СОДЕРЖАНИЕ

Том 504, 2022

ПОДРОБНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

Рандомизация и энтропия в машинном обучении и обработке данных

Ю. С. Попков 3

МАТЕМАТИКА

Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский 28

Математическое моделирование диссоциации газового гидрата в пористой среде с учетом льда и солености

Ю. А. Повещенко, Г. И. Казакевич, В. О. Подрыга, П. И. Рагимли 32

Обратная задача для полулинейного волнового уравнения

В. Г. Романов 36

О сходимости разностных схем сквозного счета в областях влияния ударных волн

О. А. Ковыркина, В. В. Остапенко, В. Ф. Тишкин 42

Решение нелинейных обратных задач на основе регуляризованного модифицированного метода Гаусса–Ньютона

В. В. Васин 47

О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях

В. В. Веденяпин 51

ИНФОРМАТИКА

Методы организации итерационных циклов при расчете динамических режимов больших схем на основе декомпозиции

В. Н. Гридин, В. И. Анисимов, С. А. Васильев 56

Программная система LingvoDoc и возможности, которые она предлагает для документирования и анализа обско-угорских языков

Ю. В. Норманская, О. Д. Борисенко, И. Б. Белобородов, А. И. Аветисян 60

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О численном моделировании деформирования и разрушения нити под действием ударной нагрузки

И. Б. Петров, А. В. Васюков, К. А. Беклемышева, Е. С. Онучин, Н. А. Товарнова 83

Правила для авторов 88

CONTENTS

Volume 504, 2022

DETAILED PUBLICATIONS

Randomization and Entropy in Machine Learning and Data Processing
Yu. S. Popkov 3

MATHEMATICS

On an Extremal Control Problem with Point Observation for a Parabolic Equation
I. V. Astashova, D. A. Lashin, and A. V. Filinovskiy 28

Mathematical Modeling of Dissociation of Gas Hydrate in Porous Medium Taking into Account Ice and Salinity
Yu. A. Poveshchenko, G. I. Kazakevich, V. O. Podryga, and P. I. Rahimly 32

An Inverse Problem for Semi-Linear Wave Equation
V. G. Romanov 36

On Convergence of Finite-Difference Shock-Capturing Schemes in the Regions of Shock Waves Influence
O. A. Kovyrkina, V. V. Ostapenko, and V. F. Tishkin 42

Solving Nonlinear Inverse Problems Based on the Regularized Modified Gauss–Newton Method
V. V. Vasin 47

On Derivation of Equations of Electrodynamics and Gravitation from the Principle of Least Action, Hamilton–Jacobi Method and Cosmological Solutions
V. V. Vedenyapin 51

COMPUTER SCIENCE

Methods for Organization of Iterative Cycles in Calculating Dynamic Regimes of Large Schemes Based on Decomposition
V. N. Gridin, V. I. Anisimov, and S. A. Vasiliev 56

The Software System LingvoDoc and the Possibilities it Offers for Documentation and Analysis of Ob-Ugric Languages
Y. V. Normanskaja, O. D. Borisenko, I. B. Beloborodov, and A. I. Avetisyan 60

MATHEMATICAL PHYSICS

On Numerical Modeling of Fiber Destruction under Impact Load
I. B. Petrov, A. V. Vasyukov, K. A. Beklemysheva, E. S. Onuchin, and N. A. Tovarnova 83

For Authors 88

EDN: OHYOES
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 3–27

ПОДРОБНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

УДК 51-7

РАНДОМИЗАЦИЯ И ЭНТРОПИЯ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ И ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ

© 2022 г. Академик РАН Ю. С. Попков[1,*]

Поступило 18.02.2022 г.
После доработки 26.02.2022 г.
Принято к публикации 04.03.2022 г.

Сочетание концепции рандомизации с энтропийными критериями позволяет получать решения в условиях максимальной неопределенности, что оказывается весьма эффективным в задачах машинного обучения и обработки данных. Демонстрируется применение этого подхода для энтропийно-рандомизированного оценивания функций на основе данных, рандомизированного “жесткого” и “мягкого” машинного обучения, кластеризации объектов, редукции размерности матрицы данных. Рассматриваются некоторые приложения задачи классификации, прогнозирования электрической нагрузки энергетической системы, рандомизированной кластеризации биологических объектов.

Ключевые слова: энтропия, рандомизация, машинное обучение, обработка данных, параметризация моделей, оценки условно-максимальной энтропии, балансовые уравнения, классификация, кластеризация, генерация случайных ансамблей

DOI: 10.31857/S2686954322030079

1. ВВЕДЕНИЕ

Обработка данных и машинное обучение являются весьма тесно связанными научными и технологическими направлениями, в рамках которых получено огромное количество результатов, опубликованных в огромном количестве статей и монографий и доложенных на международных конференциях. Ссылки на наиболее цитируемые из них будут сделаны в соответствующих разделах данной работы.

Современная концепция машинного обучения базируется на моделях с обозначенными параметрами, значения которых оцениваются различными методами (в основном математической статистики) с использованием данных с определенными, но гипотетическими, свойствами, и соответствующим образом обработанными и форматированными.

Весьма существенная особенность задач машинного обучения и обработки данных состоит в том, что их решение происходит при наличии недостоверности, неполноты и ошибок в данных, а также при недостаточности знаний об обучаемом объекте, которые проявляются в неадекватности используемых моделей.

Как же преодолеть этот барьер и повысить достоверность, надежность результатов машинного обучения?!

В данной работе предлагается: **во-первых**, использовать *рандомизированные* параметризованные модели и оценивать в результате машинного обучения не значения параметров, а их функции плотности распределения вероятности (ПРВ); и **во-вторых**, использовать не произвольную рандомизацию, а оптимальную, гарантирующую получение наилучших функций ПРВ при максимальной неопределенности. Последнее свойство формулируется в терминах условной максимизации информационной энтропии с учетом имеющихся реальных данных.

Основу предлагаемых методов составляет энтропийно-рандомизированное оценивание функций ПРВ, относительно которого рассматриваются математическая модель, алгоритм и его асимптотическая эффективность. Этот метод оценивания используется в процедурах “жесткого” и “мягкого” рандомизированного машинного обучения и кластеризации объектов.

Одной из проблем обработки данных является редукция их размерности. Предлагается для этой цели использовать энтропийные проекции, которые реализуюся как в детерминированном, так и в рандомизированном алгоритме.

Последний раздел работы посвящен прикладным задачам и иллюстративным примерам. Рас-

[1] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: popkov@isa.ru*

смотрены задачи рандомизированной бинарной классификации с использованием стохастических нейронных сетей, прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы, рандомизированной кластеризации биологических объектов.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И РАНДОМИЗАЦИЯ

Подавляющее большинство задач машинного обучения и обработки данных сопровождаются неопределенностью, проявляющейся в ошибках, неполноте, пропусках в массивах данных, в неадекватности математических моделей исследуемому объекту, в отсутствии надежных знаний о процессах, происходящих в нем, в непредсказуемости окружающей среды.

Декларирование существования неопределенности влечет за собой попытки ее моделирование, хотя бы вербальные, а затем и ее измерение. Со времен Л. Больцмана *измерения* связывают со статистической *энтропией* [1, 2] и впоследствии с ее информационной интерпретацией [3]. Известны многочисленные модификации энтропийных функций, связанные с включением в них некоторых особенностей как равновесных состояний макросистем, так и процессов их достижения. Одной из таких модификаций является энтропия Реньи [4], которая обобщает энтропийные функции больцмановского-шеннонского типа [5].

Использование энтропийных функционалов подразумевает некую вероятностную имитацию неопределенного события, т.е. неявно принимается стохастическая модель неопределенности.

Если неопределенное событие интерпретируется как непрерывная переменная, то информационная энтропия определяется через ее функцию плотности распределения вероятностей $P(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{H}[P(\mathbf{x})] = -\int_{\mathcal{X}} P(\mathbf{x})\ln P(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \tag{2.1}$$

Если неопределенное событие принадлежит дискретному множеству, то информационная энтропия определяется через вектор $\mathbf{p}$, характеризующий дискретную функцию распределения вероятностей:

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i. \tag{2.2}$$

Поскольку энтропия есть мера неопределенности, то ее максимизация при дополнительных условиях дает наилучшую оценку принятой вероятностной характеристики при максимальной неопределенности [6–8].

Итак, принимается стохастическая концепция неопределенности. Естественным воплощением ее является *рандомизированная* модель, которая представляет собой генератор ансамбля случайных событий, описываемый функциональной характеристикой, максимизирующей соответствующий энтропийный функционал.

Рандомизация как метод “погружения” исследуемого события (объекта) в ансамбль случайных событий с последующим анализом его числовых характеристик использовался давно и в разных прикладных областях. Прежде всего следует указать на задачи, в которых нужно формировать представительные выборки, например, в клинических исследованиях [9], социальных опросах [10], формировании рейтингов [11] и усредненных сетевых графиков [12] и др.

Рандомизация оказывается полезной в задачах, связанных с предсказанием неких событий с указанием вероятности их наступления. При этом вероятность параметризуется, и данные используются для оценивния указанных параметров [13, 14]. Найденные оценки позволяют вычислить размеры доверительных интервалов. Если эти данные относятся к конкретному индивиду, то найденные таким способом доверительные интервалы квалифицируются как индивидуальные [15].

Идеи рандомизации оказались весьма продуктивными в задачах, где используются нейронные сети. При этом нейронная сеть стала рандомизированной, т.е. содержащей случайные параметры в слоях, в функциях активации, и в количестве слоев [16]. Для обучения такой сети применяется модифицированный алгоритм random forest.

Применение рандомизации при конструировании алгоритмов оказалось весьма эффективным для улучшения их вычислительных свойств. При выполнении некоторых операций запускались соответствующие случайные механизмы, которые при последовательном их выполнении приводили к решению поставленной задачи [17]. Довольно много работ на эту тему в области автоматического управления, где многие задачи управления сводятся к выпуклой и не выпуклой оптимизации. Применение рандомизированных алгоритмов позволяет найти либо точное их решение, либо решение с вероятностью [18–20]. И наконец, следует упомянуть пласт работ по теории игр, где переход к рандомизированным (смешанным) стратегиям позволяет получить решение минимаксной задачи [21].

В данной работе делается очередной шаг в направлении расширения области применения концепции рандомизации. Мы будем синтезировать *рандомизированную модель* как математическую модель со случайными параметрами. В зависимости от структуры модели случайные параметры характеризуются либо функциями ПРВ, либо функциями РВ, которые определяются с учетом реальных данных и неопределенности путем максимизации энтропийных функционалов.

Энтропийно-оптимальные функции ПРВ или РВ сэмплируются, т.е. трансформируются в соответствующие последовательности случайных чисел, и генерируется реальный ансамбль выходов рандомизированной модели. Применяя стандартные методы математической статистики, вычисляются эмпирические числовые характеристики ансамбля: среднее, дисперсию, доверительные интервалы, квантили и др. В результате могут обнаружиться неожиданные свойства рандомизированной модели.

Приведем пример. Рассмотрим модель динамического объекта первого порядка.

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = x_0 \exp(at).$$

В зависимости от знака a траектория либо убывает, либо возрастает при $t \to \infty$.

Рассмотрим рандомизированную модель, в которой параметр a – случайный с функцией ПРВ

$$P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $\bar{a}$ – среднее значение и σ^2 – дисперсия параметра a.

Рандомизированная модель генерирует ансамбль траекторий, средняя траектория в котором имеет вид:

$$\bar{x}(t) = x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(at)P(a)da = x_0 \exp\left(\bar{a}t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Отсюда следует, что при $\bar{a} \le 0$ траектория имеет минимум в точке $t^* = \bar{a}/\sigma^2$, что не реализуется в модели с неслучайным параметром a. Рисунок 1 иллюстрирует описанную ситуацию.

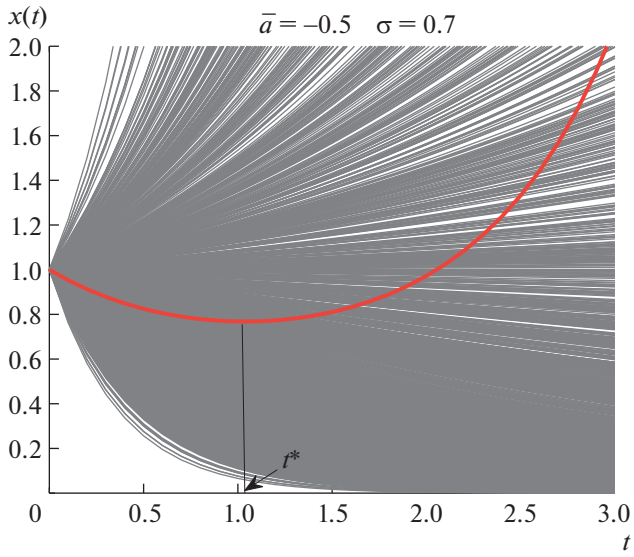


Рис. 1

3. ЭНТРОПИЙНО-РАНДОМИЗИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ (ЭРО) ФУНКЦИЙ ПРВ

3.1. Введение

Существующие методы оценивания функций ПРВ (максимальное правдоподобие, метод моментов, метод наименьших квадратов и др.) никак не учитывают неопределенность, сопровождаемую эти задачи, и требуют задания формы функции и ее параметризацию. Кроме того, приходится принимать весьма обременительные и непроверяемые гипотезы о свойствах данных как выборки из генеральной совокупности [22, 23].

3.2. Математическая формулировка метода ЭРО

Рассмотрим скалярную аналитическую функцию $\hat{y} = \varphi(x, \boldsymbol{\theta})$ с рандомизированными параметрами $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ интервального типа, т.е.

$$\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{E} = [\boldsymbol{\theta}^-, \boldsymbol{\theta}^+]. \tag{3.1}$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функцией плотности распределения вероятностей (ПРВ) $P(\boldsymbol{\theta})$, определенной на множестве $\mathscr{E}$.

Поскольку параметры рандомизированные, то и переменная $\hat{y}$ – рандомизирована и принимает значения в множестве $\hat{\mathcal{Y}}$, размеры которого определяются функцией $\varphi(x, \boldsymbol{\theta})$ и вероятностными свойствами параметров.

Пусть имеются r измерений $\{x_1, \ldots, x_r\} = \mathbf{x}^{(r)}$, и $\{y_1, \ldots, y_r\} = \mathbf{y}^{(r)}$. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}), \tag{3.2}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta})$ имеет компоненты $\varphi(x_t, \boldsymbol{\theta}), t = \overline{1, r}$.

Вектор $\hat{\mathbf{y}}$ (3.2) – рандомизированный. Рассмотрим в качестве его числовых характеристик r-мерный вектор с компонентами в виде нормированных моментов s-й степени:

$$\mathbf{m}^{(s)}[P(\boldsymbol{\theta})] = \left(\int_{\mathscr{E}} P(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3.3}$$

Заметим, что (3.3) является векторным функционалом от функции ПРВ $P(\boldsymbol{\theta})$.

Измеренные данные в виде вектора $\mathbf{y}^{(r)}$, будем приравнивать векторам нормированных моментов[1]:

$$\mathbf{m}^{(s)}[P(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{y}^{(r)}. \tag{3.4}$$

Из этих выражений следует, что совпадение моментных характеристик ансамбля рандомизированных переменных зависит от функции ПРВ $P(\boldsymbol{\theta})$.

Таким образом, *задача оценивания функции ПРВ параметров* формулируется следующим образом [25]:

$$\mathcal{H}[P(\boldsymbol{\theta})] = -\int\limits_{\mathcal{E}} P(\boldsymbol{\theta}) \ln P(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \max_{P(\boldsymbol{\theta})} \tag{3.5}$$

при ограничениях:

– нормировки функций ПРВ

$$\int\limits_{\mathcal{E}} P(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = 1; \tag{3.6}$$

– эмпирических балансов

$$\mathbf{m}^{(s)}[P(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{y}^{(r)}. \tag{3.7}$$

Задача (3.5)–(3.7) относится к классу ляпуновских [26, 27], которые характеризуются тем, что функционалы и ограничения интегрального типа и выпуклые.

3.3. Условия оптимальности

Условия оптимальности в задачах оптимизации ляпуновского типа формулируются в терминах вещественных множителей Лагранжа. При этом используются производные Гато интегральных функционалов [29].

Для задачи (3.5)–(3.7) функционал Лагранжа имеет вид:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}[P(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\lambda}] = \mathcal{H}[P(\boldsymbol{\theta})] + \mu\left(1 - \int\limits_{\mathcal{E}} P(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}\right) + \\ + \langle \boldsymbol{\lambda}, (\mathbf{y}^{(r)} - \mathbf{m}^{(s)}[P(\boldsymbol{\theta})]) \rangle.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Технике получения условий оптимальности в терминах производной Гато посвящено Приложение А.

Используя условия оптимальности (1.1), получим оптимальную функцию ПРВ, параметризованную множителями Лагранжа $\boldsymbol{\theta}$:

$$\begin{gathered}P^*(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\exp(\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) \rangle)}{\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda})}, \\ \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}) = \int\limits_{\mathcal{E}} \exp(\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) \rangle) d\boldsymbol{\theta}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из равенств (3.9) видно, что энтропийно-оптимальная функция ПРВ параметризована множителями Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$, которые определяются решением уравнений *эмпирических балансов*:

$$\mathcal{P}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \int\limits_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) \exp(\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) \rangle) = \mathbf{y}^{(r)}. \tag{3.10}$$

Решение этих уравнений – неявная функция $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{y}^{(r)}), \mathbf{x}^{(r)})$ зависит от измеренных данных ($\mathbf{y}^{(r)}$, $\mathbf{x}^{(r)}$), по которым строятся ЭРО функции ПРВ.

Важным частным случаем ЭРО является балансирование с данными средних характеристик ансамбля (3.3):

$$\mathbf{m}^{(1)}[P(\boldsymbol{\theta})] = \int\limits_{\mathcal{E}} P(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}. \tag{3.11}$$

В этом случае в формулах (3.8)–(3.10) $s = 1$.

3.4. Существование неявной функции $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)})$

Рассмотрим балансовые уравнения для средних числовых характеристик ансамбля (3.3):

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathcal{E}} (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}^{(r)}) \exp(\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) \rangle) d\boldsymbol{\theta} = \\ = \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda} \mid \mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r) = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{3.12}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}) = \{\varphi(x_1, \boldsymbol{\theta}), \ldots, \varphi(x_r, \boldsymbol{\theta})\}$.

Якобиан функции $\mathbf{W}$ имеет вид:

$$J_\lambda(\boldsymbol{\lambda} \mid \mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) = \left[\frac{\partial W_t}{\partial \lambda_i}, \mid (t, i) = \overline{1, r}\right], \tag{3.13}$$

где элементы этой матрицы

$$\begin{gathered}\frac{\partial W_t}{\partial \lambda_i} = \int\limits_{\mathcal{E}} (\varphi(x_t, \boldsymbol{\theta}) - y_t) \varphi(x_i, \boldsymbol{\theta}) \times \\ \times \sum_{j=1}^{r} \exp\left(-\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi(x_j, \boldsymbol{\theta})\right) d\boldsymbol{\theta}.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Теорема 1. *Пусть:*

• a) *функция* $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta})$ *непрерывна по совокупности переменных*;

• b) *для любых* $(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) \in R^r \times R^r$ *выполняются следующие условия*

$$\det J_\lambda(\boldsymbol{\lambda} \mid \mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) \neq 0, \tag{3.15}$$

$$\lim_{\|\lambda\| \to \infty} \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda} \mid \mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) = \pm\infty. \tag{3.16}$$

Тогда существует единственная неявная функция $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$, *определенная на* $R^r \times R^r$.

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении *B*.

[1] В некоторых задачах энтропийного оценивания, в частности, в задачах ценообразования активов на финансовом рынке используются нормированные моменты в качестве характеристики качества финансовых инструментов [24].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция* $\lambda(\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)})$ *– аналитическая по совокупности перменных.*

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении B.

3.5. Асимптотика ЭРО

ЭРО дает энтропийно оптимальную ПРВ (3.10), (3.11) для наборов данных $\mathbf{x}^{(r)}$, $\mathbf{y}^{(r)}$ объемами r каждый.

Далее удобнее оперировать функциями ПРВ, параметризованными экспоненциальными множителями Лагранжа $\mathbf{z} = \exp(-\boldsymbol{\lambda})$. Тогда равенство (3.10) примет следующий вид:

$$P^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}) = \frac{\prod_{j=1}^{r} [z_j]^{\varphi(x_j, \boldsymbol{\theta})}}{\mathcal{P}(\mathbf{z})}, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{E}} \prod_{j=1}^{r} [z_j]^{\varphi(x_j, \boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\theta}.$$

Отсюда видно, что структура функции ПРВ зависит от значений экспоненциальных множителей Лагранжа $\mathbf{z}$, которые, в свою очередь, зависят от от коллекции данных $\mathbf{x}^{(r)}$, $\mathbf{y}^{(r)}$.

Определение. *Будем называть оценку функции ПРВ* $P^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}^*)$ *асимптотически устойчивой, если*

$$\lim_{r \to \infty} P^*(\theta, \mathbf{z}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})) = P^*(\theta, \tilde{\mathbf{z}}), \tag{3.18}$$

где

$$\tilde{\mathbf{z}} = \lim_{r \to \infty} \mathbf{z}(\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)}). \tag{3.19}$$

Рассмотрим уравнения эмпирических балансов (3.12), перейдя в них к экспоненциальным множителям Лагранжа:

$$\Theta_t(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{r})) =$$

$$= \int_{\mathcal{E}} \prod_{j=1}^{r} [z_j(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{r})]^{\varphi(x_j, \boldsymbol{\theta})} \left(\varphi(x_t, \boldsymbol{\theta}) - y_t\right) d\boldsymbol{\theta} = 0, \tag{3.20}$$

$$t = \overline{1, r}.$$

В предыдущем разделе было показано, что уравнения (3.12) определяют неявную аналитическую функцию $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}^{r}), \mathbf{y}^{(r)})$.

В силу связи множителей и экспоненциальных множителей Лагранжа уравнения (3.20) определяют неявную аналитическую функцию $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}^{r})$, $\mathbf{y}^{(r)})$ для $(\mathbf{x}^{r}, \mathbf{y}^{(r)}) \in R^r \times R^r$.

Дифференцируем левую и правую часть этих уравнений по $\mathbf{x}^{(r)}$ и $\mathbf{y}^{(r)}$. Получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}}. \tag{3.21}$$

Все матрицы в этих уравнениях квадратные, размера $(r \times r)$.

Переходя к нормам, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 \le \left\| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}} \right\| &\le \left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}} \right\|, \\ 0 \le \left\| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}} \right\| &\le \left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}} \right\|. \end{aligned} \tag{3.22}$$

В оба эти неравенства входит норма обратной матрицы $\left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \right\|$.

Лемма 1. *Пусть квадратная матрица* A *– невырождена, т.е.* $\det A \ne 0$. *Тогда существует константа* $\alpha > 1$, *такая, что*

$$\frac{1}{\|A\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \le \frac{\alpha}{\|A\|}. \tag{3.23}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении C.

Применим неравенство (3.23) к норме обратной матрицы $\left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \right\|$. Получим следующее неравенство:

$$\left(\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right\|\right)^{-1} \le \left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \right\| \le \alpha \left(\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right\|\right)^{-1}. \tag{3.24}$$

В этих неравенствах (см. [28])

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right\| = r \max_{t,j} \left|\frac{\partial \theta_t}{\partial z_j}\right| = r\theta. \tag{3.25}$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}}\right\| \le \rho < \infty, \quad \left\|\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}}\right\| \le \omega < \infty. \tag{3.26}$$

Тогда оценка функции ПРВ $P^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}^*)$ *асимптотически устойчива в смысле* (3.18), (3.19)

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении D.

4. РАНДОМИЗИРОВАННОЕ МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ (РМО)

4.1. Введение

Машинное обучение является одним из трендовых направлений современной науки и технологий. Количество публикаций, посвященных машинному обучению, превышает десятки тысяч и продолжает расти. Основное их количество связано с разнообразными приложениями, особен-

ности которых порождают и новые задачи исследовательского характера [32, 34–36]. Несмотря на разнообразие работ по машинному обучению, их фундаментальная основа строится на методах математической статистики, а точнее, на методах оценивания вещественных параметров моделей.

Рандомизированное машинное обучение использует принципиально иной подход, связанный с оцениванием функций плотности распределения вероятностей с неизвестной структурой и параметрами. Развиваются методы оценивания функций ПРВ, основанные на условной (с учетом имеющихся данных) максимизации энтропии [37].

4.2. Постановка задачи

Рассмотрим РМО-процедуру применительно к задаче восстановления зависимостей. Предполагается, что имеются данные о входе $\mathbf{x}^{(r)}[k] \in R^n$ и выходе $\mathbf{y}^{(r)}[k] \in R^m$ объекта на временном интервале $\mathcal{T} = [0, T]$, где $k = \overline{0, T}$. На интервале наблюдения формируются блочные векторы входных и выходных данных:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(r)} &= \{\mathbf{x}^{(r)}[0], \ldots, \mathbf{x}^{(r)}[T]\}, \\ \mathbf{Y}^{(r)} &= \{\mathbf{y}^{(r)}[0], \ldots, \mathbf{y}^{(r)}[T]\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

размерности $n(T+1)$ и $m(T+1)$ соответственно.

Они сопровождаются случайными и независимыми измерительными шумами (ошибками) с заданными областями их значений (интервалами):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}[k] \in \mathcal{E}_k &= [\boldsymbol{\eta}[k]^-, \boldsymbol{\eta}^+[k]], \\ \boldsymbol{\xi}[k] \in \mathcal{K}_k &= [\boldsymbol{\xi}[k]^-, \boldsymbol{\xi}^+[k]], \quad k = \overline{0, T}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Измерительные шумы на интервале $\mathcal{T}$ будем так же характеризовать соответствующими блочными векторами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} \to \mathbf{E} &= \{\boldsymbol{\eta}[0], \ldots, \boldsymbol{\eta}[T]\}^{\mathsf{T}} - n(T+1) - \text{вектор}, \\ \boldsymbol{\xi} \to \mathbf{K} &= \{\boldsymbol{\xi}[0], \ldots, \boldsymbol{\xi}[T]\}^{\mathsf{T}} - m(T+1) - \text{вектор}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Согласно (4.2) области значений этих векторов имеют вид:

$$\mathbf{E} \in \mathcal{E} = \bigcup_{k=0}^{T} \mathcal{E}_k, \quad \mathbf{K} \in \mathcal{K} = \bigcup_{k=0}^{T} \mathcal{K}_k. \tag{4.4}$$

Наблюдаемые входные $\hat{\mathbf{x}}[k]$ и выходные данные $\mathbf{v}[k]$ предположительно аддитивно связаны с измерительными шумами:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}^{(r)}[k] + \boldsymbol{\eta}[k], \quad \mathbf{v}[k] = \hat{\mathbf{y}}[k] + \boldsymbol{\xi}[k], \\ k = \overline{0, T}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\hat{\mathbf{y}}[k]$ – выход рандомизированной модели исследуемого объекта:

$$\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)}[k] + \boldsymbol{\eta}[k] | \mathbf{a}), \tag{4.6}$$

где: $\mathbf{f} \in R^m$, $\mathbf{a} \in R^r$ – вектор рандомизированных параметров интервального типа:

$$\mathbf{a} \in \mathcal{A} = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]. \tag{4.7}$$

На интервале наблюдения $\mathcal{T}$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \hat{\mathbf{Y}} + \mathcal{K}, \\ \hat{\mathbf{Y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}} &= \{\hat{\mathbf{y}}[0], \ldots, \hat{\mathbf{y}}[T]\}^{\top} - \\ &- n(T+1) - \text{блочный вектор}, \\ \mathbf{F} &= \{\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)}[0] + \boldsymbol{\eta}0]), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)}[T] + \boldsymbol{\eta}[T])\}^{\top}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Поскольку параметры и измерительные ошибки являются случайными объектами, введем для их характеризации

• совместную функцию ПРВ $W(\mathbf{a}, \mathbf{E})$, определенную на множестве

$$\mathcal{W} = \mathcal{A} \cup \mathcal{E}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{E}) \in \mathcal{W}, \tag{4.10}$$

где множество $\mathcal{E}$ определено в (4.4);

• функцию ПРВ $Q(\mathbf{K})$, определенную на множестве $\mathcal{K}$ (4.4).

Таким образом, используя наборы реальных данных $\mathbf{X}^{(r)}$ и $\mathbf{Y}^{(r)}$, определить функции ПРВ $W(\mathbf{a}, \mathbf{E})$ и $Q(\mathbf{K})$.

4.3. Алгоритм "жесткого" РМО для восстановления функций ПРВ параметров и шумов

Алгоритм РМО для случая 1-моментных эмпирических балансов ("жесткое" РМО) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}[W(\mathbf{a}, \mathbf{E}), Q(\mathbf{K})] = \\ &= -\int_{\mathcal{W}} W(\mathbf{a}, \mathbf{E}) \ln W(\mathbf{a}, \mathbf{E}) d\mathbf{a} d\mathbf{E} - \\ &- \int_{\mathcal{K}} Q(\mathbf{K}) \ln Q(\mathbf{K}) d\mathbf{K} \Rightarrow \max, \end{aligned} \tag{4.11}$$

при ограничениях:

– нормировки функций ПРВ

$$\int_{\mathcal{W}} W(\mathbf{a}, \mathbf{E}) d\mathbf{a} d\mathbf{E} = 1, \quad \int_{\mathcal{K}} Q(\mathbf{K}) d\mathbf{K} = 1; \tag{4.12}$$

– эмпирических балансов 1-й степени

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{W}} W(\mathbf{a}, \mathbf{E}) \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E} | \mathbf{a}) \otimes d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E} + \\ &+ \int_{\mathcal{K}} Q(\mathbf{K}) \mathbf{K} \otimes d\mathbf{K} = \mathbf{Y}^{(r)}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где $\otimes$ – знак покоординатного умножения векторов.

Применяя технику формирования условий оптимальности с помощью производных Гато (см.

Приложение В), получим следующие выражения для энтропийно-оптимальных функций ПРВ параметров и измерительных шумов, параметризованных множителями Лагранжа $\mathbf{\Lambda}$ и зависящих от входных $\mathbf{X}^{(r)}$ и выходных $\mathbf{Y}^{(r)}$ данных:

$$\begin{gathered} W^*(\mathbf{a},\mathbf{E}\,|\,\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \\ = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) \otimes \overline{\exp}(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a})\rangle), \\ Q^*(\mathbf{K}\,|\,\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{\Lambda}) \otimes \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big), \end{gathered} \tag{4.14}$$

где векторы

$$\begin{gathered} \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \int\limits_{\mathcal{W}} \overline{\exp}(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a})\rangle) \otimes d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E}, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}) = \int\limits_{\mathcal{K}} \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big) \otimes d\mathbf{K}. \end{gathered} \tag{4.15}$$

В этих равенствах $\overline{\exp}$ – вектор с компонентами $\exp(\bullet)$.

Множители Лагранжа $\mathbf{\Lambda}$ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}) + \mathbf{G}(\mathbf{\Lambda}) \otimes \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \\ = \mathbf{Y}^{(r)} \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}) \otimes \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}), \end{gathered} \tag{4.16}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \int\limits_{\mathcal{W}} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a}) \otimes \\ \otimes \overline{\exp}(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a})\rangle) \otimes d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{\Lambda}) = \int\limits_{\mathcal{K}} \mathbf{K} \otimes \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big) \otimes d\mathbf{K}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Из приведенных выражений следует, что оценки функций ПРВ параметров и измерительных шумов, соответствующие максимальной (в единицах информационной энтропии) неопределенности, зависят не только от имеющихся данных о входе и выходе исследуемого объекта, но и от модели объекта. Причем в общем случае нелинейной модели вероятностные свойства рандомизированных параметров и измерительных шумов на входе характеризуются оптимальной оценкой совместной функции ПРВ. Последнее свидетельствует о связи вероятностных свойств энтропийно-рандомизированных параметров и входных измерительных шумов.

Если предполагается, что входные данные измеряются точно, т.е. $\boldsymbol{\eta} = 0$, процедура формирования оценок функций ПРВ упрощается. В этом случае имеем:

$$\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)}[k]\|\mathbf{a}). \tag{4.18}$$

В принятых выше обозначениях функции ПРВ параметров и шумов приобретают следующий вид:

$$\begin{gathered} W^*(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) \otimes \overline{\exp}\Big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)}\,|\,\mathbf{a})\rangle\Big), \\ Q^*(\mathbf{K}\,|\,\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{\Lambda}) \otimes \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big), \end{gathered} \tag{4.19}$$

где векторы

$$\begin{gathered} \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \int\limits_{\mathcal{W}} \overline{\exp}(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)}\,|\,\mathbf{a})\rangle) \otimes d\mathbf{a}, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}) = \int\limits_{\mathcal{K}} \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big) \otimes d\mathbf{K}. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Множители Лагранжа определяются из уравнения (4.16), где

$$\begin{gathered} \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{X}^{(r)}) = \\ = \int\limits_{\mathcal{W}} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)}\,|\,\mathbf{a}) \otimes \overline{\exp}(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)}\,|\,\mathbf{a})\rangle) \otimes d\mathbf{a}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{\Lambda}) = \int\limits_{\mathcal{K}} \mathbf{K} \otimes \overline{\exp}\big(\langle \mathbf{\Lambda}, \mathbf{K}\rangle\big) \otimes d\mathbf{K}. \end{gathered} \tag{4.21}$$

4.4. Алгоритм “мягкого” РМО для восстановления функций ПРВ

В некоторых задачах РМО не требуется строгое выполнение балансов между числовыми характеристиками ансамбля выхода модели и данными. Учитывая (4.5), (4.6), воспользуемся евклидовым расстоянием между наблюдаемым выходом модели и данными в виде:

$$\begin{gathered} \rho(\mathbf{V},\mathbf{Y}^{(r)}) = \|\mathbf{V} - \mathbf{Y}^{(r)}\|_E = \\ = \|\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a}) + \mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)}\|_E \le \\ \le \|\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a})\|_E + \|\mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)}\|_E = \\ = \varrho_1(\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a})) + \varrho_2(\mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)}) = \overline{\varrho}(\mathbf{a},\mathbf{E},\mathbf{K}). \end{gathered} \tag{4.22}$$

Из этих равенств следует, что верхняя граница расстояния $\overline{\varrho}$ является функцией случайных параметров $\mathbf{a}$ и измерительных шумов $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$.

Определим функционал $\mathcal{R}$, являющийся средним функции $\overline{\varrho}$:

$$\begin{gathered} \mathcal{R}[W(\mathbf{a},\mathbf{E}), Q(\mathbf{K})] = \\ = \int\limits_{\mathcal{W}\times\mathcal{E}} W(\mathbf{a},\mathbf{E})\varrho_1(\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}\,|\,\mathbf{a}) \otimes d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E} + \\ + \int\limits_{\mathcal{K}} Q(\mathbf{K})\varrho_2(\mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)}) \otimes d\mathbf{K}. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Алгоритм “мягкого” РМО имеет вид:

$$\begin{gathered} \mathcal{J}[W(\mathbf{a},\mathbf{E}), Q(\mathbf{K})] = -\mathcal{H}[W(\mathbf{a},\mathbf{E}), Q(\mathbf{K})] - \\ - \mathcal{R}[W(\mathbf{a},\mathbf{E}), Q(\mathbf{K})] \Rightarrow \max, \end{gathered} \tag{4.24}$$

при ограничениях нормировки ПРВ:

$$\int\limits_{\mathcal{W}\times\mathcal{E}} W(\mathbf{a},\mathbf{E})d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E} = 1, \quad \int\limits_{\mathcal{K}} Q(\mathbf{K})d\mathbf{K} = 1. \tag{4.25}$$

Задача оптимизации (4.24), (4.25) также ляпуновского типа, и ее решение имеет вид:

$$W^*(\mathbf{a},\mathbf{E}) = \mathbb{W}^{-1}\exp(\varrho_1(\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}|\mathbf{a})),$$
$$Q^*(\mathbf{K}) = \mathbb{Q}^{-1}\exp(\varrho_2(\mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)})), \quad (4.26)$$

где нормировочные константы

$$\mathbb{W} = \int\limits_{\mathcal{W}\times\mathcal{E}} \exp(\varrho_1(\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)} + \mathbf{E}|\mathbf{a})) \otimes d\mathbf{a} \otimes d\mathbf{E},$$
$$\mathbb{Q} = \int\limits_{\mathcal{K}} \exp(\varrho_2(\mathbf{K} - \mathbf{Y}^{(r)})) \otimes d\mathbf{K}. \quad (4.27)$$

Алгоритм “мягкого” РМО позволяет получать аналитические выражения для энтропийно-оптимальных ПРВ параметров и шумов, не требующие решения балансовых уравнений. Из (4.26) следует, что эти ПРВ экспоненциального класса, но их морфология определяется не только структурой математической модели, но и принятыми векторными нормами.

5. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ЭРО

Метод энтропийно-рандомизированного оценивания, изложенный в первом разделе, позволяет восстанавливать функции ПРВ случайных параметров. До сих пор рассматривались непрерывно-дифференцируемые функции ПРВ. Однако существует класс задач, где присутствуют дискретные рандомизированные объекты. Ансамбли таких объектов характеризуются дискретными функциями распределения вероятностей, значения которых принадлежат интервалу [0, 1], или дискретными функциональными формами распределения вероятностей, значения которых принадлежат неотрицательному интервалу $[0,\infty)$. Одними из таковых являются задачи кластеризации.

5.1. Введение

Кластеризация объектов различной природы является одним из направлений машинного обучения, в котором метки учителя заменяются какими-то внутренними характеристиками объектов или внешними характеристиками кластеров. К внутренним относятся расстояния между объектами внутри кластера [50, 51], характристики сходства объектов [52], а к внешним – расстояния между кластерами [53]. Как математическая задача, кластеризация не имеет универсальной формулировки, и поэтому алгоритмы кластеризиции носят, как правило, эвристический характер [54, 55].

Весьма развитое направление связано с кластеризацией больших массивов текстов. Ему обычно предшествуют процедуры выявления скрытых признаков, основанные на латентном семантическом анализе [56], которые затем используются для кластеризации [57, 58].

Большинство алгоритмов кластеризации используют расстояние между объектами, измеряемое в принятой метрике, и переборные алгоритмы с эвристическим управлением [59]. Результаты кластеризации существенно зависят от принятой метрики. Поэтому числовая оценка качества кластеризации оказывается весьма важной [60–62].

Предлагаемый метод кластеризации основан на рандомизированном представлении ансамбля возможных кластеров, характеризуемым функцией распределения вероятностей.

5.2. Принцип рандомизированной кластеризации

Рассмотрим n объектов, состояние каждого характеризуется вектором $\mathbf{x}^{(i)} \in R^m$. В указанном пространстве множество объектов отображается в облако из n точек. Пусть, для начала, это множество точек нужно разделить на два подмножества – кластера $\mathcal{K}_s$ и $\mathcal{K}_{n-s}$ с заданными объемами (количеством объектов) s и $n - s$.

Поскольку количество объектов конечно и объем кластера $\mathcal{K}_s$ задан, то формально можно образовать конечное количество кластеров типа $\mathcal{K}_s$ объемом s, но с различным составом объектов. Отбор объектов в кластеры будем производить случайным образом и независимо друг от друга. Количество таких кластеров равно числу сочетаний $C_n^s = \dfrac{n!}{s!(n-s)!}$, но состав их образован случайным механизмом. Из оставшихся объектов образуются кластеры типа $\mathcal{K}_{n-s}$.

Таким образом, сформирован ансамбль рандомизированных кластеров $\mathcal{K}_s$, объема C_n^s, который характеризуется пока неизвестной дискретной функцией распределения вероятностей $p(k, s)$, где $k \to \{i_1,\ldots,i_s\}$ – номер конкретного кластера в ансамбле; $i_1,\ldots,i_s$ – номера объектов, входящих в k-кластер.

Для определения функции $p(k, s)$ воспользуемся методом энтропийно-рандомизированного оценивания (ЕРО). Согласно этому методу свойства оптимальности функции $p(k, s)$ характеризуются максимумом информационной энтропии при условии, что принятый *средний* показатель качества ансамбля кластеров принимает заданное значение.

Тогда наиболее вероятный кластер в ансамбле определяется максимумом функции $p^*(k^*, s) = \max_k p^*(k,s)$. Поскольку информационная энтропия определяется функцией распределения вероятностей, то вычисляется ее значение $H^*(s)$ для $p^*(k,s)$, и определяется $s^* = \max_s H^*(s)$.

5.3. Числовая характеристика множества объектов

Рассмотрим множество из n объектов, каждый из которых характеризуеся вектором $\mathbf{x}^{(i)}(i = \overline{1,n})$ из пространства R^m. Математическим образом совокупности объектов является блочный вектор следующего вида:

$$\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \cdots \\ \mathbf{x}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Определим расстояние между его компонентами – векторами $\mathbf{x}^{(i)}(i = \overline{1,n})$ в виде:

$$\varrho(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|_{R^m}, \tag{5.2}$$

где $\| \bullet \|_{R^m}$ – норма в пространстве R^m. Сформируем матрицу расстояний

$$D_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 0 & \varrho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \cdots & \varrho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ \varrho(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}) & 0 & \cdots & \varrho(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \varrho(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(1)}) & \varrho(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Определим в качестве числовой характеристики вектора $\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)}$ среднее значение элементов матрицы расстояний $D_{(n\times n)}$, которое будем обозначать $\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)})$ и называть *индикатором* вектора $\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)}$:

$$\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)}) = \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)=1}^{n} \varrho(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}). \tag{5.4}$$

Важной характеристикой вектора $\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)}$ являются минимальный и максимальный элементы матрицы расстояний $D_{(n\times n)}$:

$$\begin{aligned} \inf(D_{(n\times n)}) &= \min_{i,j} \varrho(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}), \\ \sup(D_{(n\times n)}) &= \max_{i,j} \varrho(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Заметим, что элементы матриц расстояний формируемых кластеров должны принадлежать интервалу

$$\mathcal{I} = [\inf(D), \sup(D)]. \tag{5.6}$$

5.4. Алгоритм рандомизированной бинарной кластеризации

Задача бинарной кластеризации состоит в распределении n объектов по двум кластерам $\mathcal{K}_{(s^*)}$, $\mathcal{K}_{(n-s^*)}$ с объемами s^* и $(n - s^*)$ объектов соответственно:

$$\begin{gathered} \mathcal{K}_{(s^*)} = \{i_1, \ldots, i_{s^*}\}, \quad \mathcal{K}_{(n-s^*)} = \{j_1, \ldots, j_{(n-s^*)}\}; \\ (i_1, \ldots, i_s) \neq (j_1, \ldots, j_{(n-s^*)}), \quad (i_\alpha, j_\beta) = \overline{1,n}, \\ \alpha = \overline{1,s^*}, \quad \beta = \overline{1,n-s^*}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

1. $s = \tilde{s}$ – задано. При каждом фиксированном объеме кластера, т.е. значении $\tilde{s}$, процедура его формирования состоит в выделении в векторе $\mathbf{X}^{(1,\ldots,n)}$ подвектора

$$\mathbf{x}_{(\tilde{s})} = \mathbf{x}_{(\tilde{s})}^{(i_1,\ldots,i_{\tilde{s}})} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i_1)} \\ \cdots \\ \mathbf{x}^{(i_{\tilde{s}})} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

размера $\tilde{s} < n$.

Если подвектор $\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(i_1,\ldots,i_{\tilde{s}})}$ выделен, то оставшиеся компоненты образуют подвектор $\mathbf{X}_{(n-\tilde{s})} = \mathbf{X}_{(n-\tilde{s})}^{j_1,\ldots,j_{n-\tilde{s}}}$, а совокупность номеров оставшихся компонент образуют кластер $\mathcal{K}_{(n-\tilde{s})}$.

Согласно *принципу рандомизированной бинарной кластеризации* вектор $\mathbf{x}_{(\tilde{s})}$ объявляется случайным. Перенумеруем набор

$$\{i_1, \ldots, i_{\tilde{s}}\} \to k = \overline{1, K(\tilde{s})}; \quad K(\tilde{s}) = C_{\tilde{s}}^n. \tag{5.9}$$

Таким образом, в результате рандомизации генерируется конечный ансамбль случайных векторов:

$$\mathcal{X}_{(\tilde{s})} = \{\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^1, \ldots, \mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{K(\tilde{s})}\}. \tag{5.10}$$

Поскольку векторы в этом ансамбле случайные, то существуют вероятности реализации элементов этого ансамбля, т.е. функция распределения вероятностей $p(\tilde{s}, k)$, где $\tilde{s}$ – объем кластера, а k – номер его реализации:

$$\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)} \text{ с вероятностью } p(\tilde{s}, k), \quad k = \overline{1, K(\tilde{s})}. \tag{5.11}$$

Итак, задача рандомизированной бинарной кластеризации сводится к определению подходящей в каком-то смысле функции дискретного распределения вероятностей $p(\tilde{s}, k), k = \overline{1, K(\tilde{s})})$.

Рассмотрим кластер $\mathcal{K}_1$ объемом $\tilde{s}$ и соответствующий ему блочный вектор:

$$\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(i_1,\ldots,i_{\tilde{s}})} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i_1)} \\ \cdots \\ \mathbf{x}^{(i_{\tilde{s}})} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)}, \quad \{i_1, \ldots, i_{\tilde{s}}\} \to k, \tag{5.12}$$

и матрицу расстояний:

$$D_{(\tilde{s})}^{(i_1,\ldots,i_{\tilde{s}})} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & \varrho^{(k)}(\mathbf{x}^{i_1}, \mathbf{x}^{i_2}) & \cdots & \varrho^{(k)}(\mathbf{x}^{i_1}, \mathbf{x}^{i_{\tilde{s}}}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \varrho^{(k)}(\mathbf{x}^{i_{\tilde{s}}}, \mathbf{x}^{i_1}) & \varrho^{(k)}(\mathbf{x}^{i_{\tilde{s}}]}, \mathbf{x}^{i_2}) & \cdots & 0 \end{pmatrix} = D_{(\tilde{s})}^{(k)}. \tag{5.13}$$

Воспользуемся понятием индикатора матрицы (5.4) и определим его для кластера $\mathcal{K}_s$ в виде:

$$\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) = \frac{1}{\tilde{s}^2}\sum_{(t,h)=1}^{\tilde{s}} \varrho^{(k)}(\mathbf{x}^{i_t}, \mathbf{x}^{i_h}). \tag{5.14}$$

Поскольку векторы $\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}$ предполагаются случайными объектами, на их ансамбле существует функция распределения $p(\tilde{s},k)$. Определим *средний индикатор* в виде:

$$\mathcal{M}\{\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})})\} = \sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}). \tag{5.15}$$

Сформулируем *алгоритм бинарной кластеризации* при фиксированном значении $s = \tilde{s}$ в следующем виде:

– максимизация энтропийного функционала Больцмана-Шеннона:

$$\mathcal{H}_B[p(\tilde{s},k)|\tilde{s}] = -\sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\ln p(\tilde{s},k) \Rightarrow \max_{p(\tilde{s},k)}, \tag{5.16}$$

– при ограничениях:

$$0 \le p(\tilde{s},k) \le 1, \quad k = \overline{1, K(\tilde{s})}, \tag{5.17}$$

$$\inf(D) \le \sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) \le \sup(D), \tag{5.18}$$

где нижняя $\inf(D)$ и верхняя $\sup(D)$ границы значений элементов матрицы расстояний для исходного вектора определены в (5.6), и индикатор $\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})})$ определен равенством (5.14).

Задача (5.16)–(5.18) является конечно-мерной. Ограничения (5.17) можно опустить, если в качестве целевого функционала использовать энтропию Ферми [49]. После преобразований будем иметь следующую конечно-мерную задачу энтропийно-линейного программирования [64]:

$$H(\mathbf{p}|\tilde{s}) = -\sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p_{\tilde{s},k}\ln p_{\tilde{s},k} + \\ + (1 - p_{\tilde{s},k})\ln(1 - p_{\tilde{s},k}) \Rightarrow \max_{0 \le p_{\tilde{s},k} \le 1},$$

$$\sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\overline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) \le -1, \quad \overline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) = -\frac{\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})})}{\inf(D)} \tag{5.19}$$

$$\sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\underline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) \le 1, \quad \underline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})}) = \frac{\mathrm{dis}(\mathbf{X}^{(k)}_{(\tilde{s})})}{\sup(D)}.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L[\mathbf{p},\lambda_1,\lambda_2|\tilde{s}] = H(\mathbf{p}|\tilde{s}) + \\ + \lambda_1\left(-1 - \sum_{k=1}^{K(\tilde{s}} p(\tilde{s},k)\overline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})})\right) + \\ + \lambda_2\left(1 - \sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p(\tilde{s},k)\underline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})})\right). \tag{5.20}$$

Согласно теоремы Куна–Таккера [65], условия оптимальности имеют вид:

$$\nabla_{\mathbf{p}} L(\mathbf{p}^*\lambda_1^*,\lambda_2^*|\tilde{s}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L(\mathbf{p}^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*|\tilde{s})}{\partial\lambda_i} \ge 0,$$

$$\lambda_i\frac{\partial L(\mathbf{p}^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*|\tilde{s})}{\partial\lambda_i} = 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = 1,2.$$

Первая группа условий аналитически разрешима относительно компонент вектора $\mathbf{p}$:

$$p^*(\tilde{s},k|\lambda_1,\lambda_2) = \\ = \frac{\exp(-\lambda_1\overline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}) - \lambda_2\underline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}))}{1 + \exp(-\lambda_1\overline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}) - \lambda_2\underline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}))}, \\ k = \overline{1, K(\tilde{s})}. \tag{5.21}$$

Вторая группа условий преобразуется в следующие неравенства:

$$L_{\lambda_1}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*) = \\ = -1 - \sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*)\overline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}) \ge 0, \\ L_{\lambda_2}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*) = \\ = 1 - \sum_{k=1}^{K(\tilde{s})} p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*)\underline{\mathrm{dis}}(X^{(k)}_{(\tilde{s})}) \ge 0. \tag{5.22}$$

Третья группа условий сводится к следующим уравнениям:

$$\lambda_1^* L_{\lambda_1}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*) = 0, \\ \lambda_2^* L_{\lambda_2}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^*,\lambda_2^*) = 0, \\ \lambda_1^* \ge 0, \quad \lambda_2^* \ge 0. \tag{5.23}$$

Для определения неотрицательного решения указанных уравнений можно применить мультипликативный алгоритм следующего вида [49]:

$$\lambda_1^{q+1} = \lambda_1^q(1 + \gamma L_{\lambda_1}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^q,\lambda_2^q)), \\ \lambda_2^{q+1} = \lambda_2^q(1 + \gamma L_{\lambda_2}(p^*(\tilde{s},k|\lambda_1^q,\lambda_2^q)), \\ (\lambda_1^0,\lambda_2^0) > 0. \tag{5.24}$$

Здесь $\gamma > 0$ – параметр, выбираемый из условий $\mathfrak{G}$-сходимости итерационного процесса (5.24).

Алгоритм (5.24) называется $\mathfrak{G}$-*сходящимся*, если в пространстве R_+^2 существует множество $\mathfrak{G}$ и скаляры $a(\mathfrak{G})$ и γ такие, что для всех $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \mathfrak{G}$ и $0 < \gamma \le a(\mathfrak{G})$ он сходится к решению λ_1^*, λ_2^* уравнения (5.23), причем сходимость в окрестности λ_1^*, λ_2^* – линейная.

Теорема 3. *Алгоритм* (5.24) $\mathfrak{G}$-*сходится к решению задачи* (5.24).

Доказательство приведено в Приложении Е.

Таким образом, определена функция распределения вероятностей

$$p^*(\tilde{s}, k \,|\, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \\ = \frac{\exp(-\lambda_1^* \overline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)}) - \lambda_2^* \underline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)}))}{1 + \exp(-\lambda_1^* \overline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)}) - \lambda_2^* \underline{\mathrm{dis}}(\mathbf{X}_{(\tilde{s})}^{(k)}))}, \quad (5.25) \\ k = \overline{1, K(s)}.$$

Естественно предположить, что, согласно общему принципу статистической механики, реализуемый кластер (при фиксированном объеме $\tilde{s}$) соответствует максимуму функции распределения вероятностей, т.е.

$$\mathcal{K}_{\tilde{s},k^*} \Rightarrow (\tilde{s}, k^*) = \max_k p^*(\tilde{s}, k \,|\, \lambda_1^*, \lambda_2^*). \quad (5.26)$$

2. $s = \overline{1, n-1}$. Рассмотрим случай, когда объем кластера не задан, т.е $\tilde{s} = s$, которое принимает значения в интервале $[1, n-1]$. При этом образуется последовательность максимальных значений информационной энтропии

$$H_B(s) = -\sum_{k=1}^{K(s)} p^*(s, k^*) \ln p^*(s, k^*). \quad (5.27)$$

Оптимальное значение объема кластера определяется максимальным элементом в этой последовательности:

$$s^* = \operatorname*{argmax}_s H_B(s). \quad (5.28)$$

6. ЭНТРОПИЙНЫЕ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ РЕДУКЦИИ РАЗМЕРНОСТИ МАТРИЦЫ ДАННЫХ

Во многих прикладных задачах обработки данных последние форматируются в виде прямоугольных матриц $U_{(m\times s)}$. Без ограничения общности будем считать m – количество объектов (прецендентов), s – количество признаков.

По разным причинам возникает необходимость "сжать" матрицу данных, т.е. трансформировать ее в матрицу, размерности $(m \times r)$ или $(n \times r)$, $n < m$, $r < s$.

Данная проблема вложена в более общую: приближение заданного набора многомерных точек маломерным аффинным многообразием [38]. Здесь следует отметить метод главных компонент (МГК) [39] и его робастные версии [40], а так же метод случайных проекций [41, 42].

В [43] был предложен энтропийный метод одномерного (столбцы или строки) детерминированного сжатия матрицы данных (EDR-метод), основанный на "прямом" и "обратном" проектировании. Матрицы-проекторы определяются путем минимизации кросс-энтропийного функционала.

Здесь EDR-метод развивается для параллельного сжатия матрицы данных с учетом их информационной емкости, реализуемого на базе условных энтропийных проекций с детерминированными и рандомизированными матрицами-проекторами. В последнем случае применяется принцип сохранения среднего расстояния между многомерными и маломерными точками в соответствующих пространствах.

6.1. Параллельное детерминированное проектирование с ограничениями информационной емкости (расширенный EDR-метод)

Параллельная реализация процедуры "прямого" и "обратного" проектирования, примененная к матрице данных $U_{(m\times s)} > 0$, приводит к следующей цепочке матричных равенств:

- "прямая" проекция

$$U_{(m\times s)} Q_{(s\times r)} = Y_{(m\times r)}, \quad B_{(n\times m)} Y_{(m\times r)} = Z_{(n\times r)}, \quad (6.1)$$

- "обратная" проекция

$$Z_{(n\times r)} W_{(r\times s)} = D_{(n\times s)}, \quad E_{(m\times n)} D_{(n\times s)} = X_{(m\times s)}. \quad (6.2)$$

Матрицы-проекторы Q, B, W, E – неотрицательные. Равенства (6.1) преобразуют матрицу $U_{(m\times s)}$ в "сжатую" матрицу $Z_{(n\times r)}$, где $n < m$, $r < s$. Равенство (6.2) преобразует матрицу $Z_{(n\times r)}$ в матрицу $X_{m\times s}$ той же размерности, что и исходная матрица данных $U_{(m\times s)}$.

Из равенств (6.1)–(6.2) имеем:

$$X_{(m\times s)} = E_{(m\times n)} \left\{ \left[B_{(n\times m)} \left(U_{(m\times s)} Q_{(s\times r)} \right) \right] W_{(r\times s)} \right\} > 0. \quad (6.3)$$

Скобки в этом равенстве указывают на последовательность операций проектирования: $(\bullet) \to [\bullet] \to \{\bullet\}$.

Элементы матрицы-проекции $Z_{(n\times s)}$ имеют вид:

$$z_{\mu,\nu} = \sum_{\beta=1}^{m} b_{\mu,\beta} \sum_{\alpha=1}^{r} u_{\beta,\alpha} q_{\alpha,\nu}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, r}. \quad (6.4)$$

Элементы матрицы $X_{(m\times s)}$ имеют вид:

$$x_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n} e_{i,\mu} \sum_{\nu=1}^{r} w_{\nu,j} \sum_{\beta=1}^{m} b_{\mu,\beta} \sum_{\alpha=1}^{s} u_{\beta,\alpha} q_{\alpha,\nu} > 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,s}. \tag{6.5}$$

Для измерения отклонения преобразованной матрицы $X_{(m\times s)}$ от исходной $U_{(m\times s)}$ воспользуемся *информационной кросс-энтропией* [44]

$$\mathcal{H}(X|U) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} s_{ij}(X|U), \tag{6.6}$$

где

$$s_{ij} = x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{u_{ij}}. \tag{6.7}$$

С учетом равенства (6.5) не трудно видеть, что информационная кросс-энтропия (6.6) есть скалярная функция от матрицы данных $U > 0$ и матриц-проекторов $(Q, B, W, E) \geq 0$, т.е.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q, B, W, E|U). \tag{6.8}$$

Важным показателем качества процедуры редукции является оптимальное снижение информационной емкости редуцированной матрицы $Z_{(n\times r)}$ по сравнению с информационной емкостью исходной матрицы данных $U_{(m\times s)}$ [45].

Информационная емкость измеряется в энтропийных терминах:

$$\mathcal{I}_Z = \sum_{(i,j)=1}^{n,r} z_{ij}(Q,B) \ln z_{ij}(Q,B) + e^{-1} nr, \quad \mathcal{I}_U = \sum_{(i,j)=1}^{m,s} u_{ij} \ln u_{ij} + e^{-1} ms. \tag{6.9}$$

Различие в указанных информационных емкостях будем характеризовать квадратичным функционалом

$$\mathcal{J}(Q,B|U) = \left(\sum_{(i,j)=1}^{n,r} z_{ij}(Q,B) \ln z_{ij}(Q,B) - A \right)^2, \tag{6.10}$$

где

$$A = e^{-1}(ms - nr) + \sum_{(i,j)=1}^{m,s} u_{ij} \ln u_{ij}. \tag{6.11}$$

Образуем обобщенный функционал

$$\mathcal{F}(Q,B,W,E|U) = \mathcal{H}(Q,B,W,E|U) + \mathcal{J}(Q,B|U), \tag{6.12}$$

и оптимальные значения неотрицательных элементов матриц-проекторов будем определять, минимизируя функционал $\mathcal{F}(Q,B,W,E|U)$:

$$(Q^*, B^*, W^*, E^*) = \arg \min_{(Q,B,W,E)\geq 0} \mathcal{F}(Q,B,W,E|U). \tag{6.13}$$

Замечание. В задаче (6.13) условие близости информационных емкостей матрицы данных и редуцированной матрицы может быть реализовано в виду соответствующего ограничения. Тогда оптимальные значения неотрицательных элементов матриц-проекторов определяются решением следующей задачи:

$$(Q^*, B^*, W^*, E^*) = \arg \min_{(Q,B,W,E)\in\Omega} \mathcal{H}(Q,B,W,E|U),$$
$$\Omega = \{(Q,B,W,E) : (Q,B,W,E) \geq 0; \quad \mathcal{I}_Z(Q,B) \geq \delta \mathcal{I}_U\}, \quad \delta \in (0,1). \tag{6.14}$$

Допустимый уровень снижения информационной емкости редуцированной матрицы регулируется параметром δ.

Алгоритм параллельной редукции. Задача (6.13) является задачей минимизации функционала на неотрицательном ортанте. Для ее решения применим метод проекций градиента, предварительно осуществив векторизацию соответствующих матриц [46].

Введем блочные векторы $\mathbf{v} = \{\mathbf{q}, \mathbf{b}\}$ и $\mathbf{c} = \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, каждый размерности

$$N = (sr + nm),$$

где векторы $\mathbf{q}$, $\mathbf{b}$ являются результатами векторизации матриц Q, B, а векторы $\mathbf{w}$, $\mathbf{e}$ являются результатами векторизации матриц W, E соответственно.

Представим (6.13) в следующем виде:

$$\mathcal{F}(\mathbf{v},\mathbf{c}|\mathbf{u}) = \mathcal{H}(\mathbf{v},\mathbf{c}|\mathbf{u}) + \mathcal{J}(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \Rightarrow \min,$$
$$\mathcal{H}(\mathbf{v},\mathbf{c}|\mathbf{u}) = \langle \mathbf{x}(\mathbf{v},\mathbf{c}), \mathbf{y}(\mathbf{v},\mathbf{c}|\mathbf{u}) \rangle_{R^{ms}},$$
$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{z}(\mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{v}) \rangle_{R^{nr}},$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} \geq \mathbf{0}. \tag{6.15}$$

Здесь приняты следующие обозначения :

- вектор $\mathbf{u}$ – результат векторизации матрицы данных U, размерности (ms); и вектор $\mathbf{x}$, размерности (ms), с компонентами (6.5);
- вектор $\mathbf{y}$, размерности (ms) с компонентами

$$y_k = \ln \frac{x_k}{u_k}, \quad k = \overline{1, ms} \tag{6.16}$$

- вектор $\mathbf{g}$, размерности (nr) с компонентами

$$g_k = \ln z_k, \quad k = \overline{1, nr}. \tag{6.17}$$

В параллельной процедуре вектор $\mathbf{v}$ объединяет элементы матриц Q, B, с помощью которых производится “сжатие” матрицы данных по одному измерению. В вектор $\mathbf{c}$ входят элементы матриц W, E, с помощью которых производится “сжатие” по второму измерению. Такое разделение векторов удобно для применения по-координатного алгоритма.

Итерационный шаг по-координатной схемы метода проекций градиента состоит из двух последовательно реализуемых этапов: на одном осуществляется итерация по $\mathbf{v}$-проекциям градиента,

а на другом – по $\mathbf{c}$-проекциям градиента функционала $\mathcal{F}(\mathbf{v},\mathbf{c}|\mathbf{u})$. Обозначим градиенты по этим векторам:

$$\begin{gathered}\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{F} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{J},\\ \nabla_{\mathbf{c}}\mathcal{F} = \nabla_{\mathbf{c}}\mathcal{H}.\end{gathered} \tag{6.18}$$

Для численного решения этой задачи применим по-координатную схему метода проекций градиента. Алгоритм минимизации функционала $\mathcal{F}$ имеет следующий вид:

а) *начальный шаг*

$$\mathbf{v}^0 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^0 > \mathbf{0};$$

б) *i-й итерационный шаг*

$$X^i = E^i\{[B^i(UQ^i)]W^i\};$$

$$\mathcal{F}^i = \mathcal{H}^i(\mathbf{v}^i,\mathbf{c}^i|\mathbf{u}) + \mathcal{J}^i(\mathbf{v}^i|\mathbf{u});$$

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \begin{cases}\mathbf{v}^i + \gamma_{\mathbf{v}}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{H}^i(\mathbf{v}^i,\mathbf{c}^i|\mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{J}^i(\mathbf{v}^i)),\\ \text{если} \quad \mathbf{v}^{(i+1)} \geq \mathbf{0},\\ \mathbf{v}^i, \quad \text{если} \quad \mathbf{v}^{(i+1)} < \mathbf{0}.\end{cases}$$

$$\mathbf{v}^{(i+1)} \Rightarrow Q^{(i+1)}, B^{(i+1)};$$

$$\mathbf{c}^{(i+1)} = \begin{cases}\mathbf{c}^n + \gamma_{\mathbf{c}}\nabla_{\mathbf{c}}\mathcal{H}(\mathbf{v}^i,\mathbf{c}^i|\mathbf{u}), \quad \text{если} \quad \mathbf{c}^{(i+1)} \geq \mathbf{0},\\ \mathbf{c}^i, \quad \text{если} \quad \mathbf{c}^{(i+1)} < \mathbf{0};\end{cases}$$

$$\mathbf{c}^{(n+1)} \Rightarrow W^{(i+1)}, E^i(i+1);$$

$$X^{(i+1)} = E^{(i+1)}\{[B^{(i+1)}(UQ^{(i+1)})]W^{(i+1)}\};$$

$$\mathcal{F}^{(i+1)} = \mathcal{H}^{i+1}(\mathbf{v}^{i+1},\mathbf{c}^{i+1}|\mathbf{u}) + \mathcal{J}^{i+1}(\mathbf{v}^{i+1}|\mathbf{u})$$

в) *условие остановки*

$$\text{если} \quad \mathcal{F}^{(i+1)} - \mathcal{F}^{(i)} \leq \Delta, \Rightarrow \text{STOP}.$$

6.2. Энтропийно-рандомизированные проекции (REDR-метод)

Рандомизированное проектирование с целью снижения размерности исходной матрицы данных основано на существовании линейного преобразования, мало меняющего среднее расстояние между точками исходного и редуцированного пространств (лемма Джонсона-Линденштраусса [66, 67].

Рассмотрим снова матрицу данных $U_{(m\times s)}$. В пространстве R^s ее отображает множество точек $\mathfrak{A} = \{\mathbf{u}^{(1)},\ldots,\mathbf{u}^{(m)}\}$. Определим, как это производилось в разделе 5, *индикатор* этой группы (матрицы-данных) в виде:

$$\text{dis}(U) = \frac{1}{m^2}\sum_{(\alpha,\beta)=1}^{m}\varrho(\mathbf{u}^\alpha,\mathbf{u}^\beta). \tag{6.19}$$

Матрицу данных $U_{(m\times s)}$ трансформируем в редуцированную матрицу $Z_{(n\times r)}$, $n < m$, $r < s$ с помощью случайных, интервальных левых $B_{(n\times m)}$ и правых $Q_{(s\times r)}$ матриц-проекторов:

$$\begin{gathered}Z_{(n\times r)} = B_{(n\times m)}U_{(m\times s)}Q_{(s\times r)},\\ Q \in \mathfrak{Q} = [Q^-,Q^+], \quad B \in \mathfrak{B} = [B^-,B^+].\end{gathered} \tag{6.20}$$

Вероятностные свойства матриц проекторов характеризуются совместной функцией ПРВ $P(Q,B)$ (ПРВ), которая определена на носителе $\mathcal{V}$:

$$(Q,B) \in \mathcal{V} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{B}. \tag{6.21}$$

Элементы редуцированной матрицы Z имеют вид:

$$\begin{gathered}z_{\mu,\nu}(Q,B) = \sum_{\beta=1}^{m} b_{\mu,\beta}\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\beta,\alpha}q_{\alpha,\nu},\\ \mu = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1,r}.\end{gathered} \tag{6.22}$$

По аналогии с (6.19) определим индикатор редуцированной матрицы $Z_{(n\times s)}$ в виде:

$$\text{dis}(Z(Q,B)) = \frac{1}{n^2}\sum_{(\eta,\kappa)=1}^{n}\varrho(\mathbf{z}^{(\eta)}(Q,B),\mathbf{z}^{(\kappa)}(Q,B)). \tag{6.23}$$

Поскольку элементы матриц-проекторов – случайные, индикатор $\text{dis}(Z(Q,B))$ является функцией случайных переменных. Его математическое ожидание

$$\begin{gathered}\mathcal{M}\{\text{dis}(Z(Q,B))\} = G[P(Q,B)] =\\ = \int_{\mathcal{V}} P(Q,B)\text{dis}(Z(Q,B))dQdB.\end{gathered} \tag{6.24}$$

Для определения функции ПРВ $P(Q,B)$ будем использовать оценку максимальной энтропии (см. раздел 1):

$$\mathcal{H}[\mathcal{P}(\mathfrak{Q},\mathfrak{B})] = -\int_{\mathcal{L}} P(Q,B)\ln P(Q,B)dQdB \Rightarrow \max, \tag{6.25}$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered}\int_{\mathcal{L}} P(Q,B)dQdB = 1;\\ \int_{\mathcal{V}} P(Q,B)\text{dis}(Z(Q,B))dQdB = \delta\text{dis}(U),\\ 0 < \delta < \theta < 1.\end{gathered} \tag{6.26}$$

Задача (6.25)–(6.26) относится к классу ляпуновских задач [48], для которых условия оптимальности формулируются в терминах стационарности функционала Лагранжа

$$\begin{gathered}\mathcal{L}[P(Q,B),\lambda] =\\ = \mathcal{H}[\mathcal{P}(\mathfrak{Q},\mathfrak{B})] + \lambda\left(\delta\text{dis}(U) - G[P(Q,B)]\right),\end{gathered} \tag{6.27}$$

где λ – скалярный множитель Лагранжа.

Получим энтропийно-оптимальную ПРВ

$$P^*(Q,B) = \frac{\exp\big(-\lambda \mathrm{dis}(Z(Q,B))\big)}{\mathcal{P}(\lambda)}, \qquad (6.28)$$

где

$$\mathcal{P}(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{Z}} \exp\big(-\lambda \mathrm{dis}(Z(Q,B))\big) dQdB. \qquad (6.29)$$

Множитель Лагранжа λ определяется из следующего уравнения:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \exp\big(-\lambda \mathrm{dis}(Z(Q,B))\big) \times \\ \times \big(\mathrm{dis}(Z(Q,B)) - \delta \mathrm{dis}(U)\big) dQdB = 0. \qquad (6.30)$$

Таким образом, энтропийно-оптимальная функция ПРВ $P^*(Q,B)$ (6.28) позволяет, путем ее сэмплирования, генерировать матрицы-проекторы Q, B, сохраняющие "в среднем" расстояние между точками (векторами $\mathbf{z}^{(\alpha)}$) редуцированной матрицы $\mathcal{Z}$.

6.3. Рандомизированные матрицы-проекторы с заданными значениями элементов

Рассмотрим матрицу данных $U_{(m\times s)}$, которую нужно "сжать" по переменной s до размера r:

$$Y_{(m\times r)} = U_{(m\times s)} Q_{(s\times r)}. \qquad (6.31)$$

Матрица $U_{(m\times s)} \geq 0$ и имеет нормированные элементы ($0 \leq u_{ij} \leq 1$). Определим индикатор редуцированной матрицы $Y_{(m\times r)}$ в виде:

$$\mathrm{dis}(Y(Q)) = \frac{1}{m^2} \sum_{(i,j)=1}^{m} \rho(\mathbf{y}^{(i)}(Q), \mathbf{y}^{(j)}(Q)). \qquad (6.32)$$

Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $Q_{(s\times r)}$ могут принимать значения 0 или 1, и размещение их в матрице – случайное. Количество различных матриц такого типа равно $N = 2^{rs}$:

$$Q^{(1)}, \ldots, Q^{(N)}. \qquad (6.33)$$

Полагая, что реализации – случайные, их вероятностные свойства будем характеризовать дискретной функцией распределения вероятностей (ДРВ)

$$W(a) = w_a, \quad 0 \leq w_a \leq 1, \quad a = \overline{1,N}. \qquad (6.34)$$

Математическое ожидание индикатора (6.32)

$$\mathcal{M}\{\mathrm{dis}(Y(Q))\} = \sum_{a=1}^{N} w_a \mathrm{dis}(Y(Q^a)). \qquad (6.35)$$

Функцию ДРВ $W(a)$ будем искать в классе функций, максимизирующих функцию информационной энтропии Ферми [49]:

$$H_F(\mathbf{w}) = -\sum_{a=1}^{N} w_a \ln w_a + \\ + (1 - w_a)\ln(1 - w_a) \Rightarrow \max, \qquad (6.36)$$

при ограничении математического ожидания индикатора (6.32):

$$\sum_{a=1}^{N} w_a \mathrm{dis}(Y(Q^a)) = \delta \mathrm{dis}(U), \quad 0 < \varepsilon \leq \delta \leq 1. \qquad (6.37)$$

Задача (6.36)–(6.37) является конечно-мерной задачей максимизации с вогнутой целевой функцией и нелинейным ограничением.

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{w},\lambda) = H_F(\mathbf{w}) + \\ + \lambda\left(\delta \mathrm{dis}(U) - \sum_{a=1}^{N} w_a \mathrm{dis}(Y(Q^a))\right). \qquad (6.38)$$

Условия стационарности этой функции имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial w_a} = -\ln\frac{w_a}{1-w_a} - \lambda \mathrm{dis}(Y(Q^a)) = 0, \quad a = \overline{1,N}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \left(\delta \mathrm{dis}(U) - \sum_{a=1}^{N} w_a \mathrm{dis}(Y(Q^a))\right) = 0. \qquad (6.39)$$

Отсюда получаем, что энтропийно-оптимальное распределение вероятностей имеет вид:

$$w_a^* = \frac{\exp(-\lambda \mathrm{dis}(Y(Q^a))))}{1 + \exp(-\lambda \mathrm{dis}(Y(Q^a)))}, \quad a = \overline{1,N}, \qquad (6.40)$$

где параметр λ определяется из следующего уравнения:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{\exp(-\lambda \mathrm{dis}(Y(Q^a))))\mathrm{dis}(Y(Q^a))}{1 + \exp(-\lambda \mathrm{dis}(Y(Q^a)))} = \delta \mathrm{dis}(U). \qquad (6.41)$$

Таким образом, равенство (6.40) определяет распределение вероятностей матриц-проекторов с элементами {0, 1}. Имеет смысл выбрать матрицу-проектор

$$Q^{(a^*)} \Rightarrow a^* = \max_{1\leq a\leq N} w_a^*, \qquad (6.42)$$

хотя возможны и другие стратегии.

7. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ И ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

7.1. Рандомизированная бинарная классификация

Проблема классификации объектов является весьма актуальной в современной теоретической и прикладной науке. При рандомизированной бинарной классификации (РБК) применяется модель решающего правила со случайными параметрами, оценки *функции ПРВ* которых определяются путем ЭРО-оценивания (см. раздел 3) с

учетом обучающих последовательностей данных. Принципиальное отличие РБК от существующих процедур состоит в генерации эмпирической функции принадлежности классам обученной на реальных данных.

7.1.1. Процедура РБК

1. Структура обучающих данных. Пусть имеется обучающая коллекция из n объектов, характеризуемых векторами $\{\mathbf{e}^{(1)},\ldots,\mathbf{e}^{(n)}\}$ из признакового пространства R^m и вектором-ответов $\mathbf{y} = \{0,1,...,1\}$. Этот вектор размерности n, и его компоненты 0 и 1 являются метками принадлежности объекта классу 1 (“1”), или классу 2 (“0”).

2. Модель решающего правила. Используем однослойную нейронную сеть с сигмоидной функцией активации [63]:

$$\hat{y}^{(i)}(\mathbf{a}) = \mathrm{sigm}(\langle \mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{b}\rangle), \quad i = \overline{1,n}, \tag{7.1}$$

где

$$\begin{gathered}\mathrm{sigm}(x_i) = \frac{1}{1+\exp[-\alpha(x_i-\Delta)]},\\ x_i = (\langle \mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{b}\rangle),\\ \mathbf{a} = \{\mathbf{b}, \alpha, \Delta\}.\end{gathered} \tag{7.2}$$

На рис. 2 показан график сигмоидной функции с параметрами “крутизны” α и “порога” Δ. Значения функции $\mathrm{sigm}(x)$ в интервале $\left[\frac{1}{2},1\right]$ соответствуют первому классу, и значения в интервале $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ – второму классу.

В рандомизированной модели (7.1), (7.2) параметры $\mathbf{a} = \{a_1,\ldots,a_{(n+2)}\}$ – интервального типа:

$$\begin{gathered}a_k \in \mathcal{A}_k = [a_k^-, a_k^+], \quad k = \overline{1,n+2},\\ \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{n+2} \mathcal{A}_k.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Их вероятностные свойства характеризуются *PDF* $P(\mathbf{a})$, которая определена на множестве $\mathcal{A}$.

Итак, алгоритм рандомизированной бинарной классификации представляется в следующем виде:

$$\mathcal{H}[P(\mathbf{a})] = -\int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \ln P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \Rightarrow \max, \tag{7.4}$$

при условиях

$$\int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = 1, \tag{7.5}$$

$$\int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \hat{y}^i(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = y_i, \quad i = \overline{1,h}. \tag{7.6}$$

Энтропийно-оптимальная ПРВ

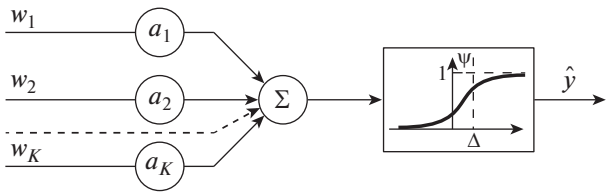


Рис. 2. Структура однослойной нейронной сети

$$P^*(\mathbf{a}|\theta) = \frac{\exp\left[-\sum_{i=1}^{h} \theta_i \hat{y}^{(i)}(\mathbf{a})\rangle\right]}{\mathcal{P}(\theta)}, \tag{7.7}$$

где $\hat{y}^{(i)}(\mathbf{a})$ определяется равенством (7.1), и

$$\mathcal{P}(\theta) = \int_{\mathcal{A}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{h} \theta_i \hat{y}^{(i)}(\mathbf{a})\right]. \tag{7.8}$$

Множители Лагранжа определяются из уравнений (7.6).

3. Реализация рандомизированной бинарной классификации. Рассмотрим коллекцию из M объектов, характеризуемых векторами $\mathbf{t}^{(i)}$, $i = \overline{1,M}$ и подлежащих бинарной классификации. Воспользуемся найденной энтропийно-оптимальной функцией ПРВ $P^*(\mathbf{a})$ модели решающего правила (7.1) для определения эмпирических вероятностей принадлежности объекта k классу 1 или 2. Обозначим эти вероятности $p_1^{(k)}$ и $p_2^{(k)}$ соответственно, $k = \overline{1,M}$.

Функция ПРВ $P(\mathbf{a})$ сэмплируется, т.е. генерируется модифицированным методом Монте-Карло соответствующая последовательность случайных векторов-параметров модели $\mathbf{a}^{(i)}, i = \overline{1,N}$, где N – количество МК-испытаний. Пусть в результате этих испытаний оказалось, что первый объект N_1 раз был отнесен к первому классу и $N - N_1$ раз – ко второму; ...., k-й объект N_k раз отнесен к первому классу и $N - N_k$ раз – ко второму классу, и т.д. При достаточно большом числе испытаний определяются эмпирические вероятности принадлежности

$$p_1^{(1)} = \frac{N_1}{N},\ldots,p_1^{(k)} = \frac{N_k}{N},\ldots,\frac{N_M}{N},$$

$$p_2^{(1)} = \frac{N-N_1}{N},\ldots,p_2^{(k)} = \frac{N-N_k}{N},\ldots,\frac{N-N_M}{N},$$

которые являются результатом рандомизированной бинарной классификации.

Если требуется “жесткий” вариант классификации, то необходимо задать порог δ вероятности, и считать объекты, вероятность принадлежности которых превышает порог, относящимися к соответствующему классу. В результате “жест-

Таблица 1

i	$e_1^{(i)}$	$e_2^{(i)}$	$e_3^{(i)}$	$e_4^{(i)}$
1	0.11	0.75	0.08	0.21
2	0.91	0.65	0.11	0.81
3	0.57	0.17	0.31	0.91

Таблица 2. Матрица данных

№	x_1	x_2	Вид	№	x_1	x_2	Вид	№	x_1	x_2	Вид
1	4.5	1.5	2	8	3.9	1.4	2				
2	4.6	1.5	2	9	4.5	1.3	2	15	1.4	0.2	1
3	4.7	1.4	2	10	4.6	1.3	2	16	1.5	0.2	1
4	1.7	0.4	1	11	1.4	0.2	1	17	1.5	0.1	1
5	1.3	0.2	1	12	4.7	1.6	2	18	4.9	1.5	2
6	1.4	0.3	1	13	4.0	1.3	2	19	3.3	1.0	2
7	1.5	0.2	1	14	1.4	0.2	1	20	1.4	0.2	1

кой” классификации возникает вектор $\mathbf{u} = \{0,1,1, \ldots, 1\}$, номер компоненты которого соответствует номеру объекта, а 0 или 1 отображает принадлежность его классу 1 или 2.

Далее мы воспользуемся этим вектором для оценки точности “жесткой” классификации, выполненной рандомизированной бинарной процедурой.

7.1.2. Модельные примеры

1. Рандомизированная классификация четырехмерных объектов. Рассмотрим объекты, характеризуемые 4 признаками.

1.1. Обучение. Обучающая коллекция состоит из трех объектов, значения признаков которых показаны в табл. 1.

Рандомизированная модель решающего правила (7.1), (7.2) имеет параметры: $\alpha = 1,0$ и $\Delta = 0$. Выход модели $\hat{\mathbf{y}} = \{0,18; 0,81; 0,43\}$ ($y_i < 0,5$ соответствует классу 2, $y_i \geq 0,5$ соответствует классу 1).

Множители Лагранжа для энтропийно-оптимальной *PDF* (7.7) имеют следующие значения: $\overline{\theta}^* = \{0.2524; 1.7678; 1.6563\}$. Параметры $a_j \in [-10, 10]$, $j = \overline{1,4}$. Энтропийно-оптимальная для данной обучающей коллекции функция *PDF* имеет вид:

$$P^*(\mathbf{a}, \overline{\theta}) = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \theta_i y_i(\mathbf{a})\right)}{\mathcal{P}(\overline{\theta})}, \qquad (7.9)$$

$$y_i(\mathbf{a}) = \left(1 + \exp\left(-\sum_{k=1}^{4} e_k^{(i)}, a_k\right)\right)^{(-1)}.$$

На рис. 3 показано двумерное сечение *PDF* $P^*(\mathbf{a}, \overline{\theta}^*)$.

1.2. Реализация. На этом этапе используется коллекция из r модельных объектов, где каждый объект характеризуется вектором $\mathbf{t}^{(j)} \in R^{(4)}$. Генерируется массив (500 × 4) четырехмерных случайных, независимых векторов $\mathbf{t}^{(i)}, i = \overline{1,500}$ с независимыми компонентами, равномерно распределенными в интервалах [0, 1]. Далее применяется процедура рандомизированной бинарной классификации. На рис. 4 показаны эмпирические вероятности $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$ принадлежности t_i-объекта классу 1 и 2.

2. Рандомизированная классификация двумерных объектов. Рассмотрим объекты, характеризуемые 2 признаками.

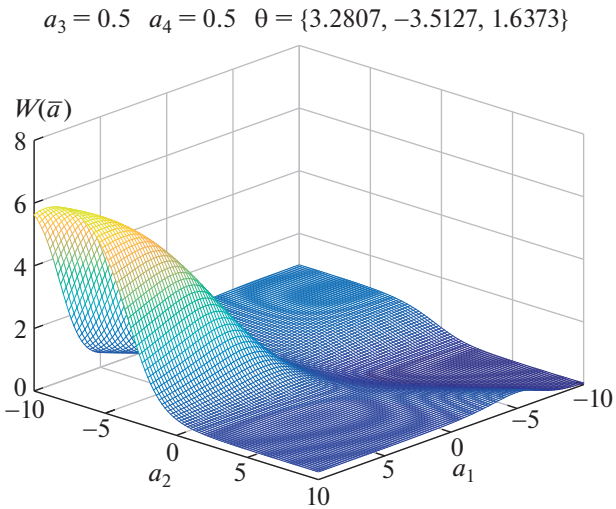


Рис. 3. Двумерное сечение *PDF* $P^*(\mathbf{a}, \overline{\theta}^*)$.

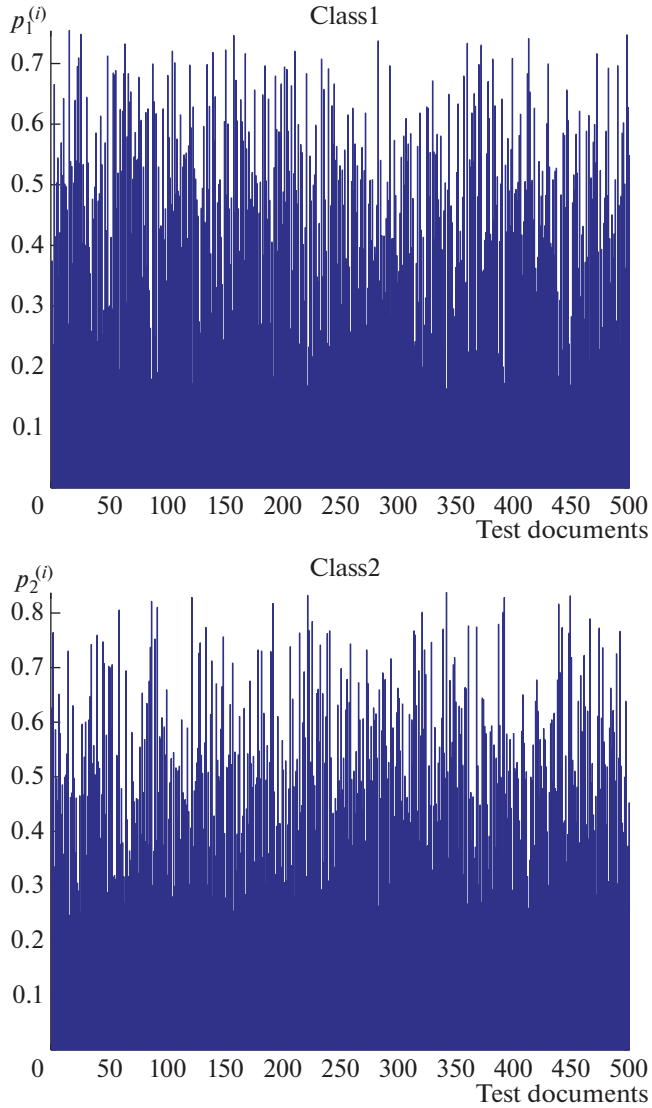


Рис. 4. Эмпирические вероятности принадлежности классам.

2.1. Обучение. Обучающая коллекция состоит из трех объектов, каждый из которых описывается двумя признаками, значения которых показаны в табл. 2. Значения параметров α, Δ и интервалов для случайных параметров $\mathbf{a}$ соответствуют примеру 1. Множители Лагранжа для энтропийно-оптимальной *PDF* (7.7) имеют следующие значения: $\overline{\theta}^* = \{9.6316; -18.5996; 16.7502\}$. Энтропийно-оптимальная для данной обучающей коллекции функция $P^*(\mathbf{a}|\overline{\theta})$ имеет вид:

$$P^*(\mathbf{a}) = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\theta_i y_i(\mathbf{a})\right)}{\mathcal{P}(\overline{\theta})}, \qquad (7.10)$$

$$y_i(\mathbf{a}) = \left(1 + \exp\left(-\sum_{k=1}^{2} e(i)_k, a_k\right)\right)^{(-1)}.$$

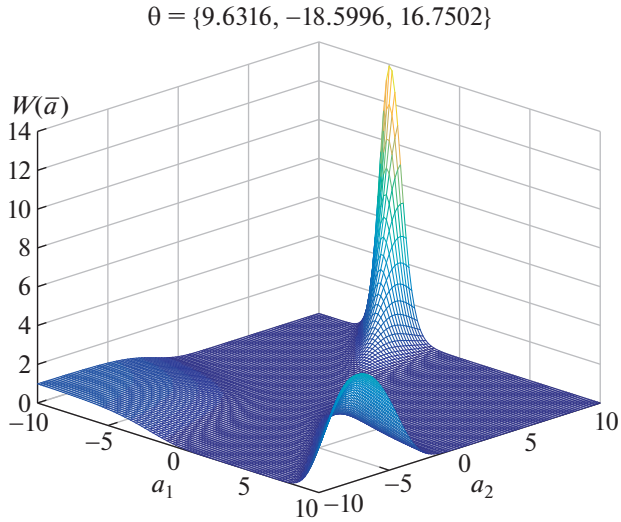


Рис. 5. Энтропийно-оптимальная *PDF* $P^*(\mathbf{a}, \overline{\theta}^*)$.

На рис. 5 показана функция $P^*(\mathbf{a}, \overline{\theta}^*)$.

2.2. Реализация. Все параметры этого примера соответствуют примеру 2. На рис. 6 показаны эмпирические вероятности $p_1^{(i)}$, $p_2^{(i)}$ принадлежности t_i-го объекта классу 1 и 2 ($i = \overline{1,500}$).

7.2. Рандомизированная кластеризация биологических объектов

Рассмотрим бинарную кластеризацию цветков ириса, используя базу Fisheriris (цветки ириса: ширина x_1 и длина x_2 лепестков). База содержит данные по указанным признакам трех видов цветков: “setosa” (1), “versicolor” (2), “virginica” (3), в количестве 50-ти двумерных точек на каждый вид. Далее будем рассматривать два вида (1, 2) и по 10 данным на каждый вид. В иллюстративных примерах удобнее представлять характеристики цветков в матричном виде.

Пример 1

Матрица данных содержит числовые значения двух признаков для 1-го и 2-го видов и представлена в табл. 2.

На рис. 7 показано расположение объектов-точек на плоскости.

Матрица расстояний $D_{(20\times20)}$ показана в табл. 3, 4.

Минимальный и максимальный элементы:

$$\inf(D_{(20\times20)}) = 0, \quad \sup(D_{(20\times20)}) = 3.73. \qquad (7.11)$$

Ансамбль возможных кластеров имеет объем $K(10) = 184786$. Кластер с номером $k = 256, i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4, i_5 = 5, i_6 = 6, i_7 = 7, i_8 = 14, i_9 = 15,$

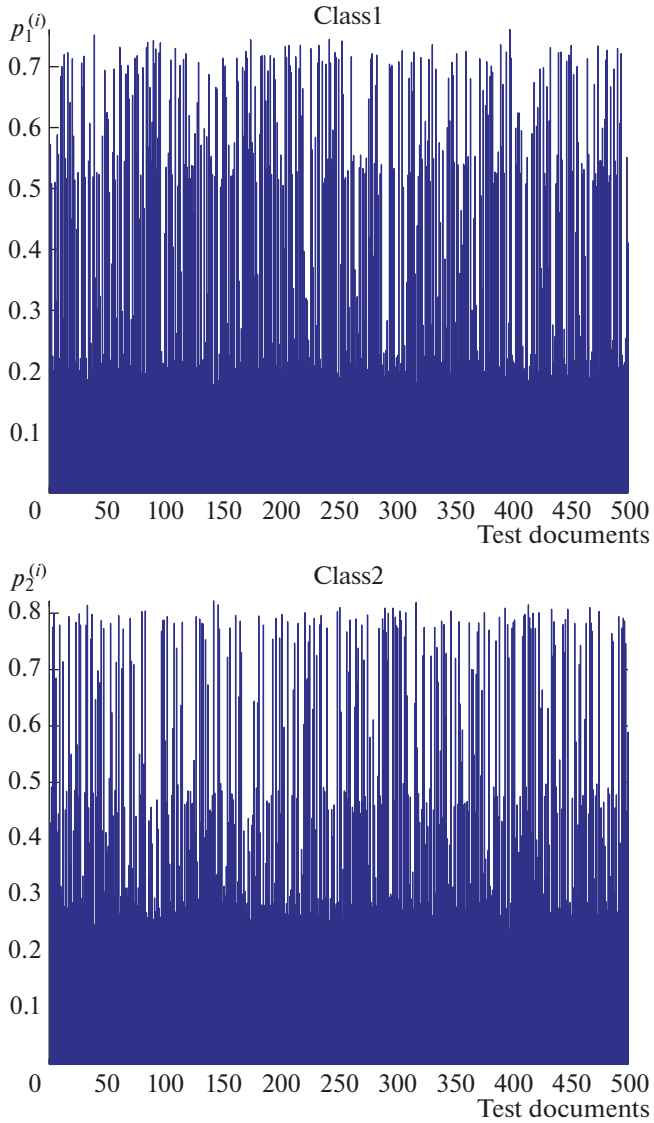


Рис. 6. Вероятности принадлежности классам.

$i_{10} = 20$. Матрица расстояний $D_{(10)}^{(256)}$ приведена в табл. 5.

Индикатор матрицы $X_{(10)}^{(256)}$, соответствующей кластеру $\mathcal{K}_{(10)}^{(256)}$,

$$\mathrm{dis}(X_{(10)}^{(256)}) = 1.5021. \tag{7.12}$$

Значения индикаторов для кластеров от $k = 1$ до $k = 184786$ показаны на рис. 8.

Энтропийно-оптимальная функция распределения вероятностей для $s = 10$ имеет вид:

$$p^*(k|10) = \frac{\exp(-\lambda^*\mathrm{dis}(X_{(10)}^{(k)}))}{1+\exp(-\lambda^*\mathrm{dis}(X_{(10)}^{(k)}))}, \quad \lambda^* = 12.1153. \tag{7.13}$$

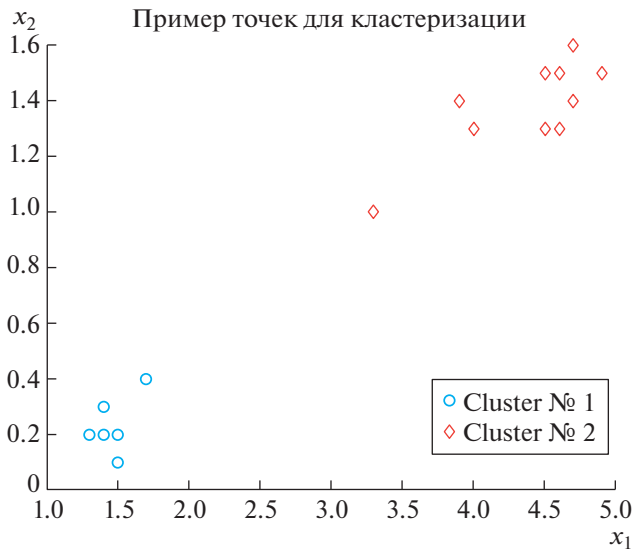


Рис. 7. Изображение точек на двумерном графике.

Кластер $\mathcal{K}_1$ с максимальной вероятностью имеет номер

$$k^* = 166922,$$
$$\mathcal{K}_1 = \{4,5,6,7,11,14,15,16,17,20\}, \tag{7.14}$$
$$\mathrm{dis}\mathcal{K}_1 = 0.1354.$$

Кластер $\mathcal{K}_2$ образует следующие объекты-точки: $\{1,2,3,8,9,10,12,13,18,19\}$.

Расположение кластеров $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ показано на рис. 9.

Сравнивая с рис. 7, видно, что совпадение 10/10, т.е. ошибка кластеризации равна нулю.

Пример 2

Рассмотрим другую матрицу данных из той же базы. Расположение объектов-точек показано на рис. 10.

Построим матрицу расстояний $D_{(20\times20)}$ и определим минимальны и максимальный элементы:

$$\inf(D_{(20\times20)}) = 0, \quad \sup(D_{(20\times20)}) = 3.73. \tag{7.15}$$

Ансамбль возможных кластеров имеет объем $K(10) = 184786$. Значения индикаторов для кластеров от $k = 1$ до $k = 184786$ показаны на рис. 11.

Энтропийно-оптимальная функция распределения вероятностей для $s = 10$ имеет вид:

$$p^*(k|10) = \frac{\exp(-\lambda^*\mathrm{dis}(X_{(10)}^{(k)}))}{1+\exp(-\lambda^*\mathrm{dis}(X_{(10)}^{(k)}))}, \quad \lambda^* = 100. \tag{7.16}$$

Кластер $\mathcal{K}_1$ с максимальной вероятностью имеет номер

$$k^* = 177\,570,$$
$$\mathcal{K}_1 = \{5,6,7,8,11,14,15,16,17,20\}, \qquad (7.17)$$
$$\mathrm{dis}\mathcal{K}_1 = 0.4420.$$

Его образуют следующие объекты-точки: 5, 6, 7, 8,11,14,15, 16, 17, 20. Кластер $\mathcal{K}_2$ образуют следующие объекты-точки: $1,2,3,4,9,10,12,13,18,19$.

Расположение кластеров $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ показано на рис. 12. Сравнивая с рис. 7, видно, что совпадение 8/10.

ПРИЛОЖЕНИЕ А:

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛЯПУНОВСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Функция $P(\boldsymbol{\theta})$ – непрерывно-дифференцируемая, т.е. принадлежит классу C^1 [29]. Выберем в этом классе произвольную функцию $h(\boldsymbol{\theta})$ и представим ее в виде:

$$P(\boldsymbol{\theta}) = P^*(\boldsymbol{\theta}) + \beta h(\boldsymbol{\theta}),$$

где функция $P^*(\boldsymbol{\theta})$ является решением задачи (3.5)–(3.7), и β – вещественный параметр.

Подставим указанное выше представление функции ПРВ в (3.8). Полагая, что все функции из класса C^1 – фиксированы, получим, что функционал Лагранжа зависит от параметра β. Тогда условия стационарности функционала (3.8) в терминах производной Гато приобретают следующий вид:

$$\left.\frac{d\mathcal{L}}{d\beta}\right|_{\beta=0} = 0.$$

В результате получаем следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\mathcal{E}} h(\boldsymbol{\theta})\Omega(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} = 0,$$

где

$$\Omega(\boldsymbol{\theta}) = \ln P(\boldsymbol{\theta}) - \mu - \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta})\rangle,$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\Phi}^s(\mathbf{x}^{(r)}, \boldsymbol{\theta})$ определена в (3.2).

Интегральное уравнение выполняется при любых функциях $h(\boldsymbol{\theta})$ из C^1, если

$$\Omega(\boldsymbol{\theta}) = 0. \qquad (1.1)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

Доказательство теоремы 1. В силу условия *а)* функция $\mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)})$, непрерывная по совокупности переменных, порождает в $R^r \times R^r$ векторное поле $\Psi_{(\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{y}^{(r)}, \mathbf{x}^{(r)})$.

Таблица 3. Матрица расстояний для матрицы данных

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.1	0.22	3.01	3.45	3.32	3.27	0.61	0.2	0.22
2	0.1	0	0.14	3.1	3.55	3.42	3.36	0.71	0.22	0.2
3	0.22	0.14	0	3.16	3.61	3.48	3.42	0.8	0.22	0.14
4	3.01	3.1	3.16	0	0.45	0.32	0.28	2.42	2.94	3.04
5	3.45	3.55	3.61	0.45	0	0.14	0.2	2.86	3.38	3.48
6	3.32	3.42	3.48	0.32	0.14	0	0.14	2.73	3.26	3.35
7	3.27	3.36	3.42	0.28	0.2	0.14	0	2.68	3.2	3.29
8	0.61	0.71	0.8	2.42	2.86	2.73	2.68	0	0.61	0.71
9	0.2	0.22	0.22	2.94	3.38	3.26	3.2	0.61	0	0.1
10	0.22	0.2	0.14	3.04	3.48	3.35	3.29	0.71	0.1	0
11	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
12	0.22	0.14	0.2	3.23	3.68	3.55	3.49	0.82	0.36	0.32
13	0.54	0.63	0.71	2.47	2.92	2.79	2.73	0.14	0.5	0.6
14	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
15	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
16	3.27	3.36	3.42	0.28	0.2	0.14	0	2.68	3.2	3.29
17	3.31	3.4	3.45	0.36	0.22	0.22	0.1	2.73	3.23	3.32
18	0.4	0.3	0.22	3.38	3.83	3.7	3.64	1	0.45	0.36
19	1.3	1.39	1.46	1.71	2.15	2.02	1.97	0.72	1.24	1.33
20	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38

Таблица 4. Матрица расстояний для матрицы данных (продолжение)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.1	0.22	3.01	3.45	3.32	3.27	0.61	0.2	0.22
2	0.1	0	0.14	3.1	3.55	3.42	3.36	0.71	0.22	0.2
3	0.22	0.14	0	3.16	3.61	3.48	3.42	0.8	0.22	0.14
4	3.01	3.1	3.16	0	0.45	0.32	0.28	2.42	2.94	3.04
5	3.45	3.55	3.61	0.45	0	0.14	0.2	2.86	3.38	3.48
6	3.32	3.42	3.48	0.32	0.14	0	0.14	2.73	3.26	3.35
7	3.27	3.36	3.42	0.28	0.2	0.14	0	2.68	3.2	3.29
8	0.61	0.71	0.8	2.42	2.86	2.73	2.68	0	0.61	0.71
9	0.2	0.22	0.22	2.94	3.38	3.26	3.2	0.61	0	0.1
10	0.22	0.2	0.14	3.04	3.48	3.35	3.29	0.71	0.1	0
11	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
12	0.22	0.14	0.2	3.23	3.68	3.55	3.49	0.82	0.36	0.32
13	0.54	0.63	0.71	2.47	2.92	2.79	2.73	0.14	0.5	0.6
14	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
15	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38
16	3.27	3.36	3.42	0.28	0.2	0.14	0	2.68	3.2	3.29
17	3.31	3.4	3.45	0.36	0.22	0.22	0.1	2.73	3.23	3.32
18	0.4	0.3	0.22	3.38	3.83	3.7	3.64	1	0.45	0.36
19	1.3	1.39	1.46	1.71	2.15	2.02	1.97	0.72	1.24	1.33
20	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	2.77	3.29	3.38

Таблица 5. Матрица расстояний для кластера $\mathcal{K}(256)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.1	0.22	3.01	3.45	3.32	3.27	3.36	3.36	3.36
2	0.1	0	0.14	3.1	3.55	3.42	3.36	3.45	3.45	3.45
3	0.22	0.14	0	3.16	3.61	3.48	3.42	3.51	3.51	3.51
4	3.01	3.1	3.16	0	0.45	0.32	0.28	0.36	0.36	0.36
5	3.45	3.55	3.61	0.45	0	0.14	0.2	0.1	0.1	0.1
6	3.32	3.42	3.48	0.32	0.14	0	0.14	0.1	0.1	0.1
7	3.27	3.36	3.42	0.28	0.2	0.14	0	0.1	0.1	0.1
8	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	0	0	0
9	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	0	0	0
10	3.36	3.45	3.51	0.36	0.1	0.1	0.1	0	0	0

Таблица 6. Матрица данных

№	x_1	x_2	Вид	№	x_1	x_2	Вид	№	x_1	x_2	Вид
1	6.4	3.2	2	8	5.2	2.7	2				
2	6.5	2.8	2	9	5.7	2.8	2	15	4.9	3.0	1
3	7.0	3.2	2	10	6.6	2.9	2	16	5.0	3.4	1
4	5.4	3.9	1	11	5.1	3.5	1	17	4.9	3.1	1
5	4.7	3.2	1	12	6.3	3.3	2	18	6.9	3.1	2
6	4.6	3.4	1	13	5.5	2.3	2	19	4.9	2.4	2
7	4.6	3.1	1	14	4.4	2.9	1	20	5.0	3.6	1

Выберем в $R^r \times R^r$ произвольный вектор $\mathbf{u}$ и определим векторное поле

$$\Pi_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi_{(\mathbf{y}^{(r)},\mathbf{x}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}.$$

В силу условия *b*) при фиксированном $\mathbf{u}$ поле $\Pi_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda})$ не имеет нулей на сферах $\|\boldsymbol{\lambda}\| = \varrho$ достаточно большего радиуса ϱ. Поэтому на сферах $\|\boldsymbol{\lambda}\| = \varrho$ определено *вращение* [30].

Рассмотрим два векторных поля

$$\Pi_{\mathbf{u}^{(1)}}(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi_{(\mathbf{y}^{(r)},\mathbf{x}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}^{(1)},$$
$$\Pi_{\mathbf{u}^{(2)}}(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi_{(\mathbf{y}^{(r)},\mathbf{x}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}^{(2)}.$$

Эти векторные поля *гомотопны* [30] на сферах достаточно большего радиуса. Поэтому поле

$$\Omega(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha\Pi_{\mathbf{u}^{(1)}}(\boldsymbol{\lambda}) + (1-\alpha)\Pi_{\mathbf{u}^{(2)}}(\boldsymbol{\lambda}) =$$
$$= \Psi_{(\mathbf{y}^{(r)},\mathbf{x}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) - [\alpha\mathbf{u}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{u}^{(2)}]$$

не имеет нулей на сферах достаточно большого радиуса при любых $\alpha \in [0,1]$. Гомотопные поля имеют одинаковые вращения:

$$\gamma(\Pi_{\mathbf{u}^{(1)}}(\boldsymbol{\lambda})) = \gamma(\Pi_{\mathbf{u}^{(2)}}(\boldsymbol{\lambda})).$$

На сферах достаточно большего радиуса векторные поля $\Pi_{\mathbf{u}^{(1)}}(\boldsymbol{\lambda}), \Pi_{\mathbf{u}^{(2)}}(\boldsymbol{\lambda})$ невырожденные, но в шаре $\|\boldsymbol{\lambda}\| \le \varrho_1 < \varrho$ каждое из них может иметь некоторое количество особых точек. Обозначим $\kappa(\mathbf{u}^{(1)})$ и $\kappa(\mathbf{u}^{(2)})$ – количество особых точек векторных полей $\Pi_{\mathbf{u}^{(1)}}(\boldsymbol{\lambda})$, $\Pi_{\mathbf{u}^{(2)}}(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно. Поскольку векторные поля гомотопны, то

$$\kappa(\mathbf{u}^{(1)}) = \kappa(\mathbf{u}^{(2)}) = \kappa.$$

В силу условия (3.15) эти особые точки изолированы.

Воспользуемся теперь понятием *индекса* особой точки:

$$\mathrm{ind}(\boldsymbol{\lambda}^0) = (-1)^{\beta(\boldsymbol{\lambda}^0)},$$

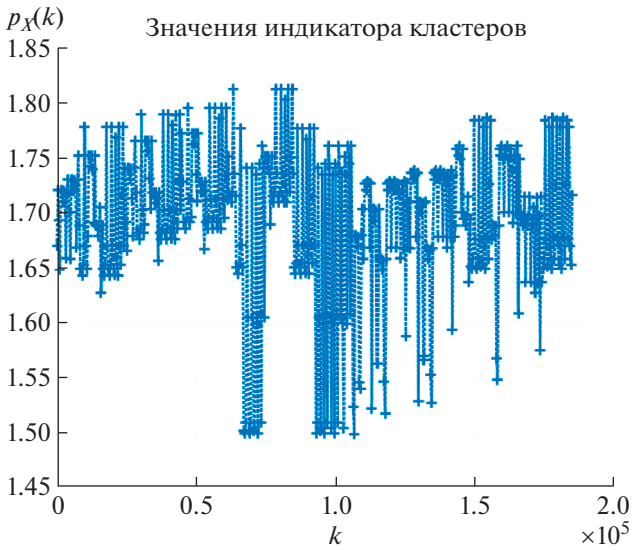


Рис. 8. Значения индикаторов для $k \in [1,184\,786]$.

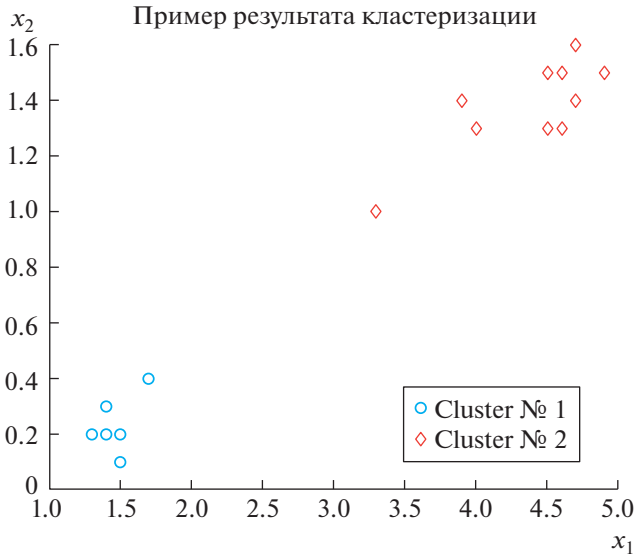


Рис. 9. Результат рандомизированной кластеризации.

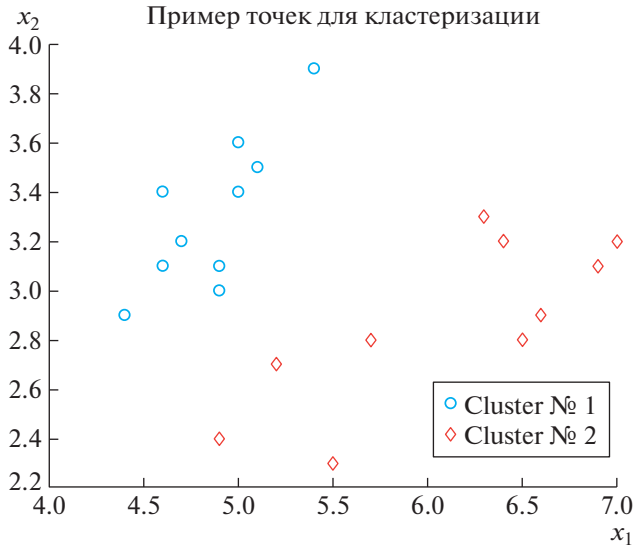


Рис. 10. Изображение точек на двумерном графике.

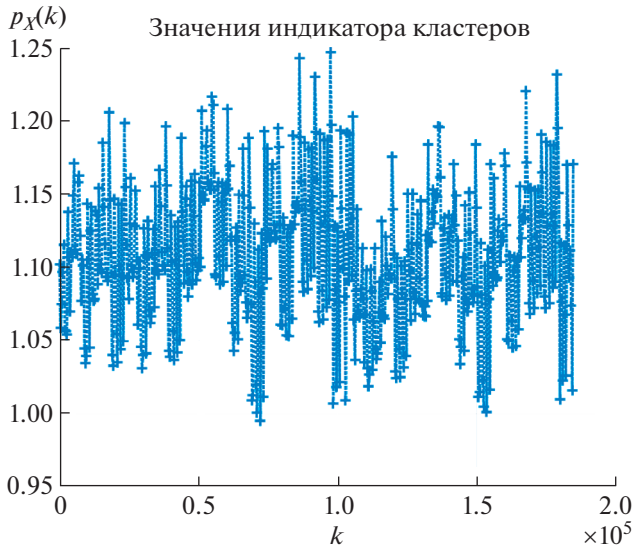


Рис. 11. Значения индикаторов для $k = [1,184\,786]$.

где $\beta(\boldsymbol{\lambda}^0)$ – количество собственных чисел матрицы $\Pi'_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda}^0) = J_\lambda(\boldsymbol{\lambda}^0|, \mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$ с отрицательной вещественной частью. Из определения индекса видно, что на его значение влияет четность величины $\beta(\boldsymbol{\lambda}^0)$, а не ее абсолютное значение. В силу условия (3.15) четность всех особых точек одинаковая. Действительно, поскольку $J_\lambda(\boldsymbol{\lambda}^0|\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) \neq 0$, то при любых $(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) \in R^r \times R^r$ собственные числа матрицы $J_\lambda(\boldsymbol{\lambda}^0|\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$ могут переходить из левой полуплоскости в правую только парами: вещественные числа трансформируются в пару комплексно-сопряженных, которые затем переходят мнимую ось.

Учитывая это обстоятельство, получим, что вращение гомотопных полей

$$\gamma(\Pi_{\mathbf{u}}) = \kappa(-1)^\beta,$$

где β – количество собственных чисел матрицы $\Pi'_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda})$ для какой-нибудь особой точки.

Покажем, что векторное поле $\Pi_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda})$ имеет единственную особую точку в шаре $\|\boldsymbol{\lambda}\| \leq \rho_1 < \rho$. Рассмотрим уравнение

$$\Pi_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\lambda}) = \Phi_{(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u} = 0.$$

Пусть это уравнение при каждой фиксированной паре $\mathbf{x}^{(r)}$, $\mathbf{y}^{(r)}$ имеет κ особых точек, т.е. функций $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}), \ldots, \boldsymbol{\lambda}^{(\kappa)}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$. Следовательно, оно определяет многозначную функцию $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$, κ ветвей которой изолированы (что следует из изолированности особых точек). Каждая из ветвей $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$ определяет в $R^r \times R^r$ открытое множество (в силу условия b), а

$$\bigcup_{i=1}^{\kappa} \boldsymbol{\lambda}^{(i)}(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}) = R^r \times R^r.$$

Это возможно только тогда, когда $\kappa = 1$. Следовательно, для каждой пары $\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)}$ из $R^r \times R^r$ существует единственная функция $\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$, обращающая в ноль функцию $\mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{y}^{(r)})$. ■

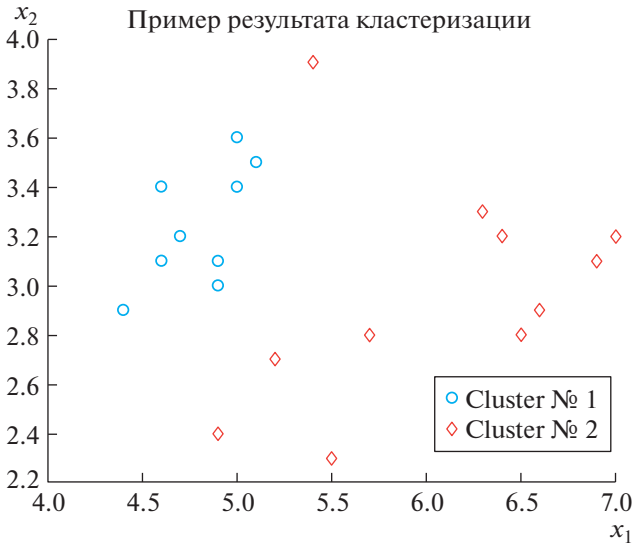


Рис. 12. Результат рандомизированной кластеризации.

Доказательство теоремы 2. Из (3.15) и условия *а)* теоремы 1 следует, что функция $\mathbf{W}(\lambda|\mathbf{x}^{(r)},\mathbf{y}^{(r)})$ – аналитическая по совокупности переменных. Поэтому левую часть уравнения (4.5) можно представить обобщенным рядом Тейлора [31], и строить решение также в виде обобщенного ряда Тейлора. Степенные блоки этого ряда определяются с помощью рекуррентной процедуры. ■.

ПРИЛОЖЕНИЕ C: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Доказательство. Элементы обратной матрицы

$$a_{ik}^{(-1)} = \frac{A_{ki}}{\det A}, \quad (k,i) = \overline{1,r}$$

в силу условия леммы 1 ограничены, т.е.

$$a_{ik}^{(-1)} \le M < \infty, \quad \left\|A^{-1}\right\| < \infty.$$

Следовательно, существует константа $\alpha > 1$, для которой выполняется неравенство (3.23). ■

ПРИЛОЖЕНИЕ D: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2

Согласно неравенству (3.10) имеем

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}}\right\| \le \left\|\left[\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}}\right\|,$$

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}}\right\| \le \left\|\left[\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}}\right\|.$$

Полагая, что матрица $\left[\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]$ невырожденная (следует из невырожденности Якобиана (3.15)), следуя лемме 1 и учитывая (3.26), норму обратной матрицы можно оценить следующим образом:

$$\left\|\left[\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1}\right\| \le \alpha \left\|\left[\frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \mathbf{z}}\right]\right\|^{-1} = \frac{\alpha}{r\theta}.$$

При выполнении условий леммы 2

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^{(r)}}\right\| \le \frac{\alpha\rho}{r\theta}, \quad \left\|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^{(r)}}\right\| \le \frac{\alpha\omega}{r\theta}.$$

Отсюда видно, что при росте объема выборки ($r \to\to \infty$) нормы соответствующих якобианов стремятся к нулю. Поэтому $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}(\mathbf{x}^{\infty},\mathbf{y}^{\infty})$. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ E: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений, получаемую из (5.24) при $\gamma \to 0$:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \lambda_i L_{\lambda_i}(p^*(s,k|\lambda_1,\lambda_2)), \quad i = 1,2.$$

На первом этапе доказывается ее устойчивость “в целом”, т.е. при любых начальных отклонениях из R_+^2.

На втором этапе показывается, что алгоритм (5.24) представляет собой схему Эйлера для вспомогательных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые детали доказательства и определим на R_+^2 функцию:

$$V(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{i=1}^{2}(\lambda_i - \lambda_i^*) - \lambda_i^*(\ln\lambda_i - \ln\lambda_i^*).$$

Функция $V \ge 0$ строго выпукла на R_+^2, принимает минимальное значения в точке $(\lambda_1^*,\lambda_2^*)$, ее гессиан в этой точке невырожден. Определим ее производную по времени в силу исходных уравнений:

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda_1^* L_{\lambda_1}(p^*(s,k)|\lambda_1,\lambda_2) - \\ - \lambda_2^* L_{\lambda_2}(p^*(s,k)|\lambda_1,\lambda_2).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} < 0, & \text{если } \lambda_1^* > 0,\ \lambda_2^* > 0 \\ = 0, & \text{если } \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0 \end{cases}$$

Следовательно, функция V является функцией Ляпунова для вспомогательных дифференциальных уравнений на пространстве R_+^2. Все решения этих уравнений асимптотически устойчивы из любых начальных условий $\lambda_1^0 > 0$, $\lambda_2^0 > 0$.

Алгоритм (5.24) представляет собой разностную схему Эйлера. В силу асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений всегда существуют шаг $\gamma > 0$ и область начальных условий, для которых схема Эйлера сходится. ■

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования РФ, проект № 075-15-2020-799.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boltzmann L.* Vorlesungen uber Gastheory. Leipzig, 1896. V. 1, J.A. Barth; 1898. V. 2, J.A. Barth.
2. *Jaynes E.T.* Gibbs vs Boltzmann entropy. American Journal of Physics. 1965. V. 33. P. 391–398.
3. *Shannon C.E.* Mathematical Theory of Communication. 1948, The Bell System Technical Journal. V. 27. P. 373–423, 623–656, July, Oct.
4. *Renyi A.* Probability Theiry, North Holland, Amsterdam, 1970.

5. *Bashkirov A.G.* Renyi-entropy is statistical entropy for a large scale systems, Theoretical and Mathematicol Physics., 2006. V. 149. № 2. P. 299–317.
6. *Jaynes E.T.* Information theory and statistical Mechanics. Physical Review, 1957. V. 104(4). P. 620–630.
7. *Rosenkrantz R.D., Jaynes E.T.* Paper on Probability, Statistics,and Statistical Physics. Kluwer Academic Pablishers, 1989.
8. *Jaynes E.T.* Probability theory: the logic of science. Cambridge Uni. Press, 2003.
9. *Schulz K.F., Grimes D.A.* Generation of allocation sequences in randomized trials. The Lancet, 2002, Feb. 09. https://doi.org/10.1016/S0140-6736(02)07683-3
10. *Maravelakis P.* The use of Statistics in Social Sciences. Journal of Humanities and Applied Social Sciences. 2019. V. 1. № 2. P. 87–97. https://doi.org/10.1108/JHASS-08-2019-0038
11. *Bonaccorsi A., Cicero T., Ferraro A., Malgarini M.* Journal raiting as predictors of articles quality in Arts, Humanities and Social Sciences: an analysis based on the Italian Research Evaluation Exercise. F1000. 2015, 4:196. P. 1–12.
12. *Gauvin L., Genois M., Karsal M., Kivela M., Takaguchi T., Valdano E., Vesterguard C.L.* Randomized reference models for temporal network. 2020, arXiv: 1806.04032v3[physics.soc-ph], 11 Feb.
13. *Vovk V., Shafer G.* Good randomized sequential probability forecasting is always possible. Journal of Royal Statistical Society B. 2005. V. 65. Pt. 5. P. 747–763.
14. *Vyugin V.* On calibration error of randomized forecasting algorithm. theoretical Computer Science. 2009. V. 410. P. 1781–1795.
15. *Zhao S., Ma T., Ermon S.* Indsividual Calibration with Randomized Forecasting. 2020, arXiv:2006.10288v3 [stat.ML]9 Sept 2020.
16. *Mancini T., Calvo-Pardo H., Olmo J.* Extremly randomized neural networks for constructing prediction interval. Neural Networks. 2021. V. 144. P. 113–128.
17. *Motwani R., Raghaven P.* Randomized Algorithms. Cambridge Uni. Press, NY, 1995.
18. *Vidyasagar M.* Randomized Algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory. Automatica. 2001. V. 37(10). P. 1515–1528.
19. *Tempo R., Calafiory G., Dabbene F.* Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems, Springer, 2013.
20. *Granichin O., Volkovich Z., Toledano-Kitai D.* Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining. Springer, 2015.
21. *Osborn M.J., Rubinstein A.* A Course in Game Theory. 1994, Cambridge, MA, MIT Press.
22. *Borovkov A.A.* Mathematical Statistics. CTC Press, 1999.
23. *Larsen R.J., Marx M.L.* An Introduction to Mathematical Statistics. 2012, Prentice Hall.
24. *Avellaneda M.* Minimum relative-entropy calibration of asset-pricing model. Journal of theoretical and applied finance. 1998. V. 1(04). P. 447–472.
25. *Popkov A.Yu., Popkov Yu.S.* New Methods of Entropy-Robust Estimation for Randomized Models under Limited Data // Entropy. 2014. № 16. P. 675–698. https://doi.org/10.3390/e16020675
26. *Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.* Theory of extremal problems. Elsevier North Holland. 1979. P. 456.
27. *Alexeev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.* Optimal Control. Springer-Verlag, Boston, MA. 1987. P. 277.
28. *Voevodin V.V., Kuznetzov Yu.A.* Matrices and Computing. Nauka, Moscow, 1984.
29. *Kaashoek M.A., van der Mee Cornelis* Recent Advances in Operator Theory and Its Applications, Springer Science & Business Media, 2006. V. 160.
30. *Parr R.G., Yang W.* Density-functional Theory of Atoms and Molecules. NY, Oxford Uni Press. 1989.
31. *Coulson T. et al.* Estimating the functional form for the density dependence from life history data. Ecology. 2008. V. 89(6). P. 1661–1674.
32. *Beckman M.* On the distribution of urban rent and residential density. Journal of Economic Theory, 1969. V. 1. P. 60–67.
33. *Abrams P.A.* Determining the functional form of density Dependence: Deduction Approaches for Cosumer-Resource Systems. American Naturalist. 2009. V. 179. № 3. P. 321–330.
34. *Hyvarinen A.* Estimation of unnormalized statistical models by score matching. Journal of Machine Learning Research. 2005. V. 6. P. 695–709.
35. *Gutman M.U., Hyvarinen A.* Noise-constrastive estimation of unnormalized statistical models? with applications to natural image statistics. Journal of Machine Learning Research. 2012. V. 13. P. 307–361.
36. *Matsuda T., Uehara M., Hyvarinen A.* Information criteria for non-normalized models. Journal of Machine Learning Research. 2021. V. 22. P. 1–33.
37. *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. Wiley, 1998. 768 p.
38. *Witten I.H., Eibe F.* Data Mining: Practical machine learning tools and tehniques. Morgan Kaufmann, 2005.
39. *Bishop C.M.* Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, Series: Information Theory and Statistics, 2006.
40. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer Series in Statistics, Berlin, 2009. 698 p.
41. *Воронцов К.В.* Математические методы обучения по прецендентам. Курс лекций МФТИ. 2013.
42. *Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А.* Рандомизированное машинное обучение при ограниченных объемах данных. УРРС, 2018.
43. *Bruckstein A.M., Donoho D.L., Elad M.* From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images. SIAM review. 2009. V. 51 (1). P. 34–81.
44. *Jolliffe I.* Principal component analysis. New York: Springer. 2011. https://doi.org/10.1007/b98835
45. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Метод главных компонент: робастные версии. Автоматика и телемеханика. 2017. V. 3. P. 130–148.
46. *Bingham E., Mannila H.* Random projection in dimensionality reduction: applications to image and text data. Proceedings of the seventh ACM SIGKDD interna-

tional conference on Knowledge discovery and data mining. 2001. P. 245–250.

47. *Vempala S.S.* The random projection method. *American Mathematical Soc.* 2005. V. 65.
48. *Popkov Y.S., Dubnov Y.A., Popkov A.Y.* Entropy Dimension Reduction Method for Randomized Machine Learning Problems. *Automation and Remote Control.* 2018. V. 79(11). P. 2038–2051. https://doi.org/10.1134/S0005117918110085
49. *Kullback S., Leibler R.A.* On information and sufficiency. The annals of mathematical statistics. 1951. V. 22(1). P. 79–86.
50. *Попков Ю.С., Попков А.Ю.* Кросс-энтропийная оптимальная редукция размерности матрицы данных с ограничением информационной емкости. Доклады академии наук. 2019. V. 488. P. 21–23. https://doi.org/10.31857/S0869-5652488121-23
51. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. Wiley. 1988.
52. *Попков Ю.С.* Оценки максимальной энтропии непрерывных функций и их асимптотическая эффективность. Доклады Академии наук в печати.
53. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974.
54. *Popkov Yu.S.* Macrosystems theory and its applications (Lecture notes in control and information sciences) 203. Springer. 1995.
55. *Goldberger A.S.* A Course in Econometrics. Harvard University Press, 1991. 437 p.
56. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. М., Юнити, 1998.
57. *Лагутин М.Б.* Наглядная математическая статистика. М., БИНОМ, Лаборатория знаний, 2013.
58. *Rousses G.* A Course of the Mathematical Statistics. Academic Press Inc. 2015. 600 p.
59. *Golan A., Judge G.G., Miller D.* Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, 1996.
60. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. М., Финансы и Статистика, 1988.
61. *Загоруйко Н.Г.* Когнитивный анализ данных. Академическое издательство “ГЕО”, 2012. 203 с.
62. *Загоруйко Н.Г., Барахнин В.Б., Борисова И.А., Ткачев Д.А.* Кластеризация текстовых документов из электронной базы публикаций алгоритмом FRiS-Tax. Вычислительные технологии. 2013. Т. 6. № 18. С. 62–74.
63. *Jain A., Murty M., Flynn P.* Data clastering: a review. ACM Computing surveys. 1990. V. 31. № 3. P. 264–323.
64. *Воронцов К.В.* Лекции по алгоритмам кластеризации имногомерному шкалированию. http: // www.ccas.ru/voron/download/Clastering.pdf
65. *Lescovec J., Rajaraman A., Ullman J.* Mining of Massive Datasets. Cambridge University Press, 2014. 511 p.
66. *Deerwester S., Dumias S.T., Furnas G.W., Landauer T.K., Harshman R.* Indexing by Latent Semantic Analysis. Journal of the American Society for Information Science, 1999. V. 41. P. 391–407.
67. *Zamir O.E.* Clastering Web Documents: A Phrase-Based Methods for Grouping Search Engine Results. Uni. of Washington, USA, 1999. P. 65–117.
68. *Cao G., Song D., Bruza P.* Suffix-Tree Clastering on Post-retrieval Documents Information. The Uni. of Queensland, 2003.
69. *Jain A., Dubs R.* Clastering Methods and Algorithms. Prentice-Hall Inc. 1988.
70. *Pal N.R., Biswas J.* Claster validation using graph theoretic consept. Pattern Recognition. 1997. V. 30(6). P. 847–857.
71. *Halkidi M., Batistakis Y., Vazirgiannis M.* On clastering validation techniques. Journal of Intelligent Information Systems. 2001. V. 17(2-3). P. 107–145.
72. *Han J., Kamber M., Pei J.* Data Mining Consept and Techniques. Third Edition, Morgan Kaufmann Publishers, 2012, 703 p.
73. *Popkov Yu.S.* Macrosystem theory and application. Springer, LNIS, 1995.
74. *Aggarval A.* Neural Networks and Deap Learning. Springer International Publishing AG, part os Springer Nature, 2018.
75. *Popkov Yu.S.* New class of multiplicative algorithms for solving of entropy-linear programs. European Journal of Operation Research. 2006. № 174. P. 1368–1379.
76. *Polyak B.T.* Introduction to Optimization, Optimization Software, 1987.
77. *Johnson W.B., Lindenstrauss J.* Extensions of Lipshitz mapping into Hilbert Space. Modern Analysis and Probability. 1984. V. 26. P. 189–206.
78. *Achlioptas D.* Database-friendly random projections. Amer. Math. Soc., 2001, PODS’01. P. 274–281.
79. *Malout R.* A comparison of algorithms for maximum entropy parameters estimation. Proc. of the 6th conference on Natural Language learning, 2002. V. 20. P. 1–7.
80. *Borwein J., Choksi R., Marechal P.* Probability Distribution of Assets Inferred from Option Prices via Principle Maximum Entropy. SIAM Journal of Optimization, 2003. V. 14. № 2. P. 464–478.
81. *Golan A.* Information andentropy econometrics – a review and synthesis. Foundations and trends in econometrics. 2008. V. 2(1-2). P. 1–145.
82. *Csiszar I., Matus F.* On minimization of entropy functionals under moment constraints. IEEE International Symposium on Information Theory, 2008.
83. *Loubes J-M., Rochet* Approximate maximum entropy on the mean for instrumental variable regression. Statistics and Probability Letters, 2012. V. 82. Issue 5. P. 972–978.
84. *Borwein J.M., Lewis A.S.* Partially-Finite Programming in L_1 and Existance of Maximum Entropy Estimates. SIAM Journal of Optimisation, 1993. V. 3. № 2. P. 248–267.
85. *Burg J.P.* The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelyhood spectra. Geophysics. 1972. V. 37. P. 375–376.
86. *Christakos G.* A Bayesian/maximum entropy viewto the spatial estimation problem. Mathematical Geology, 1990. V. 22. P. 763–777.
87. *Singh V.P., Guo H.* Parameter estimation for 3-parameter generalized Pareto distribution by the principle

maximum entropy. Hydrological Sciences Journal, 1994. P. 165–181.

88. *Popkov Yu.S., Dubnov Yu.A., Popkov A.Yu.* Randomized machine learning: Statement, solution, applications // IEEE 8th International Conference on Intelligent Systems (IS) (2016). https://doi.org/10.1109/IS.2016.7737456.
89. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elemets of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover Publication, 1999.
90. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P.* Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 263, Springer-Verlag, 1984, Berlin – Heldenberg – NY, 490 p.
91. *Riordan B., Verbula D., McGruire A.D.* Shrinking ponds in subarctic Alaska based on 1950-2002 remotely sensed images. Journal of Geophysic Researches. 2006. V. 111, G04002.
92. *Kirpotin S., Polishchuk Y., Bruksina N.* Abrupt changes of thermokarst lakes in Western Siberia: impacts of climatic warming on permafrost melting. International Journal of Environmental Studies. 2009. V. 66. № 4. P. 423–431.
93. Электронный ресурс: https://cloud.uriit.ru/index.php/s/0DOrxL9RmGqXsV0.

RANDOMIZATION AND ENTROPY IN MACHINE LEARNING AND DATA PROCESSING

Academician of RAS Yu. S. Popkov[a]

[a] *Federal Research Center "Informatics Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation*

Combining the concept of randomization with entropic criteria allows solutions to be obtained in the conditions of maximum uncertainty, which is very effective in machine learning and data processing. The application of this approach for the Data-based, pyo-randomized evaluation of functions, randomized "hard" and "soft" machine learning, object clustering, data matrix dimension reduction. Some applications of the task of classification, forecasting the electric load of the energy system, randomized clustering of biological objects are considered.

Keywords: entropy, randomization, machine learning, data processing, parameterization of models, estimates of conditional maximum entropy, balance equations, classification, clustering, random ensemble generation

EDN: RTUCKF
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 28–31

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. И. В. Асташова[1,3]*, Д. А. Лашин[4], **, А. В. Филиновский[2,1],***

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 01.12.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принято к публикации 14.03.2022 г.

Рассматривается задача управления с точечным наблюдением для одномерного параболического уравнения, возникающая в математической модели управления климатом в промышленных теплицах. В данной работе мы исследуем общее уравнение с переменными коэффициентом диффузии, коэффициентом конвекции и потенциалом обеднения. Для экстремальной задачи минимизации интегрального весового квадратичного функционала качества установлены существование и единственность минимизирующей функции, изучены точная управляемость и плотная управляемость задачи. Получены необходимые условия экстремума и изучены качественные свойства минимизирующей функции.

Ключевые слова: параболическое уравнение, смешанная задача, точечное наблюдение, экстремальная задача, точная управляемость, плотная управляемость, необходимое условие

DOI: 10.31857/S268695432203002X

Будем рассматривать смешанную задачу для уравнения с конвективным слагаемым и обедняющим потенциалом:

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = (0,1)\times(0,T), \quad T > 0,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

где a, b и h – достаточно гладкие функции в $\bar{Q}_T$, $0 < a_1 \le a(x,t) \le a_2 < \infty$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$.

Изучается задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка (функции ξ и ψ считаем фиксированными), стараемся сделать температуру $u(x_0,t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t) \in L_2(0,T)$ на всем интервале времени $(0,T)$. Обозначим через $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ множество управляющих функций φ, а через $Z \subset L_2(0,\ T)$ – множество целевых функций z, будем далее считать множество Φ непустым, замкнутым и выпуклым. Качество управления оцениваем функционалом

$$J[z,\rho,\varphi] = \int_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2 \rho(t)dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z, \tag{4}$$

при этом u_φ – решение задачи (1)–(3) с заданной управляющей функцией φ, $\rho(x) \in L_\infty(0,T)$ – весовая функция, $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$.

Считая функции z и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi]. \tag{5}$$

Эта задача возникает в модели управлении климатом в промышленных теплицах (см. [1, 2]). Подробные пояснения к изучаемой математической модели содержатся в [21]. Заметим, что экстремальные задачи для уравнения теплопроводности рассматривались в многочисленных работах (см., например, [3–5, 7]). Наиболее изученными явля-

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[3]*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия*
[4]*НПФ "ФИТО", Ленинский р-н, г. Московский, Московская обл., Россия*
**E-mail: ast.diffiety@gmail.com*
***E-mail: dalashin@gmail.com*
****E-mail: flnv@yandex.ru*

ются задачи с финальным наблюдением [3–6, 9]. Достаточно полный обзор ранних результатов содержится в [6], обзор новых результатов имеется в [1, 9, 10, 14, 15]. По сравнению с предшествующими статьями о параболических задачах управления, где рассматриваются задачи с финальным или распределенным наблюдением [5, 7, 8, 11], мы рассматриваем точечное наблюдение. Новым является и тип функционала качества. Эта работа развивает и обобщает результаты работ авторов [16–21]. В данной работе мы исследуем более общее уравнение с переменным коэффициентом диффузии a, коэффициентом конвекции b и потенциалом h, называемым потенциалом обеднения, устанавливаем качественные свойства соответствующей минимизирующей функции. Помимо исследования более общего уравнения (с переменным коэффициентом $a = a(x,t)$, конвективным слагаемым $b(x,t)$ и неоднородным начальным условием) мы также доказываем ряд новых результатов: устанавливаем качественные свойства минимизирующей функции и выводим необходимые условия оптимальности. При доказательстве используем результаты и методы, приведенные в [12, 13].

Определение 1. ([22], с. 15) *Будем обозначать через* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *банахово пространство функций* $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ *с конечной нормой*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0\le t\le T} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \tag{6}$$

таких, что $t \mapsto u(\cdot,t)$ *– непрерывное отображение* $[0,T] \to L_2(0,1)$.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T) = 0$, $\eta(0,t) = 0$.

Определение 2. *Решением задачи* (1)–(3) *будем называть функцию* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *удовлетворяющую условию* $u(0,t) = \varphi(t)$ *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} (a(x,t)u_x\eta_x - b(x,t)u_x\eta - h(x,t)u\eta - u\eta_t)dxdt = \\ = \int_0^1 \xi(x)\eta(x,0)dx + \int_0^T a(1,t)\psi(t)\eta(1,t)dt \tag{7}$$

для всех $\eta \in \tilde{W}_2^1(Q_T)$.

Теорема 1. ([18], [19]) *Задача* (1)–(3) *имеет единственное решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *и для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le C_1\left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}\right), \tag{8}$$

с некоторой постоянной C_1, *не зависящей от* φ, ψ *и* ξ.

Следствие 1. *Отображение* $\{\xi,\varphi,\psi\} \mapsto u$ *непрерывно из пространства* $L_2(0,1) \times W_2^1(0,T) \times W_2^1(0,T)$ *в* $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Для получения следующей оценки нам понадобится следующий *принцип положительности*.

Теорема 2. *Пусть* u *– решение задачи* (1)–(3) *с неотрицательными начальной и граничными функциями:* $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)} \varphi \ge 0$, $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)} \psi \ge 0$, $\operatorname{ess}\inf_{x\in(0,1)} \xi \ge 0$. *Тогда решение и также неотрицательно*: $\operatorname{ess}\inf_{(x,t)\in Q_T} u \ge 0$.

Замечание 1. Для функций φ и ψ имеем $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)} \varphi = \min_{t\in(0,T)} \varphi$, $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)} \psi = \min_{t\in(0,T)} \psi$.

Для доказательства этого утверждения делается замена неизвестной функции, в результате которой задача (1)–(3) сводится к задаче с краевым условием третьего рода. Далее требуемый результат получается применением модифицированного метода барьерных функций.

С использованием теоремы 2 получена следующая оценка.

Теорема 3. *Пусть* $a_t \ge 0$, $b_x - h \ge 0$, $(x,t) \in Q_T$; $b \ge 0$, $(x,t) \in [0,x_0]\times[0,T]$, $x_0 \in (0,1]$; $b(1,t) \le 0$, $t \in [0,T]$. *Тогда для решения задачи* (1)–(3) *имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \le \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}). \tag{9}$$

Следствие 2. *Пусть для* a, b, h *выполнены условия теоремы* 3, $\psi = 0$, $\xi = 0$. *Тогда для решения задачи* (1)–(3) *имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \le \|\varphi\|_{L_1(0,T)}. \tag{10}$$

Из теоремы 3 следует оценка снизу нормы управляющей функции через значение функционала качества.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \ge \max\left\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})\right\}. \tag{11}$$

Следствие 3. *Пусть для* a, b, h *выполнены условия теоремы* 3, $\psi = 0$, $\xi = 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \ge \max\left\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2}\right\}. \tag{12}$$

Теорема 5. *Если множество* Φ *ограничено, то для любой* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Исследуем свойства минимизирующей функции φ_0 как элемента множества Φ.

Теорема 6. *Если множество* $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ *ограничено, коэффициенты* a, b *и* h *в уравнении* (1) *не зависят от* t *и* $m[z,\rho,\Phi] > 0$, *то* $\varphi_0 \in \partial\Phi$. *Для любого замкнутого выпуклого* Φ_1, *такого, что* $\Phi_1 \subset \mathrm{Int}\Phi$, *справедливо неравенство* $m[z,\rho,\Phi_1] > m[z,\rho,\Phi]$.

Одной из важных проблем является проблема точной управляемости экстремальной задачи.

Определение 3. *Будем говорить, что задача* (1)–(3), (5) *является точно управляемой из множества* Φ *во множество* Z, *если для любого* $z \in Z$ *существует управляющая функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой*

$$J[z,\rho,\varphi_0] = 0. \tag{13}$$

При этом функцию φ_0 *будем называть точным управлением.*

Следующая теорема утверждает, что множество Z функций $z \in L_2(0,T)$, допускающих точную управляемость – достаточно "малое" подмножество $L_2(0,T)$.

Теорема 7. *Множество* Z *всех функций* $z \in L_2(0, T)$, *допускающих точную управляемость, то есть таких, что* $J[z,\rho,\varphi] = 0$ *для некоторой* $\varphi \in W_2^1(0, T)$, *является множеством первой категории в* $L_2(0, T)$.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о плотной управляемости.

Определение 4. *Будем говорить, что задача* (1)–(3), (5) *является плотно управляемой из множества* Φ *во множество* Z, *если для всех* $z \in Z$ *выполнено равенство*

$$m[z,\rho,\Phi] = 0.$$

Следующая теорема устанавливает плотную управляемость задачи (1)–(3), (5) из $W_2^1(0,T)$ в $L_2(0, T)$.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты* a, b *и* h *в* (1) *не зависят от* t. *Тогда для любой* $z \in L_2(0,T)$ *справедливо равенство*

$$m[z,\rho,W_2^1(0,T)] = 0. \tag{14}$$

Отметим, что доказательство этого результата основано на применении теоремы Титчмарша о свертке ([24], гл. 11, теорема 152).

Важным также является вопрос о получении необходимых условий минимума для $\varphi_0 \in \Phi$. Необходимое условие может быть сформулировано в терминах сопряженной к (1)–(3), (5) задачи. Так мы будем называть смешанную задачу для обратно параболического уравнения

$$\begin{gathered} p_t + (a(x,t)p_x)_x - (b(x,t)p)_x + h(x,t)p = \\ = \delta(x-x_0)\cdot\big(u_\varphi(x_0,t) - z(t)\big)\rho(t), \quad (x,t) \in Q_T, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} p(0,t) = 0, \quad a(1,t)p_x(1,t) - b(1,t)p(1,t) = 0, \\ 0 < t < T, \end{gathered} \tag{16}$$

$$p(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{17}$$

где u_φ – решение (1)–(3).

Определение 5. *Решением задачи* (15)–(17) *будем называть функцию* $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *удовлетворяющую условию* $p(0,t) = 0$ *и интегральному тождеству*

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_T} \big((a(x,t)p_x - b(x,t)p)\eta_x + p\eta_t - h(x,t)p\eta\big)dxdt = \\ = -\int\limits_0^T (u_{\varphi_0}(c,t) - z(t))\rho(t)\eta(c,t)dt \end{gathered} \tag{18}$$

для всех функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, *таких, что* $\eta(0,t) = 0$ *и* $\eta(x,0) = 0$.

Теорема 9. *Задача* (15)–(17) *имеет единственное решение* $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *и для него справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} \|p\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le C_2\Big(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \\ + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|z\|_{L_2(0,T)}\Big), \end{gathered} \tag{19}$$

где постоянная C_2 *не зависит от* φ, ψ, ξ *и* z.

Теорема 10. *Пусть* $\varphi_0 \in \Phi$ – *минимизирующая функция. Тогда для всех управляющих функций* $\varphi \in \Phi$ *справедливо следующее неравенство*:

$$\int\limits_0^T a(0,t)p_x(0,t)\big(\varphi(t) - \varphi_0(t)\big)\rho(t)dt \le 0, \tag{20}$$

где p – *решение задачи* (15)–(17) *с* $\varphi = \varphi_0$.

Заметим, что след производной $p_x|_{x=0}$ существует в силу теоремы о регулярности решений параболических краевых задач (см., [23], гл. 3, пар. 12).

Необходимое условие для минимизирующей функции можно получить и без использования сопряженной задачи. Так, если $\varphi_0 \in \Phi$ – минимизирующая функция, то для любой управляющей функции $\varphi \in \Phi$ выполнено следующее неравенство

$$\int\limits_0^T (u_{\varphi_0}(x_0,t) - z(t))(u_\varphi(x_0,t) - u_{\varphi_0}(x_0,t))\rho(t)dt \ge 0. \tag{21}$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A.* On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204.
2. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8.
3. *Butkovskiy A. G.* Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22. № 1. С. 17–26.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 463 с.
5. *Егоров Ю.В.* Некоторые задачи теории оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963, Т. 3. № 5. 887–904 с.
6. *Butkovskiy A.G., Egorov A.I., Lurie K.A.* Optimal control of Distributed Systems // SIAM J. Control. 1968. V. 6. № 3. P. 437–476.
7. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
8. *Лионс Ж.Л.* Об оптимальном управлении распределенными системами // УМН. 1973. Т. 28. Вып. 4. С. 15–46.
9. *Troltzsch F.* Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence.: AMS, 2010. 399 p.
10. *Lurie K.A.* Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Springer. Berlin, 2013. 499 p.
11. *Friedman A.* Optimal control for parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 18. № 3. P. 479–491.
12. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Kondratiev V.A., Muravei L.A.* Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations // J. of Natural Geometry. 2003. V. 23. № 1–2. P. 1–126.
13. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 647 с.
14. *Farag M.H., Talaat T.A., Kamal E.M.* Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems // Cubo. 2013. V. 15. № 2. P. 111–119.
15. *Sener S., Subasi M.* On a Neumann boundary control in a parabolic system. Bound. Value Probl. 2015. V. 166. 16 p. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0430-5
16. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25.
17. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5, P. 595–609.
18. *Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.* Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Труды Моск. матем. общ-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.
19. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* Controllability and Exact Controllability in a Problem of Heat Transfer with Convection and Time Distributed Functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157.
20. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On properties of the control function in an extremal control problem with a point observation for a parabolic equation // Funct. Diff. Equ. 2021. V. 28. № 3–4. P. 99–102.
21. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS Trans. on Appl. and Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192.
22. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973. 400 с.
23. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. 736 с.
24. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. 479 с.

ON THE EXTREME CONTROL PROBLEM WITH POINT OBSERVATION FOR A PARABOLIC EQUATION

I. V. Astashova[a,c], D. A. Lashin[d], and A. V. Filinovskiya[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia, Moscow, Russian Federation*

[d] *OOO NPF "FITO", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of RAS V.V. Kozlov

In this paper we consider a control problem with point-wise observation for a one-dimensional parabolic equation, which arises in a mathematical model of climate control in industrial greenhouses. We study a general equation with variable di˙usion coe˚cient, convection coe˚cient, and depletion potential. For the extremum problem of minimizing the integral weighted quadratic cost functional, we establish the existence and uniqueness of the minimizing function. We also study exact controllability and dense controllability of the problem. Necessary conditions for an extremum are obtained, and qualitative properties of the minimizing function are studied.

Keywords: Parabolic equation, mixed problem, point observation, extremal problem, exact controllability, dense controllability, necessary condition

EDN: YOYVYO
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 32–35

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССОЦИАЦИИ ГАЗОВОГО ГИДРАТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЛЬДА И СОЛЕНОСТИ

© 2022 г. Ю. А. Повещенко[1,*], Г. И. Казакевич[2,], В. О. Подрыга[1,***], П. И. Рагимли[1,****]**

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным
Поступило 20.09.2021 г.
После доработки 01.02.2022 г.
Принято к публикации 11.03.2022 г.

Работа посвящена математическому моделированию процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде. Разработаны численные методы решения задач подземной гидромеханики, связанные с таянием газовых гидратов в криолитозоне северных регионов и на шельфе арктических морей. Рассматриваемая система уравнений учитывает наличие льда и фазовый переход лед-вода, а также присутствие соли. С помощью метода расщепления по физическим процессам система преобразована к блочному виду, в котором разделены диссипативная и гиперболическая части. Это позволяет эффективно применить для каждого блока свой численный подход. В итоговом алгоритме выделены зоны, характеризующиеся разным набором уравнений и независимых переменных. В целях повышения устойчивости метода проведены термодинамический анализ физических процессов и математическое согласование задач в зонах. В результате построена единая вычислительная схема и проведены пробные расчеты. Анализ результатов подтвердил эффективность разработанного численного подхода.

Ключевые слова: газовые гидраты, фильтрация, математическое моделирование
DOI: 10.31857/S2686954322030080

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире уделяется большое внимание изучению природных газовых гидратов как возможных источников сырья и потенциальной угрозы, связанной с выделением метана при их разрушении, в частности, под воздействием климатических изменений. Часть обнаруженных и гипотетических скоплений газовых гидратов связана с зонами многолетнемерзлых пород и шельфом арктических морей. Во многих работах выдвигаются и подробно исследуются гипотезы о связи ряда природных процессов, в том числе и катастрофического характера, таких как образование воронок на суше в северных регионах, широкомасштабное выделение газа на дне океанов, с разложением гидратов. В силу недостаточности данных эта проблема является дискуссионной. Одним из методов исследования здесь является математическое моделирование. При его применении к процессам, связанным с газовыми гидратами в криолитозоне северных регионов и на шельфе арктических морей, в общей схеме расчетов фильтрационных процессов необходимо учесть еще одну фазу – лед. В подобных задачах также существенно влияние соли на условия термодинамического равновесия гидратов [1, 2], поскольку соль содержится в морской воде и используется в технологических процессах в качестве ингибитора. Работа посвящена разработке математической модели диссоциации газовых гидратов в пористой среде и соответствующего численного алгоритма, позволяющих учесть наличие льда и соответствующего фазового перехода, соли, а также растворенного газа. В качестве основы взяты уравнения баланса масс, импульса и энергии в предположении о термодинамически равновесном характере процесса.

2. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В газогидратной фазово-равновесной зоне (ГРЗ) уравнения баланса массы флюидов для воды (w), газа (g) и соли (c – в растворе, b – осадок), а также полной внутренней энергии системы, включая скелет, могут быть записаны в следующей дивергентной форме:

[1] *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: hecon@mail.ru*
***E-mail: gkazakevich@yandex.ru*
****E-mail: pvictoria@list.ru*
*****E-mail: pervin@rehimli.info*

$$\frac{\partial\{m[S_v S_{lib} R_{wi} + (1-S_v)\beta_w \rho_v]\}}{\partial t} + \operatorname{div}[\beta_l^w \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^w] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\{m[S_v(1-S_{lib})\rho_g + (1-S_v)(1-\beta_w)\rho_v + S_v S_{lib} C_l \beta_l^g \rho_l]\}}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_g \mathbf{V}_g + \beta_l^g \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^g] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\{m[S_v S_{lib} R_{cb}]\}}{\partial t} + \operatorname{div}[\beta_l^c \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^c] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\{m[S_v(S_{lib}E_{lib} + (1-S_{lib})\rho_g\varepsilon_g) + (1-S_v)\rho_v\varepsilon_v] + (1-m)\rho_s\varepsilon_s\}}{\partial t} + \operatorname{div}\{\rho_l\varepsilon_l\mathbf{V}_l + \rho_g\varepsilon_g\mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_l + \mathbf{V}_g) + \mathbf{W}\} = 0. \quad (4)$$

Здесь m – пористость; индексы обозначают: v – гидрат, l – жидкая фаза, включающая воду (w), растворенные в ней газ (g) и соль (c), g – свободный газ, i – лед, b – осадок соли, s – скелет; S_v – растепленность порового пространства от гидратов, $(1-S_v)$ – его гидратонасыщенность; индекс lib отвечает суммарно жидкой фазе, льду и солевому осадку в растепленном поровом пространстве; S_{lib} – их объемная доля в (mS_v). Для объемных долей C_l, C_i, C_b, объединенных в S_{lib}, выполнено соотношение: $C_l + C_i + C_b = 1$. Далее, β_w и $(1-\beta_w)$ – массовые доли воды и газа в гидрате. В жидкой фазе (l) для компонентных массовых долей воды (β_l^w) и растворенных в ней газа (β_l^g) и соли (β_l^c) также выполнено соотношение: $\beta_l^w + \beta_l^g + \beta_l^c = 1$. В ГРЗ принимается, что $\beta_l^g = \beta_l^g(P,T)$. Если газ в жидкой фазе отсутствует, то $(\beta_l^g = 0)$. Соответственно массовая доля воды и соли в жидкой фазе $\beta_l^{wc} = \beta_l^w + \beta_l^c = 1 - \beta_l^g = \beta_l^{wc}(P,T)$, либо $\beta_l^{wc} = 1$ при $\beta_l^g = 0$. Плотности и их доли обозначены как $\{\rho_\chi, \chi = \nu, l, w, i, g, b, lib, s\}$, где $\rho_{lib} = C_l\rho_l + C_i\rho_i + C_b\rho_b$. Также вводятся дольные плотности: $R_{wi} = C_l\beta_l^w\rho_l + C_i\rho_i$ – всей воды и льда, содержащихся в S_{lib}, и $R_{cb} = C_l\beta_l^c\rho_l + C_b\rho_b$ – всей соли, содержащейся в S_{lib}. Аналогично, $\{\varepsilon_\chi, \chi = \nu, l, w, i, g, b, lib, s\}$ – внутренние энергии единицы массы гидрата, жидкой фазы, воды, льда, свободного газа, солевого осадка, также внутренние энергии единицы массы S_{lib} консистенции и скелета. При этом для $E_{lib} = \rho_{lib}\varepsilon_{lib}$ – внутренней энергии жидкой фазы, льда и солевого осадка, нормированной единицей объема, в S_{lib} консистенции выполнено $E_{lib} = C_l\rho_l\varepsilon_l + C_i\rho_i\varepsilon_i + C_b\rho_b\varepsilon_b$.

Предполагается выполнение закона Дарси с учетом гравитации, но без учета капиллярных сил вода–газ: $\{\mathbf{V}_\alpha = -k_{lib}\cdot k_{r\alpha}/\mu_\alpha(\nabla P - \mathbf{g}\rho_\alpha),\ \alpha = l, g\}$, где $\mathbf{g}$ – вектор ускорения свободного падения, P – давление, μ_l и μ_g – динамические вязкости жидкости и свободного газа, k_{lib} – перерасчет абсолютной проницаемости с учетом части пор, занятой льдом и солевым осадком, k_{rl} и k_{rg} – относительные фазовые проницаемости жидкости и свободного газа с учетом подвижности в S_{lib} консистенции только жидкой фазы (l). $\mathbf{W}$ – поток тепла.

Диффузионные потоки воды, газа и соли в жидкой фазе представлены процессом молекулярной диффузии в пористой среде [9] $\{\mathbf{M}_l^\alpha = -mD_l^\alpha\rho_l\nabla\beta_l^\alpha;\ \alpha = w, g, c\}$ с коэффициентами D_l^α. Совместный диффузионный поток воды и соли в жидкой фазе определяется как $\mathbf{M}_l^{wc} = \mathbf{M}_l^w + \mathbf{M}_l^c$. Поток тепла в уравнении внутренней энергии (4) имеет вид:

$$\mathbf{W} = -\{m[S_v(S_{lib}\lambda_{lib} + (1-S_{lib})\lambda_g) + (1-S_v)\lambda_v] + (1-m)\lambda_s\}\nabla T,$$

что соответствует среде с коэффициентами $\{\lambda_\chi(P, T),\ \chi = \nu, l, w, i, g, b, lib, s\}$. Здесь $\lambda_{lib} = C_l\lambda_l + C_i\lambda_i + C_b\lambda_b$.

3. РАСЩЕПЛЕНИЕ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

В качестве двух базовых переменных выбираются величины S_{lib} и S_v. Остальные параметры задаются вектором $\boldsymbol{\pi} = \{P, T, C_\gamma, \beta_l^\alpha; \gamma = l, i, b, \alpha = w, g, c\}$, состоящим из двух основных независимых переменных $\boldsymbol{\pi}_2$ и шести вспомогательных (за исключением бессолевой ГРЗ в отсутствие жидкой фазы – с одной базовой переменной $\boldsymbol{\pi}_1$ и вырожденным дольно-солевым уравнением).

Преобразование системы уравнений, позволяющее выделить диссипативный блок, производится методом расщепления по физическим процессам, предложенным в работе [3]. В результате для пары оставшихся независимых переменных получается подсистема, не содержащая производные по времени от величин S_{lib} и S_v и состоящая из уравнения пьезопроводности в ГРЗ с жидким раствором и твердофазными включениями, обобщающего диссипативное уравнение теории гидратов, полученное в работе [3], и дольно-солевого уравнения.

4. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НА НЕСКОЛЬКО ЗОН

В задачах фильтрации, связанных с газовыми гидратами, исходная область разбивается на несколько зон, различающихся по уравнениям и набору основных неизвестных, описывающих процесс. При отсутствии соли, льда, растворенного газа таких зон три [4]: трехфазная (ГРЗ), где присутствуют газ, вода и гидрат, талая – где гидратов нет и гидратно-стабильная с отсутствующими свободным газом или водой. В первой зоне основные неизвестные – S_v, S_w, P. Температура определяется по давлению из условия фазового равновесия. Во второй зоне основные неизвестные – S_w, P, T. В третьей – S_v, P, T.

В рассматриваемом случае возникает семь зон, для которых с использованием правила фаз Гиббса определено количество независимых параметров:

1. Жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{P,T\}, C_l = 1, C_i = C_b = 0, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$$
$$\beta_l^g = \beta_l^g(P,T), \beta_l^c = \beta_l^c(P,T).$$

2. Солевой осадок и жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{P,C_l\}, \quad T = T_{dis}(P), \quad C_i = 0, \quad C_b = 1 - C_l,$$
$$\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P,T), \beta_l^c = \beta_l^c(P,T).$$

3. Ненасыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{C_l,\beta_l^c\}, \ P = P(\beta_l^c), \ T = T_{dis}(P), \ C_i = 1 - C_l,$$
$$C_b = 0, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P,T).$$

4. Насыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{P,C_l\}, \quad T = T(P), \quad C_i = 1 - C_l, \quad C_b = 0,$$
$$\beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^g = \beta_l^g(P,T), \beta_l^c = \beta_l^c(P,T).$$

5. Солевой осадок и жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{C_l,C_i\}, \ P_0,T_0, \ C_b = 1 - C_l - C_i, \ \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c,$$
$$\beta_l^g = \beta_l^g(P_0,T_0), \beta_l^c = \beta_l^c(P_0,T_0).$$

Давление P_0 и температура T_0 являются константами, определяемыми для данного процесса экспериментально.

6. Солевой осадок в ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \{P,C_i\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_b = 1 - C_i.$$

7. Бессолевая ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \{P\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_i = 1, C_b = 0.$$

С помощью метода характеристик получены условия согласования систем уравнений, отвечающих областям с разным количеством фаз и содержащих разное число неизвестных.

5. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

При численных расчетах вычисления ускоряются за счет разделения системы на диссипативную и гиперболическую части. Из диссипативной части по неявной схеме находятся переменные вектора $\boldsymbol{\pi}_2$, а на их основе вычисляются термодинамические параметры и по явной схеме рассчитывается перенос насыщенностей S_{lib} и S_v. Также проводится перерасчет абсолютной и фазовой проницаемости.

При решении задач двухфазной фильтрации широко используется аппроксимация фазовых проницаемостей вверх по потоку [5]. В работе [3] методом характеристик показано, что при учете газовых гидратов часть величин надо брать вниз по потоку. В данной работе получены обобщения этих результатов с учетом льда и соли.

Для численного решения полученной системы уравнений используется метод опорных операторов [6, 7], позволяющий аппроксимировать уравнения в частных производных на нерегулярных сетках. В работе [8] для подобных сеток в целях обеспечения вычислительной устойчивости разностной схемы проведена эффективная монотонизация аппроксимации по насыщенностям водой и гидратами, а также по нелинейному переносу внутренних энергий свободных воды и газа в гидратизированной пьезопроводной части задачи. В той же работе при дискретизации задачи диссоциации газовых гидратов в пористой среде использовался простой в реализации метод свободно-объемной аппроксимации сеточных функций по времени, учитывающий долю объема в порах, занятой флюидами. В представленной работе используются методы, аналогичные методам работы [8], обобщенные на случай диссоциации газовых гидратов в пористой среде с учетом льда и соли.

Итоговый численный алгоритм апробирован на одномерной модельной задаче и подтвердил свою эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu X., Flemings P.B.* Dynamic multiphase flow model of hydrate formation in marine sediments // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. B03101. P. 1–23.
2. *Малахова В.В., Елисеев А.В.* Влияние диффузии солей на состояние и распространение многолетнемёрзлых пород и зоны стабильности метан-гидратов шельфа моря Лаптевых // Лёд и Снег. 2020. Т. 60. № 4. С. 533–546.
3. *Повещенко Ю.А., Казакевич Г.И.* Математическое моделирование газогидратных процессов // ММС. 2011. № 3. С. 105–110.
4. *Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б.* Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями //

Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 40. 32 с.

5. *Азиз. Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
6. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО "Критерий", 1996. 273 с.
7. *Дмитриевский А.Н., Лобковский Л.И., Казакевич Г.И., Повещенко Ю.А., Баланюк И.Е., Илюхин Л.Н.* Численное моделирование движения флюидов в процессе формирования залежей углеводородов на примере Предверхоянского прогиба // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. 1995. № 7. С. 2–6.
8. *Poveshchenko Yu., Rahimly P., Rahimly O., Podryga V., Gasilova I.* A numerical approach to study the thermal influence on gas hydrates by physical process splitting // IJNAM. V. 17. № 3. P. 404–433.
9. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.

MATHEMATICAL MODELING OF DISSOCIATION OF GAS HYDRATE IN POROUS MEDIUM TAKING INTO ACCOUNT ICE AND SALINITY

Yu. A. Poveshchenko[a], G. I. Kazakevich[b], V. O. Podryga[a], and P. I. Rahimly[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of RAS B.N. Chetverushkin

The work is devoted to the mathematical modeling of the dissociation processes of gas hydrates in a porous medium. Numerical methods were developed for solving problems of underground hydromechanics associated with gas hydrates in the cryolithozone of the northern regions and on the shelf of the Arctic seas. The considered system of equations takes into account the presence of ice and the ice-water phase transition, as well as the presence of salt. Using the method of splitting by physical processes, the system was transformed to a block form, in which the dissipative and hyperbolic parts were separated. This made it possible to effectively apply its own numerical approach for each block. In the final algorithm, zones were identified that were characterized by a different set of equations and independent variables. In order to increase the stability of the method, a thermodynamic analysis of physical processes and mathematical coordination of problems in the zones were carried out. As a result, a unified computational scheme was built and test calculations were carried out. Analysis of the results confirmed the effectiveness of the developed numerical approach.

Keywords: gas hydrates, filtration, mathematical modeling

EDN: ZYYIGX
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 36–41

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов[1,*]

Поступило 07.02.2022 г.
После доработки 10.03.2022 г.
Принято к публикации 20.03.2022 г.

Для уравнения $u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4$, в котором $f(x,u)$ – гладкая функция своих переменных, финитная по x, изучается задача об определении этой функции по некоторой информации о решениях задач Коши для дифференциального уравнения. Рассматриваются плоские волны, с резким фронтом распространяющиеся в однородной среде в направлении единичного вектора ν и падающие на неоднородность, локализованную внутри некоторого шара $B(R)$. Предполагается, что решения задач могут быть измерены в точках границы этого шара в моменты времени, близкие к приходу фронта волны для всевозможных значений вектора ν. Проводится исследование прямой задачи, устанавливается существование ограниченного решения в окрестности характеристического клина, выводится амплитудная формула на фронте волны для производной по t от решения задачи. Показывается, что решение обратной задачи редуцируется к серии задач рентгеновской томографии.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, плоские волны, рентгеновская томография, единственность

DOI: 10.31857/S2686954322030092

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4; \\ u|_{t<0} = g(t + t_0 - x \cdot \nu), \end{gathered} \tag{1}$$

в которой $f(x,u)$ – гладкая функция переменных x, u, финитная по $x \in \mathbb{R}^3$, а $g(t)$ является при $t = 0$ разрывной функцией, $g(+0) = \alpha > 0$ и $g(t) = 0$ при $t < 0$. Относительно функции $g(t)$ дополнительно предположим, что ее структура такова: $g(t) = \alpha > 0$ для значений $t \in [0, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, а при $t > \varepsilon$ произвольна (в частности, может быть $g(t) = 0$ при $t > \varepsilon$). Параметр α может меняться, пробегая некоторое множество значений. В (1) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор, принадлежащий единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Смысл параметра t_0 будет объяснен чуть ниже. В поставленной выше задаче ν и α играют роль параметров. Поэтому ее решение обозначим через $u(x,t,\alpha,\nu)$, подчеркнув тем самым его зависимость от этих параметров. Однако при исследовании задачи (1) зависимость решения от ν и α будет для краткости опускаться.

В дальнейшем нас будет интересовать задача об определении функции $f(x,u)$ по некоторой информации о решениях задачи (1). В связи с этим сделаем некоторые предположения о функции $f(x,u)$, в рамках которых будет проведено все дальнейшее рассмотрение.

Предположения.

1) носитель функции $f(x,u)$ при любом значении $u \geq 0$ содержится в шаре $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < R\}$, $R > 0$,

2) функции $f(x,u)$, $f_u(x,u)$ являются непрерывными для $(x,u) \in B(R) \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq 0\}$,

3) $|f(x,u)| \leq f_0(u)$, $f_0 \in C(R_+)$, $f_0(0) = 0$, $f_0(u) > 0$ для $u > 0$,

4) при любом $K \in (0,\infty)$ существует положительная постоянная $M = M(K)$, такая что имеет место оценка

$$|f_u(x,u)| \leq M(K), \qquad (x,u) \in B(R) \times [0,K]. \tag{2}$$

Обозначим $S_+(R,\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = R, x \cdot \nu > 0\}$. Положим в (1) $t_0 = \inf_{x \in B(R)} = (x \cdot \nu) = -R$. Урав-

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
**E-mail: romanov@math.nsc.ru*

нение $u = g(t + t_0 - x \cdot \nu)$ описывает в однородном пространстве (при $f(x,u) \equiv 0$) плоскую волну, бегущую в направлении вектора ν. В момент времени $t = 0$ фронт этой волны касается области $B(R)$, в которой сосредоточена неоднородность.

Обратная задача. Найти $f(x,u)$ в области $x \in B(R)$, $u \in (0,U]$ по следующей информации о решениях задачи (1):

$$u(x,t,\nu,\alpha) = h(x,t,\nu,\alpha), \quad \text{для всех} \quad \nu \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R,\nu), \quad t \in (0, x \cdot \nu - t_0 + \varepsilon, \alpha \in (0,U], \tag{3}$$

где $h(x,t,\nu,\alpha)$ – заданная функция и ε – произвольное малое положительное число.

Обратные задачи об определении коэффициентов в нелинейных гиперболических уравнениях интенсивно изучаются в последние годы (см. [1–9]). Настоящая работа основана на идее разложения решения по особенностям в окрестности фронта волны, использованной, в частности, в статьях [10–13].

Теорема 1. *Пусть* $\nu \in \mathbb{S}^2$, $\alpha > 0$ *и функции* $f(x,u)$ *и* $g(t)$ *удовлетворяют сделанным выше предположениям. Тогда вблизи характеристического клина* $t = x \cdot \nu - t_0$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1) и оно представимо в виде*

$$u(x,t) = \alpha H(t + t_0 - x \cdot \nu) + [\beta(x,\nu,\alpha) + \bar{u}(x,t)]H_1(t + t_0 - x \cdot \nu), \tag{4}$$

в котором $H(t)$ *– функция Хевисайда:* $H(t) = 1$ *для* $t \geq 0$ *и* $H(t) = 0$ *для* $t < 0$ *и* $H_1(t) = tH(t)$, *а функция* $\beta(x,\nu,\alpha)$ *вычисляется по формуле*

$$\beta(x,\nu,\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x - s\nu,\alpha)ds. \tag{5}$$

В этой формуле ds – элемент евклидовой длины, а функция $\bar{u}(x,t)$ в (4) является непрерывной по своим арументам и бесконечно малой при $t \to x \cdot \nu - t_0 + 0$.

Доказательство этой теоремы состоит из цепочки лемм.

В однородной среде (т.е. при $f(x,u) \equiv 0$) решение задачи (1) имеет вид $u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu)$. Из формулы Кирхгофа для неоднородного волнового уравнения следует, что решение задачи (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu) + \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi - x| \leq t} \frac{f(\xi, u(\xi, t - |\xi - x|))}{|\xi - x|}d\xi, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Так как $g(t + t_0 - x \cdot \nu) = 0$ для $t < x \cdot \nu - t_0$ и $f(x,0) = 0$, то $u(x,t) = 0$ при $0 \leq t < x \cdot \nu - t_0$. Поэтому из (6) следует уравнение

$$u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu) + \frac{1}{4\pi}\int_{D(x,t,\nu)} \frac{f(\xi, u(\xi, t - |\xi - x|))}{|\xi - x|}d\xi, \quad t \geq x \cdot \nu - t_0, \tag{7}$$

в котором $D(x,t,\nu)$ – область, ограниченная осесимметричным параболоидом

$$P(x,t,\nu) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi \cdot \nu + |\xi - x| = t + t_0\}$$

с центральной осью, проходящей через x и направленной в сторону вектора $-\nu$.

Введем в рассмотрение семейство параболоидов

$$P(x,\tau,\nu) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi \cdot \nu + |\xi - x| = \tau + t_0\}$$

для $\tau \in (x \cdot \nu - t_0, t]$.

Наряду с декартовой системой координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 рассмотрим систему координат y_1, y_2, y_3 с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ и единичными ортами e_1, e_2, e_3:

$$e_3 = \nu = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

$$e_1 = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),$$

$$e_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0).$$

В выписанных выше формулах $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Кроме того, введем цилиндрическую систему координат z, r, ψ, связанную с системой y_1, y_2, y_3 равенствами $y_1 = r\cos\psi$, $y_2 = r\sin\psi$, $y_3 = z$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Тогда

$$\xi = x + y, \quad y = e_2 r\cos\psi + e_3 r\sin\psi + e_3 z, \tag{8}$$

и уравнение, определяющее параболоид $P(x,\tau,\nu)$, принимает вид:

$$P(x,\tau,\nu) = \{(r,z) : z + (z^2 + r^2)^{1/2} = \tau + t_0 - x \cdot \nu\},$$

или

$$r = \sqrt{(\tau + t_0 - x \cdot \nu)(\tau + t_0 - x \cdot \nu - 2z)}. \tag{9}$$

Следовательно, при $\tau \to x \cdot \nu - t_0 + 0$ параболоид $P(x,\tau,\nu)$ вырождается в луч $L(x, \nu) =: \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi = x + z\nu, z \leq 0\}$.

В равенстве (7) вместо переменных интегрирования ξ_1, ξ_2, ξ_3 введем криволинейные координаты τ, z, ψ. Тогда

$$\frac{d\xi}{|x-\xi|} = \frac{dy}{|y|} = d\tau dz d\psi.$$

Поэтому уравнение (7) принимает вид

$$u(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)} f(\xi, u(\xi, t-|\xi - x|))d\psi dz d\tau = \\ = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/22\pi}\int\limits_{0} u(\xi, u(\xi, t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \\ t \ge x\cdot\nu - t_0, \tag{10}$$

в котором переменная ξ определена формулами (8) и (9).

Определим последовательность $u_k(x,t)$, $k = 0$, 1, ..., формулой:

$$u_0(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu),$$

$$u_k(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)} f(\xi, u_{k-1}(\xi, t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \tag{11}$$

$$k = 1,2,\ldots, \quad t \ge x\cdot\nu - t_0.$$

Пусть $F(u)$ – фиксированная первообразная для функции $1/f_0(u)$. При этом $F'(u) = \dfrac{1}{f_0(u)}$. Обозначим через $F^{-1}(p)$ обратную функцию к $p = F(u)$ для $u > 0$. Тогда

$$\frac{d}{dp}F^{-1}(p) = f_0(F^{-1}(p)). \tag{12}$$

Пусть ε – фиксированное число из интервала $(0, (F(2\alpha) - F(\alpha)))$. Обозначим

$$G(\nu,\varepsilon) = \{(x,t)|0 \le R(t+t_0 - x\cdot\nu) \le \varepsilon\}.$$

Лемма 1. *Пусть $g(t) = \alpha > 0$ для $t \in [0, \varepsilon/R]$, а функция $f(x,u)$ удовлетворяет сделанным выше предположениям. Тогда в области $G(\nu,\varepsilon)$ последовательность $u_k(x,t)$ удовлетворяет оценке:*

$$0 < u_k(x,t) \le F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \\ (x,t) \in G(\nu,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{13}$$

Действительно, в силу монотонности функции $F(u)$, имеем

$$0 < u_0(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) = \\ = \alpha \le F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \\ (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

Далее,

$$u_1(x,t) \le \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t - |\xi - x| + t_0 - \xi\cdot\nu)))d\psi dz d\tau = \\ = \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t-\tau)))d\psi dz d\tau \le \\ \le \alpha + R\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = \\ = F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

Последнее равенство в этой цепочке соотношений получается, если сделать замену переменной τ на новую переменную $s = F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau))$ и проверить, используя (12), что

$$Rf_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = -ds.$$

С помощью подобных же вычислений проверяется положительность $u_1(x,t)$ в области $G(\nu,\varepsilon)$:

$$u_1(x,t) \ge \alpha - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t - |\xi - x| + t_0 - \xi\cdot\nu)))d\psi dz d\tau \ge \\ \ge \alpha - R\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = \\ = 2\alpha - F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)) > \\ > 2\alpha - F^{-1}(F(\alpha) + \varepsilon)) > 0, \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

В точности такие же вычисления показывают справедливость оценок (13) при любых k.

Следствие 1. *При выполнении условий леммы 1 последовательность $u_k(x,t)$ является равномерно ограниченной в области $G(\nu,\varepsilon)$, причем для всех k выполнено неравенство:*

$$0 < u_k(x,t) \le 2\alpha, \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon), \\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Лемма 2. *В условиях Леммы 1 последовательность $u_k(x,t)$ равномерно сходится в области $G(\nu,\varepsilon)$ и опре-*

деляет в этой области непрерывную предельную функцию $u(x,t)$.

Введем в рассмотрение разности

$$v_k(x,t) = u_k(x,t) - u_{k-1}(x,t), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Из формулы (11) следуют равенства

$$v_1(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,t,\nu)} f(\xi,u_0(\xi,t-|\xi-x|))d\varphi dz d\tau,$$

$$v_k(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,t,\nu)} v_{k-1}(\xi,t-|\xi-x|)\times \tag{15}$$

$$\times Q(u_{k-1}(\xi,t-|\xi-x|),u_{k-2}(\xi,t-|\xi-x|))d\varphi dz d\tau,$$
$$k = 2,3,\ldots.$$

В формуле (15) функция $Q(u_{k-1},u_{k-2})$ определена равенством

$$Q(u_{k-1},u_{k-2}) = \int\limits_0^1 f_u(\xi,u_{k-1}s + u_{k-2}(1-s))ds. \tag{16}$$

Из формул (11) вытекает оценка

$$|v_1(x,t)| \le Rf_0(\alpha)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t} d\tau = Rf_0(\alpha)(t+t_0-x\cdot\nu),$$
$$(x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Величина $Q(u_{k-1},u_{k-2})$ легко оценивается на основе следствия 1 и неравенства (2):

$$|Q(u_{k-1},u_{k-2})| \le M(2\alpha).$$

Полагая в формуле (15) $k = 2$, находим, что

$$|v_2(x,t)| \le \frac{Rf_0(\alpha)M(2\alpha)}{4\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)}(t+t_0-\xi\cdot\nu-|\xi-x|)d\varphi dz d\tau \le$$

$$\le R^2 f_0(\alpha)M(2\alpha)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}(t-\tau)d\tau =$$

$$= R^2 f_0(\alpha)M(2\alpha)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^2}{2!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Продолжая процесс оценок разностей $v_k(x,t)$, находим, что

$$|v_k(x,t)| \le R^k f_0(\alpha)M^{k-1}(2\alpha)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^k}{k!}, \tag{17}$$
$$k = 2,3,\ldots, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Из оценки (17) вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t)$ в области $G(\nu,\varepsilon)$. Это доказывает также равномерную сходимость последовательности $u_k(x,t)$ в той же самой области. Так как, очевидно, все $u_k(x,t)$ положительны и непрерывны в этой области, то предел этой последовательности определяет положительную функцию $u(x,t)$, которая является непрерывным для $(x,t)\in G(\nu,\varepsilon)$ решением задачи (1).

Следствие 2. *Предельная функция* $u(x,t)$ *последовательности* $u_k(x,t)$ *является непрерывным решением уравнения (10) в области* $G(\nu,\varepsilon)$, *и для нее выполнено неравенство:*

$$0 < u(x,t) \le 2\alpha, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{18}$$

Лемма 3. *В области* $G(\nu,\varepsilon)$ *уравнение (10) имеет единственное непрерывное решение.*

Пусть существуют два решения $u_k(x,t)$, $k = 1, 2$, положительные, непрерывные и ограниченные в области $G(\nu,\varepsilon)$ некоторой постоянной K. Обозначим $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t,(x,t\nu)$. Запишем равенство (10) для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ и найдем соотношение для их разности, используя представление (16). В результате получим

$$w(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/2}\int\limits_0^{2\pi} w(\xi,t-|\xi-x|)\times \tag{19}$$
$$\times Q(u_1(\xi,t-|\xi-x|,u_2(\xi,t-|\xi-x|)d\psi dz d\tau.$$

В силу (16) имеет место оценка $|Q(u_1,u_2)| \le M(K)$. Так как $|w(x,t)| \le K$, а интервал интегрирования по переменной z, в силу финитности функции $f(x,u)$, не превосходит $2R$, то из (19) получим

$$|w(x,t)| \le KRM(K)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t} d\tau = \tag{20}$$
$$= KRM(K)(t+t_0-x\cdot\nu), \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Подставляя (20) в равенство (19), получаем новую оценку

$$|w(x,t)| \le KR^2M^2(K)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}(t-\tau)d\tau =$$

$$= KR^2M^2(K)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^2}{2!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Повторяя этот процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|w(x,t,\nu)| \le KR^n M^n(K)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu))^n}{n!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{21}$$

Поскольку правая часть равенства (21) равномерно стремится к нулю в области $G(\nu,\varepsilon)$ при $n\to\infty$, то $w(x,t)=0$ в этой области. Следовательно, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ для всех $(x,t)\in G(\nu,\varepsilon)$.

Лемма 4. *При выполнении условий леммы 1 решение задачи (1) представимо в области $G(\nu,\varepsilon)$ в виде (3).*

Введем новую функцию $v(x,t)=u(x,t)-\alpha$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$v(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+ + v(\xi,t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{22}$$

Сделаем в интеграле замену переменной τ на τ_1:

$$\tau = x\cdot\nu-t_0+(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1,$$

тогда уравнение (22) примет вид

$$v(x,t)=\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+ + v(\xi,t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau_1, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

При $t\to x\cdot\nu-t_0+0$ имеют место предельные соотношения $\xi=x+z\nu$, а параболоид $P(x,\tau,\nu)$ вырождается в луч

$$L(x,\nu)=\{\xi\in\mathbb{R}^3\,|\,\xi=x+z\nu, z\le 0\}.$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ равномерно стремится к нулю при $t\to x\cdot\nu-t_0+0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+v(\xi,t-|\xi-x|)d\psi dz d\tau_1 = = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+z\cdot\nu,\alpha)dz + o(t+t_0-x\cdot\nu), \quad t\to x\cdot\nu-t_0+0. \tag{23}$$

Используя (23), равенство (22) можно записать в виде

$$v(x,t)=(t+t_0-x\cdot\nu)\times\left(\frac{1}{2}\int\limits_{L(x,y)} f(x+z\cdot\nu,\alpha)dz+\overline{v}(x,t)\right), \quad t\ge x\cdot\nu-t_0,$$

где $\overline{v}(x,t)=o(t+t_0-x\cdot\nu)$ при $t\to x\cdot\nu-t_0+0$.

Так как $u(x,t)=v(x,t)+\alpha$ и $u(x,t)=0$ для $t\le x\cdot\nu-t_0$, то отсюда следует представление (3), в котором

$$\overline{u}(x,t,\nu)=\overline{v}(x,t,\nu)=o(t-x\cdot\nu) \quad \text{при} \quad t\to x\cdot\nu-t_0+0.$$

В силу теоремы 1 и формул (4), (5), информация (3) определяет интегралы

$$\int\limits_0^\infty f(x-s\cdot\nu,\alpha)ds = p(x,\nu,\alpha) \quad \text{для всех} \quad \nu\in\mathbb{S}^2, \quad x\in S_R^+(\nu), \alpha\in(0,U], \tag{24}$$

в которых функция $p(x,\nu.\alpha)$ вычисляется по формуле

$$p(x,\nu,\alpha)=2\lim_{t\to x\cdot\nu-t_0+0}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t,\nu,\alpha) = = 2h_t(x,x\cdot\nu-t_0+0,\nu,\alpha).$$

Таким образом, при любом фиксированном значении $\alpha\in(0,U]$ известны интегралы по всем прямым пересекающим область $B(R)$. В результате задача об определении $f(x,\alpha)$ при каждом фиксированном значении α по информации (3) сводится к задаче рентгеновской томографии (см., например, [14]). Известно, что решение такой задачи единственно. В связи с этим верна следующая теорема единственности.

Теорема 2. П*усть выполнены условия теоремы 1. Тогда обратная задача может иметь только одно решение.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.*, Comm. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
3. *Barreto A.S.* Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
4. *Lassas M.* Proc. Int. Congress of Math. ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil. 2018. V. III. P. 3739–3760.
5. *Stefanov P., Barreto A.S.* arXiv:2102.06323. 2021.

6. *de Hoop M., Uhlmann G., Wang Y.* Mathematische Annalen. 2020. V. 376. № 1–2. P. 765–795.
7. *Wang Y., Zhou T.* Comm. PDE. 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.
8. *Uhlmann G., Zhai J.* Discrete & Continuous Dynamical Systems - A. 2021. V. 41. № 1. P. 455–469.
9. *Barreto A.S., Stefanov P.* arXiv: 2107.08513v1. [math. AP] 18 Jul 2021.
10. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2015. V. 3. № 1. P. 48–63.
11. *Романов В.Г.* Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
12. *Романов В.Г.* Доклады АН. 2021. Т. 496. № 1. С. 53–55.
13. *Романов В.Г.* Доклады АН. 2021. Т . 501. № 6. С. 79–83.
14. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990, 279 с.

AN INVERSE PROBLEM FOR SEMI-LINEAR WAVE EQUATION

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russian Federation*

For equation $u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4$, where $f(x,u)$ is a smooth function of their variables and compact in x, an inverse problem of recovering this function from a given information on solutions of Cauchy problems for the differential equation is studied. Plane waves with strong front that propagate in homogeneous medium in the direction of the unit vector ν and then fall down on the inhomogeneity localized inside some ball $B(R)$ are considered. It is supposed that solutions of Cauchy problems can be measured on the boundary of this ball for all ν at the time close to arriving time of the front. The forward Cauchy problem is studied and existence of the unique bounded solution in a vicinity of a characteristic wedge is stated. An amplitude formula for the derivative of the solution with respect to t on the front of the wave is derived. It is demonstrate that the solution of the inverse problem reduces to the well known X-ray tomography.

Keywords: semilinear wave equation, plane waves, X-ray tomography

EDN: AFEFJM
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 42–46

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА В ОБЛАСТЯХ ВЛИЯНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2022 г. О. А. Ковыркина[1,2,*], В. В. Остапенко[1,2,],**
член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин[3,*]**

Поступило 04.10.2021 г.
После доработки 24.01.2022 г.
Принято к публикации 28.03.2022 г.

Проведен сравнительный анализ точности разностных схем Русанова, CABARETM и WENO5 при расчете задачи о разрушении плотины для уравнений теории мелкой воды. Показано, что все три схемы имеют первый порядок сходимости внутри области, занимаемой центрированной волной разрежения, а в области постоянного течения между ударной волной и волной разрежения схема Русанова имеет второй порядок сходимости, в то время как в схемах CABARETM и WENO5 в этой области локальная сходимость отсутствует. Связано это с тем, что численные решения, получаемые по схемам CABARETM и WENO5, имеют незатухающие осцилляции в области влияния ударной волны, амплитуда которых не снижается при уменьшении шагов разностной сетки. В результате, с учетом теоремы Лакса-Вендрофа, численные решения, получаемые по консервативным схемам CABARETM и WENO5, лишь слабо сходятся к точному постоянному решению в области влияния ударной волны, в отличие от схемы Русанова, которая в этой области локально сходится к точному решению со вторым порядком.

Ключевые слова: схема Русанова, схема CABARET, схема WENO5, ударная волна, локальная сходимость разностного решения

DOI: 10.31857/S2686954322030043

1. В работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности разностной схемы и показано, что среди линейных двухслойных по времени схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Дальнейшее развитие теории разностных схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы разностных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность (при аппроксимации линейной системы и скалярного закона сохранения) достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем даже при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL-схемы [2], WENO-схемы [3], DG-схемы [4] и CABARET-схемы [5]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

Было показано, что NFC-схемы имеют не более чем первый порядок как локальной сходимости в областях влияния ударных волн [6, 7], так и интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны [8–10]. В то же время некоторые немонотонные схемы повышенной точности, имеющие аналитические функции численных потоков и, как следствие, с повышенной точностью аппроксимирующие ε-условия Гюгонио, сохраняют повышенный порядок сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы [8]. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

[1] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[3] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: olyana@ngs.ru*
***E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru*
****E-mail: v.f.tishkin@mail.ru*

В связи с этим был предложен метод построения комбинированных разностных схем сквозного счета [11], которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно, с повышенной точностью локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок сходимости в областях их влияния. В комбинированной разностной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем. В [11] в качестве базисной использовалась схема Русанова [12] третьего порядка классической аппроксимации, а в качестве внутренней NFC-схемы применялась монотонная модификация схемы CABARET [5] второго порядка точности на гладких решениях. Для этой модификации схемы CABARET, изученной в [10], будем использовать аббревиатуру CABARETM.

Один из потенциальных недостатков комбинированной схемы может заключаться в том, что осцилляции, возникающие на фронте ударной волны в немонотонной базисной схеме, с течением времени могут распространяться в гладкие части рассчитываемого точного решения (прежде всего, в область влияния ударной волны), что будет приводить к постепенному расширению расчетной области для внутренней NFC-схемы и к соответствующему снижению эффективности комбинированной схемы. Однако на самом деле имеет место противоположная ситуация. В [13] было обнаружено, что при численном расчете по NFC-схеме DG-метода [4] классической задачи Шу–Ошера [14] за фронтом ударной волны, распространяющейся по энтропийному возмущению, отсутствует локальная сходимость численного решения к точному. Связано это с возникновением численных осцилляций, амплитуда которых перестает убывать при уменьшении пространственного шага сетки, начиная с некоторого его достаточно малого значения.

В настоящей работе показано, что аналогичная проблема возникает при расчете ударных волн и по другим NFC-схемам. А именно, численное решение задачи о разрушении плотины для уравнений мелкой воды, получаемое по немонотонной схеме Русанова [12], несмотря на заметные осцилляции на ударной волне, в области ее влияния монотонно сходится к точному решению со вторым порядком. В то же время численные решения этой задачи, получаемые по NFC-схемам CABARETM [10] и WENO5 [3], имеют незатухающие осцилляции в области постоянного течения между ударной волной и центрированной волной разрежения, что приводит к отсутствию локальной сходимости этих решений в области влияния ударной волны.

2. Векторная форма записи системы законов сохранения первого приближения теории мелкой воды в случае прямоугольного горизонтального русла без учета донного трения имеет вид

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$H(x,t)$ и $q(x,t)$ – глубина и расход жидкости, $g = 9.81$ – ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (1), (2) задачу о разрушении плотины, т.е. задачу Римана со следующими кусочно-постоянными начальными данными

$$H(x,0) = \begin{cases} 5, & x \le 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad q(x,0) = 0. \tag{3}$$

Решение этой задачи представляет собой ударную волну, распространяющуюся с постоянной скоростью $D = 6.64$, и центрированную волну понижения, между которыми расположена область постоянного течения. Численное решение задачи (1)–(3) будем строить на равномерной прямоугольной сетке $x_j = jh, t_n = n\tau(h)$, в которой временной шаг $\tau(h)$ выбирается из условия устойчивости Куранта

$$\tau(h) = \frac{zh}{\max\limits_{x,t} \max\left(|\lambda_+(\mathbf{u}(x,t))|, |\lambda_-(\mathbf{u}(x,t))|\right)}, \tag{4}$$

где $\lambda_\pm = q/H \pm \sqrt{gH}$ – скорости характеристик в системе (1), (2), $\mathbf{u}(x,t)$ – точное решение задачи (1)–(3), $z = 0.45$ – коэффициент запаса.

На рис. 1 и 2 на момент времени $T = 1$ приведены результаты численных расчетов задачи (1)–(3) по разностным схемам Русанова [12], CABARETM [10] и WENO5 [3]. На рис. 1а показано сравнение точного решения для глубины жидкости с результатами ее численных расчетов на разностной сетке с пространственным шагом $h = 0.36$. Из этого рисунка следует, что немонотонная схема Русанова имеет нефизические осцилляции на фронте ударной волны, которые отсутствуют в NFC-схемах CABARETM и WENO5. При этом схема CABARETM размазывает ударную волну и слабые разрывы на границах центрированной волны понижения существенно меньше, чем схема Русанова и схема WENO5.

На рис. 1б приведены порядки локальной сходимости разностных решений, которые вычисляются по формуле Рунге

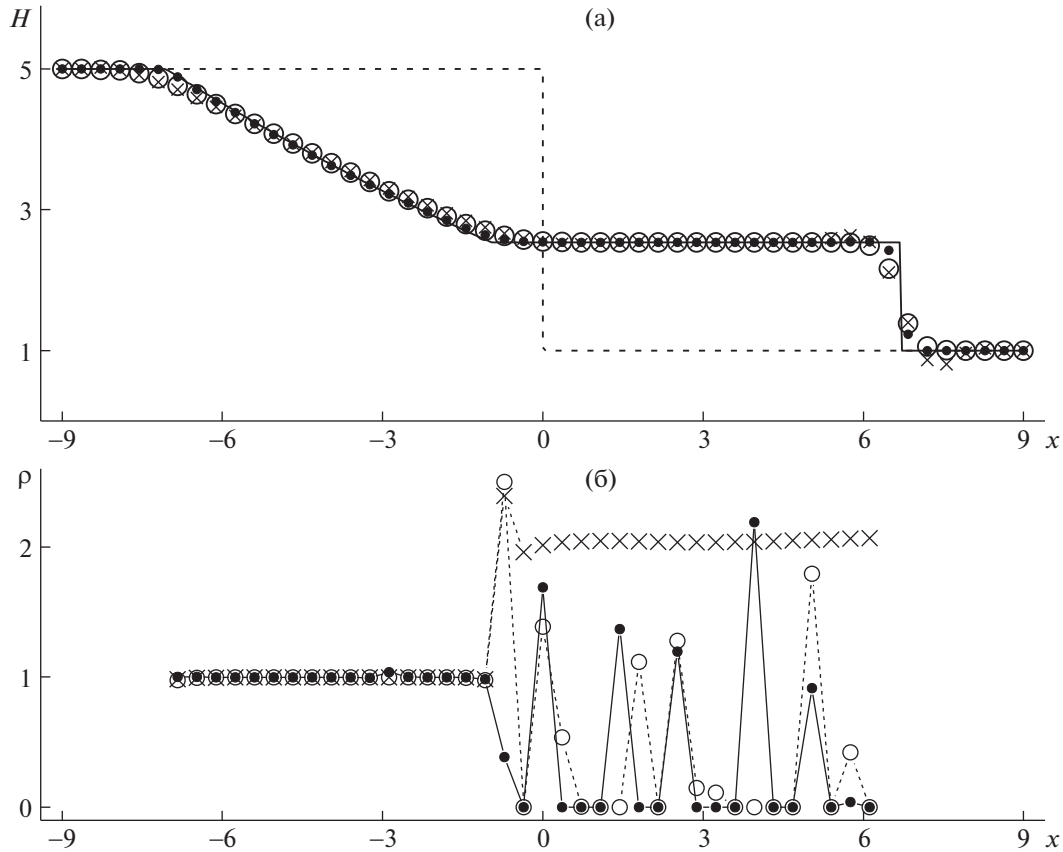


Рис. 1. Глубина жидкости (а) и локальные порядки сходимости (б) в момент времени $T = 1$, получаемые по схемам Русанова (крестики), CABARETM (точки) и WENO5 (кружки); на рисунке (а) сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – начальное значение глубины жидкости.

$$\tilde{\rho}_j = \log_{1/3} \frac{|\mathbf{v}_{h/3}(x_j(h),T) - \mathbf{u}(x_j(h),T)|}{|\mathbf{v}_h(x_j(h),T) - \mathbf{u}(x_j(h),T)|}, \qquad (5)$$

и корректируются при помощи функции ограничения

$$\rho_j = \begin{cases} \tilde{\rho}_j, & 0 \le \tilde{\rho}_j \le 2.5, \\ 0, & \tilde{\rho}_j < 0, \\ 2.5, & \tilde{\rho}_j > 2.5, \end{cases} \qquad (6)$$

где $x_j(h) = jh$, $T = N\tau(h)$, N – натуральное число, $\mathbf{v}_h$ и $\mathbf{v}_{h/3}$ – численные решения, получаемые на сетках с пространственными шагами h и $h/3$ соответственно. Расчеты порядков сходимости ρ_j проводились на базисной сетке с пространственным шагом $h = 0.009$ и показаны на рис. 1б для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ разностной сетки. Из рис. 1б следует, что внутри центрированной волны понижения все три схемы имеют первый порядок сходимости, а в области постоянного течения между ударной волной и волной разрежения схема Русанова имеет второй порядок сходимости, в то время как значения ρ_j, получаемые по формулам (5), (6) для схем CABARETM и WENO5, сильно осциллируют, в силу чего порядок локальной сходимости этих схем в области влияния ударной волны является неопределенным.

Для объяснения этих результатов были проведены серии тестовых расчетов на последовательности сжимающихся сеток, которые показали следующее. Разностное решение, получаемое по схеме Русанова, является монотонным (как по глубине, так и по расходу жидкости) внутри области влияния ударной волны вне некоторых окрестностей фронта ударной волны и слабого разрыва на правой границе волны понижения, где со вторым порядком сходится к точному постоянному решению. В то же время разностные решения, получаемые по NFC-схемам CABARETM и WENO5, имеют незатухающие осцилляции в области влияния ударной волны, структура которых зависит от значения параметра z, входящего в условие устойчивости (4). Из рис. 2а видно, что при $z = 0.45$ на отрезке [3.2, 4.2], расположенном внутри области влияния ударной волны, схема CABARETM имеет численные осцилляции, амплитуда которых приблизительно одинаковая при пространствен-

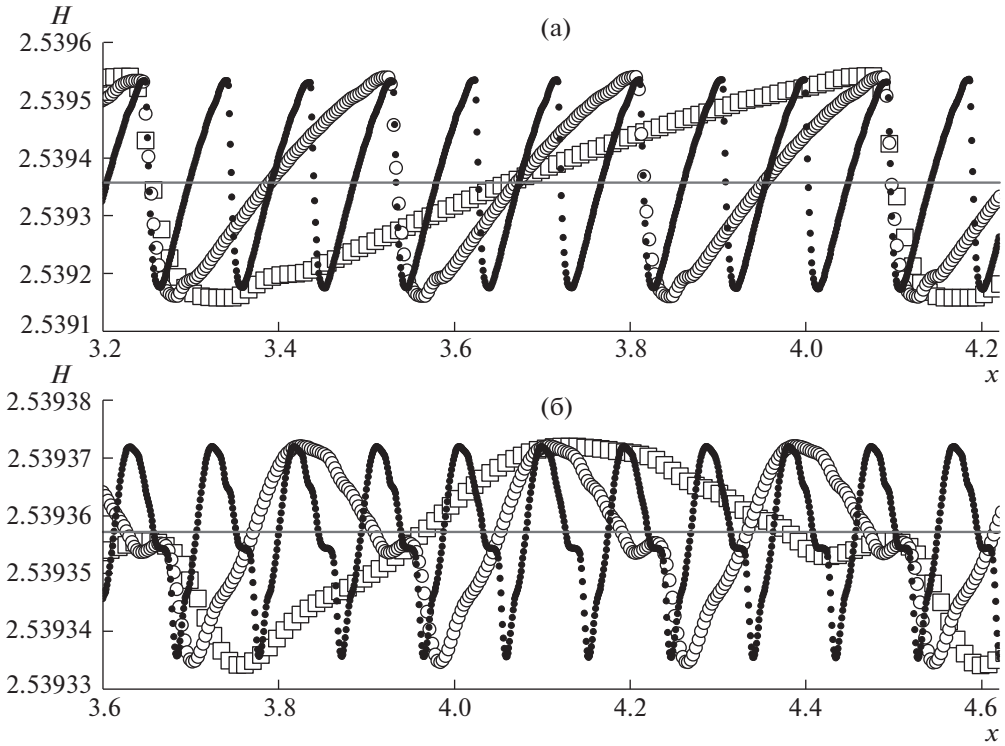


Рис. 2. Глубина жидкости в области постоянного течения, получаемая при численном расчете по схемам CABARETM (а) и WENO5 (б) на разностных сетках с пространственными шагами $h = 0.009$ (квадратики), $h = 0.003$ (кружки) и $h = 0.001$ (точки); горизонтальная линия – точное решение.

ных шагах разностной сетки $h_1 = h$, $h_2 = h/3$ и $h_3 = h/9$, где $h = 0.009$, а длина волн уменьшается приблизительно в три раза при переходе от сетки с шагом h_i к сетке с шагом h_{i+1}, т.е. пропорционально отношению h_{i+1}/h_i. Из рис. 2б подобный результат следует для численных решений схемы WENO5 на отрезке [3.6,4.6]. Аналогичное поведение осцилляций в области влияния ударной волны было получено в [13] при расчете DG-методом [4] задачи Шу–Ошера [14]. Из рис. 2 также следует, что амплитуда осцилляций, получаемых при расчете по схеме CABARETM, приблизительно на порядок больше, чем при расчете по схеме WENO5, в то время как длина осцилляционных волн почти одинаковая для обеих схем при фиксированном значении шага сетки h_i.

Таким образом, наблюдается следующая общая тенденция: в разностных решениях, получаемых по NFC схемам, может отсутствовать локальная сходимость к точному решению в областях влияния ударных волн. В этом случае, с учетом теоремы Лакса–Вендрофа [15], предельные разрывные решения консервативных NFC схем являются лишь слабыми решениями аппроксимируемой системы законов сохранения в областях влияния ударных волн.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН (проект № 21-51-53012), а также РНФ (проект № 21-11-00198).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. *Van Leer B.* Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1
3. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130
4. *Cockburn B.* An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // Lecture Notes in Mathematics. 1998. V. 1697. P. 151–268. https://doi.org/10.1007/BFb0096353
5. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037

6. *Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.

7. *Casper J., Carpenter M.H.* Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.

8. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем сквозного счета // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603. https://doi.org/10.1134/S1064562410040265

9. *Михайлов Н.А.* О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138. https://doi.org/10.1134/S2070048215050075

10. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // Выч. технологии. 2018. Т. 23. № 2. С. 37–54.

11. *Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643. https://doi.org/10.1134/S1064562418060315

12. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.

13. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Решение задач гидродинамики с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Тезисы докладов международной конференции “Современные проблемы прикладной математики и информатики”. С. 20–23 / Дубна, 22–27 августа 2012 г.

14. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. № 1 P. 32–78.

15. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237.

ON CONVERGENCE OF FINITE-DIFFERENCE SHOCK-CAPTURING SCHEMES IN THE REGIONS OF SHOCK WAVES INFLUENCE

O. A. Kovyrkina[a,b], V. V. Ostapenko[a,b], and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin[c]

[a] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

[c] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, the Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

We perform a comparative accuracy study of the Rusanov, CABARETM, and WENO5 difference schemes used to compute the dam break problem for shallow water theory equations. We demonstrate that all three schemes have the first order of convergence inside the region occupied by a centered rarefaction wave, and the Rusanov scheme has the second order of convergence in the area of constant flow between the shock and the rarefaction wave, while in the CABARETM and WENO5 schemes there is no local convergence in this area. This is due to the fact that the numerical solutions obtained by the CABARETM and WENO5 schemes have undamped oscillations in the region of influence of the shock, the amplitude of which does not decrease with decreasing of the difference grid steps. As a result, taking into account the Lax-Wendroff theorem, the numerical solutions obtained by the conservative schemes CABARETM and WENO5 converge only weakly to the exact constant solution in the region of influence of the shock wave, in contrast to the Rusanov scheme, which locally converges with the second order to the exact solution in this region.

Keywords: Rusanov scheme, CABARET scheme, WENO5 scheme, shock, local convergence of the difference solution

EDN: KRTCWZ
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 47–50

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.68

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГАУССА–НЬЮТОНА

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. В. Васин[1,*]

Поступило 11.01.2022 г.
После доработки 28.03.2022 г.
Принято к публикации 01.04.2022 г.

Исследуется нелинейное операторное уравнение при нарушении условий корректности по Адамару. Для построения устойчивого метода решения уравнения предлагается двухэтапный метод, включающий в себя модифицированный метод Тихонова и модифицированный итерационный процесс Гаусса–Ньютона для аппроксимации решения регуляризованного уравнения. Доказываются сходимость итераций и сильная фейеровость процесса. На классе истокообразно представимых решений устанавливается оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, модифицированный метод Тихонова, модифицированный процесс Гаусса–Ньютона

DOI: 10.31857/S2686954322030110

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим обратную задачу в форме нелинейного некорректно поставленного операторного уравнения

$$A(u) = f, \tag{1}$$

заданного на паре гильбертовых пространств U, F. Здесь непрерывно дифференцируемый оператор A не имеет непрерывного обратного оператора, правая часть f задана своим δ-приближением f_δ, $\|f - f_\delta\| \le \delta$.

Для построения регуляризованного семейства приближенных решений предлагается двухэтапный метод, в котором сначала уравнение регуляризуется модифицированным методом Лаврентьева–Тихонова

$$A'(u^0)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha B(u - u^0) = 0, \tag{2}$$

а для аппроксимации решения u_α уравнения (2) применяется модифицированный метод Ньютона

$$\begin{gathered} u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^0)^*A'(u^0) + \alpha B]^{-1} \times \\ \times [A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha B(u^k - u^0)] \equiv T(u^k), \end{gathered} \tag{3}$$

в котором производная в операторе шага $T(u^k)$ вычисляется в фиксированной точке u^0 в течение всего процесса итераций. Поэтому по отношению к операторному уравнению (1) итерационный процесс (3) является модифицированным методом Гаусса–Ньютона (МГН). Оператор B в прикладных задачах играет роль информационного оператора, содержащего важные априорные сведения о решении (см., например, работы [1, 2] по термическому зондированию атмосферы), которые необходимо учитывать в алгоритме. При некоторых условиях на оператор и начальное приближение для достаточно малых значений параметра шага удается обосновать линейную скорость сходимости процесса (3), установить сильную фейеровость оператора шага T и оценить погрешность двухэтапного метода.

Метод (2), (3) при $B = I$ – единичный оператор и $\gamma = 1$ исследовался в работе [3], где доказана сходимость процесса (3) с линейной скоростью и более слабое условие – фейеровость оператора шага T. Кроме того, в [3, 4] рассматривался более сложный в реализации трехпараметрический вариант процесса (3), в котором при $B = I$ обращаемый оператор содержал дополнительный параметр $\bar{\alpha}$, роль которого отлична от параметра α.

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук*
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Свердловская обл., Россия
**E-mail: vasin@imm.uran.ru*

Таким образом, как и в [3], доказываются сходимость итераций, сильная фейеровость оператора шага T и устанавливается оценка погрешности двухэтапного метода по невязке в более общей ситуации (с информационным оператором B) на основе более простой итерационной схемы (3) с двумя управляющими параметрами α, γ. В частном случае, когда оператор $B = I$, на классе истокообразно представимых решений устанавливается оценка погрешности приближенного решения, полученного двухэтапным методом.

2. СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИТЕРАЦИЙ

Лемма 1. *Предположим разрешимость уравнения (1) и разрешимость уравнения (2). Пусть A – линейный ограниченный оператор, для которого выполнено условие*

$$\langle Bu, u\rangle \geq \kappa\|u\|^2, \quad \kappa > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|(A^*A + \alpha B)^{-1}\right\| \leq 1/(\kappa\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Перейдем к рассмотрению второго этапа метода, т.е. исследованию сходимости процесса (3).

Теорема 1. *Предположим разрешимость уравнения (1) и разрешимость уравнения (2) для любых α, f_δ. Пусть выполнены следующие условия:*

$$1)\ \left\|A'(u^0)\right\| \leq N_0,\ \|A(u_1) - A(u_2)\| \leq N_1\|u_1 - u_2\|,$$
$$\|A'(u_1) - A'(u_2)\| \leq N_2\|u_1 - u_2\|;$$

в шаре $S(u^0; R)$ содержащем $\hat{u}$, u_α; здесь $\hat{u}$, u_α – решения уравнений (1) и (2) соответственно.

2) B – положительно определенный оператор, удовлетворяющий условиям леммы 1;

$$3)\ \left\|u_\alpha - u^0\right\| \leq r^0,\ r^0 = \kappa\alpha/(5N_0N_2),$$

где u^0 – стартовая точка в итерационном процессе (3), которая совпадает с пробным решением в уравнении (2) и точкой, в которой вычисляется производная оператора A.

Тогда при $\gamma < (\alpha\kappa)/(N_0N_2 + \alpha\|B\|)$ оператор T, реализующий процесс (3), является сильно $\{u_\alpha\}$-фейеровским в шаре $S(u_\alpha; r^0)$ и имеет место сходимость итераций

$$\lim_{k\to\infty}\left\|u^k - u_\alpha\right\| = 0, \tag{4}$$

а при $\gamma = (\alpha\kappa)/2(N_0N_2 + \alpha\|B\|)$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left\|u^k - u_\alpha\right\| \leq q^k r^0 \leq q^k\bar{r},\\ q = (1 - (\kappa\alpha)^2/4(N_0N_2))^{(1/2)},\end{gathered} \tag{5}$$

где $r^0 \leq \bar{r}$ не зависит от α.

Доказательство. Введем обозначения

$$D_0 = A'(u^0)^*A'(u^0) + \alpha B,$$
$$F(u) = D_0^{-1}[A'(u^0)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha B(u - u^0)].$$

Имеем соотношения:

$$\begin{gathered}\langle F(u, u - u_\alpha)\rangle = \langle F(u) - F(u_\alpha)\rangle =\\ = \langle D_0^{-1}[A'(u^0)^*(A(u) - A(u_\alpha)) + \alpha B(u - u_\alpha)], u - u_\alpha\rangle =\\ = \langle D_0^{-1}[A'(u^0)^*(A(u) - (A(u) + A'(u)(u_\alpha - u) + \xi)) +\\ + \alpha B(u - u_\alpha)], u - u_\alpha\rangle =\\ = \left\langle D_0^{-1}[A'(u^0)^*A'(u^0)(u - u_\alpha) + \alpha B(u - u_\alpha)], u - u_\alpha\right\rangle +\\ + \langle D_0^{-1}[A'(u^0)^*A'(u)(u - u_\alpha) -\\ - A'(u^0)^*A'(u^0)(u - u_\alpha)], u - u_\alpha\rangle -\\ - \langle D_0^{-1}A'(u^0)^*\xi, u - u_\alpha\rangle.\end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая условия 1 теоремы и неравенства

$$\left\|D_0^{-1}\right\| \leq 1/(\kappa\alpha), \quad \|\xi\| \leq N_2\|u - u_\alpha\|^2/2,$$

из (6) получаем соотношения

$$\begin{gathered}\langle F(u), u - u_\alpha\rangle \geq \|u - u_\alpha\|^2 -\\ - \frac{\left\|A'(u^0)^*\right\|\left\|A'(u) - A'(u^0)\right\|\|u - u_\alpha\|^2}{\kappa\alpha} -\\ - \frac{N_0N_2\|u - u_\alpha\|^3}{2\kappa\alpha} \geq \|u - u_\alpha\|^2 -\\ - \left[\frac{N_0N_2(\|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\|)}{\kappa\alpha} -\right.\\ \left. - \frac{N_0N_2\|u - u_\alpha\|}{2\kappa\alpha}\right]\|u - u_\alpha\|^2.\end{gathered} \tag{7}$$

Принимая во внимание условие 3 теоремы и тот факт, что $u \in S(u_\alpha; r^0)$, из неравенств (7) получаем окончательную оценку снизу

$$\langle F(u), u - u_\alpha\rangle \geq (1/2)\|u - u_\alpha\|^2. \tag{8}$$

Кроме того , имеем следующую оценку сверху:

$$\begin{gathered}\|F(u)\|^2 = \|F(u) - F(u_\alpha)\|^2 =\\ = \left\|D_0^{-1}[A'(u^0)^*(A(u) - A(u_\alpha)) + \alpha B(u - u_\alpha)]^2\right\| \leq\\ \leq \frac{(N_0N_1 + \alpha\|B\|)^2}{(\kappa\alpha)^2}\|u - u_\alpha\|^2.\end{gathered} \tag{9}$$

Сильная фейеровость оператора T означает выполнение неравенства

$$\begin{gathered}\|T(u) - u_\alpha\|^2 - \|u - u_\alpha\|^2 + \nu\|T(u) - u\|^2 \leq 0\\ \forall u \in S(u_\alpha; r^0)\end{gathered} \tag{10}$$

для некоторого $\nu > 0$, что эквивалентно неравенству

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{2}{\gamma(1+\nu)}\langle F(u), u - u_\alpha\rangle. \quad (11)$$

Из соотношений (8), (9) имеем

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{2(N_0N_1 + \alpha\|B\|)^2}{(\kappa\alpha)^2}\langle F(u), u - u_\alpha\rangle. \quad (12)$$

Сравнивая неравенства (11) и (12), приходим к выводу, что при $\gamma < (\kappa\alpha)/(N_0N_1 + \alpha\|B\|)^2$ оператор T, генерирующий итерационный процесс (3), является сильно фейеровским.

Полагая в (10) $u = u^k$, заключаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\nu\gamma\|T(u^k) - u^k\|^k \lim\limits_{k\to\infty}\nu\gamma F(u^k) = 0$, откуда на основании неравенства (9) вытекает сходимость (4). Из (8), (9) следует неравенство

$$\|T(u) - u_\alpha\|^2 =$$
$$= \|u - u_\alpha\|^2 - 2\gamma\langle F(u), u - u_\alpha\rangle + \gamma^2\|F(u)\|^2 \le$$
$$\le \left(1 - \gamma + \gamma^2\frac{(N_0N_1 + \alpha\|B\|)^2}{(\kappa\alpha)^2}\right)\|u - u_\alpha\|^2,$$

правая часть которого при $\gamma = (\kappa\alpha)/2(N_0N_1 + \alpha\|B\|)^2$, принимает наименьшее значение, что при $u = u^k$ влечет оценку (5).

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДВУХЭТАПНОГО МЕТОДА

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть уравнение (2) имеет решение u_α при любых $\alpha > 0$, $f_\delta \in F$ и $u_{\alpha(\delta)}$ принадлежит шару $S(u^0; R)$ при связи параметров $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Тогда справедлива оценка невязки для двухэтапного метода.*

$$\|A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta)\| \le$$
$$\le [(5N_0N_1/N_2)q^k + N_0\|B\|R]\alpha(\delta).$$

Рассмотрим частный случай оператора $B = I$. Для получения погрешности приближенного решения, полученного двухэтапным методом, необходимо оценить погрешность, вносимую методом регуляризации (2). Для этого потребуются дополнительные условия на оператор и истокообразная представимость решения, а именно:

1) пусть $\hat{u}, u_\alpha \in S(u^0, r^0)$, существуют константы $k_0 > 0$ и элемент $\phi(u, u^0, w) \in U$, такие что для любых $w \in U, u \in S(u^0; r^0)$ выполнены соотношения

$$[A'(u) - A'(u^0)]w = A'(u^0)\phi(u, u^0, w),$$
$$\|\phi(u, u^0, w)\| \le k_0\|u - u^0\|\|w\|;$$

2) выполнено условие истокообразной представимости решения о принадлежности решения классу

$$K = \{\hat{u} : u^0 - \hat{u} = (A'(u^0)^*A'(u^0))^p v, \|v\| \le r\},$$
$$0 < p \le 1.$$

Согласно теореме 3.1 [4] и лемме 1 [5] для решения регуляризованного уравнения (2) справедлива оценка

$$\|u - u_\alpha\| \le \frac{\max\{1/2, r\}}{1 - d}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \alpha^p\right),$$
$$d = k_0r^0 < 1.$$

Приравнивая слагаемые в круглых скобках последнего неравенства, находим значение параметра $\alpha = \delta^{2/(2p+1)}$ и оценку для метода регуляризации (2)

$$\|u_\alpha - \hat{u}\| \le \bar{c}\delta^{2p/(2p+1)}, \quad \bar{c} = \frac{2\max\{(1/2), r\}}{1 - d}. \quad (13)$$

Объединяя соотношения (5), (13), получаем

$$\|u_\alpha - \hat{u}\| \le \|u^k - u_{\alpha(\delta)}\| + \|u_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \le$$
$$\le q^k\bar{r} + \bar{c}\delta^{2p/(2p+1)}. \quad (14)$$

Приравнивая слагаемые в правой части неравенства (14), находим выражение для числа итераций

$$k(\delta) = [\ln(\bar{c}\delta^{2p/(2p+1)}/\bar{r})/\ln q(\alpha(\delta))].$$

Подставляя найденное число итераций $k(\delta)$ в (14), получаем оценку погрешности двухэтапного метода,

$$\left\|u^{k(\delta)} - \hat{u}\right\| \le 2\bar{c}\delta^{2p/(2p+1)},$$

оптимальность которой следует из [6, лемма 4.2.3, теорема 4.9.1].

Замечание 1. В классическом (немодифицированном) варианте МГН [7, 8] производная $A'(u)$ в операторе шага вычисляется на каждой итерации, тогда как в модифицированном МГН (3) эти объекты вычисляются только в начальной точке и сохраняются в течение всего процесса итераций, что существенно уменьшает трудоемкость метода по числу операций при сохранении оптимальности по порядку метода на классе истокообразно представимых функций.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования частично выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 18-11-00024-П.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skorik G.G., Vasin V.V.* Regularized Newton type method for retrieval of heavy water in atmosphere by IR-

spectra of the solar light transmission // Eurasion J. Math. Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 79–88.

2. *Vasin V.V., Skorik G.G.* Two-stage method for solving system of nonlinear equations and its applications to the inverse atmosphere sounding problem // Doklady Math. 2019. V. 102. № 2. P. 267–270.
3. *Васин В.В.* Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 312 с.
4. *Vasin V.V., Georg S.* Expanding the applicability of Tikhonov's regularization and iterative approximation for ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2014. V. 22. № 4. P. 593–607.
5. *Иванов В.К.* О регуляризации линейных операторных уравнений первого рода // Изв. Вузов. Математика. 1967. Т. 10 (65). С. 50–55.
6. *Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.* Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht/Boston/Koln/Tokyo: VSP, 2002. 281 p.
7. *Бакушинский А.Б.* К проблеме сходимости итеративно регуляризованного метода Гаусса–Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 9. С. 1503–1509.
8. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-Posed problems: Theory and Applications. Dordrecht/Boston/London: Kluver Academic Publishers, 1994. 258 p.

SOLVING NONLINEAR INVERSE PROBLEMS BASED ON THE REGULARIZED MODIFIED GAUSS–NEWTON METHOD

Corresponding member of the RAS V. V. Vasin[a,b]

[a] *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch Academy of Sciences, Yekaterinburg, Sverdlovsk Region, Russian Federation*

[b] *Ural Federal University, Yekaterinburg, Sverdlovsk Region, Russian Federation*

A nonlinear operator equation is investigated when the Hadamard correctness conditions are not met. For construction of a stable method for solving equation, we suggest two-stage method. It includes the modified Tikhonov regularization and the modified iterative Gauss–Newton process for approximation of a solution of the regularized equation. The convergence of iterations and the strong Fejer property of the process are proved. On the class of sourcewise representable functions the order optimal estimate of the error for two-stage method is established.

Keywords: Ill-posed problem, modified Tikhonov method, modified Gauss–Newton method

EDN: UPZCGA
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 51–55

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ

© 2022 г. В. В. Веденяпин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 27.01.2022 г.
После доработки 29.03.2022 г.
Принято к публикации 12.04.2022 г.

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения типа Гамильтона–Якоби для получения космологических решений.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона

DOI: 10.31857/S2686954322330013

1. ВВЕДЕНИЕ

В классических работах (см. [1–4]) уравнения для полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения Гамильтона–Якоби для получения космологических решений. Таким образом, мы впервые получаем вывод тензора энергии-импульса и замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики из принципа наименьшего действия.

2. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$ и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S = &-c\int m f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\,d^3x d^3v\,dmdedt - \\ &-\frac{1}{c}\int e f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)A_\mu u^\mu d^3x d^3v\,dmdedt + \\ &+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x, \end{aligned} \tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ $(i = 1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i $(i = 1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $A_\mu(\mathbf{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ t) = \partial A_\mu(\mathbf{x},t)/\partial x^\nu - \partial A_\nu(\mathbf{x},t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\dfrac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\dfrac{1}{16\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–11]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned} &k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ &= \int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3v\,dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] *ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: vicveden@yahoo.com*

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [9–11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5–15]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int eu^\mu f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d^3v dm de. \quad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},m,e,t) = \\ = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'(t))\delta(m-m')\delta(e-e'). \quad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu(\mathbf{x},t)u^\mu dt + \\ + k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \quad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

3. ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ И УРАВНЕНИЮ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Для вывода уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна в форме Гамильтона–Якоби нужно вывести его в импульсах [16–19]. Схема вывода уравнений типа Власова – это вывод уравнений для полей при заданном движении частиц и вывод уравнений движения частиц в заданных полях с переходом к уравнениям Лиувилля – следует общей схеме классических учебников [1–4]. Имеем часть действия (5) для движения частиц в заданных полях:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt.$$

Мы получим уравнение движения:

$$-cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{i\beta}u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c}A_i\right] = \\ = -cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^\eta v^\xi}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}u^\mu u^\nu - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^i}u^\mu.$$

Латинские индексы $i, j, k\ldots$ пробегают значения 1, 2, 3, а греческие $\mu,\nu\ldots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c}A_\mu. \quad (6)$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $u^0 = c$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_\mu = q_\mu - \frac{e}{c}A_\mu = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}$: формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона–Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем:

$$p^\beta = -mc\frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0:

$$p_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где $a = g^{00}$, $b = 2p_i g^{0i}$, $c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$.

При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берется знак минус.

Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений для исключения скоростей с учетом $u^0 = c$

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}$$

в формулу (6) при $\mu = 0$ (см. [1–4]).

Уравнение для полей останется тем же самым (2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{v}dmde = f(t,\mathbf{x},\mathbf{q},m,e)dqdmde = f(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m,e)\,d\mathbf{p}dmde$. Каждая из трех этих величин – это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных.

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$

$$=c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d^3qdmde-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c^2}\int eu^\mu f(t,\mathbf{x},q,m,e)\,d^3qdmde.$$

Или

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$

$$=c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2}\frac{cp^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2}d^3qdmde-\tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}.$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\int e\frac{cp^\mu}{p^0}f(t,\mathbf{x},q,m,e)d^3qdmde.$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы p^μ во втором должны быть выражены через канонические импульсы q_μ.

Уравнение движения для частиц получаем уже в Гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H=-c\dfrac{\partial L}{\partial u^0}=-cq_0$. Эта формула получается из-за того, что Лагранжиан для действия $S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt-\dfrac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu\dfrac{\partial L}{\partial u^\mu}-L=0$. Так как по определению $H=u^i\dfrac{\partial L}{\partial u^i}-L$, получаем $c\dfrac{\partial L}{\partial u^0}+H=0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i=1,2,3$ и по $\mu=0,1,2,3$. Отсюда находим выражения для скоростей $u^i=\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=u^i(q)=-c\dfrac{\partial q_0}{\partial q_i}$.

Выписываем через этот гамильтониан уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}-c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}-c\frac{\partial q_0}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial q_i}=0\,.\tag{8}$$

И получаем замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики Власова–Максвелла–Эйнштейна в импульсах (7)–(8). По общей схеме работ [16–20] получаем гидродинамическое следствие системы (7)–(8) гидродинамической подстановкой $f(t,x,q,m,e)=\rho(x,t,m,e)\delta(q-Q(q,t,m,e))$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(Q)\rho)=0,\tag{9}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t}-c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}(x,Q)\frac{\partial Q_k}{\partial x^i}+c\frac{\partial q_0}{\partial x^k}=0.\tag{10}$$

Подстановкой $Q_\alpha=\dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha=\dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\dfrac{e}{c}A_\alpha$ получаем затем уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta}-\frac{e}{c}A_\beta\right)g^{\alpha\beta}=(mc)^2.\tag{11}$$

Мы также должны переписать уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(\nabla W)\rho)=0.\tag{12}$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона–Якоби–Власова–Максвелла–Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t,x,q,m,e)=\rho(x,t,m,e)\delta(q-Q(x,t,m,e))$:

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$

$$=c\int m\frac{\rho(t,x,m,e)}{2}\frac{cP^\mu P^\nu}{(P^0)(mc)^2}dmde-\tag{13}$$

$$-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int e\frac{cP^\mu}{P^0}\rho(t,\mathbf{x},m,e)dmde.$$

Здесь макроскопические импульсы P^μ и P_μ связаны обычными соотношениями $P_\mu=g_{\mu\nu}P^\nu$. При этом в форме Гамильтона–Якоби нужно учитывать, что $P_\alpha=\dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\dfrac{e}{c}A_\alpha$. Мы получили уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным, (9), (10), (13), так и в редукции к уравнениям Гамильтона–Якоби (11)–(13). В принципе можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных релятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S=-cm\int\left(\sqrt{c^2-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}+\frac{U}{c}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с Гамильтонианом [1–4]

$$H(x,q) = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S = -c\int m\left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + U\right) f(x,p,t,m)d\mathbf{p}dmdxdt -$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,x,q,m,e)dqdmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \dfrac{c^2\Lambda}{2}. \end{cases}$$

где $v^i(q) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$.

Мы получили выражение для скорости, из которого видно Хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U}dt -$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x,q,t) = c\sqrt{((mc)^2 + q^2)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)\left(1 + \dfrac{2U}{c^2}\right)} = 0 \\ \Delta U = 4\pi\gamma\displaystyle\int \frac{m\rho(m,x,t)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2 + U}}dm - \frac{c^2\Lambda}{2}, \end{cases}$$

где $v^i(q) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{cq^i\sqrt{1 + \dfrac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$.

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которой видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5–15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна была получена для скоростей [20, 21], а здесь для импульсов, что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Интерес представляют стационарные решения полученных уравнений, как это делалось для уравнений Власова–Пуассона [22]. В работах [20, 21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна–Маккри [23, 24]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $U(r) = -\dfrac{\gamma}{r} + ar^2$ [25], где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Представляет значительный интерес проделать ту же работу для

предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова. Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. *Choquet-Bruhat Y.* General relativity and Einstein's Equations. New York: Oxford University Press, 2009.
9. *Игнатьев Ю.Г.* Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов. Казань. ООО "Фолиант", 2010.
10. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., L.C. Shepley L.C.* Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov–Einstein Systems. Physical Review D 84, 024011 (11pp) (2011).
11. *Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J.* Theory and Applications of the Vlasov Equation. European Journal of Physics D **69**, 68 (3pp) (2015). March.
12. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. *Choquet-Bruhat Y., Damour T.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press, 2015.
14. *Rein G., Rendall A.D.* Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 561–583.
15. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters. Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. *Козлов В. В.*, Общая теория вихрей, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239 с.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. *Аржаных И.С.,* Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.; англ. пер.: Arzhanykh I.S., Momentum-fields, Nat. LendingLib., BostonSpa, Yorkshire, 1971, 222 pp.
19. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.
20. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Русcков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
21. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system. European Physical Journal Plus. 2021. V. 136. № 670.
22. *Веденяпин В.В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.
23. *Milne E.A.* Relativity, Gravitation and World–Structure. Oxford Univ. Press, 1935.
24. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. V. 5. № 73.
25. *Gurzadyan V.G.*, The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory. 1985. V. 105. № 42.

ON DERIVATION OF EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS AND GRAVITATION FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, HAMILTON–JACOBI METHOD AND COSMOLOGICAL SOLUTIONS

V. V. Vedenyapin[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russian Federation*

Presented by Academician of RAS V.V. Kozlov

In classical texts equations for fields are proposed without derivation of the right-hand sides. Here we suggest the derivation of the right-hand sides of the Maxwell and Einstein equations in the framework of Vlasov–Maxwell–Einstein equations from the classical, but slightly more general principle of least action and use Hamilton-Jacobi equations for cosmological solutions .

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation

EDN: DLNNEE
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 56–59

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.051

МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ИТЕРАЦИОННЫХ ЦИКЛОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ БОЛЬШИХ СХЕМ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ

© 2022 г. В. Н. Гридин[1,*], В. И. Анисимов[1,2], С. А. Васильев[1,2]

Представлено академиком РАН Ю.С. Попковым
Поступило 09.02.2022 г.
После доработки 24.02.2022 г.
Принято к публикации 09.03.2022 г.

Рассматривается методика организации итерационных циклов при расчете динамических режимов больших электронных схем на основе декомпозиции моделируемой схемы на составляющие подсхемы. Использование предлагаемой методики дает возможность существенно повысить эффективность программного обеспечения, что имеет особенно большое значение при построении сервис-ориентированных систем автоматизированного проектирования, поскольку обеспечивается существенное уменьшение времени взаимодействия пользователей системы с сетью.

Ключевые слова: методы декомпозиции схем, сервис-ориентированные системы, схемотехнические САПР, моделирование схем, расчет схем по частям

DOI: 10.31857/S2686954322030031

Наиболее эффективным способом расчета динамических режимов больших электронных схем является их декомпозиция с последующим расчетом моделируемой схемы по частям [1–3]. Введем для каждого узла схемы узловое напряжение и из всех введенных узловых переменных v_p образуем вектор узловых потенциалов $X_0 = V_0 = [\ldots, v_p, \ldots]^t$. В каждой подсхеме выделим внутренние переменные x_i и образуем для каждой подсхемы вектор $X_k = [\ldots, x_i, \ldots]^t$. Тогда результирующий вектор всех переменных схемы будет иметь вид $X = [X_1^t, \ldots, X_k^t, \ldots, X_m^t, X_0^t]^t$.

Уравнение всей схемы в расширенном базисе узловых потенциалов при этом может быть записано в виде

$$\begin{bmatrix} W_{11} & & & & & W_{10} \\ & \ldots & & & & \ldots \\ & & W_{kk} & & & W_{k0} \\ & & & \ldots & & \ldots \\ & & & & W_{mm} & W_{m0} \\ W_{01} & \ldots & W_{0k} & \ldots & W_{0m} & W_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_k \\ \ldots \\ X_m \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 \\ \ldots \\ S_k \\ \ldots \\ S_m \\ S_0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Для k-й подсхемы в соответствии с k-й блочной строкой имеем уравнение

$$W_{kk}X_k + W_{k0}X_0 + S_k = 0, \quad k = \overline{1,m} \qquad (2)$$

Отсюда получаем выражение для вектора внутренних переменных X_k подсхем

$$X_k = -W_{kk}^{-1}W_{k0}X_0 - W_{kk}^{-1}S_k, \quad k = \overline{1,m}$$

Обозначим

$$\bar{W}_{k0} = W_{kk}^{-1}W_{k0}, \quad \bar{S}_k = W_{kk}^{-1}S_k, \qquad (3)$$

Тогда вектор внутренних переменных можно записать в виде

$$X_k = -\bar{W}_{k0}X_0 - \bar{S}_k, \quad k = \overline{1,m}. \qquad (4)$$

Для определения вектора узловых потенциалов X_0 узлов разделения составим уравнение для всей схемы, используя последнюю блочную строку общего матричного уравнения (1) моделируемой схемы

$$\sum_{k=1}^{m} W_{0k}X_k + W_{00}X_0 + S_0 = 0. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнение (5) вектор внутренних переменных подсхем X_k, определяемый выражением (4), получим

$$\sum_{k=1}^{m} (-W_{0k}\bar{W}_{k0}X_0 - W_{0k}\bar{S}_k) + W_{00}X_0 + S_0 = 0.$$

[1] *Центр информационных технологий в проектировании Российской академии наук, г. Одинцово, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский электротехнический университет, г. Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: info@ditc.ras.ru*

Введем обозначения

$$\bar{W}_{00} = W_{00} - \sum_{k=1}^{m} W_{0k}\bar{W}_{k0}, \quad \bar{S}_0 = S_0 - \sum_{l=1}^{m} W_{0k}\bar{S}_k. \quad (6)$$

Тогда уравнение для вектора узловых потенциалов узлов разделения X_0 можно представить в следующем виде:

$$\bar{W}_{00}X_0 + \bar{S}_0 = 0.$$

Отсюда получим выражение для расчета узловых переменных узлов разделения

$$X_0 = -\bar{W}_{00}^{-1}\bar{S}_0. \quad (7)$$

Таким образом, в результате проведенной декомпозиции схемы на основании уравнения (7) могут быть определены все узловые переменные вектора X_0, что позволяет найти на основании выражения (4) все внутренние переменные подсхем.

Построение математического описания для расчета динамических режимов на основе декомпозиции схемы выполняется на основе алгебро-дифференциального уравнения схемы, записанного в неявном виде $F(\dot{X}, X, t) = 0$, которое формируется в расширенном базисе узловых потенциалов. Для формирования алгебро-дифференциальных уравнений необходимо включить все полюса емкостных компонентов схемы в число y-полюсов, а все полюса индуктивных компонентов – в число z-полюсов схемы, выделив эти элементы из структуры многополюсников. При этом уравнение моделируемой схемы можно записать в виде

$$(sD + W)X + S = 0.$$

Заменяя оператор s операцией дифференцирования, получим алгебро-дифференциальное уравнение моделируемой системы в неявной форме, которое для момента времени $t = k + 1$ имеет вид $F(\dot{X}^{k+1}, X^{k+1}, t^{k+1}) = 0$. Для исключения вектора производной $\dot{X}^{k+1}$ следует воспользоваться формулами коррекции $\dot{X}^{k+1} = aX^{k+1} + b$ для многошаговых неявных методов высших порядков Адамса-Маултона или Гира [4, 5], что приводит к уравнению $F(aX^{k+1} + b, X^{k+1}, t^{k+1}) = 0$, которое можно решить методом Ньютона-Рафсона относительно вектора X^{k+1}, поскольку значения коэффициентов a и b к моменту времени $t = k + 1$ уже определены на предыдущих шагах расчета. В качестве начального приближения $(X^{k+1})^i = (X^{k+1})^0$ при этом обычно принимается значение вектора на предыдущем шаге X^k.

Процесс исключения значений производных целесообразно выполнять непосредственно в процессе формирования дискретизированных компонентных уравнений $i_C^{k+1} = Y_C^k u_C^{k+1} + j_C^k$ и $u_L^{k+1} = R_L^k i_L^{k+1} + e_L^k$ для двухполюсников C и L, а также для частотно-зависимых управляемых источников [6].

В процессе обработки алгебро-дифференциального уравнения $F(\dot{X}^{k+1}, X^{k+1}, t^{k+1}) = 0$ необходимо решать методом Ньютона–Рафсона уравнение $F(aX^{k+1} + b, X^{k+1}, t^{k+1}) = 0$, которое в общем случае является нелинейным. Для решения этого уравнения целесообразно выполнить схемотехническую интерпретацию метода Ньютона–Рафсона, основанную на линеаризации нелинейных компонентов схемы в каждой точке итерационного процесса.

Так, если нелинейные компоненты в общем случае описываются уравнением $P_2 = F(Q_2)$, то разлагая это уравнение в ряд Тейлора в точке $Q_2 = Q_2^i$ и отбрасывая высшие производные, получим уравнение вида

$$P_2 = W_2^i Q_2 + S_2^i, \quad (8)$$

где $W_2^i = \left.\dfrac{\partial P_2}{\partial Q_2}\right|_{Q_2^i}$, $S_2^i = P_2^i - W_2^i Q_2^i$ – линеаризованные в точке $Q_2 = Q_2^i$, $P_2 = P_2^i$ матрицы неавтономных и автономных параметров нелинейных компонентов.

Пусть нелинейная схема описывается уравнением

$$\Phi(X) = W_1 X + S_1 + S_2 = 0, \quad (9)$$

где W_1 и S_1 – матрица и задающий вектор линейной части схемы, $S_2 = P_2 = F(Q_2)$ – вектор фиктивных задающих источников, отображающих нелинейные характеристики компонентов.

Тогда на основании уравнения линеаризованных компонентов (8) и уравнения нелинейной схемы (9) можно получить матричное уравнение моделируемой схемы

$$(W_1 + W_2^i)X^{i+1} + S_1 + S_2^i = 0, \quad (10)$$

где W_1 и S_1 – матрица и задающий вектор линейной части схемы, W_2^i и S_2^i – матрица и задающий вектор линеаризованной в точке $Q_2 = Q_2^i$ нелинейной части схемы.

Организация итерационных процессов на основе декомпозиции большой схемы с расчетом схемы по частям может быть осуществлена двумя способами – путем построения сквозного вычислительного процесса для всей схемы или на основе автономных вычислительных процессов для отдельных подсхем с последующим расчетом переменных связи подсхем.

Сквозной вычислительный процесс реализуется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Ввод начальных значений $t^j = t^0$, $(X_k^j)^i = X_k^0$, $(X_0^j)^i = X_0^0$.

2. $t^{j+1} = t^j + h$.

3. Начало 1-го цикла $k = 1, m$.

4. Дискретизация частотно-зависимых компонентов в точке Q_s^j.

5. Ввод начального значения для линеаризации $(X_k^{j+1})^i = X_{np}$.

6. Линеаризация нелинейных компонентов в точке $(Q_f^{j+1})^i$.

7. Формирование блочных матриц $(W_{kk}^j)^i$, $(W_{k0}^j)^i$, $(W_{0k}^j)^i$, $(W_{00}^j)^i$ и векторов $(S_k^j)^i$, $(S_0^j)^i$ уравнения (1).

8. Преобразование диагональных подматриц $(W_{kk}^j)^i$ уравнения (1) к единичной матрице и расчет $(\bar{W}_{k0}^j)^i$, $(\bar{S}_k^j)^i$.

9. Вычисление поправок $(\Delta_k W_{00}^j)^i = (W_{0k}^j)^i(\bar{W}_{k0}^j)^i$, $(\Delta_k S_0^j)^i = (W_{0k}^j)^i(\bar{S}_k^j)^i$ и расчет новых значений блочной матрицы и задающего вектора для узлов связи

$$(\bar{W}_{00}^j)^i = (W_{00}^j)^i - \sum_{k=1}^{m}(\Delta_k W_{00}^j)^i,$$

$$(\bar{S}_0^j)^i = (S_0^j)^i - \sum_{k=1}^{m}(\Delta_k S_0^j)^i.$$

10. Окончание 1-го цикла $k = 1, m$.

11. Решение уравнения $(\bar{W}_{00}^j)^i(X_0^{j+1})^{i+1} + (\bar{S}_0^j)^i = 0$ для переменных узлов связи.

12. Начало 2-го цикла $k = 1, m$.

13. Расчет вектора $(X_k^{j+1})^{i+1} = -(\bar{W}_{k0}^j)^i(X_0^{j+1})^{i+1} - (\bar{S}_k^j)^i$ внутренних переменных подсхем.

14. Конец 2-го цикла $k = 1, m$.

15. Вычисление нормы $N = \|(X_k^{j+1})^{i+1} - (X_k^{j+1})^i\|$.

16. Если $N > \varepsilon$, то переопределение векторов внутренних переменных подсхем $(X_k^{j+1})^i = (X_k^{j+1})^{i+1}$ и вектора переменных узлов связи $(X_0^{j+1})^i = (X_0^{j+1})^{i+1}$ и возврат к 5, иначе вывод векторов внутренних переменных подсхем $(X_k^{j+1})^{i+1}$ и переменных связи $(X_0^{j+1})^{i+1}$.

17. Если $t^{j+1} < t_{\text{оконч}}$, то переход к 2, иначе конец расчета.

Реализация программного обеспечения для расчета динамического режима на основе организации автономных вычислительных процессов для отдельных подсхем оказывается целесообразной в случаях, когда отдельные подсхемы имеют существенно отличные свойства от других подсхем. Сущность автономного вычислительного процесса заключается в том, что для каждой подсхемы выбирается свой шаг расчета h_k и с этим шагом выполняется расчет вектора внутренних переменных подсхем X_k^{j+1}. При этом выбираются точки синхронизации с шагом $H > h_k$, в которых расчет процессов в подсхемах прекращается и начинается расчет вектора переменных узлов связи X_0^{j+1} с последующим уточнением вектора внутренних переменных X_k^{j+1}.

Алгоритм расчета динамических режимов линейных электронных схем на основе декомпозиции и построения автономных вычислительных процессов может быть представлен в следующем виде:

1. Ввод начальных значений $T^j = T^0$, $X_k^j = X_k^0$, $X_0^j = X_0^0$.

2. Начало 1-го цикла $k = 1, m$.

3. $t^j = T^j$.

4. $t^{j+1} = t^j + h_k$.

5. Дискретизация частотно-зависимых компонентов в точке Q_s^j.

6. Формирование блочных матриц W_{kk}^j, W_{k0}^j, W_{0k}^j, W_{00}^j и векторов S_k^j, S_0^j подсхем уравнения (1).

7. Преобразование диагональных блочных матриц W_{kk}^j к единичной матрице и расчет $(\bar{W}_{k0}^j)^i$, $(\bar{S}_k^j)^i$.

8. Расчет вектора внутренних переменных подсхем $X_k^{j+1} = -\bar{W}_{k0}^j X_0^j - \bar{S}_k^j$.

9. Если $t^{j+1} <= H$, то $t^j = t^{j+1}$, $X_k^j = X_k^{j+1}$ и возврат к 4, иначе переход к 10.

10. Вычисление поправок $\Delta_k W_{00}^j = W_{0k}^j \bar{W}_{k0}^j$, $\Delta_k S_0^j = W_{0k}^j \bar{S}_k^{ji}$ и расчет новых значений блочной матрицы и задающего вектора переменных узлов связи

$$\bar{W}_{00}^j = W_{00}^j - \sum_{k=1}^{m}\Delta_k W_{00}^j, \quad \bar{S}_0^j = S_0^j - \sum_{k=1}^{m}\Delta_k S_0^j.$$

11. Окончание 1-го цикла $k = 1, m$.

12. $t^{j+1} = T^j + H$.

13. Решение уравнения $\bar{W}_{00}^j X_0^{j+1} + \bar{S}_0^j = 0$ для переменных узлов связи.

14. Начало 2-го цикла $k = 1, m$.

15. Уточнение вектора внутренних переменных подсхем $X_k^{j+1} = -\bar{W}_{k0}^j X_0^{j+1} - \bar{S}_k^j$.

16. Окончание 2-го цикла $k = 1, m$.

17. Вывод t^{j+1}, X_k^{j+1}, X_0^{j+1}.

18. Если $t^{j+1} < t_{\text{оконч}}$, то переопределение переменных $T^j = t^{j+1}$, $X_k^j = X_k^{j+1}$, $X_0^j = X_0^{j+1}$ и возврат к 2, иначе конец расчета.

Для нелинейных схем алгоритм дополняется шагами линеаризации компонентов.

Организация автономных вычислительных процессов дает значительный выигрыш при расчете схем, в которых можно выделить “быстрые” и “медленные” подсхемы, поскольку для расчета “быстрых” подсхем можно выбрать малые шаги расчета h_k . Пусть, например, схема содержит 2 подсхемы – “быструю”, которую можно рассчитывать с шагом $h_1 = 10^{-6}$ с, и “медленную”, которая рассчитывается с шагом $H = h_2 = 1$ с. Если $t_{\text{оконч}} = 10$ с и для расчета подсхем и переменных узлов связи на одном шаге необходимо выполнить $N_{\text{во}}$ вычислительных операций, то в этом случае число вычислительных операций при автономном вычислительном процессе за время $t_{\text{оконч}} = 10$ с будет равно $N_{\text{во1}} = (10^6 + 1 + 1)10N_{\text{во}} = 10^7 N_{\text{во}}$. При сквозном вычислительном процессе в этом случае имеем $N_{\text{во2}} = 3 \times 10^6\ 10\ N_{\text{во}} = 3 \times 10^7 N_{\text{во}}$. Следовательно, при использовании автономного итерационного процесса время решения будет в три раза меньше, чем при организации сквозного процесса вычислений.

Таким образом, можно сделать вывод, что в случаях, когда отдельные подсхемы имеют по быстродействию существенно отличные свойства от других подсхем, для расчета динамического режима следует организовать автономные вычислительные процессы с последующим уточнением вектора внутренних переменных всей схемы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполняется в рамках темы № FFSM-2019-0001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям – диакоптика, пер с англ. М.: Наука, 1972. 544 с.
2. *Баталов Б.В., Егоров Ю.Б., Русаков С.Г.* Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1982. 168 с.
3. *Гридин В.Н., Анисимов В.И.* Моделирование нелинейных систем на основе методов декомпозиции // Информационные технологии. 2020. № 3. С. 131–137.
4. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем, пер. с англ. М.: “Радио и связь”, 1988. 560 с.
5. *Чуа Л.О., Лин П.М.* Машинный анализ электронных схем, пер с англ. М.: Изд. “Энергия”, 1980. 832 с.
6. *Гридин В.Н., Рыжов Н.Г., Анисимов В.И., Абухазим М.М.* Методы повышения эффективности процессов моделирования динамических режимов нелинейных систем // Информационные технологии. 2017. № 11. С. 796–802.

METHODS FOR ORGANIZATION OF ITERATIVE CYCLES IN CALCULATING DYNAMIC REGIMES OF LARGE SCHEMES BASED ON DECOMPOSITION

V. N. Gridin[a], V. I. Anisimov[a,b], and S. A. Vasiliev[a,b]

[a] *Design Information Technologies Center Russian Academy of Sciences, Odintsovo, st. Marshal Biryuzova, 7a, Russian Federation*

[b] *St. Petersburg Electrotechnical University, St. Petersburg, st. Professor Popov d. 5, Russian Federation*

Presented by Academician of RAS Yu.S. Popkov

A method of organizing iterative cycles in calculating the dynamic modes of large electronic circuits based on the decomposition of the simulated circuit into subcircuit components is considered. The use of the proposed technique makes it possible to significantly increase the efficiency of software, which is especially important in the construction of service-oriented computer-aided design systems, since it provides a significant reduction in the time of interaction of system users with the network.

Keywords: scheme decomposition methods, service-oriented systems, schematic CAD systems, circuit modeling, calculation of circuits in parts

EDN: TVIKKZ
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 60–82

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.428.4, 004.622, 004.811.51

ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА LingvoDoc И ВОЗМОЖНОСТИ, КОТОРЫЕ ОНА ПРЕДЛАГАЕТ ДЛЯ ДОКУМЕНТИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ОБСКО-УГОРСКИХ ЯЗЫКОВ

© 2022 г. Ю. В. Норманская[1,2], О. Д. Борисенко[1,*], И. Б. Белобородов[1], академик РАН А. И. Аветисян[1]

Поступило 05.02.2022 г.
После доработки 28.02.2022 г.
Принято к публикации 01.03.2022 г.

LingvoDoc (http://lingvodoc.ispras.ru) обеспечивает сервис для совместной языковой документации и расчетов по собранным данным. Эта программная система предоставляет GraphQL HTTP API для всех составляющих частей и позволяет пользователям создавать собственные расширения для анализа данных или даже интегрировать их со своим собственным программным обеспечением. Благодаря способу построения системы и схемы ее базы данных можно создавать автономные приложения, интегрированные с системой LingvoDoc: этим приложениям потребуется подключение к Интернету только один раз для синхронизации основных типов данных и для целей аутентификации. Сама система позволяет пользователям создавать многослойные словари, прикреплять их к географической карте, наполнять документы метаданными, делиться доступом к словарям с другими пользователями или со всеми. Система LingvoDoc также предоставляет детализированные списки контроля доступа для совместного использования, что позволяет разделить пользователей на группы редакторов словарей, корректоров и пользователей только для чтения. Система также предоставляет некоторые вычислительные алгоритмы для хранимых данных: фонологические вычисления, автоматическую и управляемую дедупликацию внутри словарей и т.д. Система позволяет пользователям выбирать структуру словаря. Она поддерживает следующие типы данных: текст, изображения, звуки (wav, mp3 и flac), разметки (форматы ELAN и Praat), направленные и не направленные связи между сохраняемыми объектами. Пользователь может выбрать наиболее подходящий формат для своего словаря. Также система обеспечивает хранение, просмотр и обработку корпусов ELAN. В системе создан ряд авторских программ, которые позволяют проводить обработку языкового материала с точки зрения фонетики и этимологии. Эти программы воспроизводят то, что ранее ученые делали вручную, увеличивая скорость анализа материала в десятки, а в ряде случаев даже в сотни раз. В данной статье представлен фрагмент возможностей документации и анализа материала обско-угорских языков с использованием системы LingvoDoc.

Ключевые слова: программное обеспечение, документирование и анализ языков, анализ данных.
DOI: 10.31857/S2686954322030055

1. ОБЗОР СИСТЕМ ЯЗЫКОВОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

LingvoDoc – это серверное программное обеспечение, предназначенное для документирования и анализа языков в совместной работе групп исследователей. На систему в значительной степени повлияли программные системы контроля версий, которые в основном используются программистами, но слишком сложны для повседневного использования лингвистами (Github) (Bitbucket). Основная цель проекта заключалась в разработке системы, которая предоставляла бы большинство своих функций через веб-интерфейс для наиболее частых задач документирования и обработки (ввода архивного и полевого аудио- и видеоматериала, его транскрибирования, этимологизации, глоссирования и последующего анализа и сравнения с другими языками) и в то же время предоставляла средства для внешней обработки данных через HTTP API для опытных пользователей, знакомых с программированием и обработкой естественных языков. Несколько существующих систем могут хранить аналогичные языковые данные; наиболее близкими к LingvoDoc являются проект Starling [1], проект LEGO [2], TypeCraft [3], Kielipankki [4] и

[1] *Институт системного программирования Российской академии наук им. В.П. Иванникова, Москва, Россия*
[2] *Институт языкознания Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: al@somestuff.ru*

проект corpus-tools [5], но все эти системы имеют функциональные ограничения, которые мы пытались преодолеть.

Проект Starling – это настольное программное обеспечение, позволяющее создавать этимологически связанные словари. Отдельный словарь Starling выглядит как таблица с лексическими элементами; каждая лексическая запись имеет уникальный целочисленный идентификатор для конкретного словаря. Таблица может иметь неограниченное количество именованных столбцов двух типов: столбцы, содержащие текстовые данные, и столбцы, содержащие указатели на другие словари. Ячейки таблицы последнего типа содержат целочисленные значения, соответствующие идентификаторам внутри словаря, имя файла которого совпадает с именем столбца. Пользовательский интерфейс Starling помогает перемещаться по подключенным объектам и предлагает широкий спектр возможностей для ввода и анализа данных. Кроме того, Starling имеет некоторые функции экспорта, включая экспорт в HTML-представление, поэтому словари можно экспортировать только для чтения в Интернете.

Тем не менее у Starling есть определенные ограничения.

Эта система является проприетарной и не имеет публично открытых исходных кодов; таким образом, она не может быть изменена или расширена сторонними разработчиками. Впрочем, если бы исходники были открыты сообществу, это не сильно изменило бы ситуацию: программа разработана на языке программирования Harbour [6] (предок Clipper 5.3), который вряд ли можно назвать распространенным языком программирования, поскольку базы данных DBF не такие гибкие, как современные реляционные (и нереляционные) системы управления базами данных.

Вторая проблема заключается в невозможности синхронизировать все словари среди исследователей, работающих с программой: если какой-либо из словарей в какой-то момент “разветвится”, все добавленные связи для разветвленного словаря будут недействительны. Более того, поскольку словари представлены в виде списка простых файлов, общей проблемой является то, что все подключенные словари хранятся исследователями как архив файлов, который не может быть изменен никем, кроме их автора. Но многие исследователи пользуются относительно общими словарями (например, словарями протоформ), и ни один из них в данном случае не будет идентичным.

Третья проблема укрепила нашу мотивацию для разработки новой системы. Starling может хранить только текстовые (под “текстом” мы подразумеваем “переменные символьные данные”) ячейки данных без модификации и без какой-либо возможности хранить вложенные объекты, несмотря на то, что существует общая потребность в хранении медиафайлов (аудио, изображения , видео), аннотационные данные для медиафайлов (такие как формат EAF/ELAN для длинных текстов или формат TextGrid/Praat для фонологических данных (в частности, варианты произношения)) и различные типы ссылок, которые должны быть неизменяемыми даже при участии многих редакторов. LingvoDoc предназначен для работы со всеми перечисленными выше типами данных и предоставляет гибкую систему типов. Ее пользователи могут создавать типы столбцов, которые повторно используются во всей системе. Эта функция также полезна для определения различных типов отношений между словарями.

Проект **LEGO** кажется почти статичным без каких-либо возможностей для динамического изменения данных в системе пользователями программы. Однако у этой системы есть одна примечательная особенность, которая делает ее отличной межъязыковой онтологией понятий: каждый сохраненный объект словаря имеет связь с “Concepticon ID” в проекте GOLD. Таким образом, модель данных LingvoDoc дает возможность при необходимости легко использовать целые наборы данных LEGO и GOLD.

TypeCraft – это проект, который использует популярный движок MediaWiki (программное обеспечение для организации вики – веб-сайта, контент которого создают сами пользователи, используя браузер). Этот проект предоставляет отличные варианты метаданных и языковой документации, поскольку он наследует все функции движка Википедии. Кажется, что система предоставляет подстрочную текстовую аннотацию через язык разметки MediaWiki, и этот подход универсален, так как это очень популярная платформа. Но этот подход представляется менее гибким, чем формат EAF (ELAN), поскольку не позволяет выстраивать сложные взаимосвязи между слоями разметки. Также основное внимание в проекте уделяется языковой документации и созданию коллекции разговорных текстов; однако его трудно использовать для составления словарей или соединения лексических статей. Движок MediaWiki не предоставляет каких-либо сильных возможностей для типизации данных, поэтому эта функция вряд ли когда-нибудь появится.

Проект **Kielipankki** предоставляет множество лингвистических инструментов и отдельный веб-портал, посвященный расширенному поиску по корпусам (KORP) (своды документов). Весь проект ориентирован на корпуса и не предоставляет никаких инструментов унификации. Проект хранит массивные коллекции данных, которые, кажется, структурированы вручную: большинство коллекций организованы по-разному, поскольку

разные авторы могли отправить их в систему; администраторы системы помечают данные тегами. Мы не можем точно определить, какое подмножество хранимых корпусов индексирует KORP, но поисковая система мощная и охватывает большой объем данных. На самом деле, в данный момент система не ориентирована на словарные данные, а ее движок представлен закрытым исходным кодом, поэтому его нельзя повторно использовать или модифицировать.

Проект **Corpus-tools** предлагает несколько программных инструментов. **Salt** обеспечивает промежуточную модель отображения, которая может унифицировать форматы хранения сводов документов. Программный инструмент **Pepper** содержит набор конвертеров для некоторых форматов хранения корпусов. Отличительной особенностью **Pepper** является метод конвертации, который позволяет избежать преобразования каждого формата в каждый: каждый формат должен иметь конвертер внутрь и наружу из промежуточной модели Salt, после чего исходный корпус теоретически может быть преобразован в любой другой формат, представленный в **Pepper**. Проект **ANNIS** представляет собой средство визуализации и поиска в корпусах. **Electron** – это многоуровневый инструмент для аннотирования корпусов, который распространяется как программное обеспечение для настольных ПК. Он использует модель представления Salt в качестве формата хранения. У нас есть планы на будущее по интеграции с конвертерами Pepper, чтобы обеспечить возможности конвертации с помощью нашего веб-интерфейса, поскольку это единственная потенциально переиспользуемая часть проекта Corpus-tools для LingvoDoc.

Все вышеперечисленные системы не покрывают потребности нашей исследовательской группы по ряду причин.

1. Ни одна из существующих систем не обеспечивает расширяемой системы для типов данных и возможности одновременного создания пользовательской структуры для словарей и корпусов, что строго необходимо для межсловарных связей с различной семантикой (это важно для возможности связи родственных слов в разных языках, имеющих разное значение).

2. Большинство систем не предоставляют API для внешней обработки данных или интеграции.

3. Большинство систем не предоставляют исходные коды с разрешительной лицензией, поэтому их нельзя повторно использовать или адаптировать для конкретных нужд.

4. Ни одна из систем, кроме TypeCraft, не поддерживает совместную интерактивную работу над одним и тем же языковым ресурсом.

5. Ни одна из систем не поддерживает децентрализованный режим с отложенной синхронизацией между соавторами.

Эти причины послужили основным мотивом для разработки новой системы.

2. ОБЗОР СИСТЕМЫ LingvoDoc

LingvoDoc – система, ориентированная на создание словарей и корпусов текстов и их анализа. На главной странице (lingvodoc.ispras.ru) пользователю предоставляется список опубликованных словарей и корпусов текстов, структурированный в соответствии с генетической классификацией языков (представленной в виде дерева языков, их диалектов и говоров), а также с учетом ссылок на гранты и организаций, в которых проводилась работа. Вверху страницы расположено меню быстрой навигации. Число в квадратных скобках показывает, сколько словарей/корпусов содержит язык или языковая семья (рис. 1).

Словарь представлен как многослойная структура, и каждый из слоев (в стандартном случае – это лексические и парадигматические входы) содержит свои типизированные столбцы. Как показано на рис. 2, число указывает, содержит ли словарь как лексические, так и парадигматические входы, или еще дополнительные слои, а нажатие кнопки “Просмотр” показывает список доступных слоев. Щелчок по имени выбранной перспективы приведет пользователя внутрь выбранного слоя словаря или коллекции корпусов.

Структура языкового дерева, представляющего генетическую классификацию языков, является гибкой, поэтому в нее можно добавлять новые языки и диалекты, но она по-прежнему имеет некоторые подмножества “защищенных” языков и диалектов, которые могут быть изменены только системными администраторами. Система предоставляет функции изменения месторасположения языка или диалекта на языковом дереве. Каждый “незащищенный” язык может быть помещен в нужный узел дерева в качестве дочернего или близкородственного языка, а можно также добавить дочерний узел к любому языку с помощью кнопки “Создать” (рис. 3).

Языковое дерево используется в процессе создания словаря или корпуса текстов (рис. 4, 5). Словарь может быть создан в двух режимах: с нуля или в виде словаря, импортированного из некоторых источников, поддерживаемых системой. В настоящее время поддерживаются следующие источники импорта: формат ранних версий LingvoDoc и CSV со специальным символом-разделителем. Файлы CSV можно создавать из файлов Excel, используя диалоговое окно экспорта Starling или любым другим способом. Модуль импорта LingvoDoc для CSV поддерживает массовый импорт нескольких файлов с сохранением взаимосвязей между импортированными слова-

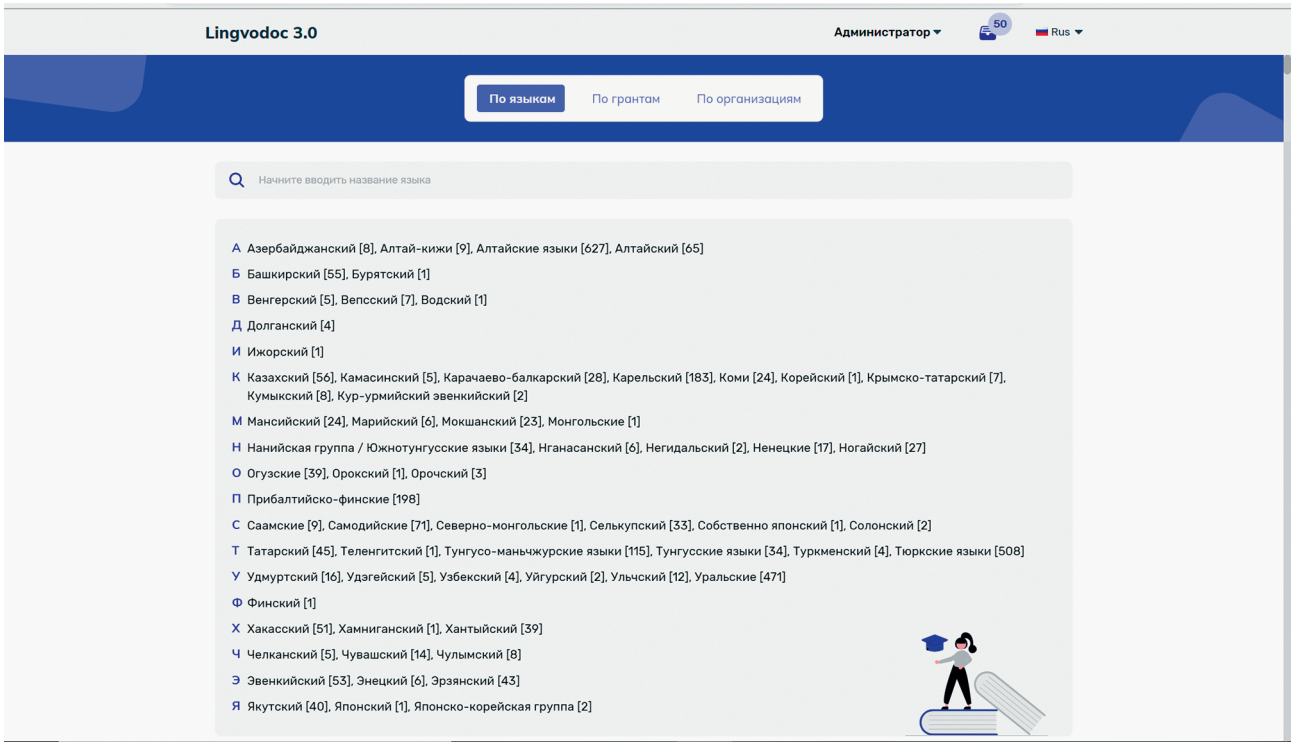


Рис. 1. Навигация по языку.

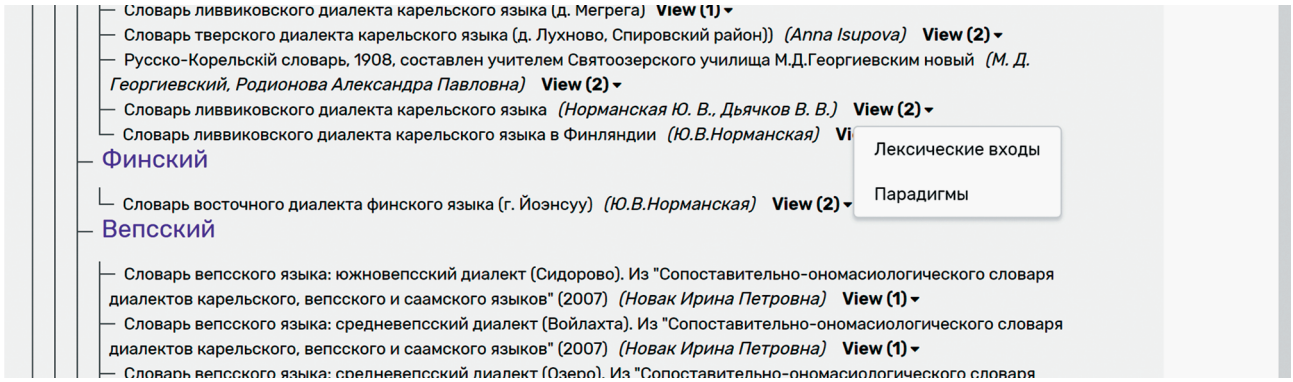


Рис. 2. Перспективы словаря.

рями, если источником CSV-файлов является Starling.

Каждый словарь имеет гибкую настраиваемую структуру. Пользователь может создавать лексические и парадигматические входы словаря и любые дополнительные перспективы с любым набором столбцов (полей), самостоятельно выбирая, какой тип данных в них будет размещен. Если в существующем списке нет подходящих столбцов, можно создать новый тип столбца, но в настоящее время в системе уже создано несколько десятков столбцов, например, звук, разметка, когнаты, парадигматические формы и контексты и другие (рис. 6). Могут быть следующие типы столбцов: 1) текстовые: пользователь видит возможность ввода текста; 2) аудио: пользователь видит селектор файлов для загрузки и кнопки для воспроизведения уже загруженных файлов. Возможно также создавать “вложенные” поля. Это полезно для зависимых данных, таких как файлы разметки спектрограмм аудиофайлов: к одному аудиофайлу можно присоединить иметь более одной версии разметки спектрограмм на отдельные звуки.

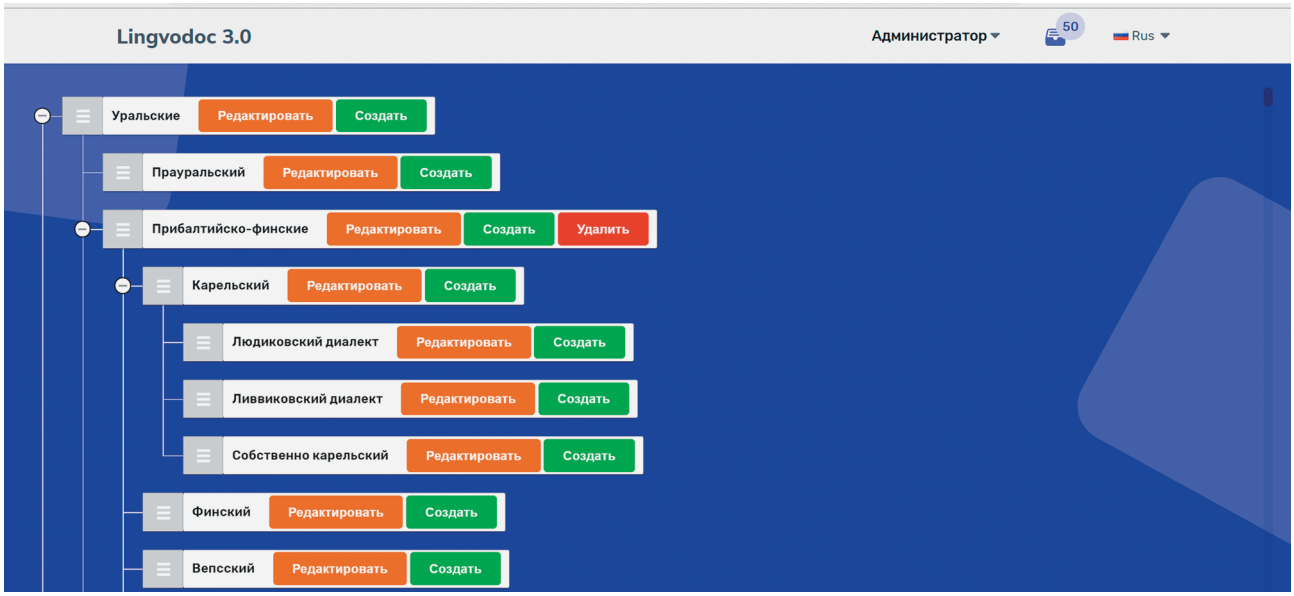


Рис. 3. Интерфейс структурирования языкового дерева.

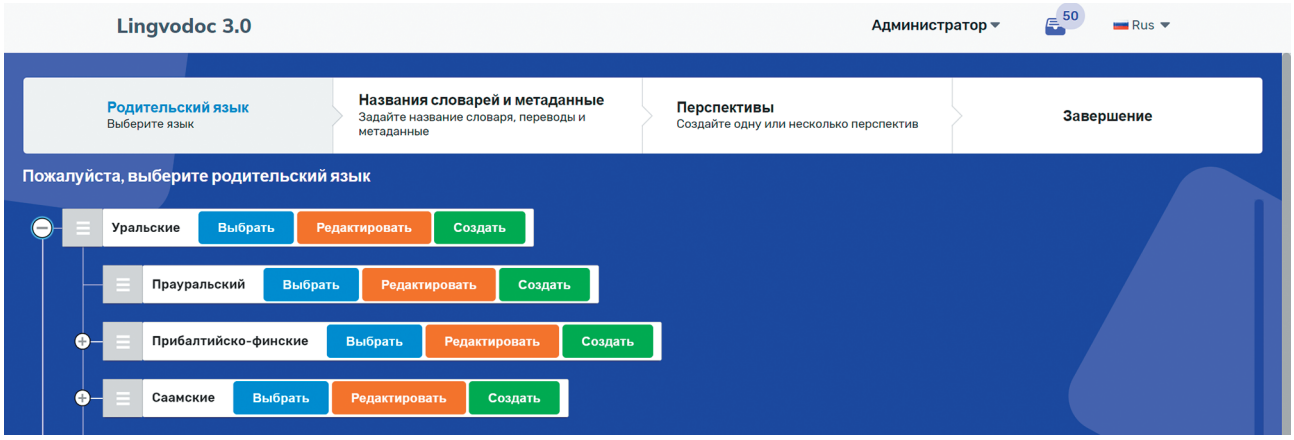


Рис. 4. Выбор языка в диалоге создания словаря.

После создания словаря пользователь становится единственным владельцем нового словаря, может редактировать его и давать другим пользователям право одновременной и независимой работы в этом же словаре. Если работа выполнена по гранту, пользователь передает часть своих прав, в основном, связанных с процессом публикации, зарегистрированному в системе гранту, фактически, его руководителю (гранты могут создавать системные администраторы по просьбе руководителей грантов).

Процесс редактирования очень похож на таблицы Excel с рядом отличий (рис. 7). Каждая ячейка в таблице может иметь множество отдельных значений (используемых для отдельных вариантов данных от разных авторов, например, звуков). В ячейки можно вставлять данные, соответствующие типу столбца: текст, звук, размеченные спектрограммы, ссылки, направленные и двунаправленные ссылки, позволяющие связать форму слова с другими словарями родственных языков. Каждая новая ячейка создается и заполняется в “неопубликованном” состоянии, поэтому ее могут видеть только те, у кого есть права на работу со словарем. Кроме того, редактирование данных выполняется в транзакционном режиме “пометить как удаленное и создать новое”, поэтому любое редактирование данных ячейки снова помечает их как “неопубликованные”.

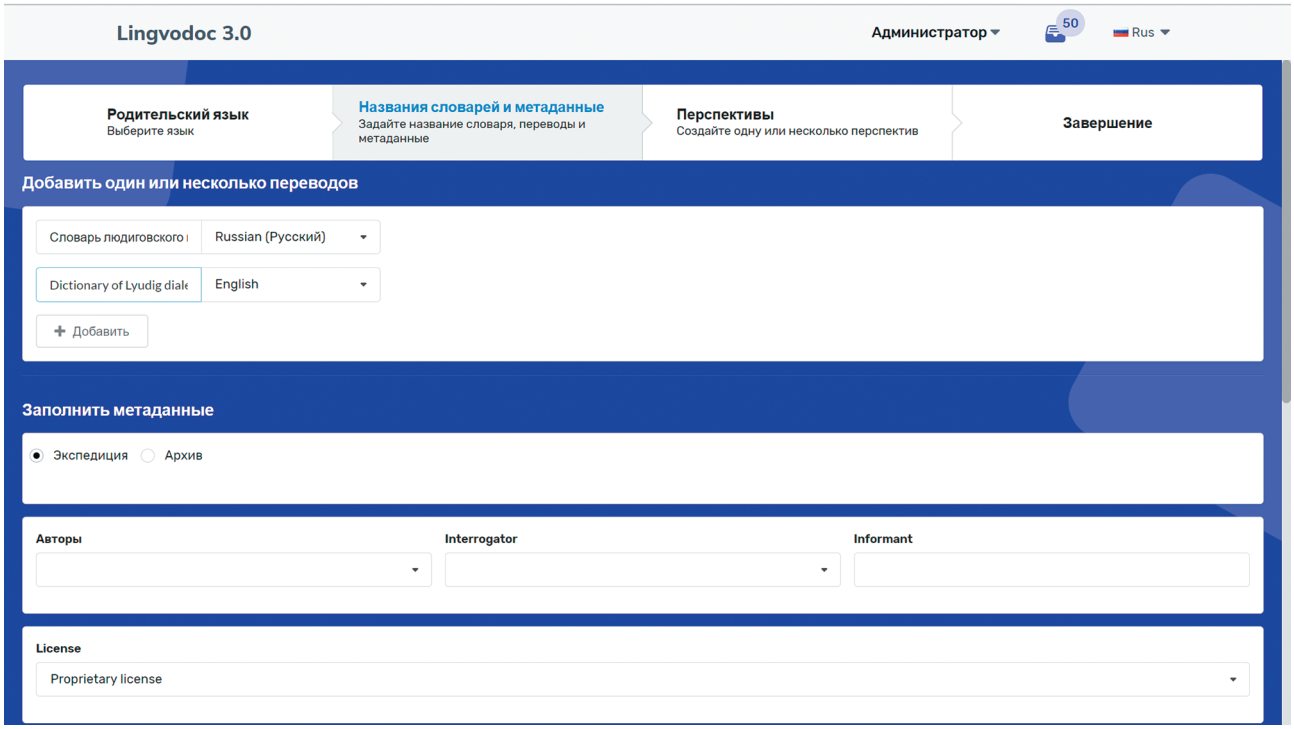


Рис. 5. Ввод описания словаря, который на предыдущем этапе был привязан к конкретному языку или диалекту на языковом дереве.

Каждый словарь и перспектива (лексические или парадигматические входы) имеют подробный список возможностей делиться правами разрешенных действий. Пользователи, имеющие разрешения на публикацию для лексических и/или парадигматических входов, могут изменить состояние каждой ячейки с неопубликованного на опубликованное и наоборот. Также существуют специальные разрешения, связанные с состоянием всего словаря. Каждый словарь/корпус, лексические и парадигматические входы в них могут находиться в следующем списке состояний: “Опубликовано” (доступно в полном объеме всем пользователям ЛингвоДока), “Скрыто” (доступно только тем пользователям, у которых есть права на редактирование словаря), “WiP” (доступно только тем пользователям, у которых есть права на редактирование словаря, но может быть задействовано в Поиске), “Ограниченный доступ” (пользователям ЛингвоДока открыта только первая страница, полный доступ только для тех пользователей, которые имеют права на редактирование). Опубликованные или словари/корпуса с ограниченным доступом становятся видны на странице “Языковые базы данных”: словари/корпуса.

Как показано на рис. 8, для каждого словаря/корпуса можно ввести метаданные: имена авторов обработки записанных данных, сборщиков материала, информантов, год сбора данных, название населенного пункта, где был записан материал, его географические координаты, проставив локализацию на карте, добавить файлы, связанные тематически со словарем в форматах pdf, docx и xlsx.

В LingvoDoc в меню “Статистика” у каждого словаря/корпуса хранятся данные о всех действиях его авторов. Можно просмотреть статистику изменений, сделанных пользователями, имеющими права на редактирование, в выбранном временном диапазоне. В словарях есть опция “Объединить лексические предложения”, в которой реализованы автоматический поиск и последующее объединение дублетных форм с разной степенью сходства во всех или в выбранном столбце, которую могут задавать авторы словаря.

В каждом словаре есть меню “Инструменты”, в котором в настоящее время авторам словаря доступно 13 программ (из них только 4 доступны всем пользователям системы) анализа языковых данных, которые воспроизводят фонетический, морфологический и этимологический анализ, ранее выполняемый лингвистами вручную, в десятки, а иногда в сотни раз быстрее. Подробнее о некоторых из них см. ниже в описании методов анализа обско-угорских языков.

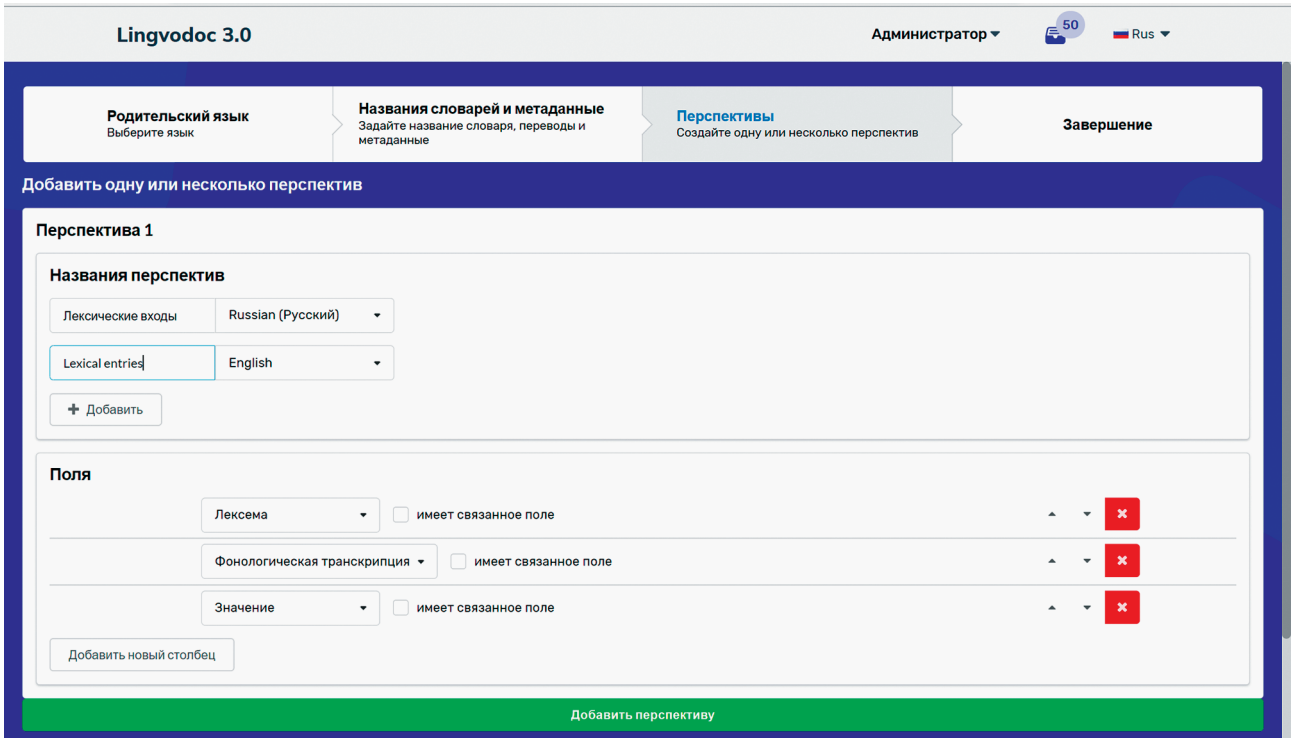


Рис. 6. Режим настройки структуры словаря: добавление столбцов.

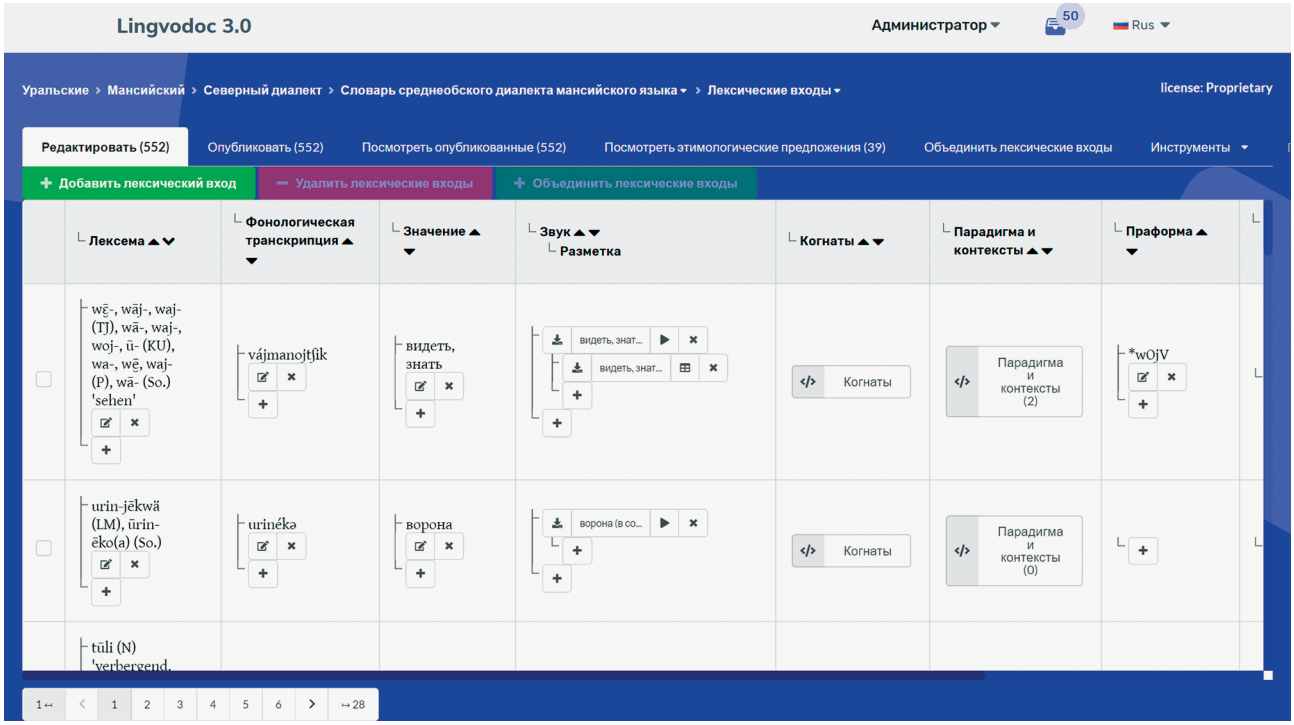


Рис. 7. Фрагмент перспективы Лексические входы в словаре обского диалекта мансийского языка.

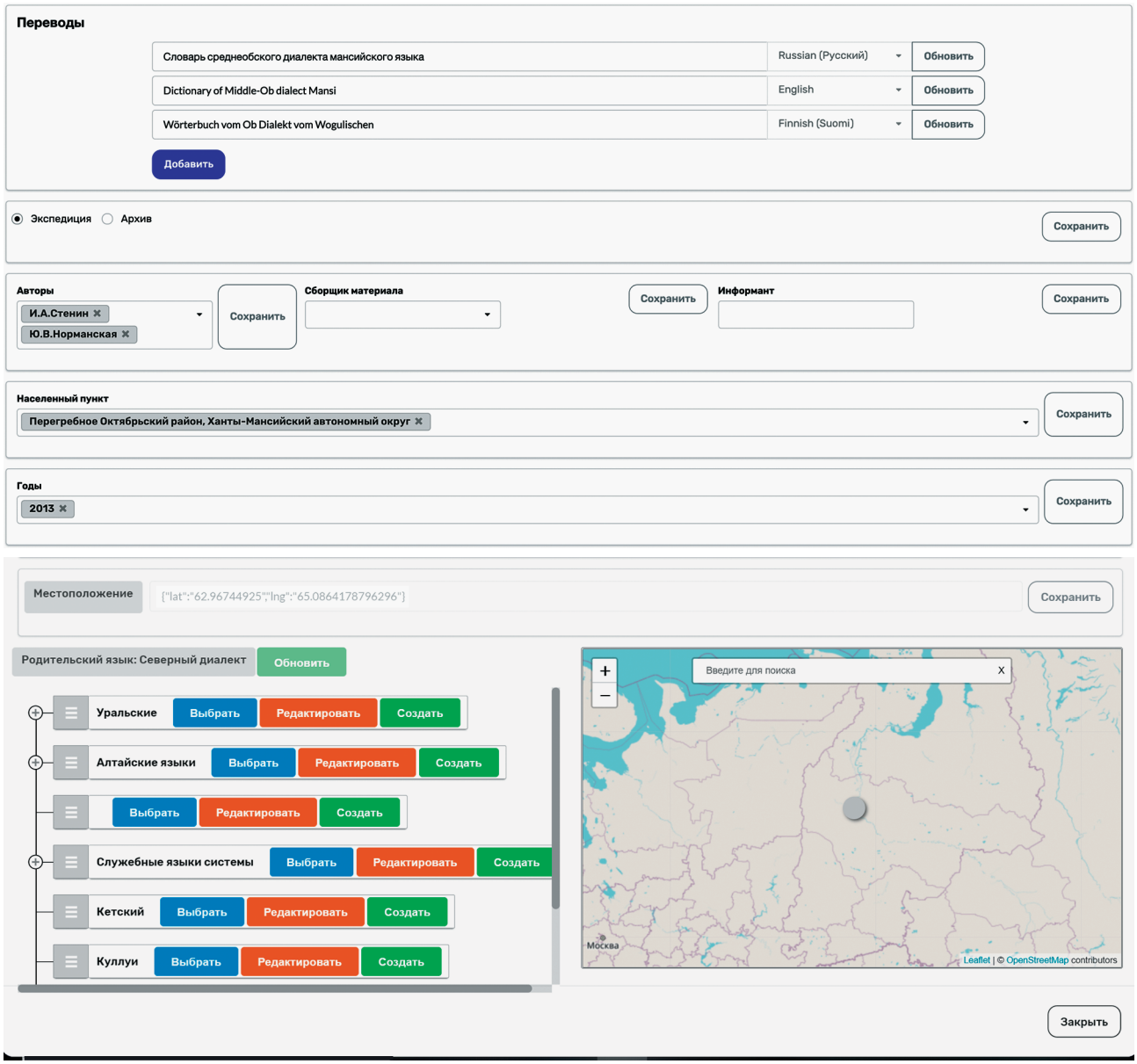


Рис. 8. Меню для ввода метаданных словаря.

В качестве корпусов текстов возможна загрузка текстов в формате .odt, звуковых или видеофайлов, и видео- или аудиокорпусов аннотированных/глоссированных текстов, подготовленных в программе Elan. Коллекция корпусов выглядит так же, как и обычный словарь, но имеет несколько заранее запрограммированных столбцов, которые при необходимости можно изменить: звук, звук с аннотацией, текстовый файл, комментарии. В LingvoDoc есть собственная веб-программа для просмотра корпусов в формате Elan (рис. 9). Также нами создана программа конвертации корпусов текстов Elan в конкордансы, где в лексическом входе представлена основа слова, а в парадигматических входах собраны все словоизменительные формы слова и контексты их употребления.

В системе также имеется диалоговое окно поиска, которое поддерживает запросы как по словарям, так и по корпусам в режимах ИЛИ/И (рис. 10). Это позволяет создавать сложные запросы с множеством опций. Пользователь может объединить несколько результатов поиска на карте мира, чтобы увидеть их пересечения.

LingvoDoc предоставляет бесплатную регистрацию в системе для новых пользователей (рис. 11). Для регистрации новому гостю системы достаточно нажать кнопку “Регистрация”, предоставить минимальную информацию о себе и до-

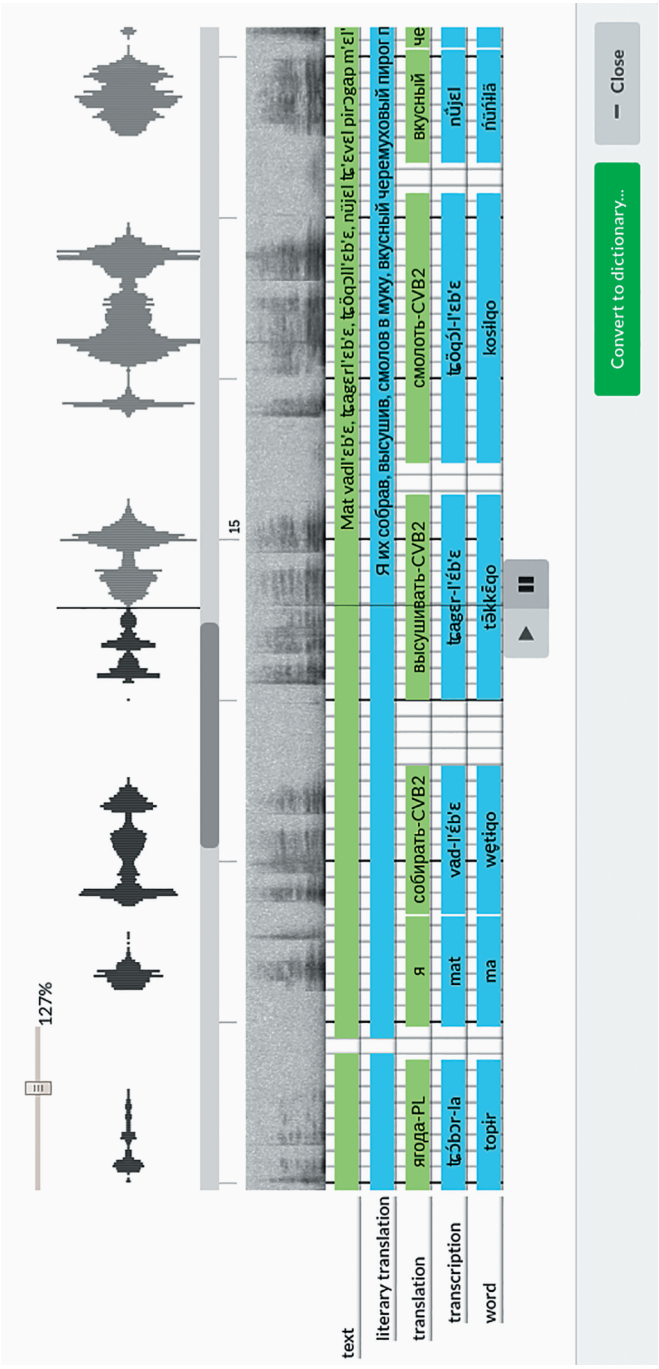


Рис. 9. Средство просмотра LingvoDoc корпусов текстов в формате Elan.

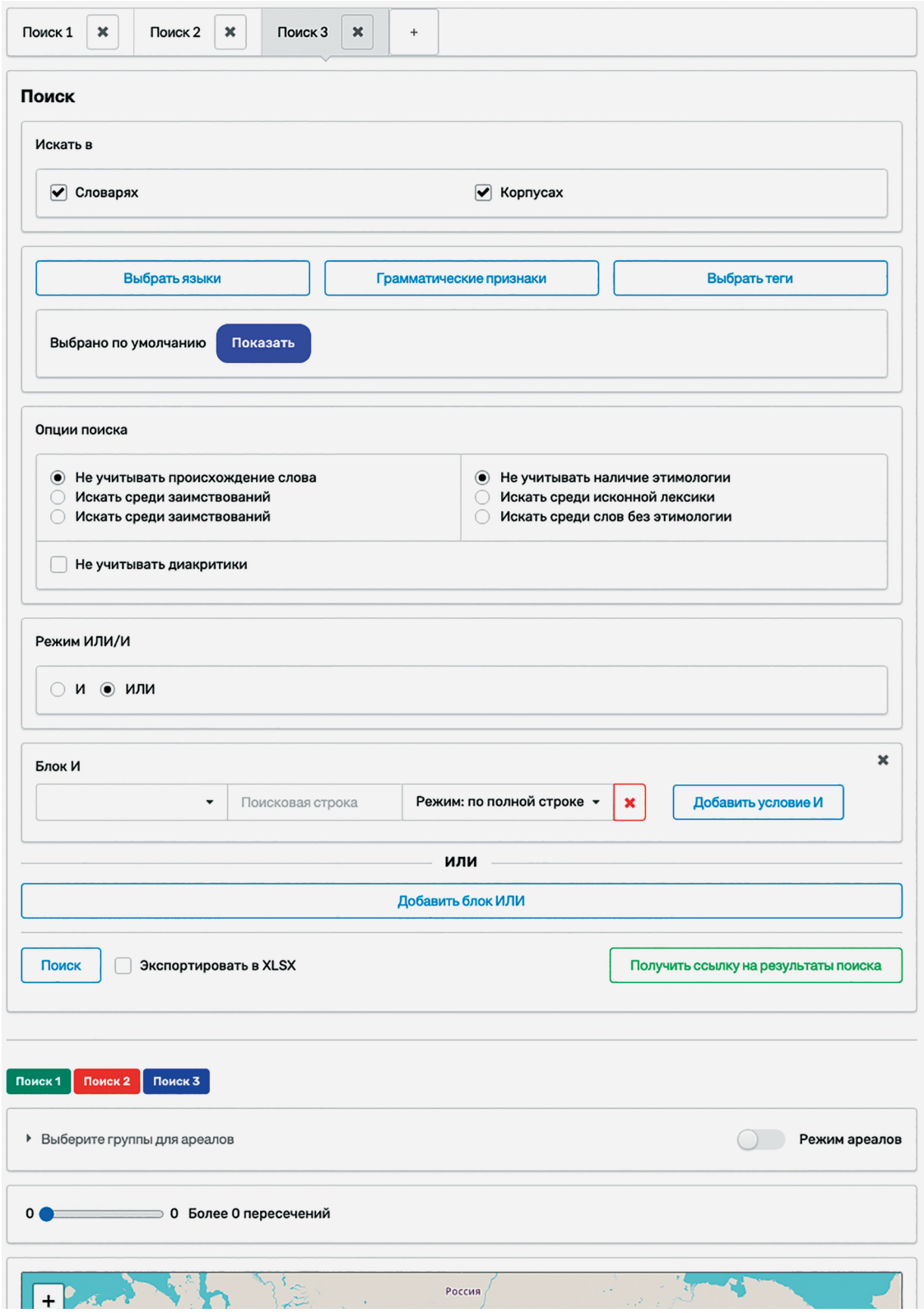


Рис. 10. Диалог поиска LingvoDoc.

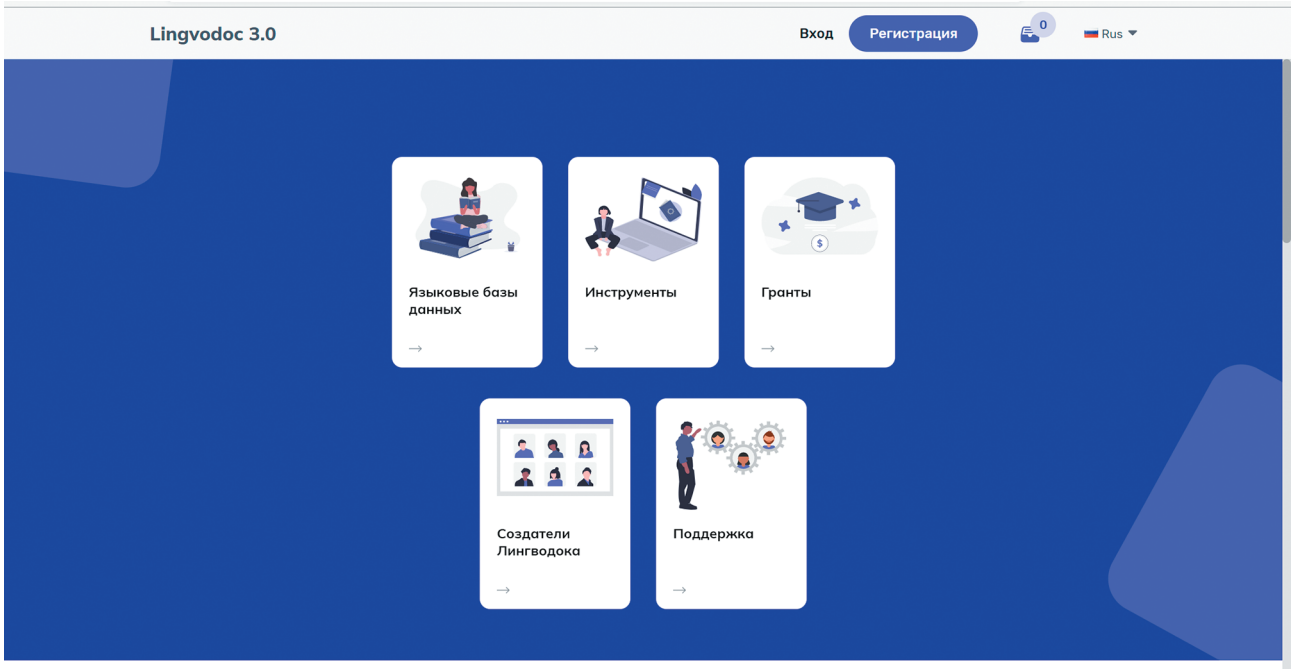


Рис. 11. Главная страница и кнопка регистрации.

ждаться, пока один из модераторов системы подтвердит, что это реальный человек, ранее не забаненный в системе.

3. ВНУТРЕННЕЕ УСТРОЙСТВО LingvoDoc

Программный комплекс LingvoDoc предоставляет следующие возможности:

1. Совместная работа над словарями (по аналогии с Google Docs или Github).

2. HTTP GraphQL API для интеграции с любым другим программным обеспечением.

3. Веб-интерфейс (эталонное клиентское приложение), использующий GraphQL API.

4. Гибкие списки контроля доступа (ACL) для совместного редактирования, просмотра и публикации. Каждый словарь в системе может использоваться совместно с любым другим пользователем системы, только для чтения, чтения-записи и публикации. Любой пользователь системы, не имеющий прямого доступа к конкретному словарю, может предлагать правки, которые могут быть рассмотрены редакторами словаря.

5. Многоязычные переводы словарей на основе одних и тех же данных. Все названия могут быть переведены в системе на любой язык.

6. Масштабируемая архитектура (предназначена для использования облачных ресурсов для масштабирования).

7. Полуавтономные клиенты с двусторонней синхронизацией. Пользователь может находиться практически где угодно и при этом синхронизировать свои данные, если он этого хочет и имеет подключение к Интернету.

8. Возможность создания **собственных порталов** с данными, принадлежащими группе пользователей или организации; система имеет двустороннюю синхронизацию с возможностями центральной системы.

9. Мультиарендность. Система изначально поддерживает полную изоляцию доступа среди участников словаря: один пользователь может получить доступ к отдельным словарям для личного использования, совместной работы и внутреннего использования, при этом каждый словарь размещается в его собственном учреждении и по желанию используется другими пользователями или учреждениями.

10. Безопасность. Мы не знаем паролей пользователей; система предназначена для хранения данных с использованием самых современных методов, чтобы обеспечить безопасность данных пользователей.

Исходные коды системы доступны под лицензией Apache 2.0.

Главной особенностью системы является поддержка полуавтономной синхронизации пользовательских данных. Эта функция уникальна для систем такого типа и основана на концепции составного первичного ключа [9]. Основная идея

такого типа синхронизации заключается в том, что каждый пользователь при каждом входе в систему (включая автономные установки клиента) получает уникальный для клиента составной ключ большого целого числа. После этого каждый объект, создаваемый конкретным клиентом, нумеруется на основе специального идентификатора последовательности. Во время каждого процесса синхронизации автономный клиент получает новый уникальный составной ключ персональной идентификации. Таким образом, каждый объект в системе имеет уникальную для объекта комбинацию ключа идентификатора клиента и ключа идентификатора объекта. Этот метод позволяет нам использовать концепцию "синхронизации в любое время": для каждого конкретного автономного приложения или процесса онлайн-входа клиента генерируется уникальный ключ идентификации объекта.

Несомненно, такие системы существуют уже давно, хотя почти все они требуют систем ручного разрешения конфликтов. Одними из самых известных примеров являются проекты GitHub и GitLab, основанные на системе контроля версий git. Эти проекты довольно просты в использовании, если вы один программист без необходимости синхронизировать свои проекты с чьими-либо еще. Но даже небольшой конфликт версий требует ручного разрешения конфликтов, что является сложным процессом и работает только с недвоичными данными. Наш подход очень похож на разрешение конфликтов в системе управления базами данных CouchBase [7], но используется для классических реляционных СУБД, и вполне вероятно, что мы изобрели его немного раньше, поскольку мы не можем найти никаких случаев применения этого метода до 2015 г.

Второй основной концепцией является виртуальный объект, который не содержит никаких данных, но служит якорем, на который ссылаются другие объекты. В системе LingvoDoc почти каждый объект базы данных имеет уникальную комбинацию идентификаторов в виде составных ключей. Словари, перспективы, столбцы, ячейки и строки в таблице являются основными примерами таких объектов. Строка в таблице – интуитивно понятная иллюстрация такого якоря. Данные, хранящиеся в ячейках таблицы, имеют ссылку на свой составной идентификатор строки в качестве привязки и организованы в таблицу с помощью внешнего веб-приложения. Внутренне данные организованы в более древовидной, чем табличной форме. У каждого автора может быть столько версий таких привязанных данных, сколько он хочет; система не ставит никаких ограничений. Несколько версий одного или многих авторов представлены в виде списка версий для объекта, и издатель несет ответственность за выбор того, какие из них являются правильными. Правильных версий иногда может быть много: например, если диктор трижды повторяет одно и то же слово, для одного лексического входа будет три правильных звуковых файла, и система отобразит их все.

В терминах реляционной модели данных это означает, что мы храним данные "версии" в денормализованной форме и объединяем данные на стороне сервера.

Представим, например, что у M авторов разные мнения по какому-то объекту (например, переводу определенного термина). Система не ограничивает количество перечисленных переводов при условии, что каждый из M авторов имеет соответствующие права на редактирование словаря.

Однако для этого в системе предусмотрены специальные режимы просмотра (см. обзор в первой части статьи). Основное представление, конечно же, – это представление редактора: оттуда редакторы данных могут делать все, что захотят. Вторая точка зрения – точка зрения издателя. Используя это представление, люди, ответственные за словарь, могут одобрить один или несколько правильных объектов, используемых в виртуальном объекте привязки. Например, если лексическая статья имеет 5 вариантов транскрипции и 10 вариантов перевода, и владелец этого словаря считает, что только одна из транскрипций и три перевода верны, он может выбрать только их и опубликовать свой выбор для остальных исследователей.

Последняя проекция – это представление просмотра/гостя/исследователя данных. Здесь вы можете увидеть данные, которые были загружены и проверены авторами и издателями.

4. API-ИНТЕРФЕЙС LingvoDoc GraphQL

LingvoDoc, безусловно, предлагает стандартный доступ через веб-интерфейс, что не представляет особого интереса с точки зрения параллельных технологий. **Полный доступ к системе LingvoDoc можно получить через систему GraphQL API (на основе HTTP).** GraphQL – это способ построения API для веб-приложений, предложенный Facebook в 2012 г. и широко используемый в настоящее время.

Основные особенности подхода GraphQL:

1. Пользователь API не видит внутренностей системы, а только упрощенные абстракции, которые намного проще и интуитивно понятны.

2. Все API системы можно исследовать и интроспектировать с помощью стандартных клиентов GraphQL, таких как расширение браузера Altair или любое другое.

3. Пользователь API может получить именно те данные, которые ему нужны в данный момент. Классические приложения REST API возвраща-

ют все данные для каждого метода или используют сложные селекторы данных для ограничения вывода; например, для метода /персона вы получите имя, дату рождения, фамилию, контактный номер и т.д. Тот же метод, реализованный при помощи GraphQL, позволяет выбрать, нужны ли им только фамилии и ничего больше.

Каждый объект в системе имеет четкий метод доступа; наш веб-интерфейс – это просто эталонный клиент, реализованный на JavaScript. Все уровни доступа доступны с помощью нашего простого API на основе HTTP. Все данные в системе доступны через API и возвращаются в формате JSON.

Большая часть данных хранится в СУБД PostgreSQL. Примечательной частью схемы базы данных является использование денормализованной схемы с составными первичными ключами. С помощью этого трюка мы добавляем в систему собственные типы данных. Таблицы в словарях не хранятся в виде таблиц внутри базы данных, а формируются backend API динамически с использованием таблиц, перечисленных на рис. 12.

Все данные, загружаемые пользователями в виде файлов, хранятся в файловой системе, совместимой с POSIX.

Бэкенд-часть LingvoDoc использует Pyramid в качестве веб-фреймворка, Graphene для построения GraphQL API, Celery для распределения задач, SQLAlchemy для связи с системой управления базами данных PostgreSQL.

Фронтенд-часть LingvoDoc – это классическое веб-приложение, построенное на платформе React и клиенте Apollo GraphQL.

На рис. 13 представлена схема взаимодействия.

5. АНАЛИЗ ОБСКО-УГОРСКИХ ЯЗЫКОВ

Обско-угорские языки: хантыйский и мансийский в ЛингвоДоке одни из наиболее описанных: в настоящее время в ЛингвоДоке доступны 18 словарей мансийских и 32 словаря хантыйских диалектов. Многие материалы по ним, например, аудиозаписи восточно-мансийского диалекта (с. Шугур), или говора п. Хулимсунт сосьвинского мансийского, говора с. Корлики ваховского хантыйского и многие другие – это единственные доступные ученым аудиозаписи этих говоров, которые значительно отличаются от остальных диалектов. Многие из говоров обско-угорских языков практически не описаны. Поэтому очень важно сохранить эти записи и провести их анализ на высоком научном уровне. Ниже будет показано, какие возможности есть для этого в ЛингвоДоке.

Еще в начале XX века обские угры: носители хантыйского и мансийского языков занимали огромную территорию от верховьев Печоры на севере Уральских гор до Томской области рек Юган, Васюган, Вах (около трех тысяч километров от северо-западного до юго-восточного регионов их расселения). Конечно, для языков, распространенных на такой огромной территории, была характерна значительная диалектная раздробленность. Хантыйский и мансийский языки разделены на четыре диалектных группы каждый, между носителями которых взаимопонимание отсутствует. В начале XX века в каждой диалектной группе было еще несколько диалектов, которые также значительно отличались друг от друга морфологическими и фонетическими системами.

К сожалению, в настоящее время ситуация катастрофически меняется. Часть диалектных групп уже исчезла: последние носители южных и западных диалектов мансийского языка умерли уже в середине XX века. Часть диалектов хантыйского языка: низямский (промежуточная группа между северными и южно-хантыйскими диалектами), салымский (промежуточная группа между западными и восточными хантыйскими диалектами) считались уже исчезнувшими, но полевые экспедиции, проведенные в рамках наших проектов, позволили найти нескольких последних носителей этих диалектов.

Большинство диалектов обско-угорских языков не имеют полных грамматик или словарей. Существующие описания не соответствуют современным стандартам или труднодоступны для ученых из России. Например, в описаниях, сделанных европейскими учеными в XIX–начале XX в., используются знаки финно-угорской транскрипции с множеством дополнительных символов, значение которых сейчас не всегда ясно. Также следует отметить, что описания, созданные в XIX в., могут значительно отличаться друг от друга по степени точности, ср., например, в Норманская (2015) анализ транскрипции мансийских говоров из одних и тех же населенных пунктов, сделанный Б. Мункачи и А. Каннисто, которые достаточно часто противоречат друг другу. В русских и советских кириллических транскрипциях мансийского языка, наоборот, практически не используются дополнительные символы. Перевод из одной системы транскрипций в другую невозможен.

В последние годы лингвисты из разных стран мира, понимая критическое состояние обско-угорских языков, активно занимаются их фиксацией и изучением. Упомянем лишь наиболее масштабные проекты:

• EuroBABEL Ob-Ugric Languages, **Ob-Ugric database: analysed text corpora and dictionaries for less described Ob-Ugric dialects** под руководством Е.К. Скрибник (http://www.babel.gwi.uni-muenchen.de/, см. на этом сайте также подробные ссылки на

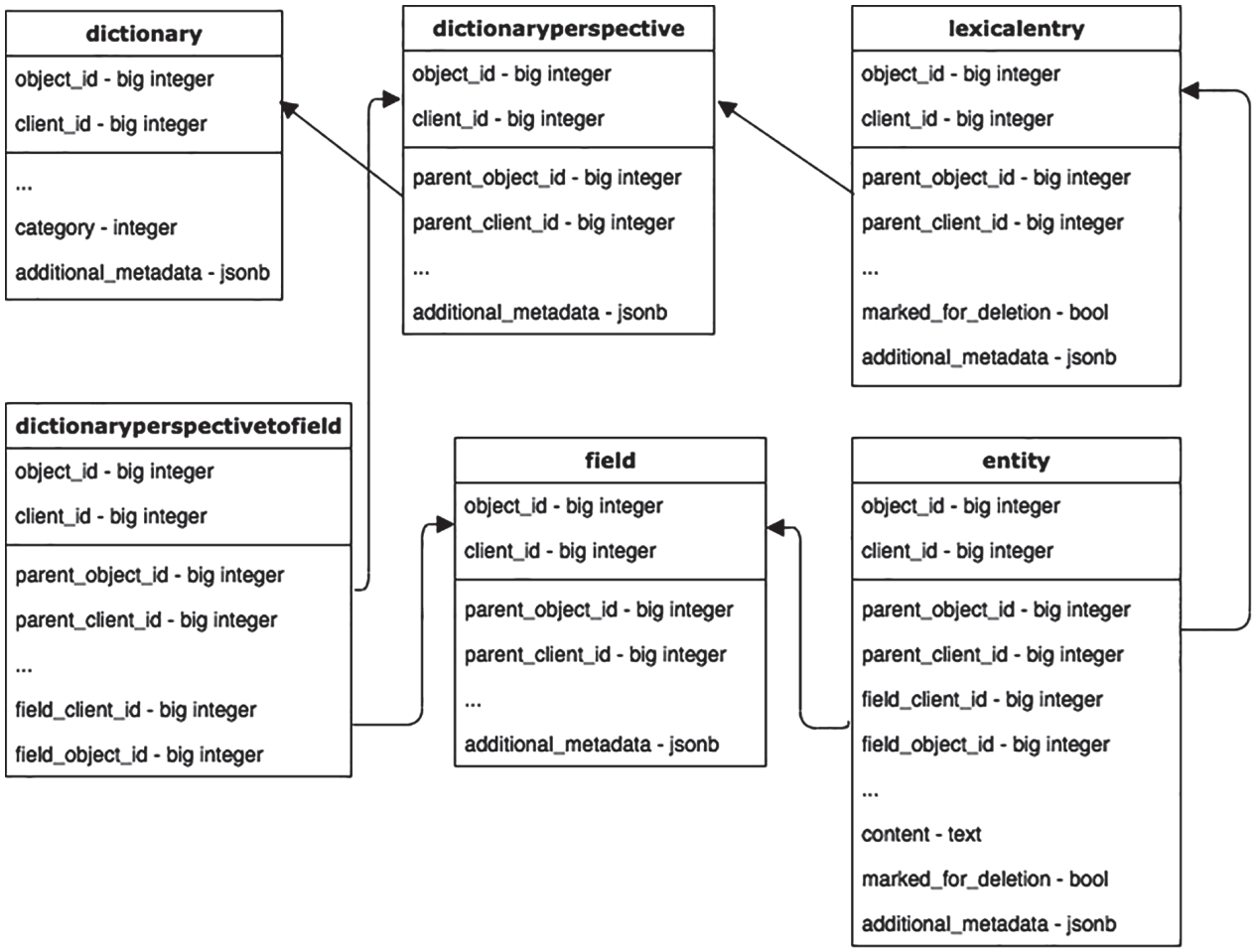


Рис. 12. Значимая часть схемы базы данных LingvoDoc.

различные ресурсы по обско-угорским языкам и этнографии). В этом проекте были собраны полевые материалы по казымскому, сургутскому и юганскому диалектам хантыйского и сосьвинскому диалекту мансийского, а также глоссированные тексты по северным, западным и восточным диалектам мансийского и северо-западным и восточным диалектам хантыйского.

• Multimedia documentation of the endangered Vasyugan and Alexandrovo Khanty dialects of Tomsk region in Siberia http://www.policy.hu/filtchenko/FTG%20ELDP%20project/audio.html под руководством А.Ю. Фильченко, в рамках которого были собраны и проанализированы восточно-хантыйские тексты.

Но, как видно, до начала нашей работы отсутствовали в открытом доступе звуковые данные по восточному диалекту мансийского языка, обскому говору северного диалекта мансийского, низямскому (промежуточного между северными и южными), салымскому (промежуточного между западным и восточными) диалектами хантыйского языка. Ранее фактически не привлекались к анализу многочисленные тексты, подготовленные в России на хантыйском и мансийском языках в XIX в. Мы нашли в архивах и библиотеках Санкт-Петербурга и Финляндии несколько десятков книг: Евангелия, богослужебная литература, словари на различных, частично уже исчезнувших диалектах хантыйского и мансийского языков. Начиная с 2012 г. наша группа провела многочисленные исследования различных диалектов обско-угорских языков: были организованы экспедиции в удаленные районы Западной Сибири, где с помощью представителей местных администраций были найдены последние носители мансийских и хантыйских диалектов. В 2012 г. С.В. Онина организовала экспедицию к последним носителям хантыйских диалектов, которые живут на реке Назым, и во время полевой работы были найдены последние носители низямского диалекта хантыйского языка, который ранее считался исчезнувшим. В 2013 г. М.К. Амелина организовала экспедицию к последним носителям юкондинского диалекта восточно-мансийского

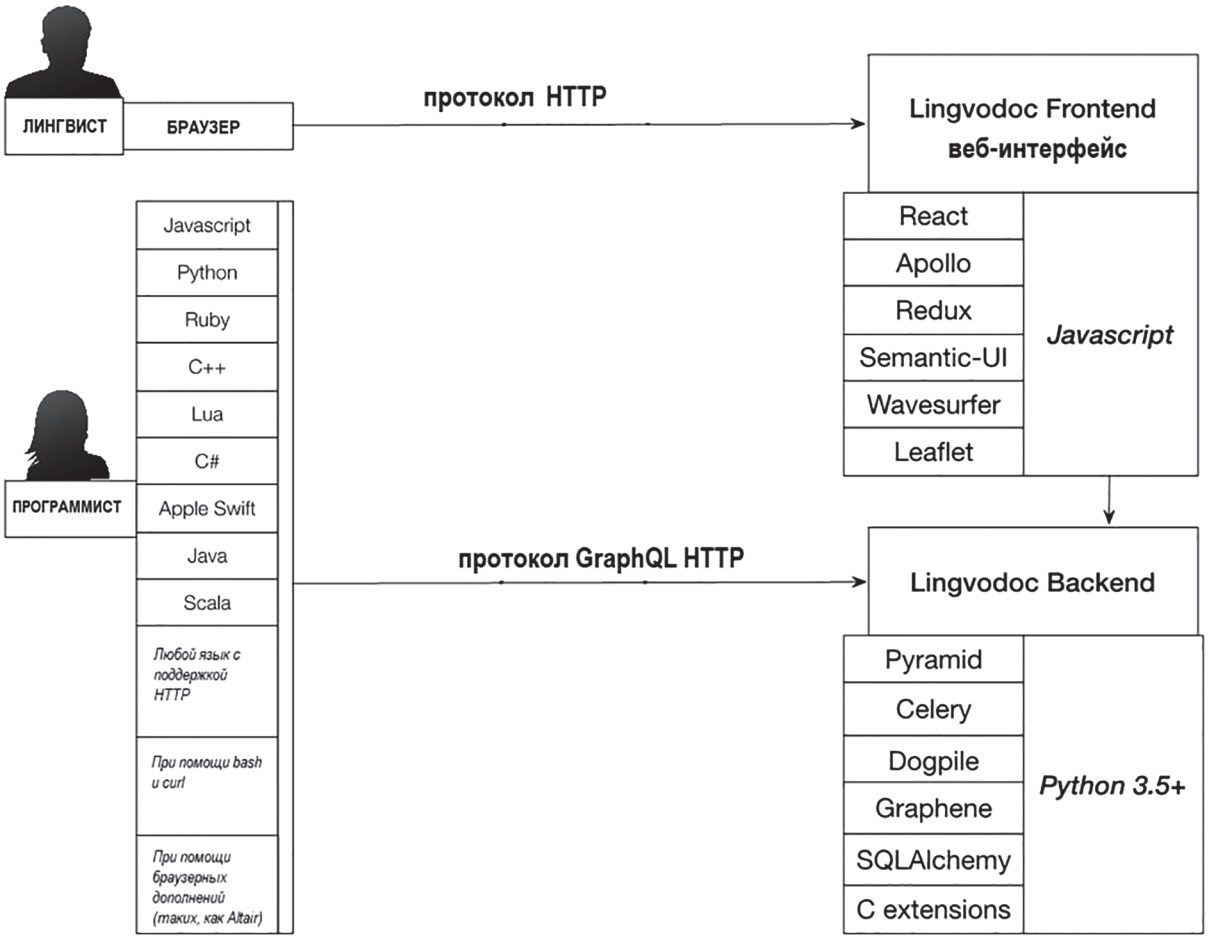


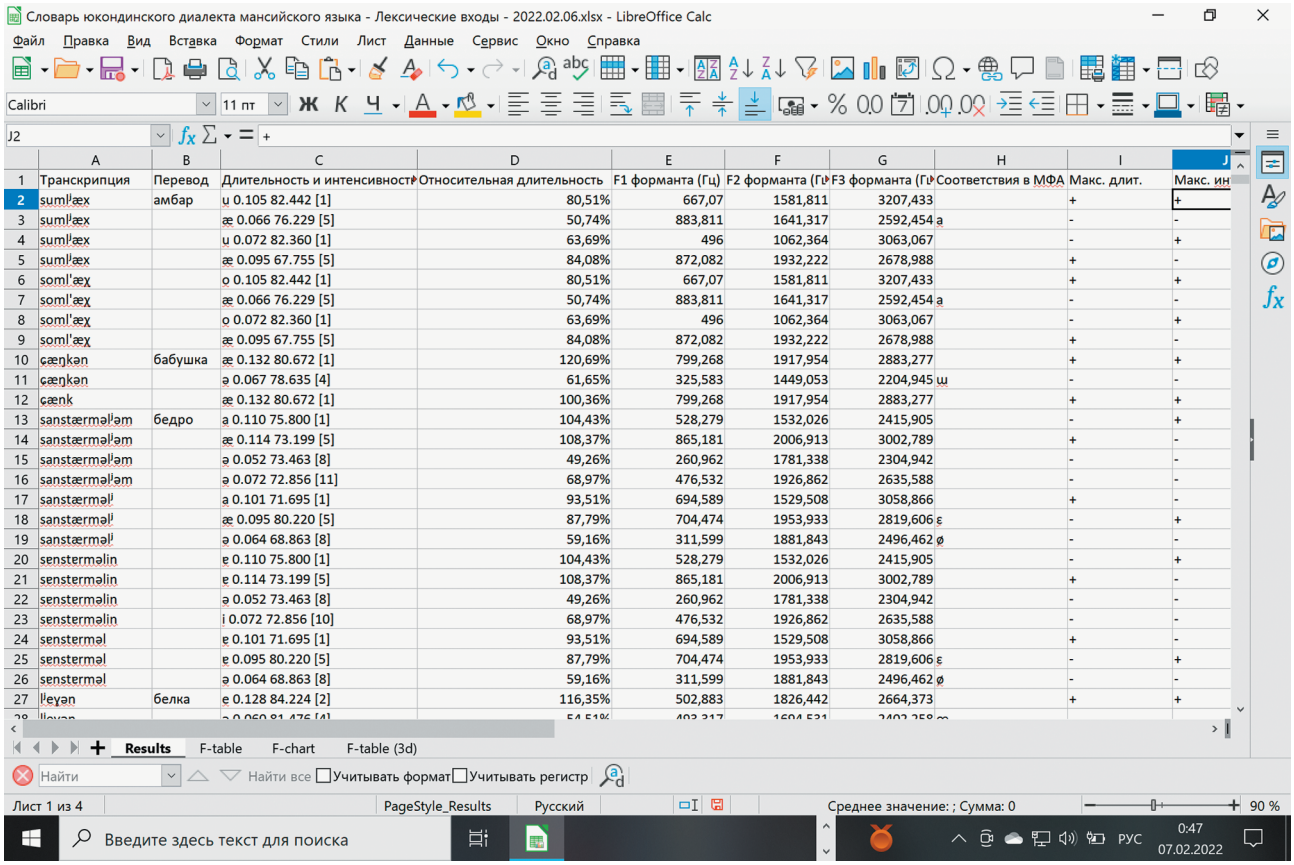
Рис. 13. Схема взаимодействия с LingvoDoc.

языка в д. Шугур Кондинского района ХМАО[1], И.А. Стенин собрал полевой материал от носителей обского мансийского диалекта, живущих в двух деревнях Октябрьского района ХМАО: Нижние Нарынкары и Перегребное.

Так, LingvoDoc позволяет каждому исследователю, имеющему полевые аудиозаписи, создать собственные мультимедийные словари, соединив в системе звук со спектрограммами Праата. Далее возможен анализ собранных данных с точки зрения экспериментальной фонетики, диалектной принадлежности, этимологии. В настоящее время это возможно делать он-лайн на сайте http://lingvodoc.ispras.ru/ (подробнее техническую информацию об этих возможностях см. выше в первой части настоящей статьи).

Эти возможности делают LingvoDoc необходимым специалистам по исчезающим языкам и диалектам, поскольку обычно в словарях этих языков приводится только транскрипция слов, которую в большинстве случаев невозможно проверить. Но, как показали наши исследования, даже в наиболее известных словарях уральских языков очень часто встречаются ошибки в транскрипциях, например, в словаре Munkácsi, Kálmán (1986), несопоставимость которого со словарем Kannisto (2015) была упомянута выше; в диалектологическом словаре селькупского языка Быконя (2005), где одно и то же слово в любом говоре может быть записано 2–3 способами на разных или даже на одной странице словаря. Часто уже нет возможности проверить, какой из вариантов транскрипции правильный, потому что носителей восточных и западных диалектов мансийского языка, южных и центральных диалектов селькупского языка уже практически нет. Программы, которые мы используем в ЛингвоДоке, позволят как будущим исследователям, так и носителям обско-угорских языков услышать, как произносилось слово на тех диалектах, которые через 10–20 лет уже исчезнут, и сравнить транскрипцию словарей с результатами, полученными после анализа звука в экспериментально-фо-

[1] Два последних носителя умерли в 2013 и 2017 г.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Транскрипция	Перевод	Длительность и интенсивност	Относительная длительность	F1 форманта (Гц)	F2 форманта (Гц	F3 форманта (Гц	Соответствия в МФА	Макс. длит.	Макс. ин
2	sumlʲæx	амбар	u 0.105 82.442 [1]	80,51%	667,07	1581,811	3207,433		+	+
3	sumlʲæx		æ 0.066 76.229 [5]	50,74%	883,811	1641,317	2592,454	a	-	-
4	sumlʲæx		u 0.072 82.360 [1]	63,69%	496	1062,364	3063,067		-	+
5	sumlʲæx		æ 0.095 67.755 [5]	84,08%	872,082	1932,222	2678,988		+	-
6	soml'æɣ		o 0.105 82.442 [1]	80,51%	667,07	1581,811	3207,433		+	+
7	soml'æɣ		æ 0.066 76.229 [5]	50,74%	883,811	1641,317	2592,454	a	-	-
8	soml'æɣ		o 0.072 82.360 [1]	63,69%	496	1062,364	3063,067		-	+
9	soml'æɣ		æ 0.095 67.755 [5]	84,08%	872,082	1932,222	2678,988		+	-
10	ɕæŋkən	бабушка	æ 0.132 80.672 [1]	120,69%	799,268	1917,954	2883,277		+	+
11	ɕæŋkən		ə 0.067 78.635 [4]	61,65%	325,583	1449,053	2204,945	ɯ	-	-
12	ɕæŋk		æ 0.132 80.672 [1]	100,36%	799,268	1917,954	2883,277		+	+
13	sanstærməlʲəm	бедро	a 0.110 75.800 [1]	104,43%	528,279	1532,026	2415,905		-	+
14	sanstærməlʲəm		æ 0.114 73.199 [5]	108,37%	865,181	2006,913	3002,789		+	-
15	sanstærməlʲəm		ə 0.052 73.463 [8]	49,26%	260,962	1781,338	2304,942		-	-
16	sanstærməlʲəm		ə 0.072 72.856 [11]	68,97%	476,532	1926,862	2635,588		-	-
17	sanstærməlʲ		a 0.101 71.695 [1]	93,51%	694,589	1529,508	3058,866		+	-
18	sanstærməlʲ		æ 0.095 80.220 [5]	87,79%	704,474	1953,933	2819,606	ɛ	-	+
19	sanstærməlʲ		ə 0.064 68.863 [8]	59,16%	311,599	1881,843	2496,462	ø	-	-
20	senstermə̆lin		e 0.110 75.800 [1]	104,43%	528,279	1532,026	2415,905		-	+
21	senstermə̆lin		e 0.114 73.199 [5]	108,37%	865,181	2006,913	3002,789		+	-
22	senstermə̆lin		ə 0.052 73.463 [8]	49,26%	260,962	1781,338	2304,942		-	-
23	senstermə̆lin		i 0.072 72.856 [10]	68,97%	476,532	1926,862	2635,588		-	-
24	senstermə̆l		e 0.101 71.695 [1]	93,51%	694,589	1529,508	3058,866		+	-
25	senstermə̆l		e 0.095 80.220 [5]	87,79%	704,474	1953,933	2819,606	ɛ	-	+
26	senstermə̆l		ə 0.064 68.863 [8]	59,16%	311,599	1881,843	2496,462	ø	-	-
27	lʲeɣən	белка	e 0.128 84.224 [2]	116,35%	502,883	1826,442	2664,373		+	+

Рис. 14. Пример таблицы с фонетическими параметрами гласных в юкондинском диалекте мансийского языка после обработки словаря в программе “Результаты анализа спектрограмм”.

нетической программе Праат. Тот факт, что каждый пользователь словаря сможет не только посмотреть картинки уже размеченных спектрограмм, но и, скачав, проверить правильность их обработки, значительно повысит надежность обработки данных и позволит создать среду, в которой возможно достижение взаимопонимания между специалистами всего мира, которые используют разные системы транскрипций. Поскольку как словари, так и программы для их обработки доступны он-лайн, становится возможным любому ученому получить доступ к материалам, и в он-лайн режиме обсудить правильность той или иной транскрипции.

Как было сказано выше, в настоящее время в ЛингвоДоке доступны 18 словарей мансийских и 32 словаря хантыйских диалектов. Каждый из доступных он-лайн словарей обско-угорских языков насчитывает 600–1000 лексем с парадигматическими формами. Каждый словарный вход содержит:

1. Начальную форму слова, которая представлена: 1) формой из словаря соответствующего диалекта (в традиционной орфографической записи), 2) фонологическую или фонетическую форму слова, 3) для словарей, материал которых собран в полевых условиях, аудиофайл с произнесением начальной формы три раза, 4) спектрограмму, созданную в Праате, содержащую данные о физических характеристиках каждого звука в слове (интенсивности, длительности, частоте, тоне), которую можно скачать, и проверить правильность проведенной обработки в Праате.

2. К каждой начальной форме, по возможности, прикреплены: парадигматические формы слова в изолированном произношении и в контекстах. Каждая из форм парадигмы представлена тем же способом, что и начальная.

3. Каждая начальная форма, по возможности, соединена этимологическими связями с родственными словами из других диалектных словарей. Их можно сделать в тех случаях, когда авторы словарей родственных диалектов дали создателю словаря согласие на соединение этимологическими связями. При нажатии на кнопку “Когнаты” можно увидеть список родственных слов из других словарей.

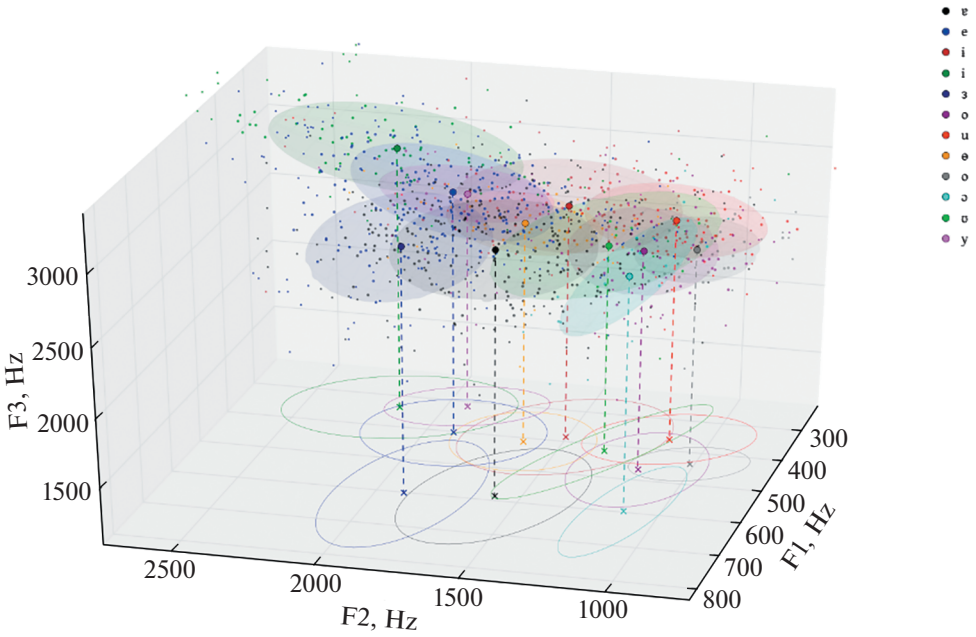


Рис. 15. Пример обработки с помощью программы “Результаты анализа спектрограмм” правильно выполненной транскрипции ваховского диалекта хантыйского языка http://lingvodoc.ispras.ru/dictionary/1230/570/perspective/1230/571/view.

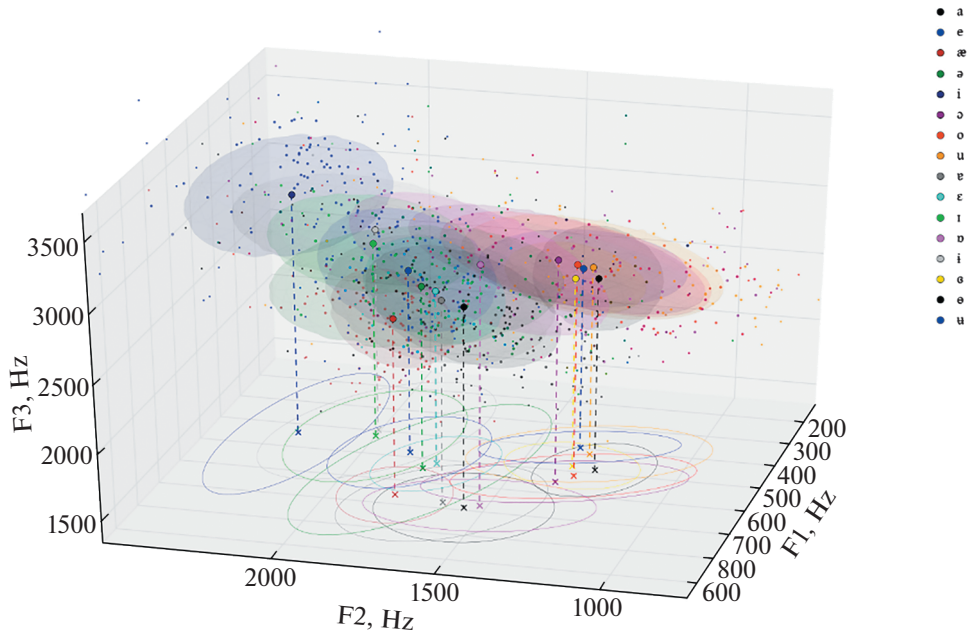


Рис. 16. Пример обработки с помощью программы “Результаты анализа спектрограмм” некорректно выполненной транскрипции юкондинского диалекта мансийского языка http://lingvodoc.ispras.ru/dictionary/1230/570/perspective/1230/571/view.

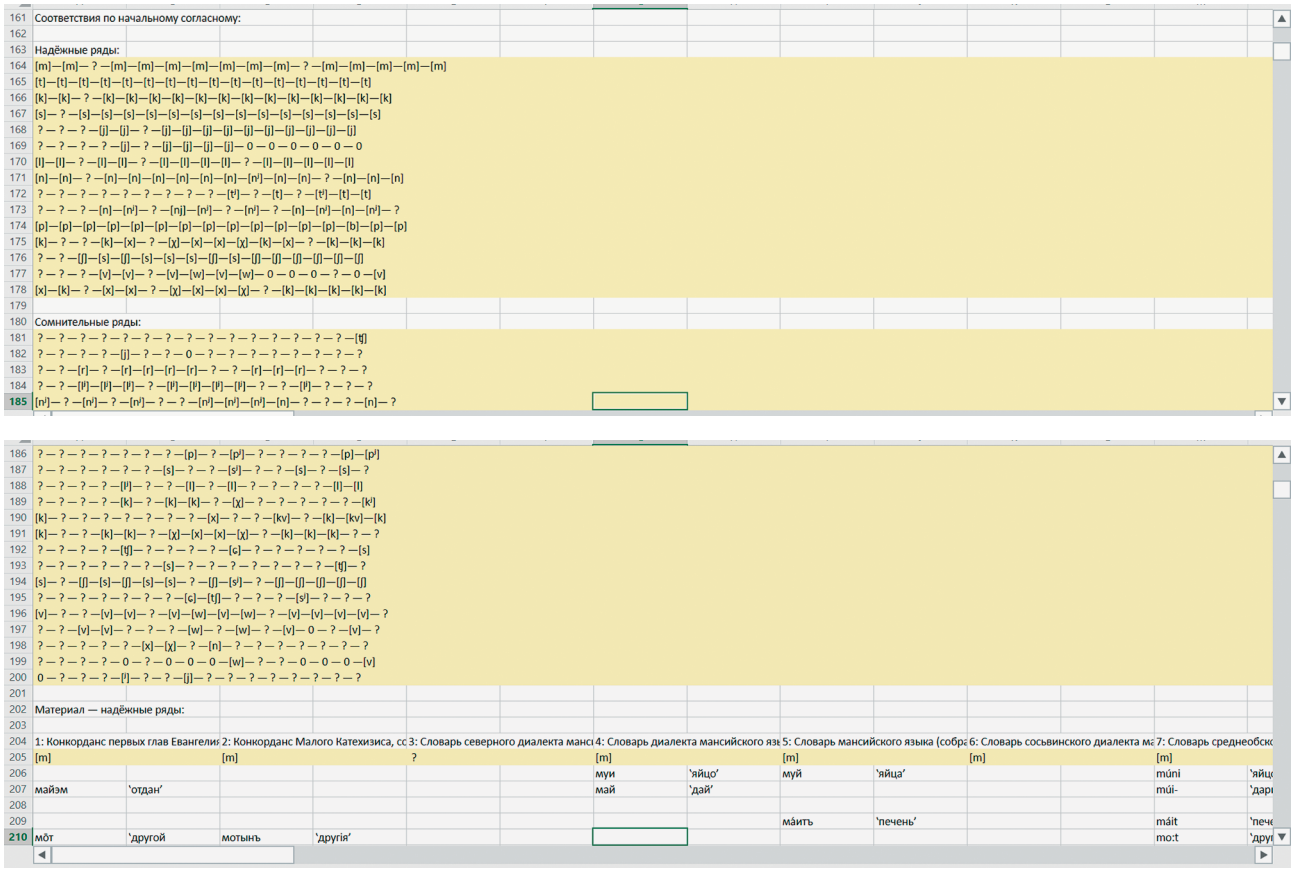


Рис. 17. Пример фрагмента автоматически полученных соответствий в мансийских диалектах: согласные в позиции начала слова.

В каждом словаре при выборе опции **“Инструменты”** можно увидеть список программ для анализа языкового материала и, в частности, выявления ошибок в его фонетической и этимологической обработке.

Программа LingvoDoc “Результаты анализа спектрограмм”, позволяющая оценить правильность транскрипции и описать системы гласных в диалектах с точки зрения экспериментальной фонетики.

На LingvoDoc есть возможность комплексного анализа фонетических характеристик гласных всех лексем из выбранного словаря, полученных в результате обработки их спектрограмм в фонетической программе Праат. Для этого надо выбрать в открытом словаре того или иного диалекта опцию Инструменты > Результаты анализа спектрограмм. Для использования этой программы в словаре должны быть загружены звуковые файлы в формате .wav и их спектрограммы, где в Праате поставлены границы отдельных звуков в формате textgrid.

Программа “Результаты анализа спектрограмм” для каждого гласного звука в выбранном словаре собирает его физические характеристики во всех произнесениях, обрабатывая спектрограммы, размеченные предварительно в фонетической программе Праат на отдельные звуки. На выходе получается таблица со списком всех физических характеристик каждого звука в множестве лексем выбранного диалекта, см. рис. 14.

При создании этой таблицы используются алгоритмы анализа интенсивности звука и формантных характеристик Праат, см. подробнее [8], и разделы Sound: To Intensity... и Sound: To Formant (burg)... в справочнике Праата, доступном на Praat’s website.

В результате работа программы “Результаты анализа спектрограмм” эта таблица Эксель с указаниями физических параметров каждого звука также преобразуется в 3D-график, построенный на основании показателей трех формант для каждого гласного звука. На графике произнесения каждого гласного оформлены как элипсы разных цветов, см. рис. 15.

Как показано на рис. 16, если транскрипция некорректная, облака формант разных гласных будут значительно пересекаться.

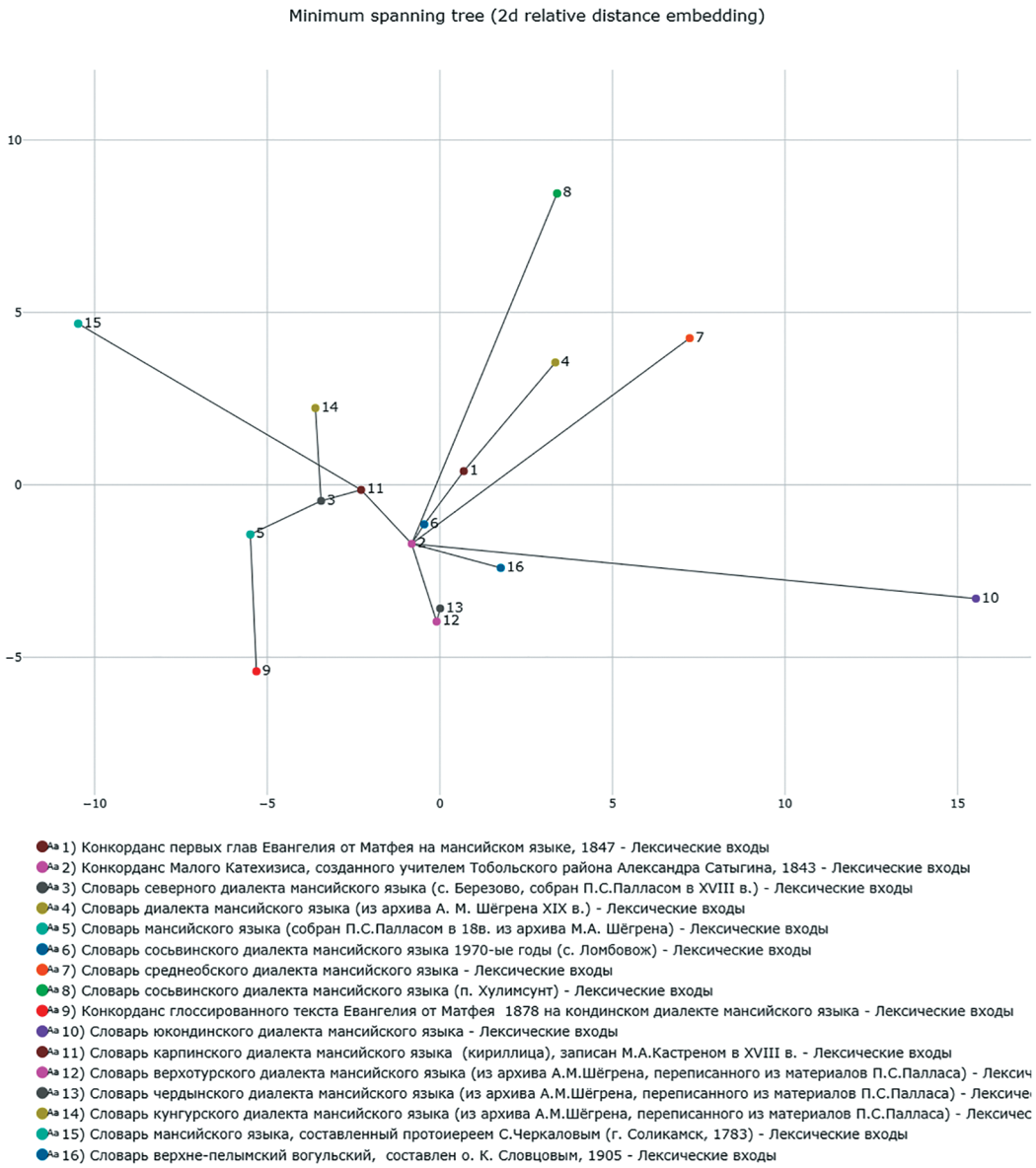


Рис. 18. Пример 2D-графика близости мансийских диалектов, полученного в программе “Анализ конатов”.

Так, обработка аудиословарей в программе “Результаты анализа спектрограмм” позволяет математически точно оценить правильность фонетической транскрипции, принятой для каждого из диалектов, и существенно уточнить ее. Далее, уже опираясь на уточненную фонетическую транскрипцию, можно перейти к следующему этапу: анализу степени близости родственных диалектов.

Этимологические программы LingvoDoc “Поиск когнатов в разных диалектах / языках”, “Анализ когнатов в разных диалектах/языках”, позволяющие уточнить системы регулярных соответствий звуков и оценить степень близости разных языков и диалектов[2].

В настоящее время на LingvoDoc представлены не только словари современных диалектов, собранные в полевых условиях, но и архивные материалы XIX в., созданные в результате деятельности Переводческой комиссии Православного Миссионерского Общества, учрежденной при Братстве Св. Гурия. Анализ и сопоставление архивных данных с современными диалектами

[2] Эти опции доступны только тем пользователям, которые либо сами создали один из словарей, либо получили права на работу с ним.

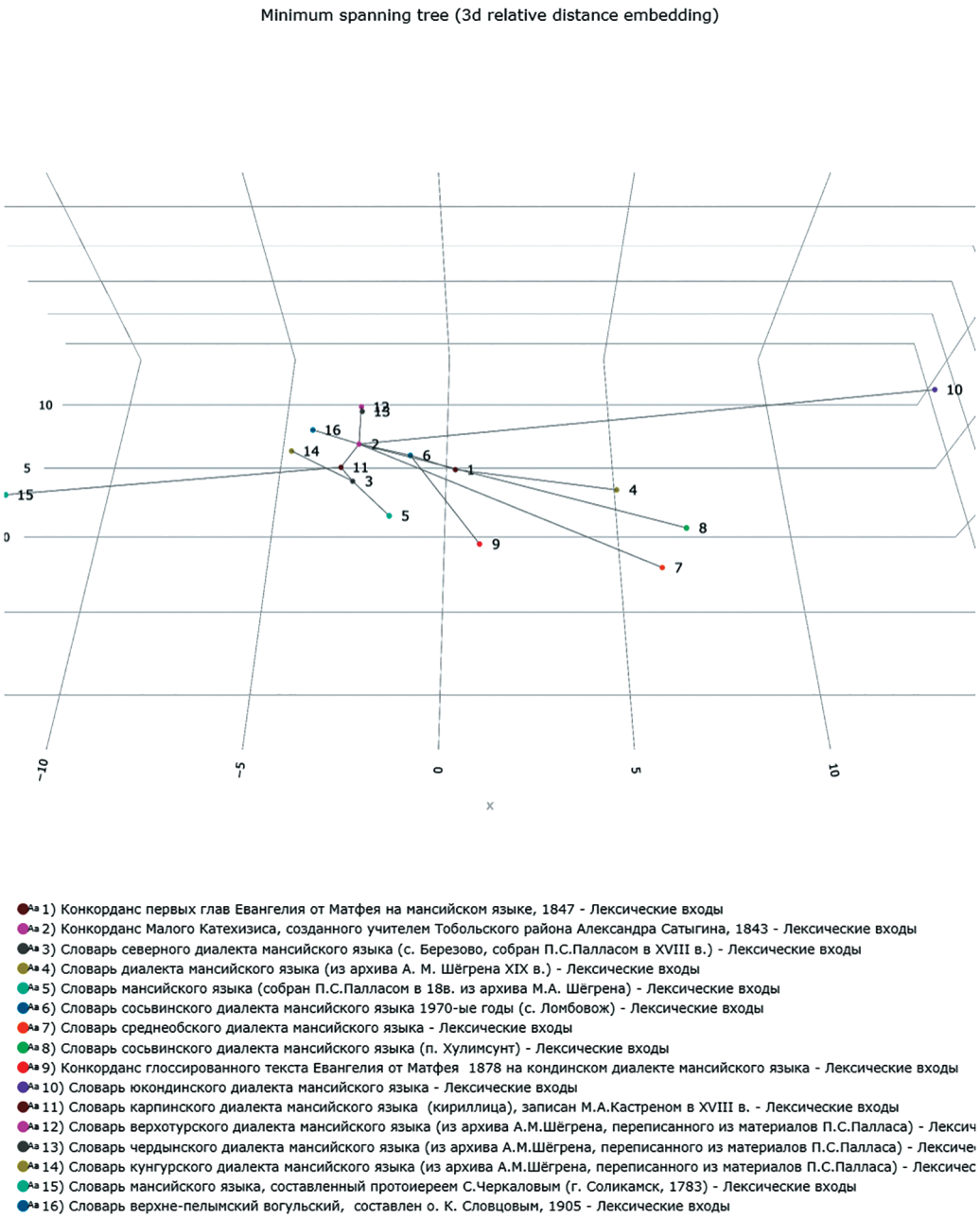


Рис. 19. Пример 3D-графика близости мансийских диалектов, полученного в программе “Анализ когнатов”.

показывают, что ошибки в рассматриваемых памятниках практически отсутствуют, они имеют регулярные соответствия с наиболее точными словарями обско-угорских языков. Это связано с тем, что, как мы знаем из истории их создания, первые книги неоднократно выверялись носителями соответствующих диалектов. Поскольку ранее эти тексты не были включены в научный оборот, то весьма важной задачей является их диалектная классификация.

1. “Фонетические соответствия”

Для автоматического проведения этого анализа на первом этапе необходимо выбрать несколько словарей родственных языков или диалектов для пословного соединения этимологическими связями с помощью разработанной нами программы “Поиск когнатов в разных диалектах/языках”. В результате работы этой программы появляется список потенциально родственных слов, состоящий в среднем из 5–8 тысяч предложений возможных когнатов в разных язы-

Compute Close

Analysis results (16 dictionaries, 1095 cognate groups and 3318 transcriptions analysed):

485 cognate groups were excluded from the analysis due to not having lexical entries in at least two selected dictionaries.

XLSX-exported analysis results

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРАФОРМ

1: ПРАЯЗЫК (0 форм = 0% от числа соотв.)
2: Конкорданс первых глав Евангелия от Матфея на мансийском языке, 1847 - Лексические входы (149 форм = 24% от числа соотв.)
3: Конкорданс Малого Катехизиса, созданного учителем Тобольского района Александра Сатыгина, 1843 - Лексические входы (70 форм = 11% от числа соотв.)
4: Словарь северного диалекта мансийского языка (с. Березово, собран П.С.Палласом в XVIII в.) - Лексические входы (90 форм = 14% от числа соотв.)
5: Словарь диалекта мансийского языка (из архива А. М. Шёгрена XIX в.) - Лексические входы (150 форм = 24% от числа соотв.)
6: Словарь мансийского языка (собран П.С.Палласом в 18в. из архива М.А. Шёгрена) - Лексические входы (248 форм = 40% от числа соотв.)
7: Словарь сосьвинского диалекта мансийского языка 1970-ые годы (с. Ломбовож) - Лексические входы (80 форм = 13% от числа соотв.)
8: Словарь среднеобского диалекта мансийского языка - Лексические входы (243 форм = 39% от числа соотв.)
9: Словарь сосьвинского диалекта мансийского языка (п. Хулимсунт) - Лексические входы (222 форм = 36% от числа соотв.)
10: Конкорданс глоссированного текста Евангелия от Матфея 1878 на кондинском диалекте мансийского языка - Лексические входы (171 форм = 28% от числа соотв.)
11: Словарь юкондинского диалекта мансийского языка - Лексические входы (211 форм = 34% от числа соотв.)
12: Словарь карпинского диалекта мансийского языка (кириллица), записан М.А.Кастреном в XVIII в. - Лексические входы (99 форм = 16% от числа соотв.)
13: Словарь верхотурского диалекта мансийского языка (из архива А.М.Шёгрена, переписанного из материалов П.С.Палласа) - Лексические входы (155 форм = 25% от числа соотв.)
14: Словарь чердынского диалекта мансийского языка (из архива А.М.Шёгрена, переписанного из материалов П.С.Палласа) - Лексические входы (146 форм = 23% от числа соотв.)
15: Словарь кунгурского диалекта мансийского языка (из архива А.М.Шёгрена, переписанного из материалов П.С.Палласа) - Лексические входы (149 форм = 24% от числа соотв.)
16: Словарь мансийского языка, составленный протоиереем С.Черкаловым (г. Соликамск, 1783) - Лексические входы (184 форм = 30% от числа соотв.)
17: Словарь верхне-пелымский вогульский, составлен о. К. Словцовым, 1905 - Лексические входы (165 форм = 27% от числа соотв.)

Соответствия по начальному гласному:
*i > ? – ? – ? – ? – ? – ? –[i]–[i]– ? – ? – ? –[i]–[i]– ? – ? –[i]
*u > [u]– ? – ? – ? –[u]– ? –[u]–[u]–[u]– ? – ? – ? – ? – ? – ? –[u]
*o > [o]–[o]– ? –[o]–[o]–[o]–[o]–[o]–[o]–[o]–[o]– ? – ? – ? –[o]–[o]
*a > [a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]–[a]
*o: > [o:]– ? – ? – ? – ? – ? – ? – ? –[o]– ? – ? – ? – ? – ? – ? – ?
*a: > [a:]– ? –[a]– ? – ? – ? – ? –[a]–[a]– ? – ? – ? – ? – ? – ? – ?
*ɤ > ? – ? – ? – ? –[e]– ? – ? – ? – ? – ? – ? – ? – ? –[i]–[e]
*œ > ? –[o]–[e]–[a]–[a]– ? –[a:]–[a]– ? –[a:]–[o]– ? –[a]–[a]–[a]–[o]
*ue > [a]– ? –[o]– ? –[o]– ? – ? –[a]–[a]–[ue]–[a]–[o]–[o]–[a]–[o]–[o]
*e > [a]– ? –[a]–[a]–[a]– ? –[a]–[a]–[a]–[o]–[a]–[a]–[a]–[a]–[u]–[a]
*oa > [a]–[a]– ? –[a]–[a]–[a:]–[a]–[a]–[a]–[a:]–[oa]–[a]–[a]–[a]–[e]–[e]

Соответствия по начальному согласному:
*m > [m]–[m]– ? –[m]–[m]–[m]–[m]–[m]–[m]–[m]– ? –[m]–[m]–[m]–[m]–[m]
*n > [n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]–[n]

Рис. 20. Фрагмент автоматической реконструкции прамансийского языка на основании сравнения 16 диалектов.

ках/диалектах, которые далее необходимо вручную утвердить как родственные или отклонить. Результат этой ручной обработки можно увидеть в каждом словаре при нажатии кнопки Когнаты.

Затем нужно открыть словарь, который будет оценен с точки зрения его места в диалектной классификации, и выбрать в меню Инструменты программу “Анализ когнатов в диалектах/языках”. В следующем меню будет возможно галочками отметить те словари, которые планируется автоматически сравнить с выбранным. В результате работы этой программы мы получаем ряды соответствий фонем в выбранном словаре звукам в других диалектах или языках в разных позициях: в начале слова, после первой согласной, после первой гласной и т.д., см. рис. 17.

2. “Диалектная классификация”

Далее для каждой пары различных фонем в одном ряду соответствий подсчитывается, сколько переходов необходимо по Международному фонетическому инвентарю для изменения фонемы X в фонему Y, каждому переходу присваивается равный вес. Таким образом, в выбранной паре диалектов или языков обсчитываются все ряды соответствий между ними и степень различия фонем в этих рядах. В результате в файле Экселя строится матрица близости всех выбранных диалектов или языков, которая отображается также на он-лайн 2D и 3D-графиках, см. рис. 18, 19.

3. Реконструкция рядов соответствий фонем и слов праязыка

Как показано ниже на рис. 20, в результате обработки набора словарей родственных языков или диалектов с помощью программы “Анализ когнатов” мы получаем систему соответствий и реконструкцию праязыковых фонем и слов.

В результате этой работы на материале полного анализа словарей мы получаем информацию о фонетической близости генетически родственных диалектов и языков между собой. В LingvoDoc для этого используются алгоритмы, построенные на основе принятого в лингвистике “принципа регулярных соответствий”, а не на поверхностном сходстве словоформ, как в настоящее время принято в большинстве проектов, посвященных определению близости родства: LingPy, EVOLAEMP. Известно, что поверхностное сходство, скорее, указывает на наличия заимствований, чем на глубокое родство, поскольку доказательством родства языков являются лишь многочисленные нетривиальные регулярные соответствия между согласными и гласными звуками. Единственный на-

дежный автоматический способ оценки степени близости родства языков – это поиск правил: рядов “регулярных соответствий”, которые преобразуют слова между двумя языками, или из прото-языка в дочерний язык, и последующий анализ этих рядов. Ранее именно таким образом работали ученые-этимологи, обрабатывали материал вручную. Теперь это можно сделать в сотни раз быстрее с помощью компьютерных программ LingvoDoc. Очень важно, что эти результаты полностью верифицируемы, поскольку в результате работы программ получается файл Экселя объемом несколько сотен страниц, в котором для каждого ряда соответствий приведены все примеры, его подтверждающие. Ранее при ручной обработке такой материал никогда не был доступен, вероятно, из-за трудоемкости его получения. Значительно более высокая степень точности этой этимологической работы в LingvoDoc связана еще с тем, что на вход этимологического анализа поступают не транскрипции, сделанные авторами словарям на слух, а непосредственно звук, и уточнение транскрипции в результате его обработки с помощью экспериментально-фонетических программ, является одним из этапов анализа.

Таким образом, становится ясно, что без возможностей LingvoDoc качественное и полностью верифицируемое описание и этимологизация обско-угорских словарей невозможны. Еще раз подчеркнем, что этот ресурс позволит и будущим исследователям получить доступ непосредственно к звуковым записям и полностью самостоятельно воспроизвести процессы 1) правильности транскрипции диалектов, 2) определения степени близости между диалектами.

Результаты, которые мы получили, привлекая значительное количество новой информации, собранной как в полевых условиях, так и в архивах по обско-угорским языкам, позволили в очень сжатые сроки новые результаты, важные как для лингвистики, так и изучения истории России, поскольку они позволяют уточнить степень генетической близости носителей разных диалектов, существовавших в течение последних 250 лет, и время распада хантыйского и мансийского праязыков на разные диалекты.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена виртуальная лаборатория ЛингвоДок, которая позволяет проводить документацию языков с помощью создания словарей любой структуры, этимологических связей между ними и программ их анализа. В ЛингвоДоке не уровне интерфейса также возможно использование результатов обработки звука в программах Элан (глоссирование звучащих текстов) и Праат (экспериментально-фонетическая обработка). Бэкенд предоставляет интерфейсы взаимодействия при помощи GraphQL HTTP API. Доступные вызовы могут быть интроспектированы стандартными утилитами работы с GraphQL и позволяют использовать данные, хранящиеся в системе для целей вычислительного анализа снаружи самой системы. Проект является открытым и лицензируется по лицензии Apache 2. В настоящее время в системе зарегистрировано более 300 активных пользователей.

Мы показали, как программы анализа можно применять к материалу словарей обско-угорских языков и получать новые значимые результаты по экспериментально-фонетическому описанию отдельных говоров, генетической близости диалектов, реконструкции праязыка.

В будущем мы планируем улучшить версию, размещаемую локально в других местах с возможностью синхронизации, расширять сообщество ученых, разрабатывающих вычислительные алгоритмы, улучшить графический интерфейс, добавить новые опции лингвистического анализа материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старостин и Бронников. Starling project. The Tower of Babel. Retrieved 05 September 2018. http://starling.rinet.ru/intrab.php?lan=en .
2. *Cavar D., Cavar M., Moe L.* The Lexicon Enhancement via the GOLD Ontology (LEGO) project. Retrieved 05 September 2018. http://lego.linguistlist.org
3. *Beermann D., Mihaylov P.* TypeCraft collaborative databasing and resource sharing for linguists. 2014. Language resources and evaluation. V 48. № 2. P. 203–225.
4. Fin-Clarin. Kielipankki (2015) – The Language Bank of Finland. Retrieved 05 September 2018. www.kielipankki.fi
5. *Druskat S., Gast V., Krause T., et al.* corpus-tools.org: An Interoperable Generic Software Tool Set for Multilayer Linguistic Corpora. Proceedings of the Tenth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC 2016). 2016. http://www.lrec-conf.org/proceedings/lrec2016/summaries/918.html
6. *Xiaoming H.* The application of queuing theory in harbour programming [J]. Journal of Qingdao university engineering & Technology edition. 1996. № 3.
7. Coubase project. Demystifying conflict resolution in Couchbase mobile. Retrieved 05 September 2018. https://blog.couchbase.com/conflict-resolution-couchbase-mobile/
8. *Boersma P., Weenink D.* Praat: doing phonetics by computer [Computer program]. Version 6.0.39, retrieved 12 April 2018. http://www.praat.org/.
9. Date 2008 – Date C. The relation database dictionary. Apress, 2008.
10. *Normanskaya Y.V.* New field and archive data on the Mansi dialects and their meaning for the Proto-Mansi reconstruction of the first syllable vowel system. Ural-Altaic Studies. 2015. № 4. P. 40–59.
11. *Munkácsi B., Kálmán B.* Wogulisches Wörterbuch / Gesammelt von Munkácsi B. Geordnet, bearb. und hrsg. von Kálmán B. Budapest. 1986.

THE SOFTWARE SYSTEM LINGVODOC AND THE POSSIBILITIES IT OFFERS FOR DOCUMENTATION AND ANALYSIS OF OB-UGRIC LANGUAGES

Y. V. Normanskaja[a,b], O. D. Borisenko[a], I. B. Beloborodov[a], and Academician of RAS A. I. Avetisyan[a]

[a] *Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Institute of Linguistics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

The LingvoDoc system (http://lingvodoc.ispras.ru) provides a service for collaborative language documentation and computations on the collected data. This software system provides GraphQL HTTP API for all the system components and allows its users to build their own extensions for data analysis or even to integrate it with their own software. Thanks to a special database and application design pattern, it is possible to construct offline applications integrated with the LingvoDoc system: these applications would need to have an internet connection only once to synchronize basic data types and for authentification purposes. The system itself allows users to construct multilayer dictionaries, attach them to the geographical map, fill documents with metadata, share access to dictionaries with other users or with everyone. The LingvoDoc system provides fine-grained access control lists for sharing, which allows to separate users into groups of dictionary editors, proofreaders and read-only users. The system also provides some computational algorithms on the stored data: phonology computations, automatic and guided deduplication inside the dictionaries etc. The system allows users to choose the dictionary structure. The system supports the following data types: text, images, sounds (wav, mp3 and flac), markups (ELAN and Praat formats), directed and undirected links between stored entities. A user can choose the most suitable format for their dictionary. Also, the system provides ELAN corpora storage, viewer and processing. In LingvoDoc there are 13 programs made for authors of the dictionary (only 4 of them are available for all users of the system). These programs analyze language data from phonetical, morphological and etymological point of view. This analysis previously was performed manually by linguists. Our programs allows do it tens and sometimes hundreds times faster. This paper presents the documentation and an analysis of Ob-Ugric languages using the LingvoDoc system.

Keywords: software system, documentation and analysis of languages, data analysis.

EDN: UBECTH
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 83–87

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

© 2022 г. член-корреспондент РАН И. Б. Петров[1,*], А. В. Васюков[1,], К. А. Беклемышева[1], Е. С. Онучин[1], Н. А. Товарнова[1]**

Поступило 09.02.2022 г.
После доработки 27.02.2022 г.
Принято к публикации 10.03.2022 г.

В работе представлены результаты численного моделирования движения, деформирования и разрушения тонкой нити под действием поперечной ударной нагрузки. Для описания нити использованы уравнения теории Рахматулина. Для решения системы динамических уравнений применяется конечно-разностный численный метод. Параметрическое обеспечение использованной модели может быть получено непосредственно из экспериментов по ударному нагружению, что позволяет учесть скоростные зависимости параметров материалов. В работе представлены результаты расчетов воздействия ударной нагрузки на арамидные нити. Рассмотрены режимы нагружения как без обрыва нити, так и с ее разрушением. Приведено прямое сравнение расчетных и экспериментальных данных, показано хорошее соответствие между ними. Полученная валидированная численная модель отдельной нити может быть в дальнейшем использована для описания ткани как системы взаимодействующих нитей.

Ключевые слова: тонкая нить, ударная нагрузка, поперечный удар, скорость поперечной волны, разрушение, численное решение

DOI: 10.31857/S2686954322030067

ВВЕДЕНИЕ

Гибкие тканевые защитные экраны активно используются во многих областях техники, в том числе они являются штатной составляющей защитных экранов космических аппаратов, обеспечивающих безопасность пилотируемых станций. Традиционная конструкция защиты на сегодня следует исходным идеям Ф. Уиппла [1] и состоит из трех слоев. Первый слой выполнен из металла и обеспечивает дробление микрометеоритов и космического мусора, превращая сосредоточенный удар крупной высокоскоростной частицы в воздействие облака мелких осколков, распределенное во времени и пространстве. Второй промежуточный слой выполнен из тканевых материалов, он поглощает часть энергии удара и этим дополнительно снижает тепловую и силовую нагрузку. Третьим слоем является непосредственно защищаемая стенка, которая должна уцелеть.

Оптимизация тканевой составляющей защитного экрана является актуальной задачей общего повышения безопасности пилотируемых космических аппаратов. Кроме того, в последнее время дополнительный интерес к тканевым экранам вызван развитием идей использования в составе крупномасштабных космических аппаратов трансформируемых модулей с гибкими стенками. Методы защиты гибких модулей от ударов микрометеоритов и космического мусора являются открытой инженерной задачей [2]. Использование традиционных конструкций защитных экранов с жесткой первой стенкой для гибких модулей малореально, что вызывает активный поиск новых идей [3].

Для быстрых оценок воздействия поперечного удара на тканевые конструкции традиционно используется теория о поперечном ударе по тонкой нити, основанная на работах Рахматулина [4–6] и Смита [7, 8]. В рамках данной теории нить принимается тонкой, в ней действует только сила натяжения, процессы в поперечном сечении нити не рассматриваются. Поперечный удар по такой нити приводит к формированию в ней продольной и поперечной волн. Нить под действием такой нагрузки приобретает типичную V-образную форму, приведенную на рис. 1. Данная форма сохраняется до момента отражения волн от точек за-

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: petrov@mipt.ru*
***E-mail: a.vasyukov@phystech.edu*

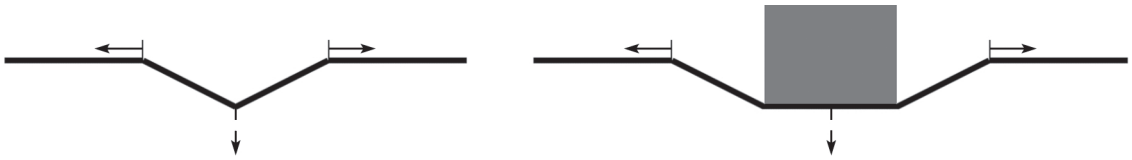


Рис. 1. Форма нити при ударе с постоянной скоростью. Точечный удар (слева) и удар массивным ударником (справа). Пунктирная стрелка показывает направление удара. Сплошными стрелками показаны направления распространения поперечных волн.

крепления нити или до начала процессов разрушения нити.

В классической теории получены важные соотношения (1–3), широко используемые в инженерной практике [9], которые связывают скорость продольной волны C_p, скорость поперечной волны C_s, скорость ударника V, деформацию в нити за продольной волной ε.

$$C_s = 0.8C_p^{1/3}V^{2/3}, \tag{1}$$

$$V = C_p\sqrt{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} - \varepsilon^2}, \tag{2}$$

$$C_s = C_p(\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} - \varepsilon). \tag{3}$$

Данная простая форма записи этих соотношений справедлива только для случаев, в которых нить изначально недеформирована, в ходе всего процесса выполнено условие $C_s \ll C_p$, нить можно принять бесконечно длинной, а скорость ударника постоянной. Однако эти ограничения выполнены для большого количества практически значимых постановок.

Следует отметить, что простые соотношения классической теории не всегда позволяют описать все эффекты, наблюдаемые на практике. Так, некоторые работы сообщают, что отличия экспериментальных данных и оценок по приведенным выше формулам могут достигать 40% [10]. Это вызывает развитие моделей, вводящих учет различных факторов, таких как микроструктура нити и волокон [11, 12]. Также многие наблюдаемые эффекты, оказывается, возможно объяснить, оставаясь в рамках положений классической теории, но решая исходную систему уравнений динамики нити для конкретного случая, а не используя типовые соотношения (1–3). Этому подходу следуют, например, публикации [13, 14]. Данная работа также остается в рамках классической теории Рахматулина, но использует численное решение исходной системы уравнений.

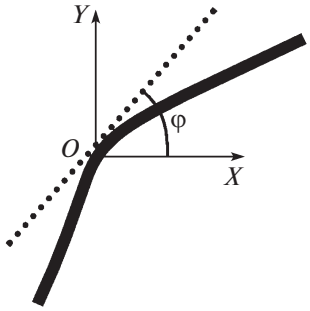


Рис. 2. Участок нити и используемые обозначения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В данной работе используется исходная система уравнений из [4–6]. Движение нити описывается следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial (T\cos\varphi)}{\partial s_0} + \rho_0 P\sin\varphi \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial (T\sin\varphi)}{\partial s_0} + \rho_0 P\cos\varphi \end{cases} \tag{4}$$

Для случая удара с постоянной скоростью система уравнений принимает следующий вид [4]:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_0}\left(\dfrac{T}{1+\varepsilon}\left(1 + \dfrac{\partial x}{\partial s_0}\right)\right) \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_0}\left(\dfrac{T}{1+\varepsilon}\dfrac{\partial y}{\partial s_0}\right) \end{cases} \tag{5}$$

В уравнениях (4) и (5) используются следующие обозначения: ρ_0 – плотность материала нити, которая принимается постоянной, T – натяжение нити, P – внешняя поперечная нагрузка, приложенная к нити, ε – деформация нити, s_0 – расстояние вдоль нити, $(x; y)$ – пространственные координаты, φ – угол между касательной к нити и осью OX. Введенная система координат показана на рис. 2, сплошной линией показан сегмент нити, пунктиром – касательная.

Предположение о постоянной скорости удара используется в силу того, что рассматривается массивный ударник, торможением которого за время взаимодействия с одиночной нитью можно пренебречь. Для численного решения приведенной системы используется конечно-разностная схема второго порядка, описание которой приведено в [15].

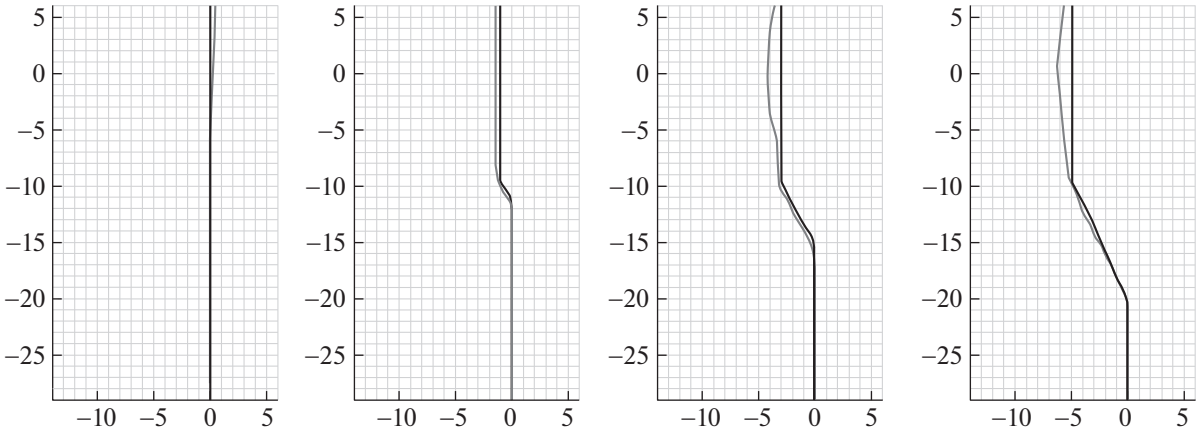


Рис. 3. Сопоставление расчетов и экспериментов, скорость удара 197 м/с. Между изображениями 10 мкс. По осям пространственные координаты в миллиметрах. Черным показана расчетная форма нити, серым – аппроксимация участка нити, зафиксированного камерой. Край ударника соприкасается с нитью в точке (0; −10), ударник движется влево.

Отдельно следует рассмотреть вопрос параметрического обеспечения данной модели. Для описания нити требуются ее плотность, модуль Юнга и предел прочности. Плотность не представляет сложностей, в отличие от упругих и прочностных параметров. Для материалов традиционно известны параметры, полученные из статических испытаний. Однако статические значения параметров могут сильно отличаться от динамических, которые материал проявляет при действии ударной нагрузки. Так, по данным работы [16] для Кевлара 49 модуль Юнга и предел прочности меняются более чем на 30% в относительно небольшом диапазоне скоростей деформации.

Для оценки модуля Юнга в интересующем диапазоне скоростей может быть использовано соотношение (1). На начальном этапе удара оно выполняется с хорошей точностью, что позволяет по наблюдаемой в эксперименте скорости поперечной волны и известной скорости ударника получить значение для продольной скорости звука в материале, а из него – динамический модуль Юнга. Следует отметить, что получение значения с высокой точностью таким образом затруднительно, так как модуль Юнга входит в соотношение с малым показателем степени. Тем не менее оценка таким образом может быть получена. Предел прочности может быть найден из решения коэффициентной обратной задачи при наличии достаточного количества экспериментальных данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для валидации использованной модели и метода были взяты экспериментальные данные по материалам публикации [17], которые содержат результаты по воздействию ударной нагрузки на арамидные нити в диапазоне скоростей 200–510 м/с. Среди данных есть постановки как с разрушением нитей, так и с деформированием без обрыва.

Плотность нитей составляет 1440 кг/м^3. Динамический модуль Юнга по данным экспериментов может быть оценен как 80 ГПа. Для предельного удлинения при разрушении было взято значение 5%.

Для валидации были использованы эксперименты со скоростями удара 197 и 497 м/с, для которых доступны подробные временные картины формы нити при ее деформировании и разрушении. На рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов и их сравнение с экспериментами.

На рис. 3 показаны результаты для удара со скоростью 197 м/с. Исходные экспериментальные данные с покадровым представлением скоростной съемки могут быть найдены в [17]. В данной работе используется поточечно заданная аппроксимация участка нити, зафиксированного камерой. Этот участок на рисунке изображен серой линией. Черным на тех же графиках показана форма нити, полученная в результате расчета в те же моменты времени. В данном режиме разрушения нити не наблюдалось.

Получено хорошее совпадение формы нити, что говорит об адекватности использованных модели и метода. Можно отметить, что в начальный момент времени в эксперименте нить расположена не идеально вертикально, что отличается от постановки расчета. Однако этот факт не сказывается на основном процессе деформирования, в котором экспериментальная и расчетная форма нити совпадают.

Также следует отметить, что в эксперименте наблюдается заметный отскок нити вперед от ударника, который виден как отклонение формы нити от вертикальной в центральной части ударника (около нулевого значения по простран-

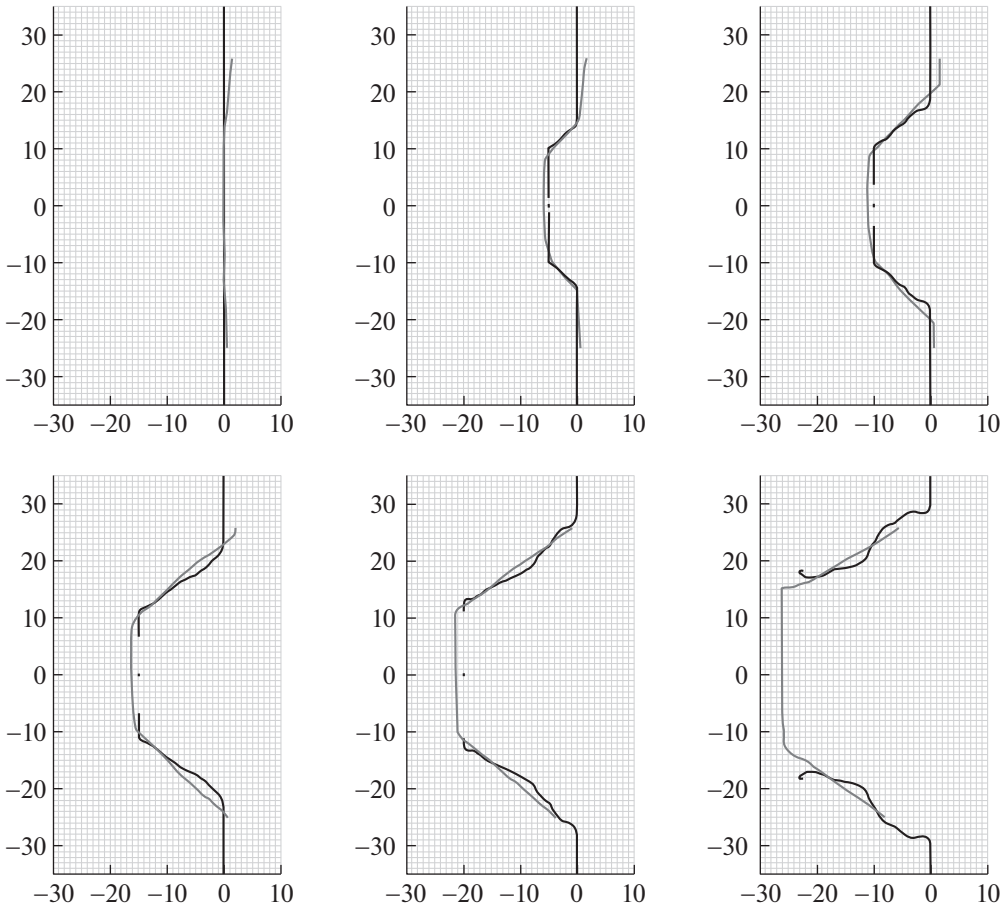


Рис. 4. Сопоставление расчетов и экспериментов, скорость удара 497 м/с. Между изображениями 10 мкс. По осям пространственные координаты в миллиметрах. Черным показана расчетная форма нити, серым – аппроксимация участка нити, зафиксированного камерой. Край ударника соприкасается с нитью в точке (0; −10), ударник движется влево.

ственной оси *OY*). Этот эффект известен, описан в [10], ожидаем в некоторых режимах деформирования и связан с процессами на толщине нити, которые не входят в модель, использованную в данной работе. Однако наличие данных эффектов не сказывается на движении основной части нити.

На рис. 4 показаны результаты для удара со скоростью 497 м/с, для которого наблюдается разрушение нити. В данном случае серым показан общий контур разрушаемой нити по данным эксперимента, который является огибающей всех ее фрагментов. Это связано с тем, что разрешение скоростной камеры не позволяет точно зафиксировать точку и момент обрыва [17].

Видно, что результаты расчета точно совпадают с данными эксперимента первые 40 мкс процесса, а на завершающей стадии возникает визуально заметное различие в форме фрагментов нити. Это обусловлено математической идеальностью закрепления концов нити в расчете, что приводит к отражению волны разгрузки, образующейся при разрыве нити, от точек закрепления. В эксперименте граничные условия неидеальны, проскальзывание в точке закрепления сглаживает форму нити. При этом общее положение нити и ее фрагментов после разрушения в расчете описаны адекватно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено численное моделирование поперечного удара по арамидным нитям в диапазоне скоростей 200–510 м/с. Выполнено прямое сравнение расчетных и экспериментальных данных как для деформирования без разрушения, так и для постановок с обрывом нитей. Получено хорошее соответствие экспериментов и расчетов по форме деформированной нити (скорости поперечной волны) и по описанию разрыва нити при скорости соударения 500 м/с. Таким образом, математическая модель нити валидирована с использованием экспериментальных результатов в данном скоростном диапазоне.

В дальнейшем данная модель одиночной нити может быть использована при разработке модели гибкого тканевого защитного экрана, состоящего

из дискретных нитей. При этом дополнительного исследования потребуют процессы межслойного взаимодействия элементов экрана и ударно-волновые процессы, протекающие на толщине многослойных тканевых пакетов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-29-17027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whipple F.L.* Meteorites and Space Travel // Astronomical Journal. 1947. № 52. P. 131.
2. *Buslov E.P., Komarov I.S., Selivanov V.V., Titov V.A., Tovarnova N.A., Feldstein V.A.* Protection of Inflatable Modules of Orbital Stations Against Impacts of Particles of Space Debris // Acta Astronautica. 2019. № 163. P. 54–61.
3. *Kim Y.H., Choi C.H., Kumar S.K.S., Kim C.G.* Behavior of Dragon Skin Flexible Metal Bumper under Hypervelocity Impact // International Journal of Impact Engineering. 2019. № 125. P. 13–26.
4. *Rakhmatulin H.A.* Oblique Shock with a Great Velocity on a Flexible String in Presence of Friction // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1945. V. 9. № 6. P. 449–462.
5. *Rakhmatulin H.A.* On the Shock of a Flexible String // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1947. V. 11. № 3. P. 379–382.
6. *Rakhmatulin H.A.* Transverse Shock of a Flexible String by a Body of a Given Shape // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1952. V. 16. № 1. P. 23–34.
7. *Smith J.C., McCrackin F.L., Schiefer H.F.* Stress-Strain Relationships in Yarns Subjected to Rapid Impact Loading: Part V: Wave Propagation in Long Textile Yarns Impacted Transversely // Textile Research Journal. 1958. V. 28. № 4. P. 288–302.
8. *Smith J.C., Blandford J.M., Schiefer H.F.* Stress-Strain Relationships. in Yarns Subjected to Rapid Impact Loading: Part VI: Velocities of Strain Waves Resulting from Impact // Textile Research Journal. 1960. V. 30. № 10. P. 752–760.
9. *Sockalingam S., Chowdhury S.C., Gillespie J.W.Jr., Keefe M.* Recent advances in modeling and experiments of Kevlar ballistic fibrils, fibers, yarns and flexible woven textile fabrics – a review // Textile Research Journal. 2017. V. 87. № 8. P. 984–1010.
10. *Walker J.D., Chocron S.* Why Impacted Yarns Break at Lower Speed Than Classical Theory Predicts // Journal of Applied Mechanics. 2011. V. 78. № 5. 051021-4.
11. *Bazhenov S.L., Dukhovskii I.A., Kovalev P.I., Rozhkov A.N.* The Fracture of SVM Aramide Fibers upon a High-Velocity Transverse Impact // Polymer Science Ser. A. 2001. V. 43. № 1. P. 61–71.
12. *Song B., Lu W.Y.* Effect of twist on transverse impact response of ballistic fiber yarns // International Journal of Impact Engineering. 2015. № 85. P. 1–4.
13. *Chocron S., Kirchdoerfer T., King N., Freitas C.J.* Modeling of Fabric Impact with High Speed Imaging and Nickel-Chromium Wires Validation // Journal of Applied Mechanics. 2011. V. 78. № 5. 051007-1.
14. *Field J.E., Sun Q.* A high speed photographic study of impact on fibres and woven fabrics // SPIE Proceedings: 19th International Congress on High-Speed Photography and Photonics. 1991. № 1358. P. 703–712.
15. *Vasyukov A.V., Elovenkova M.A., Petrov I.B.* Modeling a Thin Fiber Deformation and Destruction under a Dynamic Load // Mathematical Models and Computer Simulations. 2021. V. 13. № 1. P. 60–65.
16. *Zhu D., Mobasher B., Rajan S.D.* Dynamic Tensile Testing of Kevlar 49 Fabrics // Journal of Materials in Civil Engineering. 2011. V. 23. № 3. P. 230–239.
17. *Vasilchenko L.B., Onuchin E.S., Orlov D.A., Tovarnova N.A.* Experimental Study of Fabric Dynamics Under Impact // Kosmonavtika i Raketostroenie. 2021. V. 123. № 6. P. 58–63.

ON NUMERICAL MODELING OF FIBER DESTRUCTION UNDER IMPACT LOAD

Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov[a], A. V. Vasyukov[a], K. A. Beklemysheva[a], E. S. Onuchin[a], and N. A. Tovarnova[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

The paper presents the results of numerical simulation of the motion, deformation and destruction of a thin fiber under the action of a transverse shock load. The equations of Rakhmatulin's theory are used to describe the fiber. The finite-difference numerical method is used to solve the system of dynamic equations. The parameters for the model can be obtained directly from experiments on impact loading. This makes possible to take into account the dependence of material properties from a strain rate. The paper presents the results of calculations of the impact load on aramid fibers. The loading modes without fiber breakage and with fiber destruction are considered. A direct comparison of the numerical and experimental data is presented. A good agreement between them is demonstrated. The resulting validated numerical model of a single fiber can be further used to describe the fabric as a system of interacting fibers.

Keywords: thin fiber, impact load, transverse load, transverse wave speed, destruction, numerical modeling

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” – 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлегией, повторно не рассматриваются.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954322030109

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/ или направляются в редакцию по электронной почте doklady_mathematics@mail.ru.

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитированную литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

Для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

Для периодических изданий: фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикации и фальсификации данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте https://link.springer.com/ (для англоязычных журналов) и https://elibrary.ru (для русскоязычных журналов).

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2022 г. Академик РАН В. П. Иванов[1,*], Г. В. Сидоров[2,]**

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

**E-mail: ivanov@niisi.ras.ru*

***E-mail: sidorov@msu.su*

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

Ключевые слова: необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов С.М., Петров В.С.* Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

THE TITLE OF ARTICLE

© 2022 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov[a], G. V. Sidorov[b]

[a]Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

[b]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

• Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc

• Авторский договор для английской версии

https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.