СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2022

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 3–16

УДК 532.5: 531.3: 576.72

КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОРТИРОВКИ КЛЕТОК В ПЛОСКОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОГО РАСХОЖДЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ, ЗАНЯТЫХ КЛЕТКАМИ ДВУХ РАЗНЫХ ТИПОВ

© 2022 г. С. А. Логвенков[a,b,]*, А. А. Штейн[b,]**

[a] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Россия, Москва*

[b] *МГУ им. М.В. Ломоносова , Научно-исследовательский институт механики, Россия, Москва*

**E-mail: logv@bk.ru*

***E-mail: stein.msu@bk.ru*

Поступила в редакцию 07.11.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

В агрегатах, образованных клетками разных типов, наблюдается явление их сортировки: в результате клеточных взаимодействий формируются структуры, в которых клетки одного типа могут образовывать компактную массу, окруженную клетками другого типа. Физические механизмы, лежащие в основе процесса сортировки, до сих пор остаются предметом обсуждения. Нами была ранее предложена континуальная модель биологической сплошной среды, образованной двумя активно взаимодействующими клеточными фазами и жидкостью. На основе этой модели была рассмотрена модельная задача о перераспределении клеток двух типов, заполняющих бесконечный плоский слой, в предположении, что континуумы, моделирующие две клеточные популяции, ограничены общей внешней границей. В предлагаемой работе поставлена и исследована аналогичная задача с учетом возможного относительного перемещения поверхностей, ограничивающих клетки разных типов. Такая постановка позволяет описывать образование и распространение фронтов, разделяющих области, различающиеся концентрациями клеточных фаз. Изучено поведение решений в зависимости от безразмерных параметров, характеризующих активные межклеточные взаимодействия. Численно проанализировано участие этих механизмов в формировании новых клеточных структур. Показано, что в широком диапазоне параметров клетки с более сильными стягивающими активными взаимодействиями стремятся занять центральную область, вытесняя на периферию клетки, обладающие более слабыми стягивающими взаимодействиями. Новая постановка физически более адекватна и позволяет расширить диапазон параметров, в котором достигается стабильный результат.

Ключевые слова: клеточные системы, активные среды, биологическое формообразование

DOI: 10.31857/S0568528122030094

Формирование полей механических напряжений – необходимое условие нормального развития зародышей животных [1–3]. Важнейшим фактором возникновения и эволюции полей механических напряжений в биологических средах являются активные механические взаимодействия клеток между собой и с внеклеточными составляющими биологической среды. Активные механические напряжения играют существенную роль в управлении движением клеток, в частности эмбриональных на ранней стадии развития, что приводит к формированию структур, которые в дальнейшем трансформируются в ткани и органы.

С активными межклеточными взаимодействиями связано явление сортировки клеток в клеточных агрегатах, полученных перемешиванием клеток разных тканей. При сортировке происходит пространственное разделение клеток разных типов. Например, при перемешивании клеток двух разных эмбриональных тканей позвоночных может наблюдаться формирование клеточной структуры, характеризуемой образованием компактной массы клеток одного типа, окруженной слоем клеток другого типа. Наблюдаются и более сложные случаи пространственного разделения клеток [4–7]. Физические процессы, лежащие в основе процесса сортировки клеток, до сих пор остаются предметом обсуждения.

Первые результаты решения задачи о сортировке двух разных типов клеток были получены с использованием дискретных моделей. В их числе модели Поттса [8–11], в которых эволюция клеточной системы рассматривается как результат случайного процесса, направленного на минимизацию энергии, учитывающей различные механизмы взаимодействия между соседними клетками. В другой группе работ [12–15] дискретное моделирование осуществлялось на основе представления клеток многоугольниками.

Недостатком моделей первого типа является отсутствие ясного физического смысла у рассматриваемого случайного процесса изменения конфигурации системы. Кроме того, в рамках этих моделей нет возможности формулировать постановки задач с граничными условиями на силы и перемещения, поскольку силовые взаимодействия учитываются только через изменение энергии. Возможность применения моделей второй группы ограничена тем, что рассматривается равновесие сил, действующих только в поверхностном слое клетки. Описание других моделей, использующих близкие подходы и страдающих сходными дефектами, можно найти в [6, 7, 16–18].

Примеры континуального моделирования сортировки клеток немногочисленны. По большей части, описание клеточной динамики ограничивается постулированием диффузионных уравнений для объемных концентраций клеток [19, 20]. При этом потоки компонентов определяются соотношениями, учитывающими помимо эффективной диффузии, соответствующей случайным клеточным блужданиям, также активную нелокальную составляющую, которая интерпретируется как проявление активных взаимодействий, связанных с межклеточной адгезией (сцеплением поверхностей клеток посредством специализированных молекул). Используемые соотношения обосновываются рассмотрением баланса адгезионных сил, действующих на клетки; при этом напряжения в среде не вводятся и влияние напряжений в самих клетках на соседние клетки не рассматривается.

В работах [21, 22] предложено более корректное с точки зрения механики описание движения клеток: клеточные среды рассматриваются как две идеальные жидкости с одинаковым давлением, пропорциональным сумме плотностей клеток. В результате для этих плотностей получается система двух уравнений параболического типа с нелинейным коэффициентом диффузии. При решении задач в рамках упомянутых редуцированных континуальных моделей, в конце концов сводящихся к диффузионным, в [19, 21, 22] используется условие периодичности на границах рассматриваемой фиксированной области, которое не имеет отчетливого биологического смысла. Использование граничных условий, традиционных для задач механики, оказывается невозможным в рамках диффузионного приближения, поскольку при этом игнорируется связь потоков с параметрами, характеризующими развиваемые клетками усилия и напряженное состояние среды.

Общий подход к моделированию процессов в механически активных клеточных средах, основанный на применении методов механики многофазных сред, предложен в наших работах и наиболее полно сформулирован в [23]. В отличие от всех вышеупомянутых работ, рассмотрение основано на непосредственном учете реальных механизмов взаимодействий, действующих в клеточных системах. В рамках такого подхода в работе [24] разработана модель биологической среды, образованной клетками различных типов. В модели учитываются активные взаимодействия как между клетками внутри одной клеточной популяции, так и между клетками разных популяций. Допускается как локальная, так и нелокальная зависимость активных напряжений от характеризующих среду параметров. В [24] решена модельная задача об эволюции первоначально однородной смеси клеток двух типов в бесконечном плоском слое. На этом примере было показано, что разработанная модель способна описать явление сортировки как результат различий в значениях параметров, определяющих клеточную активность.

Задача о сортировке клеток в плоском слое решалась в [24] в предположении, что обе клеточные фазы в процессе разделения заполняют всю область решения. В настоящей работе аналогичная задача решена и исследована с учетом возможности независимого перемещения поверхностей, ограничивающих области, занятые клетками разных типов. Такая принципиально новая постановка, потребовавшая сформулировать условия на поверхностях разрыва, позволила описать формирование и распространение фронтов, разделяющих области, различающиеся концентрациями в них клеточных фаз. Результаты сравниваются с полученными в [24]. Показано, что новая, физически более адекватная, постановка позволяет расширить диапазон параметров, дающих стабильное решение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим эволюцию плотностей двух типов клеток, заполняющих в начальный момент времени бесконечный плоский слой, окруженный жидкостью с нулевым давлением. Считается,

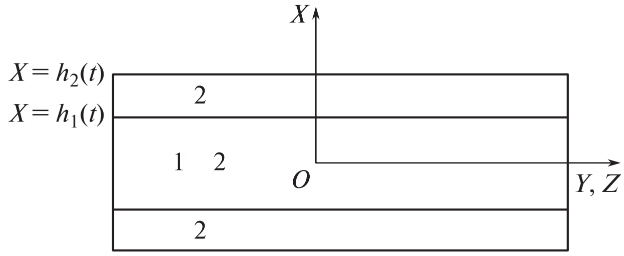

Рис. 1. Схема плоского слоя, образованного клетками 1-го и 2-го типов, с разошедшимися границами фаз в момент времени t.

что в последующие моменты времени слой остается плоским; при этом его толщина может меняться.

Будет использована разработанная в [24] континуальная модель биологической сплошной многофазной среды, образованной двумя активно взаимодействующими типами клеток, которые различаются параметрами зависимостей, управляющих их активным поведением – развитием активных напряжений и активными перемещениями клеток друг относительно друга. Помимо двух клеточных фаз, модель включает в себя внеклеточную жидкость и дополнительные фазы, посредством которых описываются активные силовые взаимодействия между клетками. Дополнительные фазы – обобщенное понятие; они могут отождествляться, например, с псевдоподиями (активными выпячиваниями клеточной мембраны), содержащими сократительные элементы цитоскелета (клеточного скелета) или с единой механически напряженной сетью, составленной мембранами контактирующих клеток и выстилающими их поверхностными сократительными структурами. Объемы, занимаемые дополнительными фазами, в сравнении с объемами основных фаз считаются пренебрежимо малыми. Тем самым предполагается выполнение условия $\phi_1 + \phi_2 + \phi_w = 1$. Здесь ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_w – относительные объемные концентрации первой и второй клеточных фаз и жидкости соответственно. Истинные плотности фаз считаются совпадающими поэтому объемные концентрации совпадают с массовыми. Перемещения клеток характеризуются тензорами скоростей деформаций фаз, которые зависят как от активных, так и от пассивных напряжений.

Далее предполагается присутствие, вообще говоря, трех дополнительных фаз. Две из них обеспечивают активные взаимодействия между клетками одного типа, т.е. принадлежащими только к первой или только ко второй клеточной фазе. Третья дополнительная фаза обеспечивает перекрестные активные взаимодействия между клетками разных фаз.

Введем декартову систему координат с осями Oy и Oz, лежащими в средней плоскости слоя и осью Ox, направленной перпендикулярно этой плоскости (рис. 1). Следуя работе [24], будем искать решение задачи о перераспределении объемных концентраций клеток и жидкости в слое в виде зависимости всех неизвестных от времени t и только поперечной координаты x. Полагаем, что скорости всех фаз имеют единственную отличную от нуля компоненту, направленную по оси Ox. Это допущение физически соответствует слою с шириной в направлениях осей Oy и Oz, много большей его толщины в направлении оси Ox, компоненты смещения которого в плоскости Oyz на удаленной границе равны нулю, тогда как в направлении оси Ox на этой границе имеет место свободное проскальзывание. У всех тензоров напряжений смешанные компоненты считаются равными нулю. Будем отмечать компоненты векторов и тензоров в направлениях y и z соответствующим буквенным индексом, заменяя повторяющийся индекс у компонент тензоров однократным. У компонент векторов и тензоров в направлении x индекс опускается.

Оценка коэффициента межфазного вязкого трения между клеточными фазами и жидкостью позволяет пренебречь в уравнениях импульсов изменением гидростатического давления во внеклеточной жидкости p [24], поэтому в дальнейшем оно считается пространственно-однородным. Тогда уравнения для клеточных фаз можно решать отдельно от уравнений, описывающих движение жидкости. В дальнейшем будем полагать $p = 0$.

Имея в виду рассматриваемые далее в настоящей работе задачи, будем предполагать, что активные стягивающие силы действуют только между клетками, принадлежащими к одной фазе, а между клетками двух разных фаз отсутствуют. Таким образом, в межфазной активной силе будем учитывать только расталкивающую компоненту. Система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1 v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2 v_2}{\partial x} = 0, \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_w = 1 \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1 \sigma^{(1)} + \tau^{(1)} + \tau^{(12)}) + \phi_2 p_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1 + \phi_2}\right) - \\ - \phi_1 p_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}\right) + k_{12}\phi_1\phi_2(v_2 - v_1) = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_2 \sigma^{(2)} + \tau^{(2)} + \tau^{(12)}) + \phi_1 p_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}\right) - \\ - \phi_2 p_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1 + \phi_2}\right) + k_{12}\phi_1\phi_2(v_1 - v_2) = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$p_1 = -\frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}), \quad p_2 = -\frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \tag{1.4}$$

$$\tau^{(1)} = -\Pi_1 + m_1 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_1 \int_S \phi_1 \cdot x^2 ds, \quad \tau^{(2)} = -\Pi_2 + m_2 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_2 \int_S \phi_2 \cdot x^2 ds \tag{1.5}$$

$$\tau_\alpha^{(1)} = -\Pi_1 + m_1 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_1 \int_S \phi_1 \cdot r_\alpha^2 ds, \quad \tau_\alpha^{(2)} = -\Pi_2 + m_2 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_2 \int_S \phi_2 \cdot r_\alpha^2 ds \tag{1.6}$$

$$\Pi_1 = E_1 \frac{\phi_1^{2\theta}}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \Pi_2 = E_2 \frac{\phi_2^{2\theta}}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \tau^{(12)} = \tau_\alpha^{(12)} = -\Pi_{12} = -E_{12}\frac{(\phi_1\phi_2)^\theta}{1 - \phi_1 - \phi_2} \tag{1.7}$$

$$e^{(1)} = \frac{1}{2\mu_1}(\sigma^{(1)} - \phi_2\sigma^{(2)}) - \frac{1}{2\mu_{11}}\tau^{(1)} - \frac{1}{2\mu_{12}}\tau^{(12)} \tag{1.8}$$

$$e^{(2)} = \frac{1}{2\mu_2}(\sigma^{(2)} - \phi_1\sigma^{(1)}) - \frac{1}{2\mu_{22}}\tau^{(2)} - \frac{1}{2\mu_{21}}\tau^{(12)} \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2\mu_1}(\sigma_\alpha^{(1)} - \phi_2\sigma_\alpha^{(2)}) - \frac{1}{2\mu_{11}}\tau_\alpha^{(1)} - \frac{1}{2\mu_{12}}\tau_\alpha^{(12)} = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}(\sigma_\alpha^{(2)} - \phi_1\sigma_\alpha^{(1)}) - \frac{1}{2\mu_{22}}\tau_\alpha^{(2)} - \frac{1}{2\mu_{21}}\tau_\alpha^{(12)} = 0 \tag{1.11}$$

$$e^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad e^{(2)} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \tag{1.12}$$

Здесь v_1 и v_2 – компоненты векторов скорости клеточных фаз; $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ – тензоры напряжений в клеточных фазах; тензоры $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$ – характеризуют напряжения в дополнительных фазах, обеспечивающих активные межклеточные взаимодействия между клетками только первой и только второй клеточных фаз соответственно; тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}^{(12)}$ описывает активное взаимодействие клеток, принадлежащих к разным фазам; $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ – компоненты тензоров скоростей деформаций клеточных фаз; p_1 и p_2 – давления в первой и второй клеточных фазах соответственно; для первого инварианта любого тензора второго ранга $\mathbf{T}$ принято обозначение $I_1(\mathbf{T})$; индекс α принимает значения y и z; $r_y \equiv y$, $r_z \equiv z$.

Безразмерный параметр θ, присутствующий в выражениях для "расталкивающих" активных напряжений (1.7) отвечает за быстроту их затухания при понижении концентраций клеточных фаз. В работе [24] он полагался равным единице. Однако расчеты (см. далее разд. 4) показывают, что в рамках рассматриваемой постановки задачи такой выбор может приводить к некоторым нефизичным следствиям. Для их исключения далее подбираем значение $\theta > 1$.

Уравнения неразрывности для клеточных фаз (1.1) написаны с учетом отсутствия в среде клеточных делений, гибели клеток и массообмена между клеточной фазой и внеклеточной жидкостью. Истинные плотности фаз считаются постоянными и равными между собой. Уравнения баланса импульса для клеточных фаз (1.2) и (1.3) по оси Ox, в пренебрежении инерционными эффектами, учитывают силы их взаимодействия с дополнительными фазами (второе и третье слагаемые), а также силы межфазного взаимодействия между двумя клеточными фазами и этих фаз с межклеточной жидкостью [24]. Уравнения баланса импульса по осям Oy и Oz выполнены тождественно. В слое присутствуют клеточные и активные напряжения, параллельные слою, которые могут быть рассчитаны по уравнениям системы (1.1)–(1.12), содержащим компоненты с индексом α.

Уравнения (1.5)–(1.7) имеют смысл определяющих соотношений для активных напряжений в дополнительных фазах и учитывают как хаотическую активность клеток, характеризуемую соответствующими давлениями, проявляющимися в отталкивании клеток, так и развиваемые ими стягивающие усилия, направленно реагирующие на неоднородность их микроокружения. Интегрирование в соотношениях (1.5), (1.6) выполняется по сферической поверхности S некоторого фиксированного для данной среды радиуса R_s (радиуса дальнодействия) с центром в рассматриваемой точке. Для точек, находящихся на расстоянии, меньшем R_s от поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем среды, интегрирование ведется по той части поверхности сферы, которая лежит внутри этого объема.

В дальнейшем, при решении рассматриваемой ниже задачи появляется область, где присутствует лишь клеточная фаза 2. В этой области $\phi_1 = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(12)} = 0$, и те уравнения системы (1.1)–(1.12), которые относятся к фазе 1, выполняются тождественно.

Соотношения (1.8)–(1.11) представляют собой выражения для компонент тензоров скоростей деформаций основных фаз. Учитывается, что компоненты этих тензоров, ориентированные по осям y и z, равны нулю в силу сделанных выше предположений о виде решения. В общем случае тензор скоростей деформаций в клеточной среде учитывает как деформацию клеток, так и их переупаковку [25]. В настоящей работе предполагается, что деформация основных фаз определяется только переупаковками, что правомерно для достаточно рыхлых тканей. Система дополняется кинематическими соотношениями (1.12) для отличных от нуля компонент тензоров скоростей деформации клеточных фаз.

Все входящие в систему уравнений (1.1)–(1.12) коэффициенты положительны. Система (1.1)–(1.12) отличается от уравнений для плоского слоя, рассмотренных и подробно мотивированных в [24], только отличающимся от единицы показателем степени θ. Однако постановки задач в [24] и в настоящей работе принципиально различаются принятыми граничными условиями.

2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть в начальный момент времени клетки двух разных типов заполняют бесконечный плоский слой толщиной $2h_0$, окруженный жидкостью, в которой давление равно нулю. Постановка задачи теперь учитывает возможность независимого перемещения границ, ограничивающих области, занятые клетками каждого типа. Координаты $x = h_1(t)$ и $x = h_2(t)$ задают положение в момент времени t границ первой и второй клеточных фаз соответственно (рис. 1). Распределение концентраций клеток обеих фаз считается симметричным по толщине слоя, поэтому задача решается на отрезках $[0; h_1(t)]$ для первой и $[0; h_2(t)]$ для второй фазы.

Из условий симметрии следует, что при $x = 0$

$$v_1 = v_2 = 0 \tag{2.1}$$

Дальнейшие рассуждения будут проведены для случая $h_1(t) < h_2(t)$, когда центральная область $[-h_1(t), h_1(t)]$ занята двумя типами клеток, а внешняя, представленная на рисунке отрезками $[h_1(t), h_2(t)]$ и симметричным ему $[-h_2(t), -h_1(t)]$ – только клетками второго типа. В случае $h_1(t) > h_2(t)$ рассуждения будут аналогичными. Какая из фаз замыкает в себе другую, определяется соотношением между числовыми параметрами, характеризующими каждую фазу и в конечном счете устанавливается в процессе численного решения. В дальнейшем (разд. 4) эти параметры выбраны таким образом, что выполняется именно неравенство $h_1(t) < h_2(t)$. Там же поясняется физический смысл такого выбора. Будем рассматривать случай равенства нулю внешней силы на внешней границе.

Давление в жидкости p, как уже упоминалось, считается пространственно-однородным. В рассматриваемой задаче будем полагать, что жидкость может свободно перетекать через границу слоя (т.е. области, занятой клетками) и, таким образом, давление p определяется давлением во внешней среде. В расчетах будем считать его равным нулю. Однако при написании граничных условий, имея в виду их дальнейшее использование, рассмотрим общий случай, когда давление может отличаться от нуля.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ внешние границы фаз совпадают: $h_1(0) = h_2(0)$. Полагаем, что в этот момент внешняя сила, действующая на каждую из клеточных фаз, сводится к давлению окружающей среды, распределенному между фазами пропорционально их концентрациям:

$$\phi_1\sigma^{(1)} + \tau^{(1)} + \tau^{(12)} = -\phi_1 p, \quad \phi_2\sigma^{(2)} + \tau^{(2)} + \tau^{(12)} = -\phi_2 p \tag{2.2}$$

В дальнейшем, после формирования границы между двухфазной и однофазной клеточными средами, второе условие (2.2) (для второй фазы) сохраняется. Для первой фазы межфазовая граница теперь внешняя, и условие на ней должно учитывать силовое воздействие второй фазы. Для второй фазы эта граница является поверхностью разрыва, на которой необходимо сформулировать дополнительные условия. Обозначим скорость перемещения поверхности разрыва для второй фазы (равную скорости перемещения внешней границы первой) v^*. Тогда из условия сохранения массы следует

$$[\phi_2(v_2 - v^*)] = 0 \tag{2.3}$$

Квадратные скобки здесь и далее обозначают разность между значениями любой величины Z по разные стороны поверхности разрыва: $[Z] = Z^+ - Z^-$. Верхний индекс “минус” указывает на принадлежность к области 12 совместного присутствия обеих фаз (рис. 1), а индекс “плюс” на принадлежность к области 2 (где присутствует только вторая фаза).

Прежде чем формулировать второе условие на поверхности разрыва для второй фазы и условие на этой границе для первой, необходимо принять гипотезу о виде межфазной силы, действующей на этой границе. Присутствие такой силы определяется силовым взаимодействием частиц первой фазы в зоне 12 с частицами второй фазы в зоне 2. Поскольку средние напряжения в частицах разных фаз не совпадают, необходимо принять выражение для среднего давления на поверхности контакта частиц p^*. Будем поступать в соответствии с методологией, развитой в работе [24]. Полагая, что средний размер частицы каждой фазы пропорционален ее концентрации, а распределение давления в клеточных фазах линейно, получаем аналогично [24] для p^* максимально простое выражение

$$p^* = \frac{p_1^-\phi_2^+ + p_2^+\phi_1^-}{\phi_1^- + \phi_2^+} \tag{2.4}$$

Полагая, что в среднем площадь контакта между фазами на рассматриваемой границе пропорциональна концентрациям соответствующих фаз (второй в области 2 и первой в области 12), получаем для среднего макроскопического межфазного давления p^{**}, отнесенного ко всей межфазной поверхности в единице объема среды, выражение

$$p^{**} = \phi_1^-\phi_2^+ p^* = \phi_1^-\phi_2^+ \frac{p_1^-\phi_2^+ + p_2^+\phi_1^-}{\phi_1^- + \phi_2^+} \tag{2.5}$$

Полагая, что сила давления жидкости, приходящаяся на вторую фазу с каждой стороны поверхности разрыва, пропорциональна концентрациям второй и жидкой фаз с соответствующих сторон, получаем еще одно условие на разрыве для второй фазы

$$[\phi_2\sigma^{(2)} + \tau^{(2)} + \tau^{(12)}] = -p^{**} + (\phi_2^-\phi_w^+ - \phi_2^+\phi_w^-)p \tag{2.6}$$

Считая, что площадь контакта между первой фазой на той же поверхности (внешней для этой фазы границе) и внешней для нее жидкостью также пропорциональна их соответствующим концентрациям, получаем условие для первой фазы при $x = h_1(t)$

$$\phi_1\sigma^{(1)} + \tau^{(1)} + \tau^{(12)} = -p^{**} - \phi_1\phi_w^+ p \tag{2.7}$$

Соотношения (2.6) и (2.7) для описания межфазной силы, действующей на поверхности разрыва, основаны на тех же физических допущениях, что были использованы при получении выражения для объемной межфазной силы, присутствующей в уравнениях (1.2) и (1.3) [24].

Перемещение границ $x = h_1(t)$ и $x = h_2(t)$ определяется движением клеток соответствующих фаз, поэтому на этих границах выполнены условия $v^* = \dot{h}_1 = v_1$ при $x = h_1(t)$ и $\dot{h}_2 = v_2$ при $x = h_2(t)$ (точкой обозначено дифференцирование по времени).

Граничные условия для ϕ_1 при $x = 0$ и $x = h_1(t)$и ϕ_2 при $x = 0$ и $x = h_2(t)$ не ставятся, так как $x = 0$ и $x = h_1(t)$ являются характеристиками для первого уравнения (1.1), а $x = 0$ и $x = h_2(t)$ – для второго.

В качестве начальных условий при $t = 0$ будем задавать начальное положение внешней границы (общее для обеих клеточных фаз) $h_1(0) = h_2(0) = h_0$ и начальные распределения концентраций фаз $\phi_1(0,x) = \phi_{10}(x)$ и $\phi_2(0,x) = \phi_{20}(x)$.

В каждый момент времени при известных текущих расположениях внешних границ и распределениях концентраций фаз система уравнений для определения скоростей фаз и напряжений в них имеет четвертый порядок. При $t = 0$, когда поверхность разрыва еще не сформировалась, граничных условий четыре. Они определяются соотношениями (2.1) и (2.2). В дальнейшем с учетом присутствия поверхности разрыва для второй фазы, расположение которой в этот момент известно (совпадает с внешней границей первой фазы), необходимо шесть граничных условий. К их числу относятся оба равенства (2.1), второе соотношение (2.2), (2.3), а также (2.6) и (2.7) с учетом (2.5). По известному распределению скоростей клеточных фаз v_1 и v_2 из уравнений неразрывности (1.1) могут быть найдены скорости изменения фазовых концентраций ϕ_1 и ϕ_2. Если распределения концентраций первоначально непрерывны, они остаются непрерывными и в дальнейшем, в том числе и при прохождении поверхности разрыва по частицам второй фазы: рвется лишь скорость изменения концентрации ϕ_2. В силу условия (2.3) на этой поверхности остается непрерывной и скорость второй фазы v_2. Таким образом, при $x = h_1$ скорость и концентрация второй фазы претерпевают слабый разрыв, тогда как разрыв напряжения в этой фазе σ_2 оказывается сильным, что видно, например, из условия (2.6).

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Преобразуем систему уравнений (1.1)–(1.12). Для этого выразим напряжения в клеточных фазах $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ из уравнений (1.8), (1.9) и подставим их в уравнения импульсов (1.2) и (1.3). Компоненты тензоров скоростей деформаций заменим с помощью кинематических соотношений (1.12). Добавив уравнения (1.1), получим полную систему для нахождения ϕ_1, ϕ_2 и v_1, v_2.

Введем безразмерные величины:

$$t^* = t\frac{E}{\mu},\quad x^* = \frac{x}{h_0},\quad R_s^* = \frac{R_s}{h_0},\quad h_k^* = \frac{h_k}{h_0},\quad \sigma^{(k)*} = \frac{\sigma^{(k)}}{E},\quad \sigma_\alpha^{(k)*} = \frac{\sigma_\alpha^{(k)}}{E},\quad \tau^{(k)*} = \frac{\tau^{(k)}}{E},\quad \tau_\alpha^{(k)*} = \frac{\tau_\alpha^{(k)}}{E},$$

$$\tau^{(12)*} = \frac{\tau^{(12)}}{E},\quad \tau_\alpha^{(12)*} = \frac{\tau_\alpha^{(12)}}{E},\quad v^{(k)*} = v^{(k)}\frac{\mu}{Eh_0},\quad \Pi_k^* = \frac{\Pi_k}{E},\quad \Pi_{12}^* = \frac{\Pi_{12}}{E},\quad E_k^* = \frac{E_k}{E},\quad E_{12}^* = \frac{E_{12}}{E},$$

$$\mu_k^* = \frac{\mu_k}{\mu},\quad \mu_{kn}^* = \frac{\mu_{kn}}{\mu},\quad m_k^* = \frac{m_k}{E},\quad k_{12}^* = \frac{k_{12}h_0^2}{\mu}\,(k = 1, 2; n = 1, 2; \alpha = y, z)$$

Здесь E и μ – некоторые характерные значения соответствующих групп коэффициентов. В дальнейшем звездочку при безразмерных параметрах будем опускать.

Реализация численного метода решения полученной системы на каждом шаге по времени начинается с решения уравнений для v_1 и v_2, при этом значения ϕ_1 и ϕ_2 берутся с предыдущего временного шага. Затем при найденных скоростях решаются уравнения (1.1), позволяющие найти ϕ_1 и ϕ_2.

На каждом шаге сначала находятся значения v_1 и v_2 на отрезке $[0; h_1(t)]$ (на этом отрезке присутствуют обе клеточные фазы), после чего v_2 продолжается на отрезок $[h_1(t); h_2(t)]$, на котором присутствует только вторая клеточная фаза.

При расчете скоростей на отрезке $[0; h_1(t)]$ вводится безразмерная координата $\xi_1 = x/h_1(t)$, что позволяет перейти от решения уравнений с подвижной верхней границей к решению уравнений на отрезке [0; 1].

Система уравнений для безразмерных неизвестных v_1 и v_2 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(2\mu_1\frac{\phi_1}{\Delta}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}+2\mu_2\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\right)+\frac{2\mu_1}{3\Delta}\left(\phi_1^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\cdot\frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}+$$
$$+\frac{2\mu_2}{3\Delta}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_2^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\cdot\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}+k_{12}\phi_1\phi_2h_1^2(v_2-v_1)=-h_1\left(\Phi+\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\xi_1}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(2\mu_1\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}+2\mu_2\frac{\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\right)+\frac{2\mu_1}{3\Delta}\left(\phi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_1^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\cdot\frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}+$$
$$+\frac{2\mu_2}{3\Delta}\left(\phi_2^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}+k_{12}\phi_1\phi_2h_1^2(v_1-v_2)=-h_1\left(-\Phi+\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\xi_1}\right)$$

Здесь $\Delta=1-\phi_1\phi_2$,

$$\Phi=\frac{1}{3\Delta}\left(\left(\phi_1^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\left(\frac{\mu_1}{\mu_{11}}I(\boldsymbol{\tau}^{(1)})+\frac{\mu_1}{\mu_{12}}I(\boldsymbol{\tau}^{(12)})\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\right)-\phi_2^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\right)\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_{22}}I(\boldsymbol{\tau}^{(2)})+\frac{\mu_2}{\mu_{21}}I(\boldsymbol{\tau}^{(12)})\right)\right),$$

$$\Sigma_1=\left(\frac{\phi_1}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{11}}+1\right)\tau^{(1)}+\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{22}}\tau^{(2)}+\left(\frac{\phi_1}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{12}}+\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{21}}+1\right)\tau^{(12)},$$

$$\Sigma_2=\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{11}}\tau^{(1)}+\left(\frac{\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{22}}+1\right)\tau^{(2)}+\left(\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{12}}+\frac{\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{21}}+1\right)\tau^{(12)}$$

В качестве граничных условий при решении системы (3.1) используется равенство $v_1=v_2=0$ при $\xi_1=0$, а при $\xi_1=1$ – соотношения (2.6) и (2.7).

Условие (2.7) при $\xi_1=1$ после подстановки в него выражений для $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$, полученных из (1.8) и (1.9), с учетом выражения для межфазного давления p^{**} (2.5) и равенства нулю гидростатического давления принимает следующий вид (верхний индекс “–”, указывающий на принадлежность к области 12 совместного присутствия обеих фаз опущен):

$$2\mu_1\frac{\phi_1}{\Delta}\left(1-\frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\right)\frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}+2\mu_2\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\left(1-\frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\right)\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}+$$
$$+h_1\left(\frac{\phi_1}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{11}}\left(\tau^{(1)}-\frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(1)})\right)+\tau^{(1)}+\frac{\phi_1\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{22}}\left(\tau^{(2)}-\frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(2)})\right)+\right.$$
$$+\frac{\phi_1}{\Delta}\left(\frac{\mu_1}{\mu_{12}}+\phi_2\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{21}}\right)\left(\tau^{(12)}-\frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(12)})\right)+\tau^{(12)}-$$
$$\left.-\frac{1}{3}\frac{(\phi_1)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\left(\phi_2^+\frac{\mu_2}{\mu_{22}}I(\boldsymbol{\tau}^{(2)+})+2\frac{\mu_2}{h_1}\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\right|^+\right)\right)=0 \tag{3.2}$$

Поскольку $\tau^{(12)}=0$ в области $x\in[h_1(t);h_2(t)]$, то из уравнения импульсов (1.3) и второго условия (2.2) следует, что в этой области выполнено уравнение

$$\phi_2\sigma^{(2)}+\tau^{(2)}=0 \tag{3.3}$$

После подстановки в (3.3) выражения для $\sigma^{(2)}$ получаем соотношение

$$2\mu_2\phi_2\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}+h_1\left(\phi_2\frac{\mu_2}{\mu_{22}}+1\right)\tau^{(2)}=0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) позволяет исключить $\left.\dfrac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\right|^+$ из граничного условия (3.2).

Из условий (2.6) и (3.3) следует, что $\phi_2^{-}\sigma^{(2)^{-}} + \tau^{(2)-} + \tau^{(12)-} = p^{**}$ при $\xi_1 = 1$. После подстановки выражений для $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ из (1.8) и (1.9) и выражения для межфазного давления p^{**} (2.5) получаем второе граничное условие при $\xi_1 = 1$ для решения уравнений (3.1) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
2\mu_1\frac{\phi_1}{\Delta}\left(\phi_2 + \frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\right)\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + 2\mu_2\frac{\phi_2}{\Delta}\left(1 + \frac{1}{3}\phi_1\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\right)\frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} + \\
+ h_1\left(\frac{\phi_1}{\Delta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_{11}}\left(\phi_2\tau^{(1)} + \frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(1)})\right) + \frac{\phi_2}{\Delta}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_{22}}\left(\tau^{(2)} + \frac{1}{3}\phi_1\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(2)})\right) + \right. \\
+ \tau^{(2)} + \frac{\phi_1}{\Delta}\frac{\mu_1}{\mu_{12}}\left(\phi_2\tau^{(12)} + \frac{1}{3}\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(12)})\right) + \frac{\phi_2}{\Delta}\frac{\mu_2}{\mu_{21}}\left(\tau^{(12)} + \frac{1}{3}\phi_1\frac{(\phi_2^+)^2}{\phi_1+\phi_2^+}I(\boldsymbol{\tau}^{(12)})\right) + \\
\left. + \tau^{(12)} + \frac{1}{3}\frac{(\phi_1)^2}{\phi_1+\phi_2^+}\left(\phi_2^+\frac{\mu_2}{\mu_{22}}I(\boldsymbol{\tau}^{(2)+}) + 2\frac{\mu_2}{h_1}\left.\frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}\right|^+\right)\right) = 0
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

где величина $\left.\dfrac{\partial v_2}{\partial \xi_1}\right|^+$ исключается с помощью (3.4).

В результате решения системы (3.1) при соответствующих граничных условиях находится скорость клеток первой фазы во всей области, которую они занимают. Скорость клеток второй фазы подлежит определению дополнительно на отрезке $[h_1(t); h_2(t)]$. В этой области будем использовать интеграл уравнения импульсов для второй клеточной фазы (3.3) и перейдем к безразмерной координате $\xi_2 = x/h_2(t)$. После подстановки выражения для $\sigma^{(2)}$ уравнение (3.3) принимает аналогичный (3.4) вид:

$$
2\mu_2\phi_2\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} + h_2\left(\phi_2\frac{\mu_2}{\mu_{22}} + 1\right)\tau^{(2)} = 0 \tag{3.6}
$$

Интегрирование уравнения (3.6) выполняется на отрезке $\xi_2 \in [h_1(t)/h_2(t); 1]$. В качестве граничного условия при $\xi_2 = h_1(t)/h_2(t)$ используется значение v_2^+, полученное из условия на разрыве (2.3), которое включает в себя v_2^-, полученное из рассмотренного выше решения для области совместного присутствия двух клеточных фаз.

Вычисление интегралов, присутствующих в выражениях для активных напряжений, выполнено путем разложения подынтегральной функции в ряд по формуле Тейлора второго порядка точности и с помощью пятиточечной квадратуры Гаусса [26], при этом учитывалось различие пределов интегрирования для внутренних и граничных точек среды, т.е. точек, удаленных от границы слоя на расстояние, не превышающее радиус дальнодействия.

Разностная схема для решения системы (3.1), полученная интегро-интерполяционным методом [27], монотонна и имеет первый порядок аппроксимации по ξ_1. Монотонность достигается использованием направленных разностей при аппроксимации $\partial v_1/\partial \xi_1$ и $\partial v_2/\partial \xi_1$ в зависимости от знаков стоящих при них коэффициентов. Полученная система разностных уравнений решалась методом матричной прогонки. Уравнение (3.6) решалось методом Эйлера.

Полученные значения $v_1(\xi_1)$ и $v_2(\xi_2)$ используются далее при решении уравнений для ϕ_1 и ϕ_2.

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\phi_1\left(v_1 - \frac{dh_1}{dt}\xi_1\right)\right) + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{dt}\phi_1 = 0 \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\phi_2\left(v_2 - \frac{dh_2}{dt}\xi_2\right)\right) + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{dt}\phi_2 = 0
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Эти уравнения решаются по отдельности. Численное решение уравнений (3.7) было выполнено с использованием TVD схемы Хартена с ограничителем minmod [28, 29].

Уравнения (3.1), (3.5) и (3.7) дополняются уравнениями $\dot{h}_1 = v_1$ при $\xi_1 = 1$ и $\dot{h}_2 = v_2$ при $\xi_2 = 1$, которые описывают изменение толщины клеточных фаз. Эти уравнения решаются методом Эйлера.

При решении задач используется разбиение отрезков [0; h_1] и [0; h_2] на одинаковое число частей. При переходе от одного разбиения к другому (т.е. при переходе от координаты ξ_1 к координате ξ_2) используется пересчет соответствующих величин с использованием линейной интерполяции.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Будем исследовать эволюцию плотностей двух типов клеток, для которых активные стягивающие взаимодействия внутри фаз доминируют над межфазными активными стягивающими взаимодействиями, так что последними можно пренебречь. При этом будем считать, что активные взаимодействия внутри первой клеточной фазы превышают таковые внутри второй клеточной фазы ($m_1 > m_2$). В настоящее время отсутствуют экспериментальные данные, позволяющие получить оценки числовых значений коэффициентов. Поэтому свойства системы будут исследованы в зависимости от значений безразмерных параметров. В последующих расчетах приняты значения безразмерных параметров, характеризующих напряжения, развивающиеся в результате активных межклеточных взаимодействий, такие же, как в [24]: $m_1 = 12$, $m_2 = 6$. Активное взаимодействие клеточных фаз одна с другой сводится только к расталкивающей силе. Для остальных безразмерных параметров используются два набора числовых значений, близкие к принятым в [24]. Набор 1: $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0.5$, $E_1 = 0.33$, $E_2 = 0.33$, $E_{12} = 0.167$, $k_{12} = 0.3$, $R_s = 0.01$, $\phi_{10}(x) = \phi_{20}(x) = 0.4$. Набор 2 отличается от набора 1 значениями параметров, характеризующих расталкивающую активность клеток: $E_1 = 0.33$, $E_2 = 0.12$, $E_{12} = 0.06$. Значение показателя степени θ, присутствующего в зависимостях для активных давлений, будет в дальнейшем выбираться в соответствии с данными расчетов.

Будем сравнивать численные решения двух задач, описывающих перераспределение клеток в бесконечном плоском слое, различающихся граничными условиями. В обеих постановках внешние границы клеточных фаз подвижны, но в одном случае для обеих фаз эти границы совпадают (как в [24]), а в другом движутся независимо в соответствии с условиями, сформулированными выше (разд. 2).

На рис. 2 представлены результаты расчетов эволюции пространственно-однородных начальных распределений $\phi_1(0, x) = \phi_{10}$ и $\phi_2(0, x) = \phi_{20}$ при значениях параметров из набора 1 и $\theta = 1$ [24]. Пунктирные кривые соответствуют задаче с общей границей, а сплошные — задаче с двумя независимо движущимися границами. На рис. 2а показаны распределения плотностей клеточных фаз ϕ_1 и ϕ_2 в момент времени $t = 1.48$. Рисунок 2б демонстрирует эволюцию границ клеточных фаз в задачах с одной общей границей (пунктир) и в задаче с двумя независимо движущимися границами (сплошные кривые). Обрыв сплошной линии *1* на рис. 2а соответствует границе области, занятой фазой: $\phi_1 \equiv 0$ при бóльших значениях координаты x. Здесь и на последующих графиках видно незначительное падение концентраций фаз в узких (порядка нескольких радиусов дальнодействия) зонах вблизи границ, которое имеет место вследствие уменьшения активной стягивающей силы из-за сокращения области интегрирования в соотношении (1.5). Этот мелкомасштабный модельный эффект несуществен для исследуемого процесса сортировки.

Из рис. 2 видно, что в рамках обеих постановок задач удается описать тенденцию к разделению клеточных фаз: фаза 1, в которой активные стягивающие взаимодействия между клетками сильнее, стремится занять центральную область, а фаза 2 — периферийную. При независимо перемещающихся границах формируется поверхность разрыва, ограничивающая область вне которой фаза 1 полностью отсутствует, при общей границе разрыва нет, но имеется узкая переходная зона, в которой ϕ_1 падает до очень малых значений. Что касается ϕ_2, то в этой зоне она становится очень малой, а по выходе из нее постепенно повышается, вблизи внешней границы выходя на плато. Сортировка клеток, описываемая решением задачи с двумя независимо перемещающимися границами, происходит быстрее сортировки, описываемой решением задачи с одной общей границей в силу отсутствия скрепления клеток разных фаз на внешней границе. Это видно из того, что концентрация клеток второй фазы ϕ_2, расположенных во внутренней области $[0; h_1]$, значительно ниже для решений первой задачи по сравнению со значениями ϕ_2 в той же области, полученными во второй задаче, а плато ϕ_2 вблизи внешней границы слоя заметно шире.

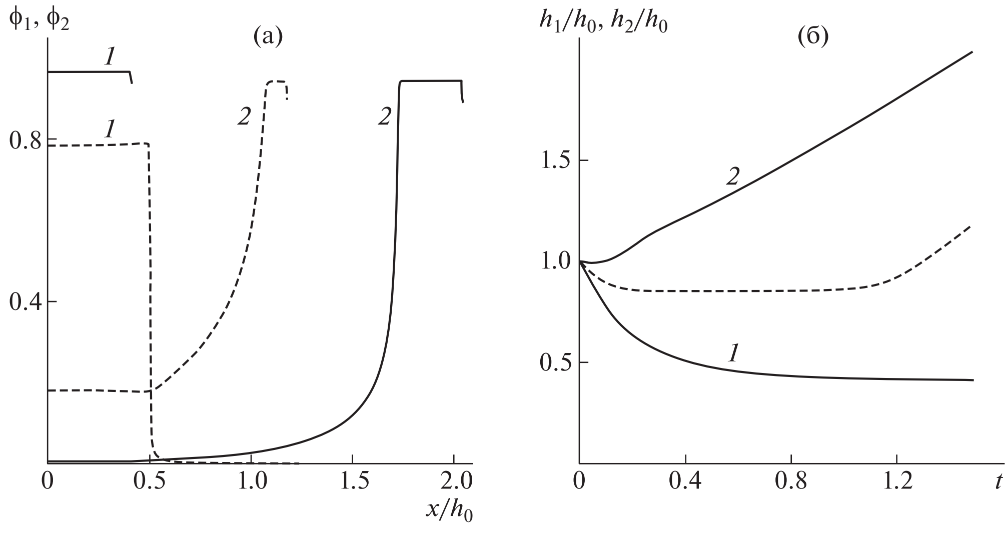

Рис. 2. Решения задач о перераспределении клеток в плоском слое при начальных условиях $\phi_1(0, x) = \phi_{10}$ и $\phi_2(0, x) = \phi_{20}$ в момент времени $t = 1.48$. Используются значения параметров из набора 1 и $\theta = 1$. (а) Распределения концентраций клеток в задаче с общей границей (пунктирные кривые) и двумя независимыми границами (сплошные кривые): *1* и *2* для ϕ_1 и ϕ_2 соответственно. (б) Эволюция границ клеточных фаз. Представлены зависимости от времени безразмерных координат границ: пунктирная кривая – h/h_0 ($h = h_1 = h_2$) в задаче с общей границей, сплошные кривые *1* и *2* – h_1/h_0 и h_2/h_0 в задаче с независимо движущимися границами.

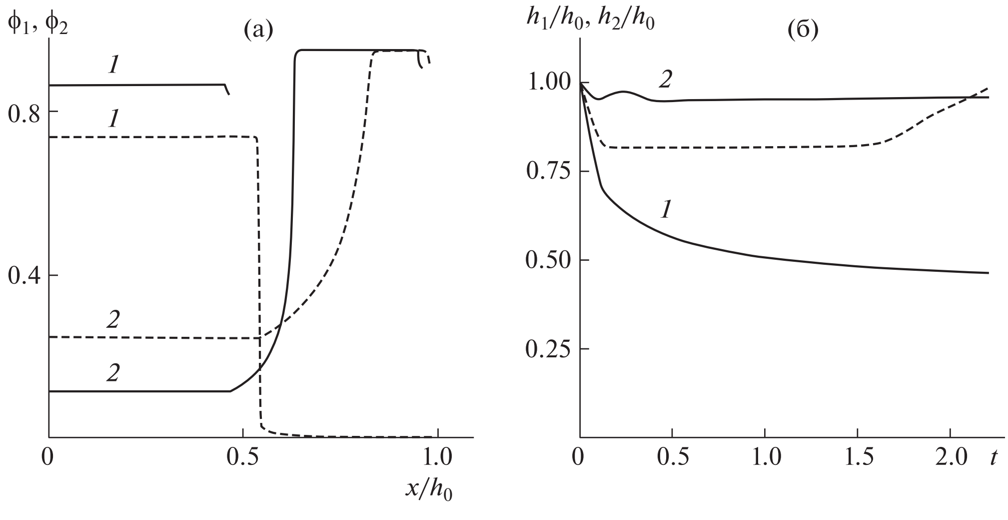

Рис. 3. Решения задач о перераспределении клеток в плоском слое при начальных условиях $\phi_1(0,\ x) = \phi_{10}$ и $\phi_2(0,\ x) = \phi_{20}$ в момент времени $t = 2.2$. Используются значения параметров из набора 1; $\theta = 1.8$. (а) Распределения плотностей фаз; (б) эволюция их границ. Обозначения на рисунках а и б совпадают с обозначениями на рисунках 2а и 2б соответственно.

В обоих случаях наблюдается широкая переходная зона роста ϕ_2, в которой имеет место низкая концентрация всех клеток. К этому не слишком физичному обстоятельству в задаче с независимо перемещающимися границами добавляется еще одна не согласующаяся с реальными процессами особенность: граница оказавшейся снаружи фазы демонстрирует постоянное движение наружу, естественно, сопровождающееся разрастанием зоны разрежения.

Оба указанных модельных эффекта связаны с доминированием при $\theta = 1$ активных сил расталкивания над активными стягивающими силами. Картина существенно меняется при $\theta > 1$. На рис. 3 показаны результаты расчетов для обеих постановок задач при тех же значениях пара-

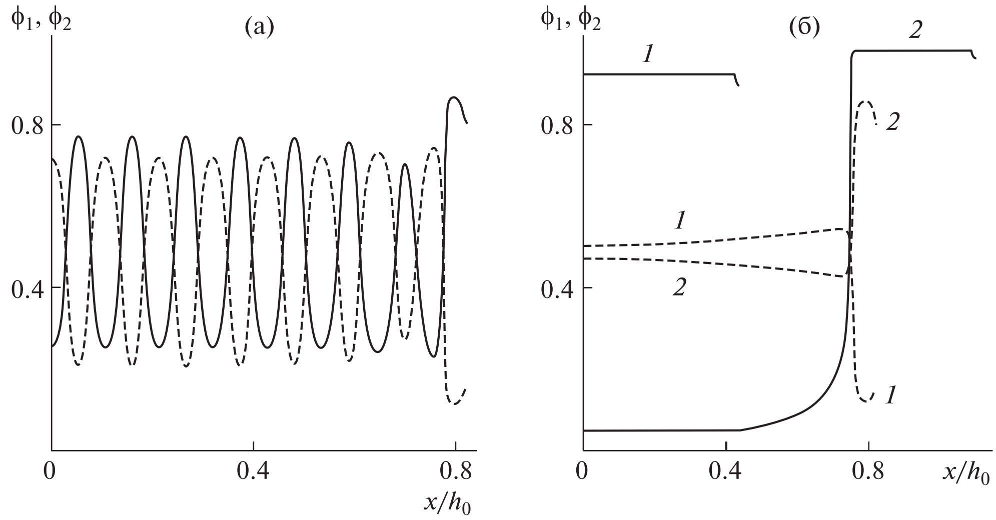

Рис. 4. (а) Распределения плотностей клеточных фаз по толщине слоя в момент времени $t = 5$ при значениях параметров из набора 2 и $\theta = 1.2$: (а) в задаче с одной внешней границей с начальными распределениями $\phi_1(0,x) = \phi_{10} + 0.001\cos(15.5\pi x)$ и $\phi_2(0,x) = \phi_{20} - 0.001\cos(15.5\pi x)$ (пунктирная кривая – ϕ_1 и сплошная – ϕ_2); (б) в задачах с одной клеточной границей (пунктирные кривые) и с раздельными границами (сплошные кривые) при начальных распределениях $\phi_1(0,x) = \phi_{10}$ и $\phi_2(0,x) = \phi_{20}$ (1 и 2 для ϕ_1 и ϕ_2 соответственно).

метров, что на рис. 2, с единственным отличием: $\theta = 1.8$. Распределения фазовых плотностей даны при $t = 2.2$. Теперь переходная область в задаче с независимо движущимися границами фаз становится значительно уже, тогда как в задаче с общей границей ее заметного сужения не происходит. Соответственно, в задаче с независимыми границами картина перемещения границ претерпевает радикальное изменение: более нет заметного расширения слоя, тогда как в задаче с общей границей картина перемещения границы практически не изменяется. Что касается сортировки клеточных фаз и ускорения этого процесса при учете расхождения границ, то тут никаких существенных изменений не происходит.

Выполненные многочисленные численные эксперименты показали, что имеются области параметров, в которых эволюция распределений плотностей клеточных фаз для двух постановок задачи может различаться значительно. При этом для разделяющихся границ распределения плотностей качественно сохраняют ту же форму, что и в расчетах, представленных выше, тогда как в случае общей границы поведение решений оказывается существенно иным. Таким образом, допущение разделения границ ведет к повышению устойчивости результата. Покажем это на конкретном примере.

Изменим параметры, определяющие расталкивающую активность клеток, приняв набор параметров 2 и $\theta = 1.2$. На рис. 4а представлены распределения концентраций клеточных фаз в случае, когда на начальные пространственно-однородные распределения (те же, что и в примерах, рассмотренных выше) наложены гармонические возмущения малой амплитуды: $\phi_1(0,\ x) = \phi_{10} + 0.001\cos(15.5\pi x)$ и $\phi_2(0,x) = \phi_{20} - 0.001\cos(15.5\pi x)$. Эволюция этих начальных распределений клеток в задаче с общей границей приводит к формированию слоистой структуры, в которой чередуются области с различным соотношением между плотностями клеточных фаз. Использование малых случайных возмущений начальных пространственно-однородных распределений $\phi_1(0,\ x) = \phi_{10} + 0{,}001\ \mathrm{random}(x)$ и $\phi_2(0,\ x) = \phi_{20} - 0{,}001\ \mathrm{random}(x)$ (функция $\mathrm{random}(x)$ генерирует равномерно распределенную на отрезке $[-1,\ 1]$ случайную величину при каждом значении x) приводит к колебательному характеру концентраций клеток со случайным распределением амплитуд и “периодов”. С другой стороны, в задаче с разделяющимися границами возмущения (и синусоидальные, и случайные) затухают с формированием распределений, представленных сплошными кривыми на рис. 4б.

На рис. 4б представлены также распределения концентраций клеточных фаз в задаче с общей внешней границей при невозмущенных начальных условиях $\phi_1(0,x) = \phi_{10}$ и $\phi_2(0,x) = \phi_{20}$. Решение дает в этом случае распределения, качественно отличающиеся от ожидаемых: максимум ϕ_1 и минимум ϕ_2 достигаются на некоторой близкой к внешней границе поверхности. Дальнейшая эволюция приводит лишь к закреплению этого паттерна, и сортировка не происходит.

Может показаться странной получающаяся при вычислениях стабильность такого поведения, если принять во внимание неустойчивость относительно малых возмущений, показанную на рис. 4а. Однако специально проведенные расчеты показали, что скорость развития возмущений значительно уменьшается с их амплитудой, и при достаточно малых амплитудах они на обследуемом временном интервале не успевают развиться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена новая постановка задачи о трансформации клеточной системы, составленной клетками разных типов, в рамках подхода, основанного на представлении такой системы многофазной сплошной средой. В отличие от постановки, рассмотренной ранее, допускается независимое перемещение границ, ограничивающих каждую клеточную фазу. Таким образом, оказывается возможным описывать образование и перемещение фронтов, разделяющих области с различными объемными концентрациями клеток разных типов. Сформулированы условия на таких разрывах. Численно решена и исследована модельная задача об эволюции первоначально однородной смеси клеток двух типов, заполняющей бесконечный плоский слой в предположении, что внешние границы каждой клеточной фазы перемещаются независимо. Проанализировано влияние различных параметров, характеризующих активные межклеточные воздействия, на формирование клеточных структур. В широком диапазоне определяющих параметров модель описывает известное явление клеточной сортировки: клетки с более сильными стягивающими активными взаимодействиями стремятся занять центральную область, вытесняя на периферию клетки, у которых эти взаимодействия слабее. Результаты сравнивались с решением аналогичной задачи, в которой внешние границы фаз остаются принудительно совпадающими. Новая постановка физически более адекватна и дает возможность расширить диапазон параметров, в котором получается качественно тот же результат. Методология, развитая в работе, может быть применена к широкому классу задач, описывающих поведение смесей клеток с различными моделями активности.

Работа поддержана РФФИ (проект № 20-01-00329) и Госпрограммой АААА-А19-119012990119-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beloussov L.V., Dorfman J.G., Cherdantzev V.G.* Mechanical stresses and morphological patterns in amphibian embryos // J. Embr. Exp. Morphol. 1975. V. 34. P. 559–574.
2. *Keller R., Davidson L.A., Shook D.R.* How we are shaped: The biomechanics of gastrulation // Differentiation. 2003. V. 71. P. 171–205.
3. *Mammoto T., Ingber D.E.* Mechanical control of tissue and organ development // Development. 2010. V. 137. № 9. P. 1407–1420.
4. *Steinberg M.S., Wiseman L.L.* Do morphogenetic tissue rearrangements require active cell movements? // J. Cell Biol. 1972. V. 55. P. 606–615.
5. *Foty R.A., Steinberg M.S.* Cadherin-mediated cell-cell adhesion and tissue segregation in relation to malignancy // Int. J. Dev. Biol. 2004. V. 48. P. 397–409.
6. *Mehes E., Viscek T.* Segregation mechanisms of tissue cells: from experimental data to models // Complex Adapt. Syst. Model. 2013. V. 1. P. 4.
7. *Mehes E., Viscek T.* Collective motion of cells: from experiments to models // Integr. Biol. 2014. V. 6. № 9. P. 831–854.
8. *Graner F., Glazier J.A.* Simulation of biological cell sorting using a two-dimensional extended Potts model // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2013–2016.
9. *Glazier J.A., Graner F.* Simulation of the differential adhesion driven rearrangement of biological cells // Phys. Rev. E Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Topics. 1993. V. 47. P. 2128–2154.
10. *Krieg M., Arboleda-Estudillo Y., Puech P. H., Kafer J., Graner F., Muller D.J., Heisenberg C.P.* Tensile forces govern germ-layer organization in zebrafish // Nat. Cell Biol. 2008. V. 10. P. 429–436.
11. *Zhang Y., Thomas G.L., Swat M., Shirinifard A., Glazier J.A.* Computer simulations of cell sorting due to differential adhesion // PLoS One. 2011. V. 6. P. e24999.
12. *Brodland G.W., Chen H.H.* The mechanics of heterotypic cell aggregates: insights from computer simulations // J. Biomech. Eng. 2000. V. 122. P. 402–407.
13. *Brodland G.W.* The Differential Interfacial Tension Hypothesis (DITH): a comprehensive theory for the self-rearrangement of embryonic cells and tissues // J. Biomech. Eng. 2002. V. 124. P. 188–197.

14. *Fletcher A.G., Osborne J.M., Maini P.K., Gavaghan D.J.* Implementing vertex dynamics models of cell populations in biology within a consistent computational framework // Prog. Biophys. Mol. Biol. 2013. V. 113. P. 299–326.
15. *Katsunuma S., Honda H., Shinoda T., Ishimoto Y., Miyata T., Kiyonari H., Abe T., Nibu K., Takai Y., Togashi H.* Synergistic action of nectins and cadherins generates the mosaic cellular pattern of the olfactory epithelium // J. Cell Biol. 2016. V. 212. P. 561–575.
16. *Tanaka S.* Simulation Frameworks for Morphogenetic Problems // Computation. 2015. V. 3. P. 197–221.
17. *Osborne J.M., Fletcher A.G., Pitt-Francis J.M., Maini P.K., Gavaghan D.J.* Comparing individual-based approaches to modelling the self-organization of multicellular tissues // PLoS Comput. Biol. 2017. V. 13. P. e1005387.
18. *Camley B.A., Rappel W.J.* Physical models of collective cell motility: from cell to tissue // J. Phys. D Appl. Phys. 2017. V. 50. P. 113002.
19. *Armstrong N.J., Painter K.J., Sherratt J.A.* A continuum approach to modelling cell-cell adhesion // J Theor. Biol. 2006. V. 243. P. 98–113.
20. *Painter K.J., Bloomfield J.M., Sherratt J.A., Gerisch A.* A nonlocal model for contact attraction and repulsion in heterogeneous cell populations // Bull. Math. Biol. 2015. V. 77. P. 1132–1165.
21. *Murakawa H., Togashi H.* Continuous models for cell-cell adhesion// J. Theor. Biol. 2015. V. 374. P. 1–12.
22. *Carrillo J.A., Murakawa H., Sato M., Togashi H., Trush O.* A population dynamics model of cell-cell adhesion incorporating population pressure and density saturation // J. Theor. Biol. 2019. V. 474. P. 14–24.
23. *Stein A.A., Logvenkov S.A., Volodyaev I.V.* Continuum modeling of mechano-dependent reactions in tissues composed of mechanically active cells // BioSystems. 2018. V. 173. P. 225–234.
24. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Континуальное моделирование биологической среды, составленной активно взаимодействующими клетками двух разных типов // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 3–16.
25. *Белоусов Л.В., Логвенков С.А., Штейн А.А.* Математическая модель активной биологической сплошной среды с учетом деформаций и переупаковки клеток // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 3–14.
26. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
28. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. № 3. P. 357–393.
29. *Чирков Д.В., Черный С.Г.* Сравнение точности и сходимости некоторых TVD-схем // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5. № 5. С. 86–107.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 17–29

УДК 532.5:536.46:544.42

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ СИНТЕЗА МИКРОННЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ ГОРЕНИЯ УГЛЕРОДА В ПРЯМОТОЧНОМ И ТРЕХЗОННОМ РЕАКТОРЕ

А. А. Марков[a],*

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**E-mail:markov.ipm@yandex.ru*

Поступила в редакцию 01.10.2021 г.
После доработки 20.10.2021 г.
Принята к публикации 20.11.2021 г.

Развивается двухтемпературная осесимметричная модель для анализа синтеза сложных оксидов методом горения углерода. Определяющая система уравнений включает сохранения вещества, импульса и энергии для газовой и твердой фаз в прямоточном и трехзонном реакторе. Излагаются результаты исследования резкого роста температуры – “неправильного поведения” реактора в процессе синтеза микронных порошков титаната бария с рассмотрением тепловой и массовой дисперсии. Определяющие уравнения с параметрами подобия в безразмерной форме применены к численному моделированию воздействия как газодинамического и межфазного сопротивления, так и осевой и поперечной дисперсии при синтезе микронных частиц титаната бария в прямоточном и трехзонном реакторе. Делается вывод о преимуществах трехзонного реактора в моделировании синтеза микронных частиц в режимах “неправильного поведения” прямоточного реактора. Сопоставлены результаты расчетов прямоточного и трехзонного реакторов при одинаковых величинах дисперсии, коэффициента извилистости пор, диаметра частиц, локальных величин чисел Пекле.

Ключевые слова: проточный и трехзонный реактор, неправильное поведение, синтез оксидов, горение углерода

DOI: 10.31857/S0568528122030136

Одной из наиболее удивительных динамических характеристик реактора с уплотненным слоем является его неправильное поведение [1–16], при котором переходное повышение температуры вызывается быстрым снижением температуры подаваемых реагентов в нижней части вертикально расположенного реактора. Впервые возникновение такого явления в реакторе с уплотненным слоем было предсказано в работах [4, 5]. Неправильное поведение наблюдалось в эксперименте [6] в реакторе с уплотненным слоем, в котором протекала гомогенная жидкофазная реакция. Температурное возмущение переходного режима может перевести реактор в нежелательное состояние или привести к выходу из строя. Неправильное поведение вызвано разницей в скорости распространения концентрационных и температурных возмущений в реакторе. Внезапное охлаждение сырья в нижней части снижает конверсию в верхней части реактора. Повышенная концентрация реагентов вызывает кратковременное повышение температуры в нижней части реактора [3], где использовалась одномерная псевдогомогенная модель для получения простых критериев, предсказывающих условия, при которых возникает неправильное поведение. Эта модель игнорировала осевое рассеивание тепла в реакторе, а также транспортные сопротивления между катализатором и жидкостью. Получено резкое возрастание температурного фронта с нереально высокой пиковой температурой. Оказалось, что модель не может предсказать воспламенение реактора из низкотемпературного установившегося состояния в высокотемпературное установившееся состояние, когда существует множество стационарных состояний, которые экспериментально наблюдались в [2]. Влияние межфазового тепло- и массопереноса на неправильное поведение реактора рассмотрено в [7]. Повышение температуры в процессе регенерации дизельного сажевого фильтра при внезапном понижении температуры на входе в фильтр изучено в [9–11]. Переходный режим в реакторах изучался в [12–17].

Исследование межфазного тепло- и массообмена, дисперсии тепла и вещества проводилось в ряде работ [18—23], где приведены дополнительные ссылки. Были предложены модели усреднения на основе взаимно-проникающих континуумов. При таком подходе утраченная детальная информация о микромасштабах (напр., конфигурация межфазных границ) присутствует в виде коэффициентов тепло- и массопереноса. Отмечалось, что в усредненных уравнениях наряду с молекулярной диффузией тепла и вещества важную роль играет дисперсионный механизм тепло- и массопереноса и пористость реагентов и продуктов синтеза в реакторе. Причиной концентрационной и тепловой дисперсии являются флуктуации массового и теплового потока, тогда как диффузия массы и тепла вызвана случайным молекулярным движением. Различные модели тепловой дисперсии представлены в [21, 22]. Наряду с упомянутыми моделями усреднения развивается также прямое моделирование течения в пористой структуре – см., например, [23]. В [1—10] показано, что осевая дисперсия тепла уменьшает величину температурного отклонения, продлевает переход к новому устойчивому состоянию и может привести к некоторым особенностям: например, дисперсия может создавать волну температуры, которая первоначально движется в восходящем направлении. Дисперсия также может воспламенить реактор из низкотемпературного состояния, что приведет к катастрофическим последствиям [1, 2]. Исследовалось воздействие межфазных транспортных сопротивлений при массовой и тепловой дисперсии возмущения, вызывающие неправильное поведение реактора. Показано, что эти возмущения могут распространяться только в нижнем направлении вертикально расположенного реактора с подачей реагентов сверху, в отличие от диффузионного механизма, при котором возмущения могут распространяться как в восходящем, так и в нижнем направлениях [7].

Следует заметить, что потоки тепла, вещества реагентов и продуктов через пористую среду существенно зависят от структуры пористой среды и особенностей межфазного взаимодействия. Размеры пор, как правило, неравномерно распределены в реакторе синтеза и меняются во времени. Это обстоятельство обусловливает важность моделирования изменения пористости смеси реагентов и продуктов в процессе синтеза мелкодисперсных порошков методом горения. Математические модели синтеза и спекания порошковых смесей основаны на совместном описании тепловых и химических процессов объемных изменений в условиях неоднородного нагрева [24—29]. Химические превращения происходят с изменением объема и сопровождаются появлением механических напряжений и деформаций дополнительно к напряжениям и деформациям вследствие высоких градиентов температуры. В работах [26, 27, 29] проведены теоретические и экспериментальные исследования формирования структуры и физико-механических свойств материала при спекании с целью получения минимальной пористости. Изучение кинетики синтеза титаната бария рассмотрено в [30—33]. В связи с требованиями промышленного производства керамики на основе возникает необходимость сбалансировать потребление энергии, время синтеза и качество конечного продукта, такого как форма и распределение частиц.

Цель данной работы – оценить влияние межфазного, теплового и массового сопротивления в каждой фазе на неправильное поведение при синтезе сложных оксидов в прямоточном реакторе методом горения углерода (CCSO) [30]. На основе осесимметричных моделей [31] анализируется влияние межфазного, теплового и массового сопротивления в газовой и твердой фазах на неправильное поведение проточного реактора синтеза микронных частиц титаната бария при осевой и поперечной дисперсии тепла и вещества в проточном и трехзонном реакторе. Проводится расчет переходных режимов Результаты позволяют сделать вывод о преимуществах трехзонного реактора, в сравнении с моделью проточного реактора в режиме “неправильного поведения”. Прекурсором синтеза $BaTiO_3$ служит $BaCO_3$ [33]. Формулируются осредненные потоки массы компонент: C, $BaCO_3$, BaO, TiO_2, $BaTiO_3$, Ba_2TiO_4, зависящие от температуры газовой и твердой фазы при заданном межфазовом теплообмене, переменном коэффициенте пористости. Результаты моделирования титаната бария в прямоточном и трехзонном реакторе получены на основе макроуравнений сохранения при тепловой и массовой дисперсии, записанных в безразмерных переменных. Проведено моделирование синтеза титаната бария методом CCSO в осесимметричном проточном и трехзонном реакторе при размерах частиц реагентов и продуктов, превышающих микрон. Отметим, что при микронных размерах синтезируемых частиц характерные величины чисел Кнудсена малы и эффекты скольжения и скачков температуры газа на границе пор пренебрежимо малы. Однако для субмикронных размеров частиц и пор становится существенным влияние слоев Кнудсена в газе около поверхности пор и необходим учет эффектов скольжения [34].

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Кинетическая схема синтеза титаната бария. Рассмотрим схему синтеза $BaTiO_3$ с прекурсором $BaCO_3$ [30–33]

$$\begin{gathered}O_2 + C \xrightarrow[Q_1]{k_1} CO_2, \quad BaCO_3 \xrightarrow[Q_2]{k_2} CO_2 + BaO, \quad TiO_2 + BaO \xrightarrow[Q_2]{k_2} BaTiO_3 \\ BaO + BaTiO_3 \xrightarrow[Q_3]{k_3} Ba_2TiO_4, \quad TiO_2 + Ba_2TiO_4 \xrightarrow[Q_3]{k_3} 2BaTiO_3\end{gathered} \tag{1.1}$$

Компонентами газа и твердой фазы являются O_2, CO_2 и C, BaO, $BaCO_3$, TiO_2, $BaTiO_3$, Ba_2TiO_4 соответственно. В реакции TiO_2 + BaO синтез продукта $BaTiO_3$ контролируется диффузией ионов бария через слой титаната бария [33]. В реакциях (1.1) для компонент твердой фазы реагенты не смешиваются на молекулярном уровне, диффундируют и движутся в пределах твердой фазы, Q_1 – тепловой эффект горения углерода. Реакции с тепловым эффектом Q_2, Q_3 предполагаются эндотермическими.

Уравнения в безразмерных переменных. Далее переходим к безразмерным переменным, отмеченным тильдой; характерные величины имеют индекс ноль [25, 31]

$$\tilde\rho_g = \rho_g/\rho_0, \quad \tilde\rho_{jg} = \rho_{jg}/\rho_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \tilde c_{pg} = C_{pg}/c_p, \quad \tilde D = D/D_0$$
$$\tilde\rho_{lS} = \rho_{lS}/\rho_C, \quad l = 1,\ldots,6$$
$$\tilde\kappa_0 = \kappa_0 t_0 A/(c_p\rho_0 V), \quad \tilde D_m = D_m/D_0, \quad \zeta_P = \rho_0/\rho_{0C}$$
$$\tilde\lambda_g = \lambda_{air}/\lambda_0, \quad \tilde\lambda_S = \lambda_S/\lambda_0, \quad \tilde c_S = C_S/c_p$$
$$\mathrm{Ma}^{-2} = \frac{\gamma_{air}p_0}{\rho_0 u_0^2}, \quad \mathrm{Re} = \frac{l_0^2}{t_0\nu_{air}}, \quad \mathrm{R}_S = p_0(\zeta_p\mu_{S0})^{-1}$$
$$\mathrm{Pe}_T = \frac{l_0^2\rho_0 c_p}{t_0\lambda_0}, \quad \mathrm{Pe}_1 = \frac{l_0^2}{t_0 D_0}, \quad \tilde k = t_0 k$$
$$\tilde Q = \frac{Qt_0k}{\rho_0 C_{pg}T_0}, \quad p_0 = \frac{R\rho_0T_0}{M_0} \quad \tilde K = K/\mu_{S0}, \quad \tilde\mu_{solid} = \mu_{solid}/\mu_{S0}, \quad \tilde\mu_{sj} = \mu_{sj}/\mathrm{p}_0, \quad j = 1, 2 \tag{1.2}$$

Здесь [25] $l_0 = 0.007$ м, $t_0 = 2.215$ с, $u_0 = 7\times10^{-4}$ мс$^{-1}$, $A = 0.015$ м^2 – характерная площадь реактора, $V = 1.1\times0^{-4}$ м^3 – характерный объем реактора, $\rho_0 = \rho_{air} = 0.4$ кг м$^{-3}$, $\lambda_0 = \lambda_{air} = 0.06$ Вт$\cdot$м$^{-1}\cdot$K^{-1}, $D_0 = 2\times10^{-5}$ м$^2\cdot$ с$^{-1}$, $\nu_{air} = 9.7\times10^{-5}$ м$^2\cdot$ с$^{-1}$, $d_p = 3\times10^{-6}$ м – характерный диаметр частицы, $\mu_{S0} = 2\times10^9$ Па, $\rho_{0C} = 2267$ кг м$^{-3}$, $\rho_{1S} = \rho_C$, $p = \rho_g(1+\beta\tilde T_g)$ – давление газа, ρ_{1g}, ρ_{2g}, ρ_{3g} – плотности компонент O_2, N_2, CO_2 газовой фазы, $\rho_g = \rho_{1g} + \rho_{2g} + \rho_{2g}$, ρ_{1S}, ρ_{2S}, ρ_{3S}, ρ_{4S}, ρ_{5S}, ρ_{6S} – плотности компонент C, $BaCO_3$, BaO, TiO_2, $BaTiO_3$, Ba_2TiO_4 твердой фазы, $\rho_S = \rho_{1S} + \rho_{2S} + \ldots + \rho_{6S}$, T_g, T_S – температура газа и твердого углерода. Температура газа и твердой фазы находится по формулам: $T_g = T_0(1+\beta\tilde T_g)$, $T_S = T_0(1+\beta\tilde T_S)$ соответственно; $\beta = RT_0/E$ – безразмерный параметр, характеризующий энергию активации; R, E, Q – газовая постоянная, энергия активации, тепловой эффект горения, $\tilde\kappa_0$ – коэффициент теплообмена, $\tilde c_S$, $\tilde c_{pg}$ – теплоемкости, $\tilde\lambda_S$, $\tilde\lambda_g$ – коэффициенты теплопроводности, $\tilde D$ – коэффициент диффузии, Ma, Re – числа Маха и Рейнольдса, $\mathrm{Pe_T}$, $\mathrm{Pe_1}$ – тепловое и диффузионное число Пекле, индекс *air* относится к параметрам для воздуха при нормальных условиях, $\tilde p = p/p_0$ – давление, $\tilde x_i = x_i/l_0$, $\tilde t = t/t_0$ координаты и время, R_S – аналог числа Рейнольдса для твердой фазы. Система уравнений приводится ниже в безразмерных переменных (1.2), символ тильда опускается.

Базовые уравнения. Ниже приведены основные уравнения осесимметричной модели [25].

Уравнения сохранения суммарной массы газовой и твердой фаз

$$\frac{\partial\chi\rho_g}{\partial t} + \nabla\cdot(\chi\rho_g\mathbf{u}) = J_{S\to g}, \quad \frac{\partial(1-\chi)\rho_S}{\partial t} = -J_{S\to g},$$
$$J_{S\to g} = \chi(1-\chi)\rho_{1S}\rho_{1g}k\exp\left(\frac{T_g}{\beta T_g + 1}\right)$$

Уравнения сохранения массы компонент O_2, CO_2, N_2

$$\frac{\partial\chi\rho_g C_1}{\partial t} + \nabla\cdot(\chi\rho_g C_1\mathbf{u}) = \nabla\cdot\left(\frac{\chi}{Pe_1}\rho_g \mathrm{D_{mg}}\nabla C_1\right) - \frac{M_{1g}}{M_S}J_{S\to g}$$

$$\frac{\partial\chi\rho_g C_3}{\partial t} + \nabla\cdot(\chi\rho_g C_3\mathbf{u}) = \nabla\cdot\left(\frac{\chi}{\mathrm{Pe}_1}\rho_g D_{mg}\nabla C_3\right),\quad C_2 = 1 - C_1 - C_3 \tag{1.3}$$

Компоненты тензора массовой дисперсии имеют вид

$$D_{mg} = \begin{pmatrix} D_{1m} & 0 \\ 0 & D_{2m}\end{pmatrix},\quad D_{1m} = D_m(\xi + \varphi_1(\mathrm{Pe}_{1m})),\quad D_{2m} = D_m(\xi + \varphi_2(\mathrm{Pe}_{2m}))$$

$$\mathrm{Pe}_{1m} = \frac{|u|\cdot d_p}{D_m},\quad \mathrm{Pe}_{2m} = \frac{|v|\cdot d_p}{D_m},\quad C_1 = \rho_{1g}\rho_g^{-1},\quad C_2 = \rho_{2g}\rho_g^{-1},\quad C_3 = \rho_{3g}\rho_g^{-1}$$

$$\varphi_1(\mathrm{Pe}_{1m}) = (b_0\mathrm{Pe}_{1m} + b_1\mathrm{Pe}_{1m}\ln\mathrm{Pe}_{1m}),\quad \varphi_2(\mathrm{Pe}_{2m}) = (b_0\mathrm{Pe}_{2m} + b_1\mathrm{Pe}_{2m}\ln\mathrm{Pe}_{2m})$$

Здесь b_0, b_1 – постоянные, ξ – коэффициент извилистости пор.

Уравнения сохранения массы компонент твердой фазы, включая диффузию оксида бария BaO, зависящую от концентрации титаната бария $BaTiO_3$ согласно кинетике синтеза (1.1)

$$\frac{\partial\rho_{1S}}{\partial t} = -J_{1S},\quad \frac{\partial\rho_{2S}}{\partial t} = -J_{2S},$$

$$\frac{\partial\rho_{3S}}{\partial t} = \frac{M_{3S}}{M_{2S}}J_{2S} - \frac{M_{3S}}{M_{4S}}(J_{3S} + J_{4S})J_{3S} + Ds_0\exp(-\beta_D\rho_{5S})$$

$$\frac{\partial\rho_{4S}}{\partial t} = -J_{3S} - J_{5S},\quad \frac{\partial\rho_{5S}}{\partial t} = \frac{M_{5S}}{M_{4S}}(J_{3S} - J_{4S} + 2J_{5S}),\quad \frac{\partial\rho_{6S}}{\partial t} = \frac{M_{5S}}{M_{4S}}(J_{4S} - J_{5S}) \tag{1.4}$$

Здесь Ds_0 – коэффициент диффузии мигрирующей компоненты BaO, β_D – параметр, характеризующий зависимость диффузии от плотности титаната бария. Массовые потоки для компонент твердой фазы C, BaO, $BaCO_3$, TiO_2, $BaTiO_3$, Ba_2TiO_4 (1.3, 1.4) приводятся в [25].

Уравнение движения газа в порах [25, 31]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\chi\rho_g\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\chi\rho_g\mathbf{uu}) + \mathrm{Ma}^{-2}\nabla p = \mathrm{Re}^{-1}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + S_V,\\ \boldsymbol{\tau} = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}\right]\end{gathered} \tag{1.5}$$

где слагаемое распределенного сопротивления газа в порах $(\mathbf{S_V})_j = -u_j\eta_j$, $\eta_j = \alpha_j|\mathrm{u}| + \varsigma_j$, $j = 1,2,3$, u_j – компоненты скорости в декартовой системе координат, $p = \rho_g(1 + \beta T_g)$ – давление газовой фазы.

Уравнение баланса тепла в газовой фазе, включающее дисперсию [24],

$$\rho_g c_{pg}\chi\left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T_g\right) + c_g T_g\chi J_{S\to g} = \nabla\cdot\left(\chi\frac{\mathrm{D_{Tg}}}{Pe_{Tg}}\nabla T_g\right) - \kappa\chi(1-\chi)(T_g - T_S) + \chi Q_r$$

$$Q_r = QJ_{S\to g} \tag{1.6}$$

В правую часть уравнения (1.6) включен тепловой поток Q_r химического превращения. Тензор тепловой дисперсии [25] учитывает продольную и поперечную дисперсию – $D_{Tg} = \begin{pmatrix}\lambda_{1g} & 0\\ 0 & \lambda_{2g}\end{pmatrix}$, где $\lambda_{1g} = \lambda_g(\xi + \varphi_1(\mathrm{Pe}_{1t}))$, $\lambda_{2g} = \lambda_g(\xi + \varphi_2(\mathrm{Pe}_{2t}))$.

Уравнение баланса тепла в твердой фазе

$$\begin{gathered}\rho_S c_S(1-\chi)\left(\frac{\partial T_S}{\partial t} + \mathrm{V}_{solid}\cdot\nabla T_S\right) - c_S T_S(1-\chi)J_{S\to g} =\\ = \nabla\times\left((1-\chi)\frac{\lambda_S}{Pe_{Ts}}\nabla T_S\right) + \kappa\chi(1-\chi)(T_g - T_S) + (1-\chi)Q_r\end{gathered} \tag{1.7}$$

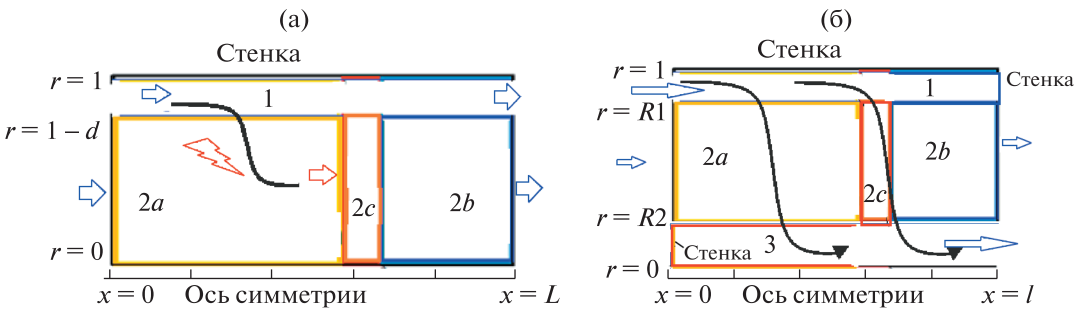

Рис. 1. (а) Схема проточного реактора и (б) осесимметричные области моделирования синтеза в трехзонном реакторе: зона *1* – канал подачи смеси O_2 и N_2; зона *2* – область смеси частиц реагентов и продуктов синтеза титаната бария и компонент газовой смеси; *2a* – нагретая область, содержащая продукт синтеза и продукт горения; *2b* – холодная область, содержащая реагенты синтеза и горения; *2c* – фронт горения углерода; зона *3* – канал отвода смеси N_2 и CO_2. Фронт горения движется слева направо, кислород поступает слева.

Коэффициент теплообмена между газовой и твердой фазами в (1.6), (1.7) описывается с помощью формулы Левека [31, 35] в виде $\kappa = \kappa_0(1 + \mathrm{Re}_{loc}^{0.3}\mathrm{Pe}_{Tloc}^{0.3})$. Здесь $\mathrm{Re}_{loc} = \mathrm{Re}|\mathbf{u}|\rho_g$, $\mathrm{Pe}_{Tloc} = \mathrm{Pe}_{Tg}|\mathbf{u}|\rho_g$, $\mathrm{Pe}_{Tloc} = \mathrm{Pe}_T|\mathbf{u}|\rho_g$ – локальные числа Рейнольдса и Пекле [31]. Справедливость модели распределенного сопротивления пористости в уравнении движения (1.5) подтверждена согласием результатов с экспериментом [25, 30, 31, 34].

Граничные условия в проточном реакторе. Приведенный на рис. 1 реактор состоит из внешней зоны 1 $(0 < x < L, 1 - d < r < 1)$, в которую поступает поток смеси кислорода и азота, и пористой зоны 2 $(0 < x < L,\ 0 < r < 1 - d)$, которая является двухфазной средой реагентов, продуктов газа и мелкодисперсных частиц реагентов, а также продуктов синтеза.

Граничные условия на входе $x = 0$ в зоны реактора

$$t > 0;\quad x = 0;\quad 1 - d < r < 1:$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{in},\quad v = 0,\quad p = p_{in},\quad T = T_{init},\quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

$$t > 0;\quad x = 0;\quad 0 < r < 1 - d:$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad v = 0,\quad p = p_{in},\quad T = T_{init},\quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

Граничные условия на выходе $x = L$ из зон реактора

$$t > 0;\quad x = L;\quad 0 < r < 1{:}\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad v = 0,\quad p = p_{ex},$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_g),\quad \frac{\partial \mathrm{T}_S}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_S),\quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0,\quad (i = 1, 2, 3)$$

Граничные условия на наружной стенке реактора $r = 1$

$$\frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_g),\quad \frac{\partial T_S}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_S),\quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

Граничные условия на оси симметрии реактора

$$t > 0,\quad r = 1{:}\ \mathrm{u} = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_g),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

Граничное условие на внутренней границе $r = 1 - d$

$$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = 1 - d:\quad T_S = T_g$$

Начальные условия для каждой из трех зон

$$t = 0{:}\ u = 0\quad v = 0,\quad C_1 = C_1^0,\quad C_2 = 0,\quad C_3 = C_3^0,\quad \rho_{jS} = \rho_{jS}^0,\quad j = 1, \ldots, 6$$

Граничные и начальные условия для трехзонного реактора. Граничные условия на входе в зоны

$$t > 0;\quad x = 0;\quad 0 < r < R_2\text{: u} = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0,\quad x = 0\text{: } u = u_1,\quad p = p_0,\quad T = T_{init},$$

$$t > 0,\quad x = L\text{: } \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$t > 0;\quad x = 0;\quad R_1 < r < 1\text{: u} = \mathrm{u}_{in},\quad v = 0,\quad \frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = 0;\quad R_2 < r < R_1\text{:}$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial n} = -q_f(t),\quad \frac{\partial T_S}{\partial n} = -q_f(t),\quad \frac{\partial C_1}{\partial n} = -J_{\mathrm{O2}},\quad \frac{\partial C_2}{\partial n} = 0,\quad \frac{\partial C_3}{\partial n} = -J_{\mathrm{N2}}$$

$$\frac{\partial \rho_g C_1}{\partial n} = -\mathrm{O}_{2f},\quad \frac{\partial \rho_g C_3}{\partial n} = -\mathrm{O}_{2f}$$

$$t > 0;\quad x = 0;\quad 0 < r < R_2\text{: u} = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

Граничные условия на выходе из зон

$$t > 0;\quad x = L;\quad R_1 < r < 1\text{: u} = 0,$$

$$v = 0,\quad \frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = L;\quad R_2 < r < R_1\text{:}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial T_S}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_S\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = L;\quad 0 < r < R_2\text{: } \frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = L;\quad R_1 < r < 1\text{: u} = 0,\quad v = 0,$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = L;\quad R_2 < r < R_1\text{: } \frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_S\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

$$t > 0;\quad x = L;\quad 0 < r < R_2\text{: } \frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0$$

Граничное условие на наружной стенке

$$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = 1\text{:}\quad u = 0,\quad v = 0,$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

$$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = 1\text{: } u = 0,\quad v = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}_g}{\partial n} = \alpha_{ex}\left(T_{ex} - T_g\right),\quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

Граничные условия на оси симметрии реактора

$$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = 0\text{: } \frac{\partial u}{\partial r} = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial T_g}{\partial r} = 0,\quad \frac{\partial C_i}{\partial r} = 0$$

Условия на внутренней границе первой зоны $G_1 = \{0 < x < L;\ R_1 < r < 1\}$

$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = R_1\colon T_S = T_g$ либо условие охлаждения $T_S = T_g = T_{W,1}$

Условия на внутренней границе второй зоны $G_2 = \{0 < x < L;\ R_2 < r < R_1\}$ те же, что и выше

$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = R_1\colon T_S = T_g$, либо условие охлаждения $T_S = T_g = T_{W,1}$

$t > 0;\quad 0 < x < L;\quad r = R_2\colon T_S = T_g$, либо условие охлаждения $T_S = T_g = T_{W,1}$

Условия на внутренней границе третьей зоны $G_3 = \{0 < x < L; 0 < r < R_3\}$ те же, что и выше $t > 0; 0 < x < L, r = R_2\colon T_S = T_g$, либо условие охлаждения $T_S = T_g = T_{W,1}$

Начальные условия для каждой из трех зон

$$t = 0;\quad 0 < x < L;\quad R_1 < r < 1\colon \mathrm{u} = \mathrm{u}_{in},\quad v = 0,$$
$$T_g = T^0,\quad C_1 = C^0_{\mathrm{O}_2},\quad C_2 = 0,\quad C_3 = C^0_{\mathrm{N}_2}$$
$$t = 0;\quad 0 < x < L;\quad R_2 < r < R_1\colon \mathrm{u} = 0,\quad v = 0,\quad T_g = T_{init}(x),\quad T_S = T_{init}(x)$$
$$C_1 = C^0_{\mathrm{O}_2},\quad C_2 = 0,\quad C_3 = C^0_{\mathrm{N}_2},\quad \rho_{jS} = \rho^0_{jS},\quad j = 1, \ldots, 6$$
$$t = 0;\quad 0 < x < L;\quad 0 < r < R_2\colon \mathrm{u} = 0,\quad v = 0,$$
$$T_g = T^0,\quad C_1 = C^0_{\mathrm{O}_2},\quad C_2 = 0,\quad C_3 = C^0_{\mathrm{N}_2}$$
$$q_f(t) = Q_f,\quad 0 \le t \le t_1;\quad q_f(t) = 0,\quad t > t_1$$

Предполагается свободный теплообмен на границе $r = 1$ и выходе из реактора $x = L$ при коэффициенте теплообмена $\alpha_{ex} = 10^3$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование синтеза в проточном и трехзонном реакторе на основе (1.1)–(1.7) 1юпроведено методом конечных элементов с адаптацией в зонах больших градиентов, ранее успешно примененного в моделировании процессов горения в химических реакторах синтеза микронных порошков [25, 31, 34] и позволяющего выявить сложные структуры нестационарного горения [36]. Верификации кодов служит решение данным методом задач синтеза ферритов с применением горения углерода [25, 30, 31], где получено удовлетворительное согласие с экспериментами по температуре фронта горения. В данной работе анализировалось влияние числа расчетных ячеек на точность моделирования. Представленные данные расчетов достаточно слабо зависят от размеров ячеек. Использовались сетки, $N_{cel} = 13233$ и $N_{cel} = 52927$ расчетных ячеек, получены близкая скорость движения фронта горения и устойчивый выход на стационарный режим как для прямоточного, так и для трехзонного реактора при различных сетках.

Анализировалось влияние числа расчетных ячеек на точность моделирования. Представленные данные расчетов достаточно слабо зависят от размеров ячеек. Приводятся результаты для: проточных реакторов Р1, Р2, Р3 и трехзонных реакторов Т1, Т2, имеющих следующие геометрические параметры

P1: $L = 2$, $R = 0.8$, $d = 0.2$; **P2**: $L = 2$, $R = 0.8$, $d = 0.2$;

P3: $L = 6$, $R = 0.8$, $d = 0.2$

T1: $L = 6$, $R_1 = 0.8$, $R_2 = 0.2$; **T2**: $L = 2$, $R_1 = 0.9$, $R_2 = 0.1$

Рассматривалась холодная начальная смесь $T^0 = -5$, реактор **P1 и** горячая начальная смесь $T^0 = 0$, реакторы **P2**, **P3**, **T1**, **T2.** Расчет проводился при неизменной пористости $\chi = 0.6$. Варьировался поток кислорода $\mathrm{O}_{2f} = 20$ на входе в реактор **P1**, **P2**, **T2 и** $\mathrm{O}_{2f} = 10$ ра входе в реактор **P3**, **T1.** Инициация горения в реакторе Р1 проводилась тепловым потоком на ходе $q_f = 100$. В реакторах **P2**, **P3**, **T1**, **T2** $q_f = 0$. Все параметры трехзонного реактора **T2** совпадают с соответствующими параметрами проточного реактора **P2**. Все параметры трехзонного реактора **T1** совпадают с соответствующими параметрами проточного реактора **P3**.

Представленные результаты моделирования синтеза титаната бария на основе уравнений (1.2)–(1.7) в реакторе с порами микронного размера проведены при следующих безразмерных параметрах (ср. [25]): $t_{init} = t_1 = 0.025$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.288$, $K = 56.4$, $\mathrm{R}_{Solid} = 0.0316$, $\mathrm{Ma} = 0.2$, $Q_f = 10{-}500$, $Q = 60$. Инициация горения производится тепловым потоком $q_f(t)$, $q_f(t) = Q_f$, $0 \le t \le t_1$; $q_f(t) = 0$, $t > t_1$. Задавался поток кислорода $O_{2f}(\mathrm{t}) = 10, 20$ на интервале времени $0 < t < t_2$ поступающий с сечения $x = 0$, $R_2 < r < 1$ – см. рис. 1б. В начальный момент времени задавались плотности компонент твердой и газовой фазы. Скорость газа равна нулю в начальный момент времени и на внешней границе $0 \le x \le L$, $r = 1$.

Рассмотрены холодная начальная смесь $T^0 = -5$ и горячая начальная смесь $T^0 = 0$. Варьировался поток кислорода $O_{2f}(t) = 10$ В 20, $0 < t < t_2$, $O_{2f}(t) = 0$, $t > t_2$ на входе в реактор. При избытке кислорода углерод успевает полностью прореагировать. Расчеты массовой и тепловой дисперсии проведены для начальной пористости $\chi_0 = 0.6$. Горение холодной начальной смеси инициировалось потоком тепла на входе в реактор $Q_f = 500$, $t_1 = 0.025$.

На рис. 2–6 представлены результаты расчетов с массовой и тепловой дисперсией $D_{1m} = D_m(\xi + \varphi_1(\mathrm{Pe}_{1m}))$, $D_{2m} = D_m(\xi + \varphi_2(\mathrm{Pe}_{2m}))$, $\lambda_{1g} = \lambda_g(\xi + \varphi_1(\mathrm{Pe}_{1t}))$, $\lambda_{2g} = \lambda_g(\xi + \varphi_2(\mathrm{Pe}_{2t}))$, $\mathrm{Pe}_{1m} = \dfrac{|u| \cdot d_p}{D_m}$, $\mathrm{Pe}_{2m} = \dfrac{|v| \cdot d_p}{D_m}$, $\mathrm{Pe}_{1t} = \dfrac{|u| \cdot d_p \rho_g c_g}{\lambda_g}$, $\mathrm{Pe}_{2t} = \dfrac{|v| \cdot d_p \rho_g c_g}{\lambda_g}$ (см. (1.5), (1.8)) для одинаковых параметров размеров частиц.

Данные расчетов проточного реактора при интенсивном потоке кислорода на входе $O_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$ в переходном температурном режиме неправильного поведения представлены на рис. 2 и 3 полем температуры в момент времени $t = 2$ (рис. 2а и б) и динамикой температуры газа в контрольных точках реактора с координатами: (0, 0.5), (0.1, 0.5), $(j \times 0.25, 0.5)$, $j = 2, \ldots, 10$ (кривые *1–9*), $0 < t \le 5$. На рис. 2 иллюстрируется переходный режим для холодной начальной смеси $T^0 = -5$. В момент времени $t = t_2 = 0.5$ прекращается пополнение окислителя на входе $\mathrm{O}_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$, $\mathrm{O}_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$, и горение поддерживается накопившимся ранее кислородом. В момент $t = 0.6$ в средней части реактора начинается переходный режим значительного разогрева (рис. 2, кривые *6–8*), вызванное этим понижением концентрации реагента температурное возмущение передается в направлении входа в реактор $x = 0$, $0 < r < 1$ (рис. 2, линии $\mathrm{O}_{2f} = 0$, $t > t_2$, и-5). Аналогичный переходный режим иллюстрируется на рис. 3, где представлены результаты расчета для **P2** (горячая начальная смесь) $T^0 = 0$. Отметим появление вторичного воспламенения. На интервале времени $0 < t < 0.6$ температура успевает понизиться почти до величины, заданной в начальный момент времени, и при $t \ge 0.7$ развивается значительный перегрев, при котором тепловое возмущение, как и ранее, распространяется в направлении входа в реактор $x = 0$, $0 < r < 1$ (рис. 3, кривые *1–5*). Переходные процессы на рис. 2, 3 получены как для свободного теплообмена с внешней средой $\dfrac{\partial T_g}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_g)$, $\dfrac{\partial \mathrm{T}_S}{\partial n} = \alpha_{ex}(T_{ex} - T_S)$ с коэффициентом теплообмена $\alpha_{ex} = 1000$, так и при задании температуры на выходе, равной температуре внешней среды. Результаты качественно совпадают.

Рисунки 2, 3 иллюстрируют развитие перегрева в проточном реакторе при интенсивном притоке окислителя $\mathrm{O}_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$, при холодной (рис. 2) и горячей (рис. 3) смеси реагентов в начальный момент времени. Для холодной смеси $T^0 = -5$, рис. 2, горение инициировалось тепловым потоком $Q_f = 100$, $t_1 = 0.025$, который разогревал область синтеза около входа в реактор до безразмерной температуры $\tilde{T}_g = 10{-}20$ (кривые *1–3*). К моменту $t_2 = 0.5$ (рис. 2) реактор успел прогреться, и прекращение притока кислорода $\mathrm{O}_{2f} = 0$, $t > t_2$ приводит к понижению концентрации окислителя, замедлению горения и, как следствие, к неправильному поведению – появлению перегрева [1–11], который отчетливо виден на кривых *4–9*. Повторный разогрев смеси реагентов и продуктов синтеза во входной области реактора иллюстрируется линиями *1–3* для интервала времени $t > 0.9$. Переходный режим неправильного поведения проточного реактора при горячей начальной смеси реагентов $T^0 = 0$ показан на рис. 3а. Разогрев до $\tilde{T}_g = 0.6$ (линия *1*) и распространение волны горения (линии *2–9*) на интервале времени $0 < t < 0.8$ сменяются повторным воспламенением *4* и движением теплового фронта с резким разогревом в направлении

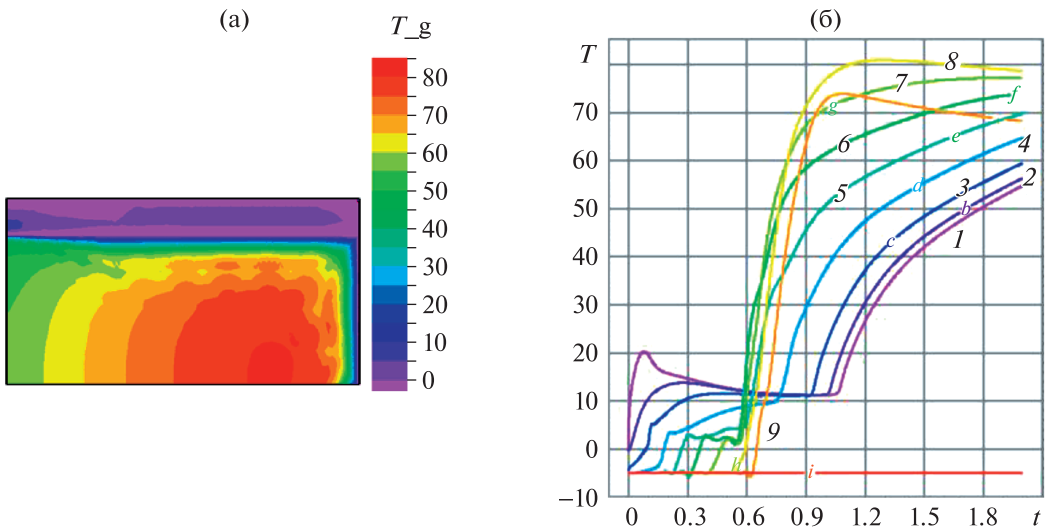

Рис. 2. (а) Неправильное поведение прямоточного реактора **Р1**, $T^0 = -5$ (холодная начальная смесь). $t_1 = 0.025$, $t_2 = 0.5$, $O_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$, $O_{2f} = 0$, $t > t_2$. Температура в реакторе в момент времени $t = 2$. Палитра справа – температура газа. (б) Динамика температуры газа в контрольных точках с координатами $(0, 0.5)$, $(0.1, 0.5)$, $(j \cdot 0.25, 0.5)$, $j = 1,\ldots,7$ – кривые *1–9*.

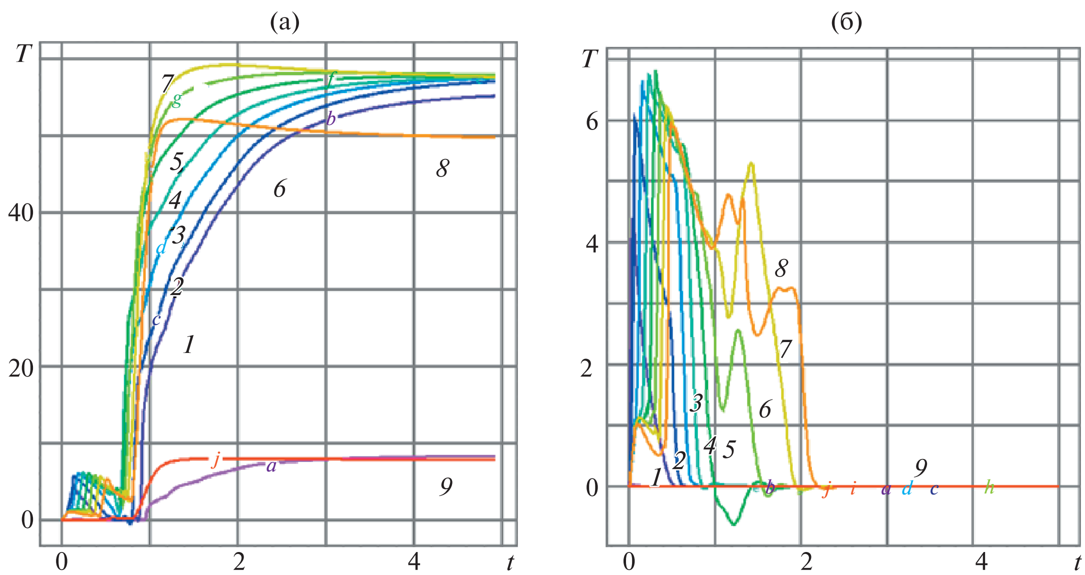

Рис. 3. (а) Неправильное поведение прямоточного реактора **Р2** (горячая начальная смесь), $T^0 = 0$. Динамика температуры газа (кривые *1–9*) в контрольных точках с координатами $(0, 0.5)$, $(0.1, 0.5)$, $(j \cdot 0.25, 0.5)$, $j = 1, \ldots, 7$; (б) Динамика температуры газа в точках с координатами $(0, 0.5)$, $(0.1, 0.5)$, $(j \cdot 0.25, 0.5)$, $j = 1, \ldots, 7$в трехзонном реакторе **Т2** на интервале времени $0 < t < 5$.

к выходу из реактора *5–8*. Температурное возмущение распространяется также в направлении ко входу в реактор *1*, *2* на интервале $t > 0.8$. Рисунок 3б иллюстрирует стабильный режим трехзонного реактора Т2 при тех же параметрах. Отметим отсутствие перегрева и выход на начальную температуру. Устойчивый выход температурного фронта на стационарный режим, показанный на рис. 3 для интервала $0 < t \le 5$, указывает на отсутствие накопления погрешности с ростом времени расчета.

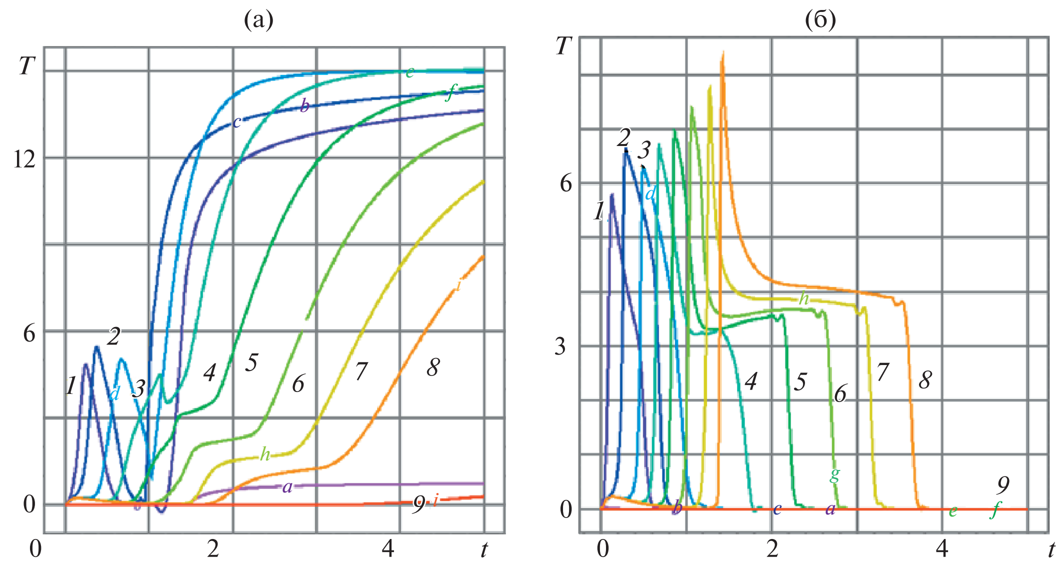

Рис. 4. (а) Расчет для проточного реактора **Р3** и трехзонного реактора **Т1**. (б) Температура в трехзонном реакторе **Т1.** Температура в точках с координатами (0, 0.5), (0.1, 0.5), $(j \cdot 0.25, 0.5)$, $j = 1, \ldots, 7$.

Сопоставление расчетов на рис. 3, 4 проводится при одинаковых величинах физико-химических параметров и начальных данных для проточного и трехзонного реактора.

В случае горячей начальной смеси инициация горения производится достаточно интенсивным потоком кислорода $O_{2f} = 20$, $0 < t \le t_2$ на входе в реактор. Интересно отметить, что в проточном реакторе **Р1** (рис. 2) и **Р2** (рис. 3) перегрев при холодной начальной смеси происходит сильнее, чем при горячей начальной смеси.

На рис. 4 представлен расчет для проточного реактора **Р3** (а) и трехзонного реактора **Т1** (б). Приводится температура $\tilde{T}_g$ в точках с координатами (0, 0.5), (0.1, 0.5), $(j \times 0.25, 0.5)$, $j = 2, \ldots, 10$. Отметим стабильный режим работы трехзонного реактора **Т1**. Расчеты на больших отрезках времени рис. 4б не показали повторного возрастания температуры как в проточном реакторе, рис. 4а.

Сравнение переходного режима в проточных реакторах (рис. 3 и 4) с динамикой температуры в трехзонных реакторах при одинаковых параметрах на входе, на стенке, в начальный момент времени и свободном теплообмене с внешней средой и одинаковой тепловой и массовой дисперсии показывает устойчивый режим синтеза в трехзонных реакторах, в то время как в проточных реакторах при уменьшении подачи окислителя происходит развитие перегрева.

Данные на рис. 5 иллюстрируют особенности синтеза титаната бария в проточном реакторе **Р2** в режиме перегрева. Для сравнения приводятся результаты расчета устойчивого синтеза в трехзонном реакторе **Т2**. Показана динамика изменения плотности реагентов твердой фазы и продукта синтеза. Отметим неустойчивый характер синтеза в проточном реакторе, появление локальных неоднородностей на рис. 5а и б. На больших интервалах времени $t > 1$ расчет синтеза в прямоточном реакторе приводит к нереалистичным величинам плотности реагентов и продукта синтеза титаната бария.

Сравнение продукта синтеза $BaTiO_3$ в момент времени $t = 0.9$ в проточном **Р2** и трехзонном **Т2** реакторе представлено распределениями $BaTiO_3$ в реакторах **Р2** и **Т2** на рис. 6а и б соответственно. Палитра распределений плотностей позволяет видеть степень неоднородности синтезируемого продукта.

Проведен сравнительный анализ работы проточного и трехзонного реактора при синтезе микронных частиц титаната бария методом горения углерода для горячей смеси реагентов. Рассмотрены осесимметричные проточные реакторы **Р1**, **Р2**, **Р3** длинной L=2, с радиусом рабочей части $R = 0.8$, протоком $d = 0.2$ и трехзонный реактор **Т1** с размерами $L = 2$, $R_1 = 0.8$, $R_2 = 0.2$ и **Т2** с размерами $L = 6$, $R_1 = 0.9$, $R_2 = 0.1$. Инициация горения углерода производилась тепловым

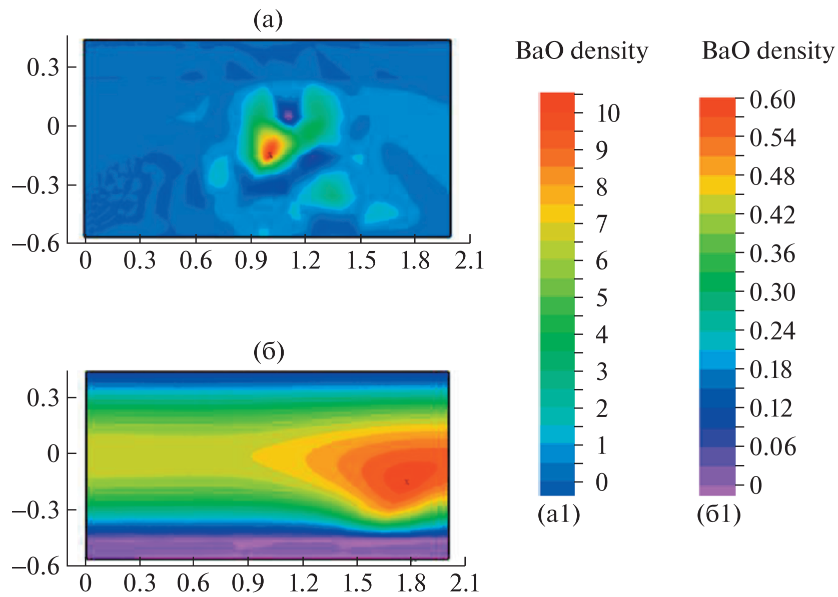

Рис. 5. Сравнение реагента синтеза BaO в момент времени $t = 0.9$ в (а) проточном **Р2** и (б) трехзонном **Т2** реакторе. (а1, б1) – палитра распределений плотности BaO.

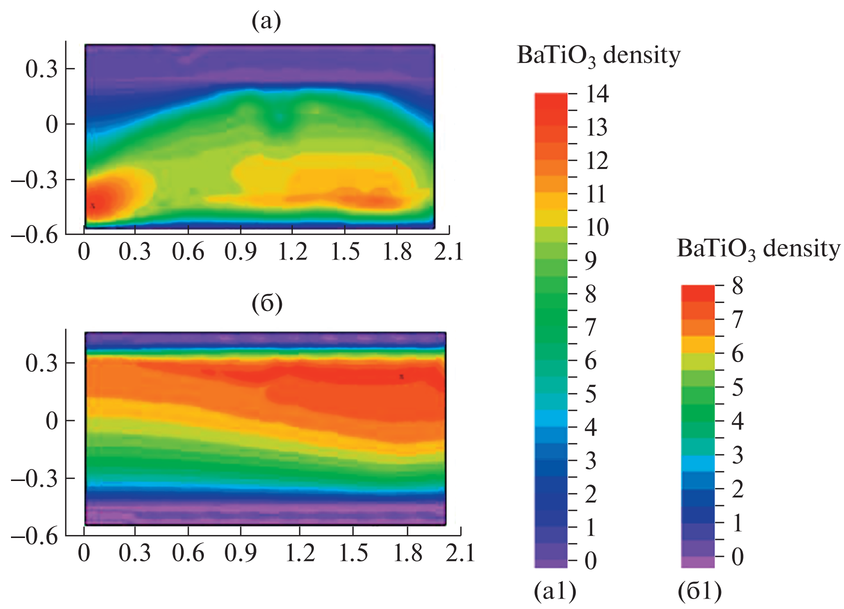

Рис. 6. Сравнение продукта синтеза $BaTiO_3$ в момент времени $t = 0.9$ в проточном **Р2** (а) и трехзонном **Т2** (б) реакторе. (а1, б1) – палитра распределений плотности $BaTiO_3$.

потоком $q_f(t) = Q_f$, $0 \le t \le t_1$; $q_f(t) = 0$; $t > t_1$ на небольшом интервале времени и потоком кислорода O_{2f}, $0 < t \le t_2$, $O_{2f} = 0$, $t > t_2$ различной интенсивности, заданными на входе в реактор. Анализируются процессы синтеза титаната бария при холодной и горячей начальной смеси реагентов. Первоначальный нагрев смеси реагентов ускоряет процесс синтеза, но как показали наши исследования, приводит к появлению вторичной моды работы проточного реактора со значительным разогревом и влияет на стабильность работы проточного реактора. В случае горячей начальной смеси реагентов при дефиците кислорода в проточном реакторе **Р2** и **Р3** углерод успевает прореагировать только на участке $0 < x < L/3$. Получены два фронта горения с максимальной температурой $T_{\max} = 600$ K и $T_{\max} = 900$ K в реакторе **Р3** и $T_{\max} = 600$ K и $T_{\max} = 2200$ K в реакторе **Р2**, рис. 3 и 5. Показано, что дисперсия может создавать температурное возмущение, воспламеняющее реактор из низкотемпературного состояния, что приведет к катастрофическим последствиям. Сопротивление тепломассопереносу между газовой и твердой фазой приводит к установившейся множественности мод в проточном реакторе, аналогичной для реактора с уплотненным слоем [3, 7]. Появление второй моды обусловлено понижением концентрации окислителя вследствие прекращения притока кислорода $O_{2f} = 0, t > t_2$ и замедления горения. В расчетах при дефиците кислорода в момент времени $0.7 < t < 0.9$ происходит резкое понижение температуры, это увеличивает концентрацию O_2 вверх по потоку, что, по-видимому, приводит к резкому возрастанию температуры в момент времени $0.9 < t \leq 1.1$ и к переходу реактора на новый устойчивый высокотемпературный режим работы [1, 2]. Отмеченный неустойчивый режим не проявляется в работе трехзонного реактора при тех же первоначальных параметрах (рис. 4 и 5). Синтез титаната бария проходит устойчиво и значительно эффективнее, чем в прямоточном и в трехзонном реакторе с холодной начальной смесью реагентов. Отсутствие перегрева в работе трехзонного реактора связано с теплоотводом через канал $0 < x < L$, $0 < r < R_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита двухтемпературная модель проточного и трехзонного реактора при осевой и поперечной дисперсии в режимах нестабильной работы проточного реактора. Концентрационное и температурное возмущение приводит проточный реактор в нежелательное состояние или к разгону, неправильное поведение вызвано разницей в скорости распространения концентрации и температурных возмущений в реакторе. Подтвержден вывод о реакторе с уплотненным слоем о том, что внезапное охлаждение сырья снижает конверсию в верхней секции реактора. Повышенная концентрация реагента вызывает переходное повышение температуры в нижней части реактора. Заметим, что в реакторе без протока расчеты не показали перегрева, указывающего на неправильное поведение.

Результаты подтверждают прогнозы, что внезапное снижение температуры подачи в реакторе приводит к незначительному отклонению температуры, когда конверсия в реакторе очень низкая или очень высокая, но может привести к заметному отклонению температуры для реактора с промежуточным уровнем конверсии.

Результаты позволяют сделать вывод, какой тип модели следует использовать для эффективного прогнозирования неправильного поведения.

Работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации АААА-А20-120011690135-5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sharma C.S., Hughes R.* The Behavior of an Adiabatic Fixed Bed Reactor for the Oxidation of Carbon Monoxide: I. General Parametric Studies // Chem. Eng. Sci. 1979. V. 34. P. 613.
2. *Sharma C.S., Hughes R.* The Behavior of an Adiabotic FixedBed Reactor for the Oxidation of Carbon Monoxide: II. Effect of Perturbations // Chem. Eng. Sci. 1979. V. 34. P. 625.
3. *Mehta P.S., Sams W.N., Luss D.* Wrong-way behavior of packed-bed reactors: 1. The pseudo-homogeneous model // AIChE J. 1981. V. 27. P. 234–246. https://doi.org/10.1002/aic.690270210
4. *Boreskov G.K., Slinko M.G.* Modelling of Chemical Reactors // Pure Appl. Chem. 1965. V. 10. P. 611.
5. *Crider J.E., Foss A.S.* Computational Studies of Transients in Packed Tubular Chemical Reactors // AIChE J. 1966. V. 12. P. 514.
6. *Hoiberg J.A., Lyche B.C., Foss A.S.* Experimental Evaluation of Dynamic Models for a Fixed-Bed Catalytic Reactor // AIChE J. 1971. V. 17. P. 1434.
7. *Chen Y.C., Luss D.* Wrong-Way Behavior of Packed-Bed Reactors: Influence of lnterphase Transport // AIChE Journal July 1989. V. 35 (7). P. 1148–1156.
8. *Gallant T.* Experimental diesel particulate filter capabilities at PNNL // Proceedings of the DEER Conference, 2006. 20–24 Aug. Chicago.
9. *Chen K., Martirosyan K.S., Luss D.* Wrong-Way Behavior of Soot Combustion in a Planar Diesel Particulate Filter // Ind. Eng. Chem. Res. 2009. V. 48. P. 8451–8456.

10. *Chen K., Martirosyan K.S., Luss D.* Hot Zones Formation During Regeneration of Diesel Particulate Filters // AIChE J. 2011. V. 57 (2). P. 497–506.
11. *Chen K., Martirosyan K.S., Luss D.* Temperature gradients within a soot layer during DPF regeneration // Chem. Eng. Sci. 2011. V. 66. P. 2968–2973.
12. *Haralampous O.A., Koltsakis G.C.* Intra-layer temperature gradients during regeneration of diesel particulate filters // Chem. Eng. Sci. 2002.V. 57. (13). P. 2345–2355.
13. *Haralampous O.A., Koltsakis G.C.* Oxygen diffusion modeling in diesel particulate filter regeneration // AICHE J. 2004. V. 50 (9). P. 2008–2019.
14. *Bissett E.J.* Mathematical model of the thermal regeneration of a wall-flow monolith diesel particulate filter. Chemical Engineering Science // 1984. V. 8 (39). P. 1233–1244.
15. *Pinjala V., Chen Y.C., Luss D.* Wrong-way behavior of packed-bed reactors. II. Impact of thermal dispersion // AICHE J. 1988. V. 34. P. 1663–1672.
16. *Guo Z., Zhang Z.* Hybrid modeling and simulation of multidimensional processes for diesel particulate filter during loading and regeneration // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications. 2007. V. 51 (6) P. 519–539.
17. *Fatehi M., Kaviany M.* Role of gas - phase reaction and gas - solid thermal nonequilibrium in reverse combustion // Int. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 11. P. 2607.
18. *Oliveira A.A.M., Kaviany M.* Nonequilibrium in the transport of heat and reactants in combustion in porous media // PECS . 2001. V. 27. P. 523.
19. *Pereira F.M., Oliveira A.A.M., Fachini F.F.* Theoretical analysis of ultra - lean premixed flames in porous inert media // J. Fluid Mech. 2010. V. 657. P. 285.
20. *Fatehi M., Kaviany M.* Role of gas - phase reaction and gas - solid thermal nonequilibrium in reverse combustion // Int. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 11. P. 2607.
21. *Delgado J.M.P.Q.* Longitudinal and transverse dispersion in porous media // Chem. Eng. Res. Des. 2007. V. 85. P. 1245.
22. *Quintard M., Whitaker S.* Theoretical Analysis of Transport in Porous Media. Eds. N.Y.: Marcel Dekker, 2000. 788 p.
23. *Betelin V.B., Galkin V.A., Shpilman A.V., Smirnov N.N.* Digital core simulator – a promising method for developming hard-to-recover oil reserves technology // Materials Physics and Mechanics, Санкт-Петербург: Изд-во ФГБУ ИПМаш. РАН, 2020. V. 44. P. 186–209.
24. *Markov A.A.* On Thermal and Mass Dispersion Effect on Barium Titanate Synthesis via CCSO // Физ.-хим. кинет. газов. дин. 2010. Т. 20 (4) С. 1. http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/870/, http://www.chemphys.edu.ru.
25. *Марков А.А.* Моделирование синтеза микронных частиц титаната бария в осесимметричном прямоточном и трехзонном реакторе // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94 (5). С. 1343–1357.
26. *Сорокова С.Н., Князева А.Г.* Связанная модель спекания порошков системы Ti–$TiAI_3$ // Изв. ТПУ. 2009. Т. 314 (2). С. 96.
27. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Изд-во Иван Федоров, 2014. 170 с.
28. *Trevino C., Leo De, Dannangoda G.C., Hobosyan M.A., Held J.T. Safi Samghabadi F., Khodadadi M., Litvinov D., Mkhoyan K.A., Martirosyan K.S.* Carbon combustion synthesis of Janus-like particles of magnetoelectric cobalt ferrite and barium titanate // Ceramics Int. 2021. V. 47 (4). P. 5415–5422. https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.10.123
29. *Марков А.А.* Эффект теплового и концентрационного расширения при синтезе титаната бария в прямоточном реакторе // ТОХТ. 2021. Т. 55 (5). С. 618–631.
30. *Martirosyan K.S., Luss D.* Carbon Combustion Synthesis of Oxides Process Demonstration and Features // AIChE 2005. V. 51 (10). P. 2801.
31. *Марков А.А., Филимонов И.А., Мартиросян К.С.* Моделирование синтеза сложных оксидов субмикронной дисперсности // ТОХТ. 2017. V. 51 (1). С. 31.
32. *Brzozowski E., Sanchez J., Castro 1. M.S.* BaCO3–TiO2 Solid State Reaction: A Kinetic Study // J. Materials Synthesis and Processing. 2002. V. 10 (1). P. 1064.
33. *Beauger A., Mutin J.C., Niepce J.C.* Synthesis reaction of metatitanate $BaTiO_3$. Part 1 Effect of the gaseous atmosphere upon the thermal evolution of the system $BaCO_3$–TiO_2 // J. Materials Science. 1983. V. 18. P. 3041.
34. *Марков А.А., Обосян М.А., Мартиросян К.С.* Исследование синтеза ферритов за волной горения с применением моделей скольжения и скачков температуры и концентраций компонент газовой фазы на поверхности пор твердой фазы // Физ.-хим. кинет. газов. дин. 2015. V. 16 (1). http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-1/articles/506/
35. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 3-е, испр и доп. М.: Наука, 1987. 491 с.
36. *Марков А.А., Филимонов И.А.* Нестационарные структуры спирального горения на поверхности // Физ.-хим. кинет. газов. дин. 2021. Т. 22 (3). http://chemphys.edu.ru/issues/2021-22-3/articles/938/.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 30–43

УДК 532.526.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВДУВА НА СКОЛЬЗЯЩЕЙ ПЛАСТИНЕ, С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО РАЗМАХУ ДОННЫМ ДАВЛЕНИЕМ, НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА РЕЖИМЕ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Г. Н. Дудин[a],*

[a] *Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия*

**E-mail: gndudin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 06.10.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Для режима сильного вязко-невязкого взаимодействия рассмотрено течение в трехмерном пограничном слое на скользящей пластине конечной длины, по нормали к которой вдувается газ. Для исследования распространения возмущений против потока, в окрестности передней кромки пластины проведены четырехчленные разложения функций течения в ряды, в предположении, что на задней кромке пластины задается донное давление, величина которого зависит от поперечной координаты. Показано, что в эти разложения входит неопределенная функция, а также ее первая и вторая производные по поперечной координате. Сформулированы и численно решены соответствующие краевые задачи, найдены собственные числа. Показано, что при увеличении, как угла скольжения, так и интенсивности вдуваемого газа, существенно усиливается возможность передачи возмущений вверх против потока. Исследовано влияние определяющих параметров на характеристики течения в пространственном пограничном слое.

Ключевые слова: трехмерный пограничный слой, скользящая пластина, сильное взаимодействие, вдув, температурный фактор

DOI: 10.31857/S0568528122030057

На режиме сильного взаимодействия пограничного слоя с гиперзвуковым потоком автомодельное решение для течения около полубесконечной пластины было получено в [1, 2]. Однако исследования двумерных течений в пограничном слое на пластине, оканчивающейся донным срезом, показали, что в этом случае разложение функций течения в окрестности передней кромки не является единственным, а содержит некоторую константу [3–5]. При этом считалось, что давление на задней кромке пластины постоянно. Существование неединственности решения в окрестности передней кромки объясняет возможность распространения возмущений против потока на всю длину пластины [3]. Влияние определяющих параметров на значение собственного числа в случае двумерных течений достаточно подробно изучено в [6]. В [7, 8] исследовано течение в пограничном слое на пластине в случае, когда дополнительное условие на задней кромке зависит от поперечной координаты. Показано, что в этом случае разложения для давления, энтальпии, продольной и нормальной компонент скорости в ряды зависят от некоторой произвольной функции поперечной координаты. Краевые задачи для определения членов разложения для поперечной компоненты скорости отделяются от основных систем уравнений, так как показатель степени для первого члена разложения равен собственному числу плюс единица, а для второго – удвоенному собственному числу плюс единица. При этом поперечный компонент скорости оказывается пропорциональным производной от указанной выше произвольной функции по поперечной координате. Показано, что в этом случае происходит перестройка двумерного пограничного слоя в трехмерный, но, важно отметить, что образующееся поперечное течение не оказывает влияние на индуцированное давление, энтальпию, продольный и нормальный компоненты скорости.

Совершенно иная картина течения в пограничном слое реализуется при обтекании скользящей пластины конечной длины, когда течение изначально является трехмерным. Для полубесконечной скользящей пластины автомодельное решение впервые найдено в [9]. В [10] было показано, что решение задачи вблизи передней кромки скользящей пластины также может быть не единственным. Результаты исследования обтекания скользящей пластины, когда дополнительное условие на ее задней кромке не является постоянным, а изменяется по размаху, представлены в [11–13], где сформулированы и решены краевые задачи (максимально до трех членов разложения) и исследовано влияние угла скольжения на характеристики течения на пластине.

Еще одним способом изменять "эффективную форму" поверхности пластины, обтекаемой гиперзвуковым потоком вязкого газа, и влиять на распространение возмущений против потока является вдув газа по нормали к поверхности. В [14] рассмотрено течение вблизи верхней стороны клина, через поверхность которого по нормали к ней производится вдувание газа. Индуцированное давление определялось по формуле "касательного клина". Построены автомодельные решения, как в общем случае, когда возникает невязкая область около поверхности тела (отсоединение пограничного слоя), так и при ее отсутствии. Подробно рассмотрен случай, когда параметр, характеризующий квадрат отношения характерных толщин образовавшегося отсоединенного невязкого течения к толщине вязкого слоя равен $N = O(1)$, а значение функции тока на поверхности клина постоянно. Показано, что краевая задача, кроме автомодельного решения, имеет однопараметрическое семейство решений, если давление на задней кромке отличается от значения, соответствующего автомодельному. Результаты численных расчетов, проведенных для предельного случая $N \to \infty$, показали, что существует одно собственное число $\alpha \approx 0.23$, т.е. влияние краевых условий на течение в области, лежащей выше по потоку, может быть очень сильным.

В [15, 16] неавтомодельные краевые задачи решались численно и поэтому разложение функций в ряды в окрестности передней кромки не проводилось. В [15] рассмотрено влияние величины донного давления на обтекание плоской поверхности клина гиперзвуковым потоком вязкого газа, в предположении, что поверхность пластины проницаема и по нормали к ней вдувается газ того же состава, что и в набегающем потоке. В [16] исследовано течение, возникающее при вдуве газа через проницаемую поверхность треугольной пластины, на режиме сильного взаимодействия. Установлено, что увеличение температуры обтекаемой поверхности, при заданной безразмерной величине скорости вдува, приводит как к количественному, так и качественному изменению характеристик течения в пограничном слое, особенно в окрестности линии симметрии треугольной пластины. В [17] исследовано двумерное обтекание пластины гиперзвуковым потоком при наличии массообмена, причем в отличие от [14], для описания течения в невязком ударном слое использовалась гиперзвуковая теория малых возмущений, как и в [5]. Показано, что увеличение скорости вдува приводит к существенному уменьшению собственных чисел, т.е. к усилению интенсивности передачи возмущений против потока. В [18] исследовано влияние вдува на поверхности пластины конечной длины в случае, когда на задней кромке задавалось донное давление, зависящее от поперечной координаты. В окрестности передней кромки построены разложения для функций течения. Показано, что краевые задачи для поперечной компоненты скорости отделяются от основных систем, так как их порядок разложения на единицу больше, чем собственное число. Выявлено сильное влияние скорости вдува на образование пространственного течения в пограничном слое в рассматриваемом случае и на значительное увеличение интенсивности распространения возмущений против потока. Показано, что влияние третьего члена разложения на функции течения увеличивается при усилении интенсивности вдува. Вышеизложенное показывает, что увеличение угла скольжения или интенсивности вдува газа по нормали к поверхности может приводить к уменьшению собственных чисел, а следовательно, и к усилению интенсивности распространения возмущений против потока.

В данной работе исследуется влияние распределенного вдува на течение в ламинарном пограничном слое на скользящей пластине, когда на ее задней кромке давление зависит от поперечной координаты. Рассматривается режим сильного вязко-невязкого взаимодействия. Проведено разложение функций течения в окрестности передней кромки, сформулированы и решены краевые задачи для четырех членов разложения. Определены собственные числа, которые характеризуют интенсивность передачи возмущений против потока. Установлено, что в третью и четвертую систему уравнений входят параметры, которые однозначно определяются из интегральных условий, полученных в результате разложений индуцированного давления и толщины вытеснения. Решение этих систем позволяет учесть влияние, соответственно, первой и второй производных от функции распределения давления на задней кромке пластины. Основное внимание уделено исследованию влияния интенсивности вдувания на изменения характеристик пространственного течения в пограничном слое на скользящей пластине и на распространение возмущений от задней кромки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается обтекание бесконечной по размаху пластины заданной длины L при наличии угла скольжения на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия, через поверхность температура, которой T_w – постоянна, производится распределенный вдув газа. Вдуваемый газ имеет тот же состав, что и в набегающем потоке. Газ считается совершенным с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$ и коэффициентом вязкости, линейно зависящим от температуры $\mu^0/\mu_\infty = c_\infty T^0/T_\infty$, где $c_\infty = \text{const}$, а индекс ∞ обозначает параметры в невозмущенном потоке. Компоненты вектора скорости u^0, v^0, w^0 в трехмерном ламинарном пограничном слое направлены соответственно вдоль осей x^0, y^0, z^0 декартовой системы координат, начало которой расположено на передней кромке пластины. Ось x^0 направлена перпендикулярно передней кромки, а ось z^0 – вдоль нее. Угол скольжения β – это угол между направлением невозмущенного потока и осью x^0. Считается, что на задней кромке пластины при $x^0 = L$ задано распределение донного давления $p_d^0(z^0)$, которое зависит от поперечной координаты z^0, причем характерный размер области изменения давления по поперечной координате порядка L_z. Отношение характерных линейных масштабов $N = L/L_z$. Считается, что для проекции числа Маха на нормаль к передней кромке выполняется условие $M_n = M_\infty \cos\beta \gg 1$. Рассматривается предельный случай, когда в невозмущенном потоке V_∞ – скорость, ρ_∞ – плотность и H_∞ – энтальпия стремятся к постоянным значениям, а число Маха $M_\infty \to \infty$. В этом случае параметры: p_∞ – давление, a_∞ – скорость звука и T_∞ – температура стремятся к нулю.

В соответствии с гиперзвуковой теорией малых возмущений [19] при $M_n \gg 1$ и характерной безразмерной толщиной ламинарного пограничного слоя $\delta = \mathrm{Re}_0^{-1/4} \ll 1$ при выполнении предположения о сильном взаимодействии $M_n\delta \gg 1$ индуцированное давление, создаваемое толщиной вытеснения, имеет порядок $p^0 \sim p_\infty M_n^2\delta^2$, а плотность газа – $\rho^0 \sim \rho_\infty\delta^2$. Здесь $\mathrm{Re}_0 = \rho_\infty V_\infty L/\mu_0$ – число Рейнольдса, μ_0 – динамический коэффициент вязкости при температуре торможения. При обтекании скользящей пластины характерный масштаб поперечного компонента скорости: $w^0 \sim V_\infty \sin\beta$. Заметим, что при отсутствии угла скольжения ($\beta = 0$) скорость поперечного течения будет определяться градиентом индуцированного давления по размаху пластины [7, 8].

Через проницаемую верхнюю поверхность пластины по нормали к ней производится непрерывный распределенный вдув газа с заданной скоростью $v_w^0(x^0, z^0) = v^0(x^0, z^0, y^0 = 0)$, по порядку величины, равной $O(\delta)$, что соответствует характерному нормальному компоненту скорости в пограничном слое при отсутствии массообмена. При этом предполагается, что интенсивность вдуваемого газа такова, что около этой поверхности область невязкого течения не образуется [14]. В результате около верхней стороны пластины гиперзвуковой поток обтекает “эффективное тело”, образованное с учетом влияния вязкости и вдува [14]. Для исследования распространения возмущений против потока в пограничном слое в данной работе скорость вдувания задается в следующем специальном виде:

$$v_w^0(x^0,\ z^0) = \sqrt{\frac{2\gamma\mu_0}{(\gamma-1)\,x^0 u_\infty p^0(x^0,z^0)}}RT_w^0 v_w \tag{1.1}$$

Здесь R – газовая постоянная, $p^0\ (x^0, z^0)$ – величина индуцированного давления на верхней поверхности пластины, а безразмерный параметр v_w является постоянным по величине и определяет нормальный компонент вектора скорости на поверхности клина в краевой задаче, записанной в безразмерных переменных и с учетом особенностей поведения функций течения в окрестности передней кромки пластины. Следует отметить, что распределение давления $p^0(x^0, z^0)$, входящее в выражение (1.1), заранее не известно, а определяется только в результате решения краевой задачи. Заметим, что при $v_w = \text{const}$, в случае обтекания полубесконечной ($L \to \infty$) скользящей пластины, для $v_w^0(x^0, z^0)$ получается фактически автомодельный вдув.

Рассматриваются режимы, для которых характерная толщина “эффективного тела” имеет порядок характерной безразмерной толщины вытеснения пограничного слоя $\delta \ll 1$. Тогда образующийся невязкий ударный слой в первом приближении описывается гиперзвуковой теорией малых возмущений. При рассмотрении режима сильного вязко-невязкого взаимодействия $M_n\delta \gg 1$ для определения давления, создаваемого толщиной вытеснения пограничного слоя, в который вдувается газ, можно использовать формулу “касательного клина” [19, 20]. В соответствии с оценками для пространственного ламинарного пограничного слоя в гиперзвуковом потоке [4, 19] вводятся следующие безразмерные переменные:

$$x^0 = Lx, \quad y^0 = \delta Ly, \quad z^0 = L_z z, \quad \mu^0 = \mu_0\mu, \quad \delta_e^0 = L\delta\delta_e^*, \quad \rho^0 = \rho_\infty\delta^2\rho \tag{1.2}$$

$$p^0 = \rho_\infty V_\infty^2\delta^2 p_*, \quad p_d^0(z^0) = \rho_\infty V_\infty^2\delta^2 p_d(z), \quad u^0 = V_\infty u, \quad w^0 = V_\infty w$$

$$v^0 = V_\infty\delta v_*, \quad v_w^0 = V_\infty\delta\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma x p_*(x,z)}}H_w v_w,$$

$$H^0 = 0.5V_\infty^2 H, \quad H_w^0 = 0.5V_\infty^2 H_w = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_w^0$$

Здесь H^0 – полная энтальпия. Далее используется преобразование А.А. Дородницына

$$\lambda = \int_0^y \rho dy, \quad v_\delta = \rho v_* + u\frac{\partial\lambda}{\partial x} + Nw\frac{\partial\lambda}{\partial z} \tag{1.3}$$

Учитывая, что на поверхности пластины плотность вдуваемого газа $\rho_w = 2\gamma p_*/(\gamma-1)H_w$, то для величины, характеризующей интенсивность вдува в переменных (1.3), получаем $v_{\delta w}(x, z) = (2\gamma p_*(x, z)/(\gamma-1)x)^{1/2}v_w$.

Для учета особенности поведения функций течения в окрестности передней кромки вводится преобразование переменных

$$\lambda = x^{1/4}\lambda^*, \quad p_* = x^{-1/2}p(x,z), \quad \rho = x^{-1/2}\rho^*(x,\lambda^*,z) \tag{1.4}$$

$$\delta_e^* = x^{3/4}\delta_e(x,z), \quad v_\delta = x^{-3/4}\left(v^* - xu\frac{\partial\lambda^*}{\partial x}\right), \quad v_w^*(x,z) = \sqrt{\frac{2\gamma p_*(x,z)}{(\gamma-1)x}}v_w$$

В переменных (1.1)–(1.4) система уравнений пространственного пограничного слоя принимает вид

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial\lambda^*} + Nx\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{4} = 0 \tag{1.5}$$

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + v^*\frac{\partial u}{\partial\lambda^*} + Nxw\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\gamma-1}{2\gamma}(H-u^2-w^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{2\gamma p}{\gamma-1}\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^{*2}}$$

$$xu\frac{\partial w}{\partial x} + v^*\frac{\partial w}{\partial\lambda^*} + Nxw\frac{\partial w}{\partial z} = -N\frac{\gamma-1}{2\gamma}(H-u^2-w^2)\frac{x}{p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\gamma p}{\gamma-1}\frac{\partial^2 w}{\partial\lambda^{*2}}$$

$$xu\frac{\partial H}{\partial x} + v^*\frac{\partial H}{\partial\lambda^*} + Nxw\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{2\gamma p}{\gamma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^{*2}} - \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2(u^2+w^2)}{\partial\lambda^{*2}}\right]$$

$$p = \frac{\gamma+1}{2}\left[\left(\frac{3}{4}\delta_e + x\frac{\partial\delta_e}{\partial x}\right)\cos\beta + Nx\frac{\partial\delta_e}{\partial z}\sin\beta\right]^2$$

$$\delta_e = \frac{\gamma-1}{2\gamma p}\int_0^\infty (H-u^2-w^2)\,d\lambda^*, \quad p(x=1,z) = p_d(z)$$

$$\lambda^* = 0: \quad u = w = 0, \quad v^* = \sqrt{\frac{2\gamma p}{\gamma - 1}} v_w, \quad H = H_w$$

$$\lambda^* \to \infty: \quad u \to \cos\beta, \quad w \to \sin\beta, \quad H \to 1 \quad (0 \le x \le 1, |z| < \infty)$$

Здесь σ – число Прандтля, H_w – полная энтальпия на поверхности пластины, а $p_d(z)$ – безразмерное давление на задней кромке пластины. На передней кромке при $x = 0$ данная система трехмерных уравнений в частных производных вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и ее решение позволяет найти начальные условия для системы (1.5), а фактически это автомодельное решение на полубесконечной скользящей пластине с автомодельным вдувом. Заметим, что если дополнительно наложить условие $v_w = 0$, то получаем систему для нахождения автомодельного решения на полубесконечной скользящей пластине [9]. Входящее в систему (1.5) распределение индуцированного давления $p(x, z)$ заранее неизвестно и должно быть определено в результате решения задачи. Следует отметить, что в краевую задачу (1.5), учитывая выражение для давления $p(x, z)$, фактически входят вторые производные $\partial^2\delta_e/\partial x^2$ и $\partial^2\delta_e/\partial z^2$, а следовательно, данная система уравнений не относится к параболическому типу. Наличие индуцированного градиента давления придает ей новые свойства, связанные с передачей возмущений вверх по потоку и появлением соответствующей неединственности решения [14].

2. РАЗЛОЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

Для исследования поведения функций течения в окрестности передней кромки следует преобразовать краевую задачу (1.5) и ввести переменные

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} p(x,z)}\, \eta, \quad v^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} p(x,z)} \left[v + \frac{x\eta}{2p}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + Nw\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] \tag{2.1}$$

В результате в уравнениях переноса и неразрывности давление в знаменателе останется только при производных от индуцированного давления, что будет удобно при проведении в дальнейшем разложений. После подстановки (2.1) в краевую задачу (1.5) она приводится к виду

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + Nx\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{x}{2}\left(\frac{u}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + N\frac{w}{p}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{u}{4} = 0 \tag{2.2}$$

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + Nxw\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(H - u^2 - w^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$xu\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + Nxw\frac{\partial w}{\partial z} = -N\frac{\gamma - 1}{2\gamma}(H - u^2 - w^2)\frac{x}{p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$xu\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial \eta} + Nxw\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2 (u^2 + w^2)}{\partial \eta^2}$$

$$p = \frac{\gamma + 1}{2}\left[\left(\frac{3}{4}\delta_e + x\frac{\partial \delta_e}{\partial x}\right)\cos\beta + Nx\frac{\partial \delta_e}{\partial z}\sin\beta\right]^2$$

$$\delta_e = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma p}}\int_0^\infty (H - u^2 - w^2)\, d\eta, \quad p(x = 1, z) = p_d(z)$$

$$\eta = 0: u = w = 0, \quad v = v_w, \quad H = H_w$$

$$\eta \to \infty: u \to \cos\beta, \quad w \to \sin\beta, \quad H \to 1 \quad (0 \le x \le 1, |z| < \infty)$$

Краевая задача (2.2), определяющая течение на всей пластине и зависящая от определяющих параметров N, H_w, σ, γ, β, v_w, может быть решена численно конечно-разностным методом [21]. Как отмечалось выше, при задании скорости вдува в соответствии с соотношением (1.1), в граничных условиях в краевой задаче (2.2) появляется безразмерный параметр $v_w = \text{const}$ по всей верхней поверхности пластины. Заметим, что при увеличении значений параметра v_w поверхностное трение может уменьшиться до нуля, а это означает, что около поверхности может образоваться область невязкого пристеночного течения (происходит отсоединение пограничного слоя), вызванного распределенным вдувом. Дальнейшее увеличение параметра v_w в данной постановке задачи становится не правомерным, так как в этом случае необходимо вводить третий невязкий слой около поверхности клина [14]. После решения краевой задачи (2.2) при заданных параметрах и определения индуцированного давления $p(x, z)$, скорость вдувания v_w^0 (в размерном виде) может быть определена следующим образом:

$$v_w^0(x^0, z^0) = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} x^{-1/4} p^{-1/2} \delta H_w u_\infty v_w \tag{2.3}$$

Заметим, что если поверхность представляет собой полубесконечную пластину или на ее задней кромке задается соответствующее автомодельное значение давления p_d, то величина индуцированного давления $p = \mathrm{const}$, а скорость вдува $v_w^0(x^0) \sim x^{-1/4}\delta H_w u_\infty v_w$, что соответствует автомодельному массообмену [14]. Важно отметить, что в общем случае, когда дополнительное условие на задней кромке пластины $p(x = 1, z) = p_d(z)$ отличается от автомодельного, то только после решения краевой задачи (2.2), при заданных значениях определяющих параметров N, H_w, σ, γ, β, v_w с помощью соотношения (2.3) определяется фактическое распределение скорости вдува по нормали к верхней поверхности пластины, при котором и реализуется данное течение.

Так как поперечное течение в пространственном пограничном слое при угле скольжения $\beta \neq 0$ существует изначально, то, как показали детальные предварительные исследования, для того, чтобы учесть еще и возможное влияние второй производной от индуцированного давления на задней кромке пластины, решение в окрестности передней кромки можно искать в виде

$$p(x,z) = p_0 + p_\alpha(z)x^\alpha + p_{\alpha 1}N\frac{dp_\alpha(z)}{dz}x^{\alpha+1} + p_{\alpha 2}N\frac{d^2p_\alpha(z)}{dz^2}x^{\alpha+2} + \ldots \tag{2.4}$$

$$\delta_e(x,z) = \delta_0 + \delta_\alpha\frac{p_\alpha(z)}{p_0}x^\alpha + \delta_{\alpha 1}\frac{N}{p_0}\frac{dp_\alpha(z)}{dz}x^{\alpha+1} + \delta_{\alpha 2}\frac{N}{p_0}\frac{d^2p_\alpha(z)}{dz^2}x^{\alpha+2} + \ldots$$

$$f(x,\eta,z) = f_0(\eta) + f_\alpha(\eta)\frac{p_\alpha(z)}{p_0}x^\alpha +$$
$$+ f_{\alpha 1}(\eta)\frac{N}{p_0}\frac{dp_\alpha(z)}{dz}x^{\alpha+1} + f_{\alpha 2}(\eta)\frac{N}{p_0}\frac{d^2p_\alpha(z)}{dz^2}x^{\alpha+2} + \ldots$$

где $f(x, \eta, z) = \{u(x, \eta, z), w(x, \eta, z), v(x, \eta, z), H(x, \eta, z)\}$. Индексом 0 обозначены члены разложений, соответствующие автомодельному решению для полубесконечной скользящей пластины с автомодельным вдувом. Предполагается, что показатель степени (собственное число) $\alpha > 0$. Заметим, что опущенные члены разложений имеют порядки $O(x^{\alpha+3})$, $O(x^{\alpha+4})$ и т.д., а также – $O(x^{2\alpha})$, $O(x^{2\alpha+1})$ и т.д., т.е. данный вид разложений справедлив, если $\alpha > 2$. При значениях $\alpha \le 2$ необходимо в разложениях обязательно учитывать член порядка $O(x^{2\alpha})$. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при решении соответствующих краевых задач на нахождение собственных чисел, так как достаточно интенсивный вдув может существенно уменьшить величину α. Важно отметить, что при угле скольжения $\beta = 0$ вид разложений (2.4) принципиально изменяется. Как было отмечено уже в [7, 8], в разложении для поперечной компоненты скорости $w(x, \eta, z)$ в этом случае первые два коэффициента разложения (2.4) оказываются тождественно равными нулю ($w_0(\eta) = w_\alpha(\eta) = 0$). Ниже проведенные расчеты показали, что при $\beta = 0$: $p_{\alpha 1} = \delta_{\alpha 1} = u_{\alpha 1} = H_{\alpha 1} = v_{\alpha 1} = 0$ и $w_{\alpha 2} = 0$. Следовательно, при наличии угла скольжения, третьи члены разложения (2.4) пропорциональные $x^{\alpha+1}dp_\alpha(z)/dz$ могут существенно влиять на передачу возмущений против потока, особенно в тех сечениях $z = \mathrm{const}$, где $p_\alpha(z)$ достаточно мало, а четвертые члены $\sim x^{\alpha+2}d^2p_\alpha(z)/dz^2$ – тех сечениях z, где одновременно $p_\alpha(z)$ и $dp_\alpha(z)/dz$ малы. Заметим также, что величина собственного числа α уменьшается с увеличением угла скольжения [11–13]. В общем случае, при поиске вида разложений (2.4), предполагалось, что коэффициенты для всех функций течения при членах, содержащих собственное число α и в следующих членах, являются функциями от двух переменных η и z. Но оказалось, что эти коэффициенты зависят только от координаты η и краевые задачи для определения собственного числа, а также для третьих и четвертых членов разложения представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подставляя разложения (2.4) в систему уравнений и граничные условия (2.2) и собирая члены одинакового порядка, получаем соответствующие краевые задачи. Для первых членов разложения получается следующая система (автомодельная часть):

$$v_0\frac{du_0}{d\eta}=\frac{\gamma-1}{4\gamma}(H_0-u_0^2-w_0^2)+\frac{d^2u_0}{d\eta^2} \tag{2.5}$$

$$v_0\frac{dH_0}{d\eta}=\frac{1}{\sigma}\frac{d^2H_0}{d\eta^2}-\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{d^2(u_0^2+w_0^2)}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dw_0}{d\eta}=\frac{d^2w_0}{d\eta^2},\quad \frac{dv_0}{d\eta}+0.25u_0=0$$

$$p_0=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{\gamma}}\cos\beta\int_0^\infty(H_0-u_0^2-w_0^2)d\eta$$

$$\delta_0=2\sqrt[4]{\frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)}}\sqrt{\frac{1}{3\cos\beta}\int_0^\infty(H_0-u_0^2)d\eta}$$

$$\eta=0\colon u_0=w_0=0,\quad v_0=v_w,\quad H_0=H_w;$$

$$\eta\to\infty\colon u_0\to\cos\beta,\quad w_0\to\sin\beta,\quad H_0\to 1$$

Решением краевой задачи (2.5) является автомодельное решение, которое описывает течение при автомодельном массообмене на полубесконечной скользязщей пластине на режиме сильного взаимодействия или на скользящей пластине конечной длины, если на ее задней кромке задано донное давление, соответствующее местному давлению для автомодельного решения.

Для вторых членов разложения получается краевая задача, решение которой позволяет найти и собственное число α (неавтомодельная часть)

$$\frac{dv_\alpha}{d\eta}+0.5\alpha u_0-(0.25+\alpha)u_\alpha=0 \tag{2.6}$$

$$v_0\frac{du_\alpha}{d\eta}+v_\alpha\frac{du_0}{d\eta}+\alpha u_0u_\alpha=$$

$$=\frac{\gamma-1}{4\gamma}(H_\alpha-2u_0u_\alpha-2w_0w_\alpha-2\alpha(H_0-u_0^2-w_0^2))+\frac{d^2u_\alpha}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dH_\alpha}{d\eta}+v_\alpha\frac{dH_0}{d\eta}+\alpha u_0H_\alpha=\frac{1}{\sigma}\frac{d^2H_\alpha}{d\eta^2}-2\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{d^2(u_0u_\alpha+w_0w_\alpha)}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dw_\alpha}{d\eta}+v_\alpha\frac{dw_0}{d\eta}+\alpha u_0w_\alpha=\frac{d^2w_\alpha}{d\eta^2},\quad \delta_\alpha=\frac{3}{6+8\alpha}\delta_0$$

$$\frac{(3+2\alpha)}{(3+4\alpha)}\int_0^\infty(H_0-u_0^2-w_0^2)d\eta=\int_0^\infty(H_\alpha-2u_0u_\alpha-2w_0w_\alpha)d\eta$$

$$\eta=0\colon u_\alpha=w_\alpha=v_\alpha=H_\alpha=0;\quad \eta\to\infty\colon\quad u_\alpha\to 0,\quad w_\alpha\to 0,\quad H_\alpha\to 0$$

В системе (2.6) интегральное соотношение для определения собственного числа α получено из разложений (2.4) для индуцированного давления p и толщины вытеснения δ_e. При заданных значениях параметров H_w, σ, γ, β и v_w решение краевой задачи (2.5) позволяет найти все функции течения $u_0(\eta)$, $w_0(\eta)$, $v_0(\eta)$, $H_0(\eta)$, p_0, δ_0 на передней кромке пластины. Затем из решения (2.5) с тривиальными граничными условиями определяется собственное число α, если оно существует, и соответствующие ему коэффициенты разложений $u_\alpha(\eta)$, $w_\alpha(\eta)$, $v_\alpha(\eta)$, $H_\alpha(\eta)$, δ_α. Важно отметить, что так как праметр $p_\alpha(z)$ в разложениях (2.4) оказывается произвольным, то решение в окрестности передней кромки не является единственным. В каждом сечении $z = \mathrm{const}$ имеется свое однопараметрическое семейство решений. Подбор параметра $p_\alpha(z)$, в принципе, позволяет (в рассматриваемом пока двухчленном разложении) удовлетворить дополнительному условию на задней кромке пластины, или прийти в особую точку на ней, если имеет место отрыв, а трение обращается в ноль. В данном случае для течения в пространственном пограничном на поверхности пластины конечной длины с заданным дополнительным условием на задней кромке $p_d(z)$ справедлива теория полос вдоль оси x, перпендикулярной передней кромке пластины.

Собирая члены для третьих членов разложения, получаем краевую задачу

$$\frac{dv_{\alpha 1}}{d\eta} + (1.25+\alpha)u_{\alpha 1} + w_\alpha + 0.5(w_0 + (1+\alpha)p_{\alpha 1}u_0) = 0 \tag{2.7}$$

$$v_0\frac{du_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1}\frac{du_0}{d\eta} + (1+\alpha)u_0u_{\alpha 1} + w_0u_\alpha =$$

$$= \frac{\gamma-1}{4\gamma}(H_{\alpha 1} - 2u_0u_{\alpha 1} - 2w_0w_{\alpha 1} - 2(1+\alpha)p_{\alpha 1}(H_0 - u_0^2 - w_0^2)) + \frac{d^2u_{\alpha 1}}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dH_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1}\frac{dH_0}{d\eta} + (1+\alpha)u_0H_{\alpha 1} + w_0H_\alpha = \frac{1}{\sigma}\frac{d^2H_{\alpha 1}}{d\eta^2} - 2\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{d^2(u_0u_{\alpha 1} + w_0w_{\alpha 1})}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dw_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1}\frac{dw_0}{d\eta} + (1+\alpha)u_0w_{\alpha 1} + w_0w_\alpha = -\frac{\gamma-1}{2\gamma}(H_0 - u_0^2 - w_0^2) + \frac{d^2w_{\alpha 1}}{d\eta^2}$$

$$\delta_{\alpha_1} = 12\frac{(0.75+\alpha)p_{\alpha 1} - \mathrm{tg}\beta}{(7+4\alpha)(6+8\alpha)}\delta_0 =$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma p_0}}\left[\int_0^\infty (H_{\alpha 1} - 2u_0u_{\alpha 1} - 2w_0w_{\alpha 1})d\eta - 0.5p_{\alpha 1}\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2)d\eta\right]$$

$$p_{\alpha 1} = \frac{1}{5+2\alpha}\left[(7+4\alpha)\frac{\int_0^\infty (H_{\alpha 1} - 2u_0u_{\alpha 1} - 2w_0w_{\alpha 1})d\eta}{\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2)d\eta} + \frac{6}{3+4\alpha}\mathrm{tg}\beta\right]$$

$$\eta = 0\colon u_{\alpha 1} = w_{\alpha 1} = v_{\alpha 1} = H_{\alpha 1} = 0; \quad \eta \to \infty\colon u_{\alpha 1} \to 0, \quad w_{\alpha 1} \to 0, \quad H_{\alpha 1} \to 0$$

Краевая задача (2.7) является линейной и неоднородной с нулевыми граничными условиями. Система зависит от параметра $p_{\alpha 1}$, величина которого определяется из интегрального соотношения, полученного в результате разложения в ряды индуцированного давления и толщины вытеснения, причем коэффициент $p_{\alpha 1}$ не зависит от координаты z. Следует отметить, что сформулированные краевые задачи (2.5), (2.6) и (2.7) принципиально отличаются от соответствующих краевых задач для случая обтекания пластины при отсутствии угла скольжения [8], в которых уравнения для определения коэффициентов разложения для поперечной компоненты скорости отделялись от основной системы уравнений. Учитывая, что и сами разложения (2.4) принципиально отличаются от случая, когда скольжение отсутствует, возникает вопрос, что происходит, если в краевых задачах (2.5)–(2.7) считать $\beta = 0$. Если в краевых условиях системы (2.5) положить $\beta = 0$, то уравнение для определения первого члена разложения для поперечной компоненты скорости имеет единственное решение $w_0(\eta) = 0$, а следовательно $dw_0(\eta)/d\eta = 0$. Тогда уравнение для определения второго члена разложения для поперечной компоненты скорости в системе (2.6) станет однородным, а его решение $w_\alpha(\eta) = 0$. Заметим, что система (2.5), за исключением граничного условия для v_w, и (2.6) после этого совпадут с соответствующими краевыми задачами, приведенными в [7]. Рассматривая систему (2.7) при условиях, что $\beta = 0$, $w_0(\eta) = 0$ и $w_\alpha(\eta) = 0$, то в этой системе только уравнение для определения $w_{\alpha 1}(\eta)$ останется неоднородным и совпадающим с уравнением [7]. Остальные уравнения станут однородными, а их решения соответственно: $u_{\alpha 1}(\eta) = 0$, $v_{\alpha 1}(\eta) = 0$, $H_{\alpha 1}(\eta) = 0$, $\delta_{\alpha 1} = 0$ и $p_{\alpha 1} = 0$. Заметим, что при этом и вид разложений (2.4) (учитывая пока трехчленное представление) изменится и точно совпадет с разложениями [7].

Для четвертых членов разложения получаем краевую задачу

$$\frac{dv_{\alpha 2}}{d\eta} + (2.25 + \alpha)u_{\alpha 2} + Nw_{\alpha 1} + 0.5(Np_{\alpha 1}w_0 + (2 + \alpha)p_{\alpha 2}u_0) = 0 \tag{2.8}$$

$$v_0\frac{du_{\alpha 2}}{d\eta} + v_{\alpha 2}\frac{du_0}{d\eta} + (2 + \alpha)u_0u_{\alpha 2} + Nw_0u_{\alpha 1} =$$

$$= \frac{\gamma - 1}{4\gamma}(H_{\alpha 2} - 2u_0u_{\alpha 2} - 2w_0w_{\alpha 2} - 2(2 + \alpha)p_{\alpha 2}(H_0 - u_0^2 - w_0^2)) + \frac{d^2u_{\alpha 2}}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dH_{\alpha 2}}{d\eta} + v_{\alpha 2}\frac{dH_0}{d\eta} + (2 + \alpha)u_0H_{\alpha 2} + Nw_0H_{\alpha 1} = \frac{1}{\sigma}\frac{d^2H_{\alpha 2}}{d\eta^2} - 2\frac{1 - \sigma}{\sigma}\frac{d^2(u_0u_{\alpha 2} + w_0w_{\alpha 2})}{d\eta^2}$$

$$v_0\frac{dw_{\alpha 2}}{d\eta} + v_{\alpha 2}\frac{dw_0}{d\eta} + (2 + \alpha)u_0w_{\alpha 2} + Nw_0w_{\alpha 1} = -N\frac{\gamma - 1}{2\gamma}(H_0 - u_0^2 - w_0^2)p_{\alpha 1} + \frac{d^2w_{\alpha 2}}{d\eta^2}$$

$$\delta_{\alpha 2} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma p_0}}\left[\int_0^\infty (H_{\alpha 2} - 2u_0u_{\alpha 2} - 2w_0w_{\alpha 2})\,d\eta - 0.5p_{\alpha 2}\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2)d\eta\right]$$

$$p_{\alpha 2} = \frac{1}{7 + 2\alpha}\left[(11 + 4\alpha)\frac{\int_0^\infty (H_{\alpha 2} - 2u_0u_{\alpha 2} - 2w_0w_{\alpha 2})d\eta}{\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2)d\eta} + \frac{6N\mathrm{tg}\beta}{5 + 2\alpha}\left(\frac{\int_0^\infty (H_{\alpha 1} - 2u_0u_{\alpha 1} - 2w_0w_{\alpha 1})d\eta}{\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2)d\eta} - \frac{2\mathrm{tg}\beta}{3 + 4\alpha}\right)\right]$$

$$\eta = 0\text{: } u_{\alpha 2} = w_{\alpha 2} = v_{\alpha 2} = H_{\alpha 2} = 0; \quad \eta \to \infty\text{: } u_{\alpha 2} \to 0, \quad w_{\alpha 2} \to 0, \quad H_{\alpha 2} \to 0$$

Система уравнений (2.8), как и (2.7), является линейной и неоднородной с нулевыми граничными условиями. Вид этой системы подтверждает, что коэффициенты разложений $u_{\alpha 2}(\eta)$, $w_{\alpha 2}(\eta)$, $v_{\alpha 2}(\eta)$, $H_{\alpha 2}(\eta)$, $\delta_{\alpha 2}$ действительно не зависят от поперечной координаты z. В данную систему входит параметр $p_{\alpha 2}$, значение которого определяется из интегрального соотношения, полученного в результате разложения в ряды индуцированного давления и толщины вытеснения, причем коэффициент $p_{\alpha 2}$ также не зависит от координаты z. При решении краевой задачи (2.8) для $\beta = 0$ следует иметь в виду, что т.к. в этом случае $w_{\alpha 1}(\eta)$ не равняется нулю, а $p_{\alpha 1} = 0$, то, следовательно, $v_{\alpha 2}(\eta)$, $u_{\alpha 2}(\eta)$, $H_{\alpha 2}(\eta)$ (за исключением теплоизолированной пластины и числе Прандтля $\sigma = 1$), $p_{\alpha 2}$ также не равны нулю, но $w_{\alpha 2}(\eta) = 0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В силу ограничений на количество рисунков в данной работе результаты приведены только для теплоизолированной пластины ($H_w = 1$) при значениях числа Прандтля $\sigma = 1$, показателя адиабаты $\gamma = 1.4$ и параметра $N = 1$. В этом случае профиль энтальпии $H(\eta) = 1$, а профили коэффициентов $H_\alpha(\eta) = H_{\alpha 1}(\eta) = H_{\alpha 2}(\eta) = 0$. Основное внимание уделено изучению влияния параметра интенсивности вдува v_w и угла скольжения β на характеристики течения. Краевые задачи (2.5)–(2.8) решались численно с помощью метода прогонки. Для вычисления определенных интегралов использовалась формула Симпсона. Размер ячейки по нормальной координате равнялся $\Delta\eta = 0.01$, а количество узлов по нормали к поверхности пластины увеличивалось от $N_\eta = 1501$ до $N_\eta = 2801$, по мере увеличения интенсивности вдува, в связи с ростом тольщины пограничного слоя. Проводились также контрольные расчеты с шагом $\Delta\eta = 0.0025$ и увеличенным количеством узлов по нормали в 4 раза. Значение собственного числа считалось вычисленным, если ин-

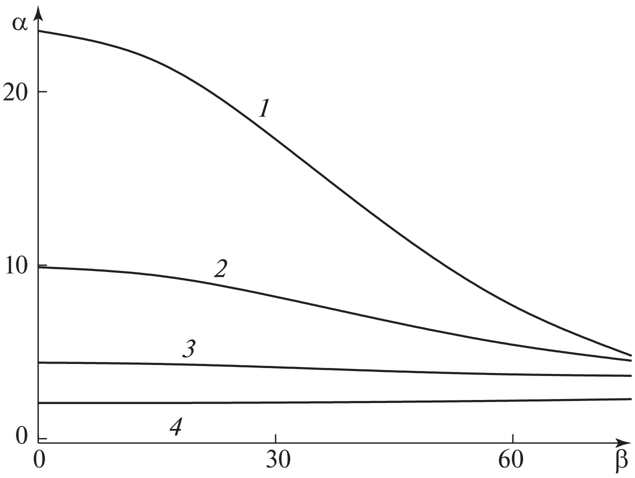

Рис. 1. Зависимости собственного числа α(*1–4*) от угла скольжения β при значениях параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1*), 0.25 (*2*), 0.5 (*3*), 0.9 (*4*).

тегральное условие в краевой задаче (2.6) выполнялось с точностью $|\varepsilon| \le 0.00002$. Такое же требование ставилось при вычислении интегралов для определения параметров $p_{\alpha 1}$ и $p_{\alpha 2}$ при решении краевых задач (2.7) и (2.8).

В результате решения систем уравнений (2.5) и (2.6) определены зависимости собственного числа α (кривые *1–4*) от угла скольжения β при значениях параметра интенсивности вдува $v_w = 0$(*1*), 0.25 (*2*), 0.5 (*3*), 0.9 (*4*), которые представлены на рис. 1. Наиболее сильно увеличение угла скольжения β влияет на величину α при отсутствии массообмена (кривая *1*). В этом случае при изменении β от 0 до 75° значение собственного числа уменьшается почти в 5 раз, а следовательно, значительно возрастает интенсивность распространения возмущений в пограничном слое по нормали к передней кромке против потока (2.4). Еще сильнее на усиление распространения возмущений влияет вдув при обтекании пластины при $\beta = 0$. При увеличении v_w от 0 до 0.9 число α уменьшается более чем в 11 раз. Важно отметить, что для значения $v_w = 0.9$ собственное число практически не зависит от угла скольжения. Точнее оно даже растет на 10% при увеличении угла скольжения (кривая *4*). Интенсивности вдува большие, чем $v_w = 0.9$ в этой работе не рассматривались, так как в этом случае собственные числа становятся меньше двух, а следовательно, необходимо дополнительно учитывать члены порядка $O(x^{2\alpha})$ в разложения (2.4). Далее приведены результаты численных расчетов, полученных при решении всех четырех краевых задач. Зависимости коэффициентов разложения для индуцированного давления: p_0 (*1–3*) и параметров $p_{\alpha 1}$ (*4–6*), $p_{\alpha 2}$ (*7–9*) от угла скольжения β при значениях интенсивности вдува $v_w = 0$ (кривые *1, 4, 7*), 0.5 (*2, 5, 8*), 0.9 (*3, 6, 9*) представлены на рис. 2. Увеличение v_w от 0 до 0.9 приводит к существенному возрастанию значений автомодельного давления p_0 особенно при не очень больших углах скольжения β (кривые *1–3*). Увеличение β приводит к монотонному уменьшению величины давления p_0. Наиболее сильно с увеличением угла скольжения растут коэффициенты $p_{\alpha 1}$ (*4*), $p_{\alpha 2}$ (*7*) при отсутствии массообмена. При вдуве с $v_w = 0.9$ их изменения существенно меньше (кривые *6, 9*). Следует отметить, что при $\beta = 0$ коэффициент $p_{\alpha 1}$ обращается в ноль (кривые *4–6*). Зависимости коэффициентов разложения δ_0 (*1, 2*), δ_α (*3, 4*), $\delta_{\alpha 1}$ (*5, 6*), $\delta_{\alpha 2}$ (*7, 8*) от угла скольжения β при значениях параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (кривые *1, 3, 5, 7*), 0.9 (*2, 4, 6, 8*) приведены на рис. 3. Автомодельная толщина вытеснения δ_0 (кривые *1, 2*) возрастает с увеличением угла скольжения, причем при $v_w = 0.9$ она примерно в полтора раза больше, чем при отсутствии вдува (кривые *1, 2*). Изменения остальных коэффициентов при изменении величины интенсивности вдува и/или угла скольжения существенно меньше. Зависимости профилей коэффициентов разложения $u_0(\eta)$ (кривые *1, 5*), $u_\alpha(\eta)$ (*2, 6*), $u_{\alpha 1}(\eta)$ (*3, 7*), $u_{\alpha 2}(\eta)$ (*4, 8*) от параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (кривые *1–4*), 0.9 (*5–8*) при $\beta = 45°$ приведены на рис. 4. Толщина автомодельного профиля компоненты скорости нормальной к передней кромке $u_0(\eta)$ существенно увеличивается с ростом скорости вдува v_w (кривые *1, 5*) и при этом значительно уменьшается коэффициент напряже-

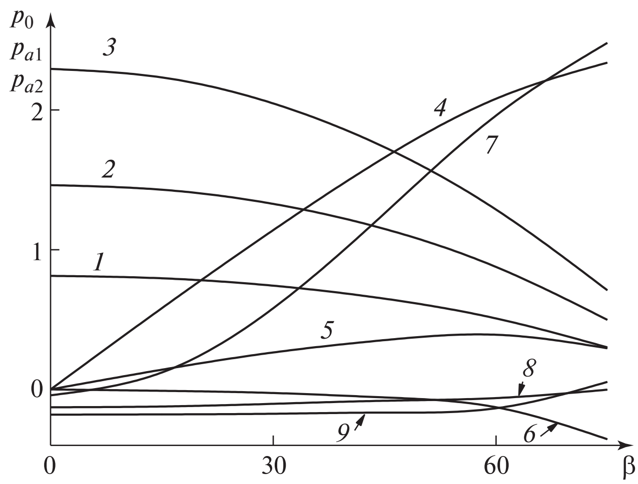

Рис. 2. Зависимости коэффициентов разложения p_0 (*1–3*), $p_{\alpha 1}$ (*4–6*), $p_{\alpha 2}$ (*7–9*) от угла скольжения β при значениях параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1, 4, 7*), 0.5 (*2, 5, 8*), 0.9 (*3, 6, 9*).

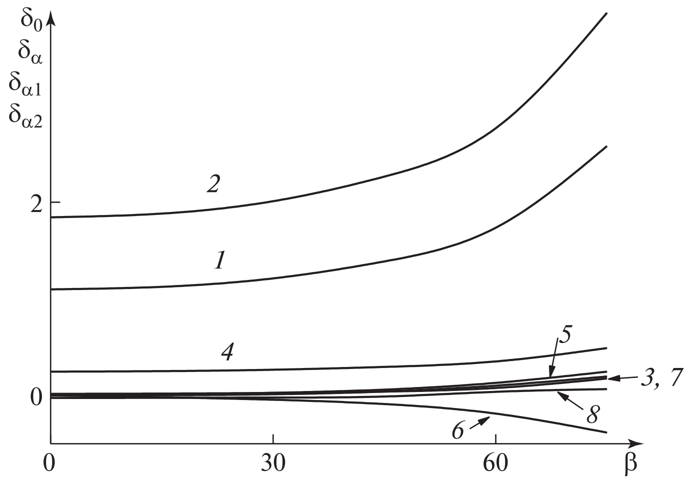

Рис. 3. Зависимости коэффициентов разложения δ_0 (*1, 2*), δ_α (*3, 4*), $\delta_{\alpha 1}$ (*5, 6*), $\delta_{\alpha 2}$ (*7, 8*) от угла скольжения β при значениях параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1, 3, 5, 7*), 0.9 (*2, 4, 6, 8*).

ния $\partial u_0/\partial\eta(\eta = 0)$. Профили коэффициентов $u_\alpha(\eta)$ (кривые *2*, *6*) являются отрицательными по величине, причем максимумы по модулю значений $u_\alpha(\eta)$ практически близки. Принципиально иной характер поведения профилей $u_{\alpha 1}(\eta)$ (*3*, *4*) и $u_{\alpha 2}(\eta)$ (*7*, *8*) – они противоположны по знаку и при $v_w = 0.9$ (*7*, *8*) на порядок меньше по модулю. Зависимости профилей коэффициентов разложения $w_0(\eta)$ (*1*, *5*), $w_\alpha(\eta)$ (*2*, *6*), $w_{\alpha 1}(\eta)$ (*3*, *7*), $w_{\alpha 2}(\eta)$ (*4*, *8*) от параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1–4*), 0.9 (5–*8*) при $\beta = 45°$ представлены на рис. 5. Автомодельные профили компоненты скорости вдоль передней кромки пластины $w_0(\eta)$ (*1*, *5*) существенно различаются. При вдуве с $v_w = 0.9$ (*5*) этот профиль имеет вид "предотрывного", так как для него $\partial w_0/\partial\eta(\eta = 0) = 0.00476$. Коэффициенты профилей $w_\alpha(\eta)$ (*2*, *6*), полученные в результате решения системы (2.6), более, чем в два раза различаются максимальными значениями. Следует отметить принципиально разный характер профилей $w_{\alpha 1}(\eta)$ (*7*) и $w_{\alpha 2}(\eta)$ (*8*) при $v_w = 0.9$.

Используя полученные данные, для рассмотренных определяющих параметров, и задавая произвольную функцию $p_\alpha(z)$ можно с помощью разложений (2.4) построить возмущенное течение на пластине. Далее, только в качестве примера, рассматривается случай, когда произвольная

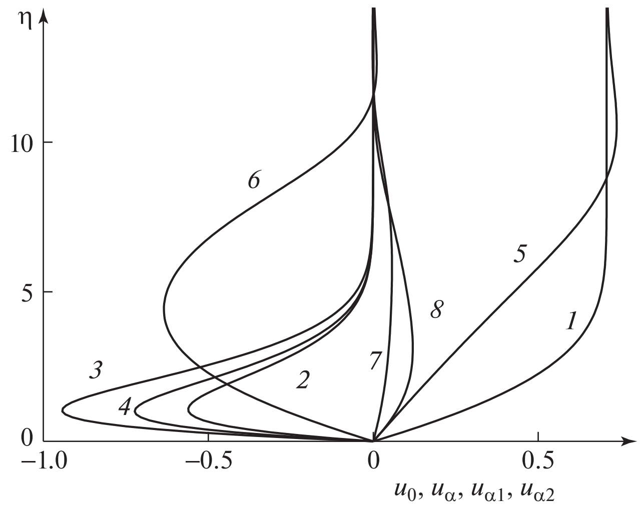

Рис. 4. Зависимости профилей коэффициентов разложения $u_0(\eta)$ (*1*, *5*), $u_\alpha(\eta)$ (*2*, *6*), $u_{\alpha 1}(\eta)$ (*3*, *7*), $u_{\alpha 2}(\eta)$ (*4*, *8*) от параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1–4*), 0.9 (*5–8*): $\beta = 45°$.

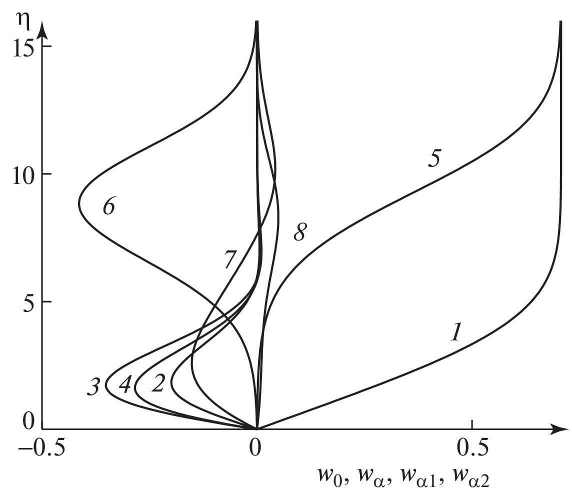

Рис. 5. Зависимости профилей коэффициентов разложения $w_0(\eta)$ (*1*, *5*), $w_\alpha(\eta)$ (*2*, *6*), $w_{\alpha 1}(\eta)$ (3, *7*), $w_{\alpha 2}(\eta)$ (*4*, *8*) от параметра интенсивности вдува $v_w = 0$ (*1–4*), 0.9 (*5–8*): $\beta = 45°$.

функция, входящая в разложения (2.4), имеет вид $p_\alpha(z) = 0.2\cos^6(\pi z)$ (можно взять и любую другу непрерывную дважды дифференцируемую функцию). При значениях параметров $\beta = 45°$ и $v_w = 0.5$ в результате решения систем уравнений (2.5)–(2.8) получены: собственное число $\alpha = 3.8848$, $p_0 = 1.1481$, $p_{\alpha 1} = 0.353$, $p_{\alpha 2} = -0.081$. На рис. 6 приведено распределение индуцированного давления $p(2) = p(x, z) = 1.1481 + p_\alpha(z)x^{3.8848}$ (двухчленное разложение) на части поверхности пластины ($0 \le x \le 1$, $-1.5 \le z \le 1.5$). В этом случае на задней кромке пластины минимальные значения давления равны ~1.15, а максимальные ~1.34, т.е. разница между ними составляет $\Delta p = 0.19$. Учитывая, что собственное число $\alpha = 3.8848$ не очень большое, то в сечениях $z = \mathrm{const}$, где давление максимально, возмущения в пограничном слое действительно распространяются против потока на 80% от длины пластины. Совершенно иное распределение давления получается, если учесть третий и четвертый члены разложения. На рис. 7 приведено распределение $p(4) = p(x, z) = 1.1481 + p_\alpha(z)x^{3.8848} + 0.353dp_\alpha(z)/dzx^{4.8848} - 0.081d^2p_\alpha(z)/dz^2x^{5.8848}$, (четырехчленное разложение) на поверхности пластины при тех же определяющих параметрах. Теперь на задней кромке пластины минимальные значения давления равны ~0.58, а максимальные ~2.2, т.е. разница между

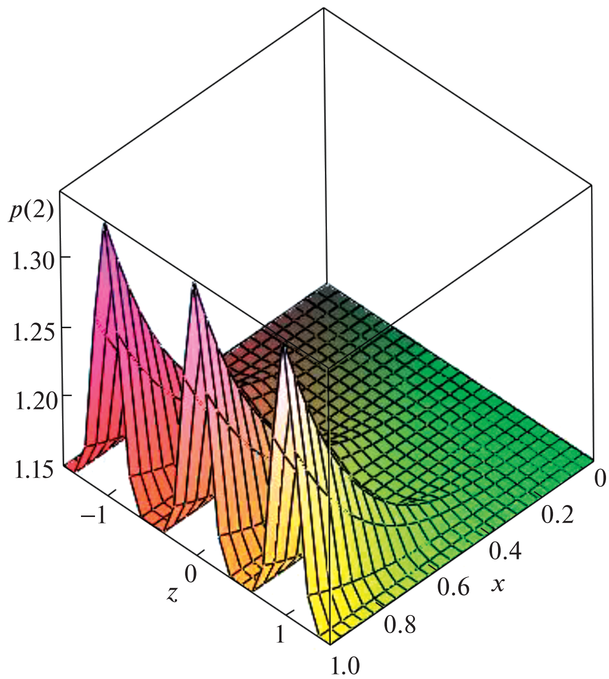

Рис. 6. Индуцированное давление $p(2)$ на поверхности пластины: $\beta = 45°$, $v_w = 0.5$; $p_\alpha(z) = 0.2\cos^6(\pi z)$.

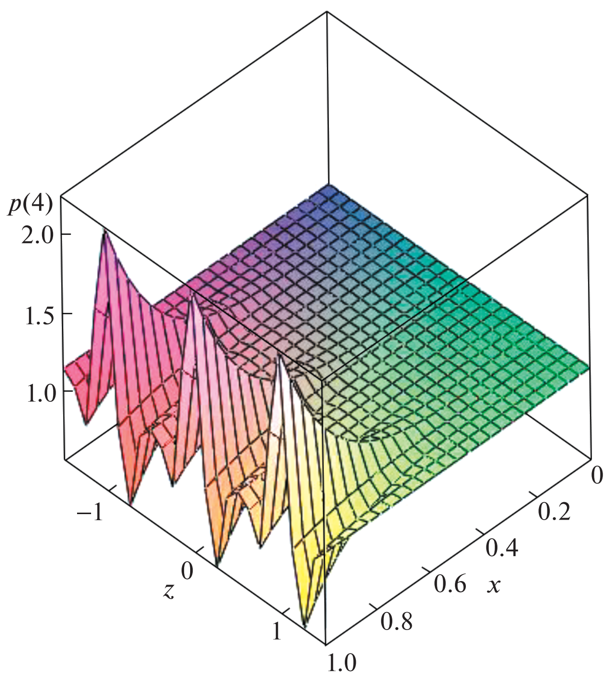

Рис. 7. Индуцированное давление $p(4)$ на поверхности пластины: $\beta = 45°$, $v_w = 0.5$; $p_\alpha(z) = 0.2\cos^6(\pi z)$.

ними составляет $\Delta p = 1.62$. Таким образом, не только изменился характер распределения давления на задней кромке, но и его перепад увеличился более чем в 8 раз. Используя полученные распределения давления, с помощью выражения (2.3) можно рассчитать скорость вдувания $v_w^0(x^0, z^0)$ (в размерном виде), которую необходимо обеспечить, чтобы получить данное распределение индуцированного давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены четырехчленные разложения для функций течения в пространственном пограничном слое в окрестности передней кромки скользящей пластины конечной длины, по нормали к которой вдувается газ, в случае, когда на ее задней кромке задается распределение давления, зависящее от поперечной координаты. В результате решения краевой задачи для второго члена разложения определены собственные числа. Показано, что при решении систем уравнений для третьего и четвертого членов разложения однозначно определяются сомножители в этих членах для индуцированного давления. Выявлено сильное влияние угла скольжения и интенсивности вдува на характеристики течения в пространственном пограничном слое. Впервые обнаружено, что при определенной интенсивности вдува возможна ситуация, когда собственные числа практически перестают зависеть от угла скольжения пластины. Установлено, что при наличии угла скольжения и/или вдува необходимо обязательно учитывать третий и четвертый члены разложения, если на задней кромке пластины появляются достаточно большие первые и вторые производные от давления по поперечной координате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lees L.* On the boundary-layer equations in hypersonic flow and their approximate solutions // J. Aeronaut. Sci. 1953. № 20 (20). P. 143–145.
2. *Stewartson K.* On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid. II Steady motion // J. Aeronaut. Sci. 1955. № 22 (5). P. 303–309.
3. *Нейланд В.Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 40–49.
4. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003, 456 с.
5. *Brown S.N., Stewartson K.* A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Q. J. Mech. Appl. Math. 1975. V. XXVIII. Pt. 1. P. 75–90.
6. *Коваленко А.А.* Исследование отрыва пограничного слоя при сильном взаимодействии с гиперзвуковым потоком газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 39–47.
7. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* Об индуцировании трехмерных возмущений в пограничном слое при сильном взаимодействии с гиперзвуковым потоком // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 89–96.
8. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* Влияние температуры поверхности пластины на распространение возмущений при гиперзвуковом обтекании // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 5. С. 3–16.
9. *Whalen R.J.* Boundary-layer interaction on a yawed infinit wing in hypersonic flow // JASS. 1959. V. 26, № 12. P. 839–841.
10. *Козлова И.Г., Михайлов В.В.* О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 94–99.
11. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* О распространении возмущений на скользящей пластине на режиме сильного взаимодействия // ДАН 2018. Т. 483. № 1. С. 33–36.
12. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* Об особенностях гиперзвукового обтекания скользящей пластины // ДАН 2019. Т. 487. № 1. С. 23–26.
13. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* О влиянии температурного фактора на распространение возмущений при гиперзвуковом обтекании скользящей пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 59–69.
14. *Нейланд В.Я.* Вдувание газа в гиперзвуковой поток // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 32–39.
15. *Липатов И.И.* Распределенный вдув газа в гиперзвуковой поток // ПМТФ. 1987. № 6. С. 57–61.
16. *Дудин Г.Н.* Вдув газа на поверхности треугольной пластины в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 125–133.
17. *Балашов А.А., Дудин Г.Н.* Обтекание пластины на режиме сильного взаимодействия при наличии массообмена // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 1. С. 16–27.
18. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* Влияние вдува на поверхности клина на распространение возмущений при гиперзвуковом обтекании // Уч. зап. ЦАГИ. 2019. Т. L. № 6. С. 17–32.
19. *Hayes W.D., Probstein R.F.* Hypersonic flow theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959.
20. *Stollery J.L.* Laminar and turbulent boundary layer studies at hypersonic speeds // ICAS Paper. 1972. N 72–09.
21. *Дудин Г.Н.* Треугольные крылья в вязком гиперзвуковом потоке. М.: МФТИ, 2011. 258 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 44–55

УДК 532.529

ВОЛНЫ УПЛОТНЕНИЯ С ЧАСТИЧНОЙ И ПОЛНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ В ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СРЕДЕ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

© 2022 г. И. В. Голубкина[a],*, А. Н. Осипцов[a],**

[a] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

**E-mail: giv-mm@mail.ru*

***E-mail: osiptsov@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 21.11.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Рассматриваются задачи о структуре прямой и косой волн уплотнения в газокапельной среде при наличии испарения на поверхности капель, а также симметричное взаимодействие (или отражение от стенки) косых скачков уплотнения в такой среде. Основное внимание уделено малоисследованным вопросам нахождения границ существования волн качественно различной структуры в пространстве безразмерных определяющих параметров. С использованием обобщенных соотношений Рэнкина–Гюгонио определены условия существования волн с частичной и полной дисперсией при полном и неполном испарении дисперсной фазы. Проведены численные расчеты, иллюстрирующие распределения параметров фаз в волнах различной структуры. Впервые найдены диапазоны параметров двухфазного потока и характеристик пересекающихся косых скачков уплотнения в газокапельной среде с испаряющимися каплями, при которых отраженные скачки вырождаются в волны с полной дисперсией либо полностью исчезают.

Ключевые слова: газокапельный поток, капли, испарение, скачки уплотнения, волны с полной дисперсией, обобщенные соотношения Рэнкина–Гюгонио, структура волны, взаимодействие скачков уплотнения, регулярное отражение волн

DOI: 10.31857/S0568528122030069

Паро- и газокапельные потоки широко распространены в природе и технике (теплоэнергетические и химикотехнологические аппараты, паровые турбины, камеры сгорания, системы охлаждения, движение летательных аппаратов в облаках и др.), что стимулирует непрерывное развитие механики аэродисперсных систем. В высокоскоростных газокапельных течениях существенную роль играет массо- и теплообмен между фазами, обусловленный наличием фазовых переходов (испарения и конденсации). Исследования волновых процессов в газокапельных средах имеют уже значительную историю (например, [1–10]). Подробно изучены задачи о распространении акустических возмущений в газо- и парокапельных средах в отсутствие и при наличии фазовых переходов [2]. Имеются экспериментальные исследования и численные расчеты структуры зон скоростной и тепловой релаксации фаз за ударными волнами в таких средах [1, 3, 4, 7, 8], в том числе, с учетом дробления крупных капель и образования мелкодисперсной фазы [10]. В литературе можно найти и отдельные численные расчеты нестационарных задач о распространении ударных волн и их отражении от препятствий в нестационарном потоке [9]. Опубликованные исследования посвящены, в основном, двухфазным потокам с крупными инерционными каплями. В то же время ряд вопросов фундаментального характера остался малоизученным. К таким вопросам относятся условия существования так называемых “волн с полной дисперсией” при наличии испарения капель, а также структура волн уплотнения в туманообразных средах с мелкими каплями при полном испарении капель. В литературе имеются лишь отдельные публикации на эту тему [4–6], где отмечены трудности исследования структуры волн с полностью испаряющимися каплями. Анализу условий существования волн уплотнения различной структуры в туманообразной среде с испаряющимися каплями посвящена первая часть настоящей статьи.

Авторам неизвестны публикации, в которых бы рассматривались задачи о пересечении ударных волн и отражении косых скачков от твердых стенок в стационарных газокапельных потоках с фазовыми переходами. Современной мотивацией для рассмотрения таких задач является продолжающийся поиск новых способов “безмашинного газодинамического энергоразделения”, т.е. поиск таких схем течения, при которых происходит разделение исходного однородного газового потока на два потока, имеющих существенно различающиеся температуры торможения, без совершения работы и в отсутствие внешнего теплообмена. Одной из таких схем течения, представляющих альтернативу хорошо известным вихревым трубкам Ранка–Хилша, является так называемая “труба Леонтьева”, в которой энергоразделение осуществляется за счет теплообмена между сверх- и дозвуковым газовыми потоками, разделенными тонкой теплопроводной перегородкой [11]. В последние годы проводятся исследования различных способов повышения эффективности этой схемы энергоразделения, в том числе – за счет добавления в поток мелких жидких капель, позволяющих снизить температуру восстановления стенки со стороны сверхзвукового потока [12]. В недавней экспериментальной работе [13] сделана попытка использования центрального тела в сверхзвуком газокапельном потоке для создания косой ударной волны, приходящей на стенку, с целью активизации осаждения капель и интенсификации теплоотдачи стенки. Интерпретация полученных результатов ставит вопросы о структуре течения, формирующегося при отражении косой ударной волны от стенки в газокапельном потоке, о параметрах отраженной волны, условиях отсутствия отраженной волны и др. Эти вопросы обсуждаются в заключительной части данной статьи.

1. О МОДЕЛИ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СРЕДЫ С ИСПАРЯЮЩИМИСЯ КАПЛЯМИ

В качестве базовой модели газокапельной среды при наличии фазовых переходов на поверхности капель используется классическая двухжидкостная модель [14], в которой объемная концентрация дисперсной фазы считается малой, пренебрегается столкновениями капель и различием термодинамических свойств пара вещества капель и несущей газовой среды. Считается, что несущая фаза – сжимаемый совершенный газ с постоянными теплоемкостями, вязкость и теплопроводность которого зависят от температуры по степенному закону: $\lambda/\lambda_0 = \mu/\mu_0 = (T/T_0)^{\omega}$; индекс 0 относится к параметрам невозмущенного потока. Дисперсная фаза – мелкие монодисперсные сферические капли. Масса m и радиус σ капель изменяются в процессе их движения из-за испарения. Стационарное течение среды капель описывается уравнениями континуума, лишенного собственных напряжений:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(n_s\mathbf{V}_s) = 0, \quad m(\mathbf{V}_s\nabla)\mathbf{V}_s = \mathbf{f}_s, \quad (\mathbf{V}_s\nabla)m = -J \\ c_s m(\mathbf{V}_s\nabla)\langle T_s\rangle = q_{in}, \quad q_{in} = q_s - JH\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь n_s – числовая плотность капель, $\mathbf{V}_s$ – их скорость, c_s – теплоемкость вещества капель, J – поток массы с поверхности капли за счет испарения в единицу времени, $\langle T_s\rangle$ – температура вещества капли, осредненная по ее объему, $\mathbf{f}_s$ – сила аэродинамического сопротивления капли, q_s – приток тепла к поверхности капли со стороны газовой фазы, q_{in} – отток тепла от поверхности внутрь капли, H – скрытая удельная теплота парообразования. Последнее уравнение в (1.1) есть условие баланса энергии на поверхности капли. Предполагается, что в большей части области течения капли обтекаются при малых числах Рейнольдса, испарение происходит радиально симметрично и с очень малой скоростью, поэтому можно использовать выражения для $\mathbf{f}_s$ и q_s как для стационарного обтекания сферы с мгновенным значением радиуса σ:

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \quad q_s = 4\pi\sigma\lambda(T - T_{sw})G \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{V}$ и T – скорость и температура несущей фазы, T_{sw} – температура поверхности капли. Завершающая фаза испарения капель проходит в переходном и свободномолекулярном режиме, при этом в законах силового и теплового взаимодействия фаз следует учитывать поправки на конечность чисел Кнудсена обтекания капель. Однако на этой стадии скорости газа и мелких капель уже практически совпадают, поэтому влияние поправки в выражении для силы сопротивления на распределения параметров фаз в зоне релаксации оказывается несущественным. В то же время поправка $G(\mathrm{Kn})$ в выражении для межфазного потока тепла может заметно повлиять на распределения параметров фаз в поле течения, поскольку при некоторых значениях параметров задачи после завершения релаксации скоростей фаз рассогласование их температур может оставаться конечным еще на значительном расстоянии. Для поправки G в выражении для теплового потока в расчетах использованы формулы, часто используемые в литературе [5]:

$$G = \frac{1}{1 + 4.5\,\mathrm{Kn}/\mathrm{Pr}}, \quad \mathrm{Kn} = \frac{\delta}{2\sigma}$$

$$\delta = \frac{\mu}{p}\sqrt{0.5\pi RT} = \mu\sqrt{\frac{\pi}{2p\rho}}$$

Здесь δ – средняя длина свободного пробега молекул несущей фазы, ρ и p – плотность и давление несущей фазы, R – газовая постоянная, Pr – число Прандтля.

Уравнения стационарного течения несущей фазы с учетом обмена массой, импульсом и энергией с дисперсной фазой записываются в следующем виде (вязкость и теплопроводность несущей фазы учитываются лишь при описании межфазного взаимодействия) [14]:

$$\begin{gathered} \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = n_s J \\ (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p - n_s\mathbf{f}_s + n_s J(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \\ c_p\rho(\mathbf{V}\nabla)T = (\mathbf{V}\nabla)p - n_s q_s + n_s\mathbf{f}_s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) + n_s J[(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)^2/2 + c_p(T_{sw} - T)] \\ p = \rho RT \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении.

Для замыкания постановок задач для уравнений (1.1)–(1.3) необходимо задать связь между средней температурой капли $\langle T_s\rangle$ и температурой ее поверхности T_{sw}, определить способ вычисления потока массы с поверхности испаряющейся капли J, а также сформулировать граничные условия.

Для простоты принимается, что в невозмущенном потоке имеет место скоростное ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_0$), температурное $T = T_s = T_0$ и термодинамическое равновесие фаз (радиус σ_0 и числовая плотность капель n_{s0} постоянны). Используется наиболее простая модель испарения капли, согласно которой весь тепловой поток, приходящий к поверхности капли со стороны газовой фазы, тратится на испарение, т.е. $q_{in} = 0$ и

$$J = 4\pi\sigma\lambda(T - T_0)G/H \tag{1.4}$$

Эта модель реализуется, если при внедрении капли, имеющей температуру невозмущенного потока, в область горячего газа за ударной волной, температура поверхности капли изменяется очень мало ($T_{sw} \approx T_0$). Естественно считать, что на поверхности капли имеют место условия равновесного испарения, описываемые уравнением Клапейрона–Клаузиуса. В случае испарения капель в инородный газ (например, в смеси "воздух–водяные капли"), когда скорость испарения лимитируется диффузией, имеющиеся в литературе решения для температуры капли показывают приближенную справедливость предположения о постоянстве температуры капли при ее внедрении в область нагретого газа при не слишком больших изменениях давления [15]. Этот факт объясняется очевидной оценкой для относительного изменения равновесной температуры поверхности испаряющейся капли, следующей из условия Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{T_{sw} - T_0}{T_{sw}} = \frac{R_v T_0}{H}\ln\left(\frac{p_{vw}}{p_{v0}}\right)$$

Здесь p_{vw} и p_{v0} – текущее (в окрестности капли) и начальное (в невозмущенном потоке) значения давления насыщенных паров вещества капли вблизи ее поверхности, R_v – газовая постоянная паров вещества капель. Даже когда давление насыщенных паров вблизи поверхности капли увеличивается на порядок при ее движении в неоднородном горячем газе, логарифм отношения p_{vw}/p_{v0} остается величиной порядка единицы. Например, для капель воды в воздухе при $T_0 = 300$ K имеем $R_v \approx 0.4$ Дж/(г град), $H \approx 2.4 \times 10^3$ Дж/г, коэффициент перед логарифмом равен 0.05, и, следовательно, даже при изменении на порядок величины p_v/p_{v0} относительное изменение температуры капли не превысит единиц процентов. При испарении капель в собственный пар вместо парциальных давлений в соотношении Клапейрона–Клаузиуса следует взять значения истинных давлений в паре. В качестве еще одного примера можно рассмотреть прохождение капель через фронт ударной волны с числом Маха M = 2. При этом давление за волной увеличивается приблизительно в 4.5 раза, а значение логарифма приблизительно равно 1.5. Таким образом, использование упрощенной модели для вычисления скорости испарения (1.4) в рассматриваемых ниже задачах о структуре волн уплотнения вполне оправдано, тем более что такое приближение кардинально упрощает всю процедуру построения и анализа решений. В противном случае потребовалось бы решать уравнение теплопроводности внутри капель одновременно с решением макроуравнений двухконтинуальной среды, как это сделано в [16]. В рамках принятой упрощенной модели испарения средняя по объему температура капли равна температуре ее поверхности и температуре невозмущенного потока: $\langle T_s \rangle = T_{sw} = T_0$.

Следует отметить, что при движении испаряющихся капель в инородном газе игнорируется зависимость теплофизических параметров и коэффициентов переноса смеси от концентрации паров вещества капель. Это оправдано лишь в рассматриваемом случае небольших массовых концентраций примеси.

2. ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ РЭНКИНА–ГЮГОНИО НА СКАЧКАХ В ГАЗЕ С ИСПАРЯЮЩИМИСЯ КАПЛЯМИ

Ниже рассматриваются задачи о существовании и структуре волн уплотнения в газокапельных средах с фазовыми переходами, т.е. одномерные течения в релаксационной зоне, соединяющей два равновесных состояния газокапельной смеси.

Прямая волна уплотнения в газокапельной среде, как правило, представляет собой ударную волну в газе (поверхность сильного разрыва параметров газа), за которой следует зона неравновесного по скоростям и температурам фаз течения. Капли проходят через скачок в несущей фазе, сохраняя исходные значения всех своих параметров. Далее, в релаксационной зоне, происходит выравнивание скоростей фаз и испарение капель, поскольку температура газа сразу за скачком уплотнения увеличивается. Зона неравновесного течения заканчивается, когда: а) капли полностью испарятся, т.е. за зоной релаксации течение становится однофазным, или б) скорости и температуры фаз выравниваются, и достигается новое равновесное состояние. Ударная волна вместе с зоной релаксации параметров фаз в литературе иногда называется “волной с частичной дисперсией”, поскольку параметры несущей фазы имеют разрыв, а параметры дисперсной фазы непрерывны. В газокапельных средах возможно также возникновение “волн с полной дисперсией” параметров. В такой волне отсутствует газодинамический разрыв, а изменение параметров обеих фаз происходит непрерывно. Такие волны возможны, когда двухфазный поток является эффективно сверхзвуковым, т.е. число Маха, посчитанное по параметрам смеси, $\mathrm{M}_{ef} > 1$, а число Маха по параметрам несущей газовой фазы $\mathrm{M}_0 < 1$. Состояния двухфазной среды до волны и в зоне, расположенной далеко вниз по течению, описываются уравнениями односкоростной и однотемпературной модели “эффективного газа” с суммарной плотностью и эффективными термодинамическими параметрами смеси [14]. Для двухфазной смеси суммарная плотность и безразмерные эффективные параметры определяются так [14]:

$$\rho_{ef} = (1+\alpha)\rho, \quad \gamma_{ef} = \gamma\frac{1+\alpha\chi}{1+\alpha\gamma\chi}, \quad \mathrm{M}_{ef}^2 = \mathrm{M}_0^2\frac{(1+\alpha)(1+\alpha\gamma\chi)}{(1+\alpha\chi)} \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha = mn_s/\rho$ – относительная массовая концентрация капель, γ – показатель адиабаты, $\chi = c_s/c_p$ – отношение теплоемкости вещества капель к теплоемкости газа при постоянном давлении. На масштабе, много большем ширины зоны неравновесного течения, волну с полной и частичной дисперсией можно рассматривать как газодинамический разрыв в “эффективном газе” (в общем случае, с изменением уравнений состояния и теплоотводом за счет фазового перехода).

Чтобы вывести обобщенные соотношения Рэнкина–Гюгонио, связывающие параметры равновесного невозмущенного потока и равновесного потока в дальней области вниз по течению, запишем уравнения баланса массы, импульса и энергии для среды в целом. В системе координат, начало отсчета которой лежит в невозмущенном потоке, складывая попарно уравнения балансов массы, импульса и энергии фаз из (1.1), получаем дивергентную форму уравнений баланса массы, импульса и энергии для среды в целом:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(\rho u + mn_s u_s) = 0 \\ \frac{d}{dx}(p + \rho u^2 + mn_s u_s^2) = 0 \\ \frac{d}{dx}\left[\rho u\left(c_p T + \frac{u^2}{2}\right) + mn_s u_s\left(c_p T_s - H + \frac{u_s^2}{2}\right)\right] = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

При выводе последнего соотношения в (2.2) использовано определение скрытой теплоты парообразования как разности энтальпий в жидкой фазе и паре на границе испаряющейся капли: $H = c_p T_s - c_s T_s + H_0$, где $H_0 = \mathrm{const}$.

В случае волны с полной дисперсией все параметры обеих фаз остаются непрерывными. В случае волны с частичной дисперсией имеется фронт сильного разрыва для параметров несущей фазы, однако на этом разрыве потоки массы, импульса и энергии несущей фазы непрерывны и все параметры среды частиц сохраняются. Поэтому в обоих случаях из (2.2) следует очевидная связь параметров среды в невозмущенном потоке (индекс 0) и в области равновесного течения далеко вниз по потоку (индекс 1)

$$\begin{gathered}
\rho_0 u_0 (1+\alpha_0) = \rho_1 u_1 (1+\alpha_1), \quad \alpha_i = m_i n_{si}/\rho_i \\
p_0 + (1+\alpha_0)\rho_0 u_0^2 = p_1 + (1+\alpha_1)\rho_1 u_1^2 \\
\frac{u_0^2}{2} + c_p T_0 - \frac{\alpha_0 H}{1+\alpha_0} = \frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 - \frac{\alpha_1 H}{1+\alpha_1}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь учтено, что $T_s = T_0$. Формулы (2.3), совместно с уравнением состояния совершенного газа, можно считать обобщенными соотношениями Рэнкина–Гюгонио для скачков уплотнения в газокапельных средах с испаряющимися каплями в рамках принятой модели. Ранее соотношения на разрывах в эффективной среде без фазовых переходов использовались в [17] для анализа границ существования различных волновых структур в газах с твердыми частицами.

Если капли полностью испаряются в зоне релаксации, то к соотношениям (2.2) добавляется условие $\alpha_1 = 0$. Если к наступлению нового состояния равновесия капли не успевают полностью испариться, то реализуется дополнительное условие $T_1 = T_0$.

Для несущей среды, описываемой моделью совершенного газа с постоянными теплоемкостями, из (2.3) все параметры за волной, отнесенные к соответствующим параметрам до волны, можно выразить аналитически через безразмерные определяющие параметры M_0, α_0, γ, Pr и a. В случае полного испарения капель за волной ($\alpha_1 = 0$) параметры газа далеко вниз по потоку выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\rho_1}{\rho_0} = (1+\alpha_0)\frac{u_0}{u_1} = \frac{(1+\alpha_0)^2(1+\gamma)\mathrm{M}_0^2}{1+(1+\alpha_0)\gamma \mathrm{M}_0^2 - \sqrt{D}} \\
\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}\left[(1+\alpha_0)\mathrm{M}_0^2 - 1 + \sqrt{D}\right] \\
\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho_1} \\
D = \left[(1+\alpha_0)\mathrm{M}_0^2 - 1\right]^2 + 2\alpha_0(1+\alpha_0)(1+\gamma)\mathrm{M}_0^2(E-1) \\
E = \frac{2}{3a\,\mathrm{Pr}} = \frac{H}{c_p T_0}, \quad a = \frac{2c_p T_0}{3H\,\mathrm{Pr}}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь a – безразмерный параметр, характеризующий скорость испарения капель. В случае неполного испарения капель за волной ($\alpha_1 \neq 0$, $T_1 = T_0$) выражения для равновесных параметров за волной принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{u_1}{u_0} = \frac{2E + (1+\alpha_0)(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}{(1+\alpha_0)\mathrm{M}_0^2\left(2\gamma E - (\gamma-1)\right)} \\
\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{2(1+\alpha_0)\gamma \mathrm{M}_0^2(\kappa E - 1) - 1}{2\kappa E - 1}, \quad \kappa = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \\
\alpha_1 = (1+\alpha_0)\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{u_0}{u_1} - 1
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для установления границ существования волн различной структуры были проведены численные расчеты, в которых варьировались в основном два параметра: число Маха M_0, посчитанное по параметрам несущей фазы в невозмущенном потоке, и исходная массовая доля капель α_0. Остальные параметры были приняты следующими: $\gamma = 1.4$, $\mathrm{Pr} = 0.72$ и $a = 0.1$, что по порядку ве-

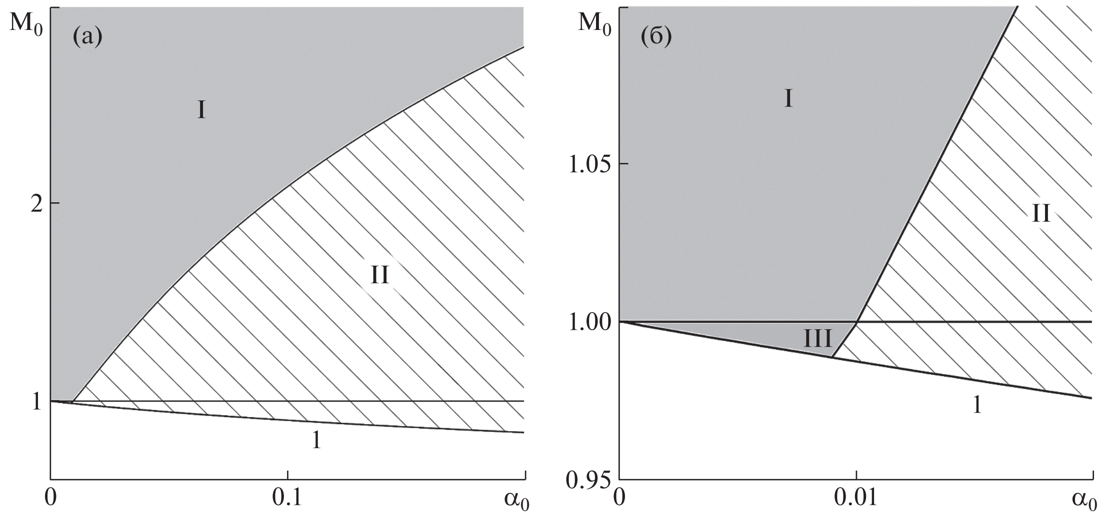

Рис. 1. Области существования прямой волны с частичной и полной дисперсией в случае полного (I, III) и неполного (II) испарения капель за волной.

личины соответствует случаям, наиболее интересным для приложений. Сначала для каждого рассматриваемого набора параметров M_0 и α_0 анализируется существование решения (2.5) с $\alpha_1 > 0$ и $p_1/p_0 > 1$. Если такое решение существует, то при таких параметрах реализуется волна, в которой капли не испаряются полностью. В противном случае находится решение (2.4) и определяются параметры, соответствующие полному испарению капель. Волнам с полной дисперсией соответствуют решения, когда $M_0 < 1$, но $M_{ef} > 1$. На рис. 1а показаны рассчитанные области параметров M_0, α_0, отвечающие полному (I) и неполному (II) испарению капель. Область выше линии $M_0 = 1$ соответствует волнам с частичной дисперсией, а ниже – волнам с полной дисперсией. Кривая *1*, соответствующая условию $M_{ef} = 1$, ограничивает снизу области существования волн уплотнения в газокапельном потоке. На рис. 1б более подробно показана сравнительно малая область (III), соответствующая волнам с полной дисперсией и полным испарением капель.

Все полученные выше результаты легко обобщаются на случай косых волн уплотнения. Поскольку на косом скачке касательные скорости обеих фаз (v, v_s) непрерывны, и в зоне релаксации $v = v_s = v_0$, течения в направлениях нормали и касательной к волне могут быть рассмотрены независимо. Таким образом, в случае косой волны полученные обобщенные соотношения Рэнкина–Гюгонио (2.3) и формулы (2.4)–(2.5) справедливы для нормальных к косой волне компонент скорости фаз. Число Маха M_0 в этом случае также следует считать по нормальной к волне компоненте скорости.

3. СТРУКТУРА ВОЛН С ЧАСТИЧНОЙ И ПОЛНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ В ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Для численного исследования структуры зоны релаксации в волне уплотнения запишем уравнения модели (1.1) для нормальных к скачку компонент скорости в безразмерном виде, отнеся все параметры к их значениям в невозмущенном потоке:

$$x = \frac{x^*}{l_v^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_0^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0^* R T_0^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*}$$

$$u_s = \frac{u_s^*}{u_0^*}, \quad T_s = \frac{T_s^*}{T_0^*}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s0}^*}, \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{\sigma_0^*}, \quad \delta = \frac{\delta^*}{\delta_0^*}, \quad l_v^* = \frac{m_0^* u_0^*}{6\pi\sigma_0^*\mu_0^*}$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = \alpha a \lambda n_s \sigma (T-1) G, \quad n_s u_s = 1, \quad \sigma^2 u_s \frac{du_s}{dx} = \mu\left(u - u_s\right) \qquad (3.1)$$

$$\sigma u_s \frac{d\sigma}{dx} = \frac{a\mu(1-T)G}{3}, \quad G = \frac{1}{1+4.5\mathrm{Kn}/\mathrm{Pr}}, \quad \mathrm{Kn} = \mathrm{Kn}_0 \frac{\mu}{\sqrt{p\rho}}$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\frac{dp}{dx} + \alpha\mu n_s\sigma\left(u_s - u\right) + \alpha a\lambda n_s\sigma(T-1)G(u_s - u)$$

$$\rho u \frac{dT}{dx} = u\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp}{dx} + \frac{2\alpha}{3\,\mathrm{Pr}} n_s\sigma\lambda\left(1-T\right)G + \alpha(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2 n_s\mu\sigma(u-u_s)^2 -$$

$$-\ \alpha a\sigma\lambda n_s(T-1)^2 G + \frac{1}{2}\alpha a(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2\lambda n_s\sigma(T-1)G(u-u_s)^2$$

$$T_s = 1, \quad p = \rho T, \quad \lambda = \mu = T^{\omega}$$

$$\alpha = \frac{m_0^* n_{s0}^*}{\rho_0^*}, \quad a = \frac{2c_p T_0^*}{3H\,\mathrm{Pr}}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{c_p\mu_0^*}{\lambda_0^*}, \quad \mathrm{M}_0 = \frac{u_0^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}}, \quad \mathrm{Kn}_0 = \frac{\delta_0^*}{2\sigma_0^*}$$

В этом параграфе все переменные величины, кроме отмеченных звездочками, являются безразмерными. Система уравнений (3.1) содержит следующие независимые параметры подобия: показатель адиабаты газовой фазы γ, число Маха M_0, посчитанное по нормальной к волне компоненте скорости несущей фазы в невозмущенном потоке, число Прандтля газа Pr, относительную массовую концентрацию капель в невозмущенном потоке α, параметр a, характеризующий скорость испарения капель, и степенной показатель ω.

В невозмущенном потоке имеем

$$x = 0\colon u = T = \rho = u_s = n_s = \sigma = 1 \tag{3.2}$$

Постановки и методы численного решения задач о структуре волн с частичной и полной дисперсией отличаются.

При расчете структуры волн с частичной дисперсией ($\mathrm{M}_0 > 1$) безразмерные параметры несущей фазы сразу за газодинамическим разрывом находятся из стандартных соотношений Рэнкина—Гюгонио для газа

$$\rho_+ = \frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_0^2}{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}, \quad u_+ = \frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}{(\gamma+1)\mathrm{M}_0^2}$$
$$T_+ = \frac{[2\gamma\mathrm{M}_0^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)\mathrm{M}_0^2 + 2]}{(\gamma+1)^2\mathrm{M}_0^2} \tag{3.3}$$

Здесь индекс “плюс” отмечает безразмерные значения параметров среды сразу за фронтом газодинамического разрыва. Частицы пересекают фронт ударной волны в газе без изменения значений своих параметров

$$u_{s+} = n_{s+} = \sigma_+ = 1 \tag{3.4}$$

Таким образом, имеем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) с граничными условиями (3.3)—(3.4). Указанная задача решалась численно методом Рунге—Кутты.

При расчете структуры волн с полной дисперсией ($\mathrm{M}_0 < 1$, но $\mathrm{M}_{ef} > 1$) соотношения (3.2) являются граничными условиями на левой границе расчетной области, а условия на правой границе находятся из обобщенных условий Рэнкина—Гюгонио, полученных в предыдущем разделе. Таким образом, в этом случае для системы (3.1) получаем краевую задачу. Левые и правые граничные условия заданы в особых точках дифференциальных уравнений, что затрудняет непосредственный расчет искомого решения, поэтому был использован следующий численный алгоритм. Система уравнений (3.1) была дополнена производными искомых параметров по фиктивному времени. Полученная система в частных производных решалась методом установления с использованием конечно-разностной схемы Мак-Кормака. Точность всех расчетов контролировалась последовательным увеличением числа расчетных узлов сетки.

На рис. 2 показаны типичные рассчитанные распределения параметров двухфазного потока в зоне релаксации для волн с частичной (рис. 2а) и полной (2б) дисперсией. Расчеты приведены для значений параметров $\alpha = 0.1$, $\mathrm{M}_0 = 1.5$, $a = 0.1$ (рис. 2а) и $\alpha = 0.1$, $\mathrm{M}_0 = 0.95$, $a = 0.1$ (рис. 2б),

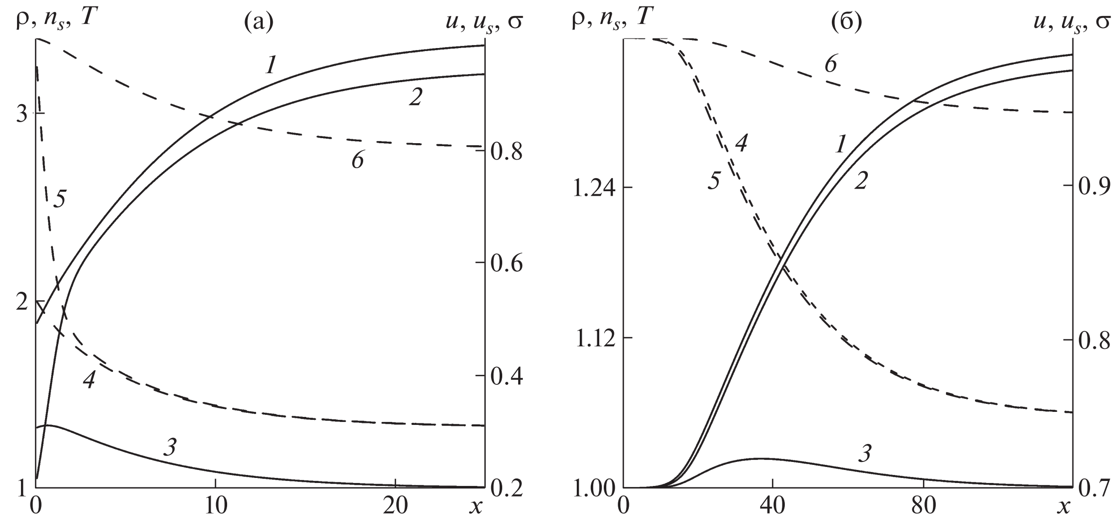

Рис. 2. Структура волны с частичной (а) и полной (б) дисперсией в случае частичного испарения капель за волной: плотность несущей фазы ρ, числовая концентрация капель n_s, температура газа T, скорости фаз u, u_s, радиус капель σ (кривые *1*–*6*); $\alpha = 0.1$, $\mathrm{Kn}_0 = 0.1$, $a = 0.1$, $\mathrm{M}_0 = 1.5$ (а) и 0.95 (б).

которые соответствуют неполному испарению капель за волной (рис. 1). Значения остальных безразмерных параметров здесь и далее имеют фиксированные значения: $\gamma = 1.4$, $\mathrm{Pr} = 0.72$, $\omega = 0.5$, $\mathrm{Kn}_0 = 0.1$. В обоих случаях температура газа изменяется немонотонно, что обусловлено конкуренцией двух различных процессов: диссипации механической энергии в тепловую из-за разности скоростей фаз и расходования тепла на испарение капель жидкости. Расчеты показали, что при всех рассмотренных значениях параметров α и M_0 существует локальный максимум температуры, после чего ее значение уменьшается и, если капли “внутри” волны испаряются не полностью, температура газа приближается к температуре потока до волны.

Изменение характера распределения радиуса капель и температуры газа вдоль оси x при увеличении числа Маха, когда происходит переход от частичного к полному испарению капель, показано на рис. 3а,б. Существенно изменяется вид кривых $\sigma(x)$, а также резко снижается ширина области неравновесного течения, в которой происходит испарение капель, т.е. ширина волны.

На рис. 4 показано, как зависит ширина волны с частичной дисперсией от параметров M_0 и α_0. При полном испарении капель безразмерная (отнесенная к длине скоростной релаксации) ширина волны l_w – это значение x, при котором радиус капель обращается в ноль; при неполном испарении считается, что новое состояние равновесия наступает, когда рассогласование температур фаз становится меньше 1%. Локальные пики на рис. 4 отвечают значениям параметров, при которых происходит переход от неполного к полному испарению капель. С приближением к этим значениям размер капель “внутри” волны быстро становится достаточно малым, проскальзывание капель отсутствует, остается только тепловое рассогласование, которое сохраняется на довольно длительном расстоянии, за счет чего ширина волны резко возрастает. В случае малых значений концентрации ($\alpha_0 \le 0.01$) всегда происходит полное испарение капель. Ширина волны монотонно снижается с увеличением числа Маха волны и увеличением параметра a, характеризующего скорость испарения капель (рис. 4).

4. ГРАНИЦЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В ГАЗЕ С ИСПАРЯЮЩИМИСЯ КАПЛЯМИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ СТОЛКНОВЕНИИ (ОТРАЖЕНИИ ОТ СТЕНКИ) КОСЫХ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

При симметричном столкновении косых ударных волн в газокапельном потоке или отражении косой волны от плоской стенки в такой среде возможно формирование различных волновых структур. Ниже анализируются границы существования различных волновых структур для случая регулярного отражения волн от стенки при условии, что обе волны (падающая и отраженная) существуют и являются волнами с полной или частичной дисперсией. Анализ проводится с использованием обобщенных соотношений Рэнкина–Гюгонио для косых волн, при этом рассмат-

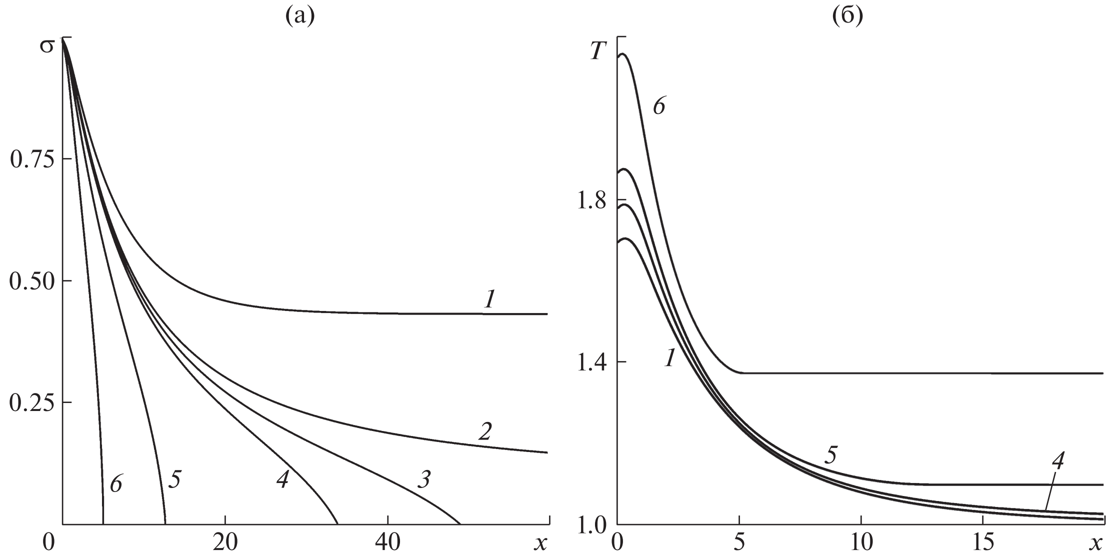

Рис. 3. Изменение безразмерных радиуса капель (а) и температуры газа (б) в волне с частичной дисперсией при $\alpha_0 = 0.1$, $\mathrm{Kn}_0 = 0.1$, $a = 0.1$ для различных значений числа Маха: $\mathrm{M}_0 = 2$, 2.08, 2.09, 2.1, 2.2, 2.5 (кривые *1*–*6*).

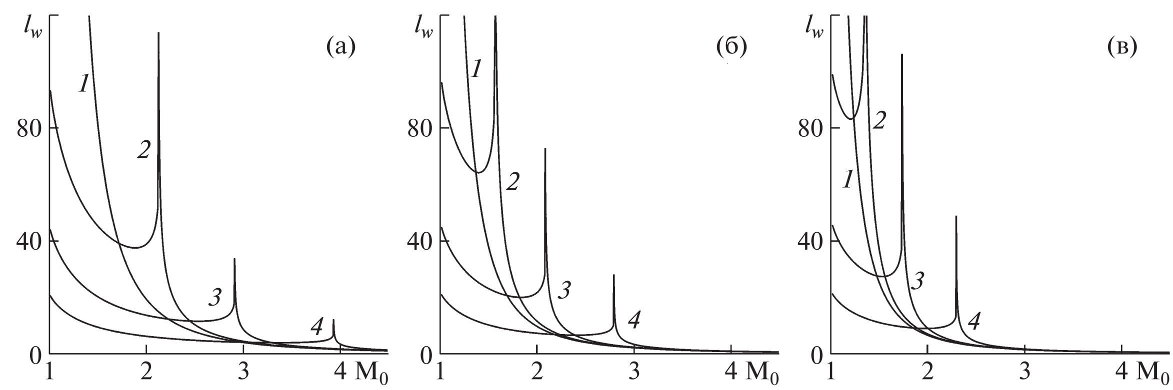

Рис. 4. Зависимость безразмерной ширины волны с частичной дисперсией от числа Маха волны при $a = 0.05$, 0.1, 0.15 (а–в) для различных значений массовой концентрации капель: $\alpha_0 = 0.01$, 0.05, 0.1, 0.2 (кривые *1*–*4*).

риваются лишь “макротечения”, т.е. течения на масштабах, много больших ширины зон неравновесного течения, когда внутренняя структура волн уплотнения не существенна.

Приведенные ниже результаты основаны на решении громоздких систем нелинейных алгебраических уравнений (обобщенных соотношений Рэнкина–Гюгонио типа (2.4) или (2.5) для падающей и отраженной волны), выписывание которых для каждого случая занимает много места, хотя формулировки этих уравнений для каждого случая однотипны. Поэтому ниже эти соотношения не приводятся, а будут описаны лишь основные идеи и этапы построения решений.

На рис. 5 изображена схема течения газокапельного потока в области взаимодействия косого скачка уплотнения с плоской стенкой (или плоскостью симметрии). Возможные варианты регулярного отражения волны от стенки с различными типами волн и различным состоянием среды в областях 0, 1 и 2 приведены в виде таблицы на рис. 6. Всего обнаружено десять таких режимов. Если в падающей волне происходит полное испарение капель, то в области 1 течение однофазное, а значит, отраженной волной может быть только обычная ударная волна. Если в области 1 поток остается двухфазным, то отраженной волной может быть волна либо с полной, либо с частичной дисперсией. При этом за отраженной волной поток также может оставаться двухфазным либо становиться однофазным.

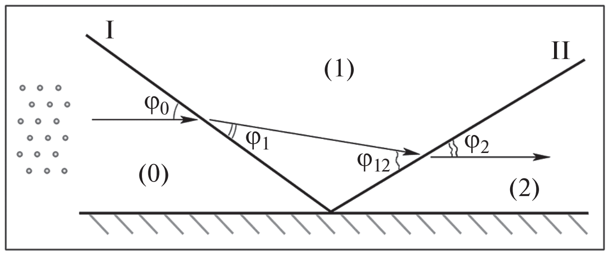

Рис. 5. Схема течения в области взаимодействия волны с плоской стенкой: I – падающая волна, II – отраженная волна.

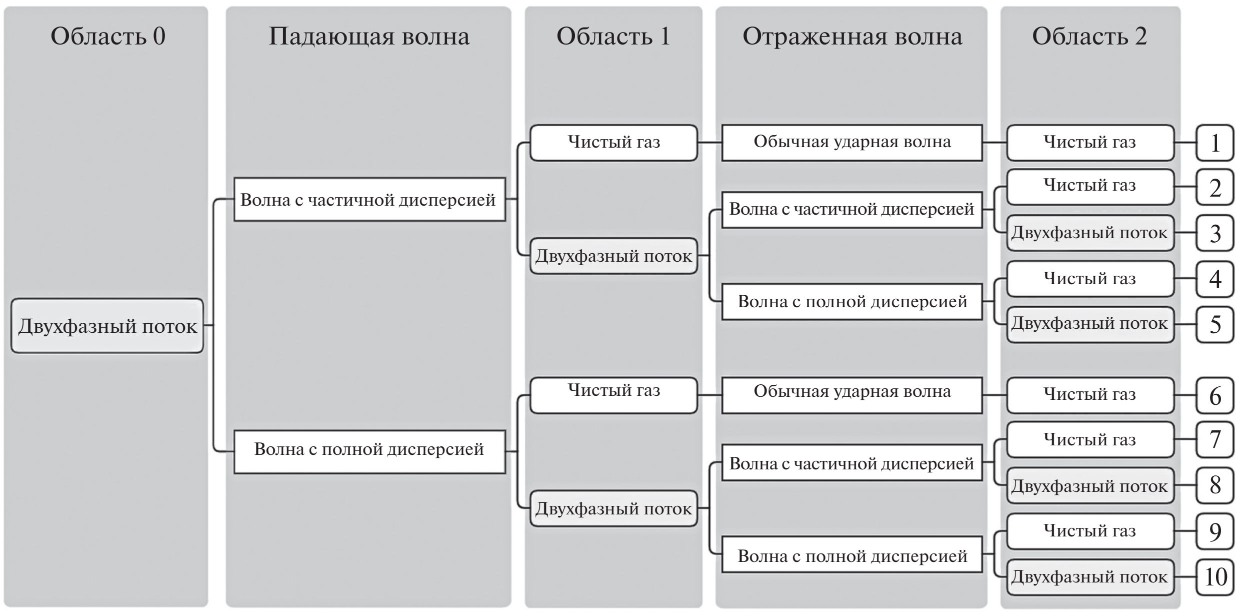

Рис. 6. Возможные режимы регулярного взаимодействия волны уплотнения с плоской стенкой.

Для анализа существования того или иного типа сначала рассчитываются параметры потока в области 1 между падающей и отраженной волной. Для вычисления параметров газа можно использовать выражения (2.4) и (2.5), если под скоростями потока и числами Маха в областях 0 и 1 понимать нормальные к падающей волне компоненты скорости и числа Маха, посчитанные по нормальной компоненте скорости. Для расчета параметров в области 2 нужно разрешить соотношения (2.3) на отраженной волне, заменив скорость на нормальную к отраженной волне компоненту скорости и добавив геометрическое условие $\varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_{12} - \varphi_2$, где φ_0, φ_1 – углы между падающей волной и направлением потока в областях 0 и 1, φ_{12}, φ_2 – углы между отраженной волной и направлением потока в областях 1 и 2 (рис. 5). В зависимости от режима полного или неполного испарения капель в областях 1 и 2 получаются различные системы алгебраических уравнений, которые во всех случаях можно свести к кубическому уравнению относительно $\zeta = \operatorname{ctg}\varphi_{12}$. Во всех трех случаях физическим смыслом обладает лишь одно из трех решений этого уравнения. После нахождения угла φ_{12} вычисляются угол φ_2 и остальные параметры в области 2.

В результате анализа трех различных систем уравнений и дополнительных условий для чисел Маха M_{n0} и M_{n1}, посчитанных по нормальной к волне скорости газа и определяющих наличие либо отсутствие газодинамического разрыва в падающей и отраженной волне, было установлено, что при определенных наборах параметров M_0, φ_0, α_0 возможна реализация всех десяти типов отражения волны от стенки.

На рис. 7*а*–*г* приведены области существования различных вариантов в плоскости параметров M_{n0}, α_0 для четырех различных значений угла φ_0. Для режимов, в которых падающая волна

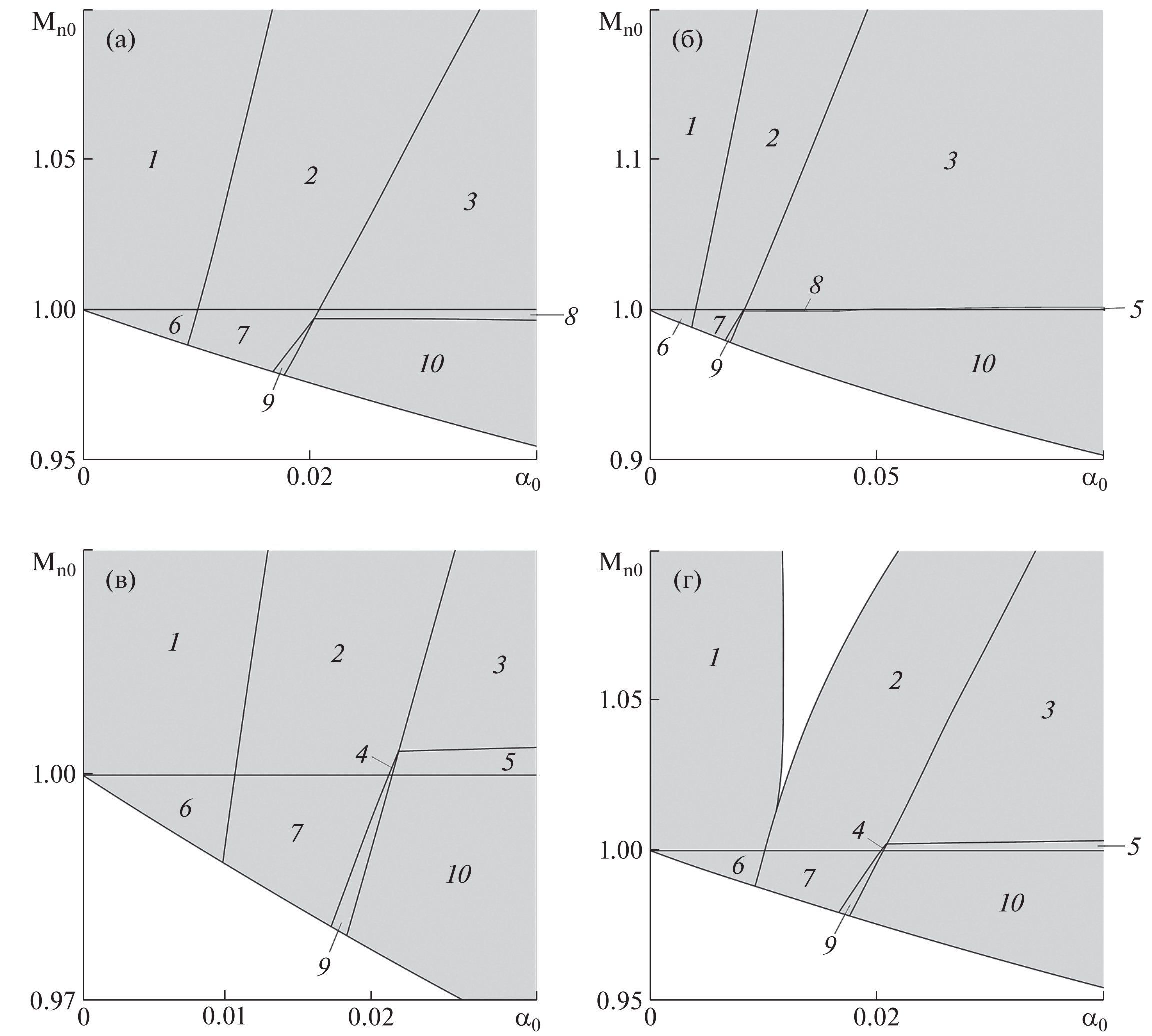

Рис. 7. Области существования режимов 1–10 (по классификации на рис. 6) для различных углов между потоком и падающей волной: $\varphi_0 = 10, 20, 30, 40°$ (а–г), $a = 0.1$.

является волной с полной дисперсией, а в области 2 поток становится однофазным (типы 6, 7, 9), диапазоны существования в плоскости параметров M_0, α_0 ограничены и относительно малы, тогда как области существования режимов 1, 2, 3, 10 не ограничены и расширяются при увеличении M_0 или α_0. Режимы 5 и 8 реализуются при значениях нормальных чисел Маха M_{n0}, близких к 1. Типы отражения 4 и 5 не возможны при небольших значениях угла φ_0 (рис. 7а). Незакрашенные области на рис. 7а–г соответствуют параметрам, для которых не существует решений в рассмотренном виде комбинации падающей и отраженной волны, но возможны более сложные двумерные течения или маховское отражение ударной волны от стенки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках двухконтинуальной модели получены обобщенные соотношения Рэнкина–Гюгонио для прямых и косых волн уплотнения в газокапельных средах с испаряющимися каплями. Эти соотношения учитывают поглощение тепла из несущей фазы за счет фазового перехода внутри структуры волны. На основе проведенного параметрического исследования найдены диапазоны безразмерных определяющих параметров, соответствующие существованию волн с полной и частичной дисперсией в газокапельных средах с испаряющимися каплями. Определены условия полного и частичного испарения капель в зоне релаксации параметров фаз в волнах уплотнения. На основе численных расчетов исследованы распределения параметров фаз в волнах с полной и частичной дисперсией, а также зависимость ширины волны от определяющих параметров. Установлено, что для всех рассмотренных значений параметров внутри зоны релаксации имеется локальный максимум температуры. Ширина волны имеет локальный максимум для параметров, соответствующих переходу от неполного к полному испарению капель. С увеличением числа Маха и параметра, характеризующего скорость испарения капель, ширина волны монотонно уменьшается. Показано, что при симметричном столкновении косых ударных волн в газокапельных средах или отражении косых волн от плоской стенки возможно формирование десяти различных волновых структур и определены границы существования каждой из возможных структур. Впервые найдены условия, при которых отраженные волны вырождаются в волны с полной дисперсией или полностью исчезают, а также условия полного испарения капель за падающей волной.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 19-19-00234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной среде при наличии фазовых превращений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 5. С. 33–47.
2. *Gumerov N.A., Ivandaev A.I., Nigmatulin R.I.* Sound waves in monodisperse gas-particle or vapour-droplet mixtures // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 53–74. https://doi.org/10.1017/S0022112088002058
3. *Goossens H.W.J., Cleijne J.W., Smolders H.J., Van Dongen M.E.H.* Shock wave induced evaporation of water droplets in a gas-droplet mixture // Exp. Fluids. V. 6. P. 561–568 (1988). https://doi.org/10.1007/BF00196603
4. *Аманбаев Т.Р., Ивандаев А.И.* Влияние фазовых превращений на структуру ударных волн в парокапельной смеси // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1988. № 3. С. 81–85.
5. *Young J.B., Guha A.* Normal shock-wave structure in two-phase vapor-droplet flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 228. P. 243–274. https://doi.org/10.1017/S0022112091002690
6. *Guha A.* Structure of partly dispersed normal shock waves in vapor-droplet flows// Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 7. P. 1566–1578. https://doi.org/10.1063/1.858429
7. *Smolders H.J., Van Dongen M.E.H.* Shock wave structure in a mixture of gas, vapour and droplets // Shock Waves. 1992. V. 2. P. 255–267. https://doi.org/10.1007/BF01414761
8. *Chang E.J., Kailasanath K.* Shock wave interactions with particles and liquid fuel droplets // Shock Waves. 2003. V. 12. P. 333–341. https://doi.org/10.1007/s00193-002-0170-1
9. *Yeom G.S., Chang K.S.* Shock wave diffraction about a wedge in a gas-microdroplet mixture // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 5073–5088. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.056
10. *Chauvin A., Daniel E., Houas L., Tosello R.* Experimental investigation of the propagation of a planar shock wave through a two-phase gas-liquid medium // Phys. Fluids. 2011. V. 23. P. 113301. https://doi.org/10.1063/1.3657083
11. *Леонтьев А.И.* Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. № 1. С. 157–159.
12. *Azanov G.M., Osiptsov A.N.* The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 1125–1133. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.090
13. *Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Киселев Н.А., Медвецкая Н.В., Попович С.С.* Измерение адиабатической температуры стенки плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым воздушно-капельным потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 5. С. 130–136. https://doi.org/10.31857/S056852812005014X
14. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145
15. *Sazhin S.* Droplets and Sprays. Springer, London, 2014. 345 p.
16. *Голубкина И.В., Осипцов А.Н.* Влияние примеси неиспаряющихся капель на структуру течения и температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 58–69. https://doi.org/10.1134/S0568528119030046
17. *Голубкина И.В., Осипцов А.Н.* Взаимодействие скачков уплотнения в запыленном газе и возникновение волн с полной дисперсией // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 70–83.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 56–64

УДК 532.546:536.421

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ГАЗ–НЕФТЬ В РАМКАХ ПОДХОДА БРИНКМАНА

© 2022 г. Г. Г. Цыпкин[a,*], В. А. Шаргатов[a,**]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**E-mail: tsypkin@ipmnet.ru*

***E-mail: shargatov@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.11.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Рассматривается задача об устойчивости вертикального течения в нефтяном коллекторе с газовой шапкой, когда движение нефти подчиняется уравнению Бринкмана. Выведены граничные условия на подвижной границе газонефтяного контакта и получено базовое решение. Методом нормальных мод исследована устойчивость поверхности раздела газ–нефть. Проведено исследование полученного дисперсионного соотношения. Найдены условия устойчивости течения при всех значениях параметров и показано, что в линейном приближении скорость роста коротковолновых возмущений стремится к нулю при возрастании волнового числа.

Ключевые слова: поверхность раздела газ–нефть, вертикальное течение, уравнение Бринкмана, устойчивость, метод нормальных мод

DOI: 10.31857/S056852812203015X

На нефтяные коллекторы с газовой шапкой приходится значительная доля газовых и нефтяных месторождений [1]. Добыча нефти из таких месторождений обладает определенными особенностями и отличается от разработки чисто нефтяных коллекторов. Так, снижение давления в области, насыщенной нефтью, вызывает движение границы газонефтяного контакта. Движение этой поверхности раздела может быть неустойчивым, что приводит к газовому пробою к добывающей скважине и формированию в пласте и призабойной области неподвижной нефти [2]. В других случаях разрушение в результате неустойчивости поверхности газонефтяного контакта может вызвать дробление потока и формирование остаточной неподвижной нефти в месторождении [3]. На основании этого можно сделать вывод, что определяющим фактором многих процессов является неустойчивость фильтрационных течений.

В последние годы были проведены аналитические и численные исследования неустойчивости поверхностей раздела при фильтрации в геотермальных системах, грунтах и горных породах [4–7]. В этих работах в основе математического описания процесса фильтрации в пористых средах был положен закон Дарси. Найдено, что во многих важных для приложений случаях переход к неустойчивости реализуется для всех значений волнового числа одновременно или при бесконечно больших волновых числах. При этом наиболее быстрорастущей модой неустойчивого течения является мода, соответствующая бесконечно малому линейному размеру. В этом случае можно сделать вывод о неприменимости математической модели, основанной на законе Дарси, для описания как самого перехода к неустойчивости, так и последующего развития течения с разрушением поверхности раздела, приводящим к образованию "пальцев".

В [8] в рамках теории фильтрации Дарси исследовалась устойчивость поверхности раздела газ–нефть при падении давления в области, насыщенной нефтью. Был найден критерий устойчивости поверхности и показано, что при изменении параметров переход в неустойчивый режим осуществляется одновременно при всех волновых числах. Естественно предположить, что закон Дарси, хорошо описывающий течения с большим характерным масштабом длины, может не всегда давать адекватное математическое описание мелкомасштабных явлений. В этих случаях при исследовании фильтрационных течений вместо закона Дарси предлагается использовать уравнение Бринкмана [9].

Интерес к уравнению Бринкмана, как обобщенной форме уравнения фильтрации Дарси, возник во многом вследствие попыток сформулировать корректные граничные условия на поверхности контакта течения свободной жидкости и течения в пористой среде [10–12]. Свойства уравнения Бринкмана и граничных условий на поверхности контакта свободной жидкости и пористой среды исследовались в работах [13, 14]. Анализ влияния инерционных членов на течение контактирующих свободной жидкости и жидкости в пористой среде в рамках уравнения Бринкмана представлен в [15]. В работе [16] приведены данные экспериментов по устойчивости поверхности раздела между двух смешивающихся жидкостей, проведенных для вертикальной ячейки Хеле-Шоу. Проведено сравнение с результатами исследований линейной устойчивости для течения, подчиняющего уравнению Бринкмана. Устойчивость плоскопараллельного течения свободной жидкости над насыщенной пористой средой рассматривалась в [17]. Дан сравнительный анализ результатов с использованием двух подходов. В одном случае использовалась модель Бринкмана с граничными условиями Очоа-Тапиа–Уитекера, а в другом – уравнения Дарси-Форхгеймера с граничными условиями Биверса-Джозефа.

Эволюция бесконечно малых и конечных локализованных возмущений для движущегося фронта фазового перехода изучалась в [18, 19] в приближении Дарси. Развитие гравитационной неустойчивости в двухслойной жидкости постоянной и переменной вязкости в пористой среде численно исследовалось в [20, 21] также с использованием закона Дарси. Уравнение Бринкмана использовалось в [22] для моделирования течения микрополярной жидкости в пористой среде.

В настоящей работе в рамках обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана проведено исследование устойчивости контактной поверхности газ–нефть при понижении давления в области, насыщенной нефтью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение нефти в пористой среде для случая, когда горизонтальный пласт, насыщенный нефтью, сверху граничит с газовой шапкой, а снизу – с высокопроницаемым пропластком или трещиной. Предполагается, что движение нефти описывается обобщенным уравнением фильтрации Бринкмана. Пусть нижняя граница пласта имеет вертикальную декартову координату $z = 0$, а верхняя – $z = L$. Бесконечный в горизонтальном измерении пласт включает в себя область Ω_f, содержащую нефть при $0 < z < S(x, t)$ и область Ω_g с координатами $S(x, t) < z < L$, насыщенную газом. Считаем, что объем газа достаточно большой и можно пренебречь его движением и считать давление в нем постоянным. Тогда на контактной поверхности газ–нефть $z < S(x, t)$ давление постоянно и равно P_G. Растворением газа в нефти и дегазацией нефти пренебрегаем. При откачке нефти из высокопроницаемого пропластка, соответствующего границе $z = 0$, можно считать, что давление в нем изменяется мгновенно на всем протяжении и равно постоянной величине P_F.

Нефть предполагается несжимаемой и ее движение описывается уравнением Бринкмана с учетом силы тяжести

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$-\nabla(P + \rho g z) + \mu_e \Delta\vec{V} - \frac{\mu}{k}\vec{V} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь P – давление, ρ – плотность, g – ускорения свободного падения, μ – вязкость, μ_e – эффективная вязкость, k – проницаемость, $\vec{V}$ – вектор скорости фильтрации.

Найдем базовое решение, которое предполагается исследовать на устойчивость. Используем условие несжимаемости жидкости (1.1) и применим операцию дивергенции к уравнению (1.2). В результате получаем уравнение Лапласа для давления

$$\Delta P = 0 \tag{1.3}$$

Если контактная поверхность нефть–газ является плоской и в момент времени t имеет z-координату $H(t) > 0$, то уравнению (1.3), а также граничным условиям

$$P(x, 0, t) = P_F, \tag{1.4}$$

$$P(x, H(t), t) = P_G \tag{1.5}$$

удовлетворяет решение

$$P_b(x,z,t) = \frac{(P_G - P_F)\,z}{H(t)} + P_F \tag{1.6}$$

Из уравнения (1.2) находим, что

$$V_{z,b}(x,z,t) = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{P_G - P_F}{H(t)} + \rho g\right), \tag{1.7}$$

$$V_{x,b}(x,z,t) = 0, \tag{1.8}$$

где $V_{x,b}$ и $V_{z,b}$ – x - и z-компоненты скорости $\vec{V}$ для базового решения.

Если процессы растворения газа в нефти и дегазации нефти не учитываются, то скорость перемещения контактной поверхности в направлении внешней нормали совпадает с нормальной компонентой скорости фильтрации $\vec{V}(H(t))$, поэтому для базового решения справедливо уравнение

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{P_G - P_F}{H(t)} + \rho g\right), \tag{1.9}$$

из которого получаем

$$t = \frac{\mu}{k}\left(\frac{P_G - P_F}{\rho^2 g^2}\ln\left(\frac{\rho g H_0 + P_F - P_G}{\rho g H(t) + P_F - P_G}\right) - \frac{H(t) - H_0}{\rho g}\right), \tag{1.10}$$

где H_0 – z-координата контактной поверхности при $t = 0$. Соотношение (1.10) определяет неявную функцию $H(t)$.

На поверхности раздела выполняется условие равенства нормальных составляющих напряжений, которое имеет вид

$$P(x, s(x,t), t) - 2\mu_e\left(\frac{\partial}{\partial n}V_n(x,z,t)\right) = P_G \tag{1.11}$$

Здесь V_n – нормальная к поверхности $S(x,\ t)$ компонента скорости $\vec{V}$, $\left(\frac{\partial V_n}{\partial n}\right)$ – производная этой компоненты по направлению нормали к поверхности $S(x,\ t)$.

Условие для касательного напряжения, которое равно нулю (см., например, [23]), может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}V_\tau(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial \tau}V_n(x,z,t) = 0, \tag{1.12}$$

где V_τ – касательная к поверхности $S(x,\ t)$ компонента скорости $\vec{V}$, $\left(\frac{\partial}{\partial n}V_\tau\right)$ – производная этой компоненты по направлению нормали, $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}V_n\right)$ – производная нормальной компоненты скорости в направлении касательной.

2. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение задачи о линейной устойчивости в виде

$$S(x,t) = H(t) + s(x,t) \tag{2.1}$$

$$P(x,z,t) = P_b(x,z,t) + p(x,z,t) \tag{2.2}$$

$$V_x(x,z,t) = u(x,z,t), \tag{2.3}$$

$$V_z(x,z,t) = V_{z,b}(x,z,t) + v(x,z,t), \tag{2.4}$$

где $p(x,\ z,\ t)$, $u(x,\ z,\ t)$, $v(x,\ z,\ t)$, $s(x,\ t)$ – малые возмущения давления, горизонтальной и вертикальной компонент скорости, а также положения границы раздела нефть–газ соответственно.

В силу линейности уравнения (1.3) для $p(x, z, t)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,z,t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(x,z,t) = 0 \tag{2.6}$$

Будем искать решение для $p(x, z, t)$ в виде

$$p(x,z,t) = \Pi(z) f(t) \exp(iKx),$$

тогда из уравнения (2.6) получаем

$$-K^2\Pi(z) + \frac{d^2}{dz^2}\Pi(z) = 0 \tag{2.7}$$

Общее решение уравнения (2.7) запишем как

$$\Pi(z) = C_1 \exp(Kz) + C_2 \exp(-Kz) \tag{2.8}$$

С учетом того, что возмущения возникают на свободной поверхности и затухают на нижней границе низкопроницаемого слоя, вторым слагаемым в правой части выражения (2.8) можно пренебречь, тогда

$$\Pi(z) = C_1 \exp(Kz) \tag{2.9}$$

Решение для $u(x, z, t)$ и $v(x, z, t)$ будем искать в виде

$$u(x,z,t) = U(z) f(t) \exp(iKx), \tag{2.10}$$

$$v(x,z,t) = V(z) f(t) \exp(iKx) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.2), (2.3) и (2.4) в уравнение (1.2), с учетом (2.9), (2.10) и (2.11) получаем

$$U(z) = -icC_1Ke^{Kz} - K^2U(z)m_e + \left(\frac{d^2}{dz^2}U(z)\right)m_e \tag{2.12}$$

$$V(z) = -cC_1Ke^{Kz} - K^2V(z)m_e + \left(\frac{d^2}{dz^2}V(z)\right)m_e \tag{2.13}$$

где $c = k/\mu$, $m_e = c\mu_e$.

Для общего решения уравнения (2.12)

$$U(z) = -icC_1K \exp(Kz) + C_3 \exp(-\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) + C_4 \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z)$$

также при достаточно большой толщине нефтесодержащего пласта можно пренебречь членом в правой части, который убывает при увеличении z и записать решение в виде

$$U(z) = -icC_1K \exp(Kz) + C_u \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) \tag{2.14}$$

Аналогично из уравнения (2.13) получаем:

$$V(z) = -cC_1K \exp(Kz) + C_v \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) \tag{2.15}$$

Из условия несжимаемости жидкой фазы (1.1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial z}v(x,z,t) = 0 \tag{2.16}$$

Воспользовавшись соотношениями (2.10) и (2.11), из уравнения (2.16) получаем, что

$$iKU(z) + \frac{d}{dz}V(z) = 0 \tag{2.17}$$

Подставляя (2.14) и (2.15) в уравнение (2.17), находим уравнение, связывающее коэффициенты C_u и C_v:

$$iC_uK \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) + C_v\sqrt{K^2 + 1/m_e} \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) = 0 \tag{2.18}$$

Из (2.18) получаем

$$C_u = i\frac{\sqrt{K^2 + 1/m_e}}{K}C_v \tag{2.19}$$

Линеаризованное уравнение получено из (1.11) в предположении того, что

$$s(x,t) = C_\eta f(t)e^{iKx} \tag{2.20}$$

и выполняется условие $\partial s/\partial x \ll 1$, имеет вид

$$\begin{gathered} C_1(2K^2 + 1/m_e)\exp(KH(t)) + C_\eta\frac{P_G - P_F}{H} - \\ - C_v\frac{2\sqrt{m_e}}{c}\sqrt{K^2 + 1/m_e}\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t)) = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

В линейном приближении нормальная скорость контактной поверхности может быть найдена из уравнения

$$C_v\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t)) - cC_1K\exp(KH(t)) - C_\eta\frac{f'(t)}{f(t)} = 0 \tag{2.22}$$

Из уравнения (1.12) в линейном приближении получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial x}v(x,z,t) = 0 \tag{2.23}$$

Используя соотношения (2.14), (2.15) и (2.19), преобразуем уравнение (2.23) к виду

$$\left(\frac{i}{K}(K^2 + 1/m_e) + iK\right)\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t))C_v - 2icC_1K^2\exp(KH(t)) = 0 \tag{2.24}$$

и получаем однородную систему уравнений (2.21), (2.22) и (2.24) относительно неизвестных C_1, C_v, C_η. Система имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы коэффициентов равен нулю

$$\mathrm{Det} \equiv \begin{vmatrix} (2K^2 + 1)e_k & -\frac{2}{c}2\sqrt{m_e}f_ke_H & \frac{P_G - P_F}{H(t)} \\ -cKe_k & e_H & -\frac{f(t)}{f(t)} \\ -2ice_kK^2 & \frac{if_k^2e_H}{m_eK} + iKe_H & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.25}$$

Здесь $e_H = \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t))$, $e_K = \exp\left(KH(t)\right)$, $f_k = \sqrt{K^2 + 1/m_e}$.

Из (2.25) находим

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{Kc(P_G - P_F)(K^2m_e - f_k)}{H(t)(2K^4m_e^2 - 4k^3m_e^{3/2}f_k + 2K^2f_k^2m_e + K^2m_e + f_k^2)}$$

или

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{Kc(P_G - P_F)}{H(t)(2K^4m_e^2 - 4k^3m_e^{3/2}\sqrt{K^2m_e + 1} + 2K^2\sqrt{K^2m_e + 1}m_e + 2K^2m_e + 1)} \tag{2.26}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Если эффективная вязкость μ_e равна нулю, соответственно $m_e = 0$, то из дисперсионного соотношения (2.26) следует, что в приближении Дарси это соотношение приводится к виду

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{Kc\left(P_G - P_F\right)}{H(t)} \tag{3.1}$$

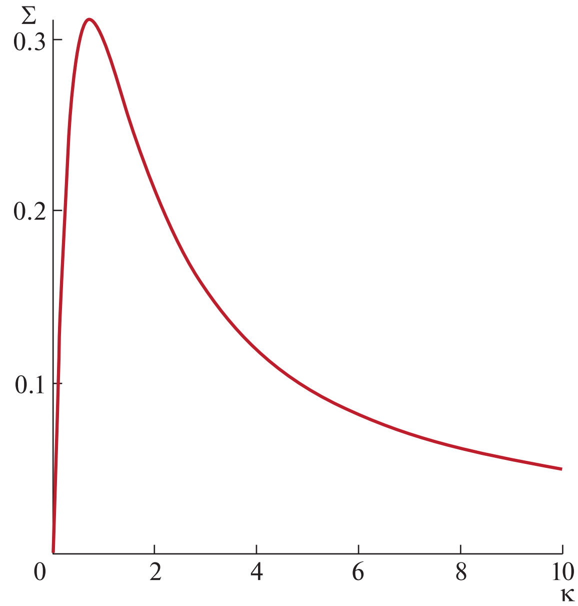

Рис. 1. График зависимости безразмерного параметра Σ от безразмерного волнового числа κ, где $P_k = P_G - P_F$.

Условие затухания возмущений на контактной границе, следующее из соотношения (3.1), совпадает с условием, которое получается при использовании закона Дарси [6, 7]. В случае неустойчивости, когда $P_G > P_F$, скорость роста амплитуды возмущений неограниченно увеличивается с ростом волнового числа $K \to \infty$.

Рассмотрим поведение $f'(t)$ при неограниченном росте волнового числа $K \to \infty$, когда $m_e \neq 0$. Из формулы (2.26) получаем

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \approx \frac{c\left(P_G - P_F\right)}{2m_e H(t) K} \tag{3.2}$$

Следовательно, в приближении Бринкмана скорость затухания или роста коротковолновых возмущений стремится к нулю при $K \to \infty$, как в устойчивом ($P_F > P_G$), так и в неустойчивом случае ($P_F < P_G$).

Если воспользоваться условием квазистационарности процесса, которое следует из того, что характерное время движения границы газонефтяного контакта много больше характерного времени перераспределения давления, то можно пренебречь зависимостью H от t в правой части уравнения (2.26) и полагать, что поверхность раздела неподвижна. Аналогичные условия квазистационарности справедливы для многих задач теории фильтрации с поверхностями разрывов [3, 24]. Тогда

$$f(t) = \exp(\sigma t)$$

и соотношения (2.26), (3.1) и (3.2) принимают вид

$$\sigma = \frac{Kc(P_G - P_F)}{H(2K^4 m_e^2 - 4k^3 m_e^{3/2}\sqrt{K^2 m_e + 1} + 2K^2\sqrt{K^2 m_e + 1}m_e + 2K^2 m_e + 1)} \tag{3.3}$$

$$\sigma = \frac{Kc\left(P_G - P_F\right)}{H} \tag{3.4}$$

$$\sigma \approx \frac{c\left(P_G - P_F\right)}{2m_e HK}$$

соответственно.

На рис. 1 для соотношения (3.3) представлен график зависимости безразмерного параметра $\Sigma = \dfrac{\sigma H\sqrt{m_e}}{cP_k}$ от безразмерного волнового числа $\kappa = K\sqrt{m_e}$, где $P_k = P_G - P_F$. Видно, что скорость

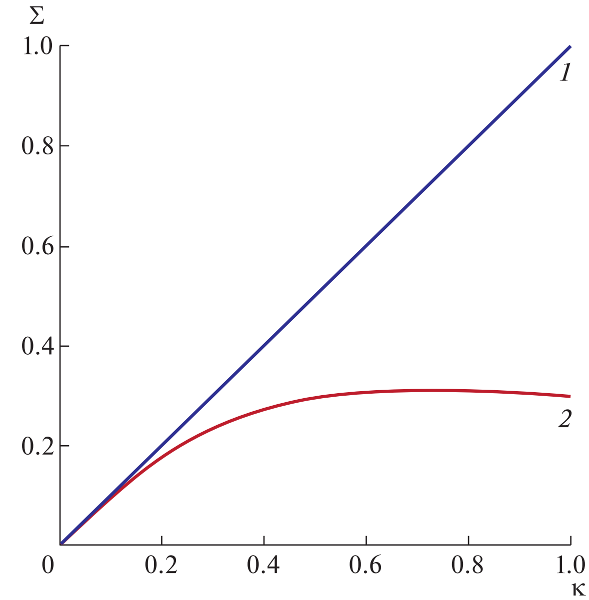

Рис. 2. График зависимости безразмерного параметра Σ от безразмерного волнового числа κ: *1* – закон Дарси; *2* – приближение Бринкмана.

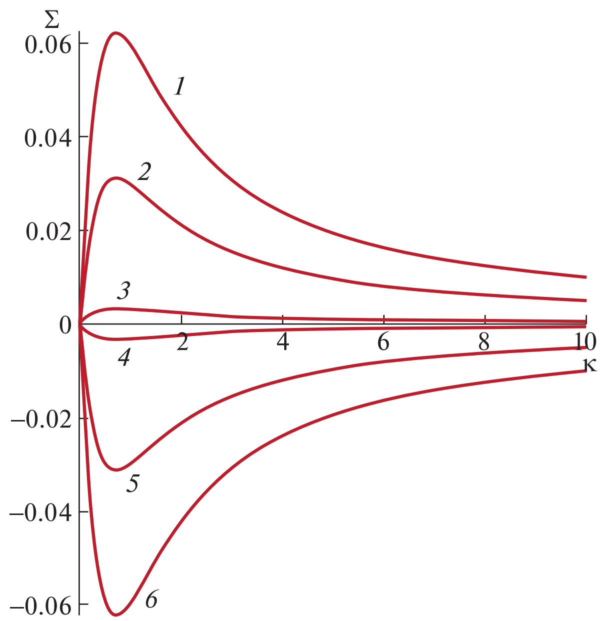

Рис. 3. График зависимости безразмерного параметра Σ от волнового числа κ: *1*–*6* – $P_F = (0.8, 0.9, 0.99, 1.01, 1.1, 1.2)\, P_G$.

роста возмущений имеет максимум, который достигается при $K\sqrt{m_e} \approx 0.72$ и стремится к нулю с ростом волнового числа $K \to \infty$.

На рис. 2 представлено сравнение безразмерной скорости роста возмущений при малых безразмерных волновых числах для уравнений фильтрации Дарси (кривая *1*) и Бринкмана (кривая *2*). Видно, что при $K\sqrt{m_e} \ll 1$ уравнение Дарси хорошо описывает поведение физической системы, а при больших волновых числах ошибка от использования закона Дарси становится существенной.

Из формулы (3.3) следует, что поскольку выражение, стоящее в знаменателе, всегда положительно, то переход к неустойчивости происходит при смене знака разницы между давлением в газовой шапке P_G и давлением в высокопроницаемом пропластке P_F. На рис. 3 показана зависимость безразмерной скорости роста или затухания возмущений $\dfrac{\sigma H\sqrt{m_e}}{cP_k}$ от безразмерного волнового числа $K\sqrt{m_e}$ при фиксированном P_G и различных значениях P_F. Видно, что переход к неустойчивости происходит при $P_G = P_F$ одновременно при всех значениях волнового числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы динамика и устойчивость вертикального течения, возникающего в нефтяном коллекторе с газовой шапкой. Течение нефти описывалось с помощью обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана. Представлен закон движения плоской горизонтальной границы раздела нефть–газ. Методом нормальных мод исследована устойчивость течения по отношению к бесконечно малым возмущениям плоской границы. Показано, что такие возмущения растут, если давление в газовой шапке больше, чем давление в высокопроницаемом пропластке, из которого происходит отбор нефти. Если плоская граница раздела покоится, то давление в газовой шапке меньше, чем в высокопроницаемом пропластке, которое равно гидростатическому давлению. На первой стадии уменьшения давления в пропластке контактная поверхность начнет двигаться вниз, но останется устойчивой до тех пор, пока давление в пропластке не упадет ниже давления в газовой шапке. После этого движение границы раздела нефть–газ станет неустойчивым. В этом случае нелинейная неустойчивость имеет место для любой длины волны, но зависит от волнового числа K таким образом, что при $K \to \infty$ и $K \to 0$ эта скорость стремится к нулю. Существует некоторое значение волнового числа, при котором скорость роста имеет максимум.

При использовании закона Дарси неустойчивость также возникает, если давление в газовой шапке больше, чем давление в пропластке. Однако в этом случае скорость роста возмущений неограниченно возрастает с уменьшением длины волны возмущения. В этом случае коротковолновые возмущения растут сколь угодно быстро, что не позволяет получить достоверную картину течения и свидетельствует о неприменимости математической модели, основанной на законе Дарси, для описания как самого перехода к неустойчивости, так и последующего развития течения с разрушением поверхности раздела, приводящим к образованию пальцев. Изменение основных уравнений путем использования обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана позволяет устранить аномальный характер эволюции коротковолновых возмущений, что открывает возможность исследовать задачи, которые не являлись корректными в рамках приближения Дарси.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 296 с.
2. *Кутырев Е.Ф., Шкандратов В.В., Белоусов Ю.В.* Некоторые результаты физического моделирования процессов газообмена в пластовой системе нефть–нагнетаемая вода // Георесурсы. 2005. № 5. С. 33–36.
3. *Tsypkin G.G., Shargatov V.A.* Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 1053–1063.
4. *Tsypkin G.G., Il'ichev A.T.* Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // Transp. Porous Media. 2004. V. 55. P. 183–199.
5. *Il'ichev A.T., Tsypkin G.G.* Catastrophic transition to instability of evaporation front in a porous medium // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 27. № 6. P. 665–677.
6. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsypkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.
7. *Tsypkin G.G., Il'ichev A.T.* Superheating of water and morphological instability of the boiling front moving in the low-permeability rock // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2021. V. 167. 120820.
8. *Цыпкин Г.Г.* Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой при движении поверхности раздела в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 2. С. 70–76.
9. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. P. 27–34.
10. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197–207.
11. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635–2646.

12. *Valdes-Parada F.J., Ochoa-Tapia J.A., Alvarez-Ramirez J.* On the effective viscosity for the Darcy–Brinkman equation // Physica A. 2007. V. 385. P. 69–79.
13. *Nield D.A.* Modelling high speed flow of a compressible fluid in a saturated porous medium // Transp. Porous Media. 1994. V. 14. P. 85–88.
14. *Nield D.A.* The Beavers–Joseph boundary condition and related matters: a historical and critical note // Transp. Porous Media. 2009. V. 78. P. 537–540.
15. *Tsiberkin K.* Effect of inertial terms on fluid–porous medium flow coupling // Transp. Porous Media. 2018. V. 121. P. 109–210.
16. *Fernandez J., Kurowski P., Petitjeans P., Meiburg E.* Density-driven unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell // J. Fluid Mech. 2002. V. 451. P. 239–260.
17. *Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Baydina D.T. et al.* Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Phys. Rev. 2016. V. 94. 013104.
18. *Ильичев А.Т., Шаргатов В.А.* Динамика фронтов испарения воды // ЖВММФ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1531–1553.
19. *Shargatov V.A., Gorkunov S.V., Il'ichev A.T.* Dynamics of front-like water evaporation phase transition interfaces // Commun. in Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 67. P. 223–236.
20. *Соболева Е.Б.* Начало конвекции Рэлея-Тейлора в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 2. С. 52–62.
21. *Soboleva E.B.* Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 784–798.
22. *Khanukaeva D.Yu., Filippov A.N., Yadav P.K. et al.* Creeping flow of micropolar fluid through a swarm of cylindrical cells with porous layer (membrane) // J. Mol. Liq. 2019. V. 294. 111558.
23. *Журавлева Е.Н., Пухначев В.В.* Задача о деформации вязкого слоя // Доклады РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 66–69.
24. *Tsypkin G.G., Woods A.W.* Vapour extraction from a water saturated geothermal reservoir // J. Fluid Mech. 2004. V. 506. P. 315–330.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 65–78

УДК 532.582

ГИДРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ, ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ С ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ

Е. А. Батяев[a,]*, Т. И. Хабахпашева[a,]**

[a] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

**E-mail: john@hydro.nsc.ru*

***E-mail: tkhab@ngs.ru*

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.
После доработки 21.11.2021 г.
Принята к публикации 21.11.2021 г.

Построено и исследовано решение задачи об изгибно-гравитационных волнах в канале, покрытом льдом, толщина которого линейно меняется от одной стенки канала до другой. Канал имеет прямоугольное сечение. Предполагается, что толщина ледовой пластины мала по сравнению с глубиной канала, а ее края приморожены к стенкам канала. Прогиб ледового покрова описывается в рамках линейной теории упругих пластин, течение жидкости подо льдом полагается потенциальным. Задача решается методом разложения по модам колебаний балки, толщина которой меняется линейно по ширине канала. Определены дисперсионные соотношения, профили изгибно-гравитационных волн поперек канала и распределения удлинений в ледовом покрове. Найдены групповые и фазовые скорости гидроупругих волн. Исследована зависимость гидроупругих характеристик от линейного коэффициента, определяющего неравномерность толщины льда. Проведено сравнение полученных результатов с результатами для однородного ледового покрова.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, канал, ледовый покров, линейная толщина льда, упругая пластина, деформации, максимальные удлинения

DOI: 10.31857/S0568528122030033

Задача о распространении изгибно-гравитационных волн в ледовых покровах рек и каналов активно исследуется последние десятилетия в связи с освоением северных территорий и возможностью длительного использования северного морского пути. Использование замерзших рек в качестве транспортных путей является обычной и естественной практикой для развития северных регионов. Сохранение целостности ледового покрова является важной проблемой при перемещении грузов и людей. В этой связи возникает множество задач по исследованию условий сохранения и разрушения ледового покрова, в том числе проблемы, вызываемые бегущими волнами или движением нагрузки. Рассматриваемый в настоящей работе канал прямоугольного сечения является простейшей моделью русла реки. Кроме того, большинство экспериментальных ледовых бассейнов имеет прямоугольное сечение [1–3], и аналитическое исследование изгибно-гравитационных волн в канале конечной ширины имеет важное значение для интерпретации экспериментальных результатов.

Обычно в задачах о взаимодействии жидкости с ледовым покровом последний моделируется тонкой упругой пластиной. Подробный обзор работ и новые результаты в этой области содержатся в [4–7]. В работах [5, 6] показано, что наличие стенок канала приводит к бесконечному (счетному) множеству дисперсионных кривых и критических скоростей для распространяющихся в канале гидроупругих волн. Критические скорости важны при исследовании задач о движении нагрузки в канале [8–11]. Так, при движении нагрузки со скоростью ниже первой критической основной прогиб ледовой пластины формируется в окрестности нагрузки, а при движении со сверхкритической скоростью образуется система гидроупругих волн, распространяющихся от нагрузки. Число волн в этой системе конечно и зависит от соотношения скорости движения нагрузки с критическими скоростями изгибно-гравитационных волн в канале.

В [5, 6] решение связанной задачи гидроупругости о бегущих волнах в канале строилось методом нормальных мод, в [9–11] для определения прогиба ледовой пластины при движении нагрузки применялось преобразование Фурье вдоль канала. В работе [7] решение получено путем разложения потенциала скорости и четвертой производной прогиба льда в ряд по косинусам с неизвестными коэффициентами. Для получения значений прогиба ледовой пластины ряды интегрируются, что добавляет к тригонометрическим функциям четыре полиномиальных члена с соответствующими константами, которые определяются из конкретных условий закрепления пластины к стенкам канала.

Почти во всех предыдущих работах по волнам в ледовом покрове и по движению нагрузки по льду или в непосредственной близости от него толщина льда полагалась постоянной [4–27]. Известны только несколько работ с кусочно-постоянными по толщине плавающими пластинами [28, 29]. Кроме того, слабо-неоднородная плавающая пластина рассматривалась в [30]. В этой работе уравнения линейной теории плавающих пластин с помощью вариационного принципа были сведены к упрощенной форме, в которой отсутствует вертикальная координата. Это удалось сделать за счет предположения о малости изменения толщины льда и глубины жидкости. Однако в природных условиях ледовый покров является существенно неоднородным. В силу разных причин он может оказаться у одного берега реки толще, чем у другого. В настоящей работе рассматривается случай ледового покрова, толщина которого меняется по линейному закону. Плотность льда при этом считается постоянной. Задача решается методом нормальных мод, описывающих свободные цилиндрические колебания пластины с линейно изменяющейся толщиной.

Для предлагаемого подхода к решению рассматриваемой задачи принципиальным является аналитическое представление форм свободных колебаний пластины с линейно изменяющейся толщиной. В предыдущих работах, в которых использовался метод нормальных мод, рассматривались только пластины постоянной или кусочно-постоянной толщины [5, 6, 9–11, 29, 31], при этом формы свободных колебаний пластины выражались через тригонометрические и экспоненциальные функции. В работе [32] говорится, что “существует очень мало уравнений вибрирующих пластин с переменным поперечным сечением, для которых можно получить точные решения. Такие точные решения доступны только для определенных форм пластин и граничных условий”. Так, колебания клиновидной пластины с линейно меняющейся толщиной исследовались в книге Тимошенко [33] приближенными методами через представление решения в виде степенных рядов по параметру неравномерности толщины. Коэффициентами этого ряда являются функции, определяемые из системы дифференциальных уравнений. Эти функции, в свою очередь, также ищутся в виде рядов с разделением переменных. В [34] разработан аналитический подход для свободных колебаний опертой пластины с одним изменением толщины в форме ступени. В [35] построены аналитические решения для свободных колебаний свободно-закрепленной пластины с кусочно-постоянной толщиной.

В работе [36] уравнения статического равновесия изгибных колебаний балки переменного сечения записаны в виде системы самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. Показано, что они могут быть сведены к уравнениям Бесселя. В работе [32] основные дифференциальные уравнения для свободных колебаний изгибаемых пластин с переменным распределением массы и жесткости устанавливаются и сводятся к уравнениям Бесселя или уравнению Эйлера путем выбора для них подходящих выражений, в виде степенных или экспоненциальных функций по длине пластины. Полученные в [32] общие решения, в виде функций Бесселя, использованы в настоящей работе. Подобные функции для исследования свободных колебаний пластин с линейно меняющейся толщиной были использованы также в работе [37]. В работе [38] эти функции определяются с помощью метода пристрелки. Вибрации кусочно-однородных балок рассматривались в [31], где была показана ортогональность мод свободных колебаний балки с весовым множителем. Эта ортогональность используется и в настоящей работе.

Целью работы является исследование особенностей гидроупругих характеристик линейной задачи о распространении изгибно-гравитационных волн в канале конечной глубины, заполненном идеальной несжимаемой жидкостью, с ледовым покровом при линейном изменении толщины льда поперек канала.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о распространении гидроупругих волн в ледовом покрове канала бесконечной длины, заполненного жидкостью. Ширина канала $2b$, глубина H. Схема исследуемой задачи и направления координатных осей показаны на рис. 1а. Канал заполнен идеальной не-

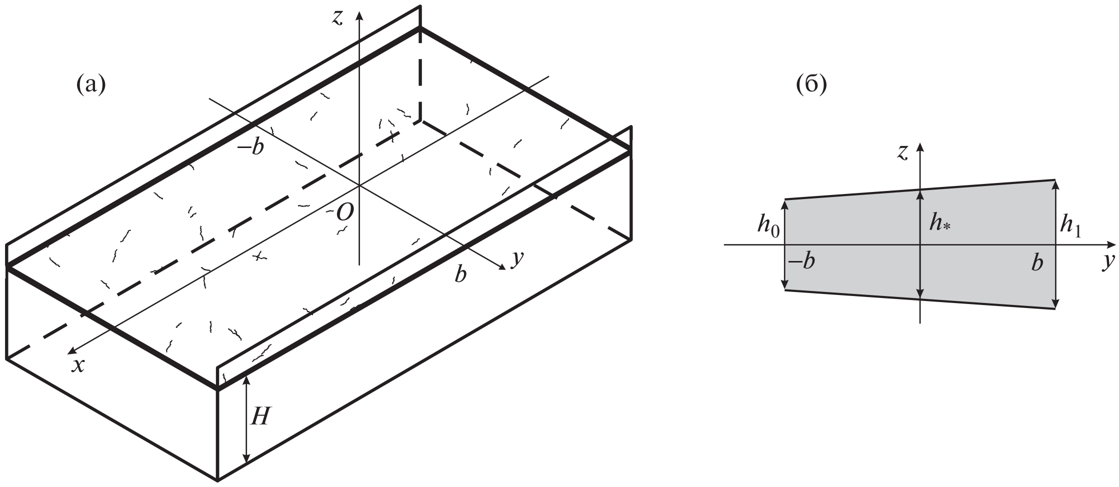

Рис. 1. Схема прямоугольного канала (а) и поперечное сечение ледового покрова (б).

сжимаемой жидкостью плотности ρ_l. Жидкость покрыта сверху ледовой пластиной, толщина которой меняется по линейному закону в поперечном сечении

$$h_i(y) = h_* \left(1 + \alpha \times y/b\right) \quad (-b \le y \le b) \tag{1.1}$$

где h_* – средняя толщина льда, α – параметр утолщения льда, $h_0 = h_*(1-\alpha)$, $h_1 = h_*(1+\alpha)$. Схема поперечного сечения ледового покрова и используемые обозначения размеров приведены на рис. 1б. Толщина ледового покрова значительно меньше глубины канала $h_* \ll H$. Ледовый покров моделируется тонкой однородной упругой пластиной плотности ρ_i и переменной цилиндрической жесткости

$$D(y) = \frac{Eh_i^3(y)}{12(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

где E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона льда. Края ледового покрова полагаются примороженными к стенкам канала.

Задача формулируется в рамках линейной теории гидроупругих волн. Предполагается, что изгибно-гравитационная волна распространяется с частотой ω в отрицательном направлении оси Ox. За амплитуду волны A принимается максимум прогиба ледовой пластины в поперечном сечении. Прогиб срединной поверхности ледового покрова $w(x,y,t)$ под действием гидродинамической нагрузки описывается линейным уравнением изгиба пластины [33]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - h_i(y)\rho_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x,y,t) = 0 \quad (z = 0) \tag{1.3}$$

где Q_x, Q_y – перерезывающие силы

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты упругих сил

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad M_{xy} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Краевые условия для прогиба, в случае жесткого закрепления упругой пластины по берегам канала, имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y = \pm b) \tag{1.4}$$

Гидродинамическое давление p определяется линеаризованным уравнением Бернулли

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \cdot w \quad (z = 0) \tag{1.5}$$

где g – ускорение свободного падения. Течение жидкости в канале описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -b < y < b, -H < z < 0) \tag{1.6}$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (y = \pm b), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = -H), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (z = 0) \tag{1.7}$$

Далее используются безразмерные переменные с сохранением обозначений. В качестве масштаба длины принимается половина ширины канала b, отношение $1/\omega$ – масштаб времени, амплитуда A – масштаб перемещений ледового покрова, $\rho_l g A$ – масштаб давления, $Ab\omega$ – масштаб потенциала скоростей. Безразмерная глубина канала обозначается как h ($h = H/b$), размеры поперечного сечения канала будут: $-1 \le y \le 1$, $-h \le z \le 0$. В безразмерных переменных уравнение (1.3) с учетом (1.5) примет вид

$$\begin{gathered}(1 + \alpha \cdot y)\beta\left[(1 + \alpha \cdot y)^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \right. \\ \left. + 6\alpha(1 + \alpha \cdot y)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) + 6\alpha^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\delta\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = -\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial t} - w\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\beta = D_*/\rho_l g b^4$, $\gamma = b\omega^2/g$, $\delta = h_*\rho_i/b\rho_l$, $D_* = Eh_*^3/12(1 - \nu^2)$. Остальные соотношения в безразмерных переменных сохранят свою форму.

Решение задачи (1.8), (1.4), (1.6), (1.7) ищется в виде бегущей волны

$$w(x, y, t) = \mathrm{Re}[F(y)e^{i(\kappa x + t)}] \tag{1.9}$$

где κ – безразмерное волновое число ($\kappa = kb$, k – размерное волновое число), $F(y)$ – амплитудная функция прогиба пластины. В связи с линейностью рассматриваемой задачи на функцию $F(y)$ налагается условие нормировки: $\max\limits_{-1<y<1}|F(y)| = 1$. Из-за неравномерной толщины пластины точки, в которых достигается максимум $F(y)$, определятся только после решения задачи. Для бегущих волн κ – действительное и положительное число, при этом размерная длина волны равна $2\pi/k = 2\pi b/\kappa$. Отметим, что решения (1.9) с комплексными κ и $F(y)$, если они существуют, не удовлетворяют условию ограниченности, так как соответствуют волнам, которые растут либо при $x \to -\infty$, либо при $x \to \infty$.

Потенциал скорости, соответствующий гидроупругой волне (1.9) и граничным условиям (1.7), может быть представлен в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \mathrm{Re}[i\Phi(y, z)e^{i(\kappa x + t)}] \tag{1.10}$$

где $\Phi(y, z)$ – комплексный потенциал скорости, который удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \kappa^2\Phi \quad (-1 < y < 1, -h < z < 0)$$

и краевым условиям

$$\Phi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \quad \Phi_z = 0 \quad (z = -h), \quad \Phi_z = F \quad (z = 0) \tag{1.11}$$

Подстановка выражений (1.9)–(1.10) в уравнение упругой пластины (1.8) дает

$$\beta(1+\alpha y)\Big[(1+\alpha y)^2 F'''' + 6\alpha(1+\alpha y)F''' + 6\alpha^2 F'' + (1+\alpha y)^2\kappa^4 F -$$
$$- 2\kappa^2((1+\alpha y)^2 F'' + 3\alpha(1+\alpha y)F') - 6\alpha^2\nu\kappa^2 F - \frac{\delta\gamma}{\beta}F\Big] = \gamma\Phi(y,0) - F \tag{1.12}$$

условия жестко закрепленных краев пластины приобретают вид

$$F = 0, \quad F' = 0 \quad (y = \pm 1)$$

Штрих обозначает производную по переменной y.

Таким образом, для известных инерционно-упругих характеристик ледового покрова и параметров канала требуется определить формы волн $F(y)$ с максимальной амплитудой, равной 1, соответствующие им дисперсионные соотношения, групповые и фазовые скорости, а также напряжения и деформации в ледовом покрове.

2. ГИДРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ

Прогиб ледовой пластины ищется в виде разложения

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(y) \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_n подлежат определению, а функции ψ_n являются решениями задачи о собственных колебаниях упругой неоднородной балки с жестко закрепленными концами [33]

$$\frac{d^2}{dy^2}\left[D(y)\frac{d^2\psi}{dy^2}\right] = \rho_i h_i(y)\Omega^2\psi \tag{2.2}$$

$$\psi(\pm 1) = 0, \quad \psi'(\pm 1) = 0 \tag{2.3}$$

где Ω – собственная частота. Для рассматриваемого случая линейно изменяющейся толщины льда (1.1)–(1.2) уравнение (2.2) принимает вид

$$(1+\alpha y)^2\psi'''' + 6\alpha(1+\alpha y)\psi''' + 6\alpha^2\psi'' = \theta^4\psi \tag{2.4}$$

где $\theta = \rho_i h_* \Omega^2 / D_*$. Так же как в [32, 37], уравнение (2.4) решается введением дифференциального оператора

$$\Delta = \frac{1}{1+\alpha y}\frac{d}{dy}\left[(1+\alpha y)^2\frac{d}{dy}\right]$$

с помощью которого уравнение (2.4) представляется в виде разложения

$$(\Delta + \theta^2)(\Delta - \theta^2)\psi(y) = 0$$

решением которого являются функции

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\xi}[A_n J_1(\eta_n\xi) + B_n Y_1(\eta_n\xi) + C_n I_1(\eta_n\xi) + D_n K_1(\eta_n\xi)] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где $\eta_n = 2\theta_n/\alpha$, $\xi = \sqrt{1+\alpha y}$, J_1, Y_1, I_1, K_1 – функции Бесселя. Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются краевыми условиями (2.3), которые принимают вид

$$J_1(\eta_n\xi_\pm)A_n + Y_1(\eta_n\xi_\pm)B_n + I_1(\eta_n\xi_\pm)C_n + K_1(\eta_n\xi_\pm)D_n = 0$$
$$J_0(\eta_n\xi_\pm)A_n + Y_0(\eta_n\xi_\pm)B_n + I_0(\eta_n\xi_\pm)C_n - K_0(\eta_n\xi_\pm)D_n = 0$$

где $\xi_\pm = \sqrt{1 \pm \alpha}$. Условием существования нетривиального решения данной однородной системы алгебраических уравнений является равенство нулю определителя соответствующей матрицы. Корнями данного уравнения являются числа η_n, через которые выражаются $\theta_n = \alpha\eta_n/2$. Функции $\psi_n(y)$ образуют ортогональную в обобщенном смысле систему, нормированную следующим образом

$$\int_{-1}^{1}(1+\alpha y)\psi_n(y)\psi_m(y)dy = \delta_{nm} \tag{2.5}$$

где $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_{nn} = 1$.

Из третьего краевого условия (1.11) при $z = 0$ следует, что потенциал можно искать в виде разложения

$$\Phi(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\Phi_n(y,z) \tag{2.6}$$

в котором функции $\Phi_n(y,z)$ являются решениями задач

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2} = \kappa^2\Phi_n$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial y} = 0 \quad (y = \pm 1), \quad \frac{\partial\Phi_n}{\partial z} = 0 \quad (z = -h), \quad \frac{\partial\Phi_n}{\partial z} = \psi_n \quad (z = 0) \tag{2.7}$$

Функции $\Phi_n(y,z)$ ищем в виде разложения в ряд Фурье по координате y

$$\Phi_n(y,z) = \frac{1}{2}\Phi^c_{n0}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\Phi^c_{nk}(z)\cos(\pi k y) + \sum_{l=1}^{\infty}\Phi^s_{nl}(z)\sin[(\pi l - \pi/2)y]$$

Такое представление позволяет сразу удовлетворить первому условию из (2.7). Аналогичным рядом Фурье представляем $\psi_n(y)$

$$\psi_n(y) = \frac{1}{2}\psi^c_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi^c_{nk}\cos(\pi k y) + \sum_{l=1}^{\infty}\psi^s_{nl}\sin[(\pi l - \pi/2)y]$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\psi^c_{nk} = \int_{-1}^{1}\psi_n(y)\cos(\pi k y)dy \quad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$\psi^s_{nl} = \int_{-1}^{1}\psi_n(y)\sin[(\pi l - \pi/2)y]dy \quad (l = 1, 2 \ldots)$$

Функции $\Phi^c_{nk}(z)$, $\Phi^s_{nl}(z)$ являются решениями задач

$$\frac{d^2\Phi^c_{nk}}{dz^2} = [\kappa^2 + (\pi k)^2]\Phi^c_{nk} \qquad \frac{d^2\Phi^s_{nl}}{dz^2} = [\kappa^2 + (\pi l - \pi/2)^2]\Phi^s_{nl} \tag{2.8}$$

$$\frac{d\Phi^c_{nk}}{dz} = \frac{d\Phi^s_{nl}}{dz} = 0 \quad (z = -h), \quad \frac{d\Phi^c_{nk}}{dz} = \psi^c_{nk}, \quad \frac{d\Phi^s_{nl}}{dz} = \psi^s_{nl} \quad (z = 0) \tag{2.9}$$

Решения задач (2.8)–(2.9) имеют вид

$$\Phi^c_{nk} = \frac{\psi^c_{nk}}{\mu^c_k}\frac{\operatorname{ch}\mu^c_k(z+h)}{\operatorname{sh}\mu^c_k h}, \quad \Phi^s_{nl} = \frac{\psi^s_{nl}}{\mu^s_l}\frac{\operatorname{ch}\mu^s_l(z+h)}{\operatorname{sh}\mu^s_l h}$$

$$\mu^c_k = \sqrt{\kappa^2 + (\pi k)^2} \qquad \mu^s_l = \sqrt{\kappa^2 + (\pi l - \pi/2)^2}$$

Подставляя разложения для прогиба (2.1) и потенциала (2.6) в уравнение для упругих колебаний пластины (1.12), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big\{ \beta(1+\alpha y)\theta_n^4 \psi_n + \kappa^4 \beta (1+\alpha y)^3 \psi_n - 2\kappa^2 \beta((1+\alpha y)^3 \psi_n'' + 3\alpha(1+\alpha y)^2 \psi_n') -$$
$$- \kappa^2 6\alpha^2 \nu \beta(1+\alpha y)\psi_n - \delta\gamma(1+\alpha y)\psi_n - \gamma \Phi_n(y,0) + \psi_n \Big\} = 0$$

Умножая это уравнение на $\psi_m(y)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и интегрируя по $y \in [-1, +1]$, с учетом условия (2.5) получим выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \beta D_n \cdot \delta_{nm} + \kappa^4 \beta \cdot K_{nm} + 2\kappa^2 \beta \cdot S_{nm} - \delta\gamma \cdot \delta_{nm} + M_{nm}^{(1)} - \gamma M_{nm}^{(2)} \right\} = 0 \tag{2.10}$$

где

$$D_n = \theta_n^4 - \nu\kappa^2 6\alpha^2, \quad K_{nm} = \int_{-1}^{1} (1+\alpha y)^3 \psi_n \psi_m dy, \quad S_{nm} = \int_{-1}^{1} (1+\alpha y)^3 \psi_n' \psi_m' dy$$

$$M_{nm}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \psi_n \psi_m dy, \quad M_{nm}^{(2)} = \int_{-1}^{1} \Phi_n(y,0) \psi_m dy$$

Приводя в (2.10) подобные слагаемые с величиной γ, содержащей частоту гидроупругих колебаний ω, представим полученную систему линейных уравнений для коэффициентов a_n в разложении прогиба пластины (2.1) в матричном виде

$$\{\beta[\mathbf{D} + \kappa^4 \mathbf{K} + 2\kappa^2 \mathbf{S}] + \mathbf{M}_1 - \gamma[\delta \mathbf{I} + \mathbf{M}_2]\} \mathbf{a} = 0 \tag{2.11}$$

где все матрицы $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\{D_n\}$, $\mathbf{K} = \{K_{nm}\}$, $\mathbf{S} = \{S_{nm}\}$, $\mathbf{M}_1 = \left\{M_{nm}^{(1)}\right\}$, $\mathbf{M}_2 = \left\{M_{nm}^{(2)}\right\}$ являются симметричными, I – единичная матрица. Для существования нетривиального решения полученной системы уравнений необходимо обращение в ноль определителя матрицы в фигурных скобках

$$\det\{[\mathbf{D} + \kappa^4 \mathbf{K} + 2\kappa^2 \mathbf{S}] + \mathbf{M}_1 - \gamma[\delta \mathbf{I} + \mathbf{M}_2]\} = 0 \tag{2.12}$$

которое определяет дисперсионные соотношения для гидроупругих волн $\omega = \sqrt{\gamma g/b} = \omega_n(\kappa)$. Каждому корню γ_n, а значит каждой частоте ω_n, соответствует вектор $\mathbf{a}_n$ из (2.11), который определяет форму колебаний $F_n(y)$ в разложении (2.1). Компоненты $\mathbf{a}_n$ нормируются так, что абсолютное максимальное значение функции $F_n(y)$ равно единице. Характеристики ледового покрова и размеры канала входят в коэффициенты всех матриц и параметры β, δ.

3. ДЕФОРМАЦИИ В ЛЕДОВОМ ПОКРОВЕ

Деформации в ледовом покрове описываются в рамках линейной теории в предположении, что значения $w_x^2 + w_y^2$ малы, и напряжения в пластине пропорциональны удлинениям. Отметим, что лед достаточно хрупкий материал, поэтому предельные напряжения в ледовой пластине, приводящие к ее расколу, достигаются раньше, чем деформации пластины выходят за рамки линейной теории.

Так как решение задачи ищется в виде бегущих вдоль канала волн, то оно является периодической функцией относительно фазы $\theta(x,t) = \kappa x + t$ и представляется в виде

$$w(x,y,t) = F(y)\cos\theta$$

Абсолютный максимум удлинений в волне является функцией безразмерных параметров α, β, γ, δ, κ, h и вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{ABS} = \max_{-1 \le y \le 1} [\varepsilon_{\max}(y)] \tag{3.1}$$

где

$$\varepsilon_{\max} = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \varepsilon(y,\theta) \tag{3.2}$$

В качестве масштаба удлинений выбирается величина $h_* A/2b^2$.

Поле удлинений в ледовой пластине описывается через тензор деформаций [5, 39]

$$T_\varepsilon = -\zeta \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{bmatrix}$$

где ζ – безразмерная переменная, изменяющаяся по толщине льда, $-(1+\alpha y) \le \zeta \le (1+\alpha y)$. Чтобы оценить максимальное удлинение в точке (x, y) ледового покрова в момент времени t, нужно определить главные удлинения и найти их максимум. В рамках линейной теории максимальные напряжения и удлинения достигаются на поверхности льда, при $|\zeta| = 1 + \alpha y$.

Главные удлинения ε определяются через собственные значения тензора T_ε по формуле

$$\varepsilon^{(1,2)}(y,\theta) = \frac{\zeta}{2}[-a\cos\theta \pm \sqrt{(b^2 - c^2)\cos^2\theta + c^2}] \tag{3.3}$$

где введены обозначения

$$a(y) = F''(y) - \kappa^2 F(y), \quad b(y) = F''(y) + \kappa^2 F(y), \quad c(y) = 2\kappa F'(y)$$

Функции (3.3) являются гладкими по переменной θ, поэтому максимум (3.2) достигается в точке экстремума из условия

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{\zeta}{2}\left[a \mp \frac{(b^2 - c^2)\cos\theta}{\sqrt{(b^2 - c^2)\cos^2\theta + c^2}}\right]\sin\theta = 0 \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.4) определяет максимальные по длине волны главные удлинения в виде

$$\varepsilon_{\max}^{(1)} = \frac{1+\alpha y}{2}(|a| + |b|), \quad \varepsilon_{\max}^{(2)} = \frac{1+\alpha y}{2}|c|\sqrt{\frac{b^2 - c^2 - a^2}{b^2 - c^2}}$$

Нетрудно показать, что $\varepsilon_{\max}$ имеет вид

$$\varepsilon_{\max} = \begin{cases} \varepsilon_{\max}^{(1)} & \text{при} \quad c^2 - b^2 \leqslant |ab| \\ \varepsilon_{\max}^{(2)} & \text{при} \quad c^2 - b^2 \geqslant |ab| \end{cases}$$

Отметим, что фактически

$$\varepsilon_{\max}^{(1)} = (1+\alpha y)\max\{|F''|, \kappa^2|F|\}$$

т.е. соответствует максимальным поперечным $|w_{yy}|$ или продольным $|w_{xx}|$ удлинениям относительно оси канала. Значение $\varepsilon_{\max}^{(2)}$ отвечает максимальным удлинениям, которые не являются ни продольными, ни поперечными, образуя ненулевой угол с осью канала.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Вычисления линейных гидроупругих волн в канале выполнены для пресноводного льда с плотностью $\rho_i = 917$ кг/м^3, модулем Юнга $E = 4.2 \times 10^9$ Н/м^2 и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Полагалось, что средняя толщина неравномерного ледового покрова $h_* = 0.1$ м, ширина канала $2b = 20$ м, глубина канала $H = 2$ м. Параметр утолщения льда α изменялся от 0.05 до 0.95. Сравнение полученных результатов расчета проводилось с результатами работы [5], где рассматривался ледовый покров постоянной толщины, а остальные характеристики льда и размеры канала совпадали с указанными выше. Ниже представлены результаты расчетов для волн, длина которых больше 6 м ($0 < k < 1$ м$^{-1}$), а период больше 0.3 с ($0 < \omega < 20$ с$^{-1}$).

Решение системы алгебраических уравнений (2.11) строилось методом редукции. Количество мод $\psi_n(y)$ в разложении форм прогиба поперечного сечения (2.1) менялось от 10 до 30. Расчеты показали, что в рассматриваемых диапазонах волновых чисел k и частот ω, использование 20 мод достаточно для получения дисперсионных соотношений, распределения упругих деформаций и удлинений с высокой степенью точности.

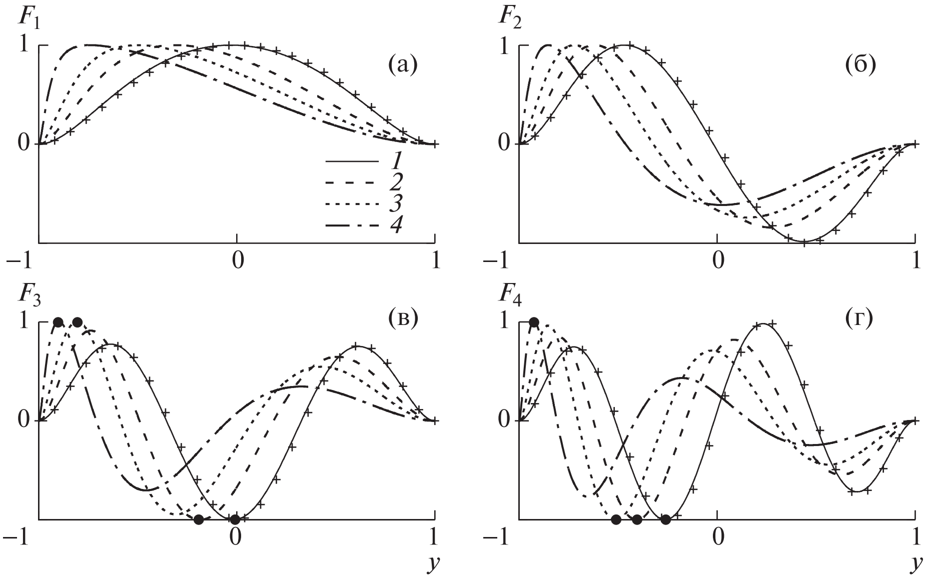

Рис. 2. Формы гидроупругих волн ледового покрова неравномерной толщины: а—г — первая—четвертая формы; *1—4* для $\alpha = 0.05,\ 0.5,\ 0.75,\ 0.95$; маркеры — формы ледового покрова равномерной толщины из [5].

На рис. 2 линиями представлены первые четыре формы гидроупругих колебаний $F_n(y)$ неравномерной ледовой пластины для разных значений α и маркерами для однородной ледовой пластины толщины 0.1 м при $k = 0.2$ м$^{-1}$.

Видно хорошее совпадение форм однородного по толщине льда и неоднородного при малом α. С увеличением α наибольший изгиб форм смещается влево к тонкому краю льда при $y = -1$, а вблизи более толстого края при $y = 1$ изгиб форм значительно уменьшается. Максимумы абсолютных значений форм прогиба для разных α достигаются в точках экстремума $F_n(y)$. С ростом α максимумы смещаются к тонкому краю пластины, причем это смещение может происходить со сменой локального экстремума близкого к центру пластины, на экстремум, находящийся ближе к тонкому краю. На рис. 2,в,г указанные максимумы форм отмечены точками. Видно, что при небольших α максимумы находятся в нижней точке перегиба $F_n(y)$ (для F_3 при $\alpha = 0.05, 0.5$, для F_4 при $\alpha = 0.05, 0.5, 0.75$), а с увеличением α переходят на верхнюю точку перегиба вблизи тонкого края пластины.

Дисперсионные соотношения, связывающие частоту изгибно-гравитационной волны ω и волновое число k, определялись из характеристического уравнения (2.12). Для этого вычислялись значения определителя при фиксированных $\kappa = kb$, $0 < k < 1$ м$^{-1}$ и разных $\gamma = \omega^2 b/g$ с приращением $\Delta\gamma = 0.1$. Определялись интервалы, где определитель меняет знак, и методом деления отрезка пополам определялись корни γ_n уравнения с точностью до 10^{-12}. Далее определялись соответствующие значения $\omega_n(k)$ для каждой формы F_n.

На рис. 3 линиями представлены дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ для первых четырех форм F_n неравномерной ледовой пластины при разных значениях α и маркерами для однородной ледовой пластины толщины 0.1 м. Видно, что частоты уменьшаются с увеличением параметра утолщения льда α для всех форм, причем в значительной степени для больших k, т.е для коротких волн.

На рис. 4 приведены дисперсионные кривые для первых четырех форм неравномерного ледового покрова маркерами при $\alpha = 0.5$ и $h_* = 0.1$ м, что соответствует толщинам $h(-1) = h_0 = 0.05$ м и $h(1) = h_1 = 0.15$ м на краях пластины. Также показаны дисперсионные кривые для равномерного льда толщиной 0.05, 0.1 и 0.15 м.

Сравнивая кривые на рис. 3, 4, можно отметить, что при увеличении параметра утолщения льда α, $\omega_n(k)$ уменьшаются для всех форм гидроупругих волн так же, как это происходит при уменьшении толщины однородного льда.

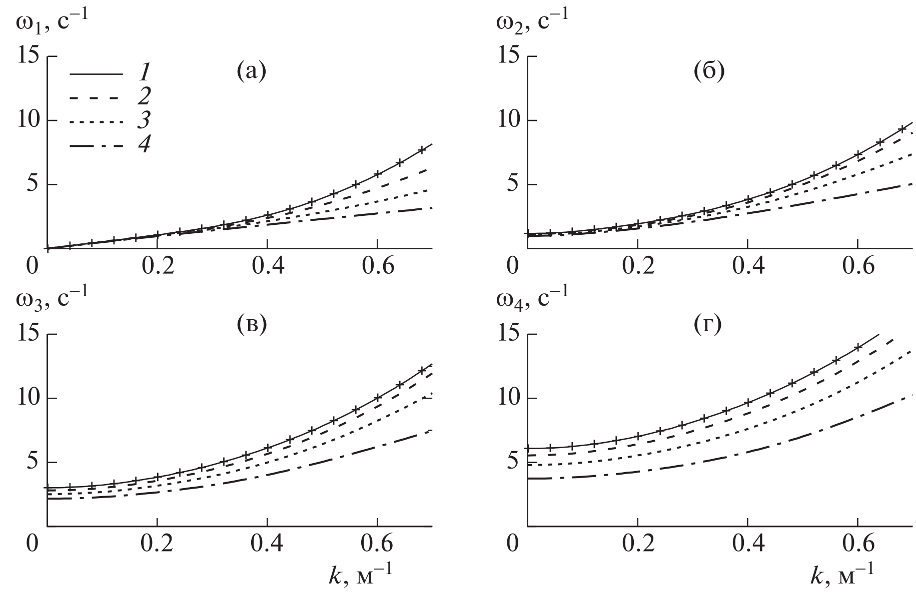

Рис. 3. Дисперсионные кривые гидроупругих волн: а–г – первая–четвертая формы; *1–4* – неравномерный лед при $\alpha = 0.05, 0.5, 0.75, 0.95$; маркеры – ледовый покров равномерной толщины [5].

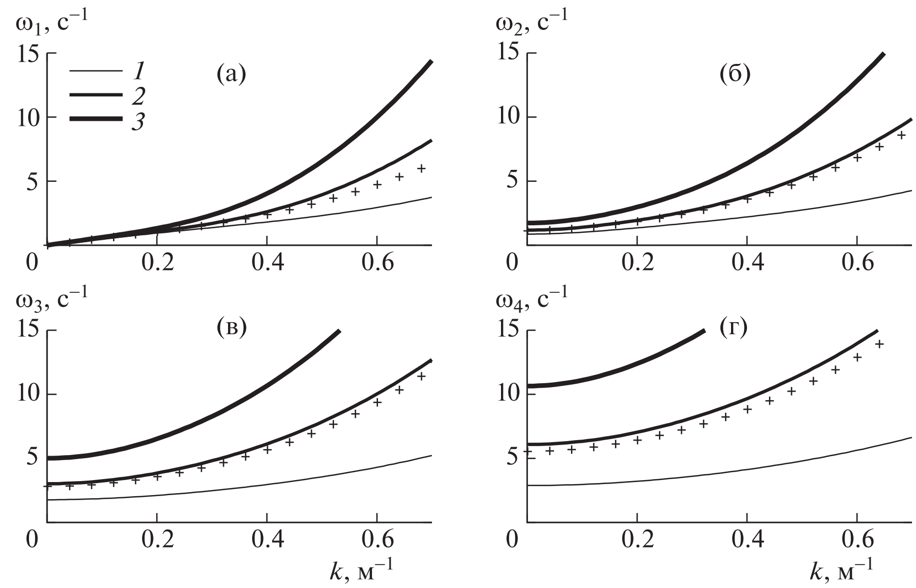

Рис. 4. Дисперсионные кривые гидроупругих волн: а–г – первая–четвертая формы; *1–3* – ледовый покров равномерной толщины 0.05, 0.1, 0.15 м; маркеры – неравномерный лед при $\alpha = 0.5$, $h_* = 0.1$ м.

На рис. 5 и рис. 6 представлены распределения фазовых скоростей $c(k) = \omega(k)/k$ и групповых скоростей $c_g(k) = d\omega(k)/dk$ гидроупругих волн для первых четырех форм: линиями – для неравномерной ледовой пластины при разных значениях α и маркерами для однородной ледовой пластины толщины 0.1 м [5]. Отметим понижение значений $c(k)$ и $c_g(k)$ с ростом параметра α.

На рис. 7 показаны распределения безразмерных удлинений $\varepsilon_{\max}(y)$ гидроупругих волн для первых четырех форм неравномерной ледовой пластины при $\alpha = 0.25$, для волновых чисел $k = 0.2, 0.5, 0.8, 1$ м$^{-1}$. Сплошные участки кривых соответствуют поперечным удлинениям

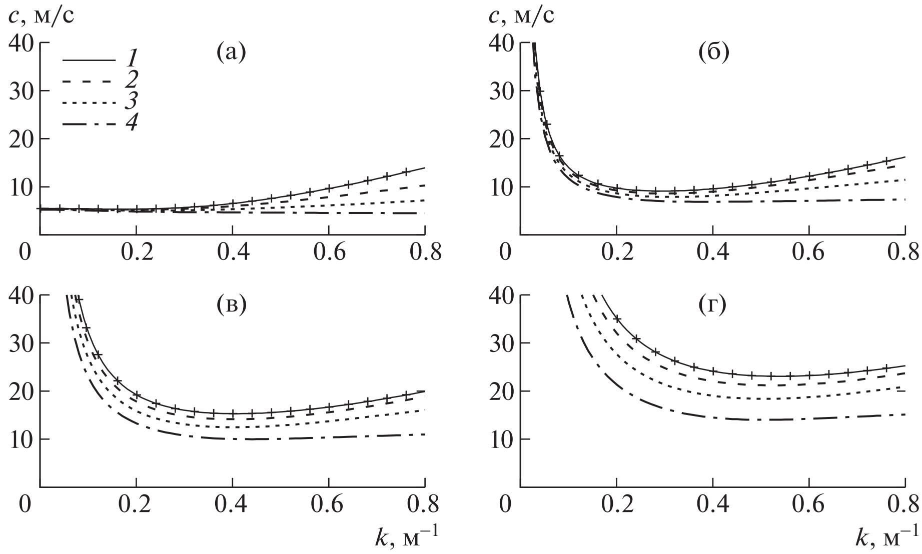

Рис. 5. Фазовые скорости гидроупругих волн: а–г – первая–четвертая формы; *1–4* – неравномерный лед при $\alpha = 0.05, 0.5, 0.75, 0.95$; маркеры – ледовый покров равномерной толщины [5].

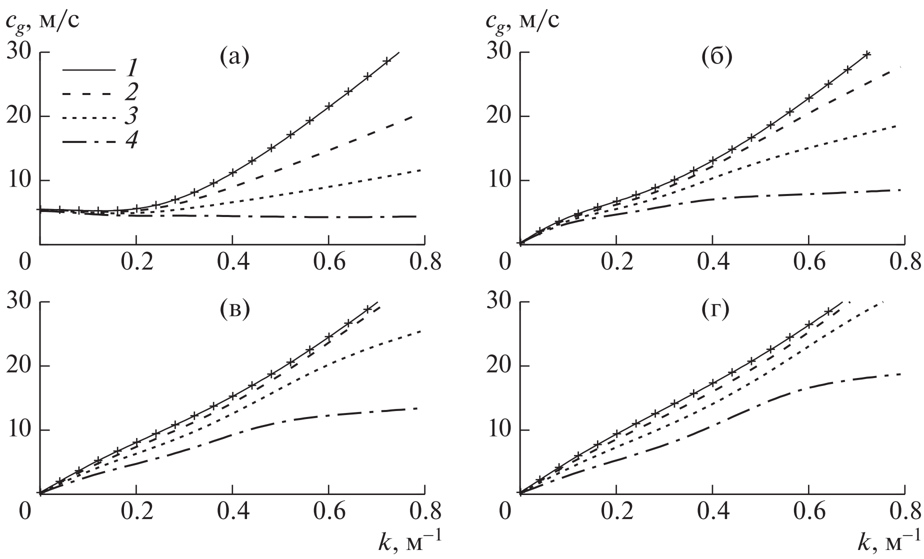

Рис. 6. Групповые скорости гидроупругих волн: а–г – первая–четвертая формы; *1–4* – неравномерный лед при $\alpha = 0.05, 0.5, 0.75, 0.95$; маркеры – ледовый покров равномерной толщины [5].

$\varepsilon^{(1)}_{\max} = (1+\alpha y)|F''|$, точечные линии – продольным удлинениям $\varepsilon^{(1)}_{\max} = (1+\alpha y)\kappa^2|F|$, пунктирные – комбинированным $\varepsilon^{(2)}_{\max}$. При используемых в расчетах размерах канала и толщины льда масштаб удлинений равен 0.0005.

Видно, что при малых k абсолютные максимумы удлинений соответствуют поперечным удлинениям и для всех форм колебаний достигаются на кромке более тонкого (левого) края пластины $y = -1$. Это показывает, что наиболее вероятен отрыв ледового покрова от левого берега. С ростом k продольные удлинения (точечные линии) внутри канала растут быстрее, чем поперечные, и при некотором значении k именно продольные удлинения внутри пластины становятся абсолютно максимальными и остаются такими при дальнейшем увеличении k (см. рис. 7а,б). Этот эффект наблюдается при всех рассмотренных в вычислениях значениях α. Сначала он проявля-

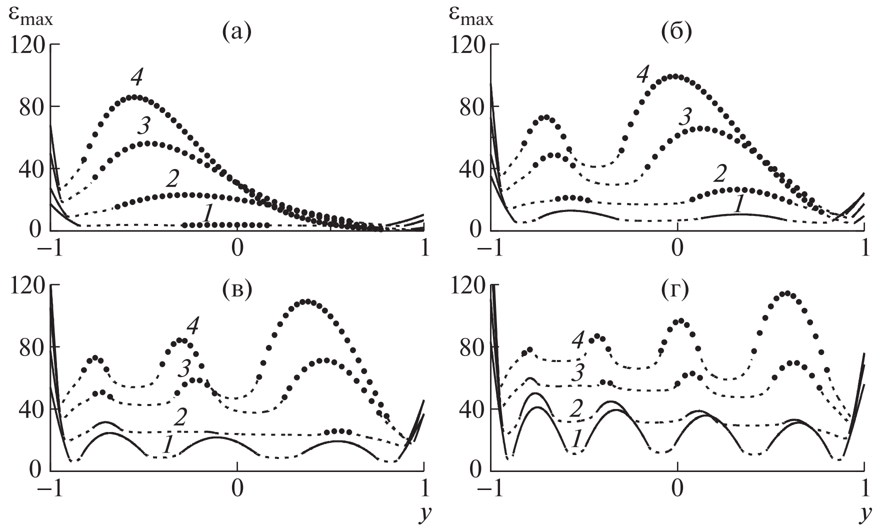

Рис. 7. Распределение максимальных удлинений ледового покрова поперек канала при $\alpha = 0.25$: а–г – первая-четвертая формы; *1–4* – $k = 0.2$, 0.5, 0.8, 1 м$^{-1}$; сплошные линии – поперечные удлинения, маркеры – продольные, пунктирные – комбинированные.

ется только для первой формы колебаний пластины (для $\alpha = 0.25$ это происходит при $k = 0.65$ м$^{-1}$), потом, с ростом k, возникает на второй форме (при $k = 0.93$ м$^{-1}$) и так далее для других форм. Отметим, что для старших форм внутренние максимумы с ростом k смещаются к правому, более толстому краю. Кроме того, комбинированные удлинения $\varepsilon_{\max}^{(2)}$ при всех рассмотренных значениях α никогда не становятся абсолютно максимальными.

На рис. 8 представлены распределения безразмерной величины ε_{ABS} (3.1) от k для четырех форм гидроупругих колебаний ледового покрова при разных значениях параметра α. Линиями на кривых обозначены поперечные удлинения $\varepsilon_{\max}^{(1)} = (1+\alpha y)\left|F''\right|$, точечными маркерами – продольные удлинения $\varepsilon_{\max}^{(1)} = (1+\alpha y)\kappa^2\left|F\right|$.

Видно, что с ростом α значения $\varepsilon_{\mathrm{ABS}}$ увеличиваются для каждой формы. При фиксированном значении α, чем выше номер формы, тем больше удлинения $\varepsilon_{\mathrm{ABS}}$. Общий характер поведения всех кривых $\varepsilon_{\mathrm{ABS}}$ в зависимости от k является одинаковым:

• сначала (при малых k) располагается участок, соответствующий максимальным поперечным удлинениям $\varepsilon_{\max}^{(1)} = (1+\alpha y)\left|F''\right|$, на более тонком краю ледовой пластины ($y = -1$), при которых могут развиваться трещины в ледовом покрове вдоль этого берега канала, т.е. происходит отрыв льда от берега;

• при некотором k начинают доминировать продольные удлинения пластины $\varepsilon_{\max}^{(1)} = (1+\alpha y)\kappa^2\left|F\right|$ внутри канала ($|y| < 1$), что наблюдается в виде резких изломов кривых на рис. 8. Тогда трещины будут появляться поперек канала.

Наиболее отчетливо это видно для первых трех форм при $\alpha = 0.05$. Для $\alpha > 0.05$ и старших форм, характер кривых ε_{ABS} остается аналогичным, однако участок максимальных поперечных удлинений (линии) длинее, и продольные удлинения становятся максимальными при $k > 1$ м$^{-1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы гидроупругие характеристики изгибно-гравитационных волн, распространяющихся по каналу, покрытому примороженным к берегам ледовым покровом с линейно изменяющейся поперек канала толщиной. Получены формы колебаний ледовой пластины и распределение максимальных удлинений. Определены дисперсионные кривые, получены фазовые и групповые скорости бегущих волн.

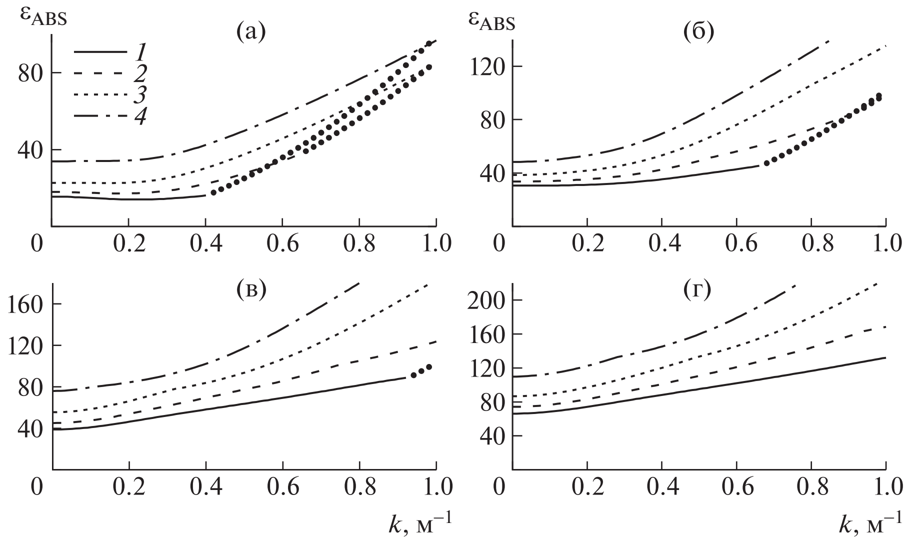

Рис. 8. Абсолютные максимальные удлинения ледового покрова: а–г — первая–четвертая формы колебаний; *1–4* – α = 0.05, 0.25, 0.5, 0.75; линии соответствуют случаю максимальных поперечных удлинений, маркеры — для продольных удлинений.

Проведено сравнение полученных данных с аналогичными результатами для задачи с жестко закрепленными (примороженными) кромками однородной ледовой пластины [5]. Показана сходимость результатов для пластины линейной толщины к результатам для однородной пластины при уменьшении коэффициента утолщения льда α.

Исследовано влияние неоднородности толщины пластины на частоты, фазовые и групповые скорости гидроупругих колебаний. При увеличении значения параметра утолщения пластины происходит уменьшение частот и скоростей для всех форм колебаний, как у однородной пластины с уменьшением толщины.

Показано, что для длинных волн наиболее вероятное разрушение пластины соответствует поперечным удлинениям на тонком краю пластины, что может привести к отрыву льда от соответствующего берега. Для коротких волн максимальными становятся продольные напряжения внутри пластины, локализованные ближе к толстому краю. Это может привести к растрескиванию пластины в поперечном направлении. Такой характер изменения распределения максимальных напряжений по пластине является особенностью гидроупругого поведения ледовой пластины с неравномерным по толщине ледовым покровом.

Работа выполнена при поддержке совместного проекта TUBITAK и РФФИ 20-58-46009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добродеев А.А., Сазонов К.Е.* Модельный эксперимент по определению ледовой нагрузки на морские инженерные сооружения // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. Т. 2. № 388. С. 24–40.
2. *Крупина Н.А., Лихоманов В.А., Максимова П.В., Николаев П.М., Савицкая А.В., Свистунов И.А., Чернов А.В.* Итоги работы большого ледового бассейна ААНИИ // Проблемы Арктики и Антарктики. 2015. № 1 (103). С. 101–110.
3. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Body motion in liquid under ice plate with snow cover // Appl. Ocean Res. 2019. V.84. P. 32–37.
4. *Squire V.A., Hosking R., Kerr A., Langhorne P.J.* Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer, 1996. 244 p.
5. *Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A.* Waves propagating along a channel with ice cover // Eur J Mech B Fluids. 2014. V. 47. P. 166–175.
6. *Батяев Е.А., Хабахпашева Т.И.* Гидроупругие волны в канале со свободным ледовым покровом // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 71–88.
7. *Ren K., Wu G.X., Li Z.F.* Hydroelastic waves propagating in an ice-covered channel // J. Fluid Mech. 2020. V. 886. A18.

8. *Козин В.М.* Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Акад. естествознания, 2007. 355 с.
9. *Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A.* The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.
10. *Khabakhpasheva T.I., Shishmarev K.A., Korobkin A.A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2019. V. 86. P. 154–165.
11. *Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A.* Ice response to an underwater body moving in a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2019. V. 91. P. 101877.
12. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 215 с.
13. *Hosking R.J., Sneyd A.D., Waugh D.W.* Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 409–430.
14. *Părău E.I., Dias F.* Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load // J. Fluid Mech. 2002. V. 460. P. 281–305.
15. *Bonnefoy F., Meylan M.H., Ferrant P.* Nonlinear higher-order spectral solution for a two-dimensional moving load on ice // J. Fluid Mech. 2009. V. 621. P. 215–242.
16. *Plotnikov P.I., Toland J.F.* Modelling nonlinear hydroelastic waves // Phil. Trans. R. Soc. A. 2011. V. 369. P. 2942–2956.
17. *Погорелова А.В.* Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 89–99.
18. *Meylan M.H., Sturova I.V.* Time-dependent motion of a two-dimensional floating elastic plate // J Fluids Struct. 2009. V. 25. № 3. P. 445–460.
19. *Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 214–221.
20. *Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I.* Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall // J Eng Math. 2010. V. 68. P. 215–231.
21. *Sturova I.V., Tkacheva L.A.* Movement of external load over free surface of fluid in the ice channel // J Phys Conf Ser. 2019. V. 1268. № 1 P. 012066.
22. *Stepanyants Y.A., Sturova I.V.* Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water // J. Fluid Mech. 2021. V. 907. P. A7.
23. *Ткачева Л.А.* Колебания цилиндра в жидкости под ледяным покровом вблизи вертикальной стенки // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 12–25.
24. *Марченко А.В.* Изгибно-гравитационные волны // Тр. ИОФАН. 1999. Т. 56. С. 65–111.
25. *Савин А.А., Савин А.С.* Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 16–23.
26. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости // ТМФ. 2017. Т. 193. № 3. С. 455–465.
27. *Il'ichev A.* Physical parameters of envelope solitary waves at a water-ice interface // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1982. P. 20036.
28. *Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A.* Hydroelastic behaviour of compound floating plate in waves // J Eng Math. 2002. V. 44. № 1. P. 21–40.
29. *Стурова И.В.* Нестационарное поведение упругой составной балки, плавающей на мелководье // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 4. С. 54–65.
30. *Porter D., Porter R.* Approximations to wave scattering by an ice sheet of variable thickness over undulating bed topography // J. Fluid Mech. 2004. V. 509. P. 145–179.
31. *Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Malenica S.* Maximum stress of stiff elastic plate in uniform flow and due to jet impact // Phys. Fluids. 2017. V. 29. № 7. P. 072105.
32. *Li Q.S.* Vibration analysis of flexural-shear plates with varying cross-section // Int J Solids Struct. 2000. V. 37. № 9. P. 1339–1360.
33. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
34. *Chopra I.* Vibration of stepped thickness plates // Int. J. Mech. Sci. 1974, V. 16. № 6. P. 337–344.
35. *Guo S.J., Keane A.J., Moshrefi-Torbat M.* Vibration of stepped thickness plates // J. Sound Vib. 1997. V. 204. № 4. P. 645–657.
36. *Li Q.S., Cao H., Li G.* Static and dynamic analysis of straight bars with variable cross-section // Comput Struct. 1996. V. 59. № 6. P. 1185–1191.
37. *Taha M.H., Abohadima S.* Mathematical model for vibrations of non-uniform flexural beams // Eng Mech. 2008. V. 15. № 1. P. 3–11.
38. *Nesterov S.V., Baydulov V.G.* Transverse oscillations of a cantilever rod of rectangular cross section and variable thickness // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1301. P. 012023.
39. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1984. 472 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 79–87

УДК 532.582.92

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДИСПЕРСНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ “НАСЛЕДСТВЕННОЙ” СИЛЫ БАССЕ

Т. Р. Аманбаев[a,b,*]

[a] *Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*

[b] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

******E-mail: tulegen_amanbaev@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.10.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Рассмотрена задача о движении шарообразного дисперсного включения (частицы, пузырька и т.п.) в вязкой несжимаемой жидкости в гравитационном поле с учетом нестационарных, в том числе “наследственных” (типа Бассе) сил. Методами математической физики найдено точное решение задачи, выражающее изменение ускорения дисперсного включения от времени. В качестве примера применения полученного решения проведены расчеты скорости и координаты движения пузырька в жидкости, и показано, что учет “наследственной” силы Бассе приводит к существенному увеличению характерных времени и расстояния установления стационарной скорости пузырька.

Ключевые слова: вязкая жидкость, частица, сила Стокса, сила Бассе, интегро-дифференциальное уравнение, операторный метод

DOI: 10.31857/S0568528122030021

Рассмотрим задачу о движении сферического включения (частицы, пузырька и т.п.) в вязкой жидкости в гравитационном поле. Такая задача часто встречается при исследовании течений двухфазных сред (суспензий, пузырьковых сред и др.). Закономерности движения включений дисперсной фазы в гравитационном поле представляют интерес при моделировании и изучении технологических процессов (седиментация, флотация, барботаж и др.), а также при решении ряда практических задач экологии и метеорологии (образование атмосферных осадков, осаждение аэрозолей и суспензий, всплытие пузырьков в различных жидкостях, очистка промышленных и сточных вод от масел и нефтепродуктов и др.). В указанных задачах одним из существенных факторов является изменение скорости движения дисперсных включений в жидкости.

Движение шара в вязкой жидкости впервые исследовал Джордж Стокс (1851 г.). Он нашел точное решение уравнений Навье–Стокса в стационарном случае при малых числах Рейнольдса и на основе этого решения вывел свою знаменитую формулу для результирующей силы, действующей на шар со стороны жидкости. Эту силу сейчас называют силой Стокса. При движении шара с переменной скоростью на него со стороны жидкости кроме силы Стокса будут дополнительно действовать нестационарные силы присоединенных масс, а также “наследственная” сила Бассе, зависящая от предыстории движения [1, 2]. Причем если плотности жидкости ρ и частиц ρ_i (нижний индекс от “*impurities*”) сравнимы между собой $\kappa = \rho/\rho_i \sim 1$, то силы, учитывающие нестационарные и наследственные эффекты в межфазном взаимодействии, формально имеют тот же порядок, что и сила Стокса. Более подробные оценки вкладов нестационарных сил в результирующую силу, действующую на частицу со стороны жидкости, проведены в [1, 3, 4], где показано, что силой Бассе можно пренебречь в тех случаях, когда относительные числа Рейнольдса достаточно большие или плотность дисперсного включения намного больше плотности несущей среды $\kappa \ll 1$.

Учет “наследственных” эффектов типа силы Бассе существенно осложняет решение уравнения движения шара, поскольку приходится рассматривать интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) с особенностью. Причем задача о движении частицы даже в покоящейся жидкости в полной постановке представляет достаточно трудноразрешимую проблему. Одной из сложностей данной задачи является вычисление интеграла типа Дюамеля, выражающего силу Бассе, так как аналитический его подсчет невозможен, численный же расчет занимает довольно много времени. Поэтому работ, где при решении задач о динамике включений в жидкости учитываются наследственные эффекты, не так уж много [4–11]. Для решения ИДУ с особенностью используются разные способы. Один из них основан на замене ИДУ эквивалентной системой дифференциальных уравнений более высокого порядка с применением преобразования Лапласа по времени (в случае, когда поле скорости несущей среды зависит только от времени) [6, 8]. В этом подходе (для эквивалентности полученной системы исходной) необходимо, чтобы отношение плотностей фаз удовлетворяло определенному неравенству $\kappa > 4/7$. В рамках такого подхода в [8] задача об осаждении частиц с учетом силы Бассе исследована с помощью асимптотических рядов во всем диапазоне изменения κ. Другой подход состоит в численном решении ИДУ, при этом аппроксимация несобственного интеграла осуществляется путем разделения интеграла на две части: с особенностью и без нее [4]. Интеграл без особенности рассчитывается по известным формулам (трапеций, Симпсона и др.), а интеграл с особенностью – чаще всего по квадратурным формулам с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа [4, 12].

Резюмируя, можно отметить, что в настоящее время особенности движения дисперсного включения в жидкости с учетом наследственных эффектов исследованы недостаточно полно. В частности, важное значение имеет нахождение точных решений задачи о движении дисперсного включения в несущей среде с учетом силы Бассе.

Целью данной работы является прямое нахождение точного решения задачи о движении частицы (далее под терминами “частица” и “дисперсное включение” будем подразумевать как собственно твердую частицу, так и пузырек) в жидкости с учетом нестационарных, в том числе “наследственных” сил.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем уравнение одномерного движения дисперсного включения, имеющего форму шара в жидкости в поле силы тяжести. Считается, что деформация и дробление дисперсного включения отсутствуют (для твердых частиц такое допущение вполне уместно, а в случае пузырьков или капель необходимо иметь в виду, что рассматриваются пузырьки и капли малых размеров, так что они движутся достаточно медленно и их поверхность не подвергается сильным возмущениям). Для определенности рассмотрим случай, когда несущая среда покоится. Ось x направим против вектора ускорения силы тяжести. Тогда при постоянной массе шара (фазовые превращения и другие массообменные процессы между дисперсным включением и несущей средой отсутствуют) будем иметь

$$m\frac{dv}{dt} = f_r + f_g + f_A \tag{1.1}$$

$$f_g = -mg, \quad f_A = \theta\rho g, \quad m = \theta\rho_i \quad \theta = \pi d^3/6 \tag{1.2}$$

Здесь v, θ, m, d, ρ_i – скорость, объем, масса, диаметр и плотность дисперсного включения; f_r – сила сопротивления; f_g, f_A – силы тяжести и Архимеда; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения. Для силы сопротивления имеем

$$f_r = f_S + f_m + f_B \tag{1.3}$$

$$f_S = -3\pi\mu d v, \quad f_m = -\frac{1}{2}\theta\rho\frac{dv}{dt}, \quad f_B = -\Lambda\int_{-\infty}^{t}\frac{dv}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad \Lambda = \frac{3}{2}d^2\sqrt{\pi\rho\mu} \tag{1.4}$$

где f_S – сила Стокса, μ – вязкость жидкости, f_B, f_m – нестационарные силы Бассе и присоединенных масс, действующие на дисперсное включение при его ускоренном движении. Силы Стокса и Бассе соответствуют малым числам Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd\rho/\mu \ll 1$.

Нестационарные силы типа f_B характеризуют немгновенность установления стационарных распределений скорости в окрестности индивидуального включения и строго обоснованы при $\mathrm{Re} \ll 1$. С увеличением Re вклад f_B в общую силу взаимодействия частицы с жидкостью должен уменьшаться, так как в идеальной жидкости сила типа f_B отсутствует, в то время как выражение для силы присоединенной массы то же, что и в вязкой жидкости. В общем случае учет через силу Бассе влияния предыстории движения на поведение дисперсных частиц приводит к ИДУ для неизвестной скорости шара $v(t)$, и тем самым сильно осложняет решение задачи.

Отметим, что из условия равенства нулю ускорения шара $f_S + f_g + f_A = 0$ вытекает формула для стационарной скорости

$$V = \frac{d^2 g(\rho - \rho_i)}{18\mu} \tag{1.5}$$

С течением времени решение уравнения (1.1) должно стремиться к стационарной скорости (1.5).

К уравнению (1.1) следует добавить уравнение, определяющее положение частицы

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{1.6}$$

Для системы уравнений (1.1), (1.6) с замыкающими соотношениями (1.2)–(1.4) можно поставить следующие начальные условия: $t = 0$, $v(0) = v_0$, $x(0) = 0$.

Отметим, что в случае пренебрежения силой Бассе система уравнений (1.1), (1.6) при заданных начальных условиях имеет аналитическое решение

$$\overline{v} = 1 - (1 - \overline{v}_0)\exp(-\overline{t}), \quad \overline{x} = \overline{t} + (1 - \overline{v}_0)[\exp(-\overline{t}) - 1]$$

$$\overline{t} = \frac{t}{t_*}, \quad \overline{x} = \frac{x}{l}, \quad t_* = \frac{d^2(\rho_i + 0.5\rho)}{18\mu}, \quad l = Vt_*, \quad \overline{v}_0 = \frac{v_0}{V}$$

Здесь t_* – характерное время релаксации скорости частицы в стоксовом режиме с учетом силы присоединенных масс. Отметим, что в случае $\overline{v}_0 < 0$ скорости V и v_0 должны иметь противоположные знаки. Например, когда осаждающаяся частица ($V < 0$, т.е. $\rho < \rho_i$) в начальный момент времени "выстреливается" вверх ($v_0 > 0$), она после достижения некоторой высоты останавливается и затем падает вниз. При $V > 0$ (значит $\rho > \rho_i$), а $v_0 < 0$ имеем обратную картину: всплывающая частица сначала движется вниз до остановки и после поднимается вверх. Момент времени $\overline{t}_m$ и соответствующая координата точки $\overline{x}_m$ возврата частиц ($v = 0$) определяются формулами $\overline{t}_m = \ln(1 - \overline{v}_0)$, $\overline{x}_m = \ln(1 - \overline{v}_0) + \overline{v}_0$. В случае $\overline{v}_0 < 1$ безразмерная скорость частицы $\overline{v}$ устремляется к своему стационарному значению $\overline{v} = 1$ снизу, тогда как при $\overline{v}_0 > 1$ она стремится к предельному значению сверху.

Используя условия $v(0) = v_0$ и $dv/d\tau \equiv 0$ при $\tau<0$, и введя обозначения

$$\frac{dv}{dt} = w(t), \quad v - v_0 = \int_0^t \frac{dv}{d\tau} d\tau = \int_0^t w(\tau)d\tau,$$

уравнение (1.1) приведем к интегральному уравнению Вольтерры второго рода относительно $w(t)$

$$w(t) - \int_0^t \left(\frac{A}{\sqrt{t - \tau}} + B\right) w(\tau)d\tau = f \tag{1.7}$$

$$A = -\frac{\alpha}{\chi}, \quad B = -\frac{\beta}{\chi}, \quad \alpha = \frac{9}{d\rho_i}\sqrt{\frac{\rho\mu}{\pi}}, \quad \beta = \frac{18\mu}{d^2\rho_i}, \quad f = \frac{g}{\chi}\left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1\right) + Bv_0, \quad \chi = 1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_i}$$

Ниже продемонстрирован один из способов решения поставленной задачи. При этом использован подход, изложенный в [13].

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УПРОЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Сначала рассмотрим упрощенное уравнение (переобозначив для удобства параметр A как $\lambda \equiv A$), вытекающее из (1.7) при $B = 0$

$$w(t) - \lambda\int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = f \tag{2.1}$$

Оно является обобщенным интегральным уравнением Абеля второго рода относительно функции $w(t)$ [13]. Отметим, что последнее уравнение соответствует исключению силы Стокса в уравнении (1.1).

Перепишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$\int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = -\frac{f - w(t)}{\lambda} \tag{2.2}$$

Считая правую часть в этом уравнении известной, будем рассматривать (2.2) как уравнение Абеля первого рода [13]. Его решение можно записать в виде

$$w(t) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f - w(\tau)}{\lambda\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

Откуда следует, что

$$w(t) - \frac{1}{\pi\lambda}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = -\frac{1}{\pi\lambda}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{fd\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{2.3}$$

Продифференцируем обе части уравнения (2.1) по t, затем умножим обе части (2.3) на $-\pi\lambda^2$ и сложим почленно полученные выражения. В результате придем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции $w = w(t)$

$$w_t' - \pi\lambda^2 w = F_t'(t) \tag{2.4}$$

$$F(t) = f + \lambda\int_0^t \frac{fd\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(1 + 2\lambda\sqrt{t}) \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) следует дополнить начальным условием

$$w(0) = f \tag{2.6}$$

Оно является следствием (2.1). Решение задачи (2.4)–(2.6) имеет вид

$$w(t) = F(t) + \pi\lambda^2\int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)]F(\tau)d\tau$$

Откуда с учетом (2.5) получим

$$w(t) = f(1 + 2\lambda\sqrt{t}) + \pi\lambda^2\int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)]f(1 + 2\lambda\sqrt{\tau})d\tau$$

Интеграл в этом выражении преобразуется к виду

$$\int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)]f(1 + 2\lambda\sqrt{\tau})d\tau =$$
$$= -\frac{f}{\pi\lambda^2}[1 - \exp(\pi\lambda^2 t)] + 2\lambda f\left[-\frac{\sqrt{t}}{\pi\lambda^2} + \frac{1}{2\pi\lambda^3}\exp(\pi\lambda^2 t)\,\mathrm{erf}(\lambda\sqrt{\pi t})\right]$$

Здесь erf – интеграл вероятностей

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\zeta^2)d\zeta$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) запишется в следующем виде:

$$w(t) = f\exp(\pi\lambda^2 t)[1 + \mathrm{erf}(\lambda\sqrt{\pi t})] \tag{2.7}$$

Отсюда воспользовавшись введенным выше обозначением, получим зависимость скорости частицы от времени

$$v(t) = f\left\{\frac{1}{\pi\lambda^2}[\exp(\pi\lambda^2 t) - 1] + \int_0^t \exp(\pi\lambda^2\tau)\mathrm{erf}(\lambda\sqrt{\pi\tau})d\tau\right\}, \quad v(0) = v_0$$

Эта формула будет в дальнейшем использоваться для решения задачи о движении частицы в полной постановке с учетом всех действующих на нее сил.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПОЛНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Вернемся к уравнению (1.7) и применим к нему операторный метод [13], суть которого заключается в следующем. Пусть известно решение линейного уравнения

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}[y] = f(x) \tag{3.1}$$

где $\mathbf{L}$ – некоторый оператор, $f(x)$ – произвольная функция. Обозначим это решение так:

$$y = Y(f, \lambda)$$

Построим решение более сложного уравнения

$$y(x) - a\mathbf{L}[y] - b\mathbf{L}^2[y] = f(x) \tag{3.2}$$

где a и b – некоторые числа. Представим левую часть (3.2) в виде произведения операторов

$$(1 - a\mathbf{L} - b\mathbf{L}^2)[y] \equiv (1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y] \tag{3.3}$$

где λ_1, λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

Далее решим вспомогательное уравнение

$$u(x) - \lambda_2\mathbf{L}[u] = f(x) \tag{3.4}$$

Оно является частным случаем уравнения (3.1) при $\lambda = \lambda_2$. Его решение дается формулой

$$u(x) = Y(f, \lambda_2)$$

Уравнение (3.2) с учетом (3.3) и (3.4) можно записать в виде

$$(1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y] = (1 - \lambda_2\mathbf{L})[u]$$

Оно эквивалентно уравнению

$$(1 - \lambda_2\mathbf{L})\{(1 - \lambda_1\mathbf{L})[y] - u(x)\} = 0$$

Его частное решение – функция $y(x)$

$$y(x) - \lambda_1\mathbf{L}[y] = u(x)$$

Оно дается формулой

$$y(x) = Y(u, \lambda_1), \quad u(x) = Y(f, \lambda_2) \tag{3.5}$$

Для применения описанного операторного метода к уравнению (1.7) покажем, что его можно записать в виде

$$w(t) - A\mathbf{L}[w] - \frac{1}{\pi}B\mathbf{L}^2[w] = f(t) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{L}[w] \equiv \int_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \tag{3.7}$$

Действительно, рассмотрим сначала интегральный оператор с разностным ядром

$$\mathbf{L}[y(x)] \equiv \int_0^x K(x - t)y(t)dt$$

Посмотрим, как действует

$$\mathbf{L}^2[y] \equiv \mathbf{L}[\mathbf{L}[y]] = \int_0^x \int_0^t K(x-t)K(t-s)y(s)dsdt =$$

$$= \int_0^x y(s)ds \int_s^x K(x-t)K(t-s)dt = \int_0^x K_2(x-s)y(s)ds$$

$$K_2(z) = \int_0^z K(\xi)K(z-\xi)d\xi$$

При выводе этой формулы менялся порядок интегрирования и делалась замена $\xi = t - s$. Для оператора (3.7) отсюда имеем

$$\mathbf{L}^2[w] = \int_0^t w(s)ds \int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{\sqrt{t-s-\xi}} d\xi = \pi \int_0^t w(\tau)d\tau$$

Таким образом, уравнение (1.7) можно записать в виде (3.6), а решение его определяется формулой (3.5). Поскольку уравнение (3.1) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2.1), решение уравнения (3.6) (а значит и уравнения (1.7)) согласно (3.5) задается в виде

$$w(t) = Y(u, \lambda_1), \quad u = Y(f, \lambda_2)$$

$$Y(f,\lambda) = F(t) + \pi\lambda^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)]F(\tau)d\tau, \quad F(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

где λ_1, λ_2 – корни квадратного уравнения $\lambda^2 - A\lambda - B/\pi = 0$.

Итак, имеем следующую схему построения решения уравнения (1.7):

$$F(t) = f(1 + 2\lambda_2\sqrt{t})$$

$$u(t) = Y(f,\lambda_2) = F(t) + \pi\lambda_2^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda_2^2(t-\tau)]F(\tau)d\tau = f\exp(\pi\lambda_2^2 t)[1 + \mathrm{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi t})]$$

$$U(t) = u(t) + \lambda_1 \int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$w(t) = U(t) + \pi\lambda_1^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda_1^2(t-\tau)]U(\tau)d\tau$$

Заметим, что выражение для $u(t)$ представляет собой решение рассмотренной выше упрощенной задачи (2.7) при условии $\lambda = \lambda_2$.

Полученное этим путем решение уравнения (1.7) имеет форму

$$\begin{aligned} w(t) = f\exp(a_2 t)\left[1 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\mathrm{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi t})\right] + f\frac{a_1}{a_0}\exp(a_1 t)[\exp(a_0 t) - 1] + \\ + f\int_0^t \exp(a_2\tau)\mathrm{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi\tau})\left\{\frac{\lambda_1}{\sqrt{t-\tau}} + a_1\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\exp[a_1(t-\tau)]\right\}d\tau + \\ + a_1 f\lambda_1\exp(a_1 t)\int_0^t \exp(-a_1\tau)\left[\int_0^\tau \frac{\exp(a_2 s)\mathrm{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi s})}{\sqrt{\tau - s}}ds\right]d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$a_1 = \pi\lambda_1^2, \quad a_2 = \pi\lambda_2^2, \quad a_0 = a_2 - a_1$$

Сделаем замены переменных

$$\tau = t\xi, \quad s = \tau p, \quad 1 - p = \eta^2, \quad 1 - \xi = \sigma^2$$

Введем безразмерные переменные

$$\bar{t} = t/t_*, \quad \bar{v} = v/V$$

Определяющие параметры A, B, f в безразмерном виде запишутся как

$$\bar{A} = -\frac{3}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{2}{\varkappa}\right)^{-1/2}, \quad \bar{B} = -1, \quad \bar{f} = 1-\bar{v}_0, \quad (\kappa = \rho/\rho_i)$$

В безразмерных переменных выражение (3.8) примет форму

$$\begin{aligned}\bar{w}(\bar{t}) &= \bar{f}\exp(a_2\bar{t})\left[1+\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\operatorname{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi\bar{t}})\right] + \bar{f}\frac{a_1}{a_0}\exp(a_1\bar{t})[\exp(a_0\bar{t})-1] + \\ &+ 2\bar{f}\int_0^1 \exp[a_2\bar{t}(1-\sigma^2)]\operatorname{erf}[\lambda_2\sqrt{\pi\bar{t}(1-\sigma^2)}]\left[\lambda_1\sqrt{\bar{t}} + a_1\bar{t}\sigma\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\exp(a_1\bar{t}\sigma^2)\right]d\sigma + \\ &+ 2\bar{f}a_1\lambda_1\bar{t}^{3/2}\exp(a_1\bar{t})\int_0^1\sqrt{\xi}\exp(-a_1\bar{t}\xi)\left\{\int_0^1\exp[a_2\bar{t}\xi(1-\eta^2)]\operatorname{erf}[\lambda_2\sqrt{\pi\bar{t}\xi(1-\eta^2)}]d\eta\right\}d\xi\end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что решение в безразмерной форме зависит только от отношения плотностей несущей жидкости и частицы κ (которое входит в параметр $\bar{A}$), и не зависит ни от размера частиц, ни от вязкости жидкости, ни от других характеристик системы частица-жидкость. Причем в начальный момент времени $\bar{t} = 0$ при нулевой начальной скорости безразмерное ускорение частицы равно 1. Разлагая выражение для $\bar{A}$ при больших $\kappa \gg 1$ в степенной ряд по малому параметру $\varepsilon = 1/\kappa \ll 1$, и оставляя первые три слагаемые, получим

$$\bar{A} \cong -\frac{3}{\sqrt{\pi}}\left(1-\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)$$

Данное соотношение аппроксимирует величину $\bar{A}$ с точностью до 10% в интервале $0 \le \varepsilon \lesssim 0.14$. Отметим, что в нулевом приближении по малому параметру ε величина $\bar{A}$, как и другие определяющие величины $\bar{B}$, $\bar{f}$, не зависит ни от каких свойств жидкости и частицы, и равна $\bar{A} = -3/\sqrt{\pi}$. При этом предельными значениями корней указанного выше квадратного уравнения $\lambda^2 - \bar{A}\lambda - \bar{B}/\pi = 0$ будут $\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2\sqrt{\pi}$.

Следует иметь в виду, что корни квадратного уравнения $\lambda^2 - \bar{A}\lambda - \bar{B}/\pi = 0$ при $\kappa = \rho/\rho_i < 8/5$ становятся комплексными, в связи с чем в этом случае для решения задачи нужно применять другие методы [4, 8, 10].

Имея выражение для ускорения частицы (3.9), можно вычислить скорость ее движения и координату из уравнений

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = \bar{w}(\bar{t}), \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{v}(\bar{t}) \tag{3.10}$$

В качестве примера применения уравнений (3.9), (3.10) рассмотрим процесс всплытия воздушного пузырька в воде при нормальных условиях. В начальный момент времени пузырек имеет нулевую скорость: $\bar{t} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\bar{x} = 0$. Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2 в виде зависимостей скорости и координаты пузырька от времени. Сплошные кривые соответствуют расчетам с учетом, а штриховые – без учета силы Бассе. Видно, что учет силы Бассе приводит к существенному увеличению времени установления стационарной скорости всплытия пузырька (рис. 1). Это согласуется с расчетными и экспериментальными данными, а также с оценками характерных времен установления стационарной скорости с учетом и без учета силы Бассе, приведенными в [10, 11]. Расстояние, на котором скорость достигает установившегося значения при учете силы Бассе, примерно в восемь раз больше, чем в случае, когда она не учитывается (рис. 2).

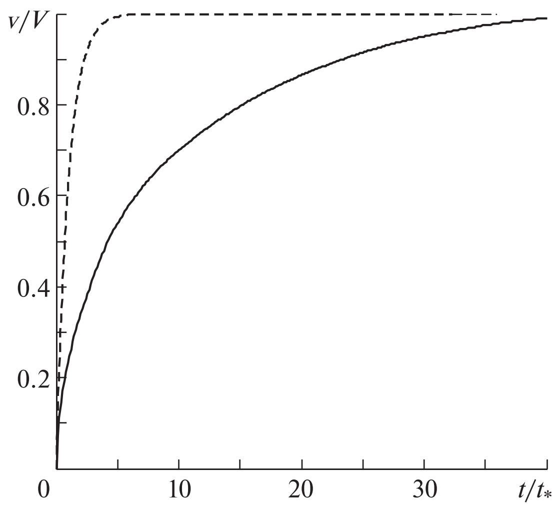

Рис. 1. Зависимость скорости всплытия воздушного пузырька в воде (при нормальных условиях) от времени: сплошная кривая – с учетом силы Бассе, штриховая кривая – без учета силы Бассе.

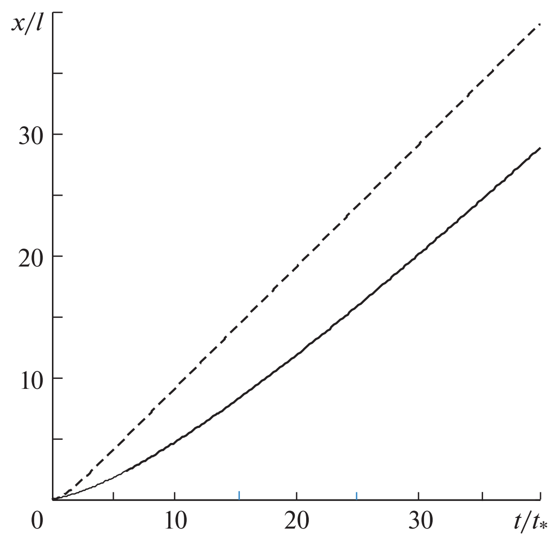

Рис. 2. Зависимость координаты пузырька от времени: сплошная кривая – с учетом силы Бассе, штриховая кривая – без учета силы Бассе. Условия те же, что на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами математической физики найдено решение задачи о движении сферического дисперсного включения в покоящейся жидкости с учетом нестационарных, в том числе наследственных сил. Преимуществом найденного решения является, в частности, то, что входящие в него интегралы не имеют особенностей. Его можно использовать для более детального расчета нестационарной скорости дисперсного включения, двигающегося в жидкости в гравитационном поле. В качестве примера рассмотрено всплытие одиночного пузырька в несжимаемой вязкой жидкости. Обнаружено, что учет наследственных сил типа силы Бассе приводит к существенному увеличению характерного времени установления стационарной скорости пузырька.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

3. *Ивандаев А.И.* О влиянии нестационарных эффектов на обмен импульсом и теплом между фазами газовзвеси в ударных волнах // Журнал РАН. Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. № 4. С. 721–725.
4. *Невский Ю.А., Осипцов А.Н.* О роли нестационарных и наследственных сил в задачах гравитационной конвекции суспензий // Вестник Московского ун-та. Сер. Матем., механика. 2008. № 4. С. 37–44.
5. *Sangani A.S., Zhang D.Z., Prosperetti A.* The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion // Phys. Fluids. 1991. V. 3. № 12. P. 2955–2970.
6. *Michaelides E.E.* A novel way of computing the basset term in unsteady multiphase flow computations // Phys. Fluids. 1992. V. 4. № 7. P. 1579–1582.
7. *Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Бассе // Прикл. матем. и механика. 2009. Т. 73. № 5. С. 763–775.
8. *Водопьянов И.С., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* О нестационарном осаждении сферической твердой частицы в вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 97–106.
9. *Parmar M., Balachandar S., Haselbacher A.* Equation of motion for a drop or bubble in viscous compressible flows // Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 056103.
10. *Архипов В.А., Васенин И.М., Ткаченко А.С., Усанина А.С.* О нестационарном всплытии пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 86–94.
11. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Аэрогидродинамика дисперсной частицы. М.: Физматлит, 2020. 164 с.
12. *Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Упражнения по численным методам. Часть 2. М: Изд. МГУ, 2003. 200 с.
13. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Факториал Пресс, 2000. 384 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 88–101

УДК 532.592

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВЕ ИСТОЧНИКАМИ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. Ю. Доброхотов[a,*], **Х. Х. Ильясов**[a,**], **О. Л. Толстова**[b,c,***]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*

[c] *Национальный исследовательский московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

**E-mail: s.dobrokhotov@gmail.com*

***E-mail: hisam.ilyasov@gmail.com*

****E-mail: olgall1@rambler.ru*

Поступила в редакцию 02.11.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

На основе совместного решения уравнений теории волн в жидкости и упругости решена задача о возбуждении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве. Источник возбуждения специального вида, локализованный во времени и пространстве, располагается в упругой среде. С помощью разложения решения по собственным волнам дифференциального оператора получены интегральные представления для возвышения свободной поверхности жидкости в дальней зоне. Для случая длинных волн получены аналитические формулы для смещения поверхности жидкости. Проведен анализ влияния параметров источника на свойства порождаемых им волн.

Ключевые слова: волны цунами, слой жидкости, упругое полупространство, задача Коши, разложение по собственным волнам, локализованный во времени и пространстве источник

DOI: 10.31857/S0568528122030045

В статье рассматривается задача о возбуждении волн на поверхности слоя жидкости, расположенного на упругом основании. Предполагается, что источник возбуждения располагается внутри упругого полупространства. В предыдущей работе [1] был рассмотрен случай, когда источник действует мгновенно – постановка задачи включала однородную систему уравнений и соответствующие краевые условия с локализованными начальными условиями. Там же были описаны различные подходы к решению данной задачи и приведена соответствующая библиография. Отметим, что исследуются решения совместной системы уравнений теории упругости в упругом полупространстве и теории волн в жидкости, которые связаны на границе раздела соответствующими граничными условиями (используется модель Г.С. Подъяпольского [2]).

Волновые процессы в рассматриваемой системе складываются из волн (мод), которые в предельных случаях соответствуют продольным и поперечным волнам внутри упругого основания, поверхностным волнам Рэлея и поверхностным волнам на воде. При этом внутренние моды и мода Рэлея имеют компоненты и на поверхности жидкости, а водяная мода имеет компоненты, распространяющиеся внутри упругого полупространства и на границе раздела. В начальный момент времени и при малых временах все эти моды оказывают влияние на возмущение свободной поверхности жидкости, но скорости распространения, соответствующие этим модам, сильно отличаются от скорости распространения водяной моды. Волны, соответствующие предельным упругим модам, распространяются значительно быстрее “водяной моды” (например, скорость упругих волн в базальте 22680 км/ч – продольной и 12600 км/ч – поперечной, а волны возвышения слоя воды глубиной 4 км – 700 км/ч). Поэтому через сравнительно небольшое время на поверхности воды остается водяная мода, и вопросы, касающиеся связанной с ней эволюции свободной поверхности, можно изучать отдельно, что и делается в данной работе. Предполагаем, что действие источника распределено по времени, поэтому рассматриваем в отличие от задачи [1] неоднородную систему уравнений с теми же, что и в ранее рассмотренной задаче, граничными условиями. Принцип Дюгамеля позволяет свести задачу к рассмотренной в [1] и воспользоваться полученными формулами, с дополнительным интегралом по времени. Считая действие источника непродолжительным [3, 4], представим решение в виде двух слагаемых – одно описывает распространяющиеся волны, а другое – волны, локализованные вокруг источника. Волны 2-го типа довольно быстро затухают, а 1-го представляют большой интерес и аналогично [1] мы можем их представить как волны, возбуждаемые "эквивалентным" мгновенным источником. Соображения, близкие к использованным в [1], приводят к эффективным формулам, и основной результат настоящей работы представлен в относительно простой интегральной формуле для решения.

1. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Постановка задачи близка к постановке [3, 4], приведем ее для полноты изложения. Идеальная незавихренная жидкость описывается потенциалом перемещений $\Psi(x,z,t)$, деформации упругого полупространства – вектором смещений $U(x,z,t) = (u_1,u_2,u_3)$, где $x \in R^2$ – горизонтальные, z – вертикальная координаты. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а граница раздела слоев задается уравнением $z = -D$. U и Ψ определяются из следующей системы уравнений и граничных условий (в упругой среде – уравнения Ламе, в жидком слое – уравнение Лапласа)

$$U_{tt} = c_t^2\nabla^2 U + (c_l^2 - c_t^2)\nabla \operatorname{div} U + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x,z), \quad z < -D$$

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad -D < z < 0$$

на невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$

$$\frac{1}{\mathbf{g}}\Psi_{tt} + \Psi_z = 0$$

на границе раздела $z = -D$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

$$(c_l^2 - c_t^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + 2c_t^2\frac{\partial u_3}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + (\rho - 1)u_3, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = u_3$$

$$\text{и} \quad U \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty \tag{1.1}$$

Здесь $c = c_l/c_t$ – отношение скоростей продольных и поперечных волн в упругой среде, $\rho = \rho_w/\rho_e$ – отношение плотностей жидкости и упругой среды. Функция $f(t,x,z)$ описывает локализованные в пространстве и времени перемещения внутри упругого полупространства. Приведем приблизительные значения физических параметров задачи. Имеем $g \approx 0.01$ км/с^2, $\rho_w \approx 1024$ кг/м^3 и для базальта (гранита) соответственно – $c_l \approx 22680$ км/ч (19800 км/ч), $c_t \approx 12600$ км/ч (10080 км/ч), $\rho_e \approx 3000$ кг/м^3 (2600 кг/м^3). Также мы будем предполагать, что глубина бассейна находится в пределах 2–5 км; тогда скорость распространения длинных волн в слое жидкости v находится в пределах 700–720 км/ч. Таким образом, $\rho \approx 1/3$, $v/c_l \approx 0.035$, $v/c_t \approx 0.063$, и отношение скоростей поперечных и продольных волн в упругой среде $c = c_t/c_l \approx 1/\sqrt{3}$. К этим параметрам следует добавить характеристики начальных возмущений и размеры области, в которой изучаются решения.

Наиболее интересный объект с точки зрения приложений к волнам на воде – это превышение свободной поверхности η; если решения U, Ψ приведенной выше системы получены, то функция η восстанавливается по формуле

$$\eta = -\frac{1}{\mathbf{g}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{1.2}$$

Система (1.1) имеет нестандартную с точки зрения уравнений в частных производных форму. Однако мы можем использовать общие результаты из теории операторов и уравнений с частными производными, если представить систему в виде стандартной задачи Коши

$$\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial t^2} = \hat{L}\Upsilon + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t,x,z), \quad \Upsilon\,|_{t=0} = \Upsilon_0(x,z), \quad \Upsilon_t\big|_{t=0} = \Upsilon_1(x,z) \tag{1.3}$$

где $\hat{L} = L\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – матричный дифференциальный оператор по переменным (x, z), формулы для него приведены в [5]. Соответствующее физическое пространство, в котором заданы неизвестные функции Υ и функции Υ_0, Υ_1 (см. [5, 6]), задается следующим образом: оно состоит из упругого полупространства $z < -D(x)$ и двух плоскостей $z = 0$ и $z = -D$. Вектор-функция $\Upsilon = (u_1, u_2, u_3, \psi_W, \psi_H)^{\text{т}}$ состоит из пяти компонент, три из которых $U = (u_1, u_2, u_3)^{\text{т}}$ зависят от x, z, t, а две $\psi(x,t) = (\psi_W, \psi_D)^{\text{т}}$, $\psi_W = \Psi(x,z,t)\big|_{z=0}$, $\psi_D = \Psi(x,z,t)\big|_{z=-D}$ – зависят только от x, t. Здесь и ниже индекс Т означает транспонирование. Удобная энергетическая норма в пространстве решений в случае $D = \text{const}$ определяется скалярным произведением вида

$$(\Upsilon^1, \Upsilon^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_x}\left(\int\limits_{-\infty}^{-D}\langle \bar{U}^1, U^2\rangle dz\right)dx + \rho\int\limits_{\mathbb{R}^2_p}\left\langle \bar{\tilde{\psi}}(p,t), R(p)\tilde{\psi}(p,t)\right\rangle dp$$

$$R = \begin{pmatrix} |p|\coth(|p|D) & -|p|/\sinh(|p|D) \\ |p|/\sinh(|p|D) & -|p|\coth(|p|D) \end{pmatrix}$$

Здесь и ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает евклидово вещественное произведение соответствующих векторов, тильда – преобразование Фурье по горизонтальным переменным (x_1, x_2), двойственные переменные обозначаются (p_1, p_2) и черта – комплексное сопряжение.

Исследование существования и единственности решения задачи Коши для жидкости произвольной (включая случай переменной) глубины проведено в [5, 6]). Ниже рассматривается задача Коши с нулевыми начальными условиями

$$U\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \psi_{W,D}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial\psi_{W,D}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{1.4}$$

Предполагаем, что правая часть $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ определяет локализованное в полупространстве и во времени возмущение перемещений. Считаем что у F не обращается в ноль только упругая компонента – вектор функция (возбуждения перемещений) $f(t,x,z)$, которая быстро убывает при отдалении от точки $(x = 0, z_0)$, $z_0 < 0$. Кроме того считаем, что $f(0,x,z) = \partial f(0,x,z)/\partial t = 0$ и $f(t,x,z)$ при больших t выходит на функцию $F_\infty(x,z)$. Более того, для получения эффективных формул для решения полагаем, что вектор-функция $F(t,x,z)$ имеет вид

$$f(t,x,z) = \mathbf{a}G(t)e(z)V(x)e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2b_3^2}}, \quad V(x) = \frac{1}{(1 + (x_1/b_1)^2 + (x_2/b_2)^2)^{3/2}} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{a}$ – постоянный трехмерный вектор-столбец амплитуд с компонентами (a_1, a_2, a_v), $\mathbf{e}(z)$ – гладкая срезающая функция, равная единице при $z < -D - 2\delta$ и принимающая нулевые значения при $z > -D - \delta$ (в окончательном ответе она роли не играет и вводится для математической строгости). Параметры $a_1, a_2, a_v, b_1, b_2, b_3$ – размерные константы (км), характеризующие амплитуды перемещений и их размер в источнике. Относительно безразмерной функции $G(t)$ будем предполагать, что $G = G_0(\lambda t)$, где $G_0(\tau)$ – гладкая функция на полупрямой $[0, \infty)$, выходящая на некоторую константу C_0, быстрее чем $1/\tau^\kappa$, $\kappa > 1$, когда $\tau \to \infty$, $G_0(\tau) = 0$, $G_{0\tau}(\tau) = 0$ при $t \le 0$. Последние условия означают, что $G_0(0) = 0$, $G_{0\tau}(0) = 0$. Положительная вещественная величина λ характеризует время выхода $1/\lambda$ функции $G(t)$ на G_0 и имеет размерность 1/с. Если $C_0 \ne 0$, то без уменьшения общности можно считать, что $C_0 = 1$ (включить C_0 в $\mathbf{a}$). В этом случае для функции

$$G(t) = \lambda G_0(\lambda t) \tag{1.6}$$

в пределе $\lambda \to \infty$ имеем $G(t) \to \delta(t-0)$. Равенство $C_0 = 1$ означает, что вектор смещений в упругом основании выходит на V и в конечном итоге имеются остаточные смещения, и остаточные смещения отсутствуют, если $C_0 = 0$. В окончательных формулах по существу присутствует производная $\partial G/\partial t$, поэтому нам удобно представить функцию $G_0(\tau)$ в виде

$$G_0 = \int_0^\tau g(\tau)d\tau \Leftrightarrow g = \frac{\partial G_0}{\partial \tau}, \quad G_0(0) = 0 \tag{1.7}$$

Как и в [3, 4], приведем два примера функции g.

(а) $g(\tau) = e^{-\tau}P(\tau)$, где $P(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k!}\tau^k$ – полином степени n с коэффициентами P_k такими, что $P_0 = 0$ and $\sum_{k=1}^n P_k = 1$.

(б) $g(\tau) = ae^{-\tau}(\sin(\alpha\tau + \phi) - \sin\phi)$, где $\alpha > 0$ и ϕ – вещественные параметры и $a = (\alpha^2 + 1)/$ $/(\alpha\cos\phi - \alpha^2\sin\phi)$.

Здесь $G_0 \to 1$, когда $\tau \to \infty$. Примеры, когда $C_0 = 0$, обсудим позже.

2. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ДЮГАМЕЛЯ

Решение задачи (1.3), (1.4) можно записать в виде интеграла Дюгамеля, переместив правую часть $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ в начальные данные, заданные в момент времени τ.

С помощью интеграла Дюгамеля решение Υ выражается через решение $W(t,\tau,x,z)$ задачи

$$W_{tt} = \hat{L}, \quad W\big|_{t=\tau} = \frac{\partial F}{\partial t}(\tau,x,z), \quad W_\tau\big|_{t=\tau} = 0 \tag{2.1}$$

по формуле

$$\Upsilon = \int_0^t W(t,\tau,x,z)d\tau \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.1), основанное на преобразовании Фурье по горизонтальным переменным, последующего разложения по собственным функциям (по различным модам) и обобщенным собственным функциям оператора $\hat{L}$, записанного в Фурье-представлении, получено в [1, 7]. В этих работах приведены аргументы, объясняющие, что локализованный источник порождает различные волны (моды), переходящие в пределе в продольные и поперечные внутренние упругие волны, поверхностные упругие волны Рэлея и водяные поверхностные волны. При этом скорость упругих волн существенно больше, чем скорость водяных волн и спустя какое-то время в ограниченной, но большой окрестности точки расположения источника, остаются только водяные поверхностные волны. Для таких волн получены формулы, которые можно применить для описания соответствующей функции η, с учетом отсутствия второй производной по времени. Учитывая представление правой части в виде (1.5), получим

$$\begin{gathered}\eta = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left[\sum_\pm \int_{\mathbb{R}_p^2} e^{i(\langle p,x\rangle \pm (t-\xi)\omega(|p|))} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial C_W}{\partial t}(p,\xi)\frac{i\omega^4(|p|)A}{2c_t^2\cosh(|p|D)(\omega^2(|p|) - g|p|\tanh(|p|D))}dp\right]d\xi\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}A = \left(\frac{p^2(k_t^2+p^2)}{2k_t} + \frac{(k_t^2+p^2)^2(k_l^2+p^2)}{8k_l^3} - \frac{p^2(k_t^2+p^2)}{k_l} + \right. \\ \left. + \frac{\rho\omega^4|p|\tanh(|p|D)}{4c_t^4(\omega^2 - g|p|\tanh(|p|D))^2}\left(g^2 - 2g\frac{\omega^2}{|p|}\tanh(|p|D) + \frac{\omega^4}{p^2}\right)\right)^{-1/2}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь частота $\omega(|p|)$ определяется из сложного дисперсионного соотношения (см. (3.1) в [1]), и $C_W(p,\tau)$ – коэффициент разложения функции $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\tau,x,z)$ по собственным функциям оператора $\tilde{L}$, соответствующий в пределе водяной моде. В [1, 7, 8] показано, что функция $\omega(|p|)$ может быть приблизительно представлена в виде

$$\omega^2 \approx g\left(1-\frac{g\rho}{g+2c_t^2|p|}\right)|p|\tanh(D|p|) \tag{2.5}$$

Также из формул, полученных в этих работах, следует, что при выборе правой части в виде (1.4), коэффициент C_W примет вид

$$\begin{gathered} C_W = \lambda g(\lambda\tau)C_0, \quad C_0 = -iAb_1b_2e^{-|p|b(\varphi)}\times \\ \times\left((ik_t\langle p,a\rangle - p^2a_v)e^{k_t(z_0+D)}f_t + \frac{k_t^2+p^2}{2k_l}(-i\langle p,a\rangle + k_la_v)e^{k_l(z_0+D)}f_l\right) \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$b(\varphi) = \sqrt{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi}, \quad \langle p,a\rangle = p_1a_1 + p_2a_2$$

$$f_{t,l} \approx b_3\sqrt{2\pi}e^{\frac{b_3^2k_{t,l}^2}{2}}e(z_0+b_3^2k_{t,l}) \quad k_t = \sqrt{p^2-\lambda/c_t^2}, \quad k_l = \sqrt{p^2-\lambda/c_l^2}$$

Поменяем интеграл по времени в формуле (2.3) с интегралом по p и представим его в виде суммы

$$\int_9^t e^{\mp i\xi\omega(|p|)}\frac{\partial G}{\partial t}(\xi)d\xi = \int_0^\infty e^{\mp i\xi\omega(|p|)}\frac{\partial G}{\partial t}(\xi)d\xi - \int_\tau^\infty e^{\mp i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G}{\partial t}(\xi)d\xi \tag{2.7}$$

В [3, 4] было показано, что второе слагаемое с интегралами в правой части последнего равенства быстро убывает при больших τ и определяет быстро осциллирующие и быстро затухающие волны в воде в области, расположенной над источником. Первое слагаемое, содержащее не зависящие от τ интегралы от t с учетом соответствующих множителей $e^{i(\langle p,x\rangle \pm t\omega(|p|))}$, описывает распространяющиеся волны и именно оно представляет основной интерес. Соответствующие интегралы можно переписать в виде

$$\int_0^\infty e^{-i\frac{\omega(|p|)}{\lambda}}g(\tau)d\tau = \sqrt{2\pi}\tilde{g}^+\left(\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\right) \tag{2.8}$$

$$\int_0^\infty e^{i\frac{\tau\omega(|p|)}{\lambda}}g(\tau)d\tau = \sqrt{2\pi}\tilde{g}^-\left(\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\right), \quad \tilde{g}^+ = \overline{\tilde{g}}^- = \tilde{g}$$

где $\tilde{g} = \tilde{g}^+(v)$ – преобразование Фурье функции g и черта означает комплексное сопряжение.

Для примера (a) имеем

$$\sqrt{2\pi}\tilde{g} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+iv)^{k+1}} = \gamma P\left(-\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma^2+v^2} - i\frac{v}{\gamma^2+\zeta^2}\right)\Bigg|_{\gamma=1} \tag{2.9}$$

и для примера (б)

$$\sqrt{2\pi}\tilde{g} = a\left(\frac{\alpha((1+iv)\cos(\phi)-\alpha\sin\phi)}{(1+iv)(\alpha^2+(1+iv)^2)}\right) \tag{2.10}$$

Сохраняя теперь в (2.3) при временах $t \gg 1/\lambda$ только распространяющиеся волны, эту формулу можно переписать в виде

$$\eta \approx -\frac{1}{4\pi}\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}_p^2} e^{i(\langle p,x\rangle \pm t\omega(|p|))}\frac{i\sqrt{2\pi}\tilde{g}^{\pm}(p)C_0(p)\omega^4(|p|)A}{2c_t^2\cosh(|p|D)(\omega^2(|p|) - g|p|\tanh(|p|D))}dp \tag{2.11}$$

Из (2.11) видно, что изменение во времени действия источника сводится к появлению множителей $\tilde{g}^{\pm}(p)$, что можно интерпретировать как замену протяженного во времени источника на некоторый мгновенный эквивалентный источник, см. [3, 4].

Теперь подставим в (2.11) выражения для функции V и проведем ее упрощения аналогичные [1, 7, 8] с помощью программы Mathematica. Получим

$$\eta \approx \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g}}{4\sqrt{2\pi} c_t^2} \operatorname{Re}\left[\sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}_p^2} \frac{e^{i(\langle p,x\rangle \pm t\omega(|p|))} e^{-|p|\mathbf{b}(\varphi)} (1-\boldsymbol{\rho} + 2|p| c_t^2/\mathbf{g})^2 \sinh(D|p|)}{p^2 (1 + 2|p| c_t^2/\mathbf{g})(\boldsymbol{\rho}\cosh^2(D|p|) + \tanh(D|p|))} Q dp\right] \tag{2.12}$$

$$Q = -\frac{e^{|p|(z_0+D)} e^{\frac{b_3^2 p^2}{2}} \sqrt{2\pi}\tilde{g}^{\pm}(p)\omega^2(|p|)}{|p| 2 c_t^2 c_l^2} (a_v |p| (c_l^2 - R) + i\langle p, a\rangle (c_t^2 + R)) \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 |p|)$$

где $R = (c_l^2 - c_t^2)|p|(D + b_3^2|p| + z_0)$.

Изучим этот интеграл при больших $|x|$. Пусть φ – полярный угол вектора x, ψ – полярный угол вектора p, $\langle p, x\rangle = |x|\rho\cos(\psi - \varphi)$, $\varrho = |p|$. Перейдем в интегрировании по переменным p к полярным координатам (ϱ, ψ) и учтем, что точка x находится достаточно далеко от начала координат, т.е. от горизонтального местоположения источника. Тогда по углу ψ можно применить метод стационарной фазы, что даст слагаемые $e^{i(\pm|x|\varrho - t\omega(\varrho))}$. Так как $\partial\omega/\partial\varrho > 0$, то в силу соображений, использованных при вычислении асимптотик быстро меняющихся интегралов [9], при $t > 0$ слагаемое с $-|x|\varrho - t\omega(\varrho)$ вносит вклад в асимптотику $O(|x|^{-2})$ и им можно пренебречь. В результате получим $\eta \approx \eta_F$ (в приближении дальнего поля)

$$\eta_F = \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g}}{4\pi c_l^2 \sqrt{|x|}} \operatorname{Re}\left[\int_0^{\infty} \frac{e^{i(|x|\varrho - t\omega(\rho) - \pi/4)} e^{-\varrho(\mathbf{b}(\varphi) - z_0 - D)} \sqrt{\varrho}\tanh^2(D\varrho)}{\cosh(D\varrho)(\boldsymbol{\rho} + \tanh(D\varrho)/\cosh^2(D\varrho)} \times \right.$$
$$\left. \times e^{\frac{b_3^2\rho^2}{2}} \sqrt{2\pi}\tilde{g}^{-}\left(\frac{\omega(\varrho)}{\lambda}\right)(a_v(c^2 - R) + i a_h(\varphi)(1 + R)) e(z_0 + b_3^2\varrho))\right] d\varrho$$

где $R = (c^2 - 1)\varrho(D + b_3^2\varrho + z_0)$, $c = c_1/c_t, a_h(\varphi) = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi$. Срезающая функция $e(z_0 + b_3^2\varrho)$ дает лишь сходимость интеграла, ответ от ее выбора практически не зависит. Хотя она предполагается финитной, но ее можно выбрать быстро убывающей при положительных z, например, в виде $e(y) = 1/(1 + \exp((y/b_3 + 2)^3)$.

Рассмотрим теперь длинноволновое приближение. Считая $|pD|$ достаточно малым и $b_j + |z_0| \gg D$, $\sinh(D\varrho) \approx D\varrho$, $\cosh^2(D\varrho) \approx 1$, можем написать $\omega \approx \tilde{\omega} = |p|\sqrt{gD}\sqrt{1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2|p|}}$ и $\eta \approx \eta_L$, где

$$\eta_L = \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g} D^2}{4\pi c_l^2 \sqrt{|x|}} \operatorname{Re}\left[\int_0^{\infty} \varrho^{5/2} e^{i(|x|\varrho - t\tilde{\omega}(\varrho) - \pi/4)} \frac{e^{-\varrho L} e^{\frac{b_3^2\varrho^2}{2}}}{(\rho + D\varrho)} \sqrt{2\pi}\tilde{g}^{-}\left(\frac{\tilde{\omega}(\rho)}{\lambda}\right) \times \right.$$
$$\left. \times (a_v(c^2 - R) + i a_h(\varphi)(1 + R)) e(z_0 + b_3^2\varrho) d\varrho\right] \tag{2.13}$$

$$R = -(c^2 - 1)\varrho(h - b_3^2\varrho), \quad h = -z_0 - D, \quad L = b(\varphi) - z_0 - D$$

Величина h характеризует глубину (считая от границы раздела вода–упругое основание) залегания источника. Сравнение (2.13) с выражениями из [17] показывает, что параметр L в $e^{-\varrho L}$ играет роль, аналогичную характеристическому размеру в потенциальной модели, и с ростом глубины залегания источника длина порождаемых волн увеличивается. Однако из-за знаменателя $\rho + D\varrho$ в (2.13) говорить о прямом соответствии L характеристическому размеру нельзя.

Дальнейшие упрощения сводятся к следующему. Во-первых, можно одновременно отбросить экспоненту $e^{\frac{b_3^2\varrho^2}{2}}$, $b_3^2\varrho$ в множителе R, а также срезающую функцию. Кроме того, учитывая наличие в интеграле множителя $\rho^{5/2}$, быстрое стремление к 0 подынтегральной функции и существенное изменения подынтегральной функции лишь при очень малых ϱ, частоту $\tilde{\omega}$ (дисперсионное соотношение) можно заменить на $\omega = C\varrho$, $C = \sqrt{gD}$. В результате приходим к следующей формуле

$$\begin{gathered}\eta_L = \frac{b_1b_2b_3gD^2}{4\pi c_l^2\sqrt{|x|}}\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty \varrho^{5/2}\, e^{i((|x|-tC)\varrho-\pi/4)}\,\frac{e^{-\varrho L}}{(\rho + D\varrho)}\sqrt{2\pi}\tilde{g}^-\left(\frac{C\rho}{\lambda}\right)\times\right. \\ \left.\times(a_v(c^2 - R) + ia_h(\varphi)(1+R))d\varrho\right], \quad R \approx -\varrho(c^2-1)h\end{gathered} \tag{2.14}$$

Для случая (а), когда $g = e^{-\tau}\tau$

$$\sqrt{2\pi}\tilde{g}^-(v) = \frac{1}{(1-iv)^2}$$

при $g = e^{-\tau}\left(\beta\tau + \frac{1-\beta}{2}\tau^2\right)$

$$\sqrt{2\pi}\tilde{g}(v) = \frac{\beta}{(1-iv)^2} + \frac{1-\beta}{(1-iv)^3}$$

Здесь β – вещественный безразмерный параметр.

Тогда (2.14) сводится к вычислению интегралов вида

$$I_{km} = I_{km}(y, L, \rho, D, q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varrho^{k+1/2}\,\frac{e^{(iy-L)\varrho}}{(1-iq\varrho)^m(\rho + D\varrho)}d\varrho, \quad q = \frac{C}{\lambda} \tag{2.15}$$

где $y = |x| - tC$, числа k принимают значения 2, 3, а m – значения 2, 3, … в зависимости от функции g. Параметры L, D принимают размерные значения и мы считаем, что они находятся в пределах L = 10–50 км, D = 2–5 км, кроме того ρ = 0.3–0.35. Далее, считая что C = 500–800 км/ч и $1/\lambda$ = 0–20 с, получим q = 0–4.5. Интегралы (2.15) вычисляются точно и выражаются через функцию ошибок Erf комплексного аргумента. Так, для $g = e^{-\tau}\tau$ выражение (2.14) представляется как

$$\hat{\eta}_L = \frac{b_1b_2b_3gD^2}{2c_l^2\sqrt{|x|}}\mathrm{Re}[e^{-i\pi/4}((a_vc^2 + ia_h(\varphi))\mathrm{I}_{22} + (c^2-1)h(a_v - ia_h(\varphi))\,\mathrm{I}_{32})] \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}I_{22} = -\frac{i\rho}{4\theta^{3/2}\sqrt{\xi}q^4(q-i\theta)^2}(2i\sqrt{\xi}q^4e^{\xi/\theta}(1-\mathrm{erf}(\sqrt{\xi/\theta})) + \\ + \theta^{3/2}\sqrt{-iq}\xi e^{\frac{i\xi}{q}}(2\theta\xi + 5q^2 - 3i\theta q + 2i\xi q)(i + \mathrm{erfi}(\sqrt{-i\xi/\mathrm{q}})) - \\ - 2i\sqrt{\theta/\pi}q(q-i\theta)(\theta\xi + q^2 - i\theta q))\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}I_{32} = -\frac{i\rho}{4\theta^{5/2}\xi^{3/2}q^5(q-i\theta)^2}(2i\xi^{3/2}q^5e^{\xi/\theta}(\mathrm{erf}(\sqrt{\xi/\theta}) - 1) + \\ + \theta^{5/2}\xi^{3/2}\sqrt{-iq}e^{\frac{i\xi}{q}}\mathrm{erfi}(\sqrt{-i\xi/q})(-2i\theta\xi - 7iq^2 - 5\theta q + 2\xi q) + \\ + (\theta^{5/2}\xi^{3/2}\sqrt{-iq}e^{\frac{i\xi}{q}}(2\theta\xi + 7q^2 - 5i\theta q + 2i\xi q) + \\ + i\sqrt{\theta/\pi}q(q-i\theta)(2i\theta^2\xi^2 - q^3(\theta - 2\xi) + i\theta q^2(\theta + 2\xi) + 4\theta^2\xi q)))\end{gathered}$$

где $\mathrm{Erfi}(z) = \mathrm{Erf}(iz)/i$, $\xi = L - iy$, $\theta = D/\rho$.

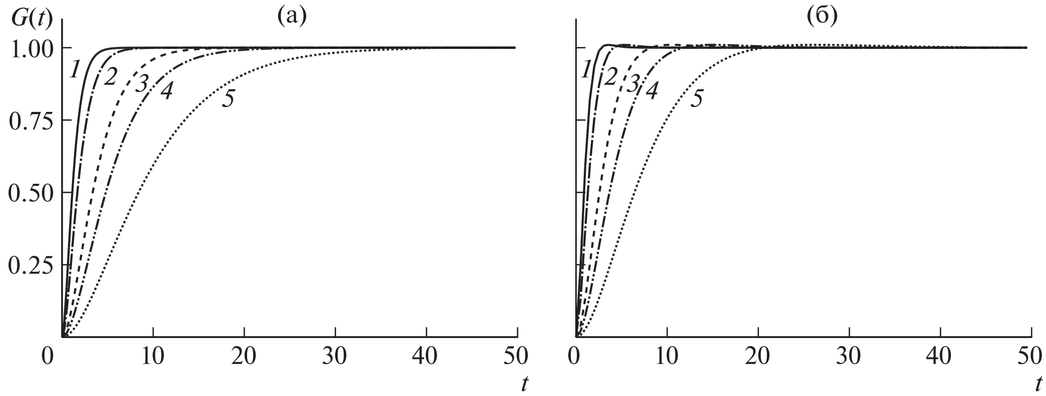

Рис. 1. Зависимость источников от времени $g(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$ (а) и $\hat{g}(\tau) = ae^{-\lambda\tau}(\sin(\alpha\lambda\tau + \phi) - \sin\phi)$ (б) для $\alpha = 0.3$: *1*–*5* – $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2$.

В случае (б) $g(\tau) = ar^{-\tau}(\sin(\alpha\tau + \phi) - \sin\phi)$

$$\sqrt{2\pi}\tilde{g}^{-}(v) = a\alpha\frac{(1-iv)\cos(\phi) - \alpha\sin(\phi)}{(1-iv)(\alpha^2 + (1-iv)^2)},$$

и (2.14)) сводится к вычислению интегралов

$$I_{k,m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varrho^{k+1/2}\frac{e^{(iy-L)\varrho}}{(\rho + D\varrho)(1 - iq\varrho)^m(\alpha^2 + (1-iv)^2)}d\varrho, \quad k = 2,3 \quad m = 0,1$$

Как и в случае (а), указанные интегралы вычисляются точно через функцию ошибок комплексного аргумента, но из-за громоздкости эти формулы не приводятся.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Влияние длительности воздействия и вида источника на волновые профили. Рассмотрим осесимметричный источник, действующий в вертикальном направлении ($b_1 = b_2 = b_3 = b$, $a_h = 0$). Рисунок 1 (а) и (б) демонстрирует зависимость времени для двух типов источников: $g(\tau) = \tau e^{-\tau}$ и $\hat{g}(\tau) = ae^{-\lambda\tau}(\sin(\alpha\lambda\tau + \phi) - \sin\phi)$ для $\alpha = 0.3$. Параметр λ принимает следующие значения 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2 (с уменьшением λ возрастает время воздействия – кривые сдвигаются вправо). Оба источника относятся к типу с остаточными деформациями, т.е. по окончании действия перемещения в упругой среде отличны от нуля. Параметр α выбран таким образом, чтобы смещения в эпицентре происходили поступательно и временные зависимости обоих источников были похожими.

На рис. 2 показаны вычисленные по формуле (2.11) возвышения поверхности жидкости от расстояния (волновые профили) для источника, зависящего от времени как $g(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$. Данные для расчета: $b = 2$ км, $H = 5$ км; глубина залегания источника $z = 43$ км. Для верхнего ряда кривых безразмерное время наблюдения $t_0 = 60$ (что соответствует 22.6 мин от начала воздействия источника), для нижнего ряда кривых время наблюдения $t_0 = 150$ (56.5 мин от начала действия источника). Для удобства сравнения зависимости отнормированы таким образом, чтобы максимальное возвышение жидкости (амплитуда головного гребня) была единичной.

Как видно из рисунков, увеличение длительности действия источника приводит к незначительному росту времени выхода волн на максимум. При этом сами скорости волн не претерпевают заметных изменений – сдвиг во времени (по расстоянию) головных гребней от разных возму-

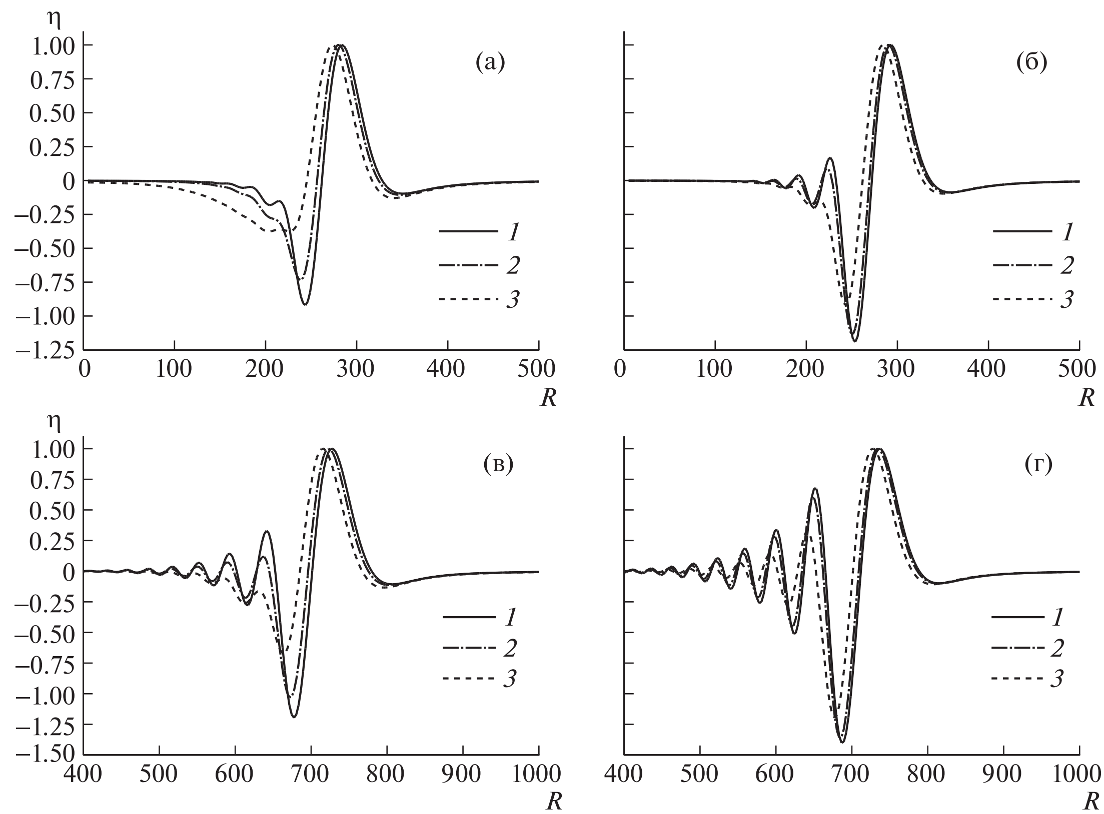

Рис. 2. Поведение волновых профилей в зависимости от длительности действия источника, зависящего от времени как $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, глубина залегания z_0 = 43 км. (а, б) – t_0 = 60 (≈23 мин), (в, г) – t_0 = 150 (≈57 мин). (а, в): *1–3* – λ = 0.5, 0.35, 0.2. (б, г): *1–3* – λ = 1.5, 1.0, 0.5.

щений с расстоянием практически не меняется. Изменение длительности воздействия почти не влияет на ширину головных гребней, но при этом существенно сказывается на дисперсионных эффектах при распространении волн. Чем дольше по времени действует источник, тем на больших расстояниях происходит проявление дисперсии: уменьшается количество гребней и впадин, следующих за головными, снижается их амплитуда.

Волновые профили на рис. 3 получены по формуле (2.11) для источника, зависящего от времени как $\hat{g}(\tau) = ae^{-\lambda\tau}(\sin(\alpha\lambda\tau + \phi) - \sin\phi)$ источника при $\alpha = 0.3$ (в этом случае перемещения среды в эпицентре происходят без колебаний – так же, как и для зависимости источника от времени $g(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$). Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что, несмотря на близкие по виду зависимости возмущений от времени, дисперсионные эффекты при воздействии источника с временной зависимостью $\hat{g}(\tau)$ развиваются существенно быстрее, чем у источника с зависимостью $g(\tau)$. При этом протяженность головных гребней для обоих видов возмущений почти одинакова. Точно так же, как и в предыдущем случае возмущения, увеличение времени воздействия приводит к небольшому запаздыванию головных гребней, но без изменения скорости распространения самих волн.

Влияние глубины залегания источника на профили волн. Приведенные на рис. 4 волновые профили вычислены для зависимости источника от времени $g(\tau)$, расположенного на глубине z_0 = 83 км. Сравнение рис. 2 и 4 показывает, что увеличение глубины расположения источника приводит к возрастанию ширины головного гребня (аналогично поведению, связанному с ростом размеров источника в потенциальной модели). Точно таким же образом глубина залегания влияет на дисперсионные эффекты при распространении волн, в данном случае они практиче-

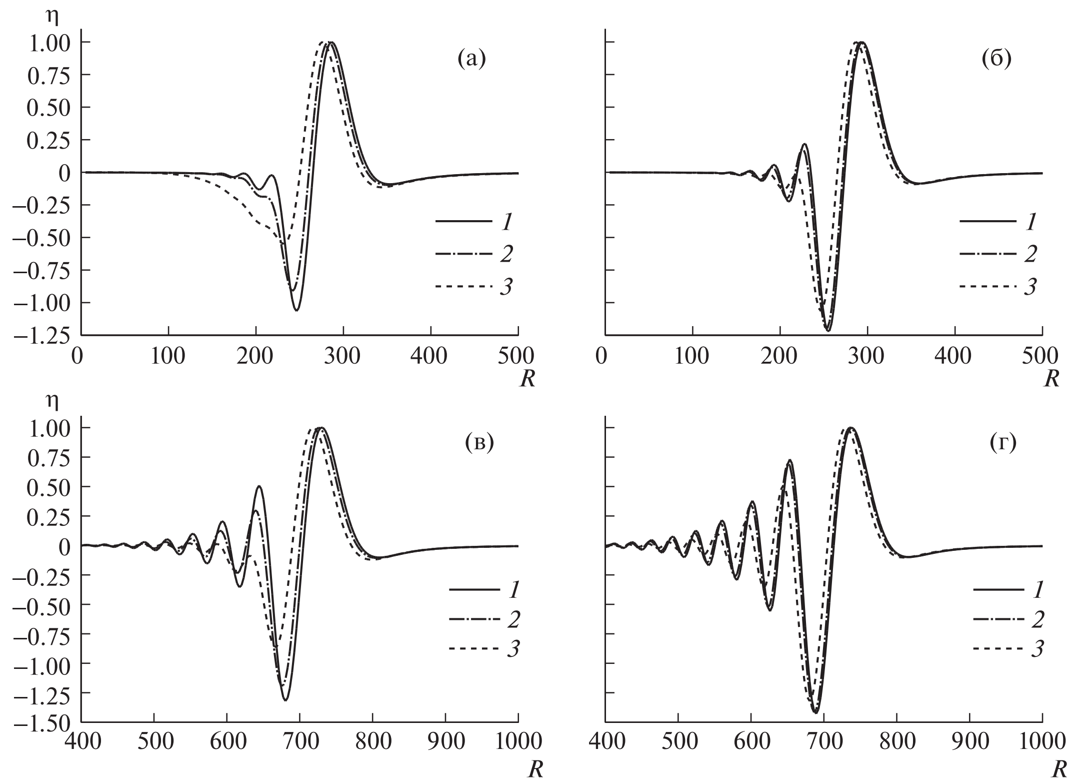

Рис. 3. Влияние длительности воздействия источника, зависящего от времени как $ae^{-\lambda\tau}(\sin(\alpha\lambda\tau + \phi) - \sin\phi)$, $\alpha = 0.3$; (а, б) – $t_0 = 60$, (в, г) – $t_0 = 150$. (а, в): *1–3* – $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$. (б, г): *1–3* – $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$. Глубина залегания источника $z_0 = 43$ км.

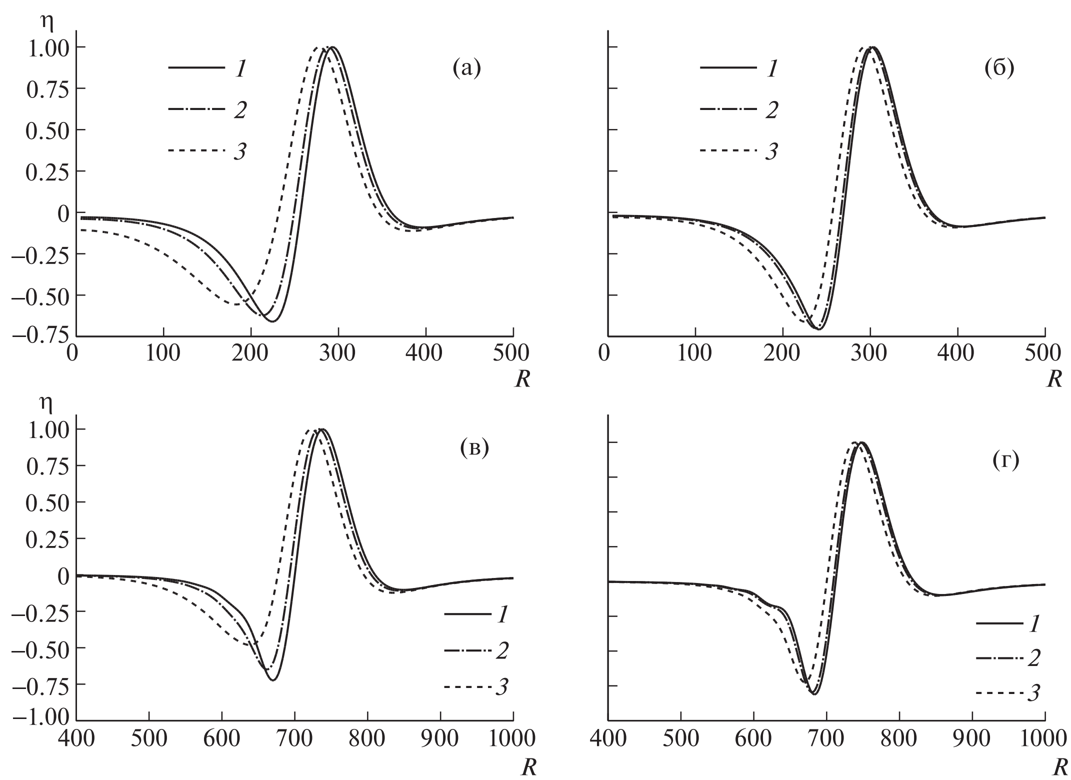

Рис. 4. Поведение волновых профилей в зависимости от длительности действия источника, зависящего от времени как $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, $z_0 = 83$ км. (а, б) – $t_0 = 60$, (в, г) – $t_0 = 150$. (а, в): *1–3* – $\lambda = 0.5, 0.35$, $\lambda = 0.2$. (б, г): *1–3* – $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$.

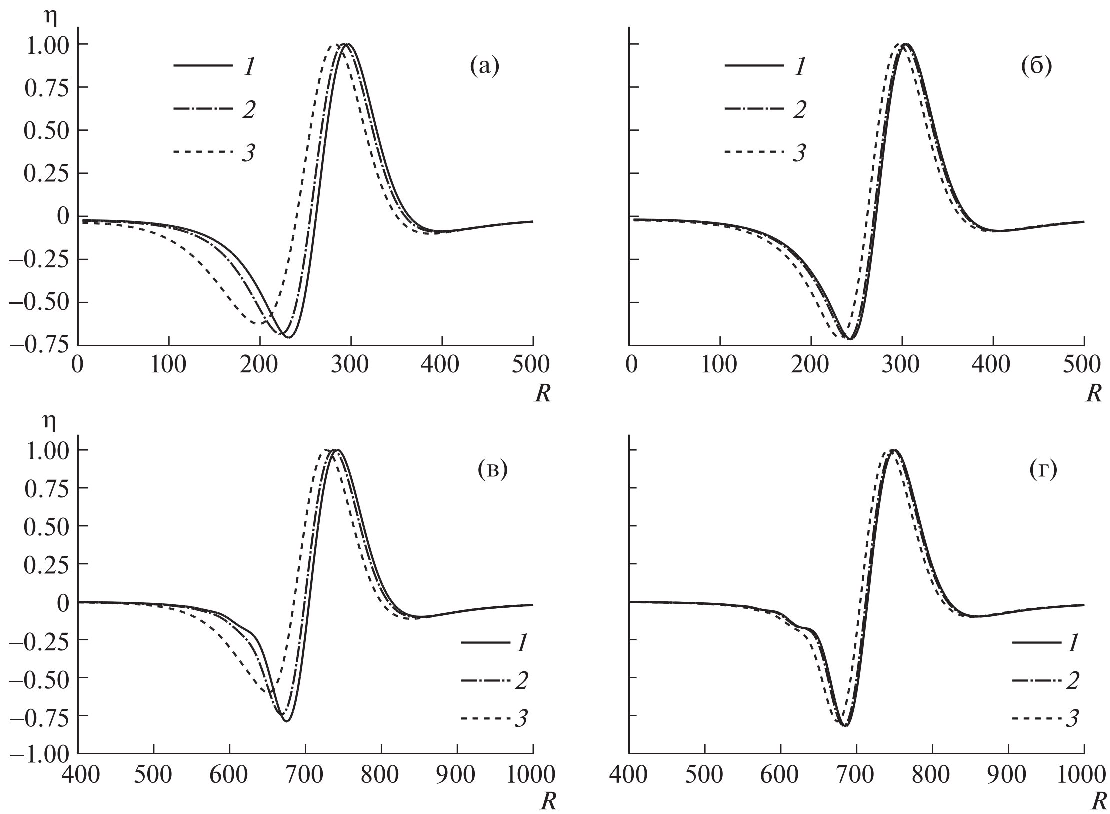

Рис. 5. Влияние длительности воздействия источника, зависящего от времени как $ae^{-\lambda\tau}(\sin(\alpha\lambda\tau + \phi) - \sin\phi)$, $\alpha = 0.3$; $t_0 = 60$ – (а, б), $t_0 = 150$ – (в, г). (а, в): *1–3* – $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$. (б, г): *1–3* – $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$. Глубина залегания источника $z_0 = 83$ км.

ски не наблюдаются. Время действия источника, также как и в случае $z_0 = 43$ км, приводит к изменению времени прихода головного гребня – чем длиннее во времени возмущение, тем позже приходит головной гребень.

Рисунок 5 демонстрирует волновые профили, вычисленные для источника с временной зависимостью $\hat{g}(\tau)$ для $\lambda = 0.3$ – смещения в эпицентре носят поступательный характер. На графиках (в, г) рисунка на восходящих ветвях головной впадины наблюдаются небольшие колебания, более явные, чем на рис. 4, – свидетельство того, что дисперсионные эффекты для возмущения с $\hat{g}(\tau)$ проявляются сильнее. Из сравнения рис. 4 и 5 следует, что функциональный вид временной зависимости возмущения не оказывает существенного влияния на ширину головного гребня – она в обоих случаях практически одинакова.

На рис. 6 показано влияние глубины залегания источника, зависящего от времени как $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, на волновые профили. Время наблюдения $t_0 = 60$ выбрано таким образом, чтобы влияние дисперсионных эффектов было незначительным. Как видно из зависимостей, с ростом глубины залегания источника длина волны растет – происходит увеличение протяженности головного гребня и головной впадины. В случае малого времени воздействия источника (в, г) и небольшой глубины залегания $z_0 = 43$ км, на кривых существенно проявляются дисперсионные эффекты, которые с ростом z_0 становятся незаметными. Аналогичным образом на волновых профилях сказывается увеличение размера источника в поршневой модели, что подтверждает выводы, сделанные при анализе выражения (2.13).

Сравнение волновых профилей, рассчитанных по интегральным формулам и явным аналитическим зависимостям. На рис. 7 показаны волновые профили, вычисленные по явным аналитическим формулам и по интегральным представлениям (2.16). Как следует из графиков, явные аналити-

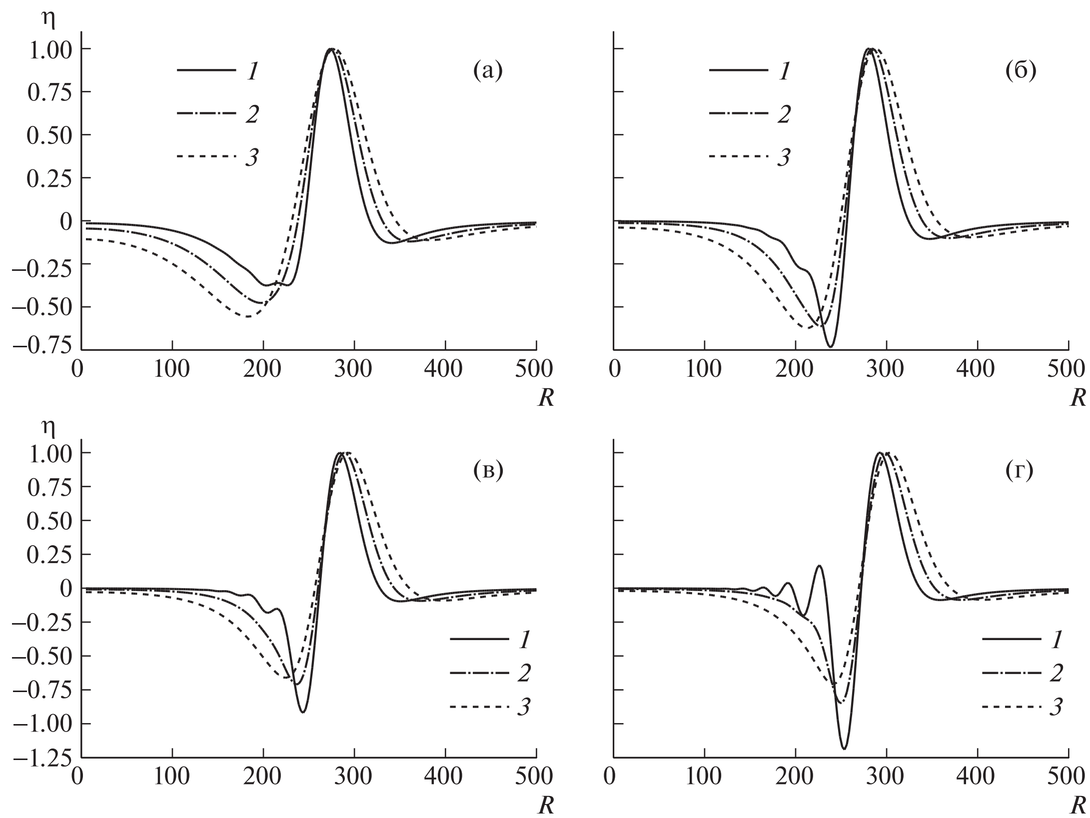

Рис. 6. Влияние глубины залегания источника, зависящего от времени как $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, $t_0 = 60$, (а–г) – $\lambda = 0.2, 0.35, 0.5, 1.5$; глубина залегания: *1–3* – $z_0 = 43, 63, 83$ км.

ческие зависимости немного уменьшают (около 9%) амплитуду головного гребня и более существенно (до 25%) занижает амплитуду головной впадины. При этом положение головного гребня аналитические и аналитико-численные представления дают весьма близкое, что позволяет использовать явные аналитические засисимости в моделях для оперативного прогнозирования развития цунами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе разложения решения задачи о возбуждении гравитационных волн в слое жидкости, покоящемся на упругом основании, локализованным в пространстве и во времени источником в упругой среде по собственным волнам (модам), получены эффективные интегральные формулы для определения возвышения поверхности жидкости. В результате упрощения указанных интегральных представлений с помощью системы Mathematica выведены явные аналитические формулы для решения в случае длинных волн. Полученные аналитические формулы позволяют значительно сократить время прогнозирования распространения волн цунами.

Выполнены расчеты зависимостей возвышения поверхности жидкости от расстояния, т.н. волновых профилей, для двух типов зависимостей поведения источника от времени при различных параметрах источника. Показано, что длительность и форма временной зависимости источника оказывают существенное влияние на проявление дисперсионных эффектов при распространении волн. При этом ширина головного гребня волны не зависит значительным образом от времени действия источника, а определяется в основном глубиной его залегания.

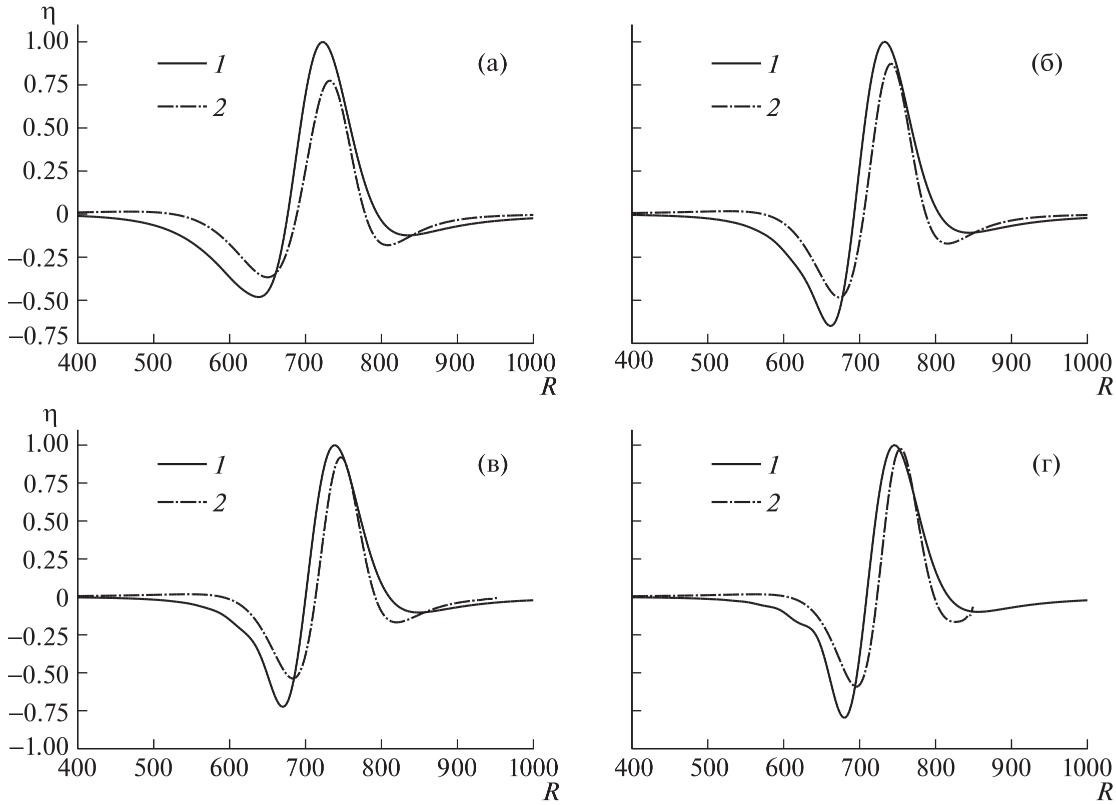

Рис. 7. Поведение волновых профилей в зависимости от длительности действия источника, зависящего от времени как $\tau e^{-\tau}$, глубина залегания $z_0 = 83$ км, (а–г): $\lambda = 0.2, 0.35, 0.5, 1.0$ Линия *1* – получена по (2.11), *2* – по (2.16).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 17-01-00644, номер госзадания АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доброхотов С.Ю., Ильясов Х.Х., Толстова О.Л.* Простые решения линейной задачи о возбуждении длинных волн на поверхности. жидкости источником в упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 126–139.
2. *Подъяпольский Г.С.* Возбуждение цунами землетрясением. //Методы расчета возникновения и распространения цунами. М.: Наука, 1978. С. 30–87.
3. *Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B.* Asymptotic solutions of 2D wave equations with variable velocity and localized right-hand side // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17. № 1. P. 66–76.
4. *Dobrokhotov S., Minenkov D., Nazaikinskii V., Tirozzi B.* Functions of Noncommuting Operators in an Asymtotic Problem for 2D Wave Equation with Variable Velocity and Localized Right-hand Size // Oper. Theory: Adv. Appl. 2013. V. 228. P. 95–125.
5. *Доброхотов С.Ю., Толстова О.Л., Чудинович И.Ю.* Волны в жидкости на упругом основании. Теорема существования и точные решения // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 3. С. 33–55.
6. *Гринив Р.О., Доброхотов С.Ю., Шкаликов А.А.* Операторная модель задачи о колебаниях жидкости на упругом основании //Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 57–70.
7. *Доброхотов С.Ю., Ильясов Х.Х., Секерж-Зенькович С.Я., Толстова О.Л.* Простые решения задачи о волнах на поверхности жидкости в рамках линейной гидроупругой модели // ДАН. 2019. Т. 18. № 4. С. 370–375.
8. *Dobrokhotov S.Yu., Tolstova O.L., Sekerzh-Zenkovich S.Ya., Vargas C.A.* Influence of the elastic base of a basin on the propagation of waves on the water surface //Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 4. P. 459–469.

9. *Федорюк М.В.* Асимптотика, Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
10. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
11. *Kanamori H.* Mechanism of tsunami earthquakes // Phys. Earth Planet. Inter. 1972. V. 6. № 5. P. 349–359.
12. *Yamashita T., Sato R.* Generation of tsunami by a fault model // J. Phys. Earth. 1974. № 22. P. 415–440.
13. *Sabatier P.C.* On water waves produced by ground motions // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 27–58.
14. *Гусяков В.К., Чубаров Л.Б.* Численное моделирование возбуждения и распространения цунами в прибрежной зоне // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 11. С. 53–64.
15. *Фрагела А.К.* К задаче о движении идеальной жидкости в неограниченном упругом бассейне // Дифф. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1417–1426.
16. *Зволинский Н.В., Карпов И.И., Никитин И.С., Секерж-Зенькович С.Я.* Возбуждение волн цунами и Рэлея гармоническим двумерным центром вращения // Изв. РАН. Физика Земли. 1994. № 9. С. 29–33.
17. *Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Analytical Study of a Potential Model of Tsunami with a Simple Source of Piston Type. 1. Exact Solution. Creation of Tsunami // Russ. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 385–393.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 102–114

УДК 533.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

© 2022 г. В. Г. Лущик[a,]*, М. С. Макарова[a,]**

[a] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

**E-mail: vgl_41@mail.ru*

***E-mail: mariia.makarova@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.09.2021 г.
После доработки 15.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

На основе трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности проведено численное моделирование турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления. Исследование проведено как для умеренного, так и для сильного градиента давления, соответствующего предотрывному пограничному слою. Результаты расчетов средней скорости и интенсивности турбулентности свидетельствуют о существенном влиянии положительного градиента давления и согласуются с известными экспериментальными данным в широком диапазоне определяющих параметров.

Ключевые слова: положительный градиент давления, параметр градиента давления, параметр ускорения (торможения), число Рейнольдса, построенное по динамической скорости, отрыв

DOI: 10.31857/S0568528122030112

Турбулентные пограничные слои, развивающиеся в присутствии положительного градиента давления (ПГД), имеют место во многих прикладных задачах, например, при обтекании затупленных тел, в диффузорах и в ряде других устройств. Таким образом, понимание влияния ПГД на характеристики пограничного слоя имеет решающее значение для широкого круга инженерных приложений. По этой причине пограничные слои с ПГД были предметом многочисленных экспериментальных и численных исследований, начиная с середины двадцатого века. В [1] перечислены некоторые параметры, оказывающие влияние на характеристики потоков с ПГД. Однако существенным барьером для прогресса в понимании влияния градиента давления на пограничные слои являются большое пространство параметров и неопределенность в отношении важности каждого из них. В результате чего, несмотря на большое количество исследований, прогресс в сокращении пространства параметров для целей прогнозирования и контроля пограничного слоя с ПГД, как отмечено в [1], был невелик. Цель параметрического исследования [1] состояла в том, чтобы экспериментально исследовать влияние трех известных параметров на турбулентные пограничные слои с ПГД:

1. Параметр градиента давления $\beta = (\delta^* \mathrm{d}P/\mathrm{d}x)/\tau_w$, где δ^* – толщина вытеснения, P – статическое давление, x – координата в направлении потока, τ_w – напряжение сдвига на стенке. Этот параметр был предложен Клаузером [2], согласно которому он представляет отношение силы градиента давления $(\delta^* \cdot \mathrm{d}P/\mathrm{d}x)$ к "единственной другой существенной силе в слое", трению на стенке τ_w. Это наиболее часто обсуждаемый в литературе параметр градиента давления.

2. Число Рейнольдса, построенное по динамической скорости $\mathrm{Re}_\tau = \delta \cdot u^*/\nu$, где δ – толщина пограничного слоя, $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамическая скорость, ρ – плотность, а ν – кинематическая вязкость газа. Этот параметр используется также для потоков с нулевым градиентом давления.

3. Параметр ускорения (торможения) $K = (\nu \mathrm{d}U_1/\mathrm{d}x)/U_1^2$, где U_1 – локальная внешняя скорость. Этот параметр характеризует равновесные пограничные слои. Для развивающегося пограничного слоя с ПГД из анализа известных литературных источников важность параметра K не ясна.

Как следует из работы [3], существуют также и другие параметры, одним из которых является фактор следа [4, 5]. Однако этот параметр основан на предпосылке, что существует универсальный логарифмический закон стенки, который не всегда имеет место.

Целью настоящей работы является численное моделирование турбулентного пограничного слоя с ПГД как для умеренного градиента давления, экспериментально исследованного в [1], так и для увеличенного, вплоть до предотрывного, градиента давления с расширением диапазона определяющих параметров β, K, Re_τ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения неразрывности и движения, описывающие течение несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластине, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho\tau\right) \tag{1.2}$$

здесь x — направление вдоль пластины, y — координата, отсчитываемая по нормали к пластине, u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, P — давление, $\rho\tau = -\rho\langle u'v'\rangle$ — турбулентное трение, ρ — плотность, η — динамическая вязкость.

Для вычисления величины турбулентного трения, входящей в уравнение движения (1.2), используется трехпараметрическая модель турбулентности [6, 7], в которой уравнения переноса записываются для энергии турбулентности $E = 0.5\sum\langle u_i'^2\rangle$ величины напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v'\rangle$ и параметра $\omega = E/L^2$ (L — поперечный интегральный масштаб турбулентности). Данная модель прошла всестороннюю проверку в широком классе задач пограничного слоя, результаты которой представлены в работах [6–13].

Опишем граничные условия на стенке и на внешней границе пограничного слоя.

Граничные условия на стенке ($y = 0$):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \tau = 0 \tag{1.3}$$

Граничное условие $\partial E/\partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_w(x)$, которая заранее неизвестна.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя ($y = \delta(x)$):

$$\frac{dP}{dx} = f(x) \quad \text{либо } u = U_1(x), \quad E = E_1(x), \quad \omega = \omega_1(x), \quad \tau = 0 \tag{1.4}$$

Здесь U_1 — величина локальной внешней скорости, которая определяется заданным продольным градиентом давления dP/dx, а функции $E_1(x)$ и $\omega_1(x)$ описывают вырождение турбулентности в этом течении. Величина $\delta(x)$ выбирается из условия равенства расстоянию от стенки при значении скорости потока, равной 99% от локальной внешней скорости. При этом ширина области расчета (по поперечной координате) составляет 1.1δ на входе и увеличивается по потоку с ростом δ.

В начальном ($x = 0$) сечении профиль скорости $u(y)$ определялся из автомодельного решения Блазиуса, функции $E_0(y) = \mathrm{const}$, $\tau_0(y) = 0$, $\omega_0(y) = \mathrm{const}$. Начальный масштаб турбулентности L_0 во внешнем потоке принимался таким $\mathrm{Re}_L = L_0(\rho u/\eta)_1 = (0.6–1.8) \times 10^4$), чтобы интенсивность турбулентности внешнего потока $e = \sqrt{E}/U_1$, уменьшающаяся вследствие вырождения ее на расчетной длине, не очень отличалась от начальной величины $e_0 = \sqrt{E_0}/U_1 = 0.03$. При этом число Рейнольдса турбулентности во внешнем потоке $\mathrm{Re}_t = \sqrt{E_0}(\rho u/\eta)_1$ составляло $(0.2–0.6) \times 10^3$ при локальной внешней скорости $U_1 = 10–30$ м/с.

Система уравнений (1.1), (1.2) и модели турбулентности [6] с граничными условиями (1.3), (1.4) решались численно методом прогонки с итерациями (см. в [6]). Расчеты проводились на неравномерной сетке. Шаг по координате y был достаточно малым у стенки (так, чтобы в вязком подслое находилось не менее 50 точек) и увеличивался по мере приближения к границе пограничного слоя. Шаг по продольной координате был также достаточно мал в сечениях, близких к входному, и увеличивался по мере продвижения вниз по потоку, что позволило проводить расчеты даже при малом (~1%) уровне турбулентности на входе.

Расчеты проводились в следующей постановке. Плоская пластина обтекалась потоком воздуха при атмосферном давлении и температуре $T = 300$ K. На длине пластины, достаточной для формирования развитого турбулентного слоя, градиент давления принимался нулевым ($dP/dx = 0$), так что локальная внешняя скорость U_1 оставалась постоянной. Далее следовал участок с заданным градиентом давления $dP/dx = f(x)$, в соответствии с которым изменялась локальная внешняя скорость $U_1(x)$.

Параметрами задачи являются: параметр ускорения (торможения) внешнего потока K, параметр градиента давления β, число Рейнольдса, построенное по динамической скорости, Re_τ, а также дополнительный параметр $K\cdot\mathrm{Re}^{**}$ ($\mathrm{Re}^{**} = \delta^{**}U_1/\nu$ – число Рейнольдса, определенное по толщине потери импульса δ^{**}), использованный в [14] для определения условий отрыва пограничного слоя.

Ниже представлены результаты численного исследования пограничного слоя с умеренным и предотрывным градиентом давления и сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными.

2. УМЕРЕННЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

Анализ влияния положительного градиента давления проведен, как и в [1], для случая слабого градиента давления $\beta = 1.9$ в сравнении со случаем нулевого градиента давления $\beta = 0$ при близких значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\tau \sim 2800$.

На рис. 1а приведены расчетные и экспериментальные [1] профили скорости для двух упомянутых выше случаев. Как видно из рис. 1а, средняя скорость в области следа ($y/\delta > 0.15$, $y^+ > 400$) возрастает. В случае положительного градиента давления ($\beta = 1.9$, линии, точки *2*) это возрастание более существенно, чем при нулевом градиенте давления ($\beta = 0$, линии, точки *1*). При этом “логарифмический” участок во “внутренней” области слоя профиля скорости $U^+(y^+)$ как в расчете (линии), так и в эксперименте [1] (точки) отличается от логарифмического закона (2.1) с широко используемыми в литературе значениями констант $\kappa = 0.4$ и $\mathrm{A} = 5.0$ (линия *3*).

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + \mathrm{A} \tag{2.1}$$

Следует отметить, что значения постоянных κ и A, как следует из обзора [15], характеризуются большим разбросом. Так, согласно [15] для постоянной Кармана κ в литературе встречаются значения от $\kappa = 0.35$ до $\kappa = 0.47$. Разброс в предлагавшихся значениях постоянной A еще больше, чем разброс в значениях κ. Как следует из [15] для постоянной A, в литературе встречаются значения от от $\mathrm{A} = 5$ до $\mathrm{A} = 5.6$.

В настоящей статье не ставится задача подбора констант κ и A в логарифмическом законе (2.1), применительно к аппроксимации полученных результатов численного исследования для профилей скорости в пограничном слое как с нулевым, так и с положительным градиентом давления. Тем более, что как отмечено в [1], экспериментальные данные в пограничном слое с ПГД не всегда описываются логарифмическим законом. Поэтому на рис. 1а, в, д для профилей скорости в универсальных координатах логарифмический закон (2.1) нанесен для иллюстрации степени близости полученных результатов к этому закону.

На рис. 1б представлены расчетные (кривые) профили интенсивности турбулентности $E^+ = E/u_*^2$ и экспериментальные [1] профили интенсивности продольной составляющей пульсационной скорости $\langle u'^2\rangle/u_*^2$ (точки). Как видно, в основной части пограничного слоя ($y^+ > 200$, что соответствует значению $y/\delta > 0.1$) расчетные и экспериментальные профили интенсивности существенно возрастают и согласуются, в отличие от пристеночной области, где имеет место существенное отличие результатов. Влияние положительного градиента давления как в расчете, так и в эксперименте, существенное в основной части пограничного слоя, в пристеночной области довольно слабое. Что касается полученного в эксперименте [1] пика интенсивности турбулентности в пристеночной области, то это обусловлено существенной разностью значений $E^+ = E/u_*^2$ и $\langle u'^2\rangle/u_*^2$. Так, согласно экспериментальным данным Клебанова и Лауфера, приведенным в [16], в области

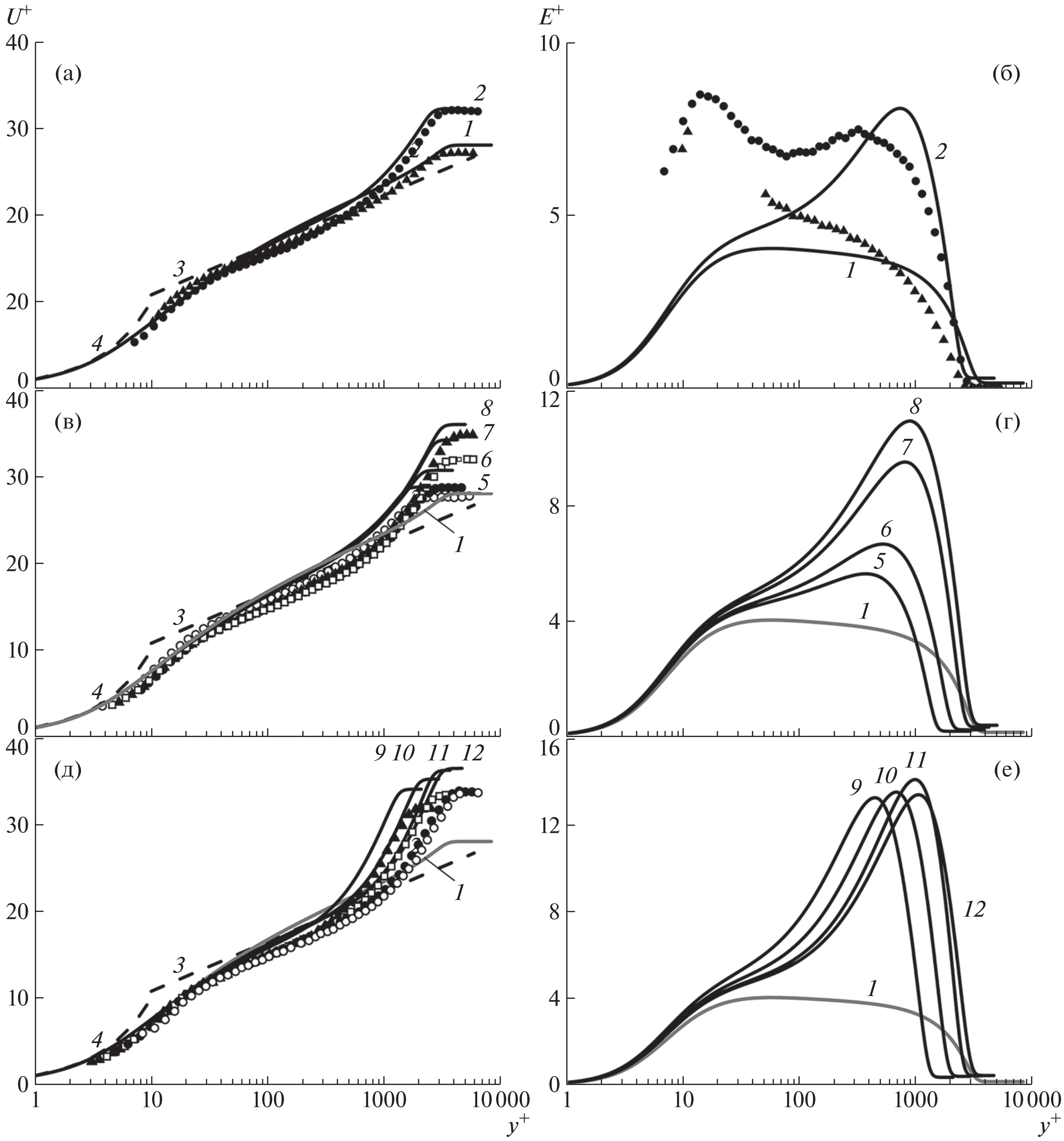

Рис. 1. Профили скорости и интенсивности турбулентности в пограничном слое с нулевым и положительным градиентом давления для числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\tau \sim 2800$ (а, б), параметра торможения $K = -0.15 \times 10^{-6}$ (в, г) и параметра градиента давления $\beta = 4$ (д, е), где линии – расчет, точки – экспериментальные данные [1]: линии, точки *1* – нулевой градиент давления $\beta = 0$ ($K = 0$), *2* – слабый положительный градиент давления $\beta = 1.9$, линии *3* – $U^+ = 2.5\ln y^+ + 5$, *4* – $U^+ = y^+$ соответственно, линии, точки *5*–*12* – см. табл. 1.

максимального значения интенсивности продольной составляющей пульсационной скорости $\langle u'^2\rangle/u_*^2 \approx 8$ (при $y^+ = 20$) интенсивности двух поперечных составляющей пульсационной скорости существенно меньше: $\langle v'^2\rangle > /u_*^2 \approx 2$, $\langle w'^2\rangle/u_*^2 \approx 0.5$. При этом интенсивность энергии турбулентности $E = 0.5\sum u_i'^2$ составит $E^+ = E/u_*^2 \approx 5$, что в 1.6 раза меньше величины $\langle u'^2\rangle/u_*^2 \approx 8$, полученной в эксперименте [1] и близко к расчетному значению $E^+ \approx 4$.

Таблица 1. Расчетные и экспериментальные параметры пограничного слоя с положительным градиентом давления

Рис. №	Линии, точки	Расчет (линии)				Эксперимент [1] (точки)			
		$K = -0.15 \times 10^{-6}$				$K = -(0.151–0.153) \times 10^{-6}$			
		β	Re**	Re*	Re_τ	β	Re**	Re*	Re_τ
1вг	*5*	1.08	6048	8639	1641	0.96	6050	8500	1910
	6	1.80	8895	12770	2254	1.67	8860	12900	2500
	7	3.69	14030	20970	2902	3.22	14080	21310	3280
	8	5.01	17010	25820	3328	4.75	17070	26460	3630
		β = 4				β = 4.39–4.53			
		$-K$, 10^{-6}	Re**	Re*	Re_τ	$-K$, 10^{-6}	Re**	Re*	Re_τ
1де	*9*	0.270	7655	12600	1458	0.347	7620	12290	1770
	10	0.171	11600	18640	2144	0.218	11640	18410	2500
	11	0.117	16250	25800	2872	0.159	16260	25100	3510
	12	0.103	18500	28900	3365	0.146	18500	28440	3880

Таблица 2. Расчетные и экспериментальные параметры пограничного слоя в предотрывном сечении

Параметр	Расчет					Эксперимент [32]
$-K$, 10^{-6}	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	0.29
β	696	233	129	525	94	–
Re_τ	541	575	534	215	389	–
Re**, 10^3	19.64	11.78	8.15	6.297	4.957	17.7
C_f, 10^{-3}	0.044	0.129	0.221	0.056	0.286	0.226
H	2.59	2.54	2.50	2.59	2.47	2.62
H^*	0.443	0.418	0.401	0.403	0.376	0.423
$\sqrt{(\alpha \cdot \delta)}/u^*$	39.6	23.6	18.0	36.1	15.8	16.6
$K \cdot$ Re**, 10^{-3}	5.954	5.901	5.712	5.672	5.456	5.06
Рис. №	7–9					7, 8
Линии, точки	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

Ниже представлены результаты численного исследования влияния параметров ускорения (торможения) потока K и градиента давления β на профили скорости и интенсивности турбулентности в пограничном слое с положительным градиентом давления, расчетные и экспериментальные параметры которого приведены в табл. 1.

Следует отметить, что постоянные значения параметров, приведенных в табл. 1 и 2, в каждом случае обеспечиваются подбором подходящего распределения внешней скорости вдоль потока, заимствованного из привлекаемых экспериментальных работ.

2.1. Параметр ускорения (торможения) потока K

Как указано в [1], существует ряд параметров, которые используются для количественной оценки влияния градиента давления. Для сравнения рассмотрен случай, когда параметр K держится постоянным. На рис. 1в представлены профили скорости для $K = -0.15 \times 10^{-6}$ в диапазоне значений параметров $\beta = 1–5$ и $Re_\tau = 1600–3400$, близком к полученным в эксперименте [1] (см. табл. 1).

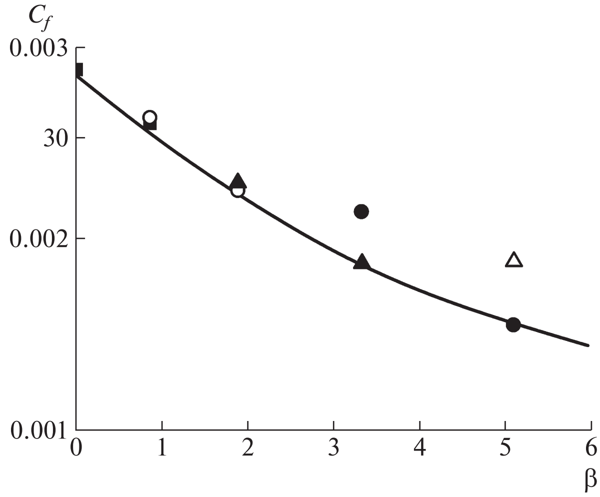

Рис. 2. Зависимость коэффициента трения C_f от параметра градиента давления β для числа Рейнольдса Re_τ = = 1900: линия – расчет, точки – эксперимент [1].

Как видно из рис. 1в, средняя скорость в области следа ($y/\delta > 0.15$, $y^+ > 400$) возрастает. В случае положительного градиента давления ($K = -0.15 \times 10^{-6}$, линии, точки *5–8*) это возрастание более существенно, чем при нулевом градиенте давления ($K = 0$, линия *1*). При этом "логарифмический" участок во "внутренней" области слоя профиля скорости $U^+(y^+)$ как в расчете (линии), так и в эксперименте [1] (точки) отличается от логарифмического закона (2.1) с константами κ = 0.4 и A = 5.0 (линия *3*).

Расчетные профили интенсивности турбулентности $E^+(y^+)$ (линии *5–8*, рис. 1г) в основной части пограничного слоя ($y^+ > 200$), как и экспериментальные (см. в [1]), существенно возрастают с ростом числа Рейнольдса Re_τ и параметра β.

2.2. Параметр градиента давления β

Рассмотрим влияние числа Рейнольдса Re_τ на пограничный слой с положительным градиентом давления при постоянной величине β. На рис. 1д приведены расчетные и экспериментальные (линии, точки *9–12*) профили средней скорости при β = 4 для ряда значений Re_τ (см. табл. 1). Как видно из рис. 1д, средняя скорость в области следа ($y/\delta > 0.15$, $y^+ > 400$) с ростом числа Рейнольдса Re_τ (см. табл. 1) возрастает, но в меньшей степени, чем в случае постоянства параметра K (см. рис. 1в). При этом профиль скорости $U^+(y^+)$ как в расчете (линии), так и в эксперименте [1] (точки) отличается от логарифмического закона (2.1) с константами κ = 0.4 и A = 5.0 (линия *3*).

Следует отметить, что некоторое отличие расчетных и экспериментальных профилей скорости в основной части пограничного слоя (см. рис. 1в и 1д) является следствием несовпадения значений параметров β, K, Re_τ, Re**, Re* (см. табл. 1) в расчете и в эксперименте, полного совпадения которых достичь, по-видимому, невозможно.

На рис. 1е приведены профили интенсивности турбулентности для β = 4. Как видно, максимальные значения интенсивности турбулентности E^+ во внешней части пограничного слоя (при $y^+ > 400$, $y/\delta > 0.15$) как в расчете, так и в эксперименте [1] слабо зависят от числа Рейнольдса Re_τ (см. табл. 1) в диапазоне изменения $\mathrm{Re}_\tau \sim 1500–3000$. В вязком подслое (при $y^+ \le 10$) интенсивность турбулентности как в расчете, так и в эксперименте [1] практически не зависит от числа Рейнольдса Re_τ.

Зависимость коэффициента трения C_f от параметра градиента давления β представлена на рис. 2. Как видно, коэффициент трения как в расчете, так и в эксперименте [1] с ростом параметра градиента давления β существенно уменьшается, что свидетельствует об уменьшении градиента продольной скорости на стенке, т.е. о тенденции пограничного слоя к отрыву.

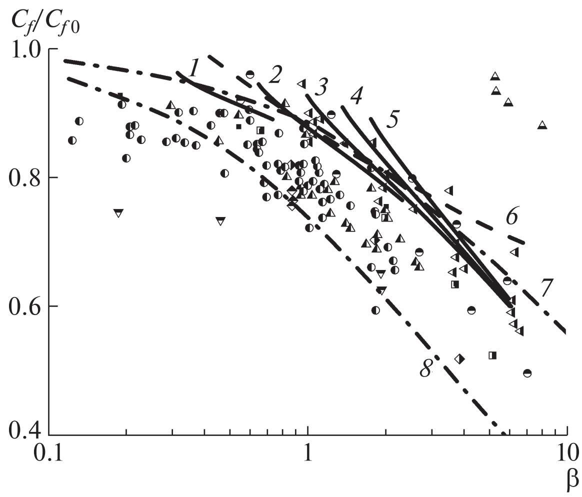

Рис. 3. Расчетная зависимость относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра градиента давления β для ряда значений параметра K: линии *1–5* – K, 10^{-6} = –0.1, –0.2, –0.3, –0.4, –0.5; линии *6*, *7*, *8* – данные [17] для $\mathrm{Re}^{**} = 10^4$, [18] для $\mathrm{Re}^{**} = 10^9$ и $\mathrm{Re}^{**} = 10^3$, точки – экспериментальные данные [17, 19–29].

Расчетная зависимость относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра градиента давления β для ряда значений параметра K представлена на рис. 3. Там же приведены известные в литературе на сегодняшний день экспериментальные и численные результаты [17–29]. Как видно, расслоение полученных зависимостей $C_f/C_{f0}(\beta)$ по параметру торможения K с ростом величины K невелико, что свидетельствует о возможности обобщения полученных результатов по параметру β.

3. ПРЕДОТРЫВНЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

При некоторых условиях в пограничном слое с положительным градиентом давления возможно наступление отрыва. В [30] приведена сводка наиболее распространенных безразмерных локальных критериев отрыва пограничного слоя в виде

$$-K \cdot \mathrm{Re}^{**} = \frac{\delta^{**}}{\rho U_1^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \geq B \cdot \left(\mathrm{Re}^{**}\right)^{-1/m} \tag{3.1}$$

где для турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости

$$\begin{gathered} 1 - m = 4; \quad B = 0.06 \text{ (Прандтль-Бури)} \\ 2 - m = 6; \quad B = 0.02 \text{ (Л.Г. Лойцянский)} \\ 3 - 1/m = 0; \quad B = 0.005 \text{ (Г.М. Бам-Зеликович)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Значения m и B, приведенные выше, расположены в порядке возрастания чисел Рейнольдса, причем критерий Бам-Зеликовича [14] соответствует случаю бесконечно больших чисел Рейнольдса.

Как отмечено в [30], неравенства типа (3.1) следует рассматривать как необходимые условия безотрывного обтекания, не применимые в случае возникновения отрывного течения.

С этой точки зрения была выполнена обработка результатов расчета для ряда значений параметра торможения K. В процессе расчета в некотором сечении величина $\partial u/\partial y$ на стенке становится равной нулю. Это сечение в дальнейшем будем называть сечением счетного отрыва, за которым имеет место возникновение области отрицательных значений продольной скорости в непосредственной близости у стенки.

Отметим, что в результате расчетов, упомянутых в [31], для трех значений параметра K в предотрывных сечениях получено значение величины параметра $K \cdot \mathrm{Re}^{**} \sim -5 \times 10^{-3}$, что согласуется с условием возникновения отрыва при течении с положительным градиентом давления, полученным в [14] в виде неравенства $-K \cdot \mathrm{Re}^{**} \geq 0.005$.

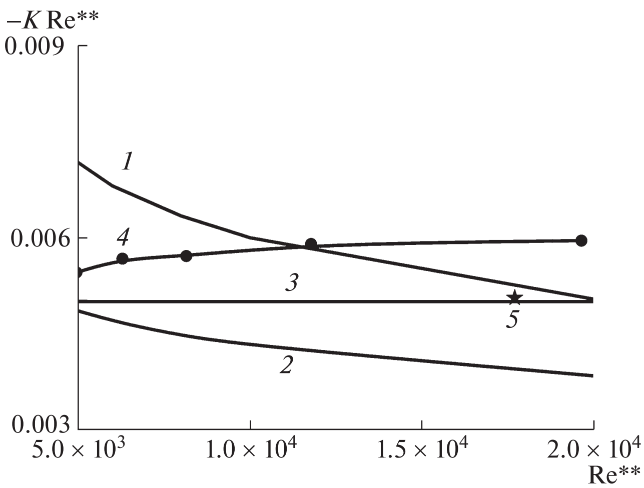

Рис. 4. К определению условий безотрывного течения в пограничном слое с положительным градиентом давления: линии *1*, *2*, *3* – зависимости (3.1) для значений m и B (3.2); линия, точки *4* – расчетная зависимость, точка *5* – экспериментальные данные [32] для предотрывного течения.

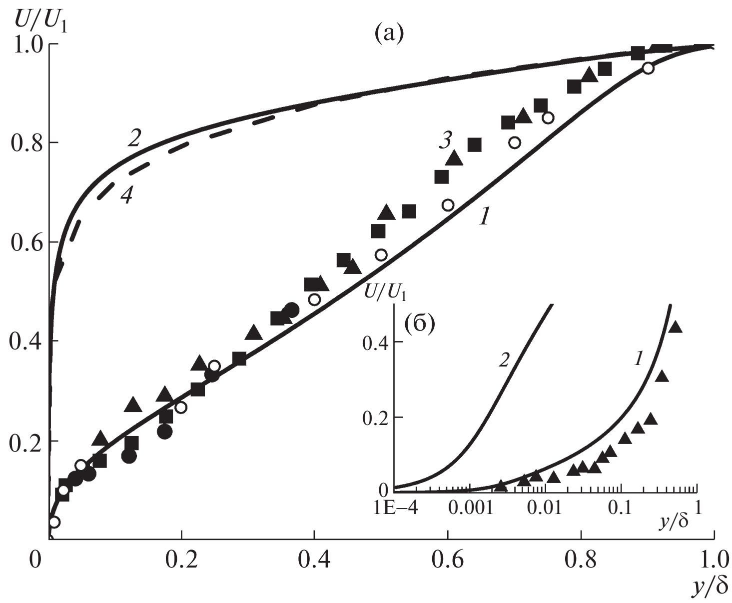

Рис. 5. Профили скорости в основной части (а) и в пристеночной области (б) пограничного слоя с положительным градиентом давления ($K = -0.3 \times 10^{-6}$, линии *1*) и в безградиентном течении ($K = 0$, линии *2*), точки *3* – экспериментальные данные [32], линия *4* – $u/U_1 = (y/\delta)^{1/7}$.

В табл. 2 для пяти расчетных значений параметра K приведены значения параметров β, Re_τ и ряда других величин в предотрывных сечениях. Там же представлены экспериментальные данные для предотрывного сечения работы [32] и величины локального критерия отрыва $K \cdot \mathrm{Re}^{**}$.

На рис. 4 представлена зависимость параметра $K \cdot \mathrm{Re}^{**}$ от числа Рейнольдса Re^{**}, определенного по толщине потери импульса δ^{**}.

Профиль скорости для безградиентного ($K = 0$) течения (рис. 5а, линия *2*) близок к профилю скорости $u/U_1 = (y/\delta)^{1/7}$ (точки *4*). В предотрывной области профиль скорости (рис. 5а, линия *1*) становится менее заполненным, приближаясь к линейному, коэффициент трения уменьшается, а энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига (рис. 6а,б) существенно возрастают по сравнению со случаем безградиентного течения (линии *2*). Как видно из рис. 5, 6, резуль-

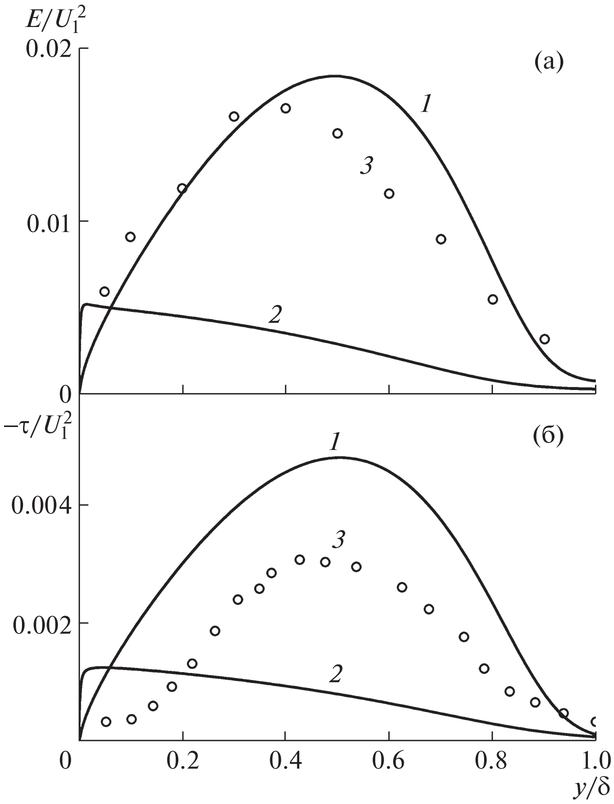

Рис. 6. Профили энергии турбулентности (а) и турбулентного напряжения сдвига (б) в пограничном слое с положительным градиентом давления ($K = -0.3 \times 10^{-6}$, линии *1*) и в безградиентном течении ($K = 0$, линии *2*), точки *3* – экспериментальные данные [32].

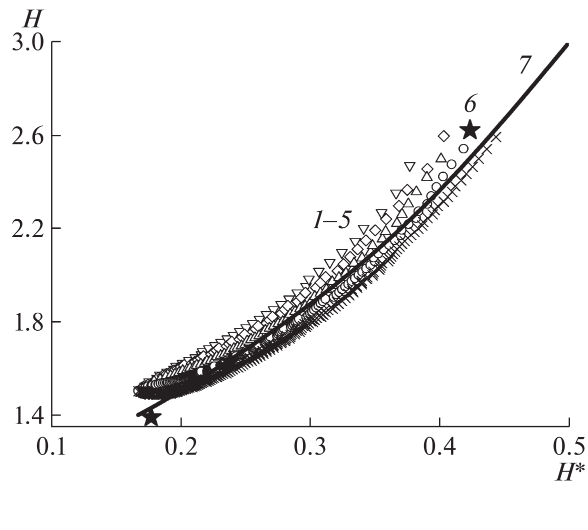

Рис. 7. Зависимость между интегральными характеристиками формы профиля скорости в пограничном слое с положительным градиентом давления: точки *1*–*5* – расчет для $K = -(0.3–1.1) \times 10^{-6}$ (см. табл. 2), точки *6* – экспериментальные данные [32], линия *7* – зависимость (3.3).

таты численного исследования как в основной части, так и в пристеночной области (рис. 5б. линия *1*) пограничного слоя с ПГД согласуются с экспериментальными данными [32].

В литературе по исследованию турбулентного слоя с положительным градиентом давления большое внимание уделено установлению универсальных зависимостей для описания профилей

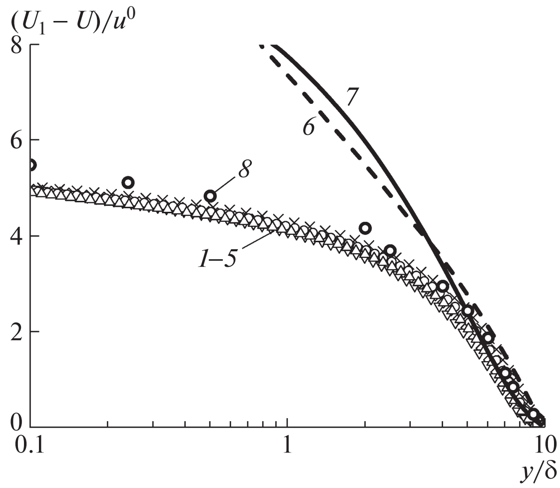

Рис. 8. Закон дефекта скорости в пограничном слое с положительным и нулевым градиентом давления: точки *1–5* – расчет для $K = -(0.3–1.1) \times 10^{-6}$ (см. табл. 2), линия *6* – расчет для $K = 0$; линия *7* – аппроксимационная зависимость (3.5); точки *8* – экспериментальные данные [32].

скорости. С этой целью (см., например, [14]) проводится обработка профилей скорости и определение зависимости между относительными интегральными толщинами $H = \delta^*/\delta^{**}$ и $H^* = \delta^*/\delta$. На рис. 7 представлена зависимость $H(H^*)$, полученная в расчетах предотрывного турбулентного слоя для значения параметра торможения $K = -0.3 \times 10^{-6}$ (точки *1–5*). Там же для сравнения нанесены экспериментальные данные [32] (точки *6*).

Рассмотрим, какие из известных однопараметрических зависимостей для профиля скорости соответствуют полученным результатам. Степенной профиль скорости $u/U_1 = (y/\delta)^{1/n}$ дает зависимость

$$H = (1 + H^*)/(1 - H^*) \tag{3.3}$$

представленную на рис. 7 линией *7*. Как видно, эта зависимость достаточно удовлетворительно описывает как результаты расчета (точки *1–5*), так и экспериментальные данные [32] (точки *6*), что достигается за счет переменности показателя степени n, который зависит от формпараметра H как $n = 2/(H - 1)$. Эта зависимость описывает деформацию профиля скорости от заполненного, соответствующего безградиентному течению с $n = 7$, $H \approx 1.3$ до линейного с $n = 1$, $H = 3$, соответствующего предотрывному.

Представление дефекта скорости, дающего хорошее описание профиля скорости во внешней части пограничного слоя, может быть записано в общем виде как

$$\frac{U_1 - u}{u^o} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) = c\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^s \tag{3.4}$$

Здесь u^o – некоторая характерная скорость, c и s – константы.

В пограничном слое с положительным градиентом давления $dP/dx > 0$ к списку размерных величин, влияющих на течение, согласно [33] из соображений размерности и подобия следует добавить еще одну величину $\alpha = \rho^{-1}dP/dx$. Следует отметить, что использованная в [33] комбинация $(\alpha \cdot \delta)^{1/2}$, где δ – толщина пограничного слоя, представляет собой величину размерности скорости. Она может быть интерпретирована как некоторая характерная скорость u^o, которая в случае безградиентного течения будет соответствовать динамической скорости u^*.

Таким образом, в рассматриваемом случае появляется дополнительный безразмерный параметр $(\alpha \cdot \delta)^{1/2}/u^*$, введенный в [33], который характеризует степень воздействия градиента давления на пограничный слой. При этом согласно [33] для “закона дефекта скорости” в случае градиентного течения может быть использовано представление (3.4), где в качестве характерной скорости принята величина $u^o = (\alpha \cdot \delta)^{1/2}$, а $\Phi(y/\delta)$ при $(\alpha \cdot \delta)^{1/2}/u^* \gg 1$ полагается не зависящей

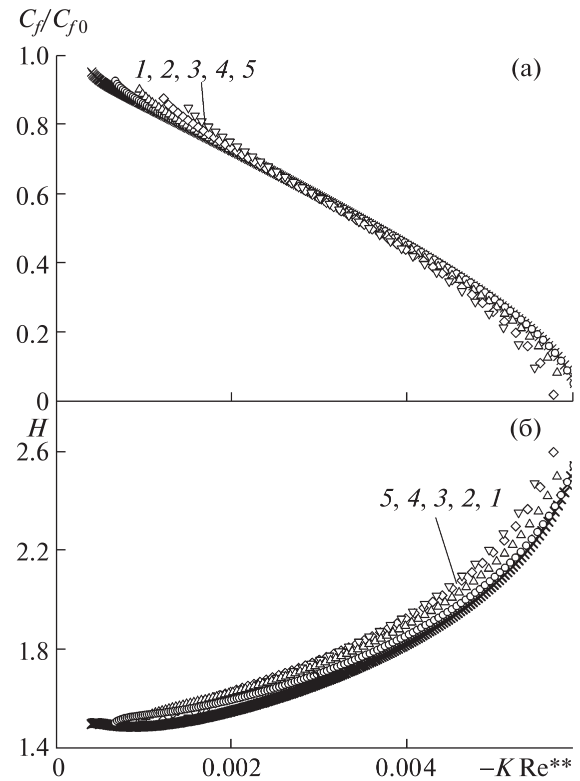

Рис. 9. Зависимость относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} (а) и формпараметра пограничного слоя H (б) от параметра $K \cdot$ Re** для пяти значений параметра торможения K (линии, точки *1–5*, см. табл. 2).

от $(\alpha \cdot \delta)^{1/2}/u^*$ и для нее принимается зависимость, используемая обычно для безградиентного пограничного слоя вида

$$\Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) = 9.6\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{3.5}$$

На рис. 8 представлена зависимость (3.5) (линия *7*) и результаты расчета для безградиентного течения (линия 6), когда $u^o = u^*$ и для градиентного течения (точки *1–5*), когда $u^o = (\alpha \cdot \delta)^{1/2}$ при условии $(\alpha \cdot \delta)^{1/2}/u^* > 10$ для пяти предотрывных течений (см. табл. 2). Там же нанесены экспериментальные данные [16] (точки *8*), отвечающие указанным выше условиям (см. табл. 2). Как видно из рис. 8, представление (3.5) близко к универсальному при $y/\delta \geq 0.5$. При $y/\delta \leq 0.5$ отличие результатов (как расчетных, так и экспериментальных) для градиентного течения от безградиентного пограничного слоя становится существенным и представление (3.5) нельзя использовать для пограничного слоя с положительным градиентом давления. Однако для градиентного течения полученную в широком диапазоне параметра торможения K зависимость (3.4) при $u^o = (\alpha \cdot \delta)^{1/2}$ можно считать универсальной.

Что касается зависимости величины относительного коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра градиента давления $\beta = (\delta \cdot dP/dx)/\tau_w$, то ввиду того, что при отрыве пограничного слоя трение на стенке $\tau_w \to 0$, параметр $\beta \to \infty$ (см. табл. 2), построение зависимости $C_f/C_{f0}(\beta)$ теряет смысл. Более показательной представляется зависимость величины относительного коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра отрыва пограничного слоя $K \cdot$ Re**. На рис. 9а представлена полученная в расчетах для ряда значений параметра торможения потока K зависимость $C_f/C_{f0}(K \cdot \text{Re}^{**})$. Как видно, такое обобщение результатов расчета в широком диапазоне параметра K представляется удачным и позволяет оценить величину параметра отрыва пограничного слоя в диапазоне $K \cdot \text{Re}^{**} = -(5.5–6) \times 10^{-3}$, что близко к величине $K \times \text{Re}^{**} = -5 \times 10^{-3}$, полученной в работе [14] и в эксперименте [32] (см. табл. 2).

Отметим также, что в предотрывных сечениях величина формпараметра H (см рис. 9б и табл. 2) близка к полученному в эксперименте [32] значению $H = 2.6$ и стремится к значению $H = 3$, отвечающему линейному профилю скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности проведено численное моделирование турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления. Моделирование проведено как для умеренного, так и для сильного градиента давления, соответствующего предотрывному пограничному слою.

Проведено сравнение результатов численного моделирования влияния параметров ускорения (торможения) потока K и градиента давления β на профили скорости и интенсивности турбулентности в пограничном слое с умеренным положительным градиентом давления с известными экспериментальными данными. Показано, что влияние положительного градиента давления как в расчете, так и в эксперименте существенно в основной части пограничного слоя и слабое в пристеночной области. Получена расчетная зависимость относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра градиента давления β для ряда значений параметра K, которая свидетельствует о возможности обобщения полученных результатов по параметру β.

При сильном градиенте давления в предотрывной области профиль скорости становится менее заполненным, приближаясь к линейному, коэффициент трения уменьшается, а энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига существенно возрастают по сравнению со случаем безградиентного течения. Результаты численного исследования согласуются с известными экспериментальными данными. Для градиентного течения в широком диапазоне параметра ускорения получена экспериментально подтвержденная расчетная зависимость для закона дефекта скорости, в котором вместо динамической скорости используется некоторая характерная скорость, содержащая величину градиента давления. Результаты расчета коэффициента трения в широком диапазоне параметра ускорения обобщаются зависимостью относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} от параметра отрыва пограничного слоя $K \cdot \mathrm{Re}^{**}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-79-10213).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monty J.P., Harun Z., Marusic I.* A parametric study of adverse gradient turbulent boundary layers // Int. J. Heat Fluid Flow. 2011. V. 32. P. 575–585.
2. *Clauser F.H.* Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients // J. Aeronautical Sci. 1954. V. 21. P. 91–108.
3. *Perry A.E., Marusic I., Jones M.B.* On the streamwise evolution of turbulent boundary layers in arbitrary pressure pradients // J. Fluid Mech. 2002. V. 461. P. 61–91.
4. *Coles D.* The law of the wake in the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 191–226.
5. *Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Rustandler P.W.* The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part 4. P. 741–773.
6. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
7. *Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S.* Study of effect of molecular Prandtl number, transpiration, and longitudinal pressure gradient on flow and heat transfer characteristics in boundary layers // Comp. Therm. Sci. 2019. V. 11. № 1–2. P. 41–49.
8. *Лущик В.Г., Макарова М.С., Решмин А.И.* Ламинаризация потока при течении с теплообменом в плоском канале с конфузором // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 1. С. 68–77.
9. *Лиознов Г.Л., Лущик В.Г., Макарова М.С., Якубенко А.Е.* Влияние турбулентности набегающего потока на течение и теплообмен в пограничном слое на пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 5. С. 40–42.
10. *Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Макарова М.С.* Численное исследование течения в трубе с отсосом газа через проницаемые стенки // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 3. С. 74–81.
11. *Makarova M.S., Lushchik V.G.* Numerical simulation of turbulent flow and heat transfer in tube under injection of gas through permeable walls // Journal of Physics: Conf. Ser. 2017. V. 891. no. 012066.
12. *Лущик В.Г., Макарова М.С.* Особенности теплообмена на проницаемой поверхности в сверхзвуковом потоке при вдуве инородного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 5. С. 61–64.

13. *Лущик В.Г., Макарова М.С., Решмин А.И.* Интенсификация теплообмена при турбулентном течении в плоском и круглом безотрывных диффузорах // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 2. С. 483–495.
14. *Бам-Зеликович Г.М.* Расчет отрыва пограничного слоя // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1954. № 12. С. 68–85.
15. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Мех. жид. газа. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
16. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
17. *Inoue M., Pullin D.I., Harun Z., Marusic I.* LES of the adverse-pressure gradient turbulent boundary layer // Int. J. Heat Fluid Flow. 2013. V. 44. P. 293–300.
18. *So R.M.C.* Pressure gradient effects on Reynolds analogy for constant property equilibrium turbulent boundary layers // Int. J. Heat Mass Transf. 1994. V. 37. P. 27–41.
19. *Kiselev N.A., Leontiev A.I., Vinogradov Yu.A., Zditovets A.G., Popovich S.S.* Heat transfer and skin-friction in a turbulent boundary layer under a non-equilibrium longitudinal adverse pressure gradient // Int. J. Heat Fluid Flow. 2021. V. 89. 108801. P. 1–16.
20. *Skote M., Henningson D.S.* Direct numerical simulation of adverse pressure gradient turbulent boundary layers // Fluid Mech. its Appl. 1998. V. 46. P. 171–174.
21. *Sanmiguel Vila C., Vinuesa R., Discetti S., et al.* Experimental realisation of near-equilibrium adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers // Exp. Therm. Fluid. Sci. 2020. V. 112. № 109975.
22. *Marušic I., Perry A.E.* A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 2. Further experimental support // J. Fluid Mech. 1995. V. 298. P. 389–407.
23. *Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W.* The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 741–773.
24. *Nagano Y., Tsuji T., Houra T.* Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient // Int J Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 563–572.
25. *Senthil S., Kitsios V., Sekimoto A., et al.* Analysis of the factors contributing to the skin friction coefficient in adverse pressure gradient turbulent boundary layers and their variation with the pressure gradient // Int. J. Heat Fluid Flow. 2020. V. 82. № 108531.
26. *Bobke A., Vinuesa R., Orlü R., Schlatter P.* History effects and near equilibrium in adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 2017. V. 820. P. 667–692.
27. *Skåre P.E., Krogstad P.Å.* A Turbulent Equilibrium Boundary Layer Near Separation // J. Fluid Mech. 1994. V. 272. P. 319–348.
28. *Cutler A.D., Johnston J.P.* The relaxation of a turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient // J. Fluid Mech. 1989. V. 200. P. 367–387.
29. *Bradshaw P., Ferriss D.H.* 1965 Nat. Phys. Lab. Aero Rept. no. 1145.
30. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения. М. Наука, 1979. 368 с.
31. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
32. *Simpson R.L., Strickland J.H., Barr P.W.* Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt. 3. P. 553–594.
33. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* Применение соображений подобия к расчету замедляющихся турбулентных пограничных слоев // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 52–55.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 115–134

УДК 533.6.011

ТЕРМОГАЗОДИНАМИКА МОДЕЛЬНОЙ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ ЭТИЛЕНА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С. Т. Суржиков[a,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**E-mail: surg@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Представлены результаты численного исследования термогазодинамики модельной камеры гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя со стабилизатором пламени этилена, выполненным в виде каверны несимметричной трапецеидальной формы. Изучены режимы сверхзвукового течения воздуха на входе в камеру сгорания с числом Маха 2.2 при давлении 0.416–1 атм и суммарного расхода этилена порядка 10 г/(с см) через две форсунки, расположенные в каверне. Использовалась двухмерная вычислительная модель, основанная на системе нестационарных уравнений Навье–Стокса, сохранения энергии, неразрывности смеси газов и отдельных химических компонент, а также системе уравнений химической кинетики. Расчет спектральных и интегральных радиационных тепловых потоков к стенкам камеры выполнялся с использованием уравнения переноса теплового излучения. Показано, что в рассмотренных расчетных случаях плотность конвективного теплового потока к стенкам камеры сгорания может достигать 20 Вт/см^2, а плотность интегральных радиационных тепловых потоков ~1 Вт/см^2.

Ключевые слова: термогазодинамика камер сгорания, сверхзвуковое горение, ГПВРД, конвективный и радиационный нагрев стенок камеры сгорания

DOI: 10.31857/S0568528122030148

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из главных проблем создания гиперзвуковых прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ГПВРД) является организация устойчивого горения компонентов горючего в сверхзвуковых потоках, обеспечение полноты сгорания и эффективности теплоотдачи к воздушному потоку на конечных расстояниях от форсунок впрыска горючего до выхода из камеры сгорания [1, 2].

Изучение закономерностей протекания процессов термогазодинамики и горения в камерах сгорания со сверхзвуковым потоком воздуха проводятся более 50 лет. Известно несколько схем организации горения в сверхзвуковых потоках, среди которых горение в кавернах на стенках камеры сгорания показало свою эффективность. В одном из первых комплексных исследований, посвященных экспериментальному и расчетному исследованию камер ГПВРД со стабилизатором пламени в виде каверны [3–6], была экспериментально показана возможность реализации до- и сверхзвукового режима горения в одной и той же камере сгорания при инжекции водорода из пилонов и с поверхности.

В работе [3] представлены результаты экспериментального исследования рабочих процессов в неохлаждаемой камере двухмодового ГПВРД с горением водорода при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Исследование выполнено на экспериментальном стенде, где обеспечивалась скорость входа в камеру сгорания M = 2, полная температура T_0 = 750–950 K и полное давление P_0 = 0.2–0.3 МПа. Вдув водорода осуществлялся из четырех рядов форсунок, расположенных на пилоне перед первым стабилизатором пламени, на нижней и верхней поверхностях камеры сгорания перед первым и вторым стабилизаторами пламени, а также между ними. Были выполнены измерения распределения давления на верхней и нижней поверхностях, а также плотности конвективных тепловых потоков, которые составили q_w ~ 20–100 Вт/см^2. В статье обсуждаются распределение термогазодинамических параметров по длине канала, полнота сгорания водородновоздушной смеси, особенности стабилизации горения, данные по теплообмену и условиям взаимодействия воздухозаборника и камеры сгорания.

В работе [4] выполнено расчетное исследование осесимметричного ГПВРД, аналогичного [3], предназначенного для работы при условиях полета, отвечающих $M \sim 6$. Важным результатом данной работы, кроме изучения термогазодинамической структуры потока, явилась расчетная оценка плотностей конвективных тепловых потоков на поверхностях конструктивных элементов. В конструкции камеры сгорания предусмотрены два стабилизатора пламени и три ряда форсунок для вдува водорода, два из которых — внутри стабилизаторов пламени трапецеидальной формы. Расчеты выполнены с использованием двух авторских компьютерных кодов, результаты которых показали разумное согласие. Исходные данные отвечали полету на высоте 26 км при $M = 6.5$. Предполагалось стехиометрическое соотношение реагирующей смеси воздуха и водорода. Вдув горючего производился при давлении 0.56 МПа и температуре 960 K. Отметим весьма высокий уровень конвективных тепловых потоков к стенке. На поверхности диффузора внешнего сжатия плотность конвективных тепловых потоков достигала величины ~70 Вт/см^2. На центральном теле внутри воздухозаборника (внутренняя часть диффузора внешнего сжатия) плотность теплового потока достигла 175 Вт/см^2, хотя на внешней поверхности — 40 Вт/см^2. Наибольшего значения плотность конвективных тепловых потоков достигала вблизи первого стабилизатора пламени, где вдувается водород — 230 Вт/см^2.

В работах [5, 6] дана информация, полученная в результате летных испытаний подобной камеры сгорания и расчетной интерпретации условий работы двигательной установки.

В работе [7] выполнено экспериментальное исследование воспламенения и стабилизации горения керосина в двумерной в камере сгорания ГПВРД. Была продемонстрирована работа ГПВРД на керосиновом топливе при числе Маха невозмущенного потока, равном 6. Для воспламенения и стабилизации горения керосина использовался вдув водорода из пилонов. Были найдены условия, при которых горение керосина поддерживалось после прекращения вдува водорода.

В работе [8] выполнено экспериментальное исследование термогазодинамических процессов в модельной камере сгорания двухмодового ГПВРД со стабилизатором пламени трапецеидальной формы, в конце которой, перед выходом в сопловой блок, расположена выдвижная дроссельная заслонка, предназначенная для регулировки противодавления в газодинамическом тракте. На наклонной внутренней поверхности каверны располагались 15 форсунок (работали только 13) диаметром 0.078 см, с расстоянием между ними 0.95 см. Ширина каверны составляла примерно 15 см. Горючая смесь вдувалась со звуковой скоростью. На нижнем дне каверны располагались датчики температуры и искровой инициатор горения. Практически важным экспериментальным результатом работы [8] явилось исследование нестационарной структуры течения в камере сгорания без вдува горючего и при вдуве этилена и керосина JP-7 при изменении высоты дроссельной заслонки. Были экспериментально изучены: влияние давления на температуру газа в каверне (давление изменялось за счет изменения высоты поднятия дроссельной заслонки), влияние дополнительного вдува компонентов горючего в нормальном к верхней поверхности направлении на расстоянии 2 см до передней границы каверны (конфигурация и расположение форсунок было подобным расположенным внутри каверны), влияние числа Маха на входе в изолятор, эффект вдува керосина JP-7 вместо этилена.

Анализ результатов [8] и других работ по сверхзвуковому обтеканию трапецеидальных каверн [9–11] в каналах показало высокую чувствительность характеристик газовой динамики и горения от большого числа исходных данных, таких как: скорость и давление основного потока в канале, размеры и формы стабилизаторов пламени, местоположения форсунок и характеристик вдуваемых топливных композиций. Показано значительное влияние на структуру поля течения различных методов управления газовыми потоками в форме дроссельных заслонок или вдува воздуха в газовый поток [12, 13].

В целом концепция использования стабилизаторов пламени в форме каверн показала свою перспективность. Имеются примеры использования аналогичных стабилизаторов пламени в демонстраторах ГПВРД на твердом топливе [14]. Следует признать успешным использование концепции стабилизаторов пламени в форме каверн в научной программе стендовых и летных испытаний HIFiRE-2 [15, 16].

Полученные в экспериментальных работах обширные опытные данные легли в основу большого числа расчетных исследований. В работе [17], посвященной анализу экспериментальных данных стендовых испытаний камер сверхзвукового горения, отдельный раздел посвящен именно термогазодинамике сверхзвуковых потоков в каналах с кавернами. Среди большого числа работ отметим наиболее интересные в связи с целями данной работы. Указанные работы можно разбить на несколько групп: методы и результаты численного моделирования газодинамических процессов широкого класса стационарных и импульсных схем горения, изучение закономерностей взаимодействия ударных волн с пограничными слоями, поскольку такой вид взаимодействия является одним из важных в сверхзвуковых камерах сгорания. Много работ посвящено исследованию моделей химической кинетики, используемых в термогазодинамических расчетах. Проблема организации поджига и обеспечения полноты сгорания в камерах ГПВРД является исключительно важной, потому в большинстве работ именно эти проблемы обсуждаются подробно.

Большую практическую значимость имеет задача обеспечения теплового режима камер сгорания. В исследованиях используется широкий спектр моделей, от интегральных моделей, основанных на термодинамических циклах [18], двухмерных термогазодинамических моделей средней производительности [19], до трехмерных моделей горения, основанных на уравнениях Навье–Стокса [20], усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса [21] и предельно достижимых в настоящее время гибридных RANS/LES-моделей газовой динамики с горением топливных композиций [22]. В работе [23] сделана попытка моделирования небольшого участка камеры сгорания с использованием DNS-модели. Важным представляется также направление развития численных моделей изучения явления нештатной работы камеры сгорания [24].

Необходимо сделать общее замечание относительно использования тех или иных вычислительных моделей, состоящее в том, что применение самых сложных расчетных моделей и алгоритмов, несомненно, способствует прогрессу в данной области, но не гарантирует получение наиболее достоверных данных. Это означает, что для выяснения общих закономерностей изучаемых термогазодинамических процессов упрощенные модели имеют не меньшую ценность, чем предельно подробные модели.

Заметим, что даже без учета процессов горения газовая динамика каналов с кавернами привлекала много внимания исследователей, что во многом связано с весьма интересным для фундаментальной механики жидкостей и газа явлением возникновения газодинамических пульсаций, порождаемых взаимодействием основного сверхзвукового потока с вихревыми потоками в пределах обтекаемых каверн [10]. Организация горения в кавернах позволяет стабилизировать в среднем область тепловыделения, хотя процессы горения и течения являются нестационарными.

Большинство работ по сверхзвуковому горению в камерах сгорания посвящены экспериментальному и расчетному изучению газодинамических процессов и закономерностей воспламенения и горения. Заметно меньше число работ посвящено анализу конвективного и, особенно, радиационного нагрева стенок камеры сгорания, что имеет важное практическое значение при анализе теплового баланса двигательной установки. Среди работ, специально посвященных анализу плотностей конвективных и радиационных тепловых потоков, отметим [3, 4, 25–29]. В цитированных выше работах отмечалось, что плотность конвективных тепловых потоков на стенках стабилизатора и камеры сгорания может достигать порядка 200 Вт/см^2, а радиационных тепловых потоков – 20 Вт/см^2. Однако следует иметь в виду, что радиационный нагрев стенок камеры в значительной мере зависит от размеров излучающего объема, т.е. имеет объемный характер. В любом случае отмеченный уровень ожидаемых плотностей конвективных и радиационных потоков указывает на необходимость решения проблемы тепловой защиты в камерах ГПВРД.

В данной работе численно исследуются несколько режимов сверхзвукового горения этилена в камере сгорания модельного ГПВРД. Расчетная схема показана на рис. 1. Исходные данные для расчетов, включая геометрию газодинамического тракта и условия в потоке, заимствованы из работы [8]. Как уже отмечалось, несмотря на кажущуюся простоту реализации требуемых режимов горения в двухмодовых камерах сгорания, количество задаваемых параметров и степень их влияния на термогазодинамические процессы оказываются настолько большими, что до настоящего времени не удалось создать единую теорию, позволяющую выполнить прогноз и детальное численное описание многообразия термогазодинамических расчетов. Судя по цитированной литературе, экспериментальные и расчетные исследования продолжаются. Это относится и к камере ГПВРД типа [8], изучаемой в данной работе.

Задачей настоящего исследования является исследование в рамках полной радиационно-газодинамической постановки термогазодинамических процессов в двухмодовой камере сгорания ГПВРД со стабилизатором пламени в форме трапецеидальной каверны, сопровождающих горение в воздухе этилена. Как и в [8], учитывалась различная высота подъема дроссельной заслонки. В процессе решения радиационно-газодинамической задачи определяются плотности конвек-

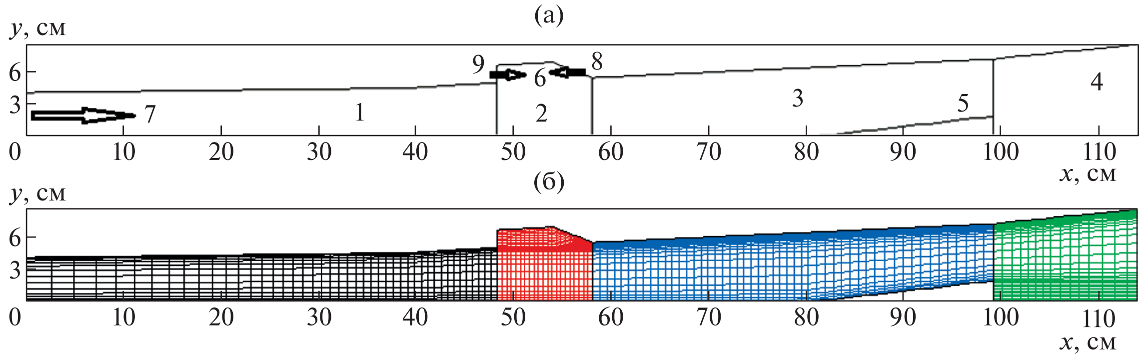

Рис. 1. Схема камеры сгорания (а) и расчетная сетка (б, показана каждая 4-я координатная линия). Стрелками показаны направления основного воздушного потока (7) и двух зон инжекции горючей смеси (8, 9).

тивных, спектральных и интегральных радиационных тепловых потоков к стенкам камеры сгорания, дается анализ влияния давления потока воздуха во входном тракте устройства на интенсивность конвективного и радиационного нагрева, а также изучалась структура нестационарного автоколебательного режима горения этилена при разных условиях. Для всех рассчитанных вариантов определены суммарные силы, действующие на внутреннюю поверхность камеры сгорания.

2. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Для численного моделирования использовалась авторская компьютерная программа NERAT-2D [30], которая реализует численное интегрирование системы уравнений механики вязкого теплопроводного химического реагирующего и селективно излучающего газа. На каждом шаге по времени последовательно интегрировались система уравнений неразрывности, Навье–Стокса, уравнения сохранения энергии, уравнения сохранения массы химических соединений, уравнений химической кинетики и переноса селективного теплового излучения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \operatorname{div}\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \operatorname{div}\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V}\operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\operatorname{grad} p + \Phi_\mu - Q_{V,R} - \\ -\sum_{i=1}^{N_s} h_i \dot{w}_i + \sum_{i=1}^{N_s} \rho c_{p,i} D_i (\operatorname{grad} Y_i \times \operatorname{grad} T),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_i \mathbf{V} = -\operatorname{div}\mathbf{J}_i + \dot{w}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N_s, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}\right)_n = (b_{i,n} - a_{i,n})K_n \prod_{j}^{N_s} X_j^{a_{j,n}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N_s; \quad n = 1, 2, \ldots, N_r \tag{6}$$

$$\mathbf{\Omega}\frac{\partial J_\omega(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})}{\partial \mathbf{r}} + \kappa_\omega(\mathbf{r}) J_\omega(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) = \kappa_\omega(\mathbf{r}) J_{b,\omega}(\mathbf{r}) \tag{7}$$

где t – время; $\mathbf{r}$ – радиус вектор точки пространства, где определяется спектральная интенсивность излучения; $\mathbf{\Omega}$ – единичный вектор направления распространения излучения; $\kappa_\omega(\mathbf{r})$, $J_\omega(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$, $J_{b,\omega}(\mathbf{r})$ – спектральные коэффициент поглощения, интенсивность излучения среды и абсолютно черного тела (функция Планка); $\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v$ — скорость; u, v — компоненты скорости вдоль осей декартовой системы координат x, y; p, ρ — давление и плотность; T — температура; $Q_{V,R}$ — объемные потери энергии тепловым излучением (при определенных условиях здесь оказывается важным реабсорбция теплового излучения); $\Phi_\mu = \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$ — диссипативная функция; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость газовой смеси; N_s — количество компонентов смеси газов; $Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ — относительная массовая концентрация i-компоненты; $c_{p,i}$, h_i — удельная теплоемкость при постоянном давлении и удельная энтальпия i-й компоненты; ρ_i, $\mathbf{J}_i$ — плотность и плотность потока i-й компоненты; $\mathbf{J}_i = -\rho D_i \operatorname{grad} Y_i$; D_i — эффективный коэффициент диффузии i-й компоненты; $X_i = \rho_i / M_i$, M_i — объемно-мольная концентрация и молекулярный вес i-й компоненты; K_n — константы скоростей глобальных реакций; $a_{j,n}$, $b_{j,n}$ — стехиометрические коэффициенты; N_r — количество химических реакций; $\dot{w}_j$ — массовая скорость образования i-й компоненты в каждом элементарном объеме расчетной области

$$\dot{w}_i = \sum_{n=1}^{N_r} M_i \left(\frac{dX_i}{dt}\right)_n.$$

Для численного интегрирования системы уравнений используется ряд замыкающих соотношений, к которым относятся, в первую очередь, термическое и калорическое уравнения состояния газовой смеси

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma} T, \quad c_p = \sum_i^{N_s} Y_i c_{p,i}, \tag{8}$$

где R_0 — универсальная газовая постоянная, $M_\Sigma = \left(\sum_i^{N_s} Y_i / M_i\right)^{-1}$ — молекулярный вес смеси газов.

Удельная энтальпия и теплоемкость рассчитывались по аппроксимационным соотношениям для соответствующих мольных величин

$$h_i = \chi T \left(\frac{dG_i}{d\chi}\right) + \varphi_{8,i} \times 10^3, \quad \text{Дж/моль},$$

$$c_{p,i} = 2\chi\left(\frac{dG_i}{d\chi}\right) + \chi^2\left(\frac{d^2 G_i}{d\chi^2}\right), \quad \text{Дж/моль} \cdot \text{К},$$

где $\varphi_{l,i}$, $l = 1, \ldots, 8$ — аппроксимирующие коэффициенты из [31] полного термодинамического потенциала

$$G_i = \varphi_{1,i} + \varphi_{2,i} \ln \chi + \varphi_{3,i}\chi^{-2} + \varphi_{4,i}\chi^{-1} + \varphi_{5,i}\chi + \varphi_{6,i}\chi^2 + \varphi_{7,i}\chi^3, \quad \chi = T \times 10^{-4},$$

$\varphi_{8,i}$ — энергия образования i-й компоненты в стандартных условиях.

Константы скоростей глобальных реакций

$$K_n = A_n T^m \exp(-T_a/T)$$

определялись с использованием кинетической модели горения этилена [21].

Коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии газовых смесей рассчитывались по следующим комбинаторным формулам [32] для коэффициентов вязкости, теплопроводности и бинарных коэффициентов диффузии отдельных компонент, полученных в 1-м приближении теории Чепмена—Энскога

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_c} (Y_i/\mu_i)}, \quad \lambda = 0.5\left[\sum_{i=1}^{N_c} x_i \lambda_i + \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_c} (x_i/\lambda_i)}\right], \quad D_i = \frac{1 - x_i}{\sum_{j \neq i}^{N_c} (x_j / D_{ij})},$$

$$\mu_i = 2.67\times 10^{-5}\frac{\sqrt{M_i T}}{\sigma_i^2\Omega_i^{(2,2)*}},\quad \text{г/см}\cdot\text{с},$$

$$\lambda_i = 8330\sqrt{\frac{T}{M_i}}\frac{1}{\sigma_i^2\Omega_i^{(2,2)*}},\quad \text{эрг/см}\cdot\text{K},$$

$$D_{i,j} = 1.858\times 10^{-3}\sqrt{T^3\frac{M_i + M_j}{M_i M_j}}\frac{1}{p\sigma_{i,j}^2\Omega_{i,j}^{(1,1)*}},\quad \text{см}^2\text{/с},$$

где x_i – относительная мольная концентрация, $x_i = p_i/p = Y_i M_\Sigma/M_i$, σ_i – радиус частицы i-го типа, A; $\Omega_i^{(2,2)*} = f(T_i)$ – интеграл столкновений для вязкости и теплопроводности; $T_i = kT/\varepsilon_i$, ε_i – параметр потенциала Ленарда–Джонса, характеризующий глубину потенциальной ямы. Интегралы столкновений для вязкости и диффузии рассчитывались по аппроксимациям Анфимова

$$\Omega_i^{(2,2)*} = 1.157T_i^{-0.1472},\quad \Omega_{i,j}^{(1,1)*} = 1.074T_{i,j}^{-0.1604}.$$

В расчетах функций, определяющих вязкость, теплопроводность и диффузию, также использовались комбинаторные формулы следующего вида:

$$T_{i,j} = \frac{kT}{\varepsilon_{i,j}},\quad \varepsilon_{i,j} = \sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j},\quad \sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j).$$

Уравнение переноса теплового излучения (7), сформулированное в общем виде для нерассеивающей среды относительно спектральной интенсивности излучения, решается в многогрупповом приближении, когда полный спектральный диапазон волновых чисел $\omega_{tot} \in [1000, 20\,000]$ см$^{-1}$ разбивается на N_g спектральных групп, в пределах каждой из которых вводится усредненный коэффициент поглощения $\kappa_g = \frac{1}{\Delta\omega_g}\int_{\Delta\omega_g}\kappa_\omega d\omega$.

Основными радиационными процессами в рассматриваемой задаче являются вращательно-колебательные полосы двух- и трехатомных молекул CO, H_2O, CO_2, для расчета спектральных сечений которых использовались данные [33], а также спектральные оптические модели, реализованные в компьютерной системе расчета спектральных оптических свойств высокотемпературных газов ASTEROID [34]. Использовалось приближение локального термодинамического равновесия. Полный спектральный диапазон разбивался на 99 неоднородных спектральных участков (спектральных групп) с целью наилучшим образом учесть колебательную структуру спектра поглощения и излучения продуктов сгорания. Границы учитываемой спектральной области выбирались с учетом того, что по закону Вина основная часть теплового излучения в рассматриваемом диапазоне температур высвечиватся в инфракрасной области спектра. Спектральный коэффициент поглощения рассчитывался по формуле

$$\kappa_\omega = \sum_i^{N_s}\sigma_{\omega,i}N_i,$$

где $\sigma_{\omega,i}$ – спектральное сечение поглощения i-й компоненты; N_i – числовая концентрация частиц i-го типа, определяемая по формуле

$$N_i = 0.725\times 10^{16}\frac{p}{T}\frac{M_\Sigma}{M_i}Y_i,\ \text{см}^3,$$

где давление p измеряется в эрг/см^3.

Учитывая специфику геометрии газодинамического тракта для решения уравнения (7), используется модель плоского слоя, в рамках которой коэффициент поглощения и функция Планка зависят только от нормальной координаты y, а спектральная интенсивность излучения – от координаты y и от угла между y и направлением распространения излучения θ. В этом приближении вместо уравнения (7) удобно использовать систему дифференциальных уравнений первого порядка для четырех полумоментных функций [35]

$$\frac{dM_{0,g}^{+}}{d\tau_g} + 6M_{0,g}^{+} - M_{1,g}^{+} = 6\pi J_{b,g}, \quad g = 1, 2, \ldots, N_g, \tag{9}$$

$$\frac{dM_{1,g}^{+}}{d\tau_g} + M_{0,g}^{+} = 2\pi J_{b,g}, \quad g = 1, 2, \ldots, N_g, \tag{10}$$

$$\frac{dM_{0,g}^{-}}{d\tau_g} - 6M_{0,g}^{-} - 6M_{1,g}^{-} = -6\pi J_{b,g}, \quad g = 1, 2, \ldots, N_g, \tag{11}$$

$$\frac{dM_{1,g}^{-}}{d\tau_g} + M_{0,g}^{-} = 2\pi J_{b,g}, \quad g = 1, 2, \ldots, N_g, \tag{12}$$

где $\tau_g = \int_0^y \kappa_g dy$ – оптическая толщина слоя газа в g-й спектральной группе,

$$M_{n,g}^{+} = \int\limits_{\Delta\omega_g} \left(2\pi \int\limits_0^1 J_\omega^{+} \mu^n d\mu \right) d\omega, \quad M_{n,g}^{-} = \int\limits_{\Delta\omega_g} \left(2\pi \int\limits_{-1}^0 J_\omega^{-} \mu^n d\mu \right) d\omega, \quad n = 0,1, \tag{13}$$

$J_{b,g} = \int\limits_{\Delta\omega_g} J_{b,\omega} d\omega$ – групповая интенсивность абсолютно черного тела; $\mu = \cos(\theta^\wedge y)$, $\Delta\omega_g = \omega_{g+1} - \omega_g$.

Для определения плотности интегрального по спектру потока излучения к единичной площадке на поверхности с нормалью **n** необходимо выполнить интегрирование

$$q_R = \int\limits_{4\pi} \mathrm{d}\Omega \int\limits_{\Delta\omega_{tot}} J_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega})\,\mathrm{d}\omega = \int\limits_{4\pi} \left(\sum_{g=1}^{N_g} J_g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \Delta\omega_g \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega})\,\mathrm{d}\Omega$$

Учитывая определение полумоментных характеристик (13), получаем выражение для плотностей интегральных радиационных потоков, направленных к верхней и нижней поверхности:

$$q_R(y = 0) = 2\pi \left| \sum_{n=1}^{N_g} M_{1,n}^{-} \right|, \quad q_R(y = H) = 2\pi \sum_{n=1}^{N_g} M_{1,n}^{+}.$$

При интегрировании системы уравнений (1)–(6) нет необходимости на каждом шаге по времени решать N_g систем дифференциальных уравнений (9)–(12), поскольку такой алгоритм является очень не экономичным. Достаточно это делать лишь для наиболее характерных конфигураций газодинамических полей. В случае заметного влияния испускания и реабсорбции теплового излучения на газодинамику процесса такие расчеты необходимо делать на каждом шаге по времени. Заметим, что в рамках метода полумоментов суммарное тепловыделение в объеме горячего излучающего газа определяется по формуле [35]:

$$Q_v = \sum_{g=1}^{N_g} 2\pi\kappa_g [2J_{b,g} - (M_{0,g}^{+} + M_{0,g}^{-})]$$

Поверхность камеры сгорания ГПВРД принималась каталитической, т.е. считалось, что на внутренних поверхностях достигается равновесие в реагирующей смеси газов, соответствующее текущему давлению и заданной температуре стенки камеры сгорания T_w. Серия численных экспериментов с постановкой на границе некаталитических условий, т.е. равенство нулю диффузионных потоков

$$\frac{\partial (Y_i)_w}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N_s$$

не привело к качественному изменению решения, хотя плотность конвективных тепловых потоков и оказывалась ниже.

Граничные условия на входе в канал (на рис. 1а при $x = 0$, поток слева-направо) задавались в соответствии с работой [8] и приведены в табл. 2. Степень черноты поверхности задавалась равной 0.8.

Таблица 1. Кинетическая модель горения этилена [21]

Реакция	А, см^3/(моль · с)	m	T_a, K
$C_2H_4 + O_2 \to 2CO + 2H_2$	2.10×10^{14}	0	18015.
$2CO + O_2 \to 2CO_2$	3.48×10^{11}	2	10135.
$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$	3.00×10^{20}	−1	0.

Таблица 2. Исходные данные и результаты расчетов суммарных сил, действующих на внутреннюю поверхность камеры в продольном направлении

Вар.	h, см	p_{inp}, атм	T_{inp}, K	p_{inj}, атм	T_{inj}, K	$G_{inj,1}$, г/(с·см)	$G_{inj,2}$, г/(с·см)	$F_{x,bot}$, Н	$F_{x,top}$, Н
1	1	0.416	427	0.624	1800	10	–	3	−8
2	1	0.416	427	1.0	1800	16	–	4	−10
3	1	0.416	427	2.5	1800	41	–	6	−13
4	1	0.416	427	0.499	1200	12	–	4	−8
5	1	1.0	700	1.5	1800	25	–	9	−22
6	2	0.416	427	0.624	1800	10	–	8	−10
7	1	0.416	427	0.624	1800	10	4	4	−10
8	2	0.416	427	0.624	1800	10	4	8	−1

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Взяв за основу геометрию газодинамического тракта (рис. 1) и базовые исходные данные (скорость, давление p_{inp} и температуру T_{inp} воздуха на входе в воздухозаборник) при постоянном числе Маха M = 2.2, температуру поверхности камеры $T_w = 400$ K, скорость вдува топливной смеси в камеру сгорания $V_{inj} = 60\,000$ см/с, численное исследование было проведено при разных расходах горючего (смеси этилена с воздухом) через форсунки, расположенные внутри каверны. Рассмотрены варианты одной и двух зон инжекции (помечены на рис. 1 цифрами 8, 9 и в табл. 2 – варианты 1–6 и 7, 8 соответственно). При этом рассматривались газодинамические процессы при двух высотах выдвижения дроссельной заслонки (5), $h = 1$ и 2 см.

Для всех рассмотренных вариантов рассчитывались распределения плотностей конвективных, спектральных и интегральных радиационных тепловых потоков вдоль нижней и верхней поверхностей диффузора (см. зона 1 на рис. 1а), камеры сгорания (зоны 2 и 3) и сопла (зона 4). Особо была выделена зона стабилизатора пламени в форме трапецеидальной каверны (6) и дроссельной заслонки (5). Рассчитывалась также суммарная сила, действующая на поверхность исследуемой камеры в разных расчетных случаях в продольном направлении. Величины рассчитываемых сил и расходов горючей смеси отнесены к 1 см ширины газодинамического тракта.

Массовое соотношение этилена и воздуха во вдуваемом через форсунки горючего полагалось равным 0.5 (массовые доли вдуваемых компонент: $Y_{C_2H_4} = 0.5$, $Y_{N_2} = 0.5 \times 0.78$, $Y_{O_2} = 0.5 \times 0.22$). Поиск оптимального соотношения компонентов горючего для обеспечения наибольшей эффективности сгорания не производился, хотя в предварительных расчетах было установлено, что при $Y_{C_2H_4} = 1.0$ в инжектируемых струях этилена полнота сгорания оказывалась заметно ниже. Как в первой, так и во второй зоне инжекции струя горючего вдувалась либо вдоль, либо против оси x (см. 8 и 9 на рис. 1а).

Рассмотрим результаты численного моделирования для случая одной зоны инжекции при разных давлениях p_{inj} инжектируемой струи (вар. 1, 2, 3, см. табл. 1).

В первом расчетном варианте (рис. 2) наблюдается достаточно стабильное горение этилена в области каверны с периодическим выбросом горячих масс газа навстречу основному потоку вдоль верхней поверхности диффузора. Примечательно, что указанные выбросы (они хорошо видны на рис. 2б,з) происходят с периодом примерно 10 мс, а длятся относительно недолго ~2 мс. При этом периоды относительно стабильного горения (рис. 2в–ж) длятся порядка 7 мс.

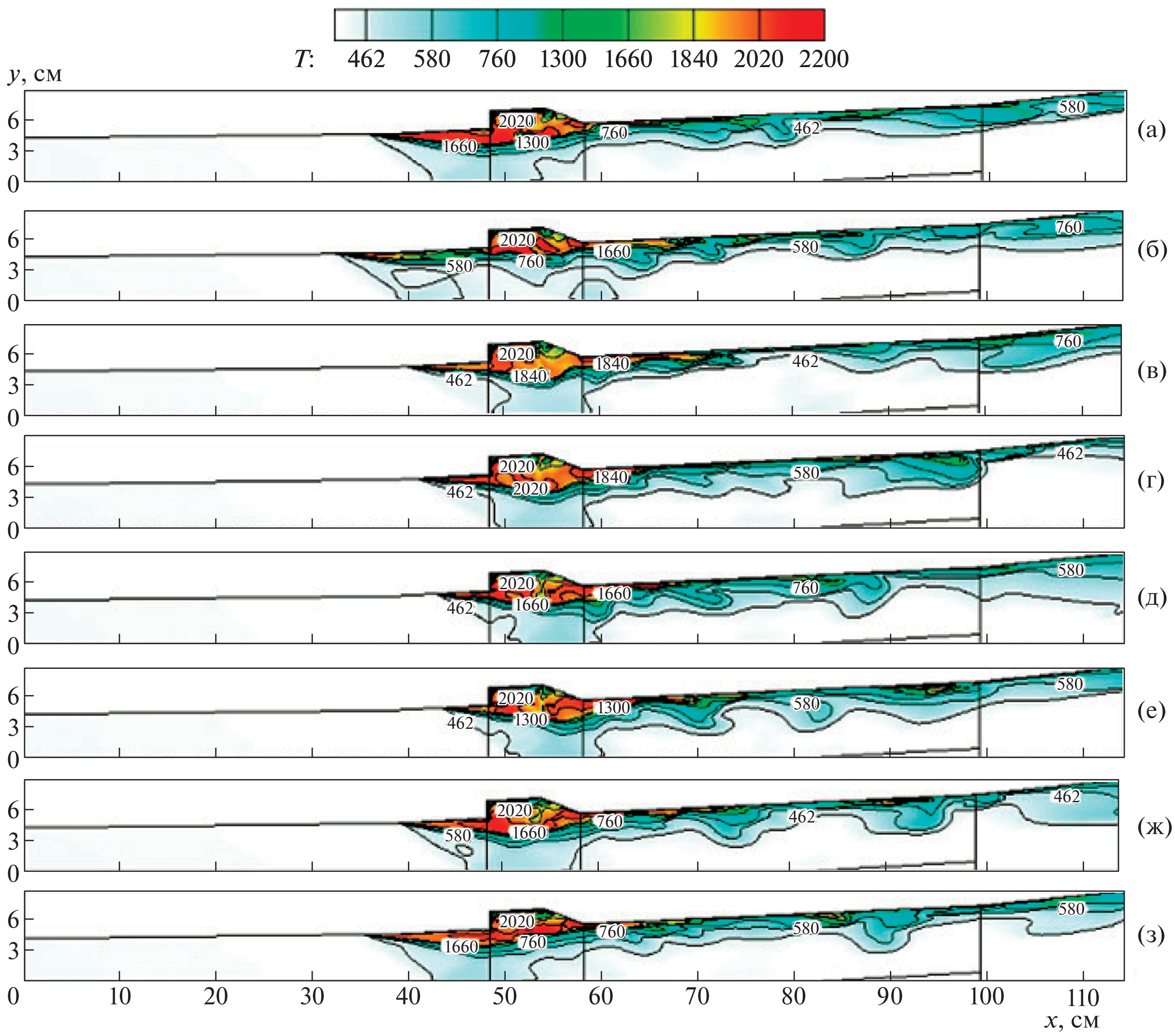

Рис. 2. Поля температуры (в K) в камере сгорания в последовательные моменты времени с шагом $\Delta t = 1.7$ мс. Расчетный вариант № 1.
Анимационный файл с температурными распределениями в последовательные моменты времени с шагом по времени $\Delta t = 0.1$ мс представлен в приложении Fig_02App_Var_01_Temp_1InjZ_h1_0.416atm_427K_0.624atm_1800K.avi/

Такая картина повторяется с хорошей регулярностью. Типичные распределения основных газодинамических функций, характеризующих квазиустановившийся процесс горения (соответственно рис. 2в–е) показаны на рис. 3. Во всей области газодинамического тракта вблизи нижней поверхности течение сверхзвуковое. В каверне течение дозвуковое. Здесь наблюдается ярко выраженные периодически пульсирующее вихревое движение, что способствует лучшему перемешиванию реагирующей смеси газов.

На нижней поверхности, под каверной, наблюдается область повышенного давления (рис. 3б). В моменты выбросов дозвукового потока из каверны навстречу основному потоку вдоль верхней поверхности указанная зона повышенного давления также перемещается навстречу потоку вплоть до расстояния 35–40 см от входного сечения.

На рис. 3в–д хорошо видно, что в области каверны происходит интенсивный процесс горения с образованием основных продуктов сгорания: CO, CO_2 и H_2O, которые к тому же являются важными оптически активными компонентами, во многом формирующими тепловое излучение к внутренним поверхностям камеры сгорания.

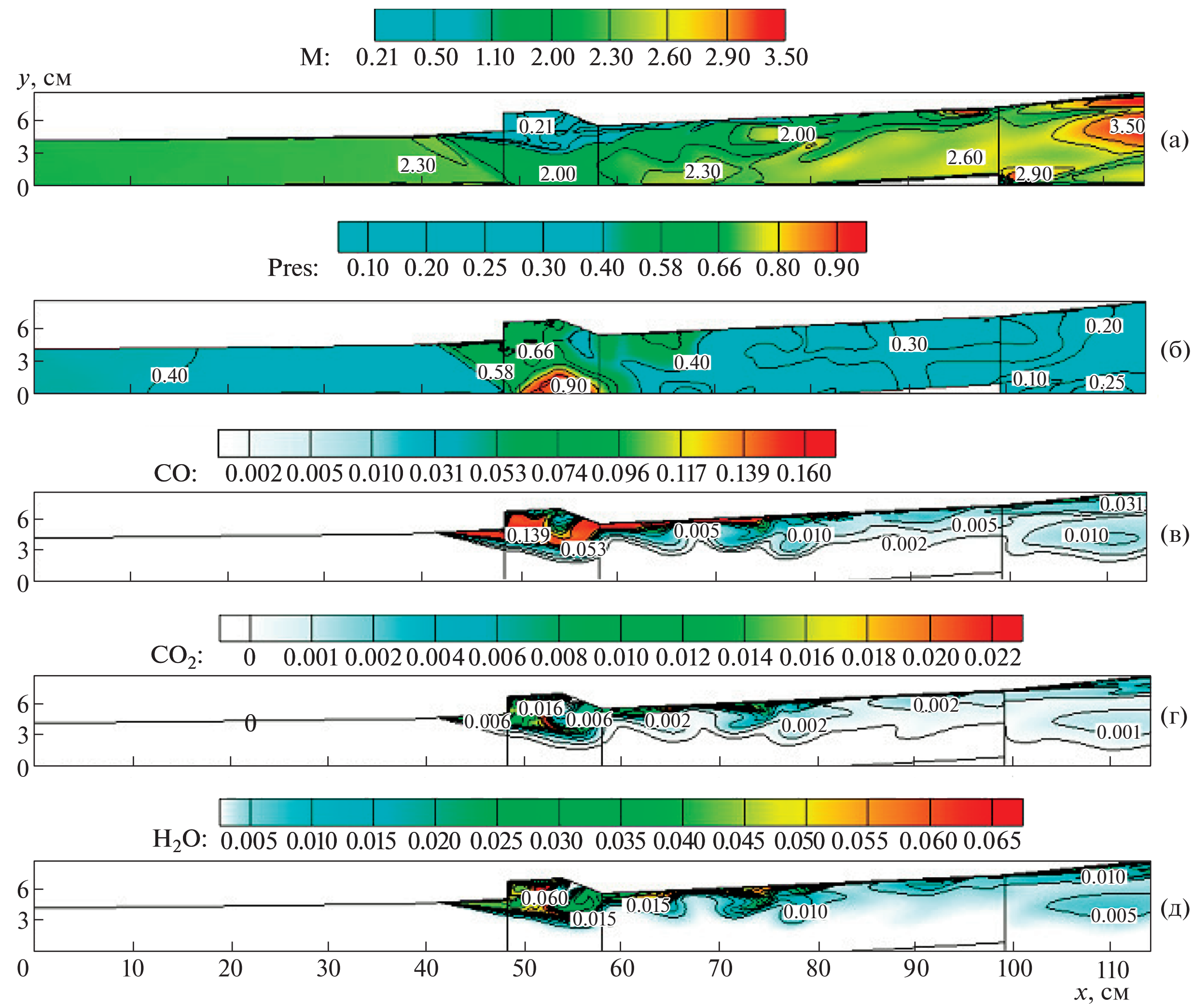

Рис. 3. Типичное распределение чисел Маха (а), давления (Pres в атм) (б) и массовых долей продуктов сгорания CO (в), CO_2 (г) и H_2O (д) для первого расчетного варианта.

На рис. 4 показано развитие процесса горения топлива на существенно меньших временных интервалах, чем было показано на рис. 2. Конфигурация температурного поля с шагом $\Delta t = 0.1$ мс показана на рис. 4. Хорошо видно, что горячая реакционная зона каверны периодически генерирует вынос нагретых масс газа вдоль основного потока. Показанные на рис. 5 распределения массовых долей этилена показывают, что с такой же периодичностью из каверны выносятся массы непрореагировавшего этилена, концентрация которого, однако, снижается вниз по потоку. При этом показанные на рис. 6 поля z-проекции ротора скорости подтверждают связь указанных нагретых масс газа и непрореагировавшего топлива с вихревой структурой течения. Также отметим, что временная развертка вихревого поля на рис. 6 показывает вихревую структуру течения газа в каверне.

Из рис. 2–4 можно оценить скорость движения горячих вихрей вдоль оси x, которая хорошо коррелирует со скоростью основного сверхзвукового потока в камере.

Таким образом, рассмотренные результаты первого расчетного варианта показывают реализацию осциллирующего двухмодового характера течения. Высокочастотная составляющая осцилляций с частотой $f_в \sim 3000$ Гц отвечает генерации и сносу вниз по потоку горячих масс газа, а низкочастотная, с частотой $f_н \sim 200$ Гц, соответствует периодическому выносу горячих масс газа навстречу потоку из каверны.

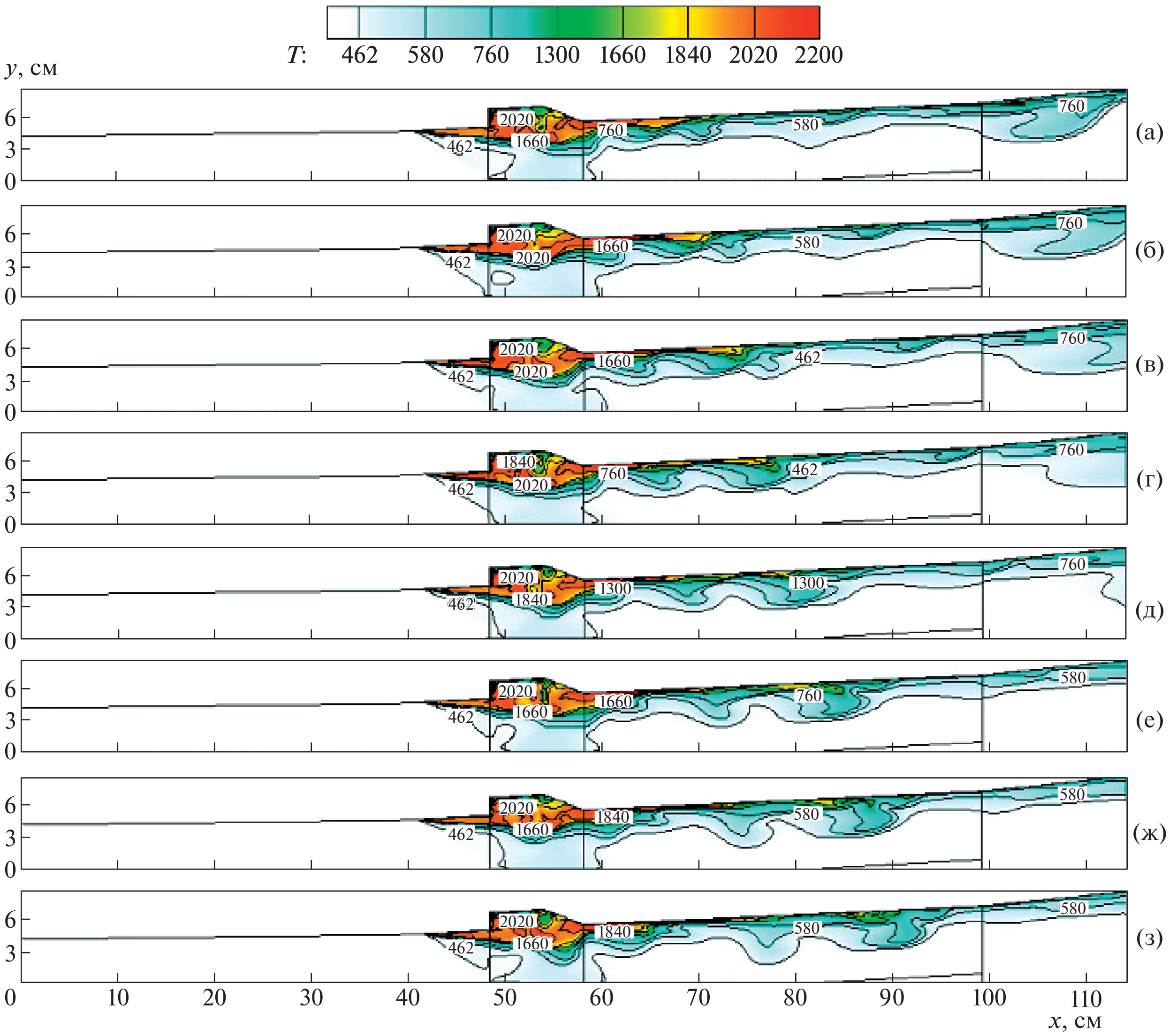

Рис. 4. Поля температуры (в K) в камере сгорания в последовательные моменты времени с шагом $\Delta t = 0.1$ мс. Расчетный вариант № 1.

В рассматриваемом варианте не обеспечивается полнота сгорания этилена, и эффективность данного режима является невысокой. Из рис. 5 видно, что значительная доля горючего также выносится из сопла периодическими вихревыми структурами.

Во втором расчетном варианте, в котором давление в инжектируемой струе было увеличено в 1.6 раза, наблюдается более регулярное колебательное движение горячей дозвуковой области вверх по потоку от каверны. При этом, если вниз по потоку вихревые структуры, зарождаемые в каверне, сносятся со скоростью основного потока, то вверх по потоку от каверны у верхней поверхности стабилизатора наблюдается достаточно стабильно существующая высокотемпературная зона с небольшими колебаниями вдоль верхней поверхности, в пределах которой реализуется дозвуковое движение и происходит сгорание этилена.

На рис. 7 показаны температурные распределения с шагом по времени $\Delta t = 0.2$ мс. Увеличение давления в области каверны оказывает значительное влияние на распределения газодинамических функций в газодинамическом тракте. Зона дозвукового движения заметно возросла и занимает примерно половину высоты газодинамического тракта (рис. 8а), а ее передний фронт достигает расстояния $x = 28$ см от входного сечения.

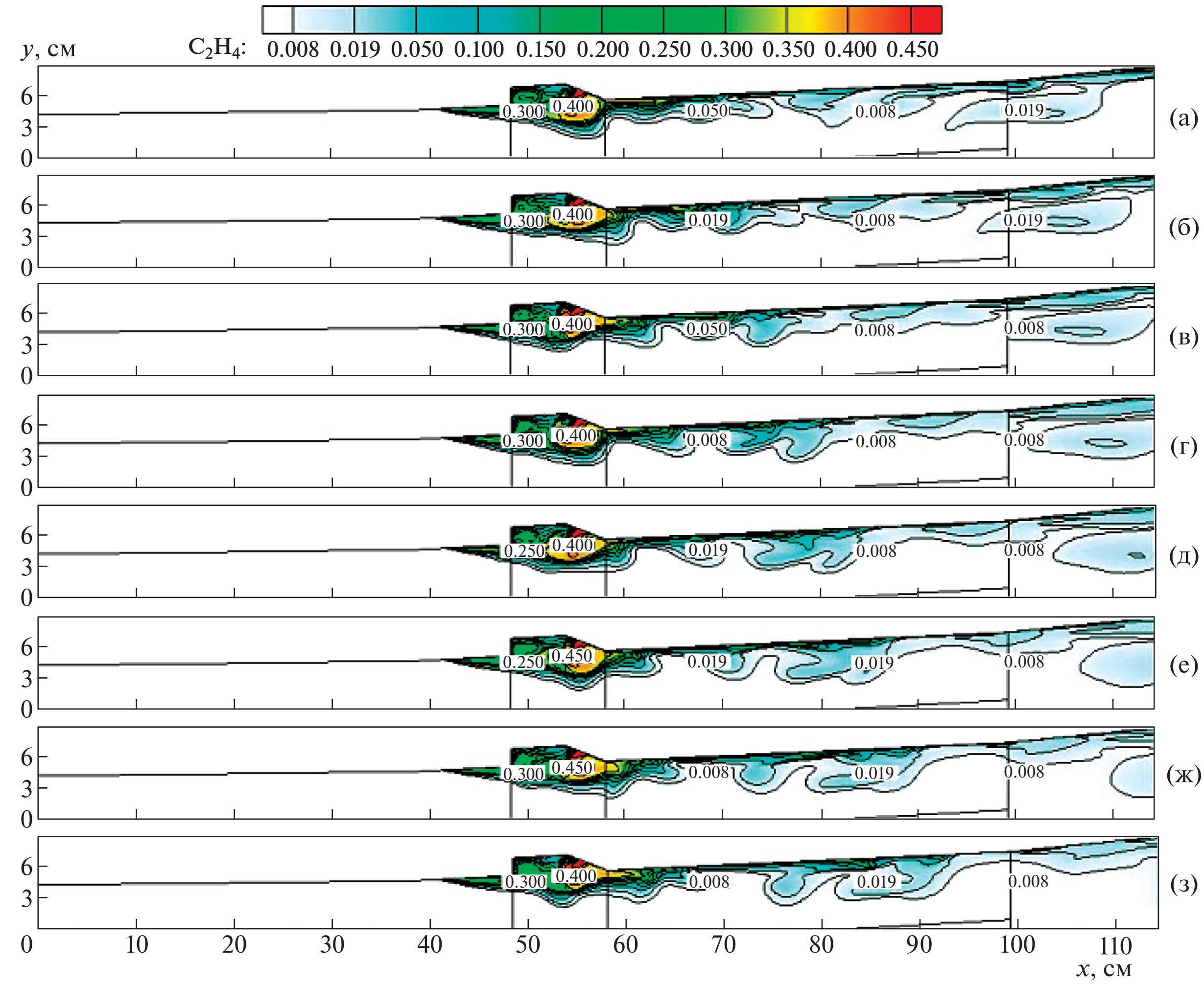

Рис. 5. Поля массовых долей этилена в камере сгорания в последовательные моменты времени с шагом $\Delta t = 0.1$ мс. Расчетный вариант № 1. Анимационный файл нестационарного горения этилена представлен в приложении Fig_05App_Var_01_C2H4_1InjZ_h1_0.416atm_427K_0.624atm_1800K.avi.

Относительно высокий уровень давления устанавливается в значительном объеме камеры сгорания (рис. 8б). Как следствие, отмечается большая полнота сгорания этилена (рис. 8в). О достаточно высокой эффективности горения говорят распределения основных продуктов сгорания.

Увеличение давления до 2.5 атм приводит к катастрофическим последствиям для процесса горения в камере – ударная волна, рождаемая в окрестности каверны, выходит безостановочно навстречу входному потоку воздуха в диффузор.

В четвертом расчетном варианте задавалось относительно низкое давление инжектируемого горючего, а эффективная температура поджига снижена до $T_{inj} = 1200$ K. Горение не прекращалось, но его интенсивность существенно снижается. Выброса горячего газа из каверны навстречу основному потоку не наблюдалось, хотя периодический исход вихревых масс горячего газа наблюдается как и прежде. Типичное распределение газодинамических функций показано на рис. 9. Зона дозвукового движения локализована в каверне (рис. 9б), а повышенное давление, как и прежде, локализовано под каверной (рис. 9в). Распределения массовых долей этилена и продуктов горения (рис. 9г-ж) показывают низкую эффективность сгорания.

На рис. 10 представлены результаты численного моделирования горения в условиях повышенного давления на входе в камеру (вар. 5, табл. 2). В этом случае генерации противодавления в каверне недостаточно для продвижения горячей дозвуковой области течения вверх по потоку, поэтому основная зона горения этилена локализована вблизи каверны (рис. 10а). Как и прежде,

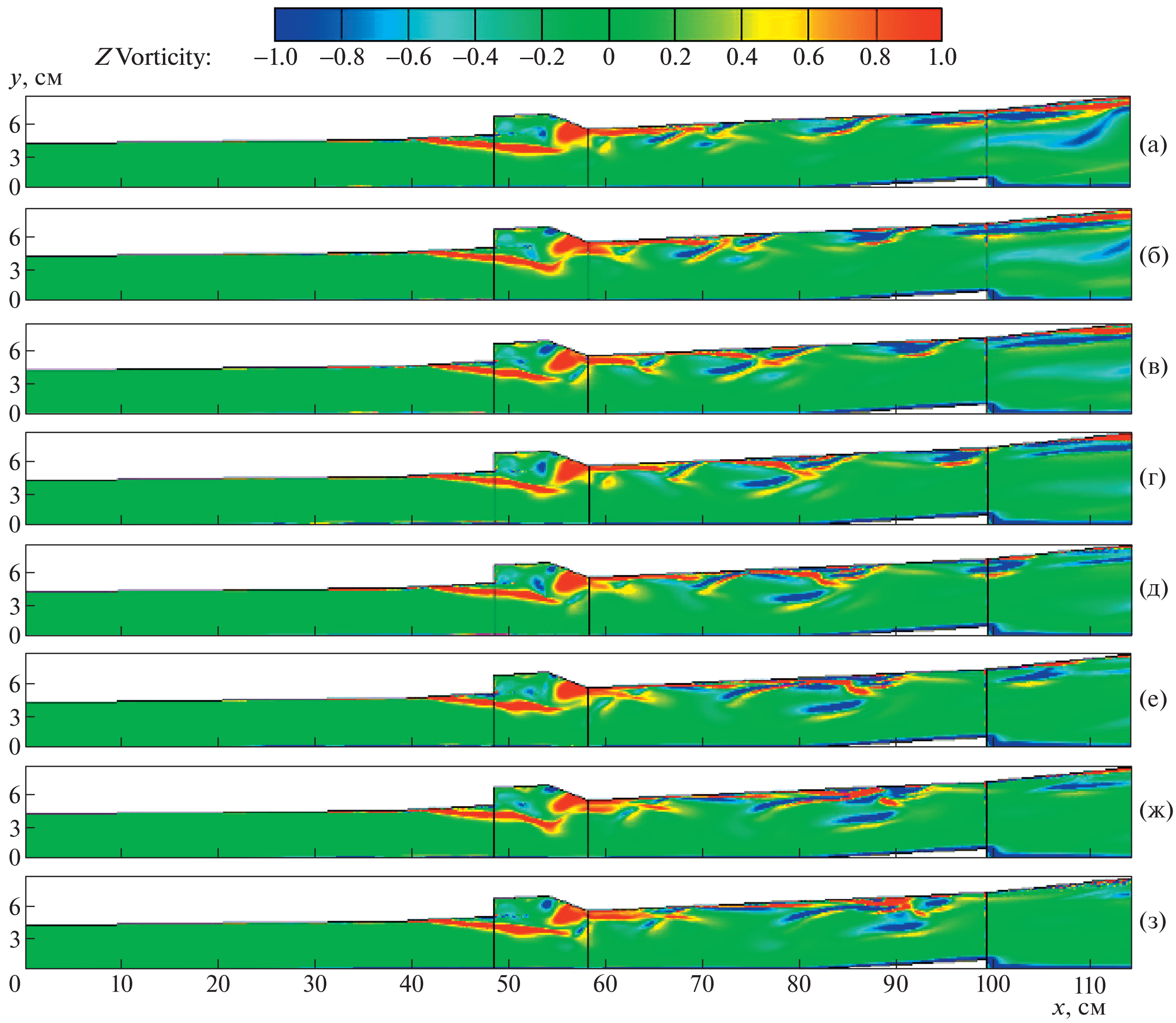

Рис. 6. Поля z-компоненты ротора скорости (в единицах 21513 с$^{-1}$) в камере сгорания в последовательные моменты времени с шагом Δt = 1.7 мс. Расчетный вариант № 1.
Анимационный файл поля z-компоненты ротора скорости в последовательные моменты времени представлен в приложении Fig_06App_Var_01_Vorticity_1InjZ_h1_0.416atm_427K_0.624atm_1800K.avi.

из зоны горения периодически выносятся горячие массы топлива, которые сносятся вниз по потоку. Судя по рис. 10г–ж, горение этилена происходит более эффективно. В области каверны наблюдается интенсивное вихревое движение при дозвуковой скорости (рис. 10б), а вблизи нижней поверхности локализована область высокого давления (рис. 10в), которая практически не движется.

В заключительном варианте № 6 серии расчетов при одной зоне инжекции горючего была увеличена высота подъема дроссельной заслонки 5 (рис. 1а). Остальные исходные данные остались такими же, как в варианте 1. Конфигурация поля течения оказалась во многом подобной, полученной в первом варианте: периодически наблюдаются выбросы дозвуковой области горения вдоль верхней поверхности вплоть до расстояния $x \sim 32$ см, а вниз от каверны сносятся с более высокой частотой вихри горящего газа. Однако важным отличием этого варианта от первого, имеющим практическое значение, является увеличение силы $F_{x,bot}$, действующей в положительном направлении оси x как раз благодаря поднятой заслонке, что означает увеличение суммарного сопротивления газодинамического тракта.

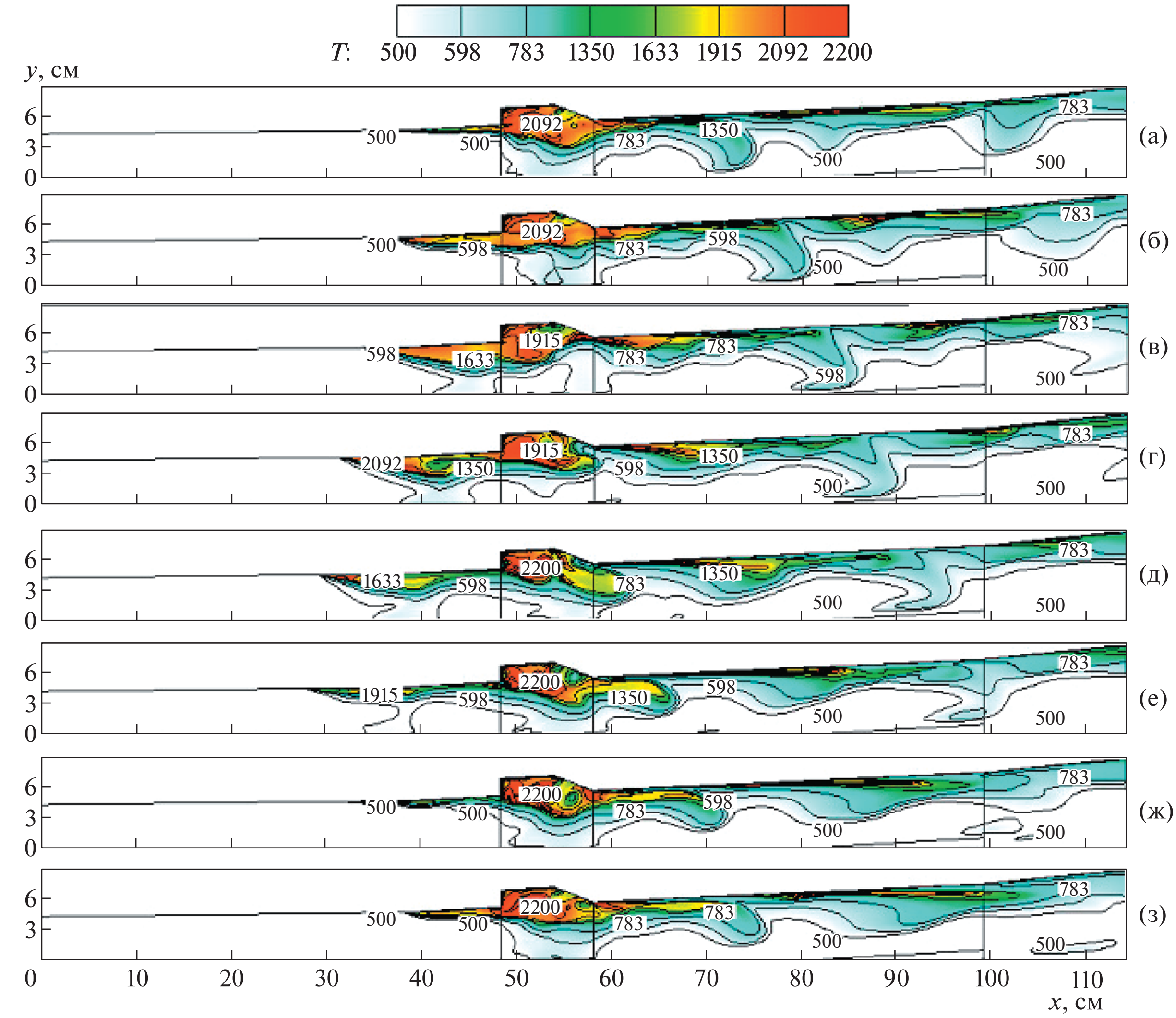

Рис. 7. Поля температуры (в К) в камере сгорания в последовательные моменты времени с шагом $\Delta t = 0.2$ мс. Расчетный вариант № 2.

Анимационный файл с температурными распределениями в последовательные моменты времени с шагом по времени Δt =0.2 мс представлен в приложении Fig_07App_Var_02_Temp_1InjZ_h1_0.416atm_427K_0.1atm_1800K.avi.

В двух заключительных вариантах (№ 7 и 8) расчетной серии изучалось влияние дополнительного вдува этилена в каверну (см. инжекцию 9 на рис. 1а) на процесс горения. В случае варианта 7 дополнительный вдув в каверну проводился при условии аналогичных первому варианту, поэтому следовало ожидать повышения давления в каверне, что и наблюдалось в расчетах. Результаты получились очень похожими на случай варианта 2, в котором давление инжектируемой струи горючего было порядка 1 атм. Подобными оказались не только распределения газодинамических функций и массовых долей продуктов горения во времени и в пространстве, но и параметры суммарного силового воздействия (сравните строки 2 и 7 в табл. 1).

Использование дополнительной инжекции горючего при высоте подъема дроссельной заслонки $h = 2$ см (вар. 8, табл. 2) показали результаты, близкие к варианту 6, при этом проекции полной силы на ось x возросли примерно на 10%.

Таким образом, расчетные данные показали, что создание дополнительного давления в стабилизаторе горения практически эквивалентно использованию дроссельной заслонки. Однако, кроме вариаций конфигураций поля течения, необходимо принимать в учет силовое и тепловое воздействие горящей газовой смеси на стенки камеры сгорания. В качестве примера анализа

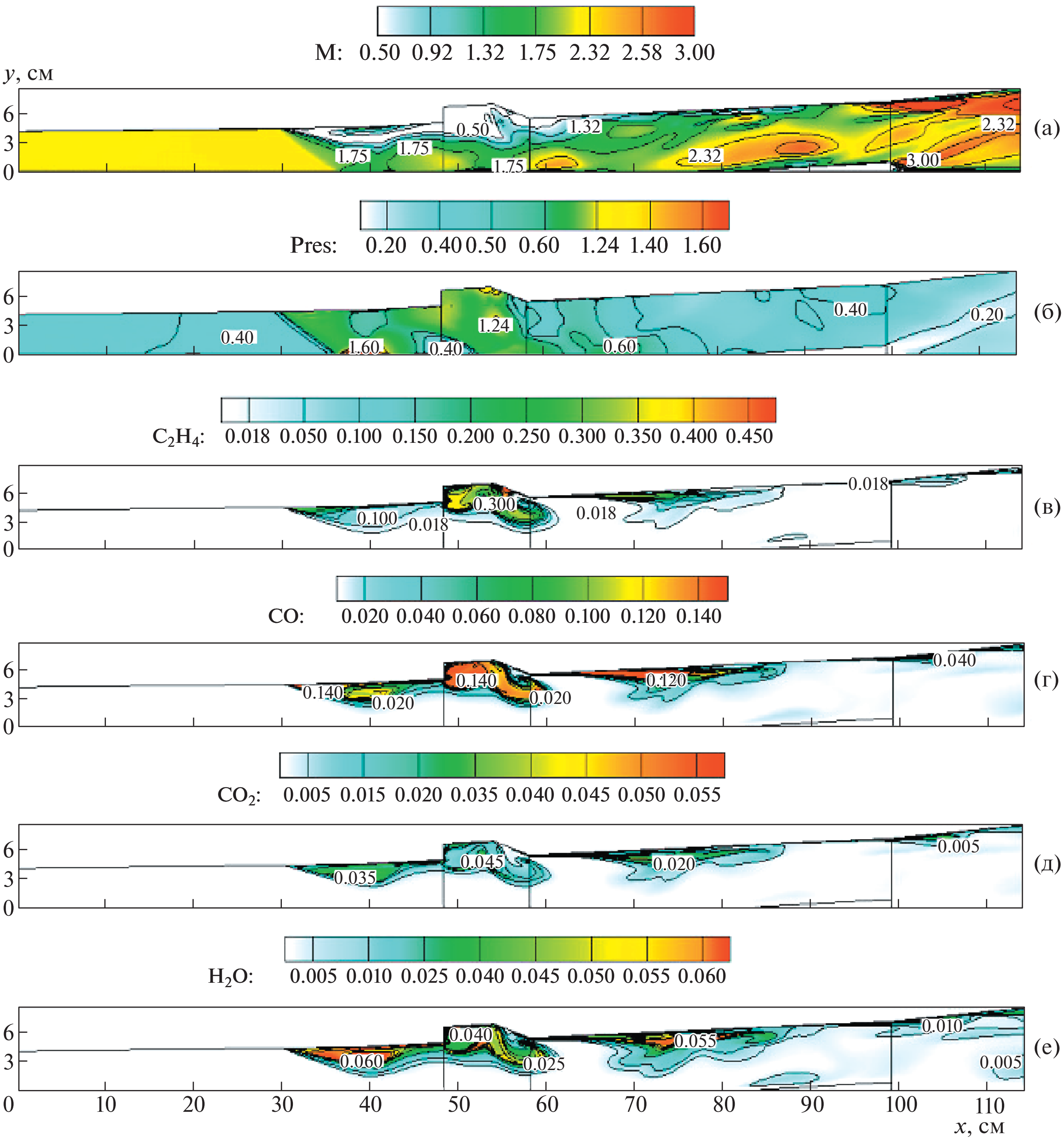

Рис. 8. Типичное распределение чисел Маха (а), давления (Pres в атм) (б) и массовых долей C_2H_4 (в) и продуктов сгорания CO (г), CO_2 (д) и H_2O (е) для второго расчетного варианта.

Анимационные файлы с распределениями чисел Маха, z-компоненты ротора скорости, массовых долей этилена и продуктов сгорания CO, CO_2 и H_2O в последовательные моменты времени с шагом по времени $\Delta t = 0.2$ мс представлены в приложениях соответственно Fig_08AppA_Var_02_Mach_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi

Fig_08AppB_Var_02_Vorticity_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi

Fig_08AppC_Var_02_C2H4_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi

Fig_08AppD_Var_02_CO_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi

Fig_08AppE_Var_02_CO2_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi

Fig_08AppF_Var_02_H2O_1InjZ_h1_0.416atm_427K_1.0atm_1800K.avi.

этих воздействий на рис. 11 и 12 показаны распределения давления и плотностей конвективных тепловых потоков вдоль верхней и нижней поверхностей для двух высот подъема дроссельной заслонки. Наибольшее силовое воздействие испытывает нижняя поверхность. При увеличении

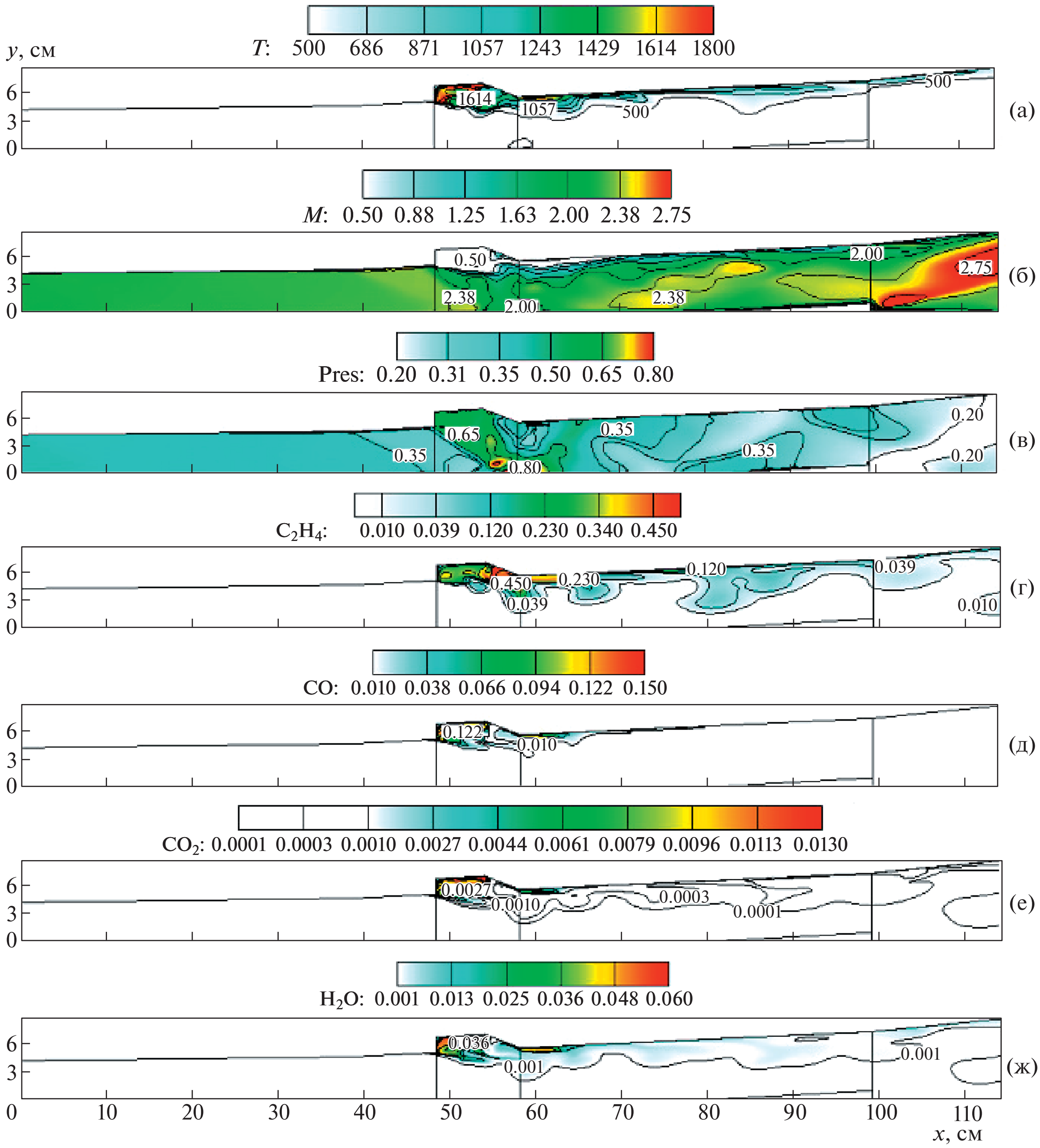

Рис. 9. Типичное распределение температуры (в K) (а), чисел Маха (б), давления (Pres в атм) (в) и массовых долей продуктов сгорания C_2H_4 (г), CO (д), CO_2 (е) и H_2O (ж) для четвертого расчетного варианта.

высоты подъема заслонки на 1 см область максимального силового воздействия смещается навстречу потоку примерно на 10 см.

Наибольшее тепловое воздействие испытывает верхняя поверхность камеры сгорания, вблизи которой локализованы высокотемпературные продукты сгорания этилена. При большей высоте подъема дроссельной заслонки плотность конвективных тепловых потоков возрастает.

Как уже отмечалось, для всех рассмотренных расчетных случаев отмечается нестационарный автоколебательный характер течения в камере сгорания. Плотность тепловых потоков и давление на поверхностях изменяются во времени соответственно конкретному нестационарному процессу. Поэтому на рис. 11 и 12 показаны некоторые мгновенные, но типичные конфигурации.

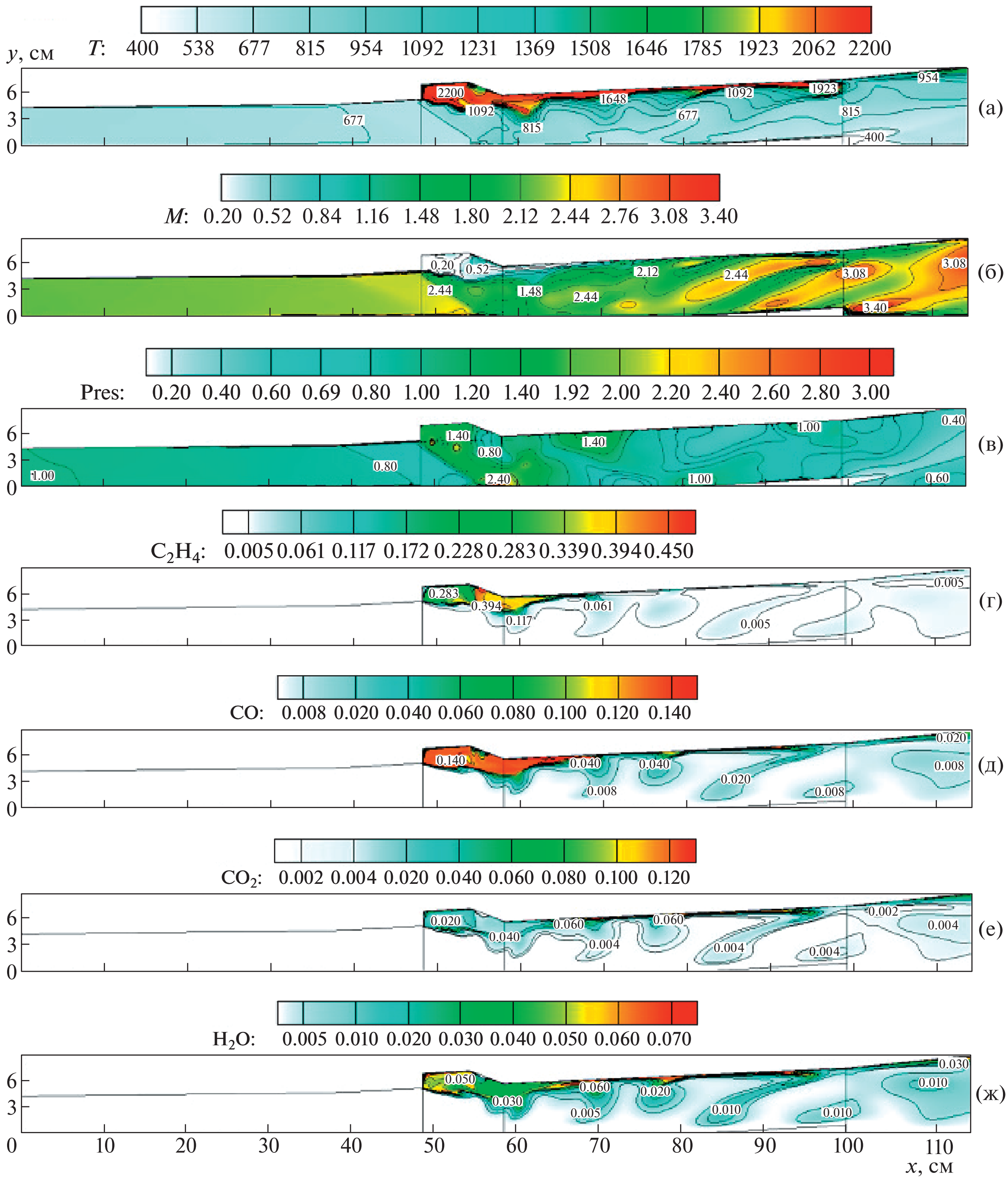

Рис. 10. Типичное распределение температуры (в K) (а), чисел Маха (б), давления (Pres в атм) (в) и массовых долей продуктов сгорания C_2H_4 (г), CO (д), CO_2 (е) и H_2O (ж) для пятого расчетного варианта.

Очевидно, это также относится к плотностям радиационных тепловых потоков на внутренних поверхностях камеры сгорания. На рис. 13 показано распределение плотностей конвективных и радиационных тепловых потоков на верхней поверхности во втором варианте. Наибольшая плотность конвективных тепловых потоков достигается, как правило, в окрестности каверны. На рис. 13 показаны случаи большего нагрева верхней поверхности вниз и вверх по потоку от каверны. Этот случай отвечает конфигурации поля течения, показанного на рис. 7г. Плотность интегральных радиационных тепловых потоков в рассмотренных случаях составляет примерно 10%

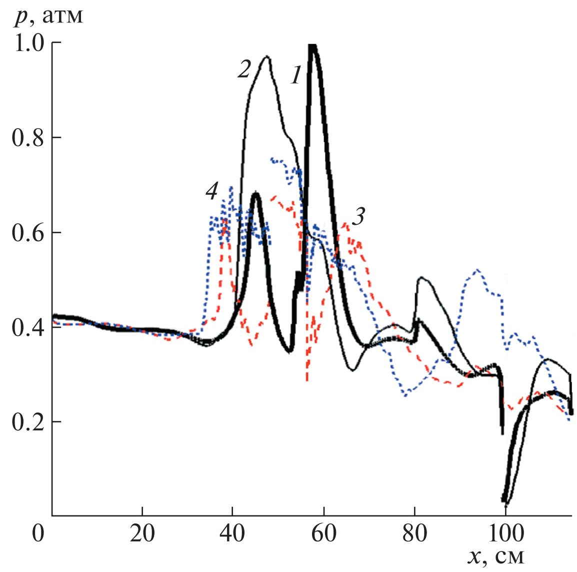

Рис. 11. Распределение давления при двух зонах инжекции на нижней (*1*, *2*) и верхней (*3*, *4*) поверхностях для высоты заслонки h = 1 см (*1*, *3*) и h = 2 см (*2*, *4*).

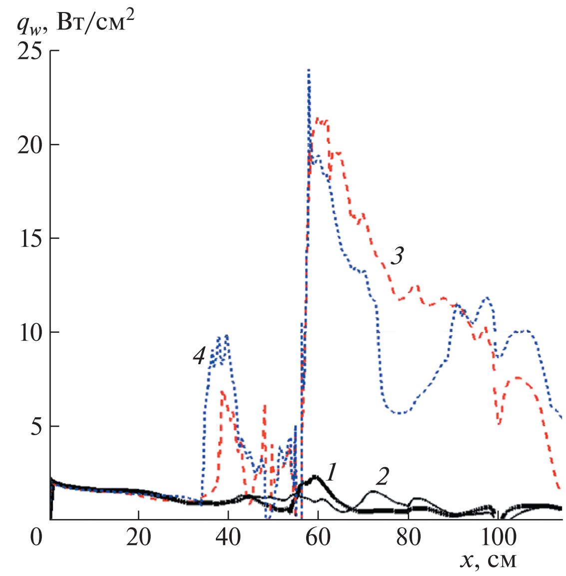

Рис. 12. Распределение плотности конвективного теплового потока при двух зонах инжекции на нижней (*1*, *2*) и верхней (*3*, *4*) поверхностях для высоты заслонки h = 1 см (*1*, *3*) и h = 2 см (*2*, *4*).

от уровня конвективных тепловых потоков. Однако следует иметь в виду, что при увеличении излучающего объема плотность радиационных тепловых потоков будет заметно возрастать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Термогазодинамические процессы, сопровождающие горение этилена в сверхзвуковом потоке воздуха в модельной двухмодовой камере ГПВРД, в которой горение может происходить как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом режиме, изучены с использованием компьютерной радиационно-газодинамической модели, основанной на нестационарных уравнениях Навье–Стокса, сохранения энергии и уравнений диффузии совместно с системой уравнений химической кинетики, уравнения переноса селективного теплового излучения в многогрупповой постановке.

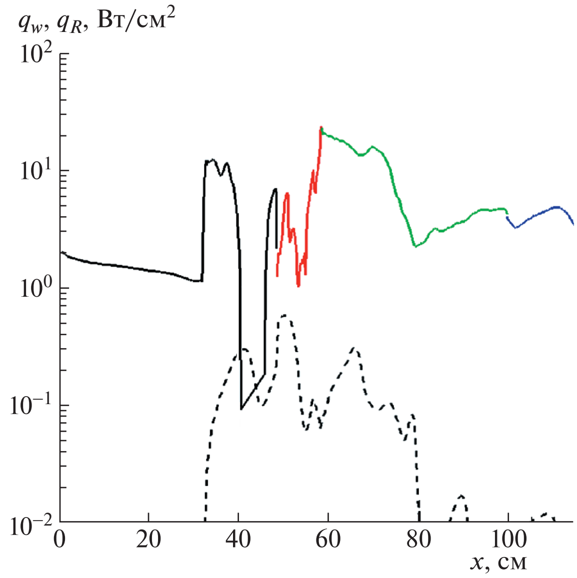

Рис. 13. Распределения плотностей конвективных (сплошная кривая) и интегральных радиационных (штриховая кривая) тепловых потоков вдоль верхней поверхности камеры сгорания для второго расчетного варианта.

Процесс горения этилена рассмотрен в рамках трехстадийной кинетической модели горения, так что в расчетах учтены 7 компонент: H_2, O_2, N_2, CO, CO_2, H_2O, C_2H_4.

При типичных условиях на входе в газодинамический тракт M = 2.2, давление 0.416–1 атм и температуры 427–700 K, рассмотрены особенности течения и горения в камере со стабилизатором горения трапецеидальной формы, расположенным на одной из поверхностей. Рассмотрены варианты с одной и двумя зонами инжекции смеси этилена с воздухом и двух конфигурациях дроссельной заслонки, расположенной при входе в сопловую часть камеры на нижней поверхности.

Показано, что в камере сгорания формируется периодический автоколебательный режим горения, в котором выделены две частотные моды колебаний газового потока. К первой высокочастотной моде отнесено периодическое испускание горящих вихревых структур из каверны, в которую вдувается горючая смесь. Ко второй низкочастотной моде отнесены периодические выбросы горящей смеси навстречу основному газовому потоку вдоль верхней поверхности от каверны. Во всех рассмотренных случаях в каверне наблюдается вихревое осцилляционное дозвуковое движение.

Показано, что вариацией давления в стабилизаторе горения можно достичь эффектов, подобных использованию разной высоты подъема дроссельной заслонки.

Результатом термогазодинамических расчетов стало определение уровней плотностей конвективных и радиационных тепловых потоков на стенках камеры сгорания, которые составляют соответственно 10–20 и ~1 Вт/см^2.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heiser W.H., Pratt D.T.* Hypersonic Airbreathing Propulsion //AIAA, Inc., Washington, DC. 1994. 587 p.
2. *Curran E.T.* Scramjet Engines: The First Forty Years // Journal of Propulsion and Power. 2001. V. 17. № 6. P. 1138–1148.
3. *Vinogradov V., Grachev V., Petrov M.* Sheechman J. Experimental Investigation of 2D Dual Mode Scramjet with Hydrogen Fuel at Mach 4.6 // AIAA 90-5269. 1990. 10 p.
4. *McClinton C., Roudakov A., Semenov V., Kopchenov V.* Comparative Flow Path Analysis and Design Assessment of an Axisymmetric Hydrogen Fueled Scramjet Flight Test Engine at a Mach Number 6.5 // AIAA 96-4571. 1996. 15 p.
5. *Voland R.T., Auslender A.H., Smart M.K., Roudakov A., Semenov V., Kopchenov V.* CIAM/NASA Mach 6.5 Scramjet Flight and Ground Test // AIAA 99-4848. 1999. 9 p.
6. *Rodriguez C.G.* CFD Analysis of the CIAM/NASA Scramjet//AIAA 2002-4128. 2002. 12 p.

7. *Vinagradov V., Kobigsky S.A., Petrov M.D.* Experimental Investigation of Kerosene Fuel Combustion in Supersonic Flow // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. № 1. P. 130–134.
8. *Donohue J.M.* Dual-Mode Scramjet Flameholding Operability Measurements // Journal of Propulsion and Power. 2014. V. 30. № 3. P. 592–602.
9. *Ben-Yakar A., Hanson R.K.* Cavity Flame-Holders for Ignition and Flame Stabilization in Scramjets: An Overview // Journal of Propulsion and Power. 2001. V. 17. № 4. P. 869–877.
10. *Gruber M.R., Baurle R.A., Mathur T., Hsu K.Y.* Fundamental Studies of Cavity-Based Flameholder Concepts for Supersonic Combustors // Journal of Propulsion and Power. 2001. V. 17. № 1.
11. *Gruber M.R.* Mixing and Combustion Studies Using cavity-based Flameholders in a Supersonic Flow // Journal of Propulsion and Power. 2004. V. 20. № 5.
12. *Surzhikov S.T., Seleznev R.K., Tretyakov P.K., Zabaykin V.A.* Unsready Thermo-Gasdynamic Processes in Scramjet Combustion Chamber with Periodical Input of Cold Air // AIAA-2014-3917. 2014. 25 p.
13. *Tatman B.J., Rockwell R.D., Goyne C.P., McDaniel J.C., Donohue J.M.* Experimental Study of Vitiation Effects on Flameholding in a Cavity Flameholder // Journal of Propulsion and Power. 2013. V. 29. № 2. P. 417–423.
14. *Ben-Yakar A., Natan B., Gany A.* Investigation of a Solid Fuel Scramjet Combustor // Journal of Propulsion and Power. 1998. V. 14. № 4. P. 447–455.
15. *Storch A., Bynum M., Liu J., Gruber M.* Combustor operability and performance verification for HIFiRE flight 2 // AIAA-2011-2249. 2011.
https://doi.org/10.2514/6.2011-2249
16. *Jackson K., Gruber M., Barhorst T.* The HIFiRE flight 2 experiment: an overview and status update // AIAA-2009-5029. 2009.
https://doi.org/10.2514/6.2009-5029
17. *Seleznev R.K., Surzhikov S.T., Shang J.S.* A review of the scramjet experimental database// Progress in Aerospace Sciences. 2019. V. 106. P. 43–70.
https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2019.02.001
18. *Riggins D., Tackett R., Taylor T., Auslender A.* Thermodynamic Analysis of Dual-Mode Scramjet Engine Operation and Performance // AIAA 2006-8059. 2006. 26 p.
19. *Суржиков С.Т.* Моделирование радиационно-конвективного нагрева модельных камер ПВРД на водородном и углеводородном топливе //Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15. Вып. 3. http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-3/articles/230/
20. *Селезнев Р.К.* Исследование структуры течения в модельном воздухозаборнике ГПВРД с поперечной подачей водородного топлива в сверхзвуковой поток // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 2021. № 3. С. 30–38.
21. *Baurle R.A., Eklund D.R.* Analysis of Dual-Mode Hydrocarbon Scramjet Operation at Mach 4-6.5 // Journal of Propulsion and Power. 2002. V. 18. № 5. P. 990–1002.
22. *Fulton J.A., Edwards J.R., Hassan H.A., McDaniel J.C., Goyne C.P., Rockwe R.D., Cutler A.D., Johansen C.T., Danehy P.M.* Large-Eddy/Reynolds-Averaged Navier–Stokes Simulations of Reactive Flow in Dual-Mode Scramjet Combustor // Journal of Propulsion and Power. 2014. V. 30. № 3. P. 558–575.
23. *Tanner B., Nielsen T.B., Edwards J.R., Chelliah H.K., Lieber D., Geipel C., Goyne C.P., Rockwell R.D., Cutler A.D.* Hybrid LES/RANS Simulation of a Premixed Ethylene-fueled Dual-mode Scramjet Combustor: Small Cavity Configuration // AIAA 2019-1445. 2019. 33 p.
24. *Riley L.P., Hagenmaier M.A., Donbar J.M., Gaitonde D.V.* Computational Investigation of Unstart in a Dual-Mode Scramjet//AIAA 2016-1901. 2016. 16 p.
25. *Nelson H.F.* Radiative Heating in Scramjet combustor // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1997. V. 11. № 1. P. 59–64.
26. *Crow A.J., Boyd I.D, Brown M.S., Liu J.* Thermal Radiative Analysis of the HIFiRE-2 Scramjet Engine // AIAA 2012-2751. 2012. 22 p.
27. *Crow A., Boyd I., Terrapon V.* Radiation Modeling of a Hydrogen Fueled Scramjet // J. Thermophysics and Heat Transfer. 2013. V. 27. № 1. P. 11–21.
28. *Surzhikov S.T., Shang J.S.* Numerical Prediction of Convective and Radiative Heating of Scramjet Combustion Chamber with Hydrocarbon Fuels // AIAA-2013-1076. 2013. 16 p.
https://doi.org/10.2514/6.2013-1076
29. *Surzhikov S.T., Shang J.S.* Radiative Heat Exchange in a Hydrogen-Fueled Scramjet Combustion Chambers // AIAA-2013-0448. 2013. 20 p.
https://doi.org/10.2514/6.2013-448
30. *Суржиков С.Т.* Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлит, 2018. 543 с.
31. *Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М.: Наука, 1978. 495 с.
32. *Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.* Transport phenomenon. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, 2002. 928 p.
33. *Ludwig C.B., Malkmus W., Walker J., Slack M., and Reed R.* The Standard Infrared Radiation Model // AIAA 81–1051. 1981. 10 p.
34. *Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 576 с.
35. *Суржиков С.Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 543 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 135–150

УДК 533.96

УСЛОЖНЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДУЛЯЦИИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. S. Altmeyer[a,*]

[a] *Castelldefels School of Telecom and Aerospace Engineering (EETAC), Universitat Politècnica de Catalanya, Barcelona, Spain*

**E-mail: sebastian.andreas.altmeyer@upc.edu*

Поступила в редакцию 02.12.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Представлены результаты численного моделирования течения Куэтта магнитной жидкости между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях, при наличии пространственно однородного магнитного поля, подвергающегося периодическим во времени модуляциям. Такие модуляции могут привести к существенному увеличению внутреннего числа Рейнольдса Re_i в первичных бифуркационных решениях, обладающих спиральной либо тороидальной структурами течения. Кроме того, задаваемая извне частота модуляции повышает различные решения на один уровень в иерархии сложности. Так, решения с фиксированной точкой становятся предельными циклами, а предельные циклы становятся решениями с двумя торами. Далее, при достаточно больших амплитудах модуляции магнитного поля возможен обмен устойчивостью между спиральными и ленточными решениями, возникающими при общем пороге бифуркации. Наконец, обнаружена устойчивая бифуркационная ветвь с прямой связью между ленточными вихрями и вихрями Тэйлора посредством волнистых вихрей Тэйлора.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, магнитные жидкости, модулированное магнитное поле, сценарий бифуркации, периодическое во времени воздействие, прямое численное моделирование, вычислительная гидродинамика

DOI: 10.31857/S056852812203001X

Тестовым примером при исследовании проблем неустойчивости, нелинейного поведения и образования структур является движение вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися концентрическими цилиндрами (система Тэйлора–Куэтта, TCS), [1, 2]. Ввиду важности этих течений во многих технических приложениях (например, накачке жидкостей) были выполнены многочисленные исследования, показавшие, что система Тэйлора–Куэтта с внешним воздействием, зависящим от времени, представляет собой образцовый пример для изучения управления неустойчивостями течения.

Подобное внешнее воздействие на систему может быть осущетсвлено путем изменения граничных условий, например, посредством гармонически модулированных вращений внутреннего либо внешнего цилиндра (либо обоих), гармонических колебаний одного цилиндра в осевом направлении, пульсаций и т.д. [3–12]. Уже в ранних экспериментальных работах [7, 8] был обнаружен стабилизационный эффект, обусловленный таким воздействием. С тех пор данная проблема служила моделью для уяснения процессов периодического во времени внешнего воздействия и обусловленных им эффектов.

Использование магнитных жидкостей [13–15] предоставляет большие возможности в поддержании установки в стационарном состоянии и, при этом, периодическом воздействии на жидкость во всем ее объеме. В настоящее время проведены многочисленные численные и экспериментальные исследования течений Куэтта магнитных жидкостей при наличии статического магнитного поля. Изучалось влияние ориентации поля, агломерации, внутренней намагниченности, эффект кручения и т.д. [16–30]. Общий вывод всех этих работ состоит в том, что статическое магнитное поле, независимо от его ориентации, стабилизирует основное состояние (круговое течение Куэтта), т.е. отодвигает порог бифуркации первичной неустойчивости в сторону бóльших значений соответствующего определяющего параметра (например, внутреннего числа Рейнольдса Re_i).

В настоящее время исследования по течениям магнитных жидкостей под воздействием переменных магнитных полей сравнительно редки, а существующие работы сосредоточены в основном на вязкостных [31] и тепловых [32, 33] эффектах. Однако аналогично статическим полям, модулированные магнитные поля с достаточно высокой частотой модуляции стабилизируют основное состояние (круговое течение Куэтта) [15, 31] и могут предоставить в наше распоряжение достаточно точный определяющий параметр, манипулируя которым можно удерживать систему в до- или сверхкритическом состоянии [15]. В различных работах, посвященных в основном нагреву бинарных и магнитных жидкостей путем нестационарной модуляции [34–36], показано, что модуляция параметра в гидродинамических системах приводит к параметрическому резонансу. При этом возможны три типа отклика на параметр внешнего воздействия. Это *синхронный* отклик в случае, когда он повторяет внешнее воздействие, т.е. когда частота осциллирующего потока совпадает с частотой возбуждающего усилия. Затем это *субгармонический* отклик, когда характеристики системы осциллируют с удвоенной частотой (с полупериодом) по отношению к частоте воздействия. И, наконец, это квазипериодический отклик в том случае, когда осцилляции в потоке происходят на двух различных и *не связанных рационально* характерных частотах [37].

Интерес к использованию модулированных магнитных полей для управления течениями постоянно растет, благодаря их крайне востребованным свойствам и широкому кругу приложений. Одной из таких областей является медицина. Здесь магнитные жидкости могут быть использованы как носители лекарств, которые после впрыскивания в кровеносный сосуд могут быть сконцентрированы в требуемом месте путем приложения сильного градиента магнитного поля [38]. Другим возможным приложением может быть лечение раковых заболеваний посредством гипертермии. При увеличении количества помеченных частиц, вводимых в ткань опухоли с носителем, переменное магнитное поле может быть использовано для нагрева ткани [39]. Это позволит избежать нежелательных побочных влияний на другие органы при уничтожении опухоли.

В случае исследуемого здесь чисто осевого (модулированного) магнитного поля сохраняются классические структуры течения, присущие системам Тэйлора–Куэтта. Так, первичными стационарными бифуркационными течениями являются тороидально замкнутое вихревое течение Тэйлора [1, 40, 41] и два осесимметричных вырожденных осциллирующих спиральных вихря (спиральное вихревое течение) [40, 41] с левой или правой закруткой, представляющие собой нарушающую симметрию бифуркацию Хопфа. Одновременно имеет место бифуркация ленточного состояния, которая может рассматриваться как нелинейное наложение двух спиральных вихревых течений, распространяющихся в противоположных направлениях, на осевую стоячую волну. Устойчивость спирального и тэйлоровского вихревых течений первоначально определяется порядком их появления, зависящим от заданного определяющего параметра, например, скорости вращения внешнего цилиндра или, как в настоящей работе, амплитудой модуляции магнитного поля.

С точки зрения динамической системы классическое вихревое течение Тэйлора, возникающее в бифуркации типа вилки, представляет собой решение с фиксированной точкой, тогда как спиральное и ленточное вихревые течения соответствуют решениям с предельным циклом [2, 42, 43]. Однако ситуация меняется в присутствии модулированного магнитного поля, так как динамика течения становится сложнее. Дополнительный параметр – частота модуляции Ω_H – увеличивает размерность базисного пространства на единицу. Таким образом, прежнее стационарное решение (фиксированная точка) становится периодическим предельным циклом, а прежнее периодическое решение становится квазипериодическим (спиральное и ленточное течения, а также волнистый вихрь Тэйлора). Более того, достаточно сильные модулированные магнитные поля могут поменять местами параметры устойчивости спирального и ленточного течений и при этом стабилизировать всю ветвь волнистого вихря Тэйлора, как переходного процесса между различными топологическими (спиральными и азимутально замкнутыми) структурами. В прежних работах такое явление было названо “бифуркацией прыжком” [44, 45].

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим стандартную систему Тэйлора–Куэтта (рис. 1), состоящую из двух концентрических, вращающихся независимо друг от друга цилиндров и зазора между ними, наполненного несжимаемой, изотермической, однородной, монодисперсной магнитной жидкостью с кинема-

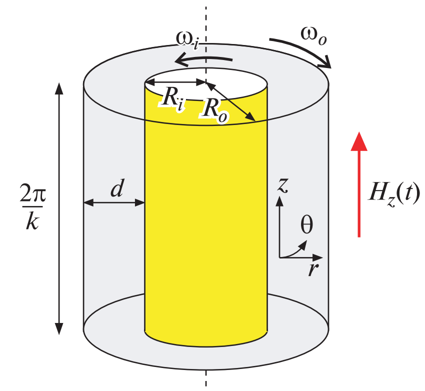

Рис. 1. Схема системы Тэйлора–Куэтта с приложенным внешним однородным, но нестационарным магнитным полем $H_z(t) = [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)]e_z$.

тической вязкостью ν и плотностью ρ. Внутренний (внешний) цилиндр имеет радиус R_i (R_o) и вращается с угловой скоростью $\omega_i(\omega_o)$. В осевом направлении z ставятся периодические граничные условия, соответствующие фиксированному осевому волновому числу $k = 3.927$, а на поверхностях цилиндров ставятся условия прилипания. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) система характеризуется полем скорости $u = (u, v, w)$ и соответствующим полем завихренности $\nabla \times u = (\xi, \eta, \zeta)$. В настоящей работе отношение радиусов цилиндров $R_i/R_o = 0.5$. Рассматривается система с противоположным направлением вращения цилиндров при фиксированном внешнем числе Рейнольдса $Re_o = -125$. Время и расстояния обезразмериваются по времени диффузии d^2/ν и ширине зазора d, а давление в жидкости по величине $\rho\nu^2/d^2$. Следует заметить, что используется предположение об однокомпонентной магнитной жидкости и пренебрегается диффузией наночастиц, которая тоже может играть роль в динамике течения.

Периодическое воздействие прикладывается путем синусоидальной модуляции внешнего магнитного поля, ориентированного параллельно оси симметрии системы z, равномерного в пространстве и гармонического во времени: $H_z = [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)]e_z$. Заметим, что в статическом случае подобное магнитное поле, ориентированное в чисто осевом направлении, сохраняет основную симметрию системы (см. раздел 1.3), лишь сдвигая порог ее устойчивости, как указывалось в ранних работах [23–25]. Интенсивность магнитного поля H и намагниченность M нормализованы, как это принято, по величине $\sqrt{\rho/\mu_0}\nu/d$ и магнитной проницаемости в свободном пространстве μ_0.

1.2. Гидродинамическое уравнение движения магнитной жидкости

Гидродинамические уравнения в безразмерном виде [25, 27, 46] выводятся из уравнений

$$(\partial_t + u \times \nabla)u - \nabla^2 u + \nabla p = (M \times \nabla)H + \frac{1}{2}\nabla \times (M \times H), \quad \nabla \times u = 0. \tag{1.1}$$

Поля скорости на поверхностях цилиндров $u(r_i, \theta, z) = (0, \mathrm{Re}, 0)$ и $u(r_o, \theta, z) = (0, 0, 0)$, где внутренние и внешние числа Рейнольдса равны $\mathrm{Re}_{i,o} = \omega_{i,o} r_{i,o} d/\nu$, а $r_i = R_i/(R_o - R_i)$ и $r_o = R_o/(R_o - R_i)$ – безразмерные радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Для решения системы (1.1) требуется еще одно уравнение, описывающее намагниченность магнитной жидкости. Рассмотрим равновесное намагничивание невозмущенного состояния однородно намагниченной магнитной жидкости в состоянии покоя при среднем магнитном моменте, ориентированном в направлении магнитного поля: $M^{\mathrm{eq}} = \chi H$. Магнитная восприимчивость χ магнитной жидкости может быть аппроксимирована по формуле Ланжевена [47]. Далее, с использованием линейного закона намагничивания начальное значение χ полагается равным 0.9. Рассматривается магнитная жидкость APG933 [48, 49]. Будем рассматривать близкие к равновесным аппроксимации [19, 50] с малыми значениями $\left\| M - M^{\mathrm{eq}} \right\|$ и малым значением времени магнитной релаксации τ: $|\nabla \times u|\tau \ll 1$. Используя эти аппроксимации, можем получить, аналогично [27], следующее уравнение магнетизации

$$M - M^{\mathrm{eq}} = c_N^2\left(\frac{1}{2}\nabla \times u \times H + \lambda_2 \mathbb{S} H\right), \tag{1.2}$$

где

$$c_N^2 = \tau \big/ (1/\chi + \tau\mu_0 H^2/6\mu\Phi) \tag{1.3}$$

есть коэффициент Никласа [19], μ – динамическая вязкость, Φ – объемная доля магнитного материала, $\mathbb{S}$ – симметричная компонента тензора градиента скорости [27, 46] и λ_2 – коэффициент переноса, зависящий от материала [46]; значение последнего, в соответствии с [30, 46, 51, 52], выбрано равным $\lambda_2 = 4/5$. Используя уравнение (1.2), можно исключить магнетизацию из уравнения (1.1) и получить следующую систему уравнений движения магнитной жидкости [25, 27, 46]

$$(\partial_t + u\cdot\nabla)u - \nabla^2 u + \nabla p_M = -\frac{s_z^2}{2}\left[H\nabla\cdot\left(F + \frac{4}{5}\mathbb{S}H\right) + H\times\nabla\times\left(F + \frac{4}{5}\mathbb{S}H\right)\right], \tag{1.4}$$

где $F = (\nabla \times u/2)\times H$, p_M – динамическое давление, включающее все магнитные компоненты, которые могут быть выражены в виде градиентов, и s_z – парамер Никласа (уравнение (1.6)). В главном порядке внутреннее магнитное поле магнитной жидкости может быть аппроксимировано как наложенное извне поле [25], что является разумным приближением для получения динамических решений, соответствующих течениям жидкости, возбуждаемым магнитным полем. Уравнение (1.4) может быть упрощено и приведено к виду

$$\begin{gathered}(\partial_t + u\cdot\nabla)u - \nabla^2 u + \nabla p_M = s_z^2\left\{\nabla^2 u - \frac{4}{5}[\nabla\cdot(\mathbb{S}H)] - \right.\\ \left. - H\times\left[\frac{1}{2}\nabla\times(\nabla\times u\times H) - H\times(\nabla^2 u) + \frac{4}{5}\nabla\times(\mathbb{S}H)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, влияние магнитного поля (в данном случае однородного, но периодического, меняющегося во времени по закону $H_z = [H_S + H_M\sin(\Omega_H t)]e_z$) и всех магнитных свойств магнитной жидкости на поле скорости может быть охарактеризовано единственным (в данном случае зависящим от времени) параметром Никласа [19]

$$\begin{aligned}s_z(t) = \sqrt{c_N}H_z = \sqrt{c_N}\,[H_S + H_M\sin(\Omega_H t)] = \\ = s_{z,S} + s_{z,M}\sin(\Omega_H t),\end{aligned} \tag{1.6}$$

и двумя не зависящими от времени определяющими параметрами

$$s_{z,S} = \sqrt{c_N}H_S \quad \text{and} \quad s_{z,M} = \sqrt{c_N}H_M, \tag{1.7}$$

где $s_{z,S}$ – статический вклад в силовое воздействие, $s_{z,M}$ – амплитуда модуляции и Ω_H – частота модуляции. В настоящей работе рассматривается чисто модулированное магнитное поле (без какой-либо статической составляющей, т.е. $s_{z,S} = 0$) в высокочастотном пределе $\Omega_H = 0$; это означает, что инерцией жидкости можно пренебречь и система встречается с действием осредненного магнитного поля [15].

1.3. Симметрии

В отсутствие периодического воздействия группа симметрии проблемы Тэйлора–Куэтта есть $O(2)\times SO(2)$ [2]. Основное состояние инвариантно по отношению к числу симметрий, чьи действия на общее поле скоростей описываются следующим образом

$$\begin{gathered}R_\Phi(u,v,w)(r,\theta,z) = (u,v,w)(r,\theta+\Phi,z)\\ K_z(u,v,w)(r,\theta,z) = (u,v,-w)(r,\theta,-z)\\ T_\alpha(u,v,w)(r,\theta,z) = (u,v,w)(r,\theta,z+\alpha)\end{gathered} \tag{1.8}$$

Симметрия $SO(2)$ происходит от вращений вокруг оси, а $O(2)\times SO(2)$ представляет собой группу симметрии для системы под периодическим внешним воздействием. В то время как $SO(2)$

остается не подверженным влиянию модуляции, осевая симметрия нарушается и, вместе с ней, симметрия проблемы в целом. Вместо этого, в сочетании со сдвигом во времени на полпериода, получим скользящую во времени симметрию системы G. Эта симметрия, вместе с перемещениями вдоль оси, составляет группу симметрии $O(2)$. С точки зрения воздействия на поле скорости можно выписать следующее выражение для этой симметрии (симметрия с полупериодным опрокидыванием)

$$G(u,v,w)[r,\theta,z,t] = (u,v,-w)[r,\theta,-z,t\acute{y}]. \tag{1.9}$$

При этом R меняется от чисто пространственной симметрии к пространственно-временно́й симметрии. Пространственно-временна́я симметрия Z_2, порожденная G, создает более сложный сценарий бифуркации, запрещая удвоение периода через простое отрицательное собственное значение $\mu = -1$ [4, 53].

1.4. Численный метод

Уравнения движения магнитной жидкости (1.4) могут быть решены [24, 25, 27] сочетанием стандартной разностной схемы второго порядка по (r,z) со спектральным Фурье-разложением по θ и явным интегрированием по времени. Переменные задачи могут быть представлены в виде

$$f(r,\theta,z,t) = \sum_{m=-m_{\max}}^{m_{\max}} f_m(r,z,t)e^{im\theta}, \tag{1.10}$$

где f означает одну из переменных $\{u,v,w,p\}$. В рассмотренных диапазонах параметров выбор $m_{\max}$ обеспечивает адекватную точность. В работе используется равномерная сетка с шагами по пространству $\delta r = \delta z = 0.02$ и шагом по времени $\delta t < 1/3800$. Для диагностических целей также оцениваются комплексные амплитуды мод $f_{m,n}(r,t)$, определяемые из разложения Фурье в осевом направлении

$$f_m(r,z,t) = \sum_n f_{m,n}(r,t)e^{inkz}, \tag{1.11}$$

где $k = 2\pi d/\lambda$ – осевое волновое число.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Характеристики бифуркации

В классической проблеме Тэйлора–Куэтта первичные решения в виде вихревых течений Тэйлора появляются в результате суперкритической бифуркации типа вилки, нарушающей трансляционную симметрию T_α. Вихревые течения Тэйлора представляют собой семейство устойчивых осесимметричных решений, с параметром в виде их расположения на оси; визуально они имеют вид групы наложенных друг на друга “жидких бубликов”. Что касается спиральных и ленточных течений, они возникают в бифуркации Хопфа, нарушающей симметрию $O(2)$ (исключая K_z). С динамической точки зрения эти течения соответствуют решениям с фиксированной точкой и предельным циклам соответственно. Однако периодическое силовое воздействие изменяет этот “классический” сценарий. В действительности оно увеличивает размерность базового пространства на единицу. Поэтому вихревое течение Тэйлора становится решением предельного цикла, а спиральное и ленточное течения становятся квазипериодическими решениями типа двойного тора. Более подробно мы остановимся на этом вопросе в разделе 2.1.4.

2.1.1. Пороги устойчивости при изменении амплитуды модуляции $s_{z,M}$

На рис. 2а показаны ветви прямой бифуркации спирального (треугольники) и тэйлоровского вихревого (кружки) решений для различных значений амплитуды модуляции магнитного поля $s_{z,M}$. Начала ветвей определяются критической кривой изменения амплитуды модуляции $s_{z,M}$ (рис. 7). Пороги бифуркации для спиральных и ленточных течений совпадают [2, 45, 54]. Для всех $s_{z,M}$, кроме $s_{z,M} = 1$, ленточные течения в начальной точке неустойчивы, а спиральные течения устойчивы.

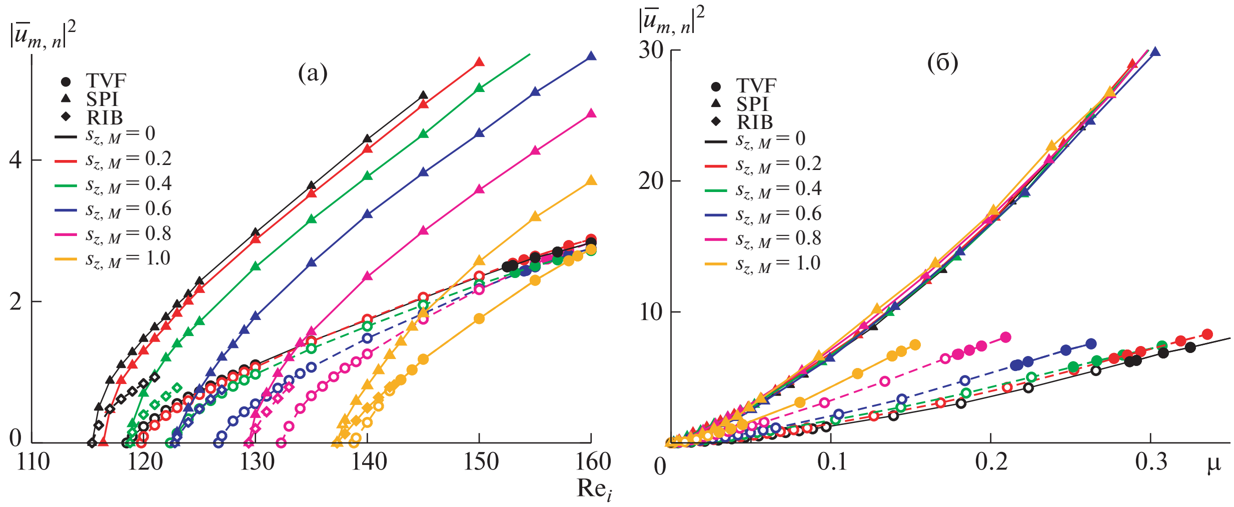

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма. Осредненные по времени амплитуды различных мод $|\bar{u}_{m,n}|$ радиального поля течения в середине просвета между цилиндрами для вихревого течения Тэйлора (TVF, $|\bar{u}_{0,1}|$, •) и спирального течения (SPI, $|\bar{u}_{1,1}|$, ▲) при различных амплитудах модуляции $s_{z,M}$ магнитного поля в зависимости от (а) внутреннего числа Рейнольдса Re_i и (б) относительного расстояния $\mu = \mathrm{Re}_i(s_{z,M})/\mathrm{Re}_{i,c}(s_{z,M}) - 1$ от начального значения $\mathrm{Re}_{i,c}(s_{z,M})$, соответствующего возникновению данной моды при заданной амплитуде модуляции магнитного поля $s_{z,M}$. Темные и светлые значки соответствуют устойчивым и неустойчивым решениям. SPI являются устойчивыми при $s_{z,M} \lesssim 0.82$ и остаются устойчивыми далее, тогда как TVF в начальной стадии неустойчивы, но стабилизируются при бóльших Re_i. Для большей наглядности ветви, соответствующие ленточным решениям (RIB), представлены только вблизи их начала. Эти решения появляются у того же порога, что и SPI, причем происходит обмен устойчивостью между этими двумя решениями. Таким образом, RIB устойчивы при $s_{z,M} \gtrsim 0.82$. См. также рис. 7.

Будучи сверхкритическими для спиральных, ленточных и тэйлоровских течений, амплитуды доминантных мод $|\bar{u}_{1,1}|$ и $|\bar{u}_{0,1}|$ растут по известному закону квадратного корня. Заметим, что здесь используются осредненные по времени амплитуды мод $|\bar{u}_{m,n}|$; сами $|u_{m,n}|$ являются периодическими во времени, в соответствии с частотой модуляции Ω_H (см. рис. 5).

Однако существуют некоторые очевидные различия ветвей, соответствующих двум различным решениям. Характер бифуркационных ветвей спиральных решений остается в целом одним и тем же, лишь начала этих ветвей смещаются в сторону бóльших Re_i при увеличении $s_{z,M}$ (вправо на рис. 2а). Эти решения являются устойчивыми почти во всем представленном здесь диапазоне параметров. Ветви тэйлоровских вихревых решений ведут себя по-иному с увеличением амплитуды модуляции. Прежде всего, эти решения неустойчивы вблизи начал своих ветвей и приобретают устойчивость с увеличением Re_i. Во-вторых, наклоны этих сверхкритических ветвей с увеличением Re_i становятся значительно меньше, чем наклоны кривых для спиральных решений (по крайней мере, при малых и умеренных значениях $s_{z,M}$). В-третьих, эти наклоны становятся круче с ростом $s_{z,M}$. Эти изменения характеристик бифуркации становятся очевидными, когда сценарий бифуркации соотносится с его соответствующим началом (рис. 2б). Все кривые для спиральных решений практически совпадают. С другой стороны, с увеличением амплитуды модуляции $s_{z,M}$ амплитуды мод тэйлоровских вихревых решений растут значительно быстрее, а соответствующие наклоны кривых становятся круче. Таким образом, спиральные течения менее чувствительны к росту амплитуды модуляции, т.е. внутреннее течение остается неизменным.

Окончательно можно сказать, что увеличение амплитуды модуляции $s_{z,M}$ сдвигает начало всех первичных неустойчивостей (спиральной, ленточной и тэйлоровской) в сторону бóльших значений определяющего параметра Re_i (вправо на рис. 2а) и, таким образом, стабилизирует основное состояние кругового течения Куэтта по отношению к любым возникающим первичным неустойчивостям. Хотя величина стабилизации различна, порядок бифуркации не изменяется (для рассмотренного в работе диапазона параметров). Аналогичное наблюдение было сделано в численных и экспериментальных исследованиях по увеличению напряженности статического магнитного поля [22–24] и, недавно, для вихревых течений Тэйлора в модулированных магнитных полях [15] при внешнем цилиндре, находящемся в состоянии покоя. При достаточно больших амплитудах модуляции устойчивость первичного бифуркационного решения переходит от спирального к ленточному решению.

2.1.2. Устойчивая связь между ленточным и волнистым тэйлоровским вихревым решениями

Большие амплитуды модуляции ($s_{z,M} = 1$) не только приводят к обмену устойчивостью между двумя первичными бифуркационными решениями, перенося ее от спирального к ленточному решению (рис. 2), но они могут даже стабилизировать всю бифуркационную ветвь, соединяя ленточное решение с тэйлоровским через волнистый тэйлоровский вихрь [44, 45].

Этот феномен проиллюстрирован на рис. 3, где построены устойчивые (сплошные кривые с темными значками) и неустойчивые (пунктирные кривые со светлыми значками) бифуркационные кривые тэйлоровских вихревых (синие кружки), спиральных (красные треугольники), ленточных (зеленые ромбы) и тэйлоровских волнистых вихревых (черные квадраты) решений как функции Re_i в отсутствие магнитного поля $s_{z,M} = 0$ (а) и при большой амплитуде модуляции $s_{z,M} = 1$ (б). Соответствующие параметры также показаны двумя стрелками (а) и (б) на фазовой диаграмме (рис. 7). Представлены: (1), кинетическая энергия мод $E_{kin} = \sum_m E_m = \frac{1}{2}\sum_m \int_0^{2\pi}\int_{-\Gamma/2}^{\Gamma/2}\int_{r_i}^{r_o} u_m u_m^* r dr dz d\theta$ (где $u_m(u_m^*)$ – m-я (комплексно сопряженная) Фурье-мода поля скоростей) и (б), амплитуды мод $|u_{m,n}|$.

Сценарий бифуркации в отсутствие магнитного поля (1.3) обсуждался ранеее и здесь представлен лишь для напоминания и сравнения. Его детальное описание содержится в работе [45]. Вкратце, с уменьшением Re_i тэйлоровское вихревое течение теряет устойчивость, а при его вторичной бифуркации возникает устойчивое волнистое тэйлоровское вихревое течение. С приближением последнего к ветви неустойчивого ленточного решения оно и само теряет устойчивость и “подпрыгивает” вверх к единственной устойчивой ветви, соответствующей спиральному течению [44, 45] (показано вертикальными стрелками на рис. 3(1)).

При больших амплитудах модуляции $s_{z,M} = 1$ сценарий бифуркации выглядит на первый взгляд аналогичным: он смещаеися в сторону бóльших Re_i благодаря обсуждавшемуся выше эффекту стабилизации за счет модулированного магнитного поля. Однако более важным является тот факт, что, благодаря внешнему воздействию, осуществляемому модулированным магнитным полем, повышается на единицу сложность всех решений (см. ниже). Важное различие состоит также и в том, что при $s_{z,M} = 1$ не происходит “прыжка”, а вместо этого ветвь, соответствующая волнистому тэйлоровскому решению, непосредственно соединяется с ленточным решением с переносом устойчивости с одной ветви на другую (рис. 3б).

В отсутствие магнитного поля кинетическая энергия мод E_{kin} для спиральных, ленточных и тэйлоровских вихревых решений является выпуклой функцией Re_i, а E_{kin} в начале ветви тэйлоровского решения больше, чем в случае спиральной и ленточной мод (при том же значении Re_i). Как и следовало ожидать, E_{kin} для волнистого тэйлоровского вихревого решения несколько больше, чем для (неустойчивого) тэйлоровского решения, благодаря более сложной динамике потока, включающей дополнительные спиральные движения. Качественно, при больших амплитудах модуляции $s_{z,M}$ изменения E_{kin} при изменении Re_i очень похожи. Однако, кривые для различных решений менее выпуклы и, особенно на начальной стадии, обнаруживают в основном линейное поведение. Далее, энергия E_{kin} для спирального и ленточного решений выше, чем для двух тороидальных решений – тэйлоровского вихревого и волнистого тэйлоровского вихревого.

2.1.3. Характеристики течения

Следуя по бифуркационной ветви, соответствующей волнистому тэйлоровскому решению, от тэйлоровского решения к устойчивой ленточной ветви, можно заметить, что динамика течения становится более волнистой (см. рис. 4(2)–4(4)), т.е. амплитуды спиральных мод $u_{1,\pm}$ возрас-

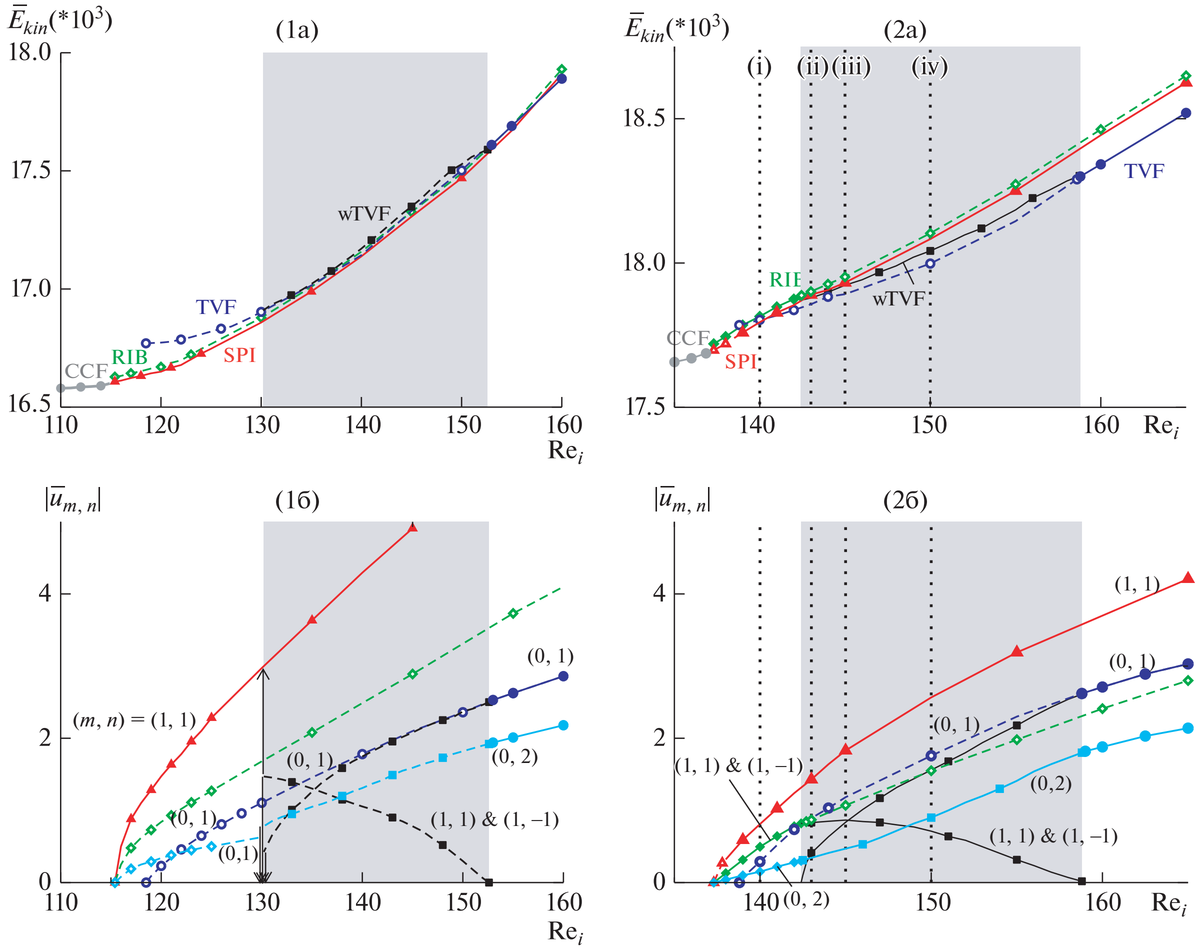

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для различных вихревых структур как функции от Re_i для (1) $s_{z,M} = 0$ и (2) $s_{z,M} = 1$ (см. стрелки на рис. 7). Сплошные (пунктирные) линии с темными (светлыми) значками относятся к устойчивым (неустойчивым) решениям. Представлены (а) кинетическая энергия мод E_{kin} и (б) амплитуды в радиальном поле течения в середине просвета между цилиндрами $|u_{m,n}|$ для вихревого решения Тэйлора (TVF, $(m,n) = (0,1)$), спирального решения (SPI, $(m,n) = (1,1)$), ленточного решения (RIB, $(|u_{1,1}| = |u_{1,-1}|)$) и волнистого вихревого решения Тэйлора (wTVF). Характерной особенностью волнистого решения является то, что $u_{0,1} \neq 0$ и $u_{1,\pm1} = 0$, тогда как $u_{0,1}^{\mathrm{SPI}} = 0 = u_{1,\pm1}^{\mathrm{TVF}}$. (*i*)–(*iv*) указывают наборы параметров, для которых представлены визуализации на рис. 4.

тают, тогда как доминирующие азимутальные моды $u_{0,\pm1}$ нерперывно убывают (рис. 3б). В некоторой точке спиральные моды $u_{1,\pm1}$ (рис. 3а) даже превышают тороидальную моду. Это имеет место для обоих сценариев, в которых ленточная мода может быть как устойчива, так и неустойчива. С уменьшением $u_{0,\pm1}$ вихревые трубки внутри азимутального волнистого тэйлоровского вихревого течения сужаются в определенных азимутальных положениях ($\theta = \pi/4$) (рис. 4(2в)). Окончательно, когда $u_{0,\pm1}$ становится равным нулю, вихревые трубки рвутся, превращаясь в ленточные. Чтобы подчеркнуть прямую связь волнистой тэйлоровской и ленточной ветвей, на рис. 3(2б) также включены моды $(0.\pm 2)$. В то время как при $s_{z,M} = 0$ соответствующий “прыжок” при переходе на спиральную ветвь отсутствует (при $(0.\pm 1)$), при $s_{z,M} = 1$ мода плавно (без прыжка) продолжается от тэйлоровского вихревого к ленточному течению.

2.1.4. Увеличение сложности

Чтобы охарактеризовать количественно влияние амплитуды модуляции магнитного поля $s_{z,M}$, на рис. 5 построены временные ряды и соответствующие спектральные плотности энергии (PSD)

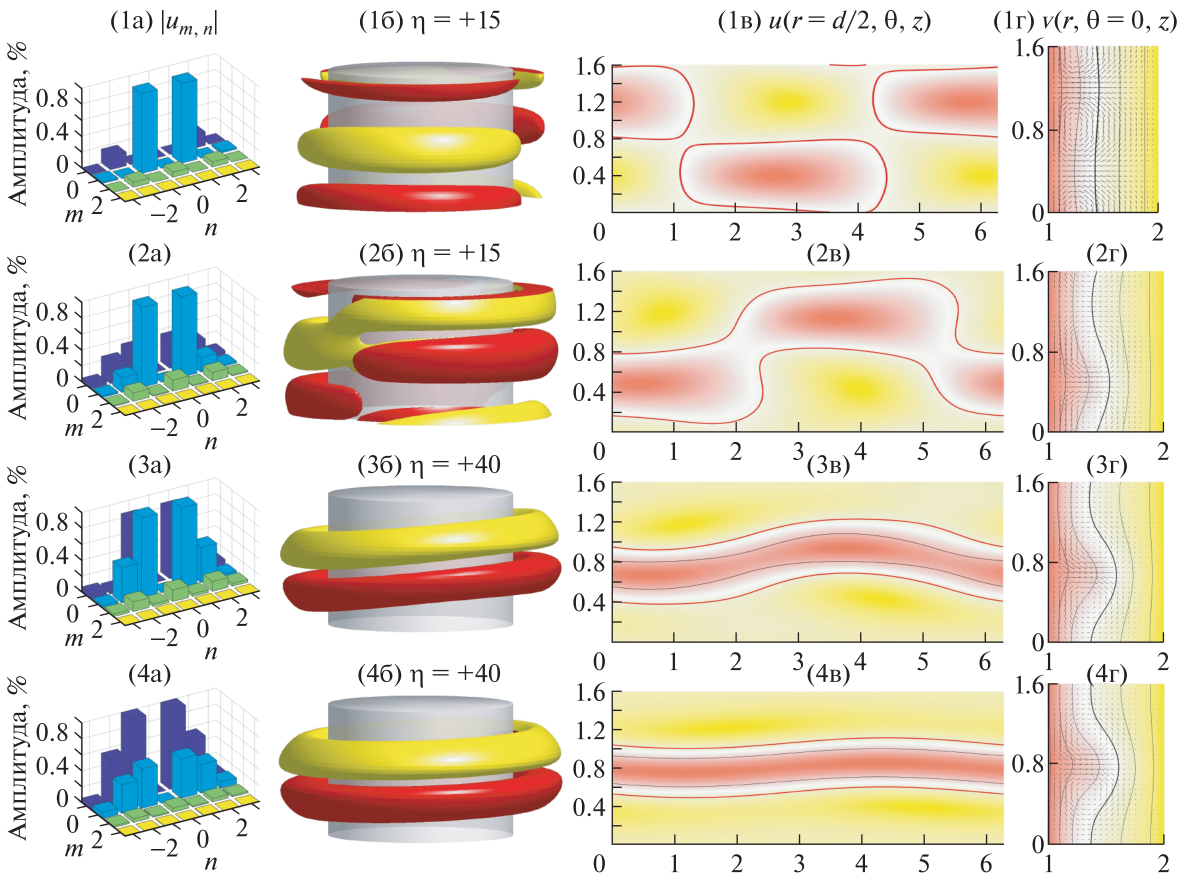

Рис. 4. Визуализация различных устойчивых структур течения вдоль ветви, соединяющей ленточные (RIB) и волнистые тэйлоровские (wTVF) решения, возникающие с изменением Re_i. Кадры соответствуют: (1) RIB при $\mathrm{Re}_i = 0$, (2) wTVF при $\mathrm{Re}_i = 3$, (3) wTVF при $\mathrm{Re}_i = 5$, (4) wTVF при $\mathrm{Re}_i = 0$ (соответствующие параметры указаны вертикальными линиями (i)–(iv) на рис. 3). Показаны (а) Фурье-спектр (m,n); (б) изоповерхности η [красные (темно-серые) и желтые (светло-серые) цвета соответствуют положительным и отрицательным значениям, нулевым значениям соответствует белый цвет]; (в) радиальная скорость $u(\theta, z)$ на развернутой цилиндрической поверхности в середине кольцевого просвета между цилиндрами [красные (желтые) цвета соответствуют втекающему и вытекающему потоку]; (г) векторное поле $[u(r,z), w(r,z)]$ радиальной и осевой компонент скорости (включая помеченную цветами азимутальную скорость v).

для глобальной меры E_{kin} и локальной меры $\eta_{\pm} = (0, 0, \pm 0.25\Gamma)$ для различных указанных состояний течения. Величина PSD для вихревого течения Тэйлора (рис. 5(1)) лучше всего иллюстрирует влияние частоты модуляции внешнего поля Ω_H как на глобальную величину E_{kin}, так и на локальную величну η_+. Тогда как классическое вихревое течение Тэйлора представляет собой стационарное решение с фиксированной точкой, модулированное во времени магнитное поле превращает это течение в предельный цикл, повышая его на единицу в иерархии сложности. Таким образом, для вихревого течения Тэйлора PSD дает классический синхронный отклик [55]. Для рассмотренной здесь частоты модуляции поля $\Omega_H = 0$ результирующая частота f_H, возникающая в решении предельного цикла для вихревого течения Тэйлора $f_H = \Omega_H/2\pi = 0.916$ $[\Omega_H = 0]$, что эквивалентно периоду модуляции $\tau_H = 0.0628$. Аналогично, спиральное и ленточное решения, являющиеся классическими решениями предельного цикла (с одним тором), приобретают более сложный тип решения. Благодаря наличию частоты модуляции Ω_H, они становятся квазипериодическими решениями (с двумя торами). Спиральное и ленточное решения (рис. 5(2, 3)) обладают, каждая, некоторой основной частотой (f_{SPI}, f_{RIB}), что характеризует их как модулированные вращающиеся волны; заметим, что классические спиральное и ленточное решения представляют собой вращающиеся волны. Оба они являются примерами квазипериодического

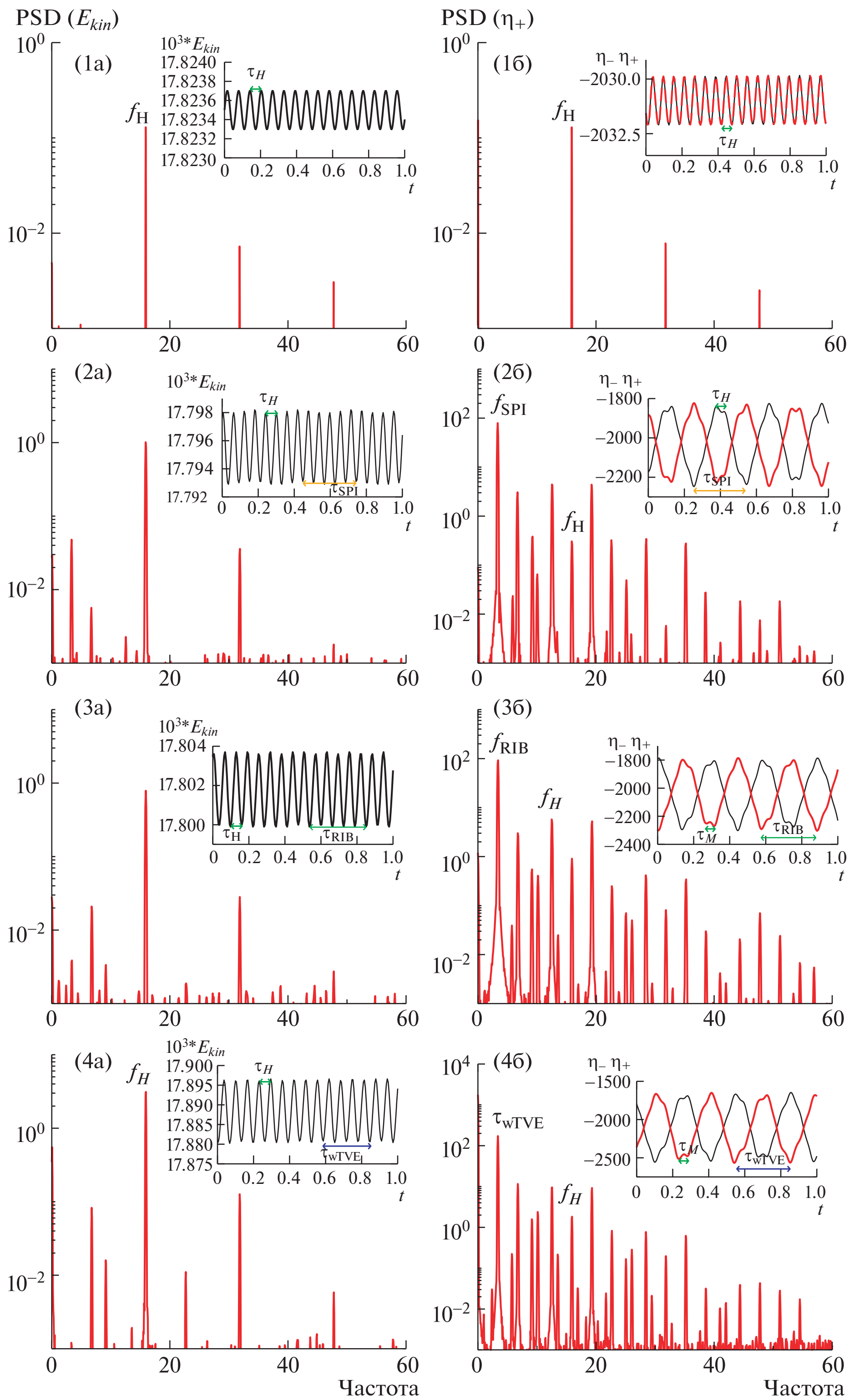

Рис. 5. Зависимость от времени и спектральная плотность энергии (PSD) для различных структур течения при указанных значениях Re_i. Значения PSD для (а) E_{kin} и (б) η_+ [$\eta_\pm = (0, 0, \pm 0.25\Gamma)$] для (1) тэйлоровского вихревого решения TVF (неустойчивое) при ($\mathrm{Re}_i = 0$, $s_z = 1.0$) с $\tau_{\mathrm{TVF}} = \tau_H \approx 0.0628$ ($f_{\mathrm{TVF}} = f_H \approx 15.916$); (2) спирального решения SPI при $\mathrm{Re}_i = 0$, $s_z = 1.0$ с $\tau_{\mathrm{SPI}} \approx 0.298$ ($f_{\mathrm{SPI}} \approx 3.354$); (3) ленточного решения RIB при $\mathrm{Re}_i = 0$, $s_z = 1.0$ с $\tau_{\mathrm{RIB}} \approx 0.292$ ($f_{\mathrm{RIB}} \approx 3.426$) и (4) волнистого тэйлоровского вихревого решения wTVF при $\mathrm{Re}_i = 3$, $s_z = 1.0$ с $\tau_{\mathrm{wTVF}} \approx 0.299$. На вставках зависимости от времени (а) E_{kin} и (б) η_+ [красный (серый)] и η_- (черный) соответственно. Значения параметров указаны также на рис. 7.

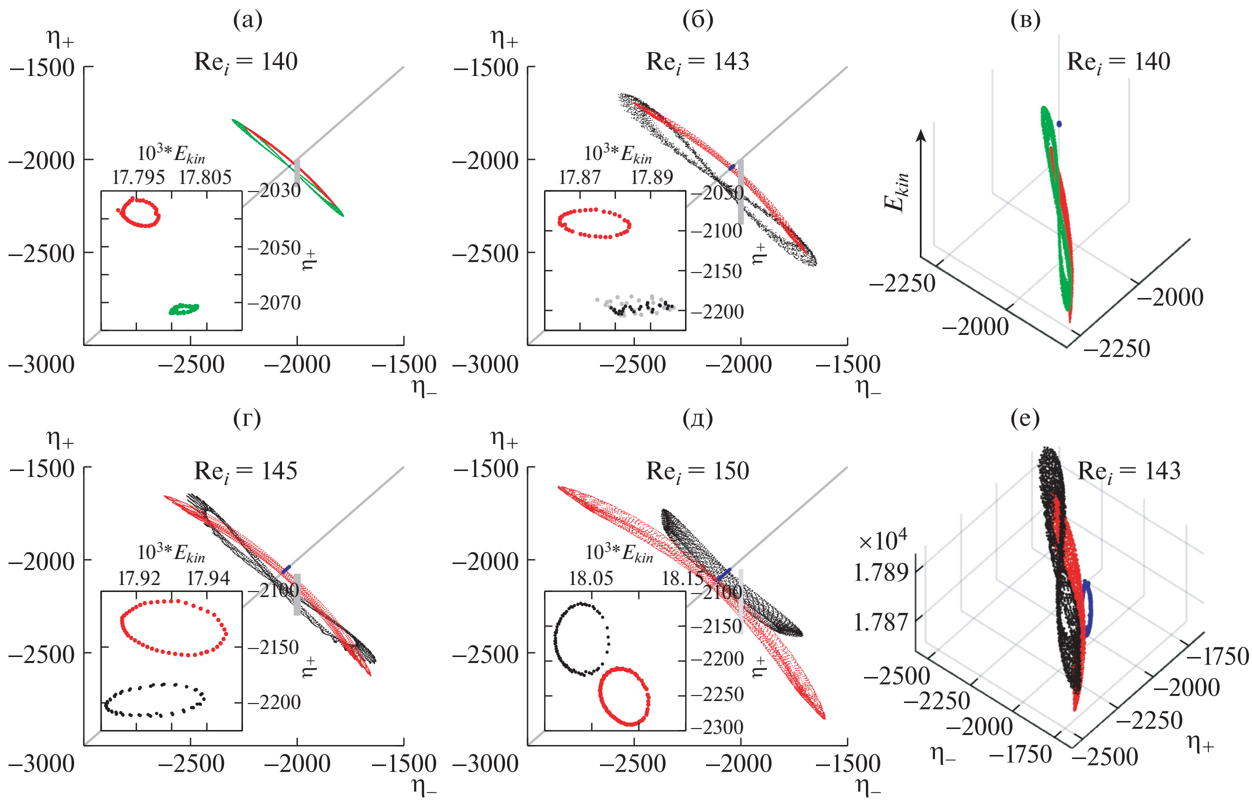

Рис. 6. Фазовые портреты в плоскости (η_-, η_+) (а–г) и динамика в фазовом пространстве $(\eta_+, \eta_-, E_{kin})$ (д, е) решений TVF, SPI, RIB и wTVF при значениях Re_i, указанных на плоскости (η_-, η_+).

отклика [55]; для спирального решения отношение $f_{\mathrm{SPI}}/f_{\mathrm{H}} = 3.354/15.916 = 0.2107$, а для ленточного $f_{\mathrm{RIB}}/f_{\mathrm{H}} = 3.426/15.916 = 0.2152$. Модуляция, вызванная нестационарным внешним полем, лучше всего различима в соответствующих временных рядах локальных мер $\eta_\pm$ (вставки в рис. 5(2б, 3б)). Соответствующие значения PSD для η_+ показывают нелинейное наложение двух этих частот, тогда как значения PSD и временные ряды для E_{kin}, являющейся глобальной мерой, значительно проще. При почти идентичных частотах пик PSD для f_{RIB} много меньше, чем для f_{SPI}, что проистекает из того факта, что ленточное решение представляет собой стоячие волны в осевом направлении, тогда как спиральное решение еще и распространяется вдоль оси. В случае волнистого тэйлоровского решения (рис. 5(4)) временные ряды для $\eta_\pm$ очень близки к рядам для ленточного решения, но с бóльшим диапазоном изменения, а для соответствующего PSD имеет место отношение частот $f_H : f_{\mathrm{wTVF}} = 5:1$ ($f_{\mathrm{wTVF}}/f_{\mathrm{H}} = 3.221/15.916 = 0.2023$). В отличие от ленточного решения, f_{wTVF} не возникает в PSD глобальной величины E_{kin}, а только в PSD локальной величины η_+. Это следует из различной природы волнистого вихревого течения Тэйлора и спирального решения. Первое в основном есть вихревое течение Тэйлора с азимутальной (спиральной) модуляцией, а второе есть наложение двух чисто спиральных решений с противоположным направлением закрутки, но с той же частотой f_{SPI}.

Для визуализации эволюции динамики течения при изменении Re_i на рис. 6 показаны фазовые портреты различных решений (вихревых тэйлоровских, спиральных, ленточных и волнистых вихревых тэйлоровских), возникающие на траектории перехода в плоскости (η_-, η_+). В этой плоскости вихревые решения Тэйлора лежат на диагонали $\eta_+ = \eta_-$. То есть, говоря топологическим языком, они представляют собой вырожденный предельный цикл. Однако трехмерная визуализация $(\eta_+, \eta_-, E_{kin})$ (рис. 6(д, е)) обнаруживает предельный цикл, характерный для вихревого течения Тэйлора, который становится все более отчетливым с увеличением $s_{z,M}$.

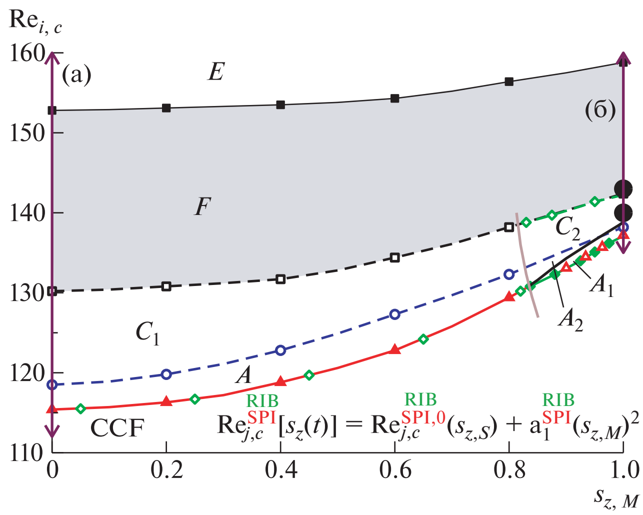

Рис. 7. Фазовые диаграммы.

Спиральные и ленточные решения, представляющие собой модулированные вращающиеся и стоячие волны, соответственно, симметричны относительно диагонали $\eta_- = \eta_+$. С увеличением Re_i все бóльшая область в фазовом пространстве (η_-, η_+) становится сверхкритической и не претерпевает качественных изменений. Хотя классические спиральное и ленточное решения представляют собой периодические предельные циклы (с одним тором), дополнительное нестационарное воздействие увеличивает их размерность на +1 и они становятся квазипериодическими решениями на инвариантном многообразии с двумя торами. На вставках в рис. 6а–6г показаны соответствующие двумерные сечения Пуанкаре (E_{kin}, η_+) при $\eta_- = 2000$ (показаны серыми линиями в пространстве (η_-, η_+)) для спиральных, ленточных и тэйлоровских вихревых решений. С увеличением Re_i фазовые портреты для всех спиральных, ленточных и волнистых тэйлоровских решений занимают все более обширные области в фазовом пространстве (η_-, η_+); при этом волнистые тэйлоровские решения смещаются в сторону бóльших значений $\eta_\pm$ (вверх и вправо на рис. 6а–6г), а спиральные решения смещаются в противоположном направлении, в сторону меньших значений $\eta_\pm$ (вниз и влево на рис. 6а–6г). Таким образом, все симметрии остаются на месте.

Ветвь, соответствующая вихревому течению Тэйлора, остается двумерной, сохраняя симметрию относительно срединной плоскости. Однако для других решений (спиральных, ленточных и волнистых) эта симметрия нарушается, но сохраняется более сложная отражательная симметрия со сдвигом, что делает эти решения полностью трехмерными.

3.2. Фазовая диаграмма

Как отмечалось выше (рис. 2), увеличение амплитуды модуляции $s_{z,M}$ стабилизирует систему, т.е., различные неустойчивости возникают при бóльших значениях определяющего параметра Re_i. Однако величина этого влияния на пороги первичной бифуркации различна для спиральных и ленточных решений, с одной стороны, и вихревых решений Тэйлора, с другой стороны. В первом случае стабилизация основного состояния (кругового течения Куэтта) может быть количественно приближенно описана степенной зависимостью вида $((\mathrm{Re}^{\mathrm{SPI/RIB}}_{i,c}[s_z(t)]) = Re^{\mathrm{SPI/RIB},0}_{i,c} + a_1^{\mathrm{SPI/RIB}} s_{z,M}^2$ с $a_1^{\mathrm{SPI/RIB}}$!.8) (рис. 7). Аналогичный стабилизационный эффект наблюдался и в случае статических магнитных полей [22–24]. Однако для вихревого решения Тэйлора изменения при модуляции поля (выражаемой параметром $s_{z,M}$) более сложны и не могут быть аппроксимированы столь простой квадратичной формулой. Это согласуется с ранее описанными сильными модификациями бифуркационных ветвей для вихревых решений Тэйлора (рис. 2).

Для параметров на рис. 7 максимальное увеличение устойчивости по Re_i составляет примерно 14.6% для спиральных и ленточных решений и 16.6% для вихревых решений Тэйлора, если сравнивать системы при отсутствии магнитного поля и при наличии переменного магнитного поля с $s_{z,M} = 1$.

С увеличением $s_{z,M}$ и стабилизацией основного состояния системы суживается диапазон Re_i, в котором существуют волнистые вихревые течения Тэйлора (область F). Эта область полностью исчезает, когда пороги первичной бифуркации для спиральных и вихревых решений пересекаются (см. [45]) при бóльших значениях $s_{z,M}$ (которые лежат вне диапазона параметров, рассмотренного в настоящей работе).

Пороги спиральных и ленточных решений идентичны [2, 45, 54], но ленточные решения более неустойчивы в начальной стадии. В то время как при $s_{z,M} \lesssim 0.82$ спиральное решение является устойчивым, а ленточное неустойчивым в начальной стадии, при $s_{z,M} \gtrsim 0.82$ картина противоположная. Переходя в фазовом пространстве от области F в обдасть C_2, можно обнаружить устойчивую связующую ветвь между волнистым вихревым и ленточным решениями (рис. 3(2)), в то время как при переходе из области F в область C_1 волнистое решение теряет устойчивость и имеет место бифуркация “прыжком” [44, 45] к спиральному решению (рис. 3(1)).

Подводя итог, можно сказать, что с точки зрения устойчивости система реагирует на модуляцию магнитного поля так же, как и на увеличение напряженности магнитного поля в статическом случае. Это справедливо для всех решений (спиральных, ленточных и вихревых тэйлоровских), но сильнее всего стабилизационный эффект проявляется в случае спиральных и ленточных решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена динамика течения магнитной жидкости при воздействии модулированного магнитного поля. Численно решены уравнения движения магнитной жидкости для системы Тэйлора—Куэтта с цилиндрами, вращающимися в противоположном направлении. Показано, что модулированные магнитные поля стабилизируют основное состояние системы (круговое течение Куэтта), смещая пороги бифуркации в сторону бóльших значений определяющих параметров. Величина эффекта стабилизации, т.е., указанного смещения, зависит от конкретных решений и определяющих параметров. Однако в целом эффект представляется меньшим, чем в статическом случае.

Дополнительная частота Ω_H, вносимая модулируемым магнитным полем, коренным образом влияет на базовую топологию структур течения. Основной результат заключается в увеличении сложности характера течения с ростом всех решений в иерархии сложности. Так, вихревое течение Тэйлора — классическое решение с фиксированной точкой — становится предельным циклом (один тор), а классические периодические решения с предельным циклом (спиральное, ленточное и волнистое тэйлоровское) становятся квазипериодическими решениями, находящимися в состоящем из двух торов инвариантном многообразии. Это обстоятельство может быть интересно для будущих исследований, в которых подобное модулированное поле может быть наложено на известные решения с тремя торами, чтобы обнаружить и исследовать динамику и потенциальные сценарии бифуркации для потенциальных решений с четырьмя торами. Последние могут помочь получить некоторое новое и/или иное представление о турбулентности (табл. 1).

В рассмотренном здесь случае высокочастотной модуляции $\Omega_H = 0$ отношение частоты внешнего воздействия и характерной частоты решения (волнистого, спирального и ленточного) не является рациональным числом; поэтому отклик системы является квазипериодическим. Только для случая вихревого решения Тэйлора, не имеющего такой характеристической частоты, обнаружен субгармонический отклик. При рассмотрении других частот Ω_H, являющихся кратными величинами характеристических частот $f_H = 2f_{SPI}$ (или $f_H = 2f_{wTVF}$), вполне можно ожидать появления интересных резонансных явлений, таких как переключение между различными модами [34]. Кроме того, частота модуляции Ω_H может быть использована для управления системой при изменении между ее докритическим и сверхкритическим поведением.

Далее обнаружено, что при достаточно больших амплитудах модуляции устойчивость переносится между двумя первичными бифуркационными решениями, спиральным и ленточным, имеющими общий порог бифуркации. В соответствующем диапазоне параметров имеет место

Таблица 1. Различные области, обозначенные буквами A–D и представленные на диаграммах в фазовом пространстве ($\mathrm{Re}_{i,c}$, $S_{z,M}$) на рис. 7, с указанием характеристик устойчивости различных решений: устойчивые (s), неустойчивые (u) и не существующие (–)

Область	A	A_1	A_2	C_1	C_2	D	E	F
TVF	–	–	–	u	u	s	s	u
SPI	S	U	s	s	s	u	s	s
wTVF	–	–	–	–	–	–	–	s
RIB	u	s	s	u	s	U	u	u

переход с устойчивого вихревого решения Тэйлора на устойчивое ленточное решение через волнистое тэйлоровское решение. Это важно, так как в ранних работах был обнаружен лишь переход неустойчивого ленточного решения в спиральное решение посредством ‘прыжка’ [44, 45].

Управление течением посредством модулированных магнитных полей может быть полезно во многих приложениях. Основываясь на представленных в настоящей работе результатах, можно ожидать интересных исследований по вариации частоты вынуждающего воздействия Ω_H, особенно с упором на области, где сосуществуют различные решения, например, спиральное и волнистое тэйлоровское.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1923. V. 223. P. 289.
2. *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. Berlin: Springer, 1994.
3. *Hu H.C., Kelly R.E.* Effect of a time-periodic axial shear flow upon the onset of Taylor vortices // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 3242.
4. *Marques F., Lopez J.* Spacial and temporal resonances in a periodically forced hydrodynamic system // Physica D. Nonlinear Phenomena. 2000. V. 136. P. 340.
5. *Weisberg A., Kevrekidis I., Smits A.* Delaying transition in Taylor-Couette flow with axial motion of the inner cylinder // J. Fluid Mech. 1997. V. 348. P. 141.
6. *Murray B.T., McFadden G.B., Coriell S.R.* Stabilization of Taylor-Couette flow due to time-periodic outer cylinder oscillation // Phys. Fluids A: Fluid Dyn. 1990. V. 2. P. 2147.
7. *Donnelly R.* Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. III, Enhancement of stability by modulation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 281. P. 130.
8. *Donnelly R.F., Reif F., Suhl H.* Enhancement of hydrodynamic stability by modulations // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. P. 363–365.
9. *Ganske A., Gebhardt T., Grossmann S.* Modulation effects along stability border in Taylor–Couette flow // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3823.
10. *Carmi S., Tustaniwskyj J.I.* Stability of modulated finite-gap cylindrical Couette flow: linear theory // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 19.
11. *Barenghi C.F., Jones C.A.* Modulated Taylor–Couette flow // J. Fluid Mech. 1989. V. 208. P. 127.
12. *Barenghi C.F.* Computations of transitions and Taylor vortices in temporally modulated Taylor–Couette flow // J. Comput. Phys. 1991. V. 95. P. 175.
13. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
14. *Altmeyer S.* Ferrofluids // Scholarpedia. 2020. V. 15. P. 55163.
15. *Altmeyer S.* On the ridge of instability in ferrofluidic Couette flow via alternating magnetic field // Sci. Reports. 2021. V. 11. P. 4705.
16. *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1927.
17. *Rosensweig R.E., Kaiser R., Miskolczy G.* Magnetoviscosity of magnetic fluid in a magnetic field // J. Colloid Interface Sci. 1969. V. 29. P. 680.
18. *Кашевский Б.Э.* О моменте сил, действующем на тело в магнитной жидкости // Изв. АР СССР. 1980. № 4. С. 132–136.
19. *Niklas M.* Influence of magnetic fields on Taylor vortex formation in magnetic fluids // Z. Phys. B. 1987. V. 68. P. 493.

20. *Odenbach S.* Magnetoviscous and viscoelastic effects in ferrofluids // Int. J. Modern Phys. B. 2000. V. 14. P. 1615.
21. *Odenbach S., Gilly H.* Taylor-vortex flow of magnetic fluids under the influence of an azimuthal magnetic field // J. Magn. Magn. Mater. 1995. V. 152. P. 123.
22. *Reindl M., Odenbach S.* Influence of a homogeneous axial magnetic field on Taylor–Couette flow of ferrofluids with low particle-particle interaction // Exp. Fluids. 2011. V. 50. P. 375.
23. *Reindl M., Odenbach S.* Effect of axial and transverse magnetic fields on the flow behavior of ferrofluids featuring different levels of interparticle interaction // Phys. Fluids. 2011. V. 23. P. 093102.
24. *Altmeyer S., Hoffmann C., Leschhorn A., Lücke M.* Influence of homogeneous magnetic fields on the flow of a ferrofluid in the Taylor–Couette system // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 016321.
25. *Altmeyer S., Lopez J., Do Y.* Influence of an inhomogeneous internal magnetic field on the flow dynamics of ferrofluid between differentially rotating cylinders // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 066314.
26. *Altmeyer S., Leschhorn A., Hoffmann C., Lücke M.* Elongational flow effects on the vortex growth out of Couette flow in ferrofluids // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 053010.
27. *Altmeyer S., Lopez J., Do Y.* Effect of elongational flow on ferrofuids under a magnetic field // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 013003.
28. *Потанин Е.П.* Влияние магнитного поля на циркуляцию проводящей среды во вращающемся цилиндре при наличии тормозящего торца // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 85–95.
29. *Storozhenkova A., Stannariusb R., Tantsyuraa A.O., Shabanova I.A.* Measurement of the torque on diluted ferrofluid samples in rotating magnetic fields // J. Magn. Magn. Mater. 2016. V. 431. P. 66.
30. *Altmeyer S.* Agglomeration effects in rotating ferrofluids // J. Magn. Magn. Mater. 2019. V. 482. P. 239.
31. *Shliomis M.I., Morozov K.I.* Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 2855.
32. *Rosensweig R.* Heating magnetic fluid with alternating magnetic field // J. Magn. Magn. Mater. 2002. V. 252. P. 370.
33. *Goharkhah M., Salarian A., Ashjaee M., Shahabadi M.* Convective heat transfer characteristics of magnetite nanofluid under the influence of constant and alternating magnetic field // Powder Technology. 2015. V. 274. P. 258.
34. *Smorodin B.L., Lücke M.* Convection in binary fluid mixtures with modulated heating // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 026315.
35. *Смородин Б.Л.* Возникновение конвекции слабопроводящей жидкости в модулированном теплоовм поле // Ж. эксп. теор. физ. 2001. Т. 120. № 6. С. 1421–1429.
36. *Rosenblat S., Tanaka G.A.* Modulation of thermal convection instability // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 1319.
37. *Shliomis M.I., Smorodin B.L., Kamiyama S.* The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids // Phil. Mag. 2003. V. 83. № 17–18. P. 2139–2153.
38. *Ruuge E.K., Rusetski A.N.* Magnetic fluids as drug carriers: Targeted transport of drugs by a magnetic field // J. Magn. Magn. Mat. 1993. V. 122. P. 335.
39. *Chan D.C.F., Kirpotin D.B., Bunn P.A.* Synthesis and evaluation of colloidal magnetic iron oxides for the site-specific radiofrequency-induced hyperthermia of cancer // J. Magn. Magn. Mat. 1993. V. 122. P. 374.
40. *Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L.* Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // J. Fluid Mech. 1986. V. 164. P. 155.
41. *Tagg R.* The Couette–Taylor problem // Nonlinear Sci. Today. 1994. V. 4. P. 1.
42. *Altmeyer S., Do Y., Marquez F., Lopez J.M.* Symmetry-breaking Hopf bifurcations to 1-, 2-, and 3-tori in small-aspect-ratio counterrotating Taylor–Couette flow // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 046316.
43. *Altmeyer S., Hoffmann C.* On secondary instabilities generating footbridges between spiral vortex flow // Fluid Dyn. Res. 2014. V. 46. P. 025503.
44. *Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D.* Singularities and groups in bifurcation theory II. New York: Springer, 1988.
45. *Hoffmann C., Altmeyer S., Pinter A., Lücke M.* Transitions between Taylor vortices and spirals via wavy Taylor vortices and wavy spirals // New J. Phys. 2009. V. 11. P. 053002.
46. *Müller H.W., Liu M.* Structure of ferrofluid dynamics // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 061405.
47. *Langevin P.* Magnétisme et théorie des électrons // Annales de Chemie et de Physique. 1905. V. 5. P. 70.
48. *Embs J., Müller H.W., Wagner C., Knorr K., Lücke M.* Measuring the rotational viscosity of ferrofluids without shear flow // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. R2196.
49. Свойства магнитной жидкости APG933 следующие: $\mu_0 M_s = 20$ мТл, $\eta = 500$ мПа, плотность $\rho = 1.09$ г/см^3, $\Phi_m = 3.3\%$, восприимчивость $\Xi = 0.9$, средний диаметр магнитного ядра частицы 10 нм, толщина полимерного покрытия 2 нм.

50. *Niklas M., Müller-Krumbhaar H., Lücke M.* Taylor-vortex flow of ferrofluids in the presence of general magnetic fields // J. Magn. Magn. Mater. 1989. V. 81. P. 29.
51. *Odenbach S., Müller H.W.* Stationary off-equilibrium magnetization in ferrofluids under rotational and elongational flow // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 037202.
52. *Altmeyer S., Leschhorn A., Hoffmann C., Lücke M.* Elongational flow effects on the vortex growth out of Couette flow in ferrofluids // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 053010.
53. *Swift J.W., Wisenfeld K.* Suppression of period doubling in symmetric systems // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 705.
54. *Demay Y., Iooss G.* Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette—Taylor avec les deux cylindres en rotation // J. méc. théor. appl. 1984. P. 193—216.
55. *Беляев А.В., Смородин Б.Л.* Конвекция магнитной жидкости под действием переменного магнитного поля // Ж. прикл. мех. техн. физ. 2009. Т. 50. № 4. С. 18—27.