.04 \times 10^{-10}$ МПа с, $\theta_{tr} = -30°$, $y_{sk} = 3$ м, $z_{sk} = 10$ м, $Q = 0.005$ м^3/с. Другие параметры в ходе вычислений изменялись.

На рис. 2 представлена компьютерная модель сетки линий скольжения в предельно напряженной зоне состояния угольного пласта, полученная по результатам численного решения задачи о состоянии пласта на основе общего и специального критериев предельного состояния. На этом рисунке участок *1* – зона выпирания, участки *2* – зоны Прандтля, а участки *3* являются областями, в которых выполняются специальные условия предельного состояния. Линии скольжения и распределение напряжений в них могут быть получены в аналитическом виде. При этом зона *1* построена по результатам решения первой, а зоны Прандтля построены по результатам решения второй краевых задач предельного состояния. Линии скольжения на остальных участках построены в ходе численного решения третьей краевой задачи предельного состояния.

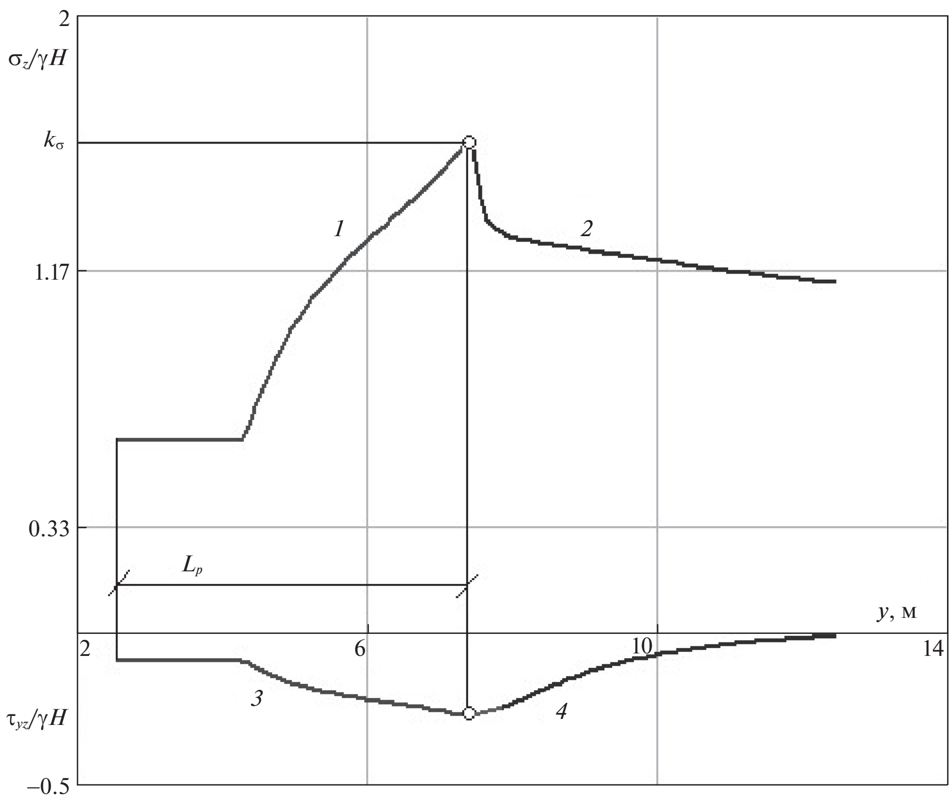
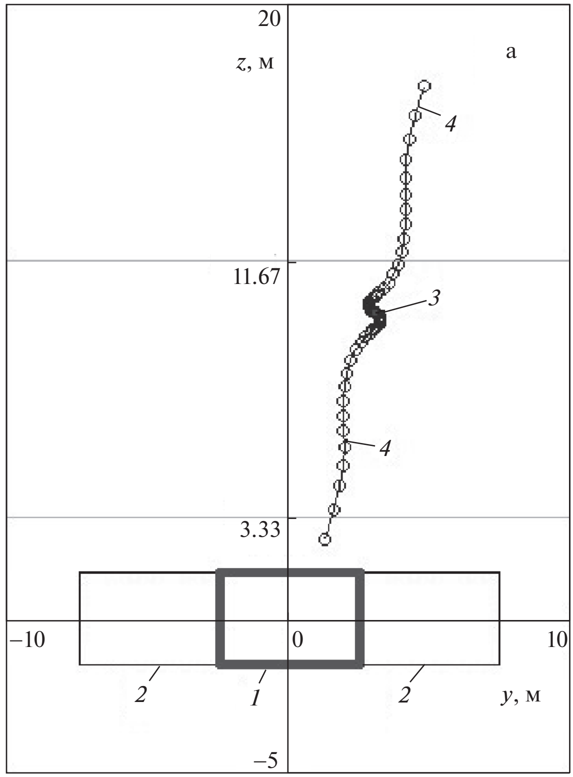


Рис. 3

На рис. 3 графики *1–4* представляют собой эпюры напряжений σ_z и τ_{yz}, построенные при $H = 800$ м в кровле пласта (вдоль линии *APB* на рис. 1) в предельно напряженной зоне (графики 1, 3) и в упругой области (графики 2, 4). Графики в предельной зоне построены путем аппроксимации полиномами графиков, поученных в результате численного решения краевых задач предельного состояния для ряда участков этой зоны. Из анализа графиков вытекает, что значения напряжений в упругой области и предельно напряженной зоне совпадают на их границе в точке P (рис. 1), абсцисса которой равна размеру $b_v/2 + L_p$, а ординатой является значение σ_z на границе предельной и упругой областей (в точке P на рис. 1). Отнесенная к γH она равна коэффициенту концентрации напряжений k_σ. Из графиков следует, что размер предельно наряженной зоны составляет $L_p = 4.9$ м, а коэффициент концентрации $k_\sigma = 1.582$.

На рис. 4а показана траектория трещины гидроразрыва, построенная в окрестности этой выработки. Давление жидкости в скважине p_0 составляет 30 МПа. Кружками на траектории показаны номера циклов ее роста. Цифрой *1* обозначена выработка, цифрой *2* – предельно напряженные зоны, *3* – зародышевая трещина, *4* – ветви траектории трещины.

Как следует из рисунка, при данных горнотехнических параметрах траектория трещины не совпадает с направлением зародышевой трещины, а очень существенно отклоняется от его направления, стремясь проникнуть в кровлю выработки по кратчай-



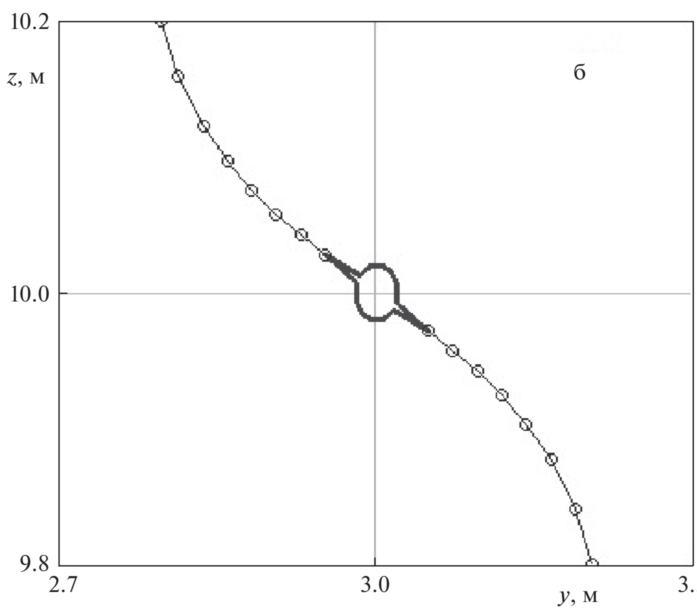


Рис. 4

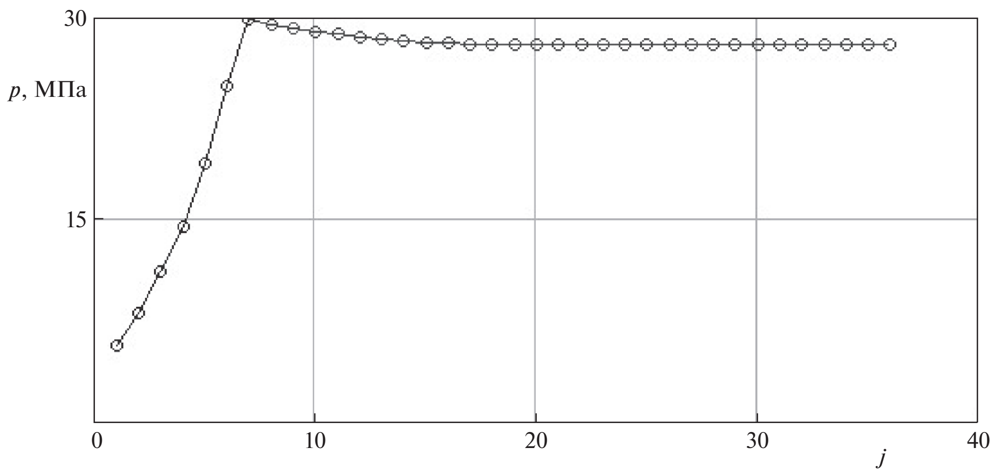


Рис. 5

шему расстоянию. На рис. 4б показана часть траектории, примыкающая к скважине при первых семи циклах ее роста. Из этих рисунков следует, что траектория трещины представляет собой кривую линию, довольно сильно изменяющую направление зародышевой трещины в начале своего развития.

На рис. 5 построен график изменения давления в трещине в зависимости от числа циклов при ее прорастании. Кружки на графике также как и на рис. 4 соответствуют номерам циклов. Из рисунка следует, что рост трещины происходит в два этапа. На первом этапе рост начинается с давления $p_{\text{кр. min}} = 5.72$ МПа, и за семь циклов давление достигает значения $p_0 = 30$ МПа, при этом полудлина трещины прорастает до 0.0158 м. На втором этапе ее развитие сопровождается падением давления за счет вязкости жидкости. Из рисунка следует, что общее число циклов при росте полудлины трещины до 8.02 м составляет 36 циклов, а давление на конечном этапе снизилось до 28 МПа. Как показывают результаты вычислительного эксперимента, предельное давление p_0 на глубине 800 м, меньше которого рост трещины не происходит, составляет 28 МПа.

На рис. 6–8 показаны траектории трещины гидроразрыва, построенные при других глубинах заложения выработки и давлении $p_0 = 30$ МПа. Цифры на них обозначают те же объекты, что и на рис. 4а.

На рис. 6 расчеты произведены для глубины $H = 700$ м. Видно, что траектория трещины изменяется плавно, но, как и в предыдущем случае, значительно изменяет первоначальное направление на начальных циклах роста, хотя и менее круто по сравнению с рис. 4а, и она также стремится к контуру выработки. Ее полудлина достигает значения 9.7 м за 27 циклов, а расчеты показывают, что конечное давление составляет 29 МПа, снизившись в процессе роста трещины на 1 МПа.

На рис. 7 траектория трещины гидроразрыва построена около выработки, расположенной на глубине $H = 600$ м. Она также криволинейна, но изменяет свое первоначальное направление более плавно и не так круто как в предыдущих двух случаях. Конечной точкой трещины оказывается точка на контакте массива с пластом в его предельно напряженной зоне. Ее полудлина 9.1 м, и она достигает этого значения за 23 цикла.

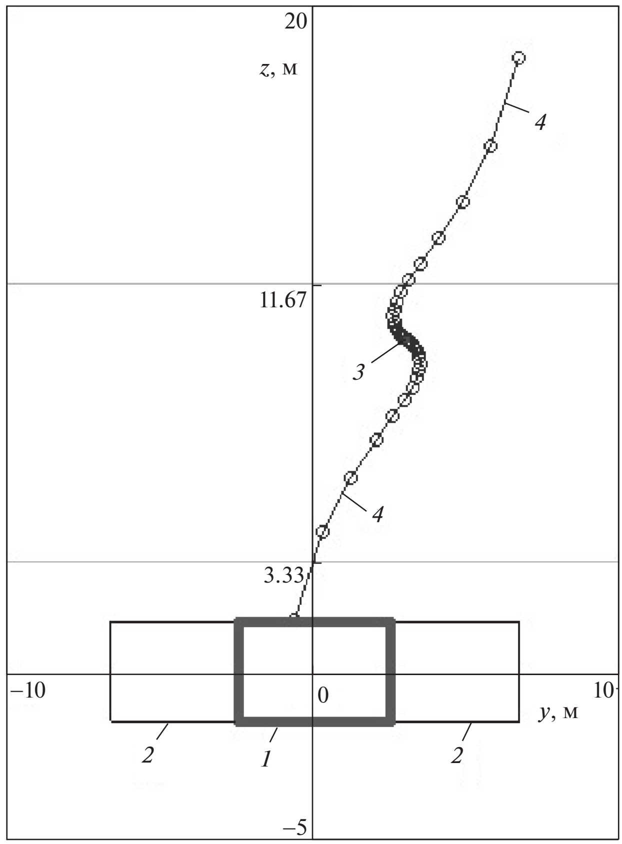


Рис. 6

Для оценки результатов по расчету траектории трещины со значительным изменением исходного положения произведен их сравнительный анализ с результатами решения классической задачи, в которой трещина криволинейна. В качестве такой задачи выбрана задача о коэффициентах интенсивности напряжений около дугообразной трещины, расположенной в плоскости, нагруженной равнокомпонентным полем напряжений. Крайние радиальные сечения трещины образуют угол 2α [30].

В этой связи участки траектории на рис. 4а, 6 и 7, на которых происходит существенное отклонение от направления зародышевой трещины, приняты дугами окружностей разных радиусов.

Из результатов расчета, по которым построен рис. 4а, следует, что трещина за первые восемь циклов второго этапа своего развития изменяет на сто сорок градусов исходное направление на полудлине в 0.739 м. Эта полудлина по принятому допущению соответствует дуге окружности, радиус которой получается равным 0.302 м.

При угле $2\alpha = 140°$ и напряжении на сторонах плоскости в 20 МПа коэффициенты интенсивности напряжений, подсчитанные по аналитическим формулам с дугообразной трещиной [30], равны: $k_n = 11.648$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 8.156$ МПа м$^{1/2}$. Эти же коэффициенты, полученные с помощью формул (2.15), принимают значения: $k_n = 21.533$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 0$. Как видно, разница в результатах значительна. Следовательно эффект кривиз-

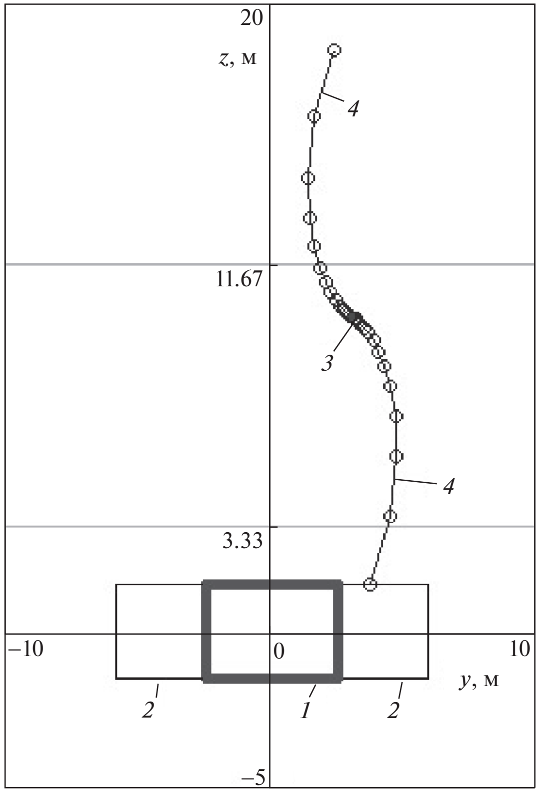


Рис. 7

ны трещины существенно сказывается на результаты расчета интенсивности напряжений.

Для участка трещины гидроразрыва длиной 0.739 м, показанной на рис. 4а, рассчитанные коэффициенты интенсивности напряжений принимают следующие значения: $k_n = 14.314$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 0.667$ МПа м$^{1/2}$. Если предположить, что реальное соотношение между коэффициентами k_n, k_t у гидротрещины будет такого же порядка, как и в примере с дугообразной трещиной в равнокомпонентном поле напряжений, то полученные с помощью формул (2.15) значения коэффициентов интенсивности напряжений, далеки от их реальных значений. В связи с этим, и картина развития трещины на рис. 4а скорее всего не соответствует действительности.

Из результатов расчета графика на рис. 6, следует, что трещина за двенадцать циклов изменяет на угол $2\alpha = 67°$ свое исходное направление на полудлине в 1.289 м, соответствующей дуге окружности радиуса 1.102 м. Рассчитанные коэффициенты интенсивности напряжений принимают следующие значения: $k_n = 21.002$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 3.946$ МПа м$^{1/2}$. Коэффициенты интенсивности напряжений, подсчитанные по аналитическим формулам с дугообразной трещиной [30], получаются равными $k_n = 24.447$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 7.358$ МПа м$^{1/2}$. Видно, что значения коэффициента k_t и в этом случае значительно отличаются друг от друга.

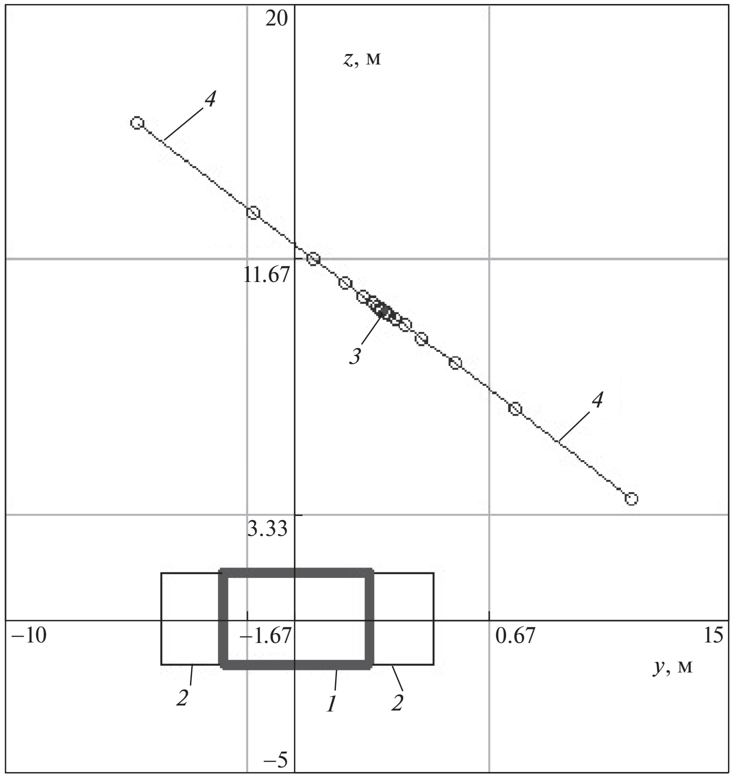


Рис. 8

Из результатов расчета графика на рис. 7, следует, что трещина за четырнадцать циклов изменяет на угол $2\alpha = 58°$ свое исходное направление на полудлине в 6.875 м, соответствующей дуге окружности радиуса 6.792 м. Рассчитанные коэффициенты интенсивности напряжений принимают следующие значения: $k_n = 55.581$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 9.161$ МПа м$^{1/2}$. Коэффициенты интенсивности напряжений, подсчитанные по аналитическим формулам с дугообразной трещиной [30], получаются равными $k_n = 58.602$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 15.155$ МПа м$^{1/2}$. В этом случае значения коэффициентов k_n отличаются друг от друга в пределах шести процентов, тогда как значения k_t, по-прежнему, далеки друг от друга.

Таким образом, в расчетах траектории трещины, существенно меняющей свое направление на начальном этапе развития, формулы (2.15), не учитывающие эффекта кривизны трещины, значительно искажают результаты и для расчета не пригодны.

На рис. 8 траектория трещины построена около выработки, расположенной на глубине 400 м. Из рисунка следует, что трещина распространяется практически прямолинейно и ее траектория совпадает с направлением зародышевой трещины. Полудлина трещины равна 10.5 м и соответствует 16 циклам, при этом давление в трещине уменьшается незначительно, всего на 0.04 МПа. Трещина на четырех первых циклах изменила исходное направление на угол $\alpha = 3.2°$. При этом ее полудлина составляет 0.836 м, а соответствующий ей радиус равен 14.969 м. Коэффициенты интенсивности равны: $k_n = 24.639$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 0.35$ МПа м$^{1/2}$. Коэффициенты интенсивности напряжений,

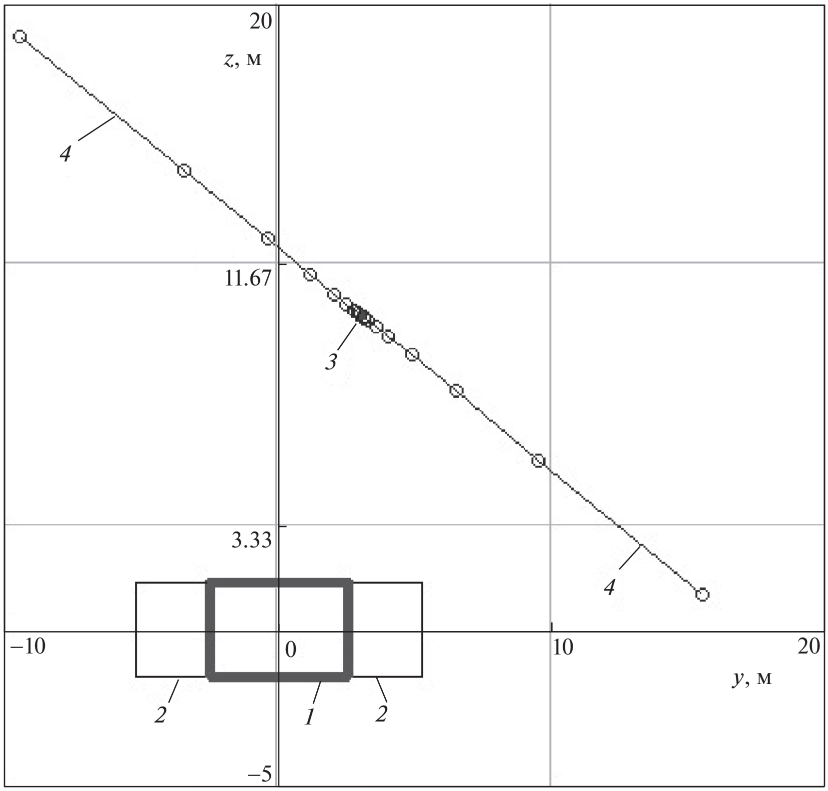


Рис. 9

вычисленные по формулам для дугообразной трещины [30], получаются равными $k_n = 22.911$ МПа м$^{1/2}$, $k_t = 0.32$ МПа м$^{1/2}$. Сравнение результатов показывает их незначительное расхождение, а потому подтверждает пригодность формул (2.15) для случаев развития трещины с малыми отклонениями исходного состояния.

Из рис. 8 следует, что при прямолинейном распространении трещины отношение давления жидкости p_0 к гравитационному давлению γH равно трем. Исходя из этого факта, можно предположить, что при других значениях p_0 и γH прямолинейному росту трещины также соответствует $p_0/\gamma H = 3$.

В этой связи ниже на рис. 9, 10 представлены результаты расчетов трещины гидроразрыва для ряда глубин H и значений давления p_0, в которых $p_0/\gamma H = 3$. Число циклов роста трещины, как и в предыдущем случае, принято равным девяти. Цифры на них обозначают те же объекты, что и на предыдущих рисунках, на которых изображены траектории трещин.

На рис. 9 показана траектория трещины гидроразрыва, распространяющейся около выработки, расположенной на глубине 500 м. Давление жидкости в скважине составляет 37.5 МПа, что в три раза выше гравитационного. Траектория трещины практически прямолинейна, и ее полудлина составляет 15.3 м.

На рис. 10 траектория трещины, растущая вблизи выработки, построена на глубине 800 м и давлении жидкости в скважине, равном 60 МПа. Соотношение $p_0/\gamma H = 3$ так-

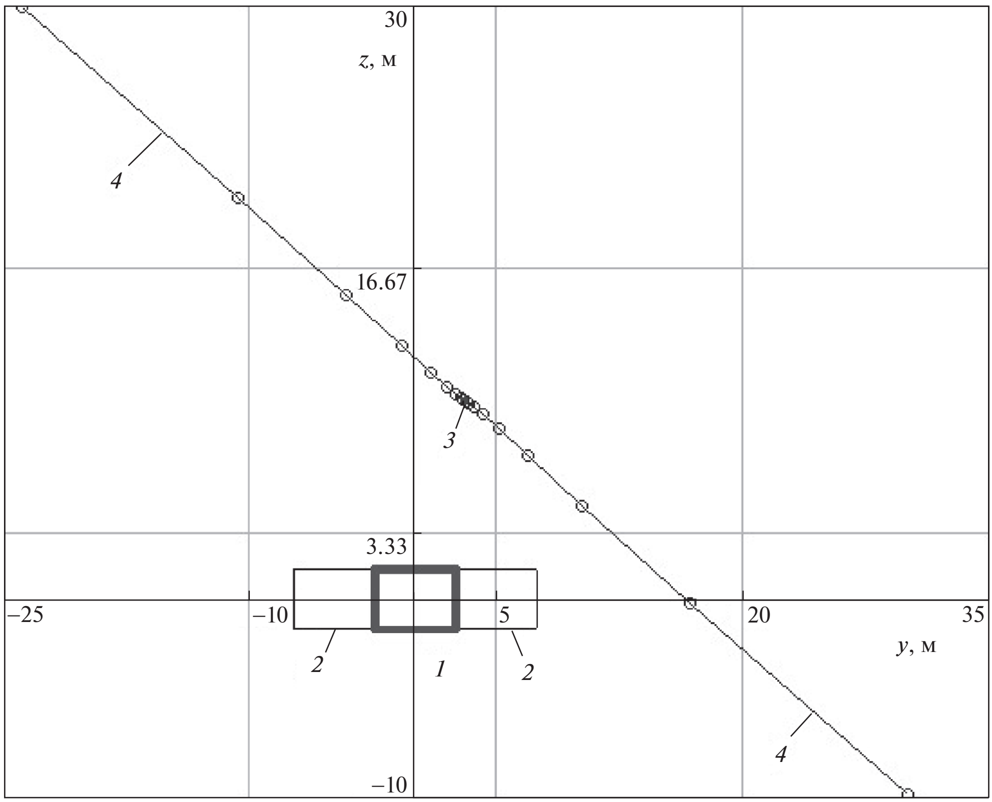


Рис. 10

же равно трем, и трещина распространяется прямолинейно, достигая при заданном числе циклов полудлины 33.5 м.

На рис. 11 построены графики изменения полудлины трещины a в зависимости от числа циклов ее роста j для траекторий, представленных на рис. 9, 10. Из анализа графиков следует, что, во-первых, они нелинейны, во-вторых, на последних циклах их значения резко возрастают. Как показывает анализ роста трещины, изменение ее полудлины с увеличением числа циклов довольно точно описывается показательной функцией

$$a_j = b_{tr}\left(\frac{a_N}{b_{tr}}\right)^{j/N},$$

где N — конечное число циклов, a_N — конечная полудлина трещины.

Из сравнения графиков, представленных на рис. 8—10, следует, что при равных соотношениях $p_0/\gamma H = 3$ полудлины трещины на разных глубинах имеют разные величины. В этой связи проведена количественная оценка сравнения полудлин трещин, распространяющихся прямолинейно на разных глубинах.

В качестве показателя этой оценки на рис. 12 построен график изменения отношения полудлины трещины, распространяющейся вблизи выработки на глубине H, к этой глубине в зависимости от давления жидкости p_0, соответствующего прямолиней-

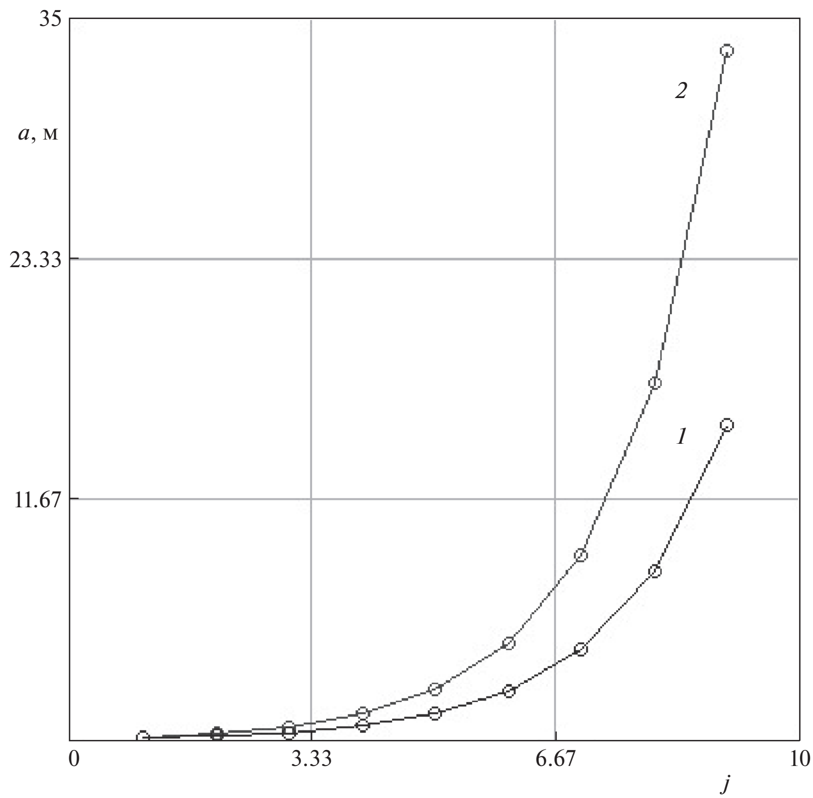


Рис. 11

ному росту трещины. Этот график имеет вид слабовыпуклой кривой, незначительно отличающейся от прямой линии. Кружки на графике соответствуют глубине H, равной 400 м, 500 м, 600 м, 700 м и 800 м.

Заключение. 1. Задача о геомеханическом состоянии массива горных пород, вмещающего выработку, пройденную по угольному пласту, сведена ко второй внешней краевой задаче теории упругости для интегрального сингулярного уравнения. Особенность этой задачи заключается в том, что в краевых частях выработки образуются предельно напряженные зоны пласта и их замена действующими в них напряжениями, найденными в ходе численного решения краевых задач теории предельного состояния, вполне может рассматриваться как краевая задача теории упругости. Решение интегрального уравнения получено методом механических квадратур и с помощью процедуры последовательных приближений. Поле напряжений построено на основе фундаментальных решений Кельвина.

2. Особенностью распространения трещины в массиве горных пород является неоднородное поле напряжений, обусловленное наличием выработки, расположенной вблизи трещины. Это поле играет важную роль в расчетах траектории распространения трещины, и при определенных условиях может существенно повлиять на траекторию трещины гидроразрыва.

3. Анализ полученных результатов показал:

а) принятое допущение об отсутствии влияния друг на друга интенсивности напряжений не всегда справедливо. Так, при отношении начального давления жидкости в

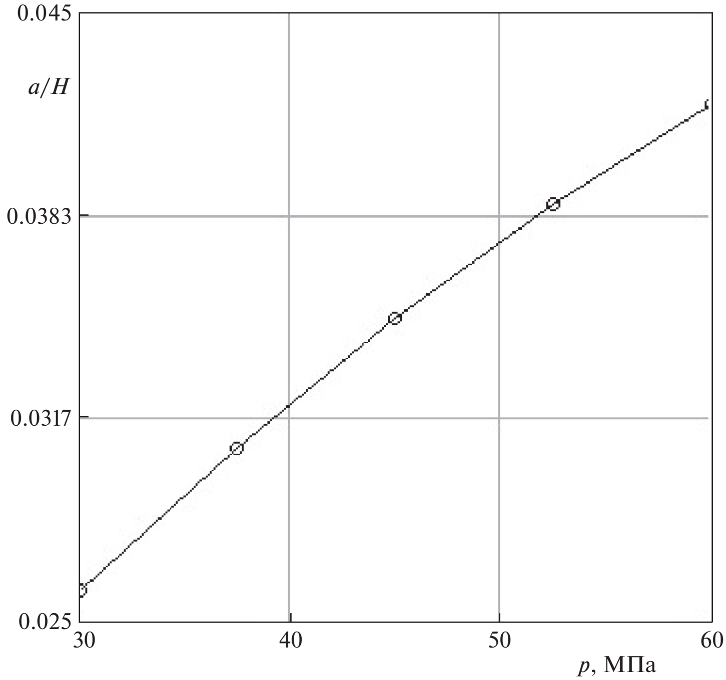


Рис. 12

скважине к величине гравитационного давления в массиве, равном 1.5, трещина гидроразрыва довольно резко меняет первоначальное направление. С ростом этого отношения траектория становится плавной, а ее направление в меньшей степени отклоняется от направления зародышевой трещины. В тех случаях, когда трещина на начальных этапах своего развития меняет свое первоначальное положение более чем на десять градусов, для расчета ее параметров необходимо использование зависимостей, учитывающих и компоненты неоднородного поля напряжений, и изменения формы и направления траектории. В этом случае задача существенно усложняется. Однако во многих случаях важно установить рациональные соотношения между соответствующими параметрами, обеспечивающими прямолинейное развитие трещины, и для расчета воспользоваться более простыми зависимостями.

б) при отношении начального давления жидкости в скважине к величине гравитационного давления в массиве, равном трем и более, траектория трещины практически прямолинейна, и она незначительно отклоняется от направления зародышевой трещины, а ее полудлина растет нелинейно, увеличиваясь по закону показательной функции;

в) при прямолинейном распространении трещины гидроразрыва давление жидкости оказывает большее влияние на ее длину, чем глубина расположения трещины. Изменение отношения полудлины трещины к глубине ее расположения с ростом давления жидкости происходит практически линейно.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-17-01143).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петухов И.М., Линьков А.М.* Механика горных ударов и выбросов. М.: Недра, 1983. 280 с.
2. *Фисенко Г.Л.* Предельные состояния горных пород вокруг выработок. М.: Недра, 1976. 272 с.
3. *Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В.* Основы механики горных пород. Ленинград: Недра, 1989. 488 с.
4. *Клишин В.И., Зворыгин Л.В., Лебедев А.В., Савченко А.В.* Проблемы безопасности и новые технологии подземной разработки угольных месторождений. Новосибирск: Новосибирский писатель, 2011. 524 с.
5. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 6. С. 3–41.
6. *Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С.* Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.
7. *Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М.* Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. № 1. С. 45–63.
8. *Мартынюк П.А.* Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2008. № 6. С. 19–29.
9. *Yan C., Zheng H.* A two-dimensional coupled hydro-mechanical finite-discrete model considering porous media flow simulating hydraulic fracturing // Intern. J. Rock Mech.&Mining Sci. 2016. № 88. P. 115–128.
10. *Теодорович Э.В., Трофимов А.А., Шумилин И.Д.* Форма плоской трещины гидроразрыва в упругой непроницаемой среде при различных скоростях закачки // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 4. С 109–118.
11. *Yoshioka K., Bourdin B.* A variational hydraulic fracturing model coupled to a reservoir simulator // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2016. № 88. P. 137–150.
12. *Binwei X., Xuan Z., Bin Y., Jinlong J.* Weakening effects of hydraulic fracture in hard roof under the influence of stress arch // Intern. J. Mining Sci. & Techn. 2018. № 28. P. 951–958.
13. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.
14. *Кузнецов Г.Н.* Предельные состояния твердых горных пород с учетом пространственной ориентировки поверхностей ослабления // Тр. ВНИМИ. 1961. № 43. С. 98–112.
15. *Черданцев Н.В.* Результаты численного решения уравнений предельного состояния краевой зоны пласта и их аппроксимация полиномами // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 6. С. 7–13.
16. *Лурье А.И.* Теория упругости, М.: Наука, 1970. 940 с.
17. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
18. *Черданцев Н.В., Черданцев С.В.* Разработка модели геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку // Безопасность труда в промышленности. 2014. № 11. С. 41–45.
19. *Черданцев Н.В., Черданцев С.В.* Анализ состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку и геологическое нарушение // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 110–121.
20. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Ленинград: Физматгиз, 1962. 708 с.
21. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
22. *Черданцев Н.В.* О некоторых условиях наступления предельного состояния кровли угольного пласта при его отработке очистной выработкой // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 5. С. 17–22.
23. *Черданцев С.В., Черданцев Н.В.* О влиянии предварительно обжатой пружины на зону нарушения сплошности вокруг цилиндрической полости // ПМТФ. 2005. № 3. С. 141–148.
24. *Черданцев Н.В., Преслер В.Т., Изаксон В.Ю.* Геомеханическое состояние анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности сопрягающихся выработок // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2010. № 2. С. 62–68.
25. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. 560 с.
26. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
27. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

28. *Баклашов И.В.* Основы геомеханики. М.: МГГУ, 2004. Т. 1. 208 с.
29. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 220 с.
30. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.
31. *Черданцев Н.В.* Об одном варианте расчета траектории движения трещины, нагруженной внутренним давлением, в кровле пластовой выработки // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 12. С. 5–10.
32. *Cherdantsev N.V.* Modelling the trajectory of a fracture that moves under the Influence of the fluid Pressure in hard rock roofs of In-seam working // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 206. P. 012005. https://doi.org/10.1088/1755-1315/206/1/012005.

One of the Approaches to the Construction of Trajectory of Hydraulic Fracturing in Rock Mass near Mine Working

N. V. Cherdantsev[#]

Federal Research Center of Coal and Coal Chemistry, SB RAS, Kemerovo, Russia
[#]*e-mail: nvch2014@yandex.ru*

For the effective application of the method of directional hydraulic fracturing of strong rocks, a model of the geomechanical state of the coal-bearing massif containing the formation and fractures. It is built on the basis of the basic provisions of the mechanics of the deformable solid and the linear mechanics of the Griffiths–Irwin fracture and implemented by the method of boundary integral equations. Within the framework of the model, a large-scale computational experiment was conducted for specific mining and geological conditions of a coal field. On the basis of the analysis of the results of the results revealed a number of features in the propagation of the crack.

Keywords: the rock massif, mine working, coal seam, the hydraulic fracture, strength criterion of Coulomb–Mohr, Griffiths–Irwin theory, method of boundary integral equations

REFERENCES

1. *Petukhov I.M., Linkov A.M.* The Mechanics of Rock Bursts and Discharges. Moscow: Nedra, 1983. 280 p. (in Russian)
2. *Fisenko G.L.* The State of Rocks around an Excavation. Moscow: Nedra, 1976. 272 p. (in Russian)
3. *Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kasparyan E.V.* Fundamentals of Rock Mechanics. Leningrad: Nedra, 1989. 488 p. (in Russian)
4. *Klishin V.I., Zvorygin Leonid V., Lebedev A.V., Savchenko A.V.* Security Issues and New Technologies of Underground Coal Mining. Novosibirsk: Novosibirskii pisatel, 2011, 524 c. (in Russian)
5. *Zheltov Y.P., Khristianovich S.A.* On the hydraulic break of a petroliferous layer // Izv. An SSSR. OTN, 1955, no. 6, pp. 3–41.
6. *Cherny S.G., Lapin V.N., Osipov D.V., Kurenkov D.S.* Methods for Modeling of Initiation and Propagation of Cracks. Novosibirsk: S.B. RAS Publ., 2016. 312 p. (in Russian)
7. *Zubkov V.V., Koshelev V.F., Linkov A.M.* Numerical modelling of hydraulic fracture initiation and development // J. Mining Sci., 2007, vol. 43, no. 1, pp. 40–56.
8. *Martynyuk P.A.* Features of hydraulic fracture growth in the compression field // J. Mining Sci., 2008, vol. 44, no. 6, pp. 544–553.
9. *Yan C., Zheng H.* A two-dimensional coupled hydro-mechanical finite-discrete model considering porous media flow simulating hydraulic fracturing // Intern. J. Rock Mech.&Mining Sci., 2016, no. 88, pp. 115–128.
10. *Teodorovich E.V., Trofimov A.A., Shumilin I.D.* Shape of a plane hydraulic fracture crack in an elastic impermeable medium at various injection rates // Fluid Dyn., 2011, vol. 46, no. 4, pp. 603–612.
11. *Yoshioka K., Bourdin B.* A variational hydraulic fracturing model coupled to a reservoir simulator // Intern. J. Rock Mech.&Mining Sci., 2016, no. 88, pp. 137–150.

12. *Binwei X., Xuan Z., Bin Y., Jinlong J.* Weakening effects of hydraulic fracture in hard roof under the influence of stress arch // Intern. J. Mining Sci.&Techn., 2018, no. 28, pp. 951–958.
13. *Sokolovsky V.V.* Loose Medium Statics. Moscow: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian)
14. *Kuznetsov G.N.* Limit state of solid rock, given the spatial orientation of the surfaces of easing // VNIMI, 1961, no. 43, pp. 98–112.
15. *Cherdantsev N.V.* the Results of numerical solution of the equations of limit state boundary formation areas and their approximation by polynomials // Labor Safety in Industry, 2019, no. 6, pp. 7–13.
16. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 940 p. (in Russian)
17. *Parton V.Z., Perlin P.I.* Methods of Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1981. 688c.
18. *Cherdantsev N.V., Cherdantsev S.V.* Development of a model of geomechanical state of coal-rock mass, containing mine working // Labour Safety in Industry, 2014, no. 11, pp. 41–45.
19. *Cherdantsev N.V., Cherdantsev S.V.* Analysis of the state for a coal massif in-seam working and a geological discontinuity // Mech. Sol., 2018, vol. 53, no. 2, pp. 211–220.
20. *Kantorovich L.V., Krylov V.I.* Approximate Methods of Higher Analysis // Moscow; Leningrad: Nauka, 1962. 708 p. (in Russian)
21. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
22. *Cherdantsev N.V.* On some conditions of the occurrence of the limit state of the roof of a coal seam when practicing the cleaning developm coy // Labor Safety in Industry, 2017, no. 5, pp. 17–22.
23. *Cherdantsev S.V., Cherdantsev N.V.* Effect of a precompressed spring on the discontinuity zone around a cylindrical cavity // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2005, vol. 46, no. 3, pp. 423–429.
24. *Cherdantsev N.V., Presler V.T., Isakson V.Yu.* Geomechanical state of strength-anisotropic rock mass in the vicinity of mating tunnels // J. Mining Sci., 2010, vol. 46, no. 2, pp. 143–148.
25. *Sedov L.I.* Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 560 p. (in Russian)
26. *Kachanov L.M.* Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1974. 312 p. (in Russian)
27. *Hellan K.* Introduction to Fracture Mechanics. Trondheim: Univ. Press, 1984. 376 p.
28. *Baklashov I.V.* Fundamentals of Geomechanics. Moscow: MSGU, vol. 1, 2004, 208 p. (in Russian)
29. *Sneddon I.N., Berry D.S.* The Classical Theory of Elasticity. Heidelberg: Springer, 1958. 238 p.
30. *Murakami Y.* The Society of Materials Science. Tokyo: Pergamon Books LTD, 1987. 470 p.
31. *Cherdantsev N.V.* About one variant of calculating the trajectory of a crack loaded with internal pressure in the roof of a formation // Labour Safety in Industry, 2017, no. 12, pp. 5–10.
32. *Cherdantsev N.V.* Modelling the trajectory of a fracture that moves under the Influence of the fluid Pressure in hard rock roofs of In-seam working // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 2018, vol. 206, pp. 012005, doi:10.1088/1755–1315/206/1/012005.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 234–241

УДК 539.3

О СТАТИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРЕТОЙ ПАНЕЛИ, ОБТЕКАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. В. Баничук[1,*], В. С. Афанасьев[1,], С. Ю. Иванова[1,***]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: banichuk@ipmnet.ru*
***e-mail: ciber200hlrn05Ox@yandex.ru*
****e-mail: syuivanova@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.11.2019 г.
После доработки 14.02.2020 г.
Принята к публикации 18.02.2020 г.

Рассматривается продольное движение нагретой упругой панели, обтекаемой потоком идеальной жидкости. Предполагается, что панель, движущаяся с постоянной продольной скоростью и совершающая поперечные упругие колебания, оперта на краях пролета. Задача статической неустойчивости (бифуркации) формулируется на основе концепции упругого равновесия искривленной панели под действием прикладываемых к панели инерционных сил, гидродинамической реакции, теплового воздействия и внутриплоскостных растяжений (сжатий). Возникающая нелинейная граничная задача решается при помощи метода возмущений. В результате исследовано влияние нагрева, гидроупругого взаимодействия, а также внутриплоскостного растяжения (сжатия) на устойчивость упругой панели, совершающей продольное движение и поперечные колебания.

Ключевые слова: метод возмущений, статическая устойчивость, нелинейный анализ

DOI: 10.31857/S0032823520020113

Исследования устойчивости продольно движущихся деформируемых структурных элементов, таких как балки, струны, панели и пластинки, выполнялись ранее в основном с использованием линейных моделей (см., например, монографию [1]). Небольшое число исследований устойчивости продольно движущихся упругих элементов было выполнено в рамках нелинейных моделей [2–4]. Отметим также исследования по устойчивости деформируемых прямолинейно движущихся конструктивных элементов, выполняемые с учетом взаимодействия рассматриваемого элемента с потоком жидкости [1, 5–19].

В настоящей работе изучается влияние нагрева и гидродинамического воздействия, а также внутриплоскостного натяжения на устойчивость продольно движущихся нагретых упругих панелей, обтекаемых идеальной жидкостью. Используется гидротермоупругая модель, основанная на комбинированном учете однородного поля температур, гидродинамической реакции, внутриплоскостного натяжения и изгибных упругих сил. В используемой модели предполагается малость термоупругих деформаций и приближение присоединенных масс для выражения гидродинамической реакции. Эти предположения приводят к существенным упрощениям и допускают эффективное применение аналитических подходов (см., например, [6, 12, 13]).

1. Основные соотношения. Рассмотрим продольное движение с постоянной скоростью упругой, подпертой на краях панели, обтекаемой идеальной жидкостью и совершающей поперечные колебания. Панель находится под воздействием инерциальных сил, изгибных сил, внутриплоскостных натяжений, термических воздействий и давления жидкости. С целью вывода определяющего уравнения для функции поперечных упругих прогибов w представим сначала уравнение равновесия для поперечных проекций действующих сил:

$$Q_I + Q_H + Q_B + Q_T = Q_f \tag{1.1}$$

Здесь $Q_I = Q_I(w)$, $Q_H = Q_H(w)$, $Q_T = Q_T(w)$, $Q_B = Q_B(w)$ и $Q_f = Q_f(w)$ – поперечные проекции, соответственно, сил инерции, тепловых воздействий, внутриплоскостных натяжений, изгибных сил и давления жидкости. Проекции сил инерции и изгиба записываются в виде

$$Q_I(w) = mV_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$Q_B(w) = D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \tag{1.3}$$

где D, m и V_0 – соответственно, изгибная жесткость, масса на единицу площади и продольная скорость панели. Проекция ускорения в поперечном направлении, обусловленная наличием натяжения панели, дается формулами

$$Q_T(w) = -T_p(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

$$T_p(w) = T_0 + \frac{c}{2\ell}\int_{-l}^{l}\left(\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right)dx = T_0 + \frac{c}{4}\int_{-l}^{l}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{1.5}$$

где T_0 – постоянное плоскостное натяжение неизогнутой панели, c – коэффициент жесткости, 2ℓ – длина пролета между местами опирания панели. Поперечная проекция теплового воздействия (сжатия или растяжения) определяется следующим образом [20]

$$Q_H(w) = T_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.6}$$

$$T_\theta = \frac{Eh}{1-\nu}\alpha_\theta(\theta_{\text{abs}} - \theta_0) = \text{const}, \tag{1.7}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина панели, θ_0 и θ_{abs} – нормальная и действительная температуры, измеряемые по шкале Кельвина, α_θ – постоянный коэффициент линейного теплового расширения.

Поперечная проекция гидродинамического давления может быть представлена в виде [1, 15]

$$Q_f(w) = -m_a v_\infty^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

Здесь v_∞ – скорость потока идеальной жидкости в продольном направлении, а m_a – присоединенная масса жидкости, определяемая выражением [9]

$$m_a = \frac{\pi\ell}{4}\rho_f, \tag{1.9}$$

в котором величина ρ_f означает плотность жидкости.

Используя далее выражения (1.2)–(1.9) для $Q_I(w)$, $Q_B(w)$, $Q_T(w)$, $Q_H(w)$, $Q_f(w)$ и безразмерные переменные (штрихи у безразмерных переменных в дальнейшем опускаем) $x = \ell x'$, $w = \ell w'$, записываем уравнение (1.1) в следующей форме:

$$\frac{D}{\ell^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{\ell^2}\left(mV_0^2 + m_a v_\infty^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[T_\theta - T_0 - \frac{c}{4\ell}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{1.10}$$

где ℓ играет роль характеристического значения. Далее введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} S = \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad T = T_0 - T_\theta \\ r_m = \frac{m_a}{m}, \quad r_v = \frac{v_\infty}{V_0}, \quad r_0 = \frac{V_0}{S} \\ \beta = \frac{c}{4\ell m}, \quad \kappa = \frac{D}{\ell^2 (T_0 - T_\theta)} = \frac{D}{\ell^2 T} \end{gathered} \tag{1.11}$$

С использованием этих обозначений уравнение (1.10) запишется следующим образом:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 w}{dx^2} - \varepsilon\left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx\right)\frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \tag{1.12}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\kappa S^2} = \frac{c\ell}{4D}, \quad \lambda = \frac{1}{\kappa}[r_0^2(1 + r_m r_v^2) - 1] \tag{1.13}$$

Нелинейная краевая задача для уравнения (1.12), (1.13) решается с учетом граничных условий

$$(w)_{x=\pm 1} = \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=\pm 1} = 0, \tag{1.14}$$

определенных на краях панели ($x = \pm 1$).

2. Применение метода возмущений. Принимая во внимание малость параметра ε $\left(\varepsilon = \frac{c\ell}{4D} < 1\right)$, представим искомую функцию перемещений w и критическую величину параметра неустойчивости λ, зависящую от величины критической скорости V_0, в виде степенных рядов по малому параметру ε:

$$\begin{aligned} w &= w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \ldots \\ \lambda &= \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \ldots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

в которых величины $w^{(i)}$ и $\lambda^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) не зависят от ε, а $w^{(0)}$ и $\lambda^{(0)}$ являются решением краевой задачи в нулевом приближении, т.е. при $\varepsilon = 0$. Для получения соотношений, которые используются для определения $w^{(i)}$ и $\lambda^{(i)}$, подставим степенные ряды (2.1) в уравнение (1.12). Будем иметь

$$\frac{d^4w^{(0)}}{dx^4} + \varepsilon\frac{d^4w^{(1)}}{dx^4} + \varepsilon^2\frac{d^4w^{(2)}}{dx^4} +$$
$$+ (\lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)})\left(\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} + \varepsilon\frac{d^2w^{(1)}}{dx^2} + \varepsilon^2\frac{d^2w^{(2)}}{dx^2}\right) -$$
$$- \varepsilon\int_{-1}^{1}\left(\frac{dw^{(0)}}{dx} + \varepsilon\frac{dw^{(1)}}{dx} + \varepsilon^2\frac{dw^{(2)}}{dx}\right)dx\left(\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} + \varepsilon\frac{d^2w^{(1)}}{dx^2} + \varepsilon^2\frac{d^2w^{(2)}}{dx^2}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Следующий шаг состоит в группировании членов с одинаковыми степенями ε. Далее, используя классический метод возмущений (метод малого параметра), приравниваем к нулю соответствующие выражения, определяющие последовательно величины $w^{(i)}$ и $\lambda^{(i)}$. Таким образом, исходная нелинейная краевая задача (1.12)–(1.14) сводится к последовательности линейных задач. Решая эти задачи, можно определить решения с требуемой точностью. Аппроксимация нулевого порядка определяется соотношениями

$$\frac{d^4w^{(0)}}{dx^4} + \lambda^{(0)}\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} = 0, \quad (w^{(0)})_{x=\pm1} = \left(\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2}\right)_{x=\pm1} = 0 \tag{2.3}$$

Решение линейной краевой задачи нулевого приближения (2.3) не представляет сложностей и записывается в виде

$$\lambda^{(0)} = (k\pi)^2, \quad w^{(0)} = -\frac{A}{(k\pi)^2}\sin k\pi x, \quad x \in [-1,1] \tag{2.4}$$

Здесь A – произвольная константа, $k = 1, 2, \ldots$

Далее с использованием аппроксимации нулевого порядка ($\lambda^{(0)}$, $w^{(0)}$) уравнение для первого приближения

$$\frac{d^4w^{(0)}}{dx^4} + \lambda^{(1)}\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} + \lambda^{(0)}\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} - \left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{dw^{(0)}}{dx}\right)^2 dx\right)\frac{d^2w^{(0)}}{dx^2} = 0$$

записывается в следующем виде:

$$\frac{d^4w^{(1)}}{dx^4} + (k\pi)^2\frac{d^2w^{(1)}}{dx^2} + \lambda^{(1)}A\sin k\pi x - \frac{A}{(k\pi)^2}\sin k\pi x = 0, \tag{2.5}$$

где

$$\left(w^{(1)}\right)_{x=\pm1} = \left(\frac{d^2w^{(1)}}{dx^2}\right)_{x=\pm1} = 0 \tag{2.6}$$

Введем новую переменную $u^{(1)}$, удовлетворяющую соотношениям

$$u^{(1)} = \frac{d^2w^{(1)}}{dx^2}, \quad \left(u^{(1)}\right)_{x=\pm1} = 0 \tag{2.7}$$

и сведем исходное дифференциальное уравнение (2.5) четвертого порядка к соответствующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2} + (k\pi)^2u^{(1)} + \left(\lambda^{(1)} - \frac{A^2}{(k\pi)^2}\right)A\sin k\pi x = 0 \tag{2.8}$$

Решая уравнение (2.8) с граничными условиями (2.7), будем иметь (B_1 – произвольная постоянная)

$$\lambda^{(1)} = \frac{A}{(k\pi)^2}, \quad u^{(1)} = B_1 \sin k\pi x, \quad x \in [-1,1], \tag{2.9}$$

причем, как это следует из (2.6), (2.7) и (2.9), справедливо равенство

$$w^{(1)} = -\frac{B_1}{(k\pi)^2} \sin k\pi x, \quad x \in [-1,1] \tag{2.10}$$

В результате получаем поправки (2.9), (2.10) первого приближения, корректирующие искомое решение краевой задачи.

Аппроксимация второго порядка находится на основе решения следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{d^4 w^{(2)}}{dx^4} + \lambda^{(2)} \frac{d^2 w^{(0)}}{dx^2} + \lambda^{(0)} \frac{d^2 w^{(2)}}{dx^2} + \lambda^{(1)} \frac{d^2 w^{(1)}}{dx^2} - \\
-\left(\int_{-1}^{1} \left(\frac{dw^{(0)}}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 w^{(1)}}{dx^2} - 2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{dw^{(0)}}{dx} \frac{dw^{(1)}}{dx} dx \right) \frac{d^2 w^{(0)}}{dx^2} = 0 \\
\left(w^{(2)} \right)_{x=\pm 1} = \left(\frac{d^2 w^{(2)}}{dx^2} \right)_{x=\pm 1} = 0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Подставляя найденные величины нулевого и первого приближений и новую переменную $u^{(2)}$, определяемую равенствами

$$u^{(2)} = \frac{d^2 w^{(2)}}{dx^2}, \quad \left(u^{(2)} \right)_{x=\pm 1} = 0 \tag{2.12}$$

в уравнение (2.11), сводим дифференциальное уравнение четвертого порядка к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 u^{(2)}}{dx^2} + (k\pi)^2 u^{(2)} + A \sin k\pi x \left(\lambda^{(2)} - 2 \frac{AB_1}{(k\pi)^2} \right) = 0 \tag{2.13}$$

Решение уравнений (2.11)–(2.13) определяет корректирующие поправки второго приближения

$$\lambda^{(2)} = \frac{2AB_1}{(k\pi)^2}, \quad u^{(2)} = C_1 \sin k\pi x, \quad w^{(2)} = -\frac{C_1}{(k\pi)^2} \sin k\pi x, \tag{2.14}$$

где C_1 – произвольная константа.

Из выражения для параметра λ

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} [r_0^2 (1 + r_m r_v^2) - 1] = \frac{\ell^2 T}{D} \left[\frac{m}{T} V_0^2 + \frac{m_a}{T} v_\infty^2 - 1 \right] \tag{2.15}$$

вытекает следующая формула:

$$V_0^2 = \lambda \frac{D}{m\ell^2} + \frac{T}{m} - \frac{m_a}{m} v_\infty^2 \tag{2.16}$$

Используя полученные выражения для параметра λ в нулевом, первом и втором приближениях, будем иметь

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} = (k\pi)^2 + \frac{Ac}{D(k\pi)^2} \left(\frac{A\ell}{4} + \frac{B_1 c}{8T} \right) \tag{2.17}$$

Подставляя разложение (2.17) в формулу (2.16), находим в случае, когда $k = A = B_1 = 1$, следующее выражение для квадратичной критической скорости дивергенции (неустойчивости):

$$V_0^2 = \pi^2 \frac{D}{m\ell^2} + \frac{c}{4\pi^2 m\ell} + \frac{c^2}{8\pi^2 m\ell^2 T} + \frac{T_0}{m} - \frac{Eh}{1-\nu}\alpha_\theta \frac{\theta}{m} - \frac{\pi\ell}{4}\rho_f \frac{v_\infty^2}{m} \tag{2.18}$$

3. Линейный анализ устойчивости. Рассмотрим линейный случай, когда $\varepsilon = 0$. Тогда, используя (1.12)–(1.14), будем иметь

$$\begin{gathered} \frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\kappa}(r_0^2(1 + r_m r_v^2) - 1) \\ (w)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=\pm 1} = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Вводя новую переменную $u = \dfrac{d^2 w}{dx^2}$ и подставляя ее в равенства (3.1), получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad (u)_{x=\pm 1} = 0 \tag{3.2}$$

Решение краевой задачи (3.2) дается формулами (A — произвольная постоянная)

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{V_0}{S^2}\left(1 + r_m \frac{v_\infty^2}{V_0^2}\right) - 1\right], \quad u = A \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Как результат, из краевой задачи (3.1) и формулы (3.3) получим соотношение

$$(k\pi)^2 = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{V_0}{S^2}\left(1 + r_m \frac{v_\infty^2}{V_0^2}\right) - 1\right] \tag{3.4}$$

Учитывая, как следует из соотношения (3.4), что минимум величины V_0^2 (критической скорости дивергенции) реализуется при $k = 1$, находим

$$\left(V_0^2\right)_{\text{div}} = \frac{1}{m}\left\{\frac{D}{\ell^2}\pi^2 - m_a v_\infty^2 + T\right\} \tag{3.5}$$

Таким образом, статическая устойчивость (критическая скорость дивергенции) возрастает, когда увеличиваются значения изгибной жесткости D и плоскостного натяжения T, и уменьшается при возрастании длины половины пролета ℓ, присоединенной массы m_a, массы m на единицу площади панели и скорости жидкости v_∞.

Заключение. В нелинейной постановке сформулирована задача статической устойчивости (дивергенции) нагретой панели, обтекаемой идеальной жидкостью. Для эффективного анализа устойчивости в нелинейной постановке развивается метод возмущений. Применение процедуры малого параметра обеспечивает возможность сведения рассматриваемой нелинейной проблемы к системе линейных краевых задач, последовательное решение которых реализуется в аналитической форме. В результате найденные аппроксимации нулевого, первого и второго порядка точности позволяют выявить зависимость критической скорости дивергенции от таких параметров задачи, как скорость жидкости, присоединенная масса жидкости, изгибная жесткость, величина температуры нагретой панели и геометрические параметры панели. Аналитический подход к анализу устойчивости движущейся панели, обтекаемой потоком идеальной жидкости, применен также в частном случае линейной постановки проблемы.

Работа выполнена по теме Госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
2. *Vetyukov Y., Gruber P., Krommer M.* Nonlinear model of an axially moving plate in a mixed Eulerian–Lagrangian framework // Acta Mech. 2016. V. 227. № 10. P. 2831–2842.
3. *Ghayech M.H., Amabili M.* Nonlinear stability and bifurcations of an axially moving beam in thermal environment // J. Vibr.&Control. 2015. V. 21. № 15. P. 2981–2984.
4. *Marynowski K.* Non-linear vibrations of an axially moving viscoelastic web with time-dependent tension // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V. 21. P. 481–490.
5. *Pramila A.* Sheet flutter and the interaction between sheet and air // TAPPI J. 1986. V. 68. № 7. P. 70–74.
6. *Pramila A.* Natural frequencies of a submerged axially moving band // J. Sound&Vibr. 1987. V. 113. № 1. P. 198–203.
7. *Kornecki A., Dowell E.H., O'Brien J.* On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow // J. Sound&Vibr. 1976. V. 47. № 2. P. 163–178.
8. *Chang Y.B., Moretti P.M.* Interaction of fluttering webs with surrounding air // TAPPI J. 1991. V. 74. № 3. P. 231–236.
9. *Frondelius T., Koivurova H., Pramila A.* Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory // J. Fluids&Struct. 2006. V. 22. № 8. P. 1047–1056.
10. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 889–899.
11. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Задачи оптимизации для пластин, колеблющихся в идеальной жидкости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 520–527.
12. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 83–90.
13. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
14. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T.* Dynamical behavior of an axially moving plate undergoing small cylindrical deformation submerged in axially flowing ideal fluid // J. Fluids&Struct. 2011. V. 27. № 7. P. 985–1005.
15. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Исследование устойчивости продольного движения панели с учетом гидротермоупругого взаимодействия // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 4. С. 456–465.
16. *Bisplinghoff R.L., Ashley H.* Principles of Aeroelasticity. New York: Dover Publ., 1962. 527 p.
17. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. New York: Dover Publ., 1965. 304 p.
18. *Ashley H., McIntosh S.C.* Applications of aeroelastic constraints on structural optimization // In: Proc. 12th Intern. Congr. Theor.&Appl. Mech. Berlin: Springer, 1969. P. 100–113.
19. *Andersen J.D.Jr.* Fundamentals of Aerodynamics. New York: McGraw-Hill, 1985. 760 p.
20. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. Киев: Вища школа. 1975. 216с.

On Static Bifurcation of a Moving Heated Panel Flowed by an Ideal Fluid

N. V. Banichuk[a,#], V. S. Afanas'ev[a,##], and S. Yu. Ivanova[a,###]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: banichuk@gmail.ru*

[##]*e-mail: ciber200hlm500x@yandex.ru*

[###]*e-mail: syuivanova@yandex.ru*

The axial movement of a heated elastic panel flowed by an ideal fluid is considered. It is supposed that the panel moving with a constant axial velocity and performing transverse elastic vibrations is simply supported at the ends of a span. The problem of static buckling (bifurcation) is formulated on the basis of the concept of elastic equilibrium of a curved panel under action of inertial forces, hydrodynamical reaction, thermal action and in-plane tensions (compressions) applied to the panel. The arising nonlinear boundary problem is solved by the perturbation method. As a result, the influence of the heating, hydroelastic interaction and in-plane tension (compression) on the stability of elastic panel performing the axial movement and transverse vibrations is investigated.

Keywords: perturbation method, static stability, center mass, stability, linear analysis of stability

REFERENCES

1. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
2. *Vetyukov Y., Gruber P., Krommer M.* Nonlinear model of an axially moving plate in a mixed Eulerian-Lagrangian framework // Acta Mech., 2016, vol. 227, no. 10, pp. 2831–2842.
3. *Ghayech M.H., Amabili M.* Nonlinear stability and bifurcations of an axially moving beam in thermal environment // J. Vibr.&Control, 2015, vol. 21, no. 15, pp. 2981–2984.
4. *Marynowski K.* Non-linear vibrations of an axially moving viscoelastic web with time-dependent tension // Chaos, Solitons and Fractals, 2004, vol. 21, pp. 481–490.
5. *Pramila A.* Sheet flutter and the interaction between sheet and air // TAPPI J., 1986, vol. 68, no. 7, pp. 70–74.
6. *Pramila A.* Natural frequencies of a submerged axially moving band // J. Sound&Vibr., 1987, vol. 113, no. 1, pp. 198–203.
7. *Kornecki A., Dowell E.H., O'Brien J.* On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow // J. Sound&Vibr., 1976, vol. 47, no. 2, pp. 163–178.
8. *Chang Y.B., Moretti P.M.* Interaction of fluttering webs with surrounding air // TAPPI J., 1991, vol. 74, no. 3, pp. 231–236.
9. *Frondelius T.*, *Koivurova H.*, *Pramila A.* Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory // J. Fluids&Struct., 2006, vol. 22, no. 8, pp. 1047–1056.
10. *Banichuk N.V., Mironov A.A.* Optimization of vibration frequencies of an elastic plate in an ideal fluid// JAMM, 1975, vol. 39, no. 5, pp. 853–863.
11. *Banichuk N.V., Mironov A.A.* Optimization problems for plates oscillating in an ideal fluid // JAMM, 1976, vol. 40, no. 3, pp. 474–481.
12. *Banichuk N.V., Mironov A.A.* The stream flow scheme for investigating the equilibrium forms of elastic plates in a stream of fluid and problems of optimization // JAMM, 1979, vol. 43, no. 1, pp. 88–95.
13. *Banichuk N.V.* Problems and Methods of Optimal Structural Design. N.Y.: Plenum Press, 1983. 313 p.
14. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T.* Dynamical behavior of an axially moving plate undergoing small cylindrical deformation submerged in axially flowing ideal fluid // J. Fluids&Struct., 2011, vol. 27, no. 7, pp. 985–1005.
15. *Banichuk N.V., Ivanova S.Yu.* Stability investigation of panel axial movement taking into account hydrothermoelastic interaction // Problems of Strength and Plasticity, 2018, vol. 80, no. 4, pp. 456–465. (in Russian)
16. *Bisplinghoff R.L., Ashley H.* Principles of Aeroelasticity. N.Y.: Dover Publ., 1962. 527 p.
17. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. N.Y.: Dover Publ., 1965. 304 p.
18. *Ashley H., McIntosh S.C.* Applications of aeroelastic constraints on structural optimization // In: Proc. 12^{th} Intern. Congr. Theor.&Appl. Mech. Berlin: Springer, 1969. pp. 100–113.
19. *Andersen J.D.Jr.* Fundamentals of Aerodynamics. N.Y.: McGraw-Hill, 1985. 760 p.
20. *Kovalenko A.D.* Thermoelasticity. Kiev: Vysshaya shkola, 1975. 216 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 242–255

УДК 539.3

АДГЕЗИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С РЕГУЛЯРНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ РЕЛЬЕФОМ

© 2020 г. Ю. Ю. Маховская*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail: makhovskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.
После доработки 23.12.2019 г.
Принята к публикации 26.12.2019 г.

Рассмотрено адгезионное взаимодействие осесимметричного индентора с упругим полупространством с учетом поверхностного микрорельефа в виде регулярно расположенных одинаковых выступов, покрывающих индентор. Контакт на микроуровне между системой выступов и упругим полупространством считается дискретным. Решение задачи на макроуровне строится с помощью зависимости эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора, полученной в результате решения задачи на микроуровне. Построенное решение позволяет моделировать влияние параметров микрогеометрии и адгезии на контактное взаимодействие упругих тел на макроуровне.

Ключевые слова: адгезия, дискретный контакт, регулярный рельеф

DOI: 10.31857/S0032823520020058

1. Введение. Теоретические основы механики контактного взаимодействия упругих тел с учетом сил адгезионного притяжения, действующих вне области контакта, были заложены в работах Б.В. Дерягина и его соавторов [1–3]. Силы адгезионного притяжения определяются не только свойствами взаимодействующих поверхностей, но и величиной зазора между ними, поэтому поверхностная микрогеометрия оказывает большое влияние на характер прилипания. Искусственное нанесение поверхностного микрорельефа позволяет изменять эффективные адгезионные свойства поверхности, причем как в сторону увеличения, так и уменьшения адгезии [4–6].

Модель адгезионного взаимодействия упругих тел с поверхностью, обладающей случайной шероховатостью, была предложена в работе К. Фуллера и Д. Тейбора [7]. Для случая поверхностей с регулярным рельефом рассмотрены и решены периодические контактные задачи без учета адгезии [8, 9], а также с учетом сил адгезии в плоской [10–13] и пространственной [14, 15] постановках.

Для моделирования влияния микрорельефа на характеристики контакта на макроуровне необходимо рассматривать задачи с более сложной конфигурацией контакта, например, о контакте индентора и полупространства с нанесенным на одну из поверхностей микрорельефом. В случае небольшой волнистости, когда область контакта остается односвязной, решение такой задачи было получено аналитически [16] и установлено, что нанесение рельефа увеличивает эффективные адгезионные свойства поверхности, а также изменяет величину адгезионного гистерезиса [17]. В случае, когда контакт является дискретным, постановка задачи значительно усложняется, и решение можно получить численно, например, методом граничных элементов [18]. Следует отдельно отметить возможность анализа такой конфигурации контакта на основе самосогласованного подхода по Б.В. Дерягину, который не предполагает наличия области контакта в классическом смысле. Согласно этому подходу, между поверхностями всегда имеется ненулевое расстояние (зазор), и величина межмолекулярных сил, которые могут быть как притягивающими, так и отталкивающими, зависит от величины этого зазора [19, 20].

Другой подход к рассмотрению таких задач предполагает решение в два этапа: задача решается на микроуровне для получения эффективных характеристик микрорельефа, которые затем используются для решения задачи на макроуровне. К таким подходам относится предложенный И.Г. Горячевой метод, основанный на использовании функции дополнительного смещения, которая описывает эффективное влияние поверхностного рельефа [8, 9]. Аналогичный метод, основанный на расчете эффективной податливости шероховатого слоя, был применен для расчета адгезионного контакта шероховатых осесимметричных тел Б.А. Галановым [21]. В более простой версии этого подхода используется величина эффективной удельной энергии адгезии, которая рассчитывается исходя из поверхностной геометрии и адгезии на микроуровне, а затем используется в решении задачи на макроуровне. На основе данного подхода в [22] были проведены расчеты и объяснены экспериментальные результаты работы [5]. Этот подход позволяет применять и комбинировать известные методы расчета адгезионного контакта на микро- и макроуровнях. Особенностью его, однако, является то, что в нем определяется один параметр адгезии – эффективная удельная энергия адгезии, поэтому на макроуровне возможно применение только упрощенных моделей адгезии.

В настоящей работе при решении задачи о взаимодействии индентора, обладающего регулярным поверхностным рельефом, с упругим полупространством используется определенная на микроуровне зависимость эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора между поверхностями. Работа этой силы при разведении поверхностей представляет собой эффективную удельную энергию адгезии. Таким образом, данный подход можно считать обобщением метода Б.А. Галанова, использующего эффективную удельную энергию адгезии. Отличительной чертой представленного в данной работе подхода является также учет взаимного влияния между поверхностными выступами, образующими микрорельеф.

Работа построена следующим образом. Сначала рассматривается контактная задача на микроуровне о взаимодействии упругого полупространства с жесткой плоской поверхностью, покрытой системой регулярно расположенных выступов (рис. 1а), при наличии адгезии, вызванной межмолекулярным притяжением поверхностей. Из решения этой задачи определяется зависимость эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора между поверхностями. Затем рассматривается контактная задача на макроуровне – о взаимодействии гладкого индентора с упругим полупространством (рис. 1б) при наличии адгезионного притяжения вне области контакта, задаваемого зависимостью удельной силы адгезии от величины зазора. Предполагается, что размер областей контакта и расстояние между выступами на микроуровне значительно меньше размера области контакта на макроуровне, $a_0 \ll a_1$, $l \ll a_1$ (рис. 1).

2. Контактная задача на микроуровне. Рассматривается контакт жесткой поверхности, на которой расположены одинаковые осесимметричные выступы, с гладкой поверхностью упругого полупространства. Выступы расположены в узлах гексагональной решетки с шагом l. В локальной цилиндрической системе координат, связанной с вершиной выступа, его форма описывается степенной функцией $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$, где R_0 – размер выступа, $n \geq 1$ – целое число (рис. 1а). На жесткую поверхность, покрытую выступами, действует номинальное давление p_0. Для описания адгезионного при-

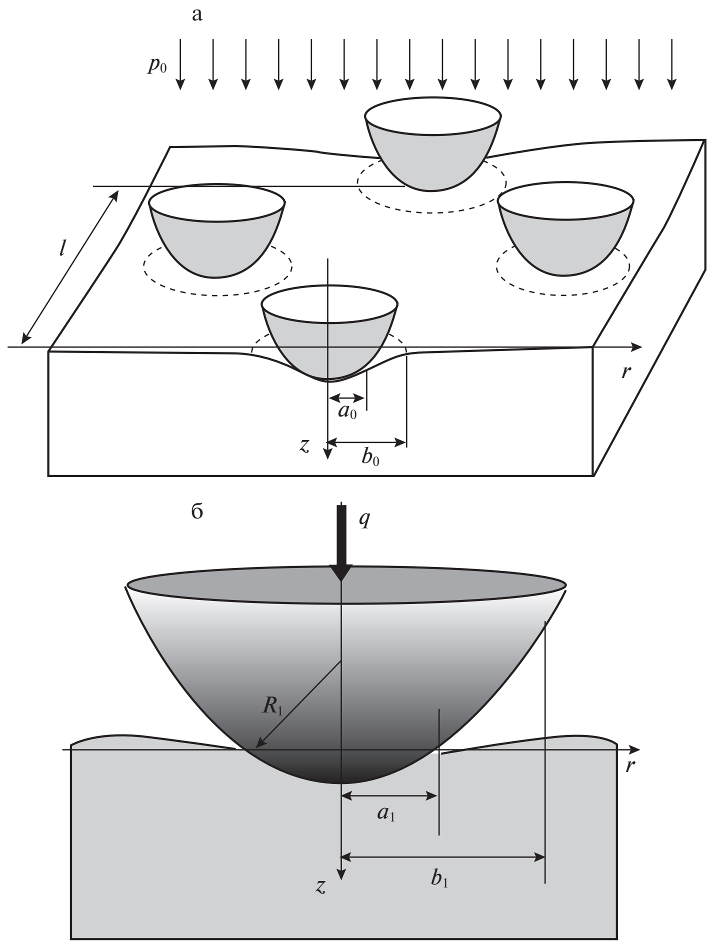


Рис. 1

тяжения поверхностей используется кусочно-постоянная аппроксимация зависимости удельной силы адгезии p_{adh} от величины зазора между поверхностями h_0, известная как модель Можи–Дагдейла [23]:

$$p_{\text{adh}}(h_0) = \begin{cases} -p_a, & 0 < h_0 \le h_a \\ 0, & h_0 > h_a \end{cases} \tag{2.1}$$

Контакт на микроуровне считается дискретным, т.е. происходит по круговым областям радиуса a_0, а в кольцеобразных областях с внешним радиусом b_0 действует удельная сила адгезии p_a, которая считается заданной величиной. Кроме того, задается радиус действия адгезионной силы h_a – максимальный зазор между поверхностями, при котором они испытывают взаимное притяжение.

Для решения задачи используется метод локализации [8, 9]. Согласно этому методу, для определения напряженно-деформированного состояния вблизи отдельного пятна контакта учитываются реальные условия контактирования только на этом пятне контакта, а влияние остальных пятен заменяется действием номинального давления p_0, действующего в области $r \ge R_{\rm eff}$. Величина $R_{\rm eff}$ определяется из условия равенства среднего давления внутри круга радиуса $R_{\rm eff}$ и вне его. Для гексагональной решетки эта величина равна [8, 9]

$$R_{\rm eff} = 3^{1/4} l/\sqrt{2\pi} \tag{2.2}$$

Таким образом, задача о нагружении упругого полупространства имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(r) &= -f_0(r) - d_0 \quad & r \le a_0 \\ p(r) &= -p_a \quad & a_0 \le r \le b_0 \\ p(r) &= 0 \quad & b_0 \le r \le R_{\rm eff} \\ p(r) &= p_0 \quad & r > R_{\rm eff} \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $p(r)$ и $u(r)$ – соответственно, давление и перемещение в направлении оси z на границе $z = 0$ упругого полупространства, (r, z, φ) – цилиндрическая система координат, связанная с выбранным выступом (рис. 1а), d_0 – расстояние между выступом и невозмущенной границей полупространства.

Помимо условий (2.3), выполняется условие, следующее из принятой модели адгезии (2.1):

$$h_0(b_0) = h_a \tag{2.4}$$

Зависимость величины зазора h_0 между контактирующими поверхностями от координаты r в окрестности выступа можно представить в виде

$$h_0(r) = f_0(r) - f_0(a_0) + u(r) - u(a_0) \tag{2.5}$$

Кроме того, выполняется условие равновесия для номинального давления

$$p_0 = \frac{2}{R_{\rm eff}^2} \int_0^{R_{\rm eff}} r p(r) dr \tag{2.6}$$

Решение осесимметричной контактной задачи с условиями (2.3)–(2.6) было получено в работах [14, 15], в частности, в случае непосредственного контакта поверхностей зависимость номинального давления от расстояния между поверхностями определяется соотношениями

$$p_0 = \frac{\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \dfrac{4nE^* a_0^{2n+1}}{R_0^{2n-1}} - 2p_a b^2 \left(\arccos(a_0/b_0) + a_0 \sqrt{1 - (a_0/b_0)^2} \Big/ b_0 \right)}{R_{\rm eff}^2 \arccos(a_0/R_{\rm eff}) + a_0 R_{\rm eff} \sqrt{1 - (a_0/R_{\rm eff})^2}} \tag{2.7}$$

$$d_0 = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{a_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + \frac{2}{E^*} \left(p_a b_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2} + p_0 R_{\rm eff} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{R_{\rm eff}}\right)^2} \right) \tag{2.8}$$

и уравнением, связывающим радиус области контакта a_0 с внешним радиусом области адгезионного взаимодействия b_0:

$$\begin{gathered} \left[\frac{b_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + d_0 \right] \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a_0}{b_0} + \frac{2R_0}{\pi} \left(\frac{b_0}{R_0} \right)^{2n} \sqrt{\left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2 - 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^{2k} - \\ - \frac{4p_a}{\pi E^*} (b_0 - a_0) - \frac{4 p_0 R_{\rm eff}}{\pi E^*} \left[\mathbf{E}\left(\frac{b_0}{R_{\rm eff}} \right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a_0}{b_0}, \frac{b_0}{R_{\rm eff}} \right) \right] - h_a = 0, \end{gathered} \tag{2.9}$$

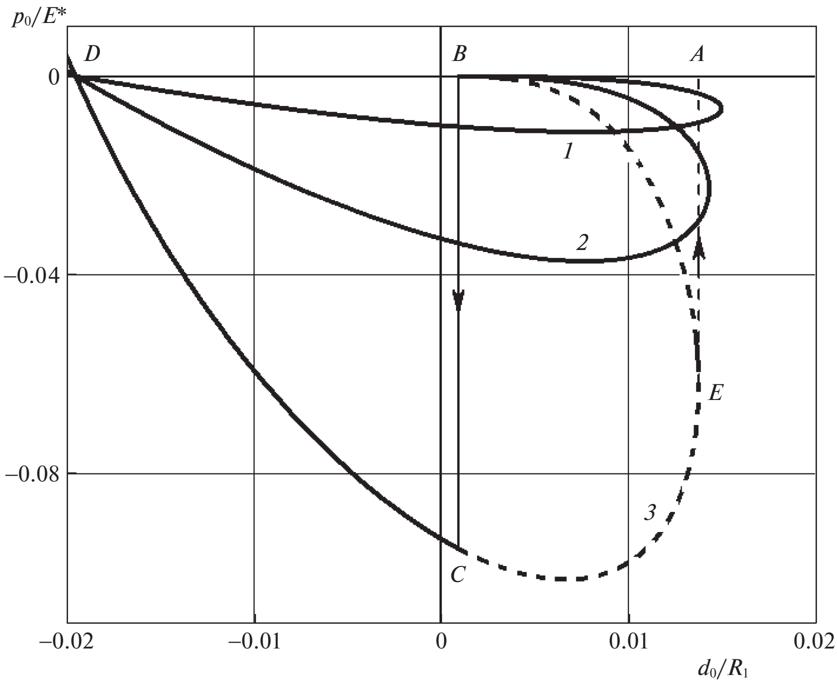


Рис. 2

где $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{E}(\theta, x)$ – соответственно, полный и неполный эллиптические интегралы второго рода; $E^* = E/(1-\nu^2)$; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства, соответственно. При заданной величине b_0 уравнение (2.9) решается численно относительно a_0, что при подстановке в соотношения (2.7), (2.8) дает параметрическую зависимость $p_0(d_0)$. При отсутствии непосредственного контакта поверхностей решение задачи существенно упрощается:

$$p_0 = -p_a\left(\frac{b_0}{R_{\text{eff}}}\right)^2 \tag{2.10}$$

$$d_0 = -\frac{b_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + \frac{4p_a b_0}{\pi E^*}\left[1 - \frac{b_0}{R_{\text{eff}}}\mathbf{E}\left(\frac{b_0}{R_{\text{eff}}}\right)\right] + h_a \tag{2.11}$$

На рис. 2 приведены зависимости безразмерного номинального давления p_0/E^*, от безразмерного расстояния между поверхностями d_0/R_1, рассчитанные по соотношениям (2.7)–(2.11), при $p_0/E^* = 10$, $h_0/R_1 = 10^{-3}$, $R_0/R_1 = 10^{-2}$. Форма выступов, определяемая функцией $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$, считалась параболической, т.е. принималось значение $n = 1$. Здесь и далее для параметризации величин, имеющих размерность длины, использована величина R_1 – радиус закругления индентора на макроуровне (рис. 1б). Графики представлены в области отрицательного давления, поскольку именно эта область значений номинального давления будет использоваться при решении задачи на макроуровне. Кривые *1*, *2* и *3* на рис. 2 получены при различных значениях

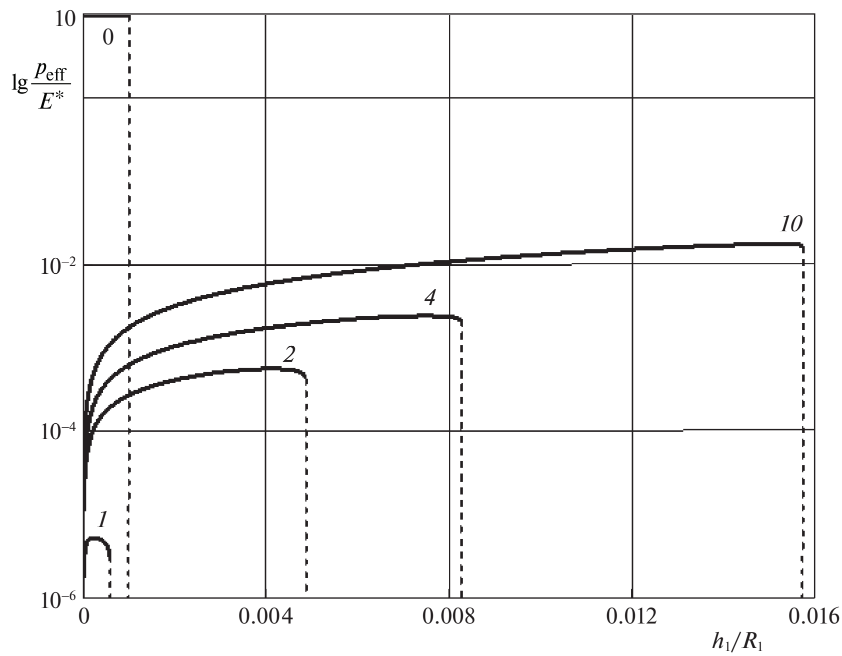


Рис. 3

безразмерного расстояния $L = 3^{1/4}l/(2\pi)^{1/2}R_1$ между выступами: $L = 0.028$, 0.05 и 0.1, соответственно. При более плотно расположенных выступах более высокое отрицательное давление может быть приложено к поверхностям без разрушения контакта. Представленные кривые имеют неоднозначный характер, что характерно для адгезионного взаимодействия упругих тел [24–26], и описывают адгезионный гистерезис: работа, производимая силами адгезии при сближении поверхностей от бесконечности до равновесного расстояния (по пути *ABCD*) меньше работы, которую нужно затратить для разделения этих же поверхностей (по пути *DCEA*).

Вводится величина номинального зазора между поверхностями согласно соотношению $h_1 = d_0 - d_0^*$, где d_0^* – равновесное расстояние, при котором номинальное давление p_0 равно нулю. Полагая $p_0 = 0$ в соотношениях (2.7) – (2.9), получим три уравнения для определения равновесного расстояния d_0^* и соответствующих ему величин a_0^* и b_0^*. Эффективная удельная сила адгезии определяется как взятое с обратным знаком номинальное давление, $p_{\text{eff}} = -p_0$ при $h_1 \geq 0$. Таким образом, из зависимости $p_0(d_0)$, заданнной соотношениями (2.7)–(2.11), можно определить зависимость эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора, $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$. Заметим, что вследствие адгезионного гистерезиса (рис. 2) эта зависимость будет различной при подводе поверхностей друг к другу и при их разведении.

На рис. 3 показаны графики зависимости величины безразмерного эффективного адгезионного давления p_{eff}/E^* (представленной в логарифмическом виде) от номинального зазора h_1/R_1 при разведении поверхностей, рассчитанные для выступов различной формы. Число рядом с каждой кривой соответствует показателю степени n в функции, описывающей форму выступов $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$. Кривая *0* соответствует взаимодействию гладких тел без выступов. Использованы те же значения параметров, что и для результатов, представленных на рис. 2. Результаты показывают, что изменение формы выступов приводит к очень значительному изменению эффективного адгезионного давления: к снижению его на несколько порядков по сравнению с адгезией гладких поверхностей.

3. Контактная задача на макроуровне. На макроуровне рассматривается взаимодействие жесткого осесимметричного индентора, форма которого описывается функцией $f_1(r) = r^2/(2R_1)$, с упругим полупространством, занимающим область $z \le 0$ (рис. 1б). Будем считать областью контакта круг $r \le a_1$, в котором давление на поверхности упругого полупространства положительное, а областью адгезии – кольцо $a_1 \le r \le b_1$, в котором оно отрицательное. Эффективное адгезионное давление берется из решения задачи на микроуровне $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$, метод получения которого изложен в п. 2. Величина номинального зазора h_1 между поверхностями индентора и полупространства определяется соотношением:

$$h_1(r) = \frac{r^2}{2R_1} + u(r) + d_1, \tag{3.1}$$

где d_1 – расстояние между индентором и полупространством.

Условия на границе упругого полупространства имеют вид:

$$\begin{aligned} h_1(r) &= 0 \qquad r \le a_1 \\ p(r) &= -p_{\text{eff}}(h_1(r)) \qquad a_1 \le r \le b_1 \\ p(r) &= 0 \qquad r > b_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

На границе $r = a_1$ области контакта величина нормального напряжения равна нулю

$$p(r) = 0 \qquad r = a_1 \tag{3.3}$$

Кроме того, выполняется условие равновесия для внешней нормальной силы q, действующей на индентор

$$q = 2\pi \int_0^b rp(r)dr \tag{3.4}$$

Для решения задачи эффективное адгезионное давление в области адгезии $a_1 \le r \le b_1$ заменяется кусочно-постоянной аппроксимацией

$$p_{\text{eff}}(r) = \begin{cases} p^1, & b^0 \le r < b^1 \\ p^2, & b^1 \le r < b^2 \\ \dots & \dots \\ p^N, & b^{N-1} \le r < b^N \end{cases} \tag{3.5}$$

где $b^0 = a_1$, $b^N = b_1$.

Метод решения задачи об адгезионном взаимодействии упругого полупространства с осесимметричным индентором при заданной удельной силе адгезии в виде кусочно-постоянной функции по радиальной координате был предложен ранее [26]. Решение этой задачи имеет следующий вид. В случае контакта поверхностей имеем для распределения контактного давления:

$$p(r) = \frac{2E^*}{\pi R_1}\sqrt{a_1^2 - r^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N}(p^{i+1} - p^i)\,\mathrm{arcctg}\sqrt{\frac{a_1^2 - r^2}{(b^i)^2 - a_1^2}}, \tag{3.6}$$

где полагается $p^{N+1} = 0$. Выражение для силы, действующей на индентор, имеет вид:

$$q = \frac{4E^* a_1^3}{3R_1} + 2\sum_{i=1}^{N}(p^{i+1} - p^i)(b^i)^2\left(\arccos\frac{a}{b^i} + \frac{a}{b^i}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b^i}\right)^2}\right) \tag{3.7}$$

А расстояние между телами

$$d_1 = -\frac{a_1^2}{R_1} - \frac{2}{E^*}\sum_{i=1}^{N}(p^{i+1} - p^i)b^i\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{b^i}\right)^2} \tag{3.8}$$

Заметим, что в соотношениях (3.5)–(3.8) величина эффективного адгезионного давления p_{eff} фигурирует как функция радиальной координаты r при $r \geq a_1$. Однако, в результате решения задачи на микроуровне (п. 2) определяется зависимость эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора, $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$. Для того, чтобы использовать эту функцию в соотношениях (3.6)–(3.8), необходимо представить функцию номинального зазора $h_1(r)$, определенную соотношением (3.1), в виде кусочно-постоянной аппроксимации, соответствующей разбиению отрезка $a_1 \leq r \leq b_1$, использованному в (3.5): $h_1^i = h_1(b^i)$, $i = 1..N$. Применяя второе условие из (3.2) в каждой точке b^i, $i = 1..N$, можно получить следующую систему уравнений для определения координат b^i точек разбиения отрезка $a_1 \leq r \leq b_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi h_1^k}{2} = {} & \left(d_1 + \frac{(b^k)^2}{2R_1}\right)\arccos\frac{a_1}{b^k} - \frac{2}{E^*}\sum_{i=1}^{N}(p^{i+1} - p^i)b^k \arcsin\frac{a_1}{b^k} + \\
& + \frac{(b^k)^{2n}}{2R_1}\sqrt{\left(\frac{b^k}{a_1}\right)^2 - 1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!}\left(\frac{a_1}{b^k}\right)^{2j} + \frac{2b^k}{E^*}\sum_{i=1}^{k-1}(p^{i+1} - p^i)\times \\
& \times\left\{\mathbf{E}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin\frac{a}{b^i}, \frac{b^i}{b^k}\right) - \left(1 - \left(\frac{b^i}{b^k}\right)^2\right)\left[\mathbf{K}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{F}\left(\arcsin\frac{a_1}{b^k}, \frac{b^i}{b^k}\right)\right]\right\} + \\
& + \frac{2}{E^*}\sum_{i=k}^{N}(p^{i+1} - p^i)b^i\left[\mathbf{E}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin\frac{a_1}{b^k}, \frac{b^i}{b^k}\right)\right], \quad k = 1...N,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\mathbf{F}(\varphi, x)$ и $\mathbf{K}(x)$ – соответственно, неполный и полный эллиптический интеграл первого рода, $\mathbf{E}(\varphi, x)$ и $\mathbf{E}(x)$ – второго рода. Метод получения соотношений (3.6)–(3.9) описан в [25, 26].

При известной зависимости эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора, $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$, система уравнений (3.9) решается численно относительно величин b^i, при этом автоматически определяется радиус области контакта, $a_1 = b^0$. После этого можно определить номинальное контактное давление (3.6), а также зависимость силы от расстояния между индентором и полупространством (3.7)–(3.8). Заметим, что определяемая из решения задачи на микроуровне (п. 2) зависимость $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$ является различной для случаев подвода поверхностей и разведения их друг от друга. Таким образом, решение задачи на макроуровне также будет различным, в зависимости от того, приближается индентор к полупространству или удаляется от него.

4. Результаты расчета. На рис. 4 представлены распределения контактного давления на макроуровне при значении безразмерного расстояния между выступами $L = 0.06$ и величине максимального внедрения индентора $d_1/R_1 = -0.05$ для различных форм выступов. Число рядом с каждой кривой соответствует показателю степени n в функции,

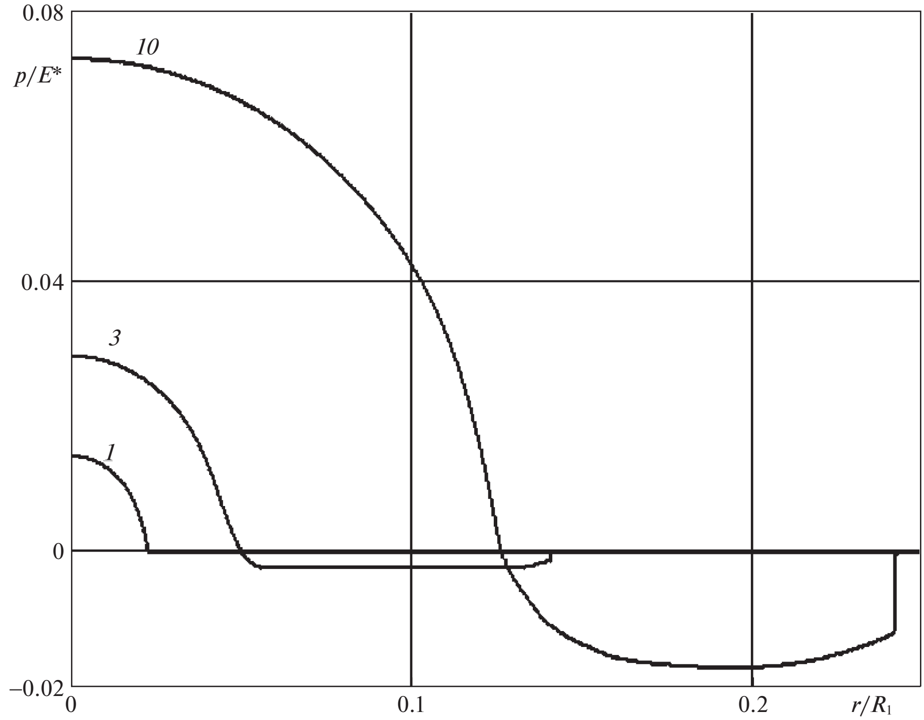


Рис. 4

описывающей форму выступов $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$. Остальные параметры задачи имеют те же значения, что и приведенные к описанию рис. 2. Результаты показывают, что более пологая форма выступов приводит к значительному увеличению размера области фактического контакта, повышению по абсолютной величине как контактных (положительных), так и адгезионных (отрицательных) поверхностных напряжений.

На рис. 5 показаны зависимости безразмерной номинальной площади контакта $\pi a_1^2/R_1^2$ от внешней силы $q/(E^*R_1^2)$, приложенной к штампу. Результаты приведены для двух значений расстояния между выступами и двух значений относительного размера выступов: кривые *1* и *1'* соответствуют более плотному расположению выступов $L = 0.028$, а кривые *2* и *2'* – менее плотному $L = 0.05$; при этом кривые *1* и *2* построены для относительного размера выступов $R_0/R_1 = 0.01$, а кривые *1'* и *2'* – для $R_0/R_1 = 0.005$. Обе указанные характеристики микрорельефа оказывают значительное влияние на площадь контакта на макроуровне: уменьшение расстояния между выступами и увеличение их размера приводит к возрастанию номинальной площади контакта и максимальной отрицательной силы, которая соответствует силе отрыва поверхностей. Заметим, что при рассмотрении задачи для кластера микроконтактов с учетом адгезии в [27] было показано, что условие отрыва зависит также от напряженного состояния на границе области контакта, однако учет влияния градиента контактного давления на краю номинальной области контакта на условие отрыва поверхностей выходит за рамки вопросов данной работы.

Все кривые, представленные на рис. 4 и 5, соответствуют случаю, когда индентор удаляется от полупространства. На рис. 6, иллюстрирующей зависимость безразмерной силы $q/(E^*R_1^2)$ от расстояния между индентором и полупространством d_1/R_1, при-

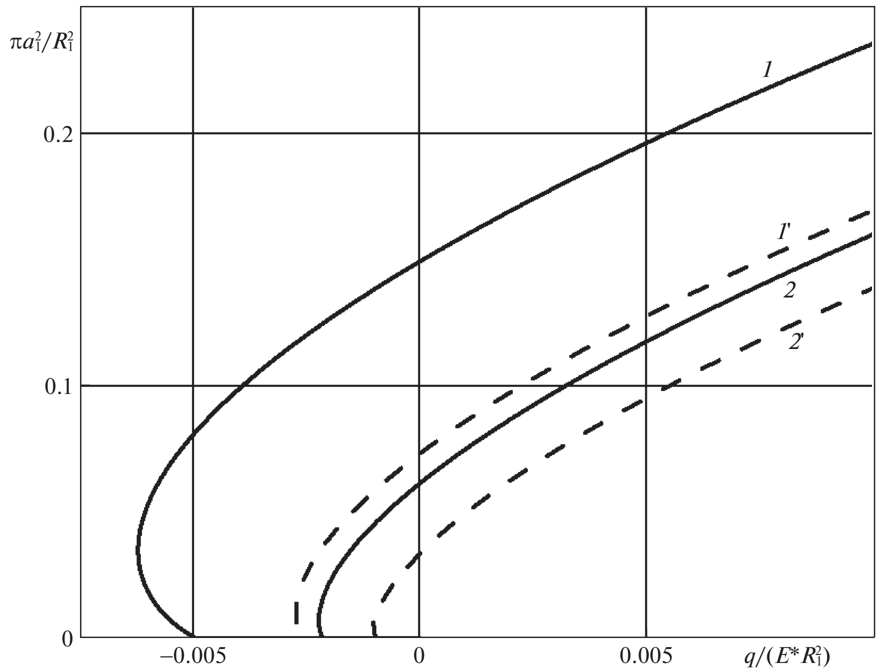


Рис. 5

ведены графики как для подвода индентора (кривые *1* и *2*), так и для его отвода (кривые *1*' и *2*'). Кривая *3* соответствует адгезионному взаимодействию упругого полупространства с гладким индентором, не имеющим поверхностных выступов. Результаты показывают, что помимо гистерезиса, возникающего вследствие одновременного действия адгезионных и упругих сил (показан штриховыми линиями со стрелками на примере кривой *3*), имеет место еще один вклад в гистерезис, связанный с дискретностью контакта (отличие кривых *1* и *1*', *2* и *2*'). Однако, несмотря на дополнительный вклад за счет микрогеометрии поверхности, общая величина адгезионного гистерезиса для поверхности, покрытой выступами, значительно меньше, чем для гладких поверхностей; также значительно меньше и сила отрыва – максимальная отрицательная сила, которую выдерживает контакт. Этот эффект качественно объясняется уменьшением площади контактной поверхности при переходе от сплошного к дискретному контакту, что приводит к уменьшению эффективной поверхностной энергии каждого из взаимодействующих тел [6, 22].

Заключение. Предложен метод решения задачи об адгезионном взаимодействии осесимметричного индентора с упругим полупространством с учетом поверхностного микрорельефа в виде регулярно расположенных одинаковых выступов, покрывающих индентор. Построенное решение позволяет исследовать влияние параметров поверхностного микрорельефа на характеристики адгезионного взаимодействия на макроуровне в случае дискретного контакта поверхностей на микроуровне. Проведен расчет и анализ распределения номинального контактного давления, номинальной площади контакта и зависимости силы от расстояния между индентором и полупространством при различных параметрах микрорельефа: формы выступов, их относительного размера и плотности расположения. Полученные результаты могут быть использованы для управления адгезионными свойствами поверхностей путем нанесения на них регулярного рельефа заданной формы.

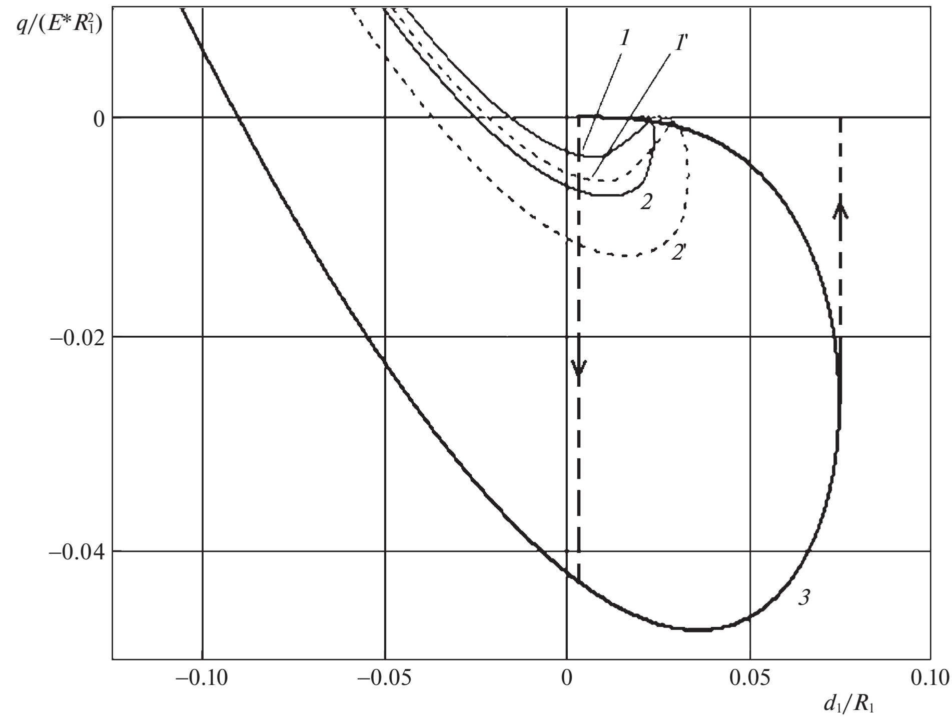


Рис. 6

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 19-01-00231). Решение контактной задачи на макроуровне и его анализ (п. 3–4) выполнены при поддержке РНФ (грант 18-19-00574).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.V., Müller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformation on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
2. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Colloid Interface Sci. 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
3. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
4. *Briggs G.A.D., Briscoe B.J.* The effect of surface topography on the adhesion of elastic solids // J. Phys. D. Appl. Phys. 1977. V. 10. № 18. P. 2453–2466.
5. *Purtov J., Gorb E.V., Steinhart M., Gorb S.N.* Measuring of the hardly measurable: adhesion properties of anti-adhesive surfaces // Appl. Phys. A 2. 2013. V. 111. № 1. P. 183–189.
6. *Borodich F.M., Savencu O.* Hierarchical models of engineering rough surfaces and bio-inspired adhesives // Ed. by *Heepe L., Xue L., Gorb S.* Bio-inspired Structured Adhesives. Biologically-Inspired Systems. V. 9. Cham: Springer, 2017.
7. *Fuller K.N.G., Tabor D.* The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. Roy. Soc. A. 1975. V. 345. № 1642. P. 327–342.
8. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1998. 344 p.
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

10. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct. 1995. V. 32. № 3–4. P. 423–430.
11. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // J. Polym. Sci. B. 2001. V. 39. № 11. P. 1195–1214.
12. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // ASME J. Appl. Mech. 2004. V. 71. № 6. P. 851–856.
13. *Jin F., Guo X., Wan Q.* Revisiting the Maugis–Dugdale adhesion model of elastic periodic wavy surfaces // ASME. J. Appl. Mech. 2016. V. 83. № 10. P. 101007.
14. *Маховская Ю.Ю.* Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Изв. РАН МТТ. 2003. № 2. С. 49–61.
15. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // Изв. РАН МТТ. 2017. № 4. С. 101–111.
16. *Guduru P.R.* Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. № 3. P. 445–472.
17. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // J. Mech. Phys. Solids. 2011. V. 59. № 12. P. 2488–2510.
18. *Li Q., Pohrt R., Popov V.L.* Adhesive strength of contacts of rough spheres // Front. Mech. Eng. 2019. V. 5. № 7.
19. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
20. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: упрощенный метод решения (двухуровневая модель) // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 314–322.
21. *Galanov B.A.* Models of adhesive contact between rough elastic solids // Int. J. Mech. Sci. 2011. V. 53. № 11. P. 968–977.
22. *Pepelyshev A., Borodich F.M., Galanov B.A. et al.* Adhesion of soft materials to rough surfaces: experimental studies, statistical analysis and modelling // Coatings. 2018. V. 8. № 10. P. 350.
23. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1992. V. 150. № 1. P. 243–269.
24. *Johnson K.L., Greenwood J.A.* An adhesion map for the contact of elastic spheres // J. Colloid Interface Sci. 1997. V. 192. № 2. P. 326–333.
25. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 279–289.
26. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Об одном подходе к решению задач о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 323–327.
27. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Archive Appl. Mech. 2019. V. 89. № 8. P. 1447–1472.

Adhesive Interaction of Elastic Bodies with Regular Surface Relief

Yu. Yu. Makhovskaya[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
[#]e-mail: makhovskaya@mail.ru

Adhesive interaction between an axisymmetric indenter and an elastic half-space is considered taking into account a surface relief in the form of regularly arranged identical asperities covering the indenter. At microlevel, contact between the system of asperities and the half-space is assumed discrete. At macrolevel, the solution of the problem is constructed by using the dependence of the effective specific force of adhesion on the nominal gap, which is obtained as a result of the problem solution at microlevel. The solution obtained allows one to model the influence of microgeometry and adhesion characteristics at microlevel on the contact of elastic bodies at macrolevel.

Keywords: adhesion, discrete contact, regular relief

REFERENCES

1. *Derjaguin B.V., Müller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformation on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci., 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
2. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Colloid Interface Sci., 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
3. *Derjaguin B.V., Churaev N.V., Muller V.M.* Surface Forces. (Poverkhnostnye sily) Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (in Russian)
4. *Briggs G.A.D., Briscoe B.J.* The effect of surface topography on the adhesion of elastic solids // J. Phys. D. Appl. Phys., 1977, vol. 10, no. 18, pp. 2453–2466.
5. *Purtov J., Gorb E.V., Steinhart M., Gorb S.N.* Measuring of the hardly measurable: adhesion properties of anti-adhesive surfaces // Appl. Phys. A 2, 2013, vol. 111, no. 1, pp. 183–189.
6. *Borodich F.M., Savencu O.* Hierarchical models of engineering rough surfaces and bio-inspired adhesives // Ed. by *Heepe L., Xue L., Gorb S.* Bio-inspired Structured Adhesives. Biologically-Inspired Systems. vol. 9. Cham: Springer, 2017.
7. *Fuller K.N.G., Tabor D.* The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. Roy. Soc. A, 1975, vol. 345, no. 1642, pp. 327–342.
8. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1998. 344 p.
9. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika friktsionnogo vzaimodeistviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
10. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct., 1995, vol. 32, no. 3–4, pp. 423–430.
11. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // J. Polym. Sci. B, 2001, vol. 39, no. 11, pp. 1195–1214.
12. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // ASME J. Appl. Mech., 2004, vol. 71, no. 6, pp. 851–856.
13. *Jin F., Guo X., Wan Q.* Revisiting the Maugis–Dugdale adhesion model of elastic periodic wavy surfaces // ASME. J. Appl. Mech., 2016, vol. 83, no. 10, pp. 101007.
14. *Makhovskaya Yu.Yu.* Discrete contact of elastic bodies in the presence of adhesion, // Mech. Sol., 2003, vol. 38, no. 2, pp. 39–48.
15. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion // Mech. Sol., 2017, vol. 52, no. 4, pp. 435–443.
16. *Guduru P.R.* Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory // J. Mech. Phys. Solids, 2007, vol. 55, no. 3, pp. 445–472.
17. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // J. Mech. Phys. Solids, 2011, vol. 59, no. 12, pp. 2488–2510.
18. *Li Q., Pohrt R., Popov V.L.* Adhesive strength of contacts of rough spheres // Front. Mech. Eng., 2019, vol. 5, no. 7.
19. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
20. *Soldatenkov I.A.* Contact Problem with Bulk-Applied Intermolecular Interaction Forces: a Simplified Solution Method (Two-Level Model) // Mech. Sol., 2019, vol. 54, no. 2, pp. 303–310.
21. *Galanov B.A.* Models of adhesive contact between rough elastic solids // Int. J. Mech. Sci., 2011, vol. 53, no. 11, pp. 968–977.

22. *Pepelyshev A., Borodich F.M., Galanov B.A. et al.* Adhesion of soft materials to rough surfaces: experimental studies, statistical analysis and modelling // Coatings, 2018, vol. 8, no. 10, pp. 350.
23. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci., 1992, vol. 150, no. 1, pp. 243–269.
24. *Johnson K.L., Greenwood J.A.* An adhesion map for the contact of elastic spheres // J. Colloid Interface Sci., 1997. vol. 192, no. 2, pp. 326–333.
25. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // AMM. 2001, vol. 65, no. 2, pp. 273–282.
26. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Approach to solving the problems on interaction between elastic bodies in the presence of adhesion // Doklady Phys., 2004, vol. 49, no. 9, pp. 534–538.
27. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Archive Appl. Mech., 2019, vol. 89, no. 8, pp. 1447–1472.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 256–268

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ

Ф. И. Степанов[1,*], Е. В. Торская[1,]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: stepanov_ipm@mail.ru*

***e-mail: torskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.11.2019 г.
После доработки 14.01.2020 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Предложен численно-аналитический метод расчета контактных давлений и внутренних напряжений, возникающих в двухслойном упругом полупространстве при вдавливании гладкого индентора произвольной формы с учетом сил адгезии. Используется модель адгезионного взаимодействия Можи–Дагдейла. Проведен анализ влияния толщины слоя и наличия адгезионного притяжения на внедрение индентора, а также на внутренние напряжения. Результаты моделирования могут быть использованы для решения обратной задачи – определения модуля упругости покрытия по результатам индентирования с учетом адгезии и деформации подложки.

Ключевые слова: контактная задача, адгезия, двухслойное полупространство, метод граничных элементов

DOI: 10.31857/S0032823520020083

Введение. Одним из наиболее распространенных методов модификации поверхностей является нанесение на них различного типа покрытий. В условиях контактного взаимодействия между телами возникают силы адгезии, которые могут быть как пренебрежимо малыми, так и существенными. На микро и нано уровне, как правило, адгезионное взаимодействие необходимо учитывать. Покрытия толщиной меньше микрона не являются редкостью и используются, например, в микро-электро-механических системах (МЕМС) [1]. Кроме того, механические свойства покрытий в настоящее время определяются методами наноиндентирования, с использованием диапазонов сил и внедрений, при которых не учитывать адгезию нельзя [2]. Еще одним примером могут являться покрытия из материалов, таких как некоторые виды полимеров, которые проявляют адгезионные свойства на макроуровне. Таким образом, решение контактных задач для слоистых тел с учетом адгезии является актуальной задачей механико-математического моделирования.

Одна из наиболее распространенных моделей адгезионного взаимодействия разработана Джонсоном, Кендаллом и Робертсом (JKR), в ее основе лежит принцип баланса энергии, а силы адгезии действуют внутри области контакта. Упрощенная модель JKR применима в случае высоких значений поверхностной энергии, причем для податливых поверхностных слоев. Контакт упругих слоистых тел при наличии адгезии исследовался в работах [3–6] с использованием моделей на основе теории JKR. При этом в них применялись энергетические подходы, позаимствованные из механики разрушений, такие как скорость высвобождения энергии [3, 4] и коэффициент интенсивности напряжений [5]. Контакт жесткого индентора произвольной формы с упругим полупространством, покрытым упругим слоем, исследовался с помощью метода граничных элементов в [6]. Для решения использовался алгоритм быстрых преобразований Фурье. В перечисленных выше исследованиях [3–6] использовался метод граничных элементов. Были получены [7–9] полуаналитические решения задач о контакте слоистых упругих оснований с использованием моделей адгезии, основывающихся на теории JKR. Для этой же модели адгезии построено асимптотическое решение контактной задачи о нагружении поперечно-изотропного упругого слоя [10].

В случае контакта податливых покрытий на жестком основании может быть эффективным применение одномерной модели материала. Преимущество такого подхода — возможность использовать более точные формы потенциала адгезионного взаимодействия, рассматривать задачи со сложной геометрией контакта, а также минимизировать численную составляющую решения задачи. Так, например, было получено [11] решение периодической контактной задачи о скольжении волнистого индентора по вязкоупругому слою Кельвина при учете адгезии, описываемой моделью Можи–Дагдейла [12]. В рамках этой модели адгезионное давление аппроксимируется постоянным значением, действующим внутри области адгезионного взаимодействия, которая определяется величиной зазора между поверхностями. Применимость одномерной модели ограничена требованиями к свойствам материала подложки. Помимо того, что моделируемый слой должен быть значительно мягче основания, указанная модель не подходит для описания мягких покрытий с большим значением коэффициента Пуассона, например, резиновых.

Рассмотрена [13] уточненная постановка контактной задачи, где считается, что силы адгезии прикладываются не к границе деформируемого тела как контактное давление, а к точкам внутри тела, причем граница тела свободна от нагрузок. Получены решения для тонкого упругого слоя на жестком основании и для упругого полупространства.

Модель Можи–Дагдейла использовалась для решения осесимметричной контактной задачи для слоистых тел при наличии адгезии [14, 15]. При этом использовалось упрощающее предположение об отсутствии влияния адгезии на размер площадки контакта. Получено [14] полуаналитическое решение задачи о контакте с адгезией жесткого сферического индентора и упругого основания, сцепленного с упругим слоем. С помощью интегральных преобразований Ханкеля было построено решение для случая нескольких слоев, сцепленных с упругим основанием.

Целью данной работы является решение контактной задачи для упругого двухслойного основания и индентора произвольной формы при наличии адгезии, на основе которого можно проанализировать совместное влияние адгезионных сил и различной податливости материалов покрытия и подложки на результаты индентирования, а также рассмотреть напряженное состояние, возникающее в покрытии и подложке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о внедрении жесткого гладкого индентора произвольной формы под действием нормальной силы Q в двухслойное основание, состоящее из упругого слоя, сцепленного с упругим полупространством (рис. 1).

Система координат (x, y, z) связана с индентором, начало системы координат находится в точке первоначального касания индентора и слоя. Материалы слоя и полупространства характеризуются модулем Юнга и коэффициентом Пуассона E_i, ν_i ($i = 1$ для слоя и $i = 2$ для полупространства). Адгезионное взаимодействие между поверхностью слоя и индентором зависит от зазора δ и описывается моделью Можи–Дагдейла:

$$p_a = \begin{cases} p^*, & 0 < \delta \le \delta^* \\ 0, & \delta^* < \delta \end{cases} \qquad (1.1)$$

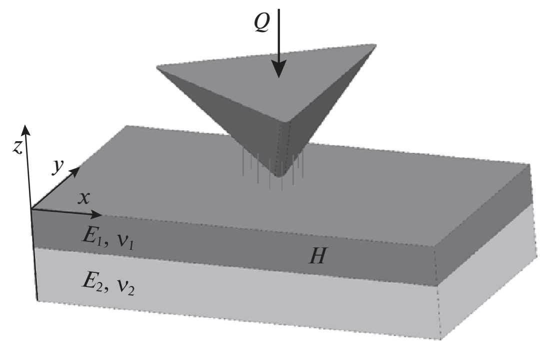


Рис. 1

Рассматриваются следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{gathered} w^{(1)}(x, y) = f(x, y) + D, \quad (x, y) \in \Omega \\ \sigma_z^{(1)} = -p^*, \quad (x, y) \in \Omega^* \\ \sigma_z^{(1)} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (x, y) \notin \Omega^* \\ \tau_{xz}^{(1)} = 0, \quad \tau_{yz}^{(1)} = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь Ω – область контакта, Ω^* – область адгезионного взаимодействия, $w(x, y)$ – вертикальные смещения поверхности слоя, D – внедрение индентора, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} – нормальные и касательные напряжения. Форма индентора описывается функцией $f(x, y)$. Контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ и области Ω, Ω^* неизвестны.

Зазор в (1.1) определяется соотношением:

$$\delta(x, y) = f(x, y) + D - w^{(1)}(x, y) \tag{1.3}$$

Выполняется также условие равновесия

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y)dxdy \tag{1.4}$$

и условие равенства p^* нормальных напряжений на границе области контакта Ω.

Условия на нижней границе слоя ($z = -H$, где H – толщина слоя) соответствуют полному сцеплению:

$$\begin{gathered} w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, \quad u_y^{(1)} = u_y^{(2)} \\ \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $u_x^{(i)}$, $u_y^{(i)}$ – горизонтальные перемещения материала слоя ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$).

2. Метод решения. Рассмотрим сначала пространственную контактную задачу без учета сил адгезии. Аналогичная задача о контакте осесимметричного гладкого индентора с двухслойным упругим основанием подробно рассмотрена [16] с использованием интегрального преобразования Ханкеля, метода граничных элементов и итерационной процедуры. Подобный подход использован и для решения более сложной задачи с граничными условиями (1.2)–(1.5) при $p^* = 0$.

Рассмотрим сначала задачу о действии постоянной нагрузки q, распределенной внутри квадрата со стороной $2a$, на двухслойное упругое основание. Условия на верхней границе слоя имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_z = -q, \quad |x| \le a, \quad |y| \le a \\ \sigma_z = 0, \quad |x| > a, \quad |y| > a \\ \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yx} = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Эта задача решена в [17] с помощью методов, основанных на использовании двойных интегральных преобразований Фурье, которые позволяют рассчитать напряжения и упругие перемещения в слое и полупространстве. В частности, показано, что нормальные перемещения на верхней границе слоя определяются соотношением

$$w_a(x_a, y_a, 0) = -\frac{1+\nu_1}{E_1}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)\cos(x_a\gamma\cos\varphi)\cos(y_a\gamma\sin\varphi)d\gamma d\varphi \tag{2.2}$$

Здесь x_a, y_a, w_a – безразмерные координаты и нормальные смещения поверхности, отнесенные к полуширине квадрата a; E_1 и ν_1 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала слоя, соответственно; $\chi = \dfrac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}$ – отношение приведенных модулей упругости слоя и упругого полупространства; γ, φ – координаты в пространстве двойных интегральных преобразований Фурье; $\lambda = H/a$ – безразмерная толщина слоя. Функция $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ получена в результате решения системы линейных функциональных уравнений, полученных из граничных условий (1.5), (2.1) в результате использования бигармонических функций для определения напряжений и перемещений, а также примененного к постоянной нагрузке двойного интегрального преобразования Фурье. Общий вид $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ является громоздким и здесь не приводится, но важно отметить, что эта функция линейно зависит от $\bar{q}$ – результата применения двойного преобразования Фурье к постоянному давлению q:

$$\bar{q} = q\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\gamma\cos\varphi)\sin(\gamma\sin\varphi)}{\gamma^2\sin\varphi\cos\varphi} \tag{2.3}$$

В связи с тем, что постоянное давление q линейно входит в функцию $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ и может быть вынесено за знак интеграла, соотношение (2.2) может быть взято за основу при решении контактной задачи – определении контактного давления $p(x,y)$ в виде кусочно-постоянной функции.

Из условий (1.2) и (1.4) можно получить следующее уравнение для определения контактного давления:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \cdots & 4a^2 & 0 \\ k_1^1 & \cdots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

где $p_1 \ldots p_N$ – неизвестные постоянные давления в каждом из N элементов, $f_1 \ldots f_N$ определяются формой индентора. Коэффициенты k_i^j получены из соотношения (2.2):

$$k_i^j = -\frac{1+\nu_1}{E_1}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta'(\gamma,\chi,\varphi,\lambda)\cos(y_{ij}\gamma\sin\varphi)\cos(x_{ij}\gamma\cos\varphi)d\gamma d\varphi \tag{2.5}$$

Здесь $(x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$ – расстояние между центрами элементов-квадратов, $\Delta'(\gamma,\chi,\varphi,\lambda) = \Delta(\gamma,\chi,\varphi,\lambda)/q$.

Решение уравнения (2.4) в произвольной, априори превышающей искомую, области контакта включает, вообще говоря, отрицательные давления в некоторых элементах-квадратах. На следующей итерации давление в этих элементах полагается нулевым, ранг матрицы системы (2.4) сокращается за счет данных нулевых элементов, и система решается заново. В результате итерационного процесса определяется положительное контактное давление $p(x,y)$ и область контакта Ω.

Для решения контактной задачи с учетом сил адгезии применяется процедура, похожая на цикл нагружение–разгрузка. Сначала решается задача без адгезии, при этом индентор нагружен силой Q_0, такой, что область контакта Ω_0^* заведомо включает в себя искомую область адгезионного взаимодействия Ω^* и область контакта Ω для задачи с адгезией при нагрузке $Q < Q_0$. Затем нагрузка уменьшается на шаг ΔQ, определяется новая область контакта, давление, а также вертикальные смещения границы подложки. С учетом вертикальных смещений, а также положения границы области Ω_0^*, происходит поиск элементов поверхности, соответствующих геометрическим критериям возникновения адгезионного взаимодействия в выражении (1.1), затем пересчет значений вертикальных перемещений поверхности, а также определение силы притяжения индентора к поверхности Q_{adh}. Система линейных уравнений с учетом сил адгезии приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \cdots & 4a^2 & 0 \\ k_1^1 & \cdots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 - k\cdot\Delta Q + Q_{adh} \\ f_1 + w_1^{adh} \\ \vdots \\ f_N + w_N^{adh} \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

где $Q_{adh} = \sum_{i=1}^N 4p_i^* a^2$, $\begin{pmatrix} w_1^{adh} \\ \vdots \\ w_N^{adh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 & \cdots & k_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1^* \\ \vdots \\ p_N^* \end{pmatrix}$

Здесь k – номер итерации, w_{adh} – перемещения, вызванные действием адгезионных сил (p_i^* может принимать значение p^* либо 0 в зависимости от выполнения условия (1.1)). Нагрузка уменьшается пошагово до тех пор, пока не достигнет значения Q, необходимого по условиям задачи. В результате определяется область контакта, область адгезионного взаимодействия и распределение контактного давления. Затем полученные на поверхности распределения нормальных напряжений используются для определения внутренних напряжений подобно тому, как подобный расчет проводился для аналогичной задачи без адгезии [18].

3. Результаты расчетов. Разработанный метод решения может быть использован для решения пространственных задач для тел с покрытиями при произвольной форме гладкого индентора. С практической точки зрения наиболее востребованной является задача о вдавливании пирамиды Берковича при малых нагрузках в двухслойное упругое полупространство. Этот тип головок широко используется при наноиндентировании, он представляет собой трехгранную пирамиду с закругленным концом (по ГОСТ Р. 8.904-2015 радиус закругления может быть до 50 нм, в ходе эксплуатации увеличивается). При исследовании тонких пленок все чаще индентирование происходит в упругом режиме, что не позволяет определять твердость исследуемых материалов, но может дать информацию об их упругих свойствах.

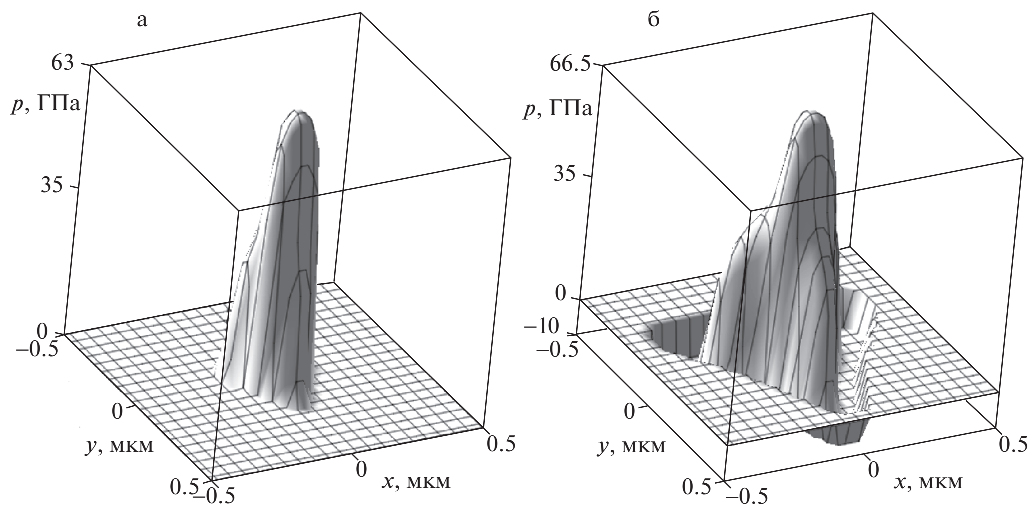


Рис. 2

Для демонстрации возможностей метода было исследовано вдавливание силой Q = 0.002 Н трехгранной пирамиды, геометрия которой определяется ГОСТ Р. 8.904-2015, но радиус закругления составляет 0.3 мкм, в покрытие толщиной 0.1 мкм с модулем Юнга 350 ГПа, нанесенное на подложку с модулем 70 ГПа. Коэффициенты Пуассона для материалов слоя и полупространства полагались равными 0.3 и 0.4, соответственно. Адгезионное взаимодействие характеризовалось параметрами $p^* = 10$ ГПа, $\delta^* = 2$ нм. Выбор величины критического зазора обусловлен характерным радиусом действия сил Ван-дер-Ваальса, значение p^* является достаточно высоким, чтобы получить при расчетах результаты, демонстрирующие влияние адгезии. На рис. 2 приведены распределения контактного давления под индентором, причем на рис. 2а представлен результат, полученный с учетом взаимного притяжения поверхностей, а на рис. 2б – без учета сил адгезии. Сложная форма индентора приводит к тому, что в центре площадки контакта (под скруглением) распределение давления близко к осесимметричному, ближе к границе контактные давления имеют значительный градиент под гранями пирамиды; форма области контакта близка к треугольной. При наличии адгезии на периферии области контакта имеет место отрицательное давление, и, в соответствии с соотношением (1.1), в зазоре, не превышающем δ^*, имеет место постоянное отрицательное давление. При наличии адгезии площадь области контакта и максимальное значение контактного давления больше, что соответствует выполнению условия равновесия (1.3) при наличии априори неизвестных адгезионных сил.

Другим распространенным типом наконечника при индентировании является скругленный конус либо сфера. В связи с меньшим количеством геометрических параметров в этом случае более удобно провести полный анализ совместного влияния сил адгезии и слоистой структуры основания на решение контактной задачи и распределение внутренних напряжений. С этой целью введем систему безразмерных параметров, характеризующих как входные данные, использованные при расчетах, так и результаты. Используем безразмерные координаты $(x', y') = (x, y)/R$, где R – радиус сферы, безразмерные смещения поверхности слоя $w'(x', y') = w^{(1)}(x, y)/R$, безразмерную нагрузку $Q' = Q/R^2E_1$, относительную жесткость слоя $\chi = E_1/E_2$, его относитель-

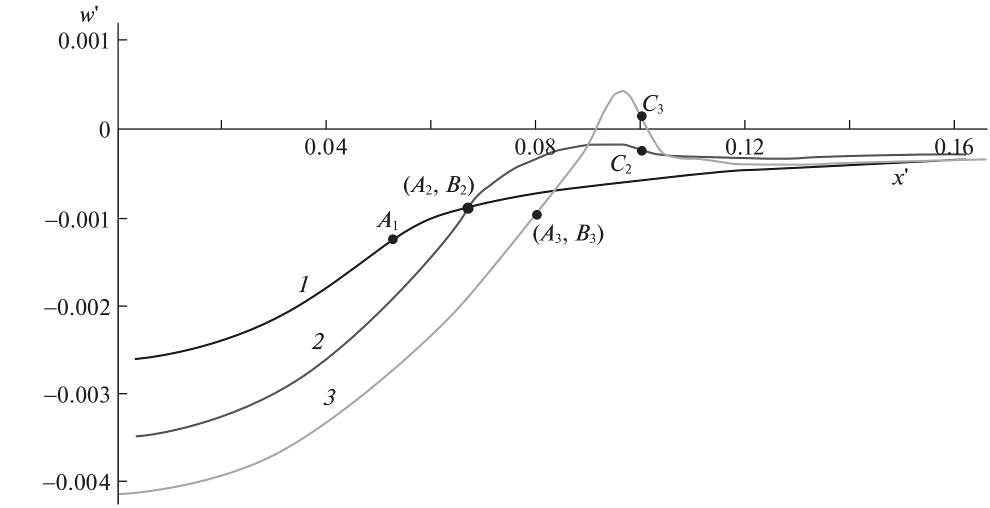


Рис. 3

ную толщину $\lambda = H/R$, а также безразмерные константы в модели Можи–Дагдейла (1.1): p_a/E_1, δ^*/R. Безразмерные контактные давления отнесены к модулю Юнга слоя $p'(x, y) = p(x, y)/E_1$, подобным образом вводятся и безразмерные напряжения.

На рис. 3–5 представлены результаты расчета нормального смещения поверхности в условиях контактного взаимодействия для упругого полупространства (рис. 3), относительно мягкого (рис. 4) и относительно жесткого слоя (рис. 5). Решение для упругого полупространства было получено при $\chi = 1$ с целью верификации модели и последующего сравнения результатов. Результаты, представленные на рис. 3, получены при $\nu = 0.3$, $Q' = 0.238\times10^{-3}$, $\delta^*/R = 0.6667\times10^{-3}$ и $p_a/E_1 = 0$, 0.0143, 0.0714 для кривых *1*–*3* соответственно. Здесь и далее на кривых литерой A обозначена точка нулевого значения контактного давления, литерой B – граница области контакта, C – внешняя граница области Ω^*, в которой действуют силы адгезии. В некоторых случаях точки A и B расположены очень близко, что связано с большим градиентом давления вблизи границы области контакта. Зависимость вертикального смещения от координаты, монотонная для случая без адгезии (кривая *1*), имеет максимум при наличии адгезии, причем, чем больше значение p_a, тем больше величина этого максимума. Также увеличивается размер площадки контакта, при этом ширина зоны адгезионного взаимодействия вне области контакта (между точками B и C) с увеличением значения p_a сначала растет, затем уменьшается. Последний результат находится в соответствии с выводом Можи [12], что при больших значениях адгезионного давления ширина этой зоны стремится к нулю.

Рис. 4 иллюстрирует влияние величины адгезионного давления на смещение поверхности слоя, более податливого, чем основание, ($\chi = 0.1$) для двух вариантов его толщины: $H/R = 0.017$ (левая часть) и $H/R = 0.083$ (правая часть). Для расчетов использовались следующие значения параметров: $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$, $\delta^*/R = 0.6667\times10^{-3}$, $Q' = 0.159\times10^{-2}$. Кривые *1*, *2* построены для $p_a = 0.0143$, 0.0714, соответственно. Влияние адгезионных сил на форму поверхности в целом проявляется так же, как и для однородного полупространства, но следует отметить, что для более тонкого слоя шири-

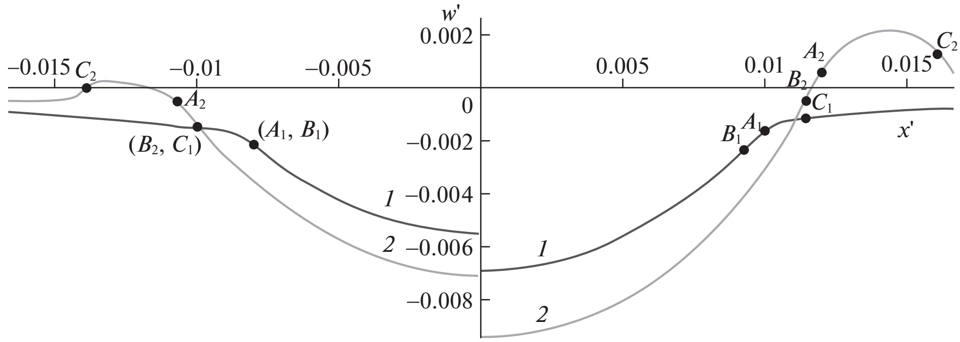


Рис. 4

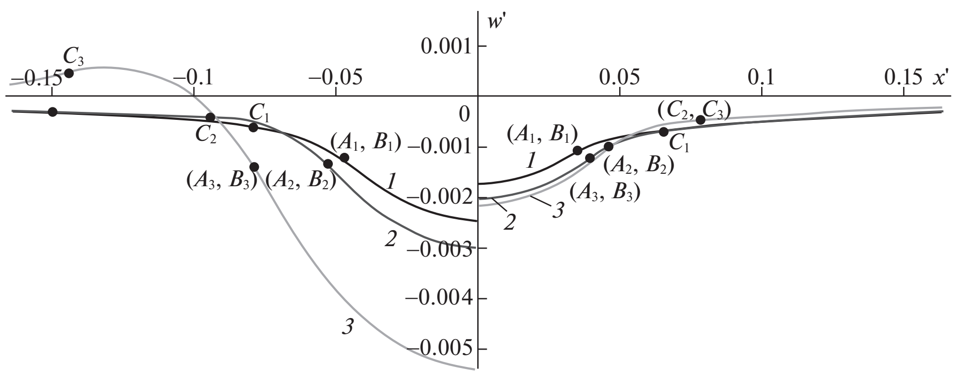


Рис. 5

на кольцевой области Ω*, в которой действуют силы адгезии, меньше, чем для толстого, особенно для относительно высоких значений p_a.

На рис. 5 представлены аналогичные результаты для относительно жестких покрытий $\chi = 5$ толщиной $H/R = 0.017$ (левая часть) и $H/R = 0.05$ (правая часть). Расчет проводился для следующих значений безразмерных параметров:

$$\nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.3, \quad \delta^*/R = 0.6667\times10^{-3}, \quad Q' = 0.4762\times10^{-4}$$

Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют $p_a = 0.143\times10^{-2}$, 0.286×10^{-2}, 0.571×10^{-2}. Характерной особенностью является отсутствие немонотонной зависимости нормальных смещений поверхности жесткого слоя от координаты, зафиксированных для полупространства и податливого слоя на относительно жесткой подложке. Единственным исключением является кривая 3 в левой части рисунка. В этом случае радиус пятна контакта почти в пять раз превышает толщину слоя, что приводит к относительному уменьшению влияния слоя на результат решения задачи. Интересно отметить, что для относительно тонкого слоя имеет место существенное различие кривых *2* и *3*, в то время как для более толстого слоя эти кривые достаточно близки.

Результаты решения контактной задачи при наличии адгезии были использованы для расчета напряженного состояния в слое и основании, представленного на рис. 6–9

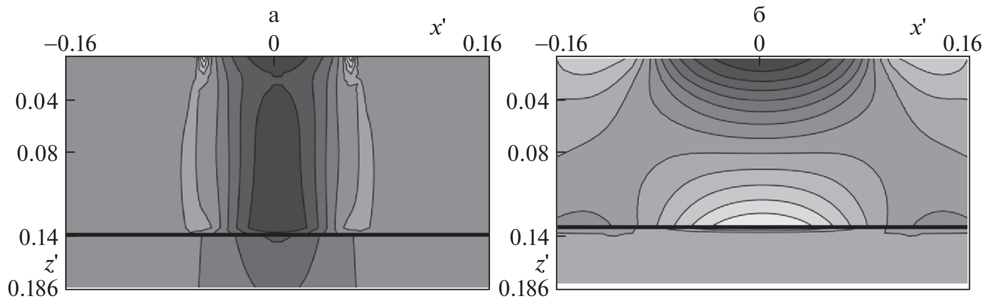


Рис. 6

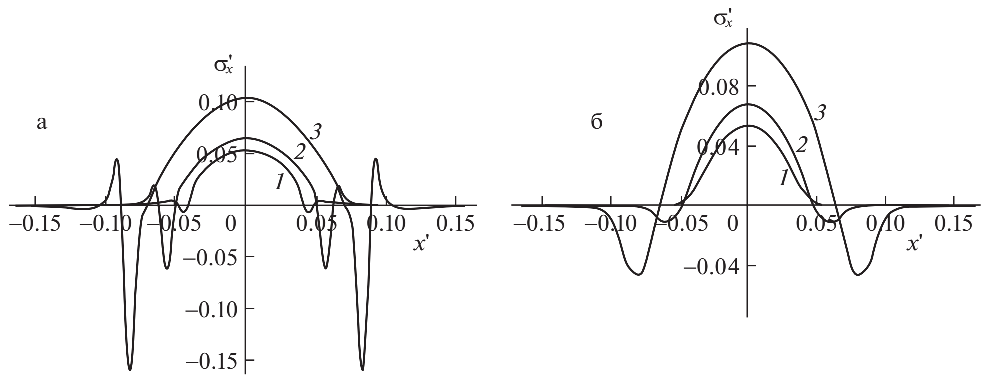


Рис. 7

для относительно жестких ($\chi = 5$, $H/R = 0.0833$, $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.35$, $\delta^*/R = 0.333 \times \times 10^{-3}$, $Q' = 0.158\times10^{-3}$) и относительно податливых ($\chi = 0.01$, $H/R = 0.017$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.35$, $H/R = 0.0166$, $\delta^*/R = 0.166\times10^{-3}$, $Q' = 0.198\times10^{-2}$) упругих слоев при различных значениях p_a. На рис. 6 представлена общая картина распределения растягивающих-сжимающих напряжений, полученная при $p_a = 1.14\times10^{-1}$ (рис. 6а), 2.85×10^{-2} (рис. 6б) для относительно податливых (рис. 6а) и относительно жестких (рис. 6б) слоев. Наиболее светлыми являются области растяжения (отрицательные значения напряжений), темные области соответствуют сжатию. Если для относительно жестких покрытий реализуется напряженное состояние, характерное для изгиба, которое отличается от случая взаимодействия без адгезии только количественными показателями, то в случае относительно податливых покрытий за счет адгезионного взаимодействия на периферии области контакта и под областью Ω^* возникают растягивающие напряжения, которых нет при $p_a = 0$.

Анализ влияния величины параметра p_a на растягивающие–сжимающие напряжения σ'_x на поверхности слоя и на границе раздела покрытия с подложкой можно провести на основе кривых, представленных на рис. 7, 8 (относительно податливый и жесткий слои, соответственно). Кривые *1–3* (рис.7) получены при $p_a/E_1 = 0.071$, 0.143, 0.286. На поверхности (рис. 7а) возникает интересный эффект резкого перехода от

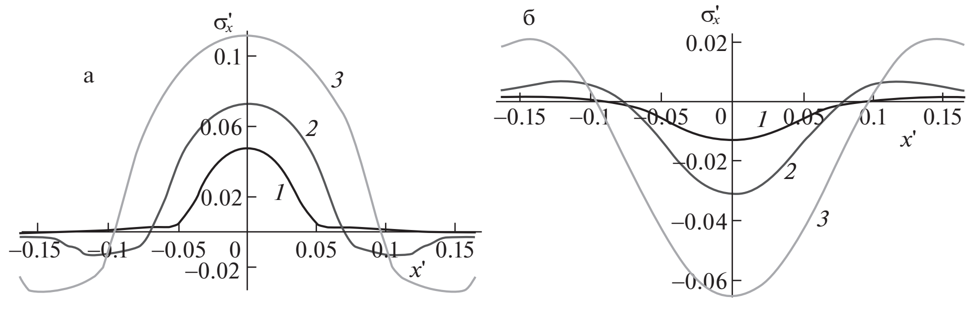


Рис. 8

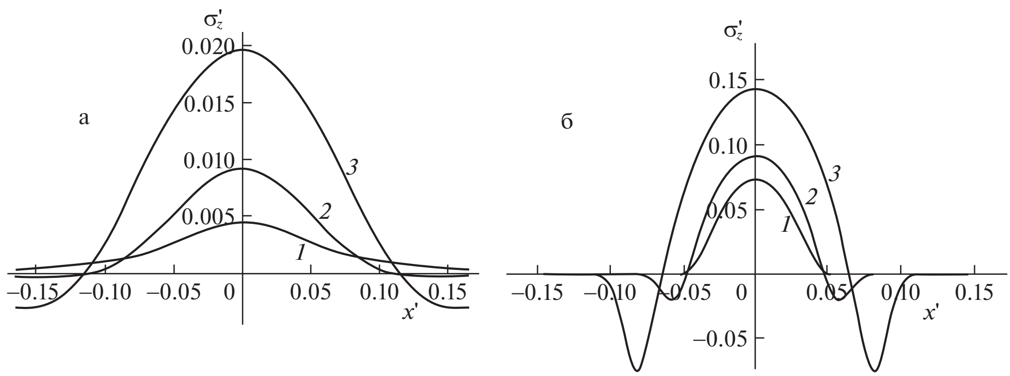


Рис. 9

сжатия к растяжению вблизи границы области контакта. В области Ω^* происходит переход растягивающих напряжений в сжимающие с локальным максимумом на внешней границе Ω^*. Описанные выше эффекты тем более выражены, чем больше величина p_a. На границе раздела слоя с основанием (рис. 7б) максимальные сжимающие напряжения в центре области контакта передаются почти в полном объеме, а растягивающие напряжения значительно меньше, чем на поверхности. Для $p_a/E_1 = 0.071$ (кривая *1*) имеет место только сжатие.

При определении напряжений в относительно жестком слое были использованы значения $p_a/E_1 = 0.286\times10^{-2}$, 0.143×10^{-1}, 0.286×10^{-1} для кривых *1–3*, соответственно. При малых значениях p_a, аналогично случаю без адгезии, на поверхности (рис. 8а) имеет место только сжатие. С увеличением p_a возникают зоны растяжения с локальными максимумами, не привязанными непосредственно к границам областей Ω или Ω^* (в отличие от случая относительно податливых покрытий). На границе раздела слоя с основанием (рис. 8б) за счет изгиба слоя происходит зеркальное отражение картины распределения напряжений на поверхности. Как и при отсутствии адгезии, максимальное растяжение реализуется на границе раздела слоя с основанием под центром области контакта, и значение максимума тем больше, чем больше значение p_a.

Концентрация растягивающих напряжений может служить причиной образования трещины в материале слоя. Другой причиной разрушения композиции слой-основание могут быть отрицательные нормальные напряжения, стремящиеся отделить слой от основания. Подобный результат был получен при решении задачи для относительно жесткого слоя без адгезии [16] при некоторой комбинации входных параметров задачи, но в этом случае максимальные значения напряжений составили не более 3% от максимального значения контактного давления. Распределение σ'_z на границе раздела слоя и основания представлено на рис. 9 для относительно податливого (рис. 9а) и относительно жесткого (рис. 9б) слоев. Все параметры расчета аналогичны использованным при построении кривых рис. 6, 7. Результаты в данном случае являются предсказуемыми. При малых значениях параметра p_a для обоих типов слоев напряжений, работающих на отрыв слоя, не обнаружено. С увеличением значений p_a появляются отрицательные нормальные напряжения, более локальные в случае относительно податливого слоя.

Заключение. В данном исследовании предложен численно-аналитический метод расчета контактных давлений и внутренних напряжений, возникающих в двухслойном упругом полупространстве при вдавливании гладкого индентора произвольной формы с учетом адгезионного взаимодействия между индентором и поверхностью слоя. Используется модель Можи–Дагдейла, в которой адгезия определяется априори неизвестной формой зазора между контактирующими телами и в то же время влияет на результаты решения контактной задачи. Метод не имеет ограничений по соотношению модулей упругости слоя и основания.

Проанализировано совместное влияние сил адгезии и свойств упругого слоя – его относительной жесткости и толщины – на решение контактной задачи и распределение внутренних напряжений. Анализ результатов для относительно жестких и относительно податливых слоев показал, что:

Для относительно податливых покрытий имеет место немонотонная зависимость нормальных смещений поверхности слоя от расстояния до центра области контакта. Подобный эффект прилипания материала слоя к индентору наблюдается и для упругого полупространства, но отсутствует в случае относительно жестких слоев, за исключением очень тонких, когда слой мало влияет на решение контактной задачи.

При анализе напряженного состояния основное внимание было уделено растягивающим–сжимающим напряжениям, концентрация которых может служить причиной образования трещины в материале слоя, а также нормальным напряжениям на границе раздела слоя и полупространства. В результате адгезии на поверхности относительно податливых слоев возникает эффект резкого перехода от сжатия к растяжению вблизи границы области контакта и обратно вблизи границы области адгезионного взаимодействия. В случае отсутствия адгезии при тех же входных параметрах задачи растяжения на поверхности слоя нет. На поверхности относительно жестких слоев также могут возникать области растяжения при достаточно больших значениях адгезионного давления, но максимальные растягивающие напряжения имеют место на границе раздела слоя и полупространства под центром области контакта. Они также растут с ростом адгезионных сил.

На границе раздела слоя с основанием при наличии на поверхности адгезионных сил имеют место отрицательные нормальные напряжения, стремящиеся отделить слой от основания. В случае относительно податливых слоев эти напряжения сконцентрированы под областями отрицательных давлений на поверхности, а в случае жестких слоев они распределены более равномерно, но, в целом, меньше (по отношению к максимальному значению контактного давления).

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 18-19-00574.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Almuramady N., Borodich F.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int. 2019. V. 129. № 1. P. 202–213.
2. *Borodich F.M.* The Hertz-type and adhesive contact problems for depthsensing indentation // Adv. Appl. Mech. 2014. V. 47. P. 225–366.
3. *Shull K.R., Ahn D., Chen W., Flanigan C.M., Crosby A.J.* Axisymmetric adhesion tests of soft materials // Macromol. Chem. Phys. 1998. V. 199. P. 489–511.
4. *Shull K.R.* Contact mechanics and the adhesion of soft solids // Mater. Sci. Eng. Rep. 2002. V. 36. № 1. P. 1–45.
5. *Johnson K.L., Sridhar I.* Adhesion between a spherical indenter and an elastic solid with a compliant elastic coating // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. V. 34. № 5. P. 683–689.
6. *Qiang Li, Popov V.L.* Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating // Acta Mech. 2019. V. 230. № 7. P. 2447–2453.
7. *Barthel E., Perriot A.* Adhesive contact to a coated elastic substrate // J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. V. 40. № 4. P. 1059–1067.
8. *Mary P., Chateauminois A., Fretigny C.* Contact deformation of elastic coatings in adhesive contacts with spherical probes // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. P. 3665–3673.
9. *Choi S.T.* Extended JKR theory on adhesive contact of a spherical tip onto a film on a substrate // J. Mater. Res. 2012. V. 27. P. 113–120.
10. *Argatov I.I., Borodich F.M., Popov V.L.* JKR adhesive contact for a transversely isotropic layer of finite thickness // J. Phys. D Appl. Phys. 2015. V. 49. № 4. P. 045307.
11. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 90–103.
12. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1992. V. 150. № 1. P. 243–269.
13. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: функция влияния для упругой композиции слой – полупространство // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 496–506.
14. *Sergici A.O., Adams G.G., Muftu S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids. 2006. V. 54. P. 1843–1861.
15. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and an elastic multi-layer coated substrate // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 87. P. 1–10.
16. *Torskaya E.V., Goryacheva I.G.* The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid // Wear. 2003. V. 254, №5–6. P. 538–545.
17. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1970. 260 с.
18. *Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Моделирование индентирования относительно жестких покрытий индентором произвольной формы // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 4. С. 417–423.

3D Contact Problem with Adhesion for Two-Layered Elastic Half-Space

F. I. Stepanov[a,#] and E. V. Torskaya[a,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: stepanov_ipm@mail.ru*
[##]*e-mail: torskaya@mail.ru*

A numerical-analytical method is proposed for calculating contact pressures and internal stresses arising in a two-layered elastic half-space in contact with a smooth indenter of arbitrary shape taking into account the adhesion forces. The Maugis-Dugdale model of adhesive interaction is used in problem formulation. The influence of the coating thickness and the presence of adhesive attraction on the indenter penetration, as well as on the internal stresses inside the coating and the substrate, is analyzed. The simulation results can be used to solve the inverse problem of determining the elastic modulus of the coating from the indentation results, taking into account the adhesion and deformation of the substrate.

Keywords: contact problem, adhesion, coating, boundary element method

REFERENCES

1. *Almuramady N., Borodich F.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int., 2019, vol. 129, no. 1, pp. 202–213.
2. *Borodich F.M.* The Hertz-type and adhesive contact problems for depthsensing indentation // Adv. Appl. Mech., 2014, vol. 47, pp. 225–366.
3. *Shull K.R., Ahn D., Chen W., Flanigan C.M., Crosby A.J.* Axisymmetric adhesion tests of soft materials // Macromol. Chem. Phys., 1998, vol. 199, pp. 489–511.
4. *Shull K.R.* Contact mechanics and the adhesion of soft solids // Mater. Sci. Eng. Rep., 2002, vol. 36, no. 1, pp. 1–45.
5. *Johnson K.L., Sridhar I.* Adhesion between a spherical indenter and an elastic solid with a compliant elastic coating // J. Phys. D: Appl. Phys., 2001, vol. 34, no. 5, pp. 683–689.
6. *Qiang Li, Popov V.L.* Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating // Acta Mech., 2019, vol. 230, no. 7, pp. 2447–2453.
7. *Barthel E., Perriot A.* Adhesive contact to a coated elastic substrate // J. Phys. D: Appl. Phys., 2007, vol. 40, no. 4, pp. 1059–1067.
8. *Mary P., Chateauminois A., Fretigny C.* Contact deformation of elastic coatings in adhesive contacts with spherical probes // J. Phys. D: Appl. Phys., 2006, vol. 39, pp. 3665–3673.
9. *Choi S.T.* Extended JKR theory on adhesive contact of a spherical tip onto a film on a substrate // J. Mater. Res., 2012, vol. 27, pp. 113–120.
10. *Argatov I.I., Borodich F.M., Popov V.L.* JKR adhesive contact for a transversely isotropic layer of finite thickness // J. Phys. D Appl. Phys., 2015, vol. 49, no. 4, pp. 045307.
11. Goryacheva *I.G., Makhovskaya Y.Y.* Sliding of a wavy indentor on a viscoelastic layer surface in the case of adhesion // Mech. Sol., 2015, vol. 50, no. 4, pp. 439–450.
12. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci., 1992, vol. 150, no. 1, pp. 243–269.
13. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces: the influence function for an elastic ‘layer–half-space’ system // JAMM, 2016, vol. 80, no 4, pp. 351–358.
14. *Sergici A.O., Adams G.G., Muftu S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids, 2006, vol. 54, pp. 1843–1861.
15. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and an elastic multi-layer coated substrate // Int. J. Solids Struct., 2016, vol. 87, pp. 1–10.
16. *Torskaya E.V., Goryacheva I.G.* The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid // Wear, 2003, vol. 254, no. 5–6, pp. 538–545.
17. *Nikishin V.S., Shapiro G.S.* Space Problems of Elasticity Theory for Multilayered Media. Moscow: Vych. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1970. 260 p. (in Russian)
18. *Stepanov F.I., Torskaya E.V.* Modeling of indentation of hard coatings by an arbitrarily shaped indenter // J. Frict. Wear, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 326–331.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В журнале публикуются результаты в области механики, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях, по следующим направлениям:

- общая механика, или механика систем, включая проблемы управления механическими системами;
- механика жидкости и газа;
- механика деформируемого твердого тела;
- вычислительная механика.

По согласованию с редколлегией в журнале печатаются также обзорные статьи по указанным направлениям. Авторы обязаны предъявлять повышенные требования к изложению и языку рукописи. Рекомендуется безличная форма изложения.

2. Фамилии авторов статьи располагаются в алфавитном порядке, инициалы ставятся перед фамилией. Сведения об авторах с указанием имени, отчества, почтового домашнего адреса, места работы и телефонов (каждого из соавторов), а также адреса электронной почты, по которому будет выслана корректура, помещаются дополнительно на отдельной странице после текста статьи и фигур.

3. Статья должна быть представлена в электронном виде (Word – шрифт № 14 Times New Roman), формулы должны быть отделены от текста бо́льшим интервалом и напечатаны более свободно, чем основной текст.

4. “Шапка” статьи и ее перевод в конце статьи должны быть оформлены по единому стандарту. Вся информация об авторах размещается в “шапке” статьи.

а) Ссылки на места работы латинскими буквами: [a], [b], [c] и т.д.;

б) Ссылки на электронные адреса: *, ** и т.д.

Образец оформления шапки приведен ниже:

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА
ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2018 г. А. Б. Иванов[a,*], В. Г. Петров[b,]**

[a] *Московский физико-технический институт*

[b] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

** e-mail: ivanov@mail.ru*

***e-mail: petrov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.
После доработки 20.10.2016 г.
Принята к публикации 25.12.2016 г.

Для изучения влияния внутренних сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле используется модель М.А. Лаврентьева (спутник моделируется твердой оболочкой с шаровым демпфером) в предположении, что при относительных перемещениях демпфера возникают как диссипативные, так и упругие внутренние силы. В рамках этой модели для динамически симметричного спутника на круговой орбите определены все стационарные вращения и исследована их устойчивость в зависимости от значений коэффициентов демпфирования и жесткости.

Ключевые слова: стационарные вращения, спутник, центр масс, устойчивость

DOI:

Правила оформления библиографических ссылок

I. Книга

Сагомонян А.Я. (1974) Проникание, Изд-во МГУ, Москва.

Whittaker E.T. (1927) Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, Cambridge = Уиттекер Е.Т. (1937) Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва.

II. Журнал

Вильке В.Г. (2002) Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика. Вып. 5, 38.

Stewartson K. (1968) On the flow near the trailing edge of a plate, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 306 (1486), 275.

Rohde S.M. (1972) The optimum slider bearing in terms of friction, J. Lubr. Technol., 94(3), 275 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 94 (3), 82.

III. Препринт

Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г. (2017) Исследование тонкой структуры периодических течений в неоднородных жидкостях, Препринт № 1155, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского, Москва.

IV. Диссертация, автореферат

Чиж Г.К. (1972) Диссертация на соискание ученой степени канд. хим. наук, Химико-технологический институт, Днепропетровск.

Примечания

1. Если авторов более четырех, необходимо давать первые три фамилии и др. (*Иванов Р.И.*, *Семенов Г.П.*, *Терехов П.И.* и др.).
2. Если составителей, редакторов, переводчиков три и более, то оставляют только первую фамилию и др. (Земля / Под ред. Иванова Р.И. и др).
3. Рус. перев.– эти слова заменяются знаком = (равно).