РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

А. А. БОРОВКОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

МОСКВА
2020

УДК 519.21
ББК 22.17
О21

Обобщенные процессы восстановления / Боровков А. А. — М.: РАН. 2020. — 455 с.

ISBN 978-5-907036-82-6

Обобщенные процессы восстановления (ОПВ) являются одной из самых распространенных математических моделей во многих приложениях теории вероятностей. Они же представляют собой естественное обобщение случайных блужданий — наиболее полно изученного классического объекта теории вероятностей. Поэтому общая асимптотическая теория ОПВ, построенная в монографии, представляет прикладной интерес и в то же время обобщает многие хорошо известные результаты теории вероятностей, относящиеся к случайным блужданиям.

Книга содержит

• Основные предельные законы для ОПВ (в том числе функциональные предельные теоремы), включая случай бесконечной дисперсии скачков процесса; закон повторного логарифма, его аналоги и т.д. (гл. 1).

• Интегро-локальные предельные теоремы для ОПВ в областях нормальных, умеренно-больших и больших уклонений (гл. 2, 5).

• Принципы больших и умеренно больших уклонений для ОПВ в фазовом пространстве и в пространстве траекторий, включая принципы больших уклонений в граничных задачах с явным видом функционалов уклонений (гл. 3, 4).

• Предельные теоремы, описывающие точную асимптотику в граничных задачах для ОПВ (гл. 6).

• Распространение принципа инвариантности для ОПВ на область умеренно больших и малых уклонений (гл. 7).

• В качестве приложений к другим разделам теории вероятностей получены основные предельные законы в области нормальных и больших уклонений для марковских аддитивных процессов (§§ 1.8, 3.6, 5.6).

Построенная общая теория ОПВ публикуется в монографической литературе впервые.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, знакомых с основами теории вероятностей, а также — на специалистов, имеющих дело с приложениями теории вероятностей.

ISBN 978-5-907036-82-6

Оглавление

Введение

§ 0.1 Изучаемые объекты

Обобщенные процессы восстановления (ОПВ) являются одной из самых распространенных математических моделей во многих приложениях теории вероятностей, таких, например, как теория систем обслуживания (теория очередей), теория страхования, теория риска, и ряде других. Они используются и в теоретических исследованиях, например, при изучении марковских аддитивных процессов (см. [109, 110]). Они же представляют собой естественное обобщение случайных блужданий — наиболее полно изученного классического объекта теории вероятностей. Поэтому общая асимптотическая теория ОПВ, построенная в монографии, представляет прикладной интерес и в то же время обобщает многие хорошо известные результаты теории вероятностей, относящиеся к случайным блужданиям; см., например, монографию А.А. Боровкова [12]. Некоторые из результатов, установленных в настоящей монографии для ОПВ, оказываются новыми и для случайных блужданий как частного случая ОПВ (см., например, гл. 7).

Пусть заданы случайный вектор (τ_1, ζ_1) и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов (τ, ζ), (τ_2, ζ_2),..., где $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \quad \text{при } n \geqslant 1, \quad T_0 = Z_0 = 0. \tag{0.1.1}$$

Пусть при $t \geqslant 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geqslant 0 : T_k > t\}, \qquad \nu(t) := \eta(t) - 1. \tag{0.1.2}$$

Ясно, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется равенство

$$\nu(t) = \max\{k \geqslant 0 : T_k \leqslant t\}.$$

Случайные процессы $\eta(t)$ и $\nu(t)$ называют *процессами восстановления* (или *простыми процессами восстановления*).

Термин «процесс восстановления» возник в связи с «техническими» прикладными задачами, в которых присутствуют отказы и восстановления некоторых приборов, таких, например, как электроприборы, срок службы которых, как правило, случаен (см., например, [46]). Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — длительности безотказной работы приборов. По истечении времени τ_j наступает *отказ* и неработающий прибор подлежит *восстановлению* (или замене). Допустим, что восстановление (замена) происходит мгновенно. Тогда $\nu(t)$ будет *числом восстановлений*, произошедших до момента времени t, если не считать «восстановления» в момент $t = 0$. Число восстановлений будет равно $\eta(t)$, если считать, что в момент $t = 0$ восстановление произошло.

Почти во всех прикладных задачах свойства распределения τ_1 зависят от того, когда мы начали наблюдения за работой системы приборов. Если нам известно, что в момент $t = 0$ произошло восстановление, то можно считать, что $\tau_1, \tau_2, \ldots$ распределены одинаково. Если же мы начали наблюдение в некоторый момент времени и нам неизвестно, когда произошло последнее восстановление, то естественно считать, что время τ_1 до первого после начала наблюдений восстановления прибора имеет распределение, отличное, вообще говоря, от распределения интервалов $\tau_2, \tau_3, \ldots$ между последующими восстановлениями.

Введем теперь в рассмотрение более широкий класс процессов.

Определение 0.1.1. *Обобщенным процессом восстановления* (ОПВ) называется процесс

$$Z(t) := Z_{\nu(t)}, \qquad t \geqslant 0. \tag{0.1.3}$$

Процесс $Z(t)$ называют также *сложным процессом восстановления.* Последовательность $\{(\tau_j, \zeta_j)\}$ будем называть *управляющей последовательностью.*

Как уже отмечалось, ОПВ являются математической моделью во многих прикладных задачах, например, в теории систем обслуживания (теории очередей), в теории страхования и др. Стандартная общепринятая модель ОПВ предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина ζ_1 этого скачка имеет совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения (τ, ζ) (см., например, [46], [79]). Это реализуется, например, для важных в приложениях ОПВ со *стационарными приращениями* (см. п. 1.1.2). Если $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным ОПВ* ; в противном случае — *неоднородным.*

Траектории процесса $Z(t)$ на $[0, \infty)$ при $\tau_1 > 0$ имеют следующий вид

$$Z(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t\in[0,\tau_1),\\ \zeta_1 & \text{при}\quad t\in[\tau_1,T_2),\\ Z_2 & \text{при}\quad t\in[T_2,T_3)\quad \text{и т.д.},\end{cases}\tag{0.1.4}$$

они непрерывны справа. Если $\tau_1=0$ (такое не исключается, так как по условию $\tau_1\geqslant 0$), то множество $[0,\tau_1)$ пусто, $Z(t)=\zeta_1$ при $t\in[0,\tau_2)$, так что на событии $\{\tau_1=0\}$ процесс $Z(t)$ можно рассматривать как однородный ОПВ с начальным значением $Z(0)=\zeta_1$.

Приведем два примера, в которых процесс $Z(t)$ играет определяющую роль в описании работы изучаемых систем. Рассмотрим сначала простейшую задачу теории очередей. В некоторую систему обслуживания в моменты $T_1,T_2,\ldots$ поступают вызовы (клиенты), на обслуживание которых требуется, соответственно, время $\zeta_1,\zeta_2,\ldots$ Это может быть, например, нагруженный аэропорт, принимающий самолеты на посадку: они прибывают в моменты $T_1,T_2,\ldots$; время обслуживания j-го самолета, т.е. время, затраченное на посадку, равно ζ_j. Это может быть также система обработки информации, в которую информация поступает квантами в моменты $T_1,T_2,\ldots$ и на обработку j-го поступления требуется время ζ_j и т.д.

В таких системах $Z(t)=Z_{\nu(t)}$ есть время, которое потребуется на обслуживание вызовов, прибывших за время t. Пусть рассматриваемая система является системой с очередью (вызовы, заставшие систему занятой, становятся в очередь). Важной характеристикой такой системы является «виртуальное» время ожидания $W(t)$ до начала обслуживания вызова, который пришел бы в момент t. Нетрудно видеть, что $W(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dW(t)=\begin{cases}dZ(t)-dt, & \text{если}\quad W(t)>0;\\ dZ(t), & \text{если}\quad W(t)=0,\end{cases}$$

которое имеет явное решение

$$W(t)=Z(t)-t-\inf_{0\leqslant u\leqslant t}\big(0,Z(u)-u\big)\tag{0.1.5}$$

(траектория $W(t)$ получается из траектории $Z(t)-t$ с помощью «задерживающего» барьера в точке 0). Если, например, τ_j и ζ_j независимы, то из (0.1.5) следует, что предельное распределение $W(t)$ при $t\to\infty$ совпадает с распределением $\sup_{0\leqslant t<\infty}\big(Z^{(st)}(t)-t\big)$ (см., например, [6], § 6), где $Z^{(st)}(t)$ — ОПВ со стационарными приращениями, т.е. процесс $Z(t)$ со специально выбранным распределением τ_1 (см. п. 1.1.2).

Второй пример относится к работе страховой компании. Пусть $T_1, T_2, \ldots$ — моменты наступления крупных выплат по страховым случаям, а $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — соответственно, размеры этих выплат. Пусть далее r — средняя «скорость» поступлений страховых взносов (суммы, поступающие в компанию от страхователей за единицу времени). Тогда, если x — начальный капитал компании, то ее капитал в момент t будет равен $x+rt-Z(t)$. Это значит, что если $\inf_{u\leqslant t}\big(x+ru-Z(u)\big)<0$, то компания к моменту t разорится. Другими словами, вероятность разорения за время t равна $\mathbf{P}\big(\sup_{u\leqslant t}\big(Z(u)-ru\big)>x\big)$. Это есть классическая задача о разорении, которой посвящено значительное количество работ, включая монографии (см., например, [83], [78]–[80], [96]). Она будет рассмотрена в § 6.7.

В обоих примерах объектом изучения становятся вероятности того, что траектория процесса $Z(u)$ пересечет за время t некоторую границу. Задачи такого рода называют граничными для ОПВ. Они будут рассмотрены в § 1.6, гл 4, 6.

ОПВ возникают и в теоретических исследованиях. Например, при изучении асимптотических законов для марковских аддитивных процессов (сумм случайных величин, заданных на состояниях цепи Маркова). Если цепь харрисова, то у нее существует положительный атом, иногда «искусственный». Если построить циклы (длиной $\tau_1, \tau_2, \ldots$) по возвращению цепи в положительный атом и обозначить через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ приращения сумм на этих циклах, то мы получим независимые векторы (τ_j, ζ_j), которые определяют соответствующий ОПВ $Z(n)$ (время $t=n$ дискретно), с помощью которого из результатов, изложенных в монографии, можно получить все основные предельные законы для марковских аддитивных процессов (см. §§ 1.8, 2.5, 5.7 и литературу, названную там).

Наряду с ОПВ $Z(t)$ мы будем рассматривать также случайные процессы

$$Y(t) := Z_{\eta(t)} = Z_{\nu(t)} + \zeta_{\eta(t)}, \qquad t \geqslant 0. \tag{0.1.6}$$

Их мы также будем называть ОПВ. Траектории $Y(t)$ на $[0,\infty)$ имеют при $\tau_1>0$ следующий вид:

$$Y(t) = \begin{cases} \zeta_1 & \text{при} \quad t\in[0,\tau_1), \\ Z_2 & \text{при} \quad t\in[\tau_1, T_2) \quad \text{и т.д.} \end{cases}$$

При $\tau_1=0$ произойдут изменения, аналогичные тем, что отмечены после соотношений (0.1.4). Будет показано, что предельные законы в области нормальных уклонений, которые мы будем изучать в главах 1, 2 при выполнении соответствующих условий будут одни и те же для ОПВ

$Z(t)$ и $Y(t)$. В области больших уклонений (см. гл. 3–6) это не всегда так.

Так как $\eta(t)$ — марковский момент, то процессы $Y(t) = Z_{\eta(t)}$ устроены несколько проще, и в ряде случаев удобнее изучать эти процессы.

Если $\tau_1 \equiv \tau \equiv 1$, то ОПВ

$$Z(t) = Z\bigl([t]\bigr) = Z_{[t]}$$

становятся *суммами* $Z_{[t]}$ случайных величин ζ_j, т.е. *случайным блужданием.* Этот объект изучен достаточно полно.

Если $\zeta_1 \equiv \zeta \equiv 1$, то $Z(t) = \nu(t) = \eta(t) - 1$, где $\eta(t)$ — *простой процесс восстановления.* Для него $\mathbf{P}\bigl(\eta(t) > n\bigr) = \mathbf{P}(T_n \leqslant t)$ и задача изучения распределения $\eta(t)$ также сводится к изучению распределения сумм случайных величин; на этот раз — сумм T_n. Ясно, что аналогичные замечания справедливы и для ОПВ $Y(t)$.

Если $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$, τ и ζ независимы,

$$\mathbf{P}(\tau > v) = e^{-\lambda v}, \qquad v \geqslant 0, \quad \lambda > 0, \tag{0.1.7}$$

то процесс $Z(t)$ становится *сложным* (*или обобщенным*) *пуассоновским процессом*, т.е. процессом с независимыми приращениями.

Если вместо (0.1.7) выполнено

$$\mathbf{P}(\tau = k) = (1 - q)q^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

или $\mathbf{P}(\tau = 1) = 1$, то последовательность $Z(k)$, как и в случае (0.1.7), будет процессом с независимыми приращениями, но с дискретным временем, т.е. последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (случайным блужданием).

§ 0.2 Краткая предыстория. Содержание монографии

Изучению ОПВ посвящено значительное количество работ. Известен ряд общих результатов, таких как усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема (см., например, Боровков А. А. [10, § 10.6]), закон повторного логарифма, принцип инвариантности (см. Ксёрго М., Херват Л., Стейнебах Дж. [91], [114]; Гут А. [100, гл. 5]). Доказательства в этих работах опираются на весьма сложную технику и упрощены в гл. 1. В монографии Боровкова А.А., Боровкова К. А. [26, гл. 16] изучены вероятности больших уклонений ОПВ и их траекторий в случае, когда скачки процесса имеют правильно меняющиеся на бесконечности распределения.

Значительная часть опубликованных работ, связанных с ОПВ, относится к приложениям или к весьма специальным постановкам задач. Они носят разрозненный характер и касаются далеко не всех направлений, представляющих интерес. В период с 2008 по 2019 год появился большой цикл работ автора, Боровкова К. А., Могульского А. А., Прокопенко Е. И. (значительная часть из них являются совместными), посвященных предельным законам для ОПВ (см. ниже). Они и легли в основу этой книги.

Цель настоящей монографии — систематически изложить асимптотическую теорию ОПВ в ее общем виде. Она включает в себя аналоги и обобщения всех основных предельных законов, установленных для случайных блужданий и изложенных, например, в монографии [12]. Построенная теория публикуется в монографической литературе впервые. Она представляет как теоретический, так и прикладной интерес.

Излагаемая теория содержит:

• Основные предельные законы для ОПВ (в их числе функциональные предельные теоремы), включая случай бесконечной дисперсии скачков процесса; закон повторного логарифма и его аналоги (гл. 1).

• Интегро-локальные предельные теоремы в области нормальных, умеренно-больших и больших уклонений (гл. 2, 5).

• Принципы больших и умеренно больших уклонений для ОПВ в фазовом пространстве и пространстве траекторий, включая принципы больших уклонений в граничных задачах для ОПВ с явным видом функционалов уклонений (гл. 3, 4).

• Предельные теоремы, описывающие точную асимптотику в граничных задачах для ОПВ (гл. 6).

• Распространение принципа инвариантности для ОПВ на область умеренно больших и малых уклонений (гл. 7; результаты этой главы являются новыми и для случайных блужданий, как частного случая ОПВ).

• В качестве приложений получены основные предельные законы, включая функциональные предельные теоремы и интегро-локальные теоремы в области нормальных и больших уклонений для марковских аддитивных процессов (§§ 1.8, 3.6, 5.7).

Из сказанного видно, что значительная часть монографии (гл. 3–7) касаются изучения вероятностей больших уклонений для ОПВ. Математически — это наиболее содержательная и трудная часть излагаемой теории. Отметим, что существенную роль здесь играет следующее обстоятельство. Оказывается, что существует функция, которая содержит в себе всю информацию об асимптотическом поведении распределения ОПВ на растущем интервале времени. Мы нашли, изучили ее и назвали *базовой* функцией (см. § 3.5). Для случайных блужданий (это есть частный случай ОПВ) базовая функция оказывается равной логарифму преобразования Лапласа над распределением скачков. В общем случае базовая функция играет ту же роль, что и названное преобразование, но вместо точных равенств появляются аналогичные асимптотические соотношения при растущем времени.

Проблемам больших уклонений для случайных процессов посвящена обширная литература, включая несколько монографий. Главным ее объектом является изучение «грубой» асимптотики (асимптотика логарифмов) вероятностей соответствующих редких событий для широкого класса процессов. Основные подходы и обзор результатов см., например, в монографиях Фенг Дж., Куртц Т. Г. [97], Дембо А., Зейтуни О. [93] (там же см. библиографию). В нашем случае при изучении ОПВ эффективными и более конструктивными оказываются прямые подходы, основанные на знании конкретной природы ОПВ, определенной в (0.1.3), позволяющей найти базовую функцию. Они дают возможность в гл. 3–7 получить значительно более продвинутые результаты, включая (a) принцип больших уклонений (ПБУ) в гл. 3, 4 с явным видом функционала уклонений (deviation rate functional), который определяется преобразованием Лежандра над базовой функцией; (b) — получить в гл. 5–7 решения более трудных задач о точной (не «грубой») асимптотике вероятностей больших уклонений.

Изложение §§ 1.5–1.7 и глав 2, 6, 7 основано на работах автора [14], [19]–[25]. Изложение глав 3–5 — на работах автора [15, 23] и совместных работах с Могульским А.А. [27], [32]–[36]; соавтором в [36] является также Прокопенко Е.И. Монография содержит также ряд результатов, ранее не опубликованных.

При изучении вероятностей больших уклонений ОПВ в гл. 3–7 предполагается выполнение моментного условия Крамера (быстрое убывание на бесконечности распределения скачков процесса). Для случая, когда распределения скачков правильно меняются на бесконечности (медленное убывание), в гл. 8 для полноты изложения воспроизведен без доказательств ряд результатов из [26, гл. 16].

Построение общей асимптотической теории ОПВ при выполнении условия Крамера стало возможным благодаря предшествующим работам в следующих трех областях:

• предельные теоремы об асимптотике меры восстановления в области больших уклонений для многомерных случайных блужданий (см. работы Боровкова А. А., Могульского А. А. [27, 32])

• большие уклонения многомерных случайных блужданий (см., например, монографию Боровкова А. А. [12]). Применительно к ОПВ очень полезными оказываются подходы, связанные с так называемыми *локальными* принципами больших уклонений

• интегро-локальные теоремы Стоуна для случайных блужданий (см. [116, 117]; они особенно важны как инструмент исследования).

Владение результатами и техникой в эти трех областях является необходимым при достаточно полном асимптотическом анализе ОПВ.

Автор благодарен Т. В. Беляевой за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Глава 1

Основные предельные законы в области нормальных уклонений

§ 1.1 Предварительные результаты

1.1.1 Сходимость распределений и моментов некоторых функционалов от ОПВ

Обобщенные процессы восстановления (ОПВ) $Z(t), Y(t)$ определены во Введении (см. (0.1.1)–(0.1.6)). В основе определения лежит управляющая последовательность векторов $\{\tau_j, \zeta_j\}$, суммы

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \qquad Z_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$$

и процессы восстановления $\eta(t) = \min\{k : T_k > t\}$ и $\nu(t) = \max\{k : T_k \leqslant t\} = \eta(t) - 1$. В этих обозначениях

$$Z(t) = Z_{\nu(t)}, \qquad Y(t) = Z_{\eta(t)}.$$

Для описания свойств ОПВ $Z(t), Y(t)$ нам понадобится еще ряд обозначений. Введем в рассмотрение величину $\chi(t)$ первого перескока уровня t случайным блужданием $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\chi(t) := T_{\eta(t)} - t, \tag{1.1.1}$$

величину «недоскока»

$$\gamma(t) := t - T_{\nu(t)} \tag{1.1.2}$$

и положим

$$\zeta(t) := \zeta_{\eta(t)}, \qquad \tau(t) := \tau_{\eta(t)},$$

так что
$$\gamma(t)+\chi(t)=\tau(t).$$
Везде в дальнейшем будет предполагаться, что существуют
$$\mathbf{E}\tau =: a_\tau \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta =: a_\zeta,$$
и, стало быть, определен «средний снос» ОПВ
$$a := \frac{a_\zeta}{a_\tau}$$
Термин «средний снос» оправдан, так как будет показано, что
$$\frac{\mathbf{E}Z(t)}{t} \to a, \qquad \frac{Z(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} a \quad \text{при } t\to\infty.$$
Такие же соотношения верны для $Y(t)$. *Предположение о существовании и конечности a_τ, a_ζ дополнительно нигде оговариваться не будет.*

Распределение (τ_1,ζ_1) может быть любым и условия, относящиеся к этому вектору, при необходимости будут оговариваться.

В последующих рассмотрениях нам понадобится также *функция восстановления*, соответствующая последовательности $\{T_k\}$; в однородном случае мы обозначим ее через
$$H(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(T_k\leqslant t).$$
В неоднородном случае $\tau_1 \underset{d}{\neq} \tau$ мы будем обозначать ее через $\widetilde{H}(t)$.

Так как
$$\bigl\{\eta(t)>k\bigr\}=\{T_k\leqslant t\},$$
то в однородном случае
$$\mathbf{E}\eta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\bigl(\eta(t)\geqslant k\bigr)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\bigl(\eta(t)>k\bigr)= \\ =\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(T_k\leqslant t)=H(t), \tag{1.1.3}$$
$$T_{\eta(t)}=t+\chi(t)$$
и в силу тождества Вальда имеем
$$\begin{gathered}\mathbf{E}T_{\eta(t)}=a_\tau\mathbf{E}\eta(t)=t+\mathbf{E}\chi(t),\\ \mathbf{E}\eta(t)=H(t)=\frac{t+\mathbf{E}\chi(t)}{a_\tau}.\end{gathered} \tag{1.1.4}$$

Лемма 1.1.1. *Пусть распределение τ нерешетчато. Тогда*

(i). *Всегда существуют собственные предельные распределения:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\big(\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \geqslant v,\, \zeta(t) \geqslant w\big) = \\ = \frac{1}{a_\tau}\int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y+v,\ \zeta \geqslant w)dy, \qquad (1.1.5)$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\big(\zeta(t) \geqslant w\big) = \frac{\mathbf{E}(\tau;\, \zeta \geqslant w)}{a_\tau}. \qquad (1.1.6)$$

(ii). *В однородном случае существуют постоянные $c_1 \in (0,\infty)$ и $c_2 \in (1/a_\tau, \infty)$, такие, что*

$$\sup_t \mathbf{P}\big(\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v,\ \zeta(t) \geqslant w\big) \leqslant \\ \leqslant c_1 \mathbf{P}(\tau \geqslant u+v, \zeta \geqslant w) + c_2 \int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau > y+v, \zeta \geqslant w)dy. \qquad (1.1.7)$$

В неоднородном случае к правой части в (1.1.7) *добавится слагаемое* $\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant u+v, \zeta_1 \geqslant w)$.

(iii). *Если $\mathbf{E}\tau_1^{k-1} < \infty$, $\mathbf{E}\tau^k < \infty$, то*

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) = o(t), \qquad \mathbf{E}\chi^k(t) = o(t) \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \qquad (1.1.8)$$

Если $\mathbf{E}\tau_1^k < \infty$, $\mathbf{E}\tau^{k+1} < \infty$, то для нерешетчатых τ

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) \to \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau}, \ \ \mathbf{E}\chi^k(t) \to \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau} \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \qquad (1.1.9)$$

Если $\mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty$, $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$ при $\lambda > 0$, то

$$\mathbf{E}e^{\lambda\gamma(t)} \to \frac{\mathbf{E}e^{\lambda\tau}-1}{a_\tau\lambda} \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \qquad (1.1.10)$$

Такое же соотношение справедливо для $\chi(t)$.

Если f — измеримая функция и $\mathbf{E}\big|f(\zeta_1)\big| < \infty$, $\mathbf{E}\tau\big|f(\zeta)\big| < \infty$, то

$$\mathbf{E}f\big(\zeta(t)\big) \to \frac{\mathbf{E}(\tau f(\zeta))}{a_\tau} \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \qquad (1.1.11)$$

Из леммы следует, что предельные значения моментов случайных величин $\gamma(t)$, $\chi(t)$, $\zeta(t)$ совпадают с моментами величин γ_∞, χ_∞, ζ_∞, совместное распределение которых равно

$$\mathbf{P}(\gamma_\infty \geqslant u,\ \chi_\infty \geqslant v,\ \zeta_\infty \geqslant w) = \\ = \frac{1}{a_\tau} \int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y + v, \zeta \geqslant w) dy \qquad (1.1.12)$$

(см. (1.1.5)).

Если распределение τ арифметично, то интегралы в (1.1.12) заменятся суммами и значения правых частей в (1.1.9), (1.1.10) станут немного иными.

Доказательство леммы 1.1.1. Для однородных ОПВ в силу основной теоремы восстановления для нерешетчатых τ имеем

$$\mathbf{P}\big(\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v,\ \zeta(t) \geqslant w\big) = \\ = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^{t-u} \mathbf{P}(T_k \in dy) \mathbf{P}(\tau \geqslant t - y + v,\ \zeta \geqslant w) = \\ = \int\limits_0^{t-u} dH(y) \mathbf{P}(\tau \geqslant t - y + v,\ \zeta \geqslant w) \to \\ \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y + v, \zeta \geqslant w) dy \qquad (1.1.13)$$

при $t \to \infty$.

Если распределение (τ_1, ζ_1) отлично от общего распределения (τ, ζ), то при $t > u$ находим

$$\mathbf{P}\big(\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \geqslant v, \zeta(t) \geqslant w\big) = \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant t + v, \zeta_1 \geqslant w) + \\ + \int\limits_0^{t-u} \mathbf{P}(\tau_1 \in ds) \mathbf{P}\big(\gamma(t-s) \geqslant u, \chi(t-s) \geqslant v, \zeta(t-s) \geqslant w\big), \qquad (1.1.14)$$

где при каждом фиксированном s для второго множителя под интегралом в (1.1.14) имеет место сходимость при $t \to \infty$ вида (1.1.13). Это означает, что и для неоднородных ОПВ левая часть в (1.1.14) сходится при $t \to \infty$ к правой части в (1.1.13). Соотношение (1.1.5) доказано. Полагая в (1.1.13), (1.1.14) $u = v = 0$, получим (1.1.6).

(ii). Для функции восстановления $H(t)$ всегда существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 1/a_\tau$ такие, что

$$H(t) \leqslant c_1 + c_2 t \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

С другой стороны, подинтегральная функция $\mathbf{P}(\tau \geqslant t - y + v, \zeta \geqslant w)$ в (1.1.13) возрастает с ростом y. Поэтому левая часть в (1.1.13), равная 0 при $t \leqslant u$, не превосходит

$$c_1 \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v, \zeta \geqslant w) + c_2 \int\limits_0^{t-u} \mathbf{P}(\tau \geqslant t - y + v, \zeta \geqslant w) dy \qquad (1.1.15)$$

при $t \geqslant u$. Отсюда вытекает (1.1.7).

Появление дополнительного слагаемого в правой части (1.1.7) в неоднородном случае связано с появлением первого слагаемого в правой части (1.1.14).

(iii). Утверждение (1.1.8) следует из (1.1.15). Если $\mathbf{E}\tau^{k+1} < \infty$, то в силу (1.1.12) функция

$$u^k \mathbf{P}(\gamma_\infty \geqslant u) = \frac{u^k}{a_\tau} \int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant u) dy$$

является интегрируемой. Поэтому в силу разделов (i), (ii) теоремы мы можем пользоваться теоремой о мажорируемой сходимости, в силу которой

$$\mathbf{E}\gamma^k(t) \to \mathbf{E}\gamma_\infty^k = \frac{1}{a_\tau} \int\limits_0^\infty y^k \mathbf{P}(\tau \geqslant y) dy = \frac{\mathbf{E}\tau^{k+1}}{(k+1)a_\tau}.$$

Аналогично доказываются и другие соотношения в (1.1.9). Для получения последнего утверждения надо воспользоваться соотношениями вида

$$\mathbf{E}\zeta(t) = \mathbf{E}\big(\zeta(t);\, \zeta(t) \geqslant 0\big) + \mathbf{E}\big(\zeta(t);\, \zeta(t) < 0\big) = \\ = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\big(\zeta(t) \geqslant w\big) dw - \int\limits_{-\infty}^0 \mathbf{P}\big(\zeta(t) \leqslant w\big) dw.$$

Лемма 1.1.1 доказана.

При изучении предельных распределений величин $\chi(t)$, $\zeta(t)$ при $t \to \infty$ можно рассматривать также «частичную схему серий», когда распределение «неоднородного» вектора (τ_1, ζ_1) зависит от некоторого параметра N. Потребность в таких рассмотрениях возникает, например, при изучении процессов

$$Z_N(t) = Z(N+t) - Z(N). \tag{1.1.16}$$

Роль начальных скачков для $Z_N(t)$ будут играть величины $\chi(N)$ и $\zeta(N)$, распределение которых зависит от N.

Следствие 1.1.1. *Если в частичной схеме серий параметр $N{=}N(t)$ зависит от t так, что $\tau_1 = o_p(t)$ при $t \to \infty$, то утверждения* (1.1.5), (1.1.6) *леммы* 1.1.1 *остаются в силе. Если кроме того* $\mathbf{E}(\tau_1; \tau_1 \geqslant t) \to 0$, $\mathbf{E}(\zeta_1; \tau_1 \geqslant t) \to 0$ *при $t \to \infty$, то остаются в силе также утверждения* (1.1.9), (1.1.12) *при $k = 1$, $f(z) = z$.*

Первое утверждение следствия вытекает из (1.1.14). Второе получается из формул (1.1.9), (1.1.11) для $\mathbf{E}\chi(t)$ и $\mathbf{E}\zeta(t)$.

Следствие 1.1.2. *Если $\mathbf{E}\tau_1 < \infty$, то при $t \to \infty$*

$$\widetilde{H}(t) = \frac{t + o(t)}{a_\tau}.$$

Доказательство вытекает из (1.1.3), леммы 1.1.1 и соотношений

$$\widetilde{H}(t) = \mathbf{E}\eta(t) = \mathbf{P}(\tau_1 > t) + \int_0^t \mathbf{P}(\tau_1 \in ds)\big[1 + \mathbf{E}\eta_0(t-s)\big] =$$
$$= \mathbf{P}(\tau_1 > t) + \int_0^t \mathbf{P}(\tau_1 \in ds)\left(1 + \frac{t - s + \mathbf{E}\chi(t-s)}{a_\tau}\right),$$

где время первого прохождения $\eta_0(t)$ относится к однородной последовательности $\{T_k\}$.

Утверждения, близкие к лемме 1.1.1, содержатся, например, в [10, §§ 10.4, 10.6].

1.1.2 ОПВ со стационарными приращениями

Вернемся к специальному случаю (1.1.16). Если снабдить индексом N начальные скачки $(\tau_{1,N}, \zeta_{1,N})$ процесса $Z_N(t)$, то, как уже отмечалось,

$$(\tau_{1,N}, \zeta_{1,N}) \underset{d}{=} \big(\chi(N), \zeta(N)\big),$$

так что в силу леммы 1.1.1

$$(\tau_{1,N}, \zeta_{1,N}) \Rightarrow (\chi_\infty, \zeta_\infty) \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

(знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений), где распределение $(\chi_\infty, \zeta_\infty)$ описано в (1.1.12). Рассмотрим ОПВ $Z^{(st)}(t)$ (смысл индекса (st) будет пояснен ниже, в определении 1.1.1) с начальными скачками $(\tau^{(st)}, \zeta^{(st)})$, имеющими то же распределение, что и $(\chi_\infty, \zeta_\infty)$ (см. (1.1.12)):

$$\mathbf{P}(\tau_1^{(st)} \geqslant v, \zeta_1^{(st)} \geqslant w) = \frac{1}{a_\tau} \int\limits_v^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y, \zeta \geqslant w) dy; \tag{1.1.17}$$

последующие скачки суть (τ_2, ζ_2), (τ_3, ζ_3),... Для такого процесса в силу изложенной выше интерпретации, распределение $\big(\chi^{(st)}(t), \zeta^{(st)}(t)\big)$ (при очевидных соглашениях относительно обозначений) при всех $t \geqslant 0$ будет одно и то же (распределение $\big(\chi^{(st)}(t'), \zeta^{(st)}(t')\big)$ можно рассматривать как предельное распределение начального скачка процесса $Z_{N'}(t) = Z_{N+t'}(t)$ при $N' = N + t' \to \infty$). Это означает, что распределение приращений $Z^{(st)}(u+t) - Z^{(st)}(u)$ будет одно и то же при всех $u \geqslant 0$.

Определение 1.1.1. Процесс $Z(t)$ с распределением начального скачка (1.1.17) называется ОПВ *со стационарными приращениями* и обозначается через $Z^{(st)}(t)$.

Найдем вид характеристической функции $\varphi^{(st)}(\lambda, \mu)$ вектора $(\tau_1^{(st)}, \zeta_1^{(st)})$. Положим

$$\varphi(\lambda, \mu) = \mathbf{E} e^{i\lambda\tau + i\mu\zeta}.$$

Лемма 1.1.2. (i). *Справедливо представление*

$$\varphi^{(st)}(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\lambda, \mu) - \varphi(0, \mu)}{i\lambda a_\tau}. \tag{1.1.18}$$

(ii). *Процесс $Z(t) = Z^{(st)}(t)$ является однородным ОПВ тогда и только тогда, когда $Z(t)$ есть сложный (обобщенный) пуассоновский процесс, т.е. τ и ζ независимы, $\mathbf{P}(\tau > x) = e^{-x/a_\tau}$.*

Доказательство. (i). Имеем в силу (1.1.17)

$$\varphi^{(st)}(\lambda, \mu) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda v} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\mu w} \mathbf{P}(\tau_1^{(st)} \in dv, \zeta_1^{(st)} \in dw) =$$

$$= \frac{1}{a_\tau} \int\limits_0^\infty e^{i\lambda v} \Big[\int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\mu w} \mathbf{P}(\tau \geqslant v, \zeta \in dw) \Big] dv. \tag{1.1.19}$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (1.1.19), через $U(v)$ и положим $V(v) = \dfrac{e^{i\lambda v}}{i\lambda}$. Тогда, интегрируя по частям (1.1.19), находим

$$\varphi^{(st)}(\lambda,\mu) = \frac{1}{a_\tau} U(v)V(v)\Big|_0^\infty + \frac{1}{i\lambda a_\tau}\int\limits_0^\infty e^{i\lambda v + i\mu w}\mathbf{P}(\tau\in dv, \zeta\in dw) =$$
$$= \frac{1}{i\lambda a_\tau}\big[\varphi(\lambda,\mu) - \varphi^{(\zeta)}(\mu)\big],$$

где $\varphi^{(\zeta)}(\mu) = \mathbf{E}e^{i\mu\zeta}$.

(ii). Второе утверждение вытекает из того, что равенство

$$\varphi^{(st)}(\lambda,\mu) = \varphi(\lambda,\mu)$$

в силу (1.1.18) эквивалентно равенству

$$\varphi(\lambda,\mu) = \frac{\varphi^{(\zeta)}(\mu)}{1 - ia_\tau\lambda}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1.1 следует, что $\mathbf{E}\tau_1^{(st)} < \infty$, если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ (см. (1.1.9)), и $\mathbf{E}\zeta^{(st)} < \infty$, если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$ (см. (1.1.11)). Если τ и ζ независимы, то $\mathbf{E}\zeta^{(st)} < \infty$, если $\mathbf{E}\tau < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta| < \infty$.

1.1.3 Усиленный закон больших чисел для простого процесса восстановления $\eta(t)$

Лемма 1.1.3. *Всегда имеет место почти наверное сходимость*

$$\frac{\eta(t)}{t} \underset{\textit{п.н.}}{\to} \frac{1}{a_\tau} \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \tag{1.1.20}$$

Доказательство. Определим функцию $T_t := T_{[t]}$ вещественной переменной t. Для нее в силу усиленного закона больших чисел при $t\to\infty$ выполняется

$$\frac{T_t}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\tau.$$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется (случайное) число $t_0 = t_0(\varepsilon) < \infty$ такое, что T_t при всех $t > t_0$ будет лежать между лучами $y = (a_\tau \pm \varepsilon)t$. Это значит, что функция $\eta(y) = \min\{t : T_t > y\}$, будучи обратной к T_t, будет при всех $y \geqslant t_0(a_\tau + \varepsilon)$ лежать между лучами

$$t = \frac{y}{a_\tau \pm \varepsilon}.$$

Но это и означает выполнение (1.1.20). Лемма 1.1.3 доказана.

1.1.4 Сходимость почти наверное некоторых функционалов от ОПВ

Рассмотрим некоторую измеримую функцию $g(t,y) \geqslant 0$ и положим для краткости

$$g = g(\tau,\zeta), \qquad g_n = g(\tau_n,\zeta_n), \qquad \overline{g}_n = \max_{k\leqslant n} g_k.$$

Пусть $V(x)$ — некоторая неубывающая правильно меняющаяся функция (ПМФ) на $[0,\infty)$, т.е. функция, представимая в виде

$$V(x) = x^{\alpha} l(x), \qquad x \geqslant 0, \quad \alpha > 1, \tag{1.1.21}$$

где $l(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \to \infty$. Обозначим через $V^{(-1)}(y)$ функцию, обратную к $V(x)$:

$$V^{(-1)}(y) := \inf\bigl\{x:\ V(x) \geqslant y\bigr\}.$$

Функция $V^{(-1)}(y)$ также будет ПМФ; она будет иметь показатель $1/\alpha$ (см, например, теорему 1.1.3 в [26]).

Аналогично, если

$$F(x) = x^{-\alpha} l(x) \tag{1.1.22}$$

есть правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$, то функция

$$\sigma(u) := F^{(-1)}(1/u) = \inf\bigl\{x:\ F(x) < 1/u\bigr\}$$

будет также правильно меняющейся на бесконечности функцией (с показателем $1/\alpha$).

Лемма 1.1.4. (i). *Если выполнено* (1.1.21) *и* $\mathbf{E}V(g) < \infty$, *то при* $n \to \infty$, $t \to \infty$

$$\frac{\overline{g}_n}{V^{(-1)}(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \qquad \frac{\overline{g}_{\eta(t)}}{V^{(-1)}(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0. \tag{1.1.23}$$

(ii). *Если* $\mathbf{P}(g \geqslant x) \leqslant cF(x)$, $c = \mathrm{const}$, $F(x) = x^{-\alpha} l(x)$, *то при любом* $\theta > 1/\alpha$, $n \to \infty$, $t \to \infty$

$$\frac{\overline{g}_n}{\sigma(n)(\ln n)^{\theta}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \qquad \frac{\overline{g}_{\eta(t)}}{\sigma(t)(\ln t)^{\theta}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0. \tag{1.1.24}$$

(iii). *Если* $\mathbf{P}(g \geqslant x) = o\bigl(F(x)\bigr)$ *при* $x \to \infty$, *то*

$$\frac{\overline{g}_n}{\sigma(n)} \underset{p}{\to} 0, \qquad \frac{\overline{g}_{\eta(t)}}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 0 \tag{1.1.25}$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, *соответственно.*

Доказательство. (i). Рассмотрим сначала однородный случай. Докажем, что

$$\frac{g_n}{V^{(-1)}(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{1.1.26}$$

При любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(g_n \geqslant \varepsilon V^{(-1)}(n)\big) \leqslant \int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(g \geqslant \varepsilon V^{(-1)}(t)\big)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\left(V\left(\frac{g}{\varepsilon}\right) \geqslant t\right)dt = \mathbf{E}V\left(\frac{g}{\varepsilon}\right). \tag{1.1.27}$$

Так как $V(g/\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\alpha}V(g)$ при $g \to \infty$, то

$$\mathbf{E}V\left(\frac{g}{\varepsilon}\right) \leqslant c + 2\varepsilon^{-\alpha}\mathbf{E}V(g) < \infty, \quad c = \text{const}. \tag{1.1.28}$$

Поэтому (1.1.26) вытекает из (1.1.27), (1.1.28) и леммы Бореля–Кантелли, так как с вероятностью 1 наступает лишь конечное число событий $\big\{g_n \geqslant \varepsilon V^{(-1)}(n)\big\}$.

Докажем теперь первое соотношение в (1.1.23). Из (1.1.26) следует, что найдется случайный номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$g_n < \varepsilon V^{(-1)}(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0. \tag{1.1.29}$$

Кроме того, всегда найдется номер $m_0 \geqslant n_0$ такой, что $\overline{g}_{n_0} < \varepsilon V^{(-1)}(m_0)$ и мы будем иметь в силу (1.1.29)

$$\overline{g}_{n_0+1} < \varepsilon V^{(-1)}(m_0), \ \ldots, \ \overline{g}_{m_0} < \varepsilon V^{(-1)}(m_0).$$

Используя опять (1.1.29), получаем, что $\overline{g}_n < \varepsilon V^{(-1)}(n)$ при всех $n \geqslant m_0$. Это и означает, что

$$\frac{\overline{g}_n}{V^{(-1)}(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.1.30}$$

Так как $\eta(t) \underset{\text{п.н.}}{\to} \infty$ при $t \to \infty$, то из (1.1.30) вытекает

$$\frac{g_{\eta(t)}}{V^{(-1)}(\eta(t))} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Кроме того, в силу леммы 1.1.3

$$\frac{\eta(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} \frac{1}{a_\tau}, \qquad \frac{V^{(-1)}(\eta(t))}{V^{(-1)}(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\tau^{-1/\alpha}.$$

Это доказывает второе соотношение в (1.1.23).

(ii). При любом $\delta > 0$ и достаточно большом $n = n_\delta$ в силу, например, теоремы 1.1.3 в [26] для всех $n \geqslant n_\delta$ выполняется

$$l\big(\sigma(n)(\ln n)^\theta\big) \leqslant (\ln n)^{\theta\delta} l\big(\sigma(n)\big).$$

Поэтому при $n \geqslant n_\delta$

$$F\big(\sigma(n)(\ln n)^\theta\big) = \sigma(n)^{-\alpha}(\ln n)^{-\theta\alpha} l\big(\sigma(n)(\ln(n))^\theta\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma(n)^{-\alpha}(\ln n)^{-\theta(\alpha-\delta)} l\big(\sigma(n)\big) = (\ln n)^{-\theta(\alpha-\delta)} F\big(\sigma(n)\big) = \frac{(\ln n)^{-\theta(\alpha-\delta)}}{n}.$$

Отсюда аналогично предыдущему при $\alpha\theta > 1$, $\delta < \frac{\alpha\theta-1}{\theta}$ имеем $\theta(\alpha-\delta) > 1$,

$$\sum_{n=n_\delta}^{\infty} \mathbf{P}\big(g_n > \sigma(n)(\ln n)^\theta\big) \leqslant c \sum_{n=n_\delta}^{\infty} F\big(\sigma(n)(\ln n)^\theta\big) \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{n=n_\delta}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-\theta(\alpha-\delta)}}{n} < \infty.$$

Стало быть,

$$\frac{g_n}{\sigma(n)(\ln n)^\theta} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad \theta > \frac{1}{\alpha}, \ \ n \to \infty. \tag{1.1.31}$$

Последующие рассуждения, которые с помощью (1.1.31) доказывают утверждение (1.1.24), повторяют рассуждения в разделе (i) доказательства леммы.

(iii). При любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\big(\overline{g}_n > \varepsilon\sigma(n)\big) \leqslant n\mathbf{P}\big(g > \varepsilon\sigma(n)\big) = o\Big(nF\big(\varepsilon\sigma(n)\big)\Big) =$$
$$= o\Big(nF\big(\sigma(n)\big)\Big) = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Это доказывает первое соотношение в (1.1.25). Второе следует из того, что

$$\frac{\overline{g}_{\eta(t)}}{\sigma(\eta(t))} \underset{p}{\to} 0 \quad \text{и} \quad \frac{\eta(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} \frac{1}{a_\tau} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Нетрудно видеть, что в приведенных рассуждениях ничего не изменится, если в качестве (τ_1, ζ_1) рассматривать произвольный фиксированный случайный вектор. Лемма 1.1.4 доказана.

Из леммы 1.1.4 вытекает следующее утверждение. Положим

$$\overline{\chi}(t) = \max_{u \leqslant t} \chi(u), \qquad \overline{\zeta}(t) = \max_{u \leqslant t} \zeta(u).$$

Следствие 1.1.3. (i). *Справедливы соотношения*

$$\frac{\overline{\chi}(t)}{t} \underset{п.н.}{\to} 0, \qquad \frac{\overline{\zeta}(t)}{t} \underset{п.н.}{\to} 0 \quad при \quad t \to \infty.$$

(ii).
Если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, *то* $\dfrac{\overline{\chi}(t)}{\sqrt{t}} \underset{п.н.}{\to} 0$;
Если $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$, *то* $\dfrac{\overline{\zeta}(t)}{\sqrt{t}} \underset{п.н.}{\to} 0$.

Доказательство. Так как $\mathbf{E}\tau < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta| < \infty$, то первое утверждение следствия вытекает из первого утверждения леммы 1.1.4, если положить $g(t, y) = t$, $g(t, y) = |y|$ и $V(x) = x$. Второе утверждение аналогичным образом вытекает из леммы 1.1.4 при $V(x) = x^2$.

§ 1.2 Первые моменты процессов $Z(t)$, $Y(t)$. Усиленные законы больших чисел

1.2.1 Асимптотика моментов $\boldsymbol{Z(t)}$, $\boldsymbol{Y(t)}$ первого и второго порядков

Обозначим

$$\xi_i = \zeta_i - a\tau_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = Z_n - aT_n, \tag{1.2.1}$$

так что ξ_i при $i \geqslant 2$ суть независимые копии случайной величины

$$\xi = \zeta - a\tau, \qquad \mathbf{E}\xi = 0. \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.2.1. I. *Пусть $Z(t)$, $Y(t)$ — однородные ОПВ. Тогда*
(i). *Справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}Y(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big) = at + r_Y(t), \quad r_Y(t) = o(t), \tag{1.2.3}$$
$$\mathbf{E}Z(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big) - \mathbf{E}\zeta(t) = at + r_Z(t), \;\; r_Z(t) = o(t), \tag{1.2.4}$$

при $t \to \infty$.

(ii). *Если* $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, *то в* (1.2.3) *справедливо асимптотическое разложение, в котором в нерешетчатом случае*

$$r_Y(t) = \frac{a_\zeta \mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau^2} + o(1). \tag{1.2.5}$$

Если к тому же $\mathbf{E}|\tau\zeta| < \infty$, *то в* (1.2.4)

$$r_Z(t) = \frac{a_\zeta \mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau^2} - \frac{\mathbf{E}\tau\zeta}{a_\tau} + o(1). \tag{1.2.6}$$

(iii). *Если* $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\sigma_\xi^2 := \mathbf{D}\xi$, *то при* $t \to \infty$

$$DY(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t), \tag{1.2.7}$$

$$DZ(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t). \tag{1.2.8}$$

Если дополнительно $\mathbf{E}\tau^3 < \infty$, *то*

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + O(\sqrt{t}). \tag{1.2.9}$$

Такое же представление справедливо для $\mathbf{D}Z(t)$.

II. *В неоднородном случае утверждения* (1.2.3), (1.2.4) *сохраняются, если* $\mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta_1| < \infty$. *Утверждения* (1.2.7), (1.2.8) *сохраняются, если* $\mathbf{E}\tau_1^2 < \infty$, $\mathbf{E}\zeta_1^2 < \infty$.

Доказательство. I. Рассмотрим сначала однородный случай $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$.

(i), (ii). Используя тождество Вальда и соотношение (1.1.4), находим

$$\mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}Z_{\eta(t)} = a_\zeta \mathbf{E}\eta(t) = a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big).$$

В силу леммы 1.1.1 это доказывает (1.2.3).

Аналогично

$$\mathbf{E}Z(t) = \mathbf{E}Y(t) - \mathbf{E}\zeta(t)$$

и, стало быть, справедливо (1.2.4). Значения $\mathbf{E}\chi(t)$, $\mathbf{E}\zeta(t)$ в случаях $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}|\tau\zeta| < \infty$ определяются соответственно формулами (1.1.9), (1.1.11). Это доказывает (1.2.5), (1.2.6).

Значения $r_Y(t)$, $r_Z(t)$ в арифметическом случае также могут быть найдены (см. лемму 1.1.1).

(iii). Имеем

$$\mathbf{D}Y(t) = \mathbf{E}\Big[Y(t) - a\big(t + \mathbf{E}\chi(t)\big)\Big]^2 = \mathbf{E}\Big[Z_{\eta(t)} - aT_{\eta(t)} + a\big(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)\big)\Big]^2 =$$
$$= \mathbf{E}\Big[S_{\eta(t)} + a(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)\big)\Big]^2.$$

В силу тождества Вальда

$$\mathbf{E}S^2_{\eta(t)} = \sigma^2_\xi \mathbf{E}\eta(t) = \frac{\sigma^2_\xi(t + \mathbf{E}\chi(t))}{a_\tau}$$

(см., например, теорему 15.2.5 в [10]). Поэтому

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma^2_\xi(t + \mathbf{E}\chi(t))}{a_\tau} + a^2\mathbf{D}\chi(t) + 2a\mathbf{E}S_{\eta(t)}\big(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)\big). \quad (1.2.10)$$

Так как $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, то $\mathbf{D}\chi(t) = \mathbf{E}\chi^2(t) - \big(\mathbf{E}\chi(t)\big)^2 = o(t)$ при $t \to \infty$ и в силу неравенства Коши–Буняковского для $\big|\mathbf{E}S_{\eta(t)}\big(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)\big)\big|$ получаем

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma^2_\xi t}{a_\tau} + o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \quad (1.2.11)$$

Это доказывает (1.2.7). Совершенно аналогично устанавливается (1.2.8). Если $\mathbf{E}\tau^3 < \infty$, то значение $\mathbf{D}\chi(t)$ равномерно по t ограничено и мы получаем (1.2.9).

II. Перейдем к рассмотрению неоднородных ОПВ, которые обозначим через $\widetilde{Y}(t)$, $\widetilde{Z}(t)$. Имеем

$$\mathbf{E}\widetilde{Y}(t) = \mathbf{E}(\zeta_1;\, \tau_1 > t) + \int_0^t \mathbf{E}\big(\zeta_1 + Y(t-s); \tau_1 \in ds\big) = \\ = \mathbf{E}\zeta_1 + \int_0^t \mathbf{E}Y(t-s)\mathbf{P}(\tau_1 \in ds),$$

где $Y(u)$ — однородный ОПВ, не зависящий от (τ_1, ζ_1). Поэтому в силу утверждения I, (i) имеем при $t \to \infty$

$$\mathbf{E}\widetilde{Y}(t) = \mathbf{E}\zeta_1 + \int_0^{t/2} \mathbf{E}Y(t-s)\mathbf{P}(\tau \in ds) + \mathbf{P}\big(\tau_1 > t/2\big)O(t) = \\ = \mathbf{E}\zeta_1 + at - a\mathbf{E}\tau_1 + o(t).$$

Соотношение такого же вида справедливо для $\mathbf{E}\widetilde{Z}(t)$. Это доказывает первое утверждение раздела II. Второе утверждение доказывается аналогично, но несколько более громоздко. Теорема 1.2.1 доказана.

Параметр

$$\sigma^2 := \frac{\sigma^2_\xi}{a_\tau}$$

в (1.2.7), (1.2.8) можно интерпретировать как «удельную» (на единицу времени) асимптотическую дисперсию процессов $Y(t)$, $Z(t)$.

Отметим, что в случае $\mathbf{E}\tau^2 = \infty$ выполняется $\mathbf{D}\chi(t) = \infty$ и при $a \neq 0$ согласно (1.2.10) будем иметь $\mathbf{D}Y(t) = \infty$. В то же время, как будет показано ниже (см. теорему 1.3.2), распределение $Y(t)$ при $\sigma_\xi<\infty$ будет асимптотически нормальным (соотношения $\mathbf{E}\tau^2=\infty$, $\mathbf{D}\xi < \infty$ совместимы, если, например, $a = 0$ или $\zeta = a\tau + \omega$, $\mathbf{E}\omega^2 < \infty$).

Если $a = 0$, то для нерешетчатых τ в однородном случае

$$\mathbf{E}Y(t) = 0, \qquad \mathbf{D}Y(t) = \sigma^2\left(t + \frac{\mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau} + o(1)\right) \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Замечание 1.2.1. Нетрудно проверить, что соотношения (1.2.3), (1.2.4) и (1.2.7), (1.2.8) будут справедливы и в тех случаях, когда распределения τ_1, ζ_1 зависят от t и, соответственно, $\mathbf{E}\tau_1 = o(t)$, $\mathbf{E}|\zeta_1| = o(t)$ и $\mathbf{E}\tau_1^2 = o(t)$, $\mathbf{E}\zeta_1^2 = o(t)$ при $t \to \infty$. Останавливаться на этом подробнее мы не будем, так как в дальнейшем это не понадобится.

1.2.2 Усиленные законы больших чисел

Теорема 1.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\frac{Y(t)}{t} \underset{\textit{п.н.}}{\to} a, \qquad \frac{Z(t)}{t} \underset{\textit{п.н.}}{\to} a \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{1.2.12}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{Y(t)}{t} = \frac{Z_{\eta(t)}}{T_{\eta(t)} - \chi(t)} = \frac{Z_{\eta(t)}}{\eta(t)}\left(\frac{T_{\eta(t)}}{\eta(t)} - \frac{\chi(t)}{t}\frac{t}{\eta(t)}\right)^{-1}. \tag{1.2.13}$$

Здесь в силу усиленного закона больших чисел для сумм случайных величин и того, что $\eta(t) \underset{\text{п.н.}}{\to} \infty$ при $t \to \infty$ выполняется

$$\frac{Z_{\eta(t)}}{\eta(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\zeta, \qquad \frac{T_{\eta(t)}}{\eta(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\tau \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Кроме того, $\dfrac{t}{\eta(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\tau$ в силу леммы 1.1.3 и $\dfrac{\chi(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$ при $t \to \infty$ в силу следствия 1.1.3. Отсюда и из (1.2.13) следует (1.2.12). Для процесса $Z(t)$ доказательство проходит аналогично. Теорема 1.2.2 доказана.

§ 1.3 Центральная предельная теорема и закон повторного логарифма

1.3.1 Теорема Анскомбе

Для доказательства основных результатов в этом и некоторых других разделах мы будем использовать теорему Анскомбе (см. [76]) о возможности замены в предельных теоремах детерминированного растущего временно́го параметра на случайный растущий параметр. Ниже мы приводим несколько иные, более простые на наш взгляд версии формулировки и доказательства этой теоремы, чем в первоисточнике [76]. Пусть G есть некоторая функция распределения, знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость.

Теорема 1.3.1 (Анскомбе)**.** *Пусть $s(n)$ есть последовательность случайных величин такая, что:*
1)
$$\mathbf{P}(s(n) < v) \Rightarrow G(v) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{1.3.1}$$
2)
$$\max_{|k|<\delta n} |s(n+k) - s(n)| \underset{p}{\to} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \quad \delta = \delta(n) \to 0. \tag{1.3.2}$$

Пусть далее определена последовательность $\theta(t)$ целочисленных случайных величин, определенная на одном вероятностном пространстве с $s(n)$ и зависящая от растущего параметра t, для которой
3) *существует функция $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ такая, что*
$$\frac{\theta(t)}{h(t)} \underset{p}{\to} 1. \tag{1.3.3}$$

При выполнении этих условий
$$\mathbf{P}\Big(s\big(\theta(t)\big) < v\Big) \Rightarrow G(v) \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Замечание 1.3.1. Условие (1.3.2) теоремы 1.3.1 представляет собой более простую версию так называемого «условия Анскомбе», которое использовалось в исходной работе [76] (см. также [100, раздел 1.3]). Условие (1.3.2) несколько слабее исходного условия Анскомбе.

Доказательство теоремы 1.3.1. В силу (1.3.3) существует последовательность ε_t, сходящаяся к нулю достаточно медленно при $t \to \infty$, такая, что
$$\mathbf{P}\big(|\,\theta(t) - h(t)| \geqslant \varepsilon_t h(t)\big) \to 0.$$

Поэтому, считая, не ограничивая общности, функцию $h(t)$ целочисленной, для любой точки v непрерывности функции G имеем

$$\mathbf{P}\Big(s\big(\theta(t)\big) < v\Big) = o(1) + \mathbf{P}\Big(s\big(\theta(t)\big) < v;\ |\theta(t) - h(t)| < \varepsilon_t h(t)\Big) =$$
$$= o(1) + \mathbf{P}\Big(s\big(h(t)\big) + \rho(t) < v;\ \big|\theta(t) - h(t)\big| < \varepsilon_t h(t)\Big), \quad (1.3.4)$$

где $\rho(t) = s\big(\theta(t)\big) - s\big(h(t)\big)$ и на множестве $\big|\theta(t) - h(t)\big| < \varepsilon_t h(t)$ в силу (1.3.2) выполнено

$$\big|\rho(t)\big| \leqslant \max_{|k|<\varepsilon_t h(t)} \Big|s\big(h(t)+k\big) - s\big(h(t)\big)\Big| \underset{p}{\to} 0$$

при $t \to \infty$. Поэтому из (1.3.1), (1.3.4) вытекает, что

$$\mathbf{P}\Big(s\big(\theta(t)\big) < v\Big) = o(1) + \mathbf{P}\Big(s\big(h(t)\big) + \rho(t) < v\Big) \Rightarrow G(v)$$

при $t \to \infty$. Теорема 1.3.1 доказана.

1.3.2 Центральная предельная теорема

Центральную предельную теорему для ОПВ $Y(t)$, $Z(t)$ можно получить либо непосредственно (см., например, [10], гл. 10), либо с помощью теоремы Анскомбе, как это сделано ниже, при несколько более общих чем обычно условиях.

Рассмотрим последовательность

$$y(t) := \frac{Y(t) - at}{\sigma\sqrt{t}}, \quad (1.3.5)$$

где, как и прежде, $a = a_\zeta/a_\tau$, $\sigma^2 = \sigma_\xi^2 a_\tau^{-1}$, $\xi = \zeta - a\tau$ и предполагается, что $\sigma_\xi^2 = \mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Ниже, как и в следствии 1.1.1 и замечании 1.2.1, мы будем допускать частичную схему серий, когда распределение (τ_1, ζ_1) зависит от t.

Теорема 1.3.2. *Если $\sigma_\xi < \infty$, $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, то*

$$y(t) \Leftarrow\!\!\!\Rightarrow \mathbf{\Phi}, \quad (1.3.6)$$

где $\mathbf{\Phi}$ — стандартное нормальное распределение. Такое же утверждение справедливо для $z(t) = \frac{Z(t)-at}{\sigma\sqrt{t}}$.

Символ $\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ в (1.3.6) означает слабую сходимость при $t \to \infty$ распределений последовательности случайных величин $y(t)$ к распределению $\mathbf{\Phi}$.

Отметим, что в утверждении теоремы не предполагается конечность σ_τ; достаточна лишь конечность σ_ξ, так что если, например, $a = a_\zeta = 0$, то $\xi = \zeta$ и для выполнения (1.3.6) достаточно лишь существования $a_\tau = \mathbf{E}\tau$ и $\sigma_\zeta^2 = \mathbf{D}\zeta$.

Для того чтобы при доказательстве теоремы 1.3.2 воспользоваться теоремой Анскомбе нам понадобится

Лемма 1.3.1. *Нормированные суммы*

$$s(n) = \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{n}} \tag{1.3.7}$$

удовлетворяют условию 2) *теоремы* 1.3.1 (см. (1.3.2); S_n определены в (1.2.1)).

Доказательство. Имеем при $m = n + k$

$$s(m) - s(n) = \frac{S_m - am}{\sigma_\xi \sqrt{m}} - \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{n}} \pm \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{m}}, \tag{1.3.8}$$

где

$$\max_{|k|<\delta n} \left| \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{n}} - \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{m}} \right| \leqslant \left| \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{n}} \right| \max \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1 \pm \delta}} \right| \underset{p}{\to} 0 \tag{1.3.9}$$

при $n \to \infty$, $\delta = \delta(n) \to 0$. Далее, пусть для определенности $m > n$ $(k > 0)$. Тогда

$$\max_{k<\delta n} \left| \frac{S_m - am}{\sigma_\xi \sqrt{m}} - \frac{S_n - an}{\sigma_\xi \sqrt{m}} \right| \underset{p}{\leqslant} \sqrt{\delta} \max_{k<\delta n} \left| \frac{S_k - ak}{\sigma_\xi \sqrt{\delta n}} \right|, \tag{1.3.10}$$

где $\max\limits_{k<\delta n} \left| \frac{S_k - ak}{\sigma_\xi \sqrt{\delta n}} \right|$ сходится по распределению при $\delta n \to \infty$ к собственной случайной величине. Поэтому правая часть в (1.3.10) сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$, $\delta = \delta(n) \to 0$. Случай $m < n$ рассматривается аналогично. (Отметим, что сходимость правой части в (1.3.10) по вероятности к нулю при $\delta \to 0$ можно извлечь и из неравенства Колмогорова–Дуба для распределения правой части в (1.3.10) (см., например, [10, теорема 15.3.3])).

Вместе с (1.3.8), (1.3.9) это влечет за собой (1.3.2). Лемма 1.3.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.2. Используя обозначения раздела 1.1.1, в однородном случае можно записать

$$y(t) = \frac{S_{\eta(t)}}{\sigma \sqrt{\eta(t)}} \cdot \sqrt{\frac{\eta(t)}{t}} + \frac{a\chi(t)}{\sigma \sqrt{t}} = s\big(\eta(t)\big) \sqrt{\frac{\eta(t) a_\tau}{t}} + \frac{a\chi(t)}{\sigma \sqrt{t}}, \tag{1.3.11}$$

где по теореме Анскомбе $s\bigl(\eta(t)\bigr) \Leftarrow \mathbf{\Phi}$ при $t \to \infty$. Поскольку в силу лемм 1.1.3 и 1.1.1

$$\sqrt{\frac{\eta(t)a_\tau}{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 1, \qquad \frac{\chi(t)}{\sqrt{t}} \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

то из (1.3.11) следует (1.3.6) и теорема 1.3.2 в однородном случае доказана.

В неоднородном случае для ОПВ $\widetilde{Y}(t)$ имеем

$$\widetilde{Y}(t) = \begin{cases} \zeta_1 & \text{при} \quad \tau_1 < t, \\ \zeta_1 + Y(t - \tau_1) & \text{при} \quad \tau_1 \geqslant t, \end{cases}$$

где $Y(t)$ — однородный ОПВ, не зависящий от (τ_1, ζ_1). Если τ_1, ζ_1 не случайны, $\tau_1 = o(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, то утверждение (1.3.6), очевидно, сохранится и для процесса $\widetilde{Y}(t)$. Нетрудно видеть, что это будет справедливо и в случае $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$. Теорема 1.3.2 для процесса $Y(t)$ доказана. Она доказана и для процесса $Z(t)$, так как

$$Z(t) = Y(t) - \zeta(t), \qquad \frac{\zeta(t)}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1.3.12}$$

Теорема 1.3.2 доказана.

Асимптотическая нормальность ОПВ в случае $a = 0$ (т.е. нормальность $\frac{S_{\eta(t)}}{\sigma\sqrt{t}}$) доказана в [111] (см. также [87, с. 261], [100, гл. 1]) также с использованием теоремы Анскомбе. Асимптотическая нормальность ОПВ в общем случае с помощью «прямых» подходов установлена, как уже отмечалось, в [10, § 10.6].

1.3.3 Закон повторного логарифма

Теорема 1.3.3. *Пусть $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma < \infty$, τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины,*

$$L(t) := \sigma\sqrt{2t \ln\ln t} \quad \textit{при} \quad t \geqslant 3. \tag{1.3.13}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\overline{y} := \varlimsup_{t\to\infty} \frac{Y(t) - at}{L(t)} = 1, \tag{1.3.14}$$

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{Y(t) - at}{L(t)} = -1.$$

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Такое же утверждение справедливо для процесса $Z(t)$.

Закон повторного логарифма для ОПВ при $a = 0$ (т. е. для процесса $S_{\eta(t)}$) установлен в [118] и вытекает из гл. 1, 5 в [100]).

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (1.3.14). Так как $t = T_{\eta(t)} - \chi(t)$, то

$$\overline{y} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\frac{S_{\eta(t)}}{L(t)} + \frac{a\chi(t)}{L(t)}\right). \tag{1.3.15}$$

В силу следствия 1.1.3 при $\sigma_\tau < \infty$ с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{a\chi(t)}{L(t)} = 0.$$

Если $a = 0$, то это соотношение выполнено всегда. Кроме того, с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_\tau \eta(t)}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{L(a_\tau \eta(t))} = 1,$$

так что с вероятностью 1

$$\overline{y} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_{\eta(t)}}{L(t)} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_{\eta(t)}}{L(a_\tau \eta(t))}.$$

С ростом t функция $\eta(t)$ пробегает все значения $1, 2, \ldots$. Поэтому в силу равенства $\sigma\sqrt{a_\tau} = \sigma_\xi$ и в силу закона повторного логарифма для $\{S_n\}$ имеем

$$\overline{y} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{L(a_\tau n)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{a_\tau} L(n)} = 1.$$

В силу (1.3.12) такое же утверждение справедливо и для процесса $Z(t)$. Теорема 1.3.3 доказана.

§ 1.4 Сходимость к устойчивому закону. Аналог закона повторного логарифма

1.4.1 Сходимость к устойчивому закону

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда $\sigma_\xi^2 = \mathbf{D}\xi = \infty$ и выполнено условие правильного убывания распределения $\xi = \zeta - a\tau$ на бесконечности. Положим

$$F_-(t) = \mathbf{P}(\xi \leqslant -t), \quad F_+(t) = \mathbf{P}(\xi \geqslant t),$$
$$F(t) = F_-(t) + F_+(t) = \mathbf{P}\big(|\xi| \geqslant t\big).$$

Мы будем предполагать, что выполнено условие

$[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$. *Функция $F(t)$ является правильно меняющейся на бесконечности, т.е. представима в виде*

$$F(t) = t^{-\alpha} l(t), \qquad \alpha \in (1, 2),$$

где $l(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Кроме того, существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_+(t)}{F(t)} =: \beta_+ \in [0, 1],$$

и мы полагаем $\beta := 2\beta_+ - 1$.

Пусть далее $F^{(-1)}(u)$ — обобщенная обратная функция к $F(t)$:

$$F^{(-1)}(u) = \inf \big\{ t : \, F(t) < u \big\}$$

и

$$\sigma_\xi(n) := F^{(-1)}(1/n). \tag{1.4.1}$$

Функция $\sigma_\xi(n)$ имеет вид $n^{1/\alpha} l_{\sigma_\xi}(n)$, где $l_{\sigma_\xi}(n)$ — медленно меняющаяся последовательность (см., например, [26, § 8.8]).

При выполнении условия $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ нормированные суммы $s(n) := S_n/\sigma_\xi(n)$ (см. (1.2.1)) слабо сходятся по распределению к устойчивому закону $\mathbf{\Phi}_{\alpha,\beta}$ с параметрами (α, β). Положим

$$\sigma(t) = \sigma_\xi(t) a_\tau^{-1/\alpha}.$$

Теорема 1.4.1. *Если $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\tau_1 = o_p\big(\sigma(t)\big)$, $\zeta_1 = o_p\big(\sigma(t)\big)$, то при $t \to \infty$*

$$y(t) := \frac{Y(t) - at}{\sigma(t)} \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}. \tag{1.4.2}$$

Такое же утверждение справедливо для процесса $z(t) := \frac{Z(t)-at}{\sigma(t)}$.

(Напомним, что запись $y(t) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}$ означает слабую сходимость распределений $y(t)$ к распределению $\mathbf{\Phi}_{\alpha,\beta}$ с функцией распределения $\Phi_{\alpha,\beta}$.)

Утверждение (1.4.2) в случае $a = 0$ (т. е. для остановленных сумм $S_{\eta(t)}/\sigma(t)$) было анонсировано (без доказательств) в [100, теорема 1.3.2].

Схема доказательства теоремы 1.4.1 та же, что в центральной предельной теореме (см. раздел 1.3.2). Мы покажем сначала, что нормированные суммы

$$s(n) = \frac{S_n - an}{\sigma_\xi(n)}$$

удовлетворяют условию 2) теоремы 1.3.1, т.е. установим следующий аналог леммы 1.3.1 в однородном случае.

Лемма 1.4.1. *Пусть случайная величина $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1,2)$. Тогда*

$$\sup_{|k|<\delta n} \big|s(n+k) - s(n)\big| \underset{p}{\to} 0 \tag{1.4.3}$$

при $n \to \infty$, $\delta = \delta(n) \to 0$.

Доказательство леммы 1.4.1. Аналогично (1.3.8), (1.3.9) имеем при $m = n+k$

$$\sup_{|k|<\delta n} \big|s(n+k) - s(n)\big| = \sup_{|k|<\delta n} \left| \frac{S_m - am}{\sigma_\xi(m)} - \frac{S_n - an}{\sigma_\xi(n)} \pm \frac{S_n - an}{\sigma_\xi(m)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|k|<\delta n} \frac{|S_k - ak|}{\sigma_\xi(m)} + \big|s(n)\big| \sup_{|k|<\delta n} \left| \frac{\sigma_\xi(n)}{\sigma_\xi(n+k)} - 1 \right|. \tag{1.4.4}$$

Так как $\frac{\sigma_\xi(n)}{\sigma_\xi(n+k)} \to 1$ при $n \to \infty$, $k = o(n)$, то второе слагаемое в правой части (1.4.4) есть, очевидно, $o_p(1)$. Для первого слагаемого в правой части (1.4.4) при $k > 0$ имеем

$$\max_{k<\delta n} \left| \frac{S_k - ak}{\sigma_\xi(m)} \right| = \frac{\sigma_\xi(\delta n)}{\sigma_\xi(m)} \max_{k<\delta n} \left| \frac{S_k - ak}{\sigma_\xi(\delta n)} \right|. \tag{1.4.5}$$

Из теоремы 3.1.1 и следствия 3.1.2 в [26] при $n \to \infty$ и больших v вытекает неравенство

$$\mathbf{P}\Big(\max_{k<\delta n} |S_k - ak| > v\sigma_\xi(\delta n)\Big) \leqslant 2\delta n F\big(v\sigma_\xi(\delta n)\big). \tag{1.4.6}$$

Учитывая, что $\frac{\sigma(\delta n)}{\sigma(n)} \sim \delta^{1/\alpha}$ при $n \to \infty$, мы при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ положим $v = \varepsilon\delta^{-1/\alpha}$. Тогда правая часть в (1.4.6) не будет превосходить

$$3\delta n \varepsilon^{-\alpha} \delta F\big(\sigma(\delta n)\big) \sim 3\varepsilon^{-\alpha}\delta \to 0$$

при $\delta \to 0$. Это означает, что левая часть в (1.4.5) сходится по вероятности к 0 при $n \to \infty$, $\delta = \delta(n) \to 0$. Отсюда вытекает (1.3.2). Случай $k < 0$ рассматривается аналогично. Лемма 1.4.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4.1. Рассмотрим однородный случай. Последовательность $s(n)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.3.1 при $G = \Phi_{\alpha,\beta}$. По лемме 1.4.1 она удовлетворяет также условию 2) этой теоремы. Наконец, как мы уже видели, последовательность $\eta(t)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1.3.1. Стало быть, по теореме 1.3.1

$$s\big(\eta(t)\big) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Так как $\frac{a_\tau^{1/\alpha}\sigma_\xi\bigl(\eta(t)\bigr)}{\sigma_\xi(t)} \underset{p}{\to} 1$, то $\frac{\sigma_\xi\bigl(\eta(t)\bigr)}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 1$ при $t \to \infty$. Кроме того, по лемме 1.1.1 $\frac{\chi(t)}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 0$. Поэтому

$$y(t) = \frac{Y(t)-at}{\sigma(t)} = \frac{S_{\eta(t)}}{\sigma_\xi\bigl(\eta(t)\bigr)}\,\frac{\sigma_\xi\bigl(\eta(t)\bigr)}{\sigma(t)} + \frac{a\chi(t)}{\sigma(t)} = s\bigl(\eta(t)\bigr) + o_p(1) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}.$$

Распространение этого утверждения на процесс $z(t) = \frac{Z(t)-at}{\sigma(t)}$ и на неоднородный случай происходит так же, как в теореме 1.3.2. Теорема 1.4.1 доказана.

1.4.2 Аналог закона повторного логарифма

Аналог закона повторного логарифма для процесса $Y(t)-at$ имеет при $\sigma = \infty$ следующий вид.

Теорема 1.4.2. *Пусть ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ при $\alpha \in (1,2)$, $\beta > -1$; τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

$$a = 0 \;\text{ или }\; F_\tau(t) := \mathbf{P}(\tau \geqslant t) \leqslant cF(t), \quad c = \mathrm{const}, \qquad F(t) = \mathbf{P}\bigl(|\xi| \geqslant t\bigr). \tag{1.4.7}$$

Тогда

(i) *при любом $\theta > 1/\alpha$*

$$\overline{y}_\theta := \varlimsup_{t\to\infty} \frac{Y(t)-at}{\sigma(t)(\ln t)^\theta} = 0, \tag{1.4.8}$$

а при любом $\theta < 1/\alpha$

$$\overline{y}_\theta = \infty \tag{1.4.9}$$

с вероятностью 1.

(ii). *Утверждение раздела* (i) *полностью сохранится для процесса $Z(t)$, если ко второму условию в* (1.4.7) *добавить условие*

$$F_\zeta(t) := \mathbf{P}(\zeta \geqslant t) \leqslant cF(t), \quad c = \mathrm{const}, \quad t > 0. \tag{1.4.10}$$

Утверждение теоремы 1.4.2 можно назвать «законом одинарного логарифма». Его можно сформулировать и в терминах повторного логарифма.

Следствие 1.4.1. *Если выполнены условия п.* (i) *теоремы* 1.4.2*, то с вероятностью* 1

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln(Y(t)-at)^+ - \ln\sigma(t)}{\ln\ln t} = \frac{1}{\alpha}, \tag{1.4.11}$$

где $(x)^+ = \max(0, x)$*.*

Доказательство. Обозначим

$$y_{(\theta)}(t) := \frac{Y(t)-at}{\sigma(t)(\ln t)^\theta}.$$

Тогда в силу (1.4.8) при $\theta = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших t с вероятностью 1

$$\begin{gathered} y_{(\theta)}(t) < 1, \quad \ln\bigl(y_{(\theta)}(t)\bigr)^+ < 0, \\ \frac{\ln(Y(t)-at)^+ - \ln\sigma(t)}{\ln\ln t} < \theta = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon. \end{gathered} \tag{1.4.12}$$

Получим теперь оценку снизу. Из (1.4.9) следует, что для почти всех элементарных событий из вероятностного пространства, на котором задан процесс $Y(t)$, $t \geqslant 0$ (или последовательность $\{\tau_j, \zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$), для любого $\theta = \frac{1}{\alpha} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая, что $y_\theta(t_k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Поэтому аналогично предыдущему находим

$$\begin{gathered} y_{(\theta)}(t_k) > 1, \quad \ln y_{(\theta)}(t_k) > 0, \\ \frac{\ln(Y(t_k)-at_k) - \ln\sigma(t_k)}{\ln\ln t_k} > \theta = \frac{1}{\alpha} - \varepsilon \quad \text{при} \quad k \to \infty. \end{gathered}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из этого соотношения и (1.4.12) вытекает (1.4.11). Следствие 1.4.1 доказано.

Из доказательства следствия 1.4.1 видно, что существует последовательность $\varepsilon_t \to 0$ при $t \to \infty$, для которой

$$\mathbf{P}\Bigl(Y(t) - at < \sigma(t)(\ln t)^{1/\alpha+\varepsilon_t} \quad \textit{при всех } t \geqslant T\Bigr) \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Утверждения, аналогичные теореме 1.4.2 и следствию 1.4.1, справедливы для процесса $Z(t)$ и для отрицательных уклонений $Y(t) - at$, $Z(t) - at$.

Доказательство теоремы 1.4.2. Доказательство первого утверждения теоремы следует той же схеме, которая использовалась в доказательстве теоремы 1.3.3. Нужно лишь внести следующие изменения. Вместо (1.3.15) мы будем использовать равенство

$$\overline{y}_\theta = \varlimsup_{t\to\infty}\left(\frac{S_{\eta(t)}}{\sigma(t)(\ln t)^\theta} + \frac{a\chi(t)}{\sigma(t)(\ln t)^\theta}\right), \tag{1.4.13}$$

в котором в силу условия (1.4.7) и второго утверждения леммы 1.1.4

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a\chi(t)}{\sigma(t)(\ln t)^\theta} = 0 \quad \text{п.н.} \tag{1.4.14}$$

Для оценки главного слагаемого в правой части (1.4.13) мы будем использовать следующее утверждение («закон одинарного логарифма», для сумм случайных величин; см. теорему 3.9.1 в [26]):

При выполнении условий теоремы 1.4.2

$$\overline{s}_\theta := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sigma(n)(\ln)^\theta} = 0 \quad \textit{п.н.} \tag{1.4.15}$$

при любом $\theta > 1/\alpha$, *и* $\overline{s}_\theta = \infty$ *п.н. при любом* $\theta < 1/\alpha$.

Так как

$$\frac{\eta(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} a_\tau^{-1} \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_{\eta(t)}}{\sigma(t)(\ln t)^\theta} = a_\tau^{-1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_{\eta(t)}}{\sigma(\eta(t))(\ln \eta(t))^\theta}.$$

Это в силу (1.4.15) доказывает первое утверждение теоремы.

(ii). Второе утверждение доказывается точно так же, но поскольку $Z(t) = Y(t) - \zeta(t)$, то требуется дополнительно выполнение соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\zeta(t)|}{\sigma(t)(\ln t)^\theta} = 0 \quad \text{п.н.}, \tag{1.4.16}$$

которое вытекает из условия (1.4.10) и леммы 1.4.1. Если $a = 0$, то $F_\zeta(t) = F(t)$ и условие (1.4.10) излишне, как и условие (1.4.7). Теорема доказана.

§ 1.5 Принцип инвариантности

1.5.1 Введение

В этом разделе мы будем предполагать, что

$$\mathbf{E}\tau^2 < \infty, \qquad \mathbf{E}\zeta^2 < \infty,$$

и рассматривать поведение *траекторий* ОПВ.

Нам будет удобно рассматривать процессы $Y(t)$, $Z(t)$ на растущем отрезке времени $[0, u_0 T]$ при $T \to \infty$ и фиксированном $u_0 > 0$. Произведем сжатие по времени в T раз и рассмотрим процессы

$$y_T(u) = \frac{Y(uT) - auT}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{и} \quad z_T(u) = \frac{Z(uT) - auT}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{1.5.1}$$

определенные на отрезке $[0, u_0]$.

Принцип инвариантности для $y_T(u)$ был установлен в [91, 114] путем весьма сложных построений на одном вероятностном пространстве как следствие сильной аппроксимации процессов y_T винеровским процессом w; см. также [72]. Существует ряд работ, посвященных скорости сходимости в принципе инвариантности, см., например, [38], [92] и библиографию там.

Как будет видно из доказательства теоремы 1.5.2 о принципе инвариантности для $y_T(u)$, основной вклад в предельное распределение для y_T вносит распределение остановленных нормированных сумм $S_{\nu(uT)}$. Функциональные предельные теоремы для остановленных сумм $\frac{S_{\nu(uT)}}{\sigma_\xi \sqrt{T}}$ (т.е. теоремы для процессов $z_T(u)$ в случае $a = 0$) вытекают из [100, гл. 5].

1.5.2 Аналог теоремы Анскомбе в случае сходимости к непрерывному процессу

Пусть $s_T(u)$ — последовательность процессов на отрезке $u \in [0, u_0]$, заданных в измеримом пространстве $\big(\mathbb{D}(0, u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, где $\mathbb{D}(0, u_0)$ — пространство функций на $[0, u_0]$ без разрывов второго рода и непрерывных в каждой точке справа, $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}$ — σ-алгебра множеств из $\mathbb{D}$, порожденная цилиндрическими множествами. Пусть далее, $\mathbb{C}(0, u_0)$ — пространство непрерывных функций на $[0, u_0]$, $\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$ — σ-алгебра множеств из $\mathbb{C}$, порожденная цилиндрическими множествами, и $\rho_{\mathbb{C}, u_0}$ — равномерная метрика: для $g_i \in \mathbb{D}(0, u_0)$, $i = 1, 2$,

$$\rho_{\mathbb{C}, u_0}(g_1, g_2) = \sup_{u \leqslant u_0} \big| g_1(u) - g_2(u) \big|.$$

Мы будем говорить, что последовательность процессов $s_T(u)$, заданных в пространстве $\big(\mathbb{D}(0, u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, $\mathbb{C}$-*сходится* (по распределению) при $T \to \infty$ к процессу $s(u)$, $u \in [0, u_0]$, заданному в пространстве $(\mathbb{C}(0, u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$, если для любого измеримого в $(\mathbb{D}(0, u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}})$ функционала f, непрерывного в равномерной метрике в «точках» пространства $\mathbb{C}(0, u_0)$, выполняется

$$f(s_T) \Rightarrow f(s) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{1.5.2}$$

где символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений. $\mathbb{C}$-сходимость мы будем записывать в виде

$$s_T \underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow} s \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Аналог теоремы Анскомбе для случайных процессов имеет следующий вид.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $s_T(v)$ — *случайные процессы в* $\big(\mathbb{D}(0,v_0),\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, *которые* $\mathbb{C}$-*сходятся на* $[0,v_0]$ *к процессу* $s(v)$, *непрерывному с вероятностью* 1.

Пусть далее $\theta_T(u)$ — *неубывающие случайные процессы в* $\big(\mathbb{D}(0,v_0/b),\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, *заданные на том же вероятностном пространстве, что и* s_T, *такие что при заданном* $b>0$

$$\max_{u\leqslant v_0/b}\big|\theta_T(u)-bu\big| \underset{p}{\to} 0 \quad \textit{при} \quad T\to\infty. \tag{1.5.3}$$

Тогда при любом $u_0<v_0/b$

$$\mathbf{P}\big\{\theta_T(u_0)<v_0\big\}\to 1 \quad \textit{при} \quad T\to\infty, \tag{1.5.4}$$

а процессы $s_T(u)$ *и* $s(u)$ *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\rho_{\mathbb{C},u_0}\Big(s_T\big(\theta_T(u)\big),s(bu)\Big) \underset{p}{\to} 0 \quad \textit{при} \quad T\to\infty. \tag{1.5.5}$$

Процессы $s_T\big(\theta_T(u)\big)$ $\mathbb{C}$-*сходятся на* $[0,u_0]$ *к процессу* $s(bu)$.

Отметим, что вместо функции bu в (1.5.3) можно рассматривать любую непрерывную, строго возрастающую функцию $b(u)$, $b(0)=0$, выбирая при этом $u_0<b^{(-1)}(v_0)$. Роль предельного процесса будет играть процесс $s\big(b(u)\big)$.

Случай, когда $\theta_T(u)=\frac{N(Tu)}{T}$, где $\frac{N(t)}{t} \underset{п.н.}{\to} b$ при $t\to\infty$ применительно к остановленным случайным блужданиям рассматривался в [100]. В теореме 1.5.1 аналогом условия непрерывности 2) в теореме Анскомбе служит предположение о непрерывности предельного процесса $s(v)$, означающее непрерывность в известном смысле и процессов $s_T(v)$.

В дальнейшем наряду с метрикой $\rho_{\mathbb{C},u_0}$ будем рассматривать и ряд других метрик в пространстве $\mathbb{D}$ и использовать следующее простое предложение.

Лемма 1.5.1. *Пусть в пространстве* $\mathbb{D}(0,u_0)$ *задана метрика* ρ *и* f *есть измеримый функционал в* $\big(\mathbb{D}(0,u_0),\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, *непрерывный относительно метрики* ρ. *Пусть далее* s_T *и* s — *случайные процессы в* $\big(\mathbb{D}(0,u_0),\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, *заданные на одном вероятностном пространстве и такие, что* $\rho(s_T,s)\underset{p}{\to}0$ *при* $T\to\infty$. *Тогда* $f(s_T)\Rightarrow f(s)$ *при* $T\to\infty$.

Доказательство. Обозначим $B_\delta = \{\rho(s_T, s) < \delta\}$. Тогда $\mathbf{P}(\overline{B}_\delta) \to 0$ при $T \to \infty$ и любом $\delta > 0$. Это означает, что найдется последовательность $\delta = \delta_T$, сходящаяся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$ и такая, что по-прежнему будет выполняться $\mathbf{P}(\overline{B}_\delta) \to 0$. Далее, при $\delta = \delta_T$ имеем

$$\mathbf{P}\big(f(s_T) < v\big) = \mathbf{P}\big(f(s_T) < v, B_\delta\big) + \mathbf{P}\big(f(s_T) < v, \overline{B}_\delta\big),$$

где второе слагаемое в правой части есть $o(1)$ при $T \to \infty$. Кроме того, в силу непрерывности f имеем при $\delta = \delta_T$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(f(s_T) < v, B_\delta\big) &= \mathbf{P}\big(f(s) + o_p(1) < v, B_\delta\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(f(s) < v + o_p(1)\big) - \mathbf{P}\big(f(s) < v + o_p(1), \overline{B}_\delta\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(f(s) < v + o_p(1)\big) + o(1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\big(f(s_T) < v\big) \to \mathbf{P}\big(f(s) < v\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

в любой точке v непрерывности функции распределения случайной величины $f(s)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.5.1. Известно, что процессы $s_T(v)$ и $s(v)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\rho_{\mathbb{C},v_0}\big(s_T(v), s(v)\big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{1.5.6}$$

(общую теорему об этом, см., например, в [84], теорема 1.6.7). Поэтому в силу леммы 1.5.1 для доказательства теоремы нам достаточно убедиться, что выполнено (1.5.4), (1.5.5). Положим

$$A_{T,\varepsilon} = \Big\{\max_{u \leqslant u_0} \big|\theta_T(u) - bu\big| \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Тогда из условия (1.5.3) следует, что существует последовательность $\varepsilon = \varepsilon_T$, сходящаяся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to 1. \tag{1.5.7}$$

Ясно, что

$$A_{T,\varepsilon} \subset \big\{\theta_T(u_0) \leqslant v_0\big\} \quad \text{при любом} \quad u_0 < v_0/b$$

и, стало быть, выполнено (1.5.4).

Докажем теперь соотношение (1.5.5). Имеем при любом $h>0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\rho_{\mathbb{C},u_0}(s_T(\theta_T(u)),s(bu)>2h\Big)&\leqslant\\ \leqslant\mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon})+\mathbf{P}\Big(\rho_{\mathbb{C},u_0}\big(s_T(\theta_T(u)\big),s\big(\theta_T(u)\big)\big)>h;A_{T,\varepsilon}\Big)&+\\ +\mathbf{P}\Big(\rho_{\mathbb{C},u_0}\big(s(\theta_T(u)\big),s(bu)\Big)>h;A_{T,\varepsilon}\Big)&\qquad(1.5.8)\end{aligned}$$

Значение $\rho_{\mathbb{C},u_0}\big(s_T(\theta_T(u)\big),s\big(\theta_T(u)\big)\big)$ в правой части (1.5.8) не превышает на множестве $A_{T,\varepsilon}$ значение

$$\rho_{\mathbb{C},v_0}\big(s_T(v),s(v)\big)$$

и, стало быть, в силу (1.5.6) второе слагаемое в правой части (1.5.8) сходится к 0 при $T\to\infty$. Сходимость к 0 третьего слагаемого в правой части (1.5.8) следует из определения множества $A_{T,\varepsilon}$ и непрерывности функции $s(v)$ с вероятностью 1. Так как $\mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon})\to 0$ при $T\to\infty$, то это доказывает (1.5.5). Теорема 1.5.1 доказана.

1.5.3 Принцип инвариантности для обобщенных процессов восстановления

Теорема 1.5.2. *Если* $\mathbf{E}\tau^2<\infty$, $\mathbf{E}\zeta^2<\infty$, $\tau_1=o_p(\sqrt{T})$, $\zeta_1=o_p(\sqrt{T})$, *то последовательности процессов* $y_T(u)$, $z_T(u)$, *определенных в* (1.5.1), $\mathbb{C}$-*сходятся при любом* $u_0>0$ *и* $T\to\infty$ *к стандартному винеровскому процессу* $w(u)$, $u\in[0,u_0]$ (*т.е. выполнено* (1.5.2) *при замене* s_T *на* y_T *и* z_T, *и* s *на* w).

Отметим, что при $u_0=1$ в силу следствия 1.1.3

$$\frac{\overline{\zeta}(T)}{\sqrt{T}}\underset{\text{п.н.}}{\to}0\quad\text{при}\quad T\to\infty.\tag{1.5.9}$$

Так как

$$\rho_{\mathbb{C},1}(y_T,z_T)\leqslant\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\,\overline{\zeta}(T),$$

то

$$\rho_{\mathbb{C},1}(y_T,z_T)\underset{\text{п.н.}}{\to}0\quad\text{при}\quad T\to\infty$$

и процессы y_T и z_T асимптотически эквивалентны. Ясно, что все сказанное сохранится и при любом $u_0>0$. Поэтому при доказательстве теоремы 1.5.2 мы можем ограничиться рассмотрением лишь процессов y_T.

Доказательство теоремы 1.5.2. Рассмотрим процессы

$$s_T(v) = \frac{S_{vT}}{\sigma_\xi \sqrt{T}}, \quad \text{где} \quad S_{vT} := S_{[vT]}, \quad S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j. \tag{1.5.10}$$

Известно, что существует стандартный винеровский процесс $w(v)$, заданный на одном вероятностном пространстве с $s_T(v)$ такой, что (см. (1.5.6))

$$\rho_{\mathbb{C},v_0}\big(s_T(v), w(v)\big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.5.11}$$

Вероятностное пространство, на котором заданы процессы $s_T(v)$ и $w(v)$, всегда можно расширить с тем, чтобы задать на нем случайные величины τ_i и ζ_i таким образом, чтобы ξ_i были разностями величин ζ_i и $a\tau_i$ при всех i. Тем самым будут заданы процессы $Z(t)$ и $Y(t)$ на всей полуоси и будут определены случайные величины $\eta(t)$, обладающие свойством $\frac{\eta(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} \frac{1}{a_\tau}$ при $t \to \infty$. Поэтому

$$\theta_T(u) := \frac{\eta(uT)}{T} \underset{\text{п.н.}}{\to} \frac{u}{a_\tau} \quad \text{при} \quad uT \to \infty.$$

Отсюда следует, что при любом u_0

$$\sup_{u \leqslant u_0} \left| \theta_T(u) - \frac{u}{a_\tau} \right| = \rho_{\mathbb{C},u_0}\big(\theta_T(u), ub\big) \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

при $T \to \infty$, так что в нашем случае выполнено условие (1.5.3) и соотношение (1.5.4) теоремы 1.5.1 при $b = 1/a_\tau$.

Из теоремы 1.5.1 вытекает, что (см. (1.5.5))

$$\rho_{\mathbb{C},u_0}\Big(s_T\big(\theta_T(u)\big), w(bu)\Big) \underset{p}{\to} 0 \text{ при любом } u_0 < \frac{v_0}{b} \text{ и } T \to \infty. \tag{1.5.12}$$

Рассмотрим теперь процессы

$$y_T(u) = \frac{Y(uT) - auT}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{S_{\eta(uT)} + a\chi(uT)}{\sigma\sqrt{T}}$$

(см. (1.5.1)) и положим

$$y_T^0(u) := \frac{S_{\eta(uT)}}{\sigma\sqrt{T}} = \sqrt{a_\tau} s_T\left(\frac{\eta(uT)}{T}\right) = \sqrt{a_\tau} s_T\big(\theta_T(u)\big). \tag{1.5.13}$$

Введем в рассмотрение стандартный винеровский процесс

$$w^*(u) = \frac{w(bu)}{\sqrt{b}}.$$

В силу леммы 1.5.1 для доказательства теоремы достаточно убедиться, что

$$\rho_{\mathbb{C},v_0}\big(y_T(u), w^*(u)\big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Имеем

$$\rho_{\mathbb{C},u_0}(y_T, w^*) \leqslant \rho_{\mathbb{C},u_0}(y_T, y_T^0) + \rho_{\mathbb{C},u_0}(y_T^0, w^*),$$

где

$$\rho_{\mathbb{C},u_0}(y_T, y_T^0) = \frac{|a|}{\sigma} \sup_{u \leqslant u_0} \frac{\chi(uT)}{\sqrt{T}}, \quad \sup_{u \leqslant u_0} \frac{\chi(uT)}{\sqrt{T}} \underset{p}{\to} 0 \text{ при } T \to \infty \tag{1.5.14}$$

(см. следствие 1.1.3) и, следовательно, $\rho_{\mathbb{C},u_0}(y_T, y_T^0) \underset{p}{\to} 0$ при $T \to \infty$. Поэтому нам осталось убедиться, что при $b = 1/a_\tau$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C},u_0}\big(y_T(u), w^*(u)\big) &= \sqrt{a_\tau}\rho_{\mathbb{C},u_0}\Big(s_T\big(\theta_T(u)\big), w^*(u)/\sqrt{a_\tau}\Big) = \\ &= \sqrt{a_\tau}\rho_{\mathbb{C},u_0}\Big(s_T\big(\theta_T(u)\big), w(ub)\Big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Но это уже установлено в (1.5.12). Теорема 1.5.2 в однородном случае доказана.

В неоднородном случае

$$\widetilde{Y}(t) = \begin{cases} \zeta_1 & \text{при} \quad t < \tau_1, \\ \zeta_1 + Y(t - \tau_1) & \text{при} \quad t \geqslant \tau_1, \end{cases}$$

где $Y(t)$ — однородный ОПВ, не зависящий от τ_1, ζ_1. При неслучайных $\tau_1 = o(\sqrt{T})$, $\zeta_1 = o(\sqrt{T})$ утверждение теоремы очевидным образом сохраняется, так как $\zeta_1/\sqrt{T} \underset{p}{\to} 0$, а замена интервала времени $[0, u_0T]$ длиной u_0T на интервал длиной $u_0T - o(\sqrt{T})$ никаких изменений в проведенные выше рассуждения не вносит. Переход к случайным $\tau_1 = o_p(\sqrt{T})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{T})$ также не вызывает затруднений. Теорема 1.5.2 доказана.

Замечание 1.5.1. Для доказательства теоремы 1.5.2 можно использовать также «классический» подход, в силу которого

Для $\mathbb{C}$-сходимости $y_T \underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow} w$ достаточно, чтобы

1) *имела место слабая сходимость конечномерных распределений y_T к соответствующим распределениям w;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\Delta \to 0} \varlimsup_{T \to \infty} \mathbf{P}\big(\omega(y_T, \Delta) > \varepsilon\big) = 0, \tag{1.5.16}$$

где для $g \in \mathbb{D}(0,1)$ функционал

$$\omega(g,\Delta) = \sup_{(t,u)\in B_\Delta} \left|g(u+v) - g(u)\right|$$

есть модуль непрерывности функции g,

$$B_\Delta := \left\{(u,v):\ v \in (0,\Delta), u \in [0,u_0], u+v \leqslant u_0\right\}$$

(см., например, главу 2 в [1] или теорему 1.2.1 в [7]).

При использовании классического подхода пришлось бы повторить в более сложных условиях доказательство соотношения (1.5.16), известное для процессов $s_T(u)$, порожденных траекториями случайных блужданий, и доказать сходимость конечномерных распределений.

На наш взгляд, примененный нами подход к доказательству теоремы 1.5.2, состоящий в использовании уже доказанного принципа инвариантности для случайных блужданий и аналога теоремы Анскомбе для случайных процессов является наиболее простым и прозрачным.

Замечание 1.5.2. Нетрудно убедиться, что в доказательстве теоремы 1.5.2 ничего не изменится, если в определении $\mathbb{C}$-сходимости (1.5.3) предположить, что функционал f непрерывен не во всех точках пространства $\mathbb{C}$, а лишь в точках множества $\mathbb{C}_f \subset \mathbb{C}$ такого, что $\mathbf{P}(s \in \mathbb{C}_f) = 1$ (или $\mathbf{P}(w \in \mathbb{C}_f) = 1$ в принципе инвариантности). Такой функционал называют функционалом, непрерывным с вероятностью 1. Например, функционал $f(s) = I\left\{s(1/2) > 1\right\}$ непрерывен с w-вероятностью 1, так как $\mathbf{P}\bigl(w(1/2) = 1\bigr) = 0$. Для такого функционала f подпространство $\mathbb{C}_f$ имеет вид $\mathbb{C}_f = \left\{s \in \mathbb{C}:\ s(1/2) \neq 1\right\}$. Такое обобщение допускает эквивалентную формулировку принципа инвариантности в терминах сходимости вероятностей

$$\mathbf{P}(y_T \in B) \to \mathbf{P}(w \in B)$$

для так называемых множеств B с w-нулевой границей:

$$\mathbf{P}(w \in \partial B) = 0 \tag{1.5.17}$$

(границей меры 0 относительно распределения w).

Действительно, рассмотрим при выполнении (1.5.17) функционал

$$f_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in (B), \\ 1/2 & \text{при } s \in \partial B, \\ 0 & \text{при } s \notin [B]. \end{cases}$$

Этот функционал будет непрерывным с вероятностью 1 относительно распределения w и, стало быть,

$$\mathbf{P}\big(y_T \in (B)\big) = \mathbf{E}f(y_T) \to \mathbf{E}f(w) = \mathbf{P}\big(w \in (B)\big) = \mathbf{P}\big(w \in [B]\big).$$

Обратно, если f — функционал, непрерывный с w-вероятностью 1, то множество $B_t = \big\{s : f(s) < t\big\}$, где t — любая точка непрерывности распределения $f(w)$, будет множеством с w-нулевой границей. Поэтому

$$\mathbf{P}\big(f(y_T) < f\big) = \mathbf{P}(y_T \in B_t) \to \mathbf{P}(w \in B_t) = \mathbf{P}\big(f(w) < t\big),$$

что эквивалентно $\mathbb{C}$-сходимости.

В главе 7 мы будем изучать возможность распространения принципа инвариантности на области больших и малых уклонений в терминах асимптотической эквивалентности вероятностей $\mathbf{P}(y_T \in B)$ и $\mathbf{P}(w \in B)$ для широкого класса маловероятных множеств B с «w-узкой» границей.

§ 1.6 Сходимость нормированных обобщенных процессов восстановления к устойчивым процессам в случае бесконечной дисперсии величины ξ

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда $\sigma_\xi^2 = \mathbf{D}\xi = \infty$ и выполнены условия $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ правильного убывания распределения $\xi = \zeta - a\tau$ на бесконечности (см. § 1.5).

1.6.1 S–сходимость к устойчивым процессам

Пусть процессы $s_T(u)$ и $s(u)$ заданы в пространстве $\big(\mathbb{D}(0,u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$ с метрикой Скорохода

$$\rho_{S,u_0}(g_1,g_2) := \inf_h \Big[\sup_{u\in[0,u_0]} \big|g_1(u) - g_2(h(u))\big| + \sup_{u\in[0,u_0]} \big|h(u) - u\big|\Big], \quad (1.6.1)$$

где $\inf_h$ берется по всем непрерывным возрастающим функциям $h(u)$ таким, что $h(0) = 0$, $h(u_0) = u_0$.

Мы будем говорить, что последовательность процессов $s_T(u)$ *S-сходится* (по распределению) *при $T \to \infty$ к процессу $s(u)$ на отрезке* $[0,u_0]$ (и писать $s_T \underset{S}{\Rightarrow} s$), если для любого измеримого в $\big(\mathbb{D}(0,u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$ функционала f, непрерывного в метрике Скорохода, выполняется

$$f(s_T) \Rightarrow f(s) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \quad (1.6.2)$$

Условия S-сходимости процессов можно найти, например, в [42, § 6.5], [1], [7], [84]. С их помощью установлено, в частности, что при выполнении условий $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ нормированный процесс

$$s_T(u) = \frac{S_{uT}}{\sigma_\xi(T)}, \qquad u \leqslant u_0, \tag{1.6.3}$$

S-сходится при $T \to \infty$ к устойчивому процессу $w_{\alpha,\beta}(u)$ с параметрами α, β: $s_T \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ ($\sigma_\xi(T)$ определено в (1.4.1)).

Положим, как и прежде,

$$\sigma(t) = \sigma_\xi(t) a_\tau^{-1/\alpha}$$

и рассмотрим последовательность процессов

$$\begin{aligned} y_T(u) = \frac{Y(u) - auT}{\sigma(T)} &= \\ = \frac{Z_{\eta(uT)} - auT}{\sigma(T)} &= \frac{S_{\eta(uT)}}{\sigma(T)} + \frac{a\chi(uT)}{\sigma(T)}, \quad u \in [0, u_0] \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

(здесь использовалось равенство $t = T_{\eta(t)} - \chi(t)$).

Будет ли при выполнении условий $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ иметь место сходимость распределений процессов y_T к распределению устойчивого процесса $w_{\alpha,\beta}(u)$, $u \in [0, u_0]$? Оказывается, что не всегда.

Доказательство S-сходимости ОПВ к процессу $w_{\alpha,\beta}$ сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с тем, что траектория процесса $y_T(u)$ имеет вид (1.6.4) и содержит «нерегулярное» пилообразное слагаемое $\frac{a\chi(uT)}{\sigma(T)}$, которое в ряде случаев может стать значимым. Поэтому утверждение $y_T \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ будет иметь место лишь при дополнительных условиях.

Теорема 1.6.1. *Пусть $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворят условиям $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ и, кроме того, выполнено хотя бы одно из условий*

$$a = 0 \quad \textit{или} \quad F^{(\tau)}(t) := \mathbf{P}(\tau \geqslant t) = o\big(F(t)\big) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{1.6.5}$$

Тогда при любом $u_0 > 0$

$$y_T(u) \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}(u) \quad \textit{на} \quad [0, u_0]. \tag{1.6.6}$$

Утверждение теоремы 1.6.1 в случае $a = 0$ установлено в [100, гл. 5]. Нетрудно видеть, что для независимых τ и ζ второе условие в (1.6.5) выполнено, если

$$F^{(\tau)}(t) = o\big(F^{(|\zeta|)}(t)\big) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

так что, например, для обобщенных пуассоновских процессов оно всегда выполнено.

Если условие (1.6.5) не выполнено, то S-сходимость (1.6.6), вообще говоря, отсутствует, хотя будет иметь место сходимость конечномерных распределений. Подробнее об этом см. в разделе 1.6.2 ниже.

Доказательство теоремы 1.6.1. Положим, как и прежде, $\theta_T(u) = \frac{\eta(uT)}{T}$. Тогда согласно (1.6.3)

$$y_T(u) = a_\tau^{1/\alpha} s_T\bigl(\theta_T(u)\bigr) + \frac{a\chi(uT)}{\sigma(T)}. \tag{1.6.7}$$

Покажем, что при выполнении условия (1.6.5) второе слагаемое в правой части (1.6.7) пренебрежимо мало. Если $a = 0$, то это очевидно. Если $a \neq 0$, то мы покажем, что

$$\rho_{\mathbb{C},u_0}\bigl(y_T(u), a_\tau^{1/\alpha} s_T\bigl(\theta_T(u)\bigr)\bigr) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{1.6.8}$$

или, что то же,

$$\sup_{u \leqslant u_0} \frac{\chi(uT)}{\sigma(T)} \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.9}$$

Действительно, на множестве $A_T = \bigl\{\theta_T(u_0) < v_0\bigr\}$, $u_0 < bv_0$, при $b = 1/a_\tau$ имеем $P(A_T) \to 1$,

$$\max_{u \leqslant u_0} \chi(uT) \leqslant \max_{i \leqslant v_0 T} \tau_i =: \overline{\tau}_T,$$

где при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigl(\overline{\tau}_T > \varepsilon\sigma(T)\bigr) = o(1) + \mathbf{P}\bigl(\overline{\tau}_T > \varepsilon\sigma(T), A_T\bigr) \leqslant o(1) + v_0 T F^{(\tau)}\bigl(\varepsilon\sigma(T)\bigr) = \\ = o(1) + o\bigl(TF\bigl(\sigma_\xi(T)\bigr)\bigr) = o(1)\end{aligned}$$

при $T \to \infty$. Это доказывает (1.6.9), (1.6.8).

Таким образом, при названных условиях процессы $y_T(u)$ и $a_\tau^{\frac{1}{\alpha}} s_T\bigl(\theta_T(u)\bigr)$ асимптотически эквивалентны.

Сходимость процессов $a^{1/\alpha} s_T\bigl(\theta_T(u)\bigr)$ к $w_{\alpha,\beta}(u)$, как уже отмечалось, установлена в [100] (теорема 5.2.2). На этом доказательство теоремы 1.6.1 можно было бы и закончить. Но доказательство требуемой сходимости в [100] многоступенчато и сопряжено со многими ссылками на другие, иногда более сложные, результаты. В то же время существует прямое доказательство нужной сходимости, которое мы здесь и приведем.

Положим, не ограничивая общности, $a_\tau = 1$, $u_0 = 1$, $\rho_{S,u_0} = \rho_S$. Согласно теореме 1.6.7 в [84] ОПВ $s_T(u)$ и процесс $w_{\alpha,\beta}(u)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\rho_S\bigl(s_T(u), w_{\alpha,\beta}(u)\bigr) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.10}$$

Так же, как в доказательстве теоремы 1.5.2, расширим вероятностное пространство, на котором заданы процессы $s_T(u)$ и $w_{\alpha,\beta}(u)$, таким образом, чтобы на нем была задана вся последовательность (τ_i, ζ_i) и тем самым определены процессы $Z(t)$, $Y(t)$. Тогда на этом пространстве определены случайные величины $\eta(t)$, $\theta_T(u) = \frac{\eta(uT)}{T}$. Далее,

$$\rho_S\Big(s_T\big(\theta_T(\cdot)\big), w_{\alpha,\beta}(\cdot)\Big) \leqslant \rho_S\Big(s_T\big(\theta_T(\cdot)\big), s_T(\cdot)\Big) + \\ + \rho_S\big(s_T(\cdot), w_{\alpha,\beta}(\cdot)\big), \qquad (1.6.11)$$

где второе слагаемое в правой части (1.6.11) сходится по вероятности к 0 при $T \to \infty$. Следовательно, нам достаточно доказать сходимость к 0 первого слагаемого, т.е. асимптотическую эквивалентность $s_T\big(\theta_T(u)\big)$ и $s_T(u)$. Так как

$$\rho_S\Big(s_T\big(\theta_T(\cdot)\big), s_T(\cdot)\Big) \leqslant \sup_{u \leqslant 1}\Big|s_T\big(\theta_T(u)\big) - s_T\big(h(u)\big)\Big| + \\ + \sup_{u \leqslant 1}\big|h(u) - u\big| \qquad (1.6.12)$$

для любой непрерывной возрастающей функции $h(u)$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, то достаточно подобрать такую функцию $h(u) = h_T(u)$, для которой оба слагаемых в правой части (1.6.12) сходятся по вероятности к 0 при $T \to \infty$.

При заданном малом $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$A_{T,\varepsilon} = \Big\{\big|\eta(T) - T\big| < \varepsilon T + 1\Big\}.$$

Ясно, что

$$P(A_{T,\varepsilon}) \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty \quad \text{и любом} \quad \varepsilon > 0. \qquad (1.6.13)$$

Поэтому найдется последовательность $\varepsilon = \varepsilon_T$, сходящееся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$ такая, что по-прежнему будет выполнено (1.6.13).

Выберем в качестве h сглаженную версию

$$h(u) = \widetilde{\theta}_T(u)$$

функции $\theta_T(u)$, определив ее на множестве $A_{T,\varepsilon}$ как непрерывную ломаную, проходящую через узловые точки

$$\left(t_k = \frac{T_k}{T}, u_k = \frac{k}{T}\right) \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, k_T := \big[T(1-\varepsilon)\big],$$

и точку $(1,1)$, так что
$$\theta_T(t_k) = \widetilde{\theta}_T(t_k) \tag{1.6.14}$$
при $k \leqslant k_T$.

Так как функция $s_T(u)$ кусочно постоянна (принимает одно и то же значение на (u_{k-1}, u_k), $k \geqslant 1$), то
$$s_T\big(\theta_T(u)\big) = s_T\big(\widetilde{\theta}_T(u)\big) \quad \text{при} \quad u \leqslant t_{k_T}. \tag{1.6.15}$$

Для первого слагаемого в правой части (1.6.12) на множестве $A_{T,\varepsilon}$ имеем $u_{k_T} < 1$,
$$\sup_{u \leqslant 1} \big| s_T(\theta_T(u)) - s_T(\widetilde{\theta}_T(u)) \big| \leqslant d_1 + d_2,$$
где в силу (1.6.15), (1.6.14)
$$\begin{aligned} d_1 &= \sup_{u \in [u_{k_T}, 1]} \big| s_T(\theta_T(u)) - s_T(\theta_T(u_{k_T})) \big| \underset{p}{=} \\ &\underset{p}{=} \frac{1}{\sigma(T)} \max_{k \leqslant \eta(T) - T(1-\varepsilon)} |S_k^*| \leqslant \frac{1}{\sigma(T)} \max_{k \leqslant 2\varepsilon T} |S_k^*|, \\ d_2 &= \sup_{u \in [u_{k_T}, 1]} \big| s_T(\widetilde{\theta}_T(u)) - s_T(\widetilde{\theta}_T(u_{k_T})) \big|. \end{aligned}$$
Здесь последовательность $\{S_k^*\}$ распределена так же как $\{S_k\}$, величина
$$\frac{1}{\sigma(2\varepsilon T)} \max_{k \leqslant 2\varepsilon T} |S_k^*|$$
имеет собственное предельное распределение при $\varepsilon = \varepsilon_T$, $\varepsilon T \to \infty$; при этом $\frac{\sigma(2\varepsilon T)}{\sigma(T)} \to 0$. Поэтому при любом $\delta > 0$
$$\mathbf{P}(d_1 > \delta, A_{T,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$
Аналогично оценивается величина d_2.

Далее, для второго слагаемого в правой части (1.6.12) имеем на множестве $A_{T,\varepsilon}$
$$d_3 := \sup_{u \leqslant 1} \big| h(u) - u \big| = \frac{1}{T} \sup_{k \leqslant k_T} |T_k - k|,$$
$$\mathbf{P}(d_3 > \delta, A_{T,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$
Таким образом, в силу (1.6.12)
$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\Big(\rho_S\big(s_T(\theta_T(\cdot)), s_T(\cdot)\big) > \delta\Big) = \\ &\qquad = o(1) + \mathbf{P}\Big(\rho_S\big(s_T(\theta_T(\cdot)), s_T(\cdot)\big) > \delta, A_{T,\varepsilon}\Big) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \end{aligned}$$
Теорема 1.6.1 доказана.

1.6.2 Отсутствие S-сходимости при невыполнении условия (1.6.5)

Пусть
$$a = 1, \qquad F^{(\tau)}(t) \gg F(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{1.6.16}$$
так что условие (1.6.5) не выполнено. Это реализуется, например, в случае $\zeta = \tau + \omega$, где $\mathbf{E}\omega = 0$, величина $\omega = \xi$ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ и не зависит от τ, τ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha',1}]$ при $1 < \alpha' < \alpha$, так что возможные скачки τ «крупнее» скачков $\xi = \omega$. Покажем, что в этом случае сходимость $y_T \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ невозможна. Заметим сначала, что величина
$$h_{T,\tau} := \frac{\sup \chi(uT)}{\sigma_\tau(T)},$$
где $\sigma_\tau(T) = (F^{(\tau)})^{(-1)}(1/T)$ будет иметь при $T \to \infty$ собственное предельное распределение. Действительно, нетрудно убедиться (используя опять множества $A_{T,\varepsilon}$), что $h_{T,\tau}$ будет иметь то же предельное распределение, что и $\frac{\overline{\tau}_T}{\sigma_\tau(T)}$, где $\overline{\tau}_T = \max_{k \leqslant T} \tau_k$. Но $\frac{\overline{\tau}_T}{\sigma_\tau(T)}$ имеет при $T \to \infty$ собственное невырожденное предельное распределение в силу следующих соотношений (пусть для простоты T — целочисленно),
$$\mathbf{P}\big(\overline{\tau}_T < v\sigma_\tau(T)\big) = \Big(1 - F^{(\tau)}\big(v\sigma_\tau(T)\big)\Big)^T, \tag{1.6.17}$$
где
$$F^{(\tau)}\big(v\sigma_\tau(T)\big) \sim \frac{v^{-\alpha'}}{T} \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$
Поэтому левая часть в (1.6.17) равна
$$\left(1 - \frac{v^{-\alpha'}\big(1 + o(1)\big)}{T}\right)^T \to \exp\{-v^{-\alpha'}\} \quad \text{при} \quad T \to \infty$$
(см. об этом также [70, 44]). Так как $\sigma(T) \ll \sigma_\tau(T)$ при $T \to \infty$, то из сказанного следует, что
$$h_T := \frac{\sup \chi(uT)}{\sigma(T)} \to \infty \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.18}$$
В то же время $s_T\big(\theta_T(\cdot)\big) \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}(\cdot)$ и, стало быть,
$$\inf_{u \leqslant 1} s_T\big(\theta_T(u)\big) \Rightarrow \inf_{u \leqslant 1} w_{\alpha,\beta}(u).$$
Так как правая часть в этом соотношении конечна с вероятностью 1, то в силу (1.6.7), (1.6.18)
$$\sup_{u \leqslant 1} y_T(u) \underset{p}{\to} \infty \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.19}$$

Но функционалы $f(s) = \inf_{u \leqslant 1} s(u)$ и $f(s) = \sup_{u \leqslant 1} s(u)$ являются ρ_S-непрерывными. Поэтому (1.6.19) означает, что S-сходимость $y_T \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ отсутствует.

Отметим также, что при этом для любого $u \leqslant 1$ имеем

$$\frac{\chi(uT)}{\sigma(T)} \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

и конечномерные распределения $\frac{\chi(uT)}{\sigma(T)}$ соответствуют нулевому предельному процессу.

Если τ и ζ независимы, $a \neq 0$, то распределение F будет формироваться как свертка распределений τ и ζ и вместо (1.6.16) возможно лишь неравенство

$$F^{(\tau)}(t) \geqslant cF(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad c = \mathrm{const}.$$

В этом случае аналогично предыдущему предельный процесс для y_T в (1.6.7) будет формироваться как сумма процесса $w_{\alpha,\beta}$ и *пилообразного* слагаемого $\frac{a\chi(uT)}{\sigma(T)}$, скачки которого при $a \neq 0$ будут сравнимы с 1, так что в этом случае к вертикальным скачкам процесса $s_T\big(\theta_T(u)\big)$ в (1.6.7) добавятся «*наклонные* скачки» процесса $-\frac{a\chi(uT)}{\sigma(T)}$ и S-сходимость $y_T \underset{S}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ также будет отсутствовать. Это связано со свойством метрики ρ_S, не позволяющим с ее помощью описывать близость процессов, один из которых имеет вертикальные скачки, а другой — скачки того же размера, но наклонные. Чтобы избежать этих неудобств, мы рассмотрим в следующем разделе близкую к ρ_S метрику $\rho_{\mathbb{D}}$, которая несколько слабее метрики ρ_S, но названным недостатком не обладает. Но и для нее потребуются дополнительные условия, при которых будет иметь место слабая сходимость процессов y_T, z_T к устойчивым процессам.

Замечание 1.6.1. Промежуточное утверждение в доказательстве теоремы 1.6.1 о сходимости к нулю $\rho_S\big(s_T(\theta_T(\cdot)), w_{\alpha,\beta}\big)$ (см. (1.6.11)) можно было бы не доказывать, а сослаться на теорему 5.2.2 в [100] об S-сходимости $s_T\big(\theta_T(\cdot)\big)$ к $w_{\alpha,\beta}(\cdot)$. Однако, на наш взгляд, приведенное выше доказательство проще, прозрачнее и не содержит ссылок на целый ряд других работ.

1.6.3 $\mathbb{D}$-сходимость к устойчивым процессам

Чтобы расширить условия, при которых имеет место слабая сходимость распределений ОПВ y_T, z_T в $\big(\mathbb{D}(0,u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$ к устойчивым процессам, введем в рассмотрение близкую к ρ_{S,u_0}, но более слабую метрику $\rho_{\mathbb{D},u_0}$.

Пусть для простоты $u_0 = 1$, $\rho_{\mathbb{D},u_0} = \rho_{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.

Метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ определяется следующим образом. Для любой функции $g \in \mathbb{D}$ определим *график* этой функции как односвязное множество Γg в $[0,1]\times\mathbb{R}$ такое, что оно совпадает с кривой $\big(t, g(t)\big)$ везде, за исключением точек разрыва функции g, а в точках разрыва точки $\big(t, g(t-0)\big)$, $\big(t, g(t+0)\big) \in \mathbb{R}^2$ соединяются отрезком прямой. Расстояние $\rho_{\mathbb{D}}(g_1, g_2)$ определяется как расстояние Хаусдорфа между множествами Γg_1 и Γg_2 в $\mathbb{R}^2$, т.е. мы будем писать $\rho_{\mathbb{D}}(g_1, g_2) < \varepsilon$, если одновременно $\Gamma g_1 \in (\Gamma g_2)_\varepsilon$ и $\Gamma g_2 \in (\Gamma g)_\varepsilon$, где ε-окрестности в $\mathbb{R}^2$ берутся в евклидовой метрике. Другими словами,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{D}}(g_1, g_2) &:= \max\big\{r(g_1, g_2), r(g_2, g_1)\big\}, \\ r(g_1, g_2) &:= \max_{\boldsymbol{v}\in\Gamma g_1} \min_{\boldsymbol{u}\in\Gamma g_2} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|, \end{aligned} \tag{1.6.20}$$

где $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, $u_1, v_1 \in [0,1]$, $u_2, v_2 \in \mathbb{R}$, и $|\cdot|$ означает евклидову норму в $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что

$$\rho_{\mathbb{D}}(g_1, g_2) \leqslant \rho_{\mathbb{C}}(g_1, g_2) := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \big|g_1(t) - g_2(t)\big|. \tag{1.6.21}$$

Сравним расстояния ρ_S и $\rho_{\mathbb{D}}$. Пусть для простоты при данных функциях g_1, g_2 из $\mathbb{D}$ существует функция $h_0(t)$, на которой достигается $\inf_h$ в (1.6.1):

$$\rho_S(g_1, g_2) = \rho_1 + \rho_2, \text{ где } \rho_1 = \sup_u \big|g_1(u) - g_2(h_0(u))\big|, \ \rho_2 = \sup \big|h_0(u) - u\big|.$$

Тогда для каждой точки u расстояние в $\mathbb{R}^2$ между точками $\big(u, g_1(u)\big)$ и $\Big(h_0(u), g_2\big(h_0(u)\big)\Big)$ не превосходит

$$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leqslant \rho_1 + \rho_2 = \rho_S(g_1, g_2).$$

Такое же неравенство справедливо для пары точек

$$\big(u, g_2(u)\big) \quad \text{и} \quad \Big(h_1(u), g_1\big(h_1(u)\big)\Big)$$

при подходящей функции $h_1(u)$. Отсюда следует, что

$$\rho_{\mathbb{D}}(g_1, g_2) \leqslant \rho_S(g_1, g_2).$$

При этом для функций

$$g(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,p), \ p \in (0,1), \\ 1, & u \in [p,1]; \end{cases}$$

$$g_n(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,p), \\ n(u-p), & u \in [p, p+1/n), \\ 1, & u \in [p+1/n, 1] \end{cases}$$

имеем

$$\rho_{\mathbb{D}}(g, g_n) \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
$$\rho_S(g, g_n) = 1 \quad \text{при всех } n.$$

Сказанное означает, что *метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ слабее метрики ρ_S* и, стало быть, класс функционалов f, непрерывных относительно $\rho_{\mathbb{D}}$, будет несколько у́же, чем класс функционалов, непрерывных относительно ρ_S. Поэтому сходимость $s_T \underset{S}{\Rightarrow} s$ влечет за собой сходимость $s_T \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} s$, но не наоборот. Различие между $\rho_{\mathbb{D}}$ и ρ_S невелико; нам неизвестны примеры функционалов, представляющих интерес в приложениях, которые были бы непрерывны относительно ρ_S, но разрывны относительно $\rho_{\mathbb{D}}$. К $\rho_{\mathbb{D}}$-непрерывным функционалам относятся такие распространенные в приложениях функционалы как $\max_{u\in[0,1]}\big(g(u) - g_0(u)\big)$, где $g_0(u)$ непрерывна; интегральные функционалы и др. Метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ с успехом использовалась в [31], [12] для установления расширенного принципа больших уклонений для случайных блужданий.

Метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ была введена и изучена в [5] для пространства $\mathbb{F}$, более широкого, чем $\mathbb{D}$ (см. [5]). Топология, порожденная этой метрикой, совпадает с топологией M_2 Скорохода, описанной в [69]. Метрику $\rho_{\mathbb{D}}$ можно рассматривать и как распространение метрики Леви в пространстве неубывающих функций (см., например, [43]) на более широкое пространство $\mathbb{D}$.

Вернемся к ОПВ на $[0, u_0]$ при произвольном $u_0 > 0$. Определим расстояние $\rho_{\mathbb{D},u_0}$ соотношениями (1.6.20), где g_1, g_2 — функции на $[0, u_0]$.

Аналогично предыдущему мы будем писать

$$s_T \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} s \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

если для любого функционала f в $\big(\mathbb{D}(0, u_0), \mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\big)$, непрерывного относительно $\rho_{\mathbb{D},u_0}$, выполняется (1.6.2).

Сформулируем теперь основное утверждение этого раздела.

Теорема 1.6.2. *Пусть $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворяет условиям $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$. Если выполнено хотя бы одно из условий*

$$a = 0 \quad \textit{или} \quad \mathbf{P}\big(\tau > t, a\zeta > t\big) = o\big(F(t)\big) \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \tag{1.6.22}$$

то при любом $u_0 > 0$

$$y_T(u) \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}(u) \quad \textit{на} \quad [0, u_0]. \tag{1.6.23}$$

Если τ и ζ независимы, то сходимость (1.6.23) *всегда имеет место.*

Такие же утверждения справедливы для z_T.

Доказательство. Если $a = 0$, то утверждение (1.6.23) вытекает из теоремы 1.6.1.

Пусть теперь $a \neq 0$ и для простоты (это не ограничивает общности)

$$u_0 = 1, \quad a_\tau = 1.$$

Положим для краткости $\rho_{\mathbb{D},u_0} = \rho_{\mathbb{D}}$, $\rho_{S,u_0} = \rho_S$. В доказательстве теоремы 1.6.1 показано (см. (1.6.11)), что процессы $s_T(u)$, $\theta_T(u) = \frac{\eta(uT)}{T}$, $y_T(u)$ и $w_{\alpha,\beta}(u)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\rho_S\Big(s_T\big(\theta_T(\cdot)\big), w_{\alpha,\beta}(\cdot)\Big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.24}$$

Имеем

$$\rho_{\mathbb{D}}(y_T, w_{\alpha,\beta}) \leqslant \rho_{\mathbb{D}}\Big(y_T(\cdot), s_T\big(\theta_T(\cdot)\big)\Big) + \rho_{\mathbb{D}}\Big(s_T\big(\theta_T(\cdot)\big), w_{\alpha,\beta}(\cdot)\Big). \tag{1.6.25}$$

Так как $\rho_{\mathbb{D}} \leqslant \rho_S$, то в силу (1.6.24) второе слагаемое в правой части (1.6.25) сходится по вероятности к нулю при $T \to \infty$. Поэтому в силу леммы 1.5.1 нам достаточно убедиться, что

$$\rho_{\mathbb{D}}\Big(y_T(\cdot), s_T\big(\theta(\cdot)\big)\Big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.6.26}$$

Разобьем полуинтервал $\big[0, 1 + \frac{\chi(T)}{T}\big)$ на полуинтервалы $[t_{i-1}, t_i) = \big[T_{i-1}/T, T_i/T\big)$, $i = 1, 2, \ldots, \eta(T)$, и рассмотрим сужения траекторий $y_T(u)$ и $s_T\big(\theta_T(u)\big)$ на эти полуинтервалы.

Траектория $y_T(u)$ на $[t_{i-1}, t_i)$ состоит из вертикального скачка $\frac{\zeta_i}{\sigma(T)}$ в точке t_{i-1} и наклонной линии $y_T(t_{i-1}+0) - \frac{auT}{\sigma(T)}$, $u < \tau_i$, на интервале (t_{i-1}, t_i), так что

$$y_T(t_i - 0) = y_T(t_{i-1} - 0) + \frac{\zeta_i - a\tau_i}{\sigma(T)}, \qquad \zeta_i - a\tau_i = \xi_i.$$

Траектория $s_T\big(\theta(u)\big)$ на $[t_{i-1}, t_i)$ состоит из вертикального скачка ξ_i в точке t_{i-1} и горизонтального участка на (t_{i-1}, t_i), так что в точках t_i значения процессов $y_T(\cdot)$ и $s_T\big(\theta_T(\cdot)\big)$ совпадают.

Расстояния $\rho_{\mathbb{D}}^{(i)}$ между этими двумя *сужениями* процессов $y_T(\cdot)$ и $s_T\big(\theta(\cdot)\big)$ на $[t_{i-1}, t_i)$ в метрике $\rho_{\mathbb{D}}$, очевидно, не превосходят $\frac{\tau_i}{T}$, если ζ_i и ξ_i имеют один и тот же знак, и не превосходят $\max\Big(\frac{\tau_i}{T}, \frac{|\zeta_i|}{\sigma(T)}\Big)$, если ζ_i и ξ_i имеют разные знаки.

Более точно, пусть $a > 0$. Тогда

$$\rho_{\mathbb{D}}^{(i)} = \frac{\tau_i}{T} I\bigl(\{\zeta_i \geqslant 0,\ \xi_i \geqslant 0\} \bigcup \{\zeta_i \leqslant 0,\ \xi_i \leqslant 0\}\bigr) + \\ + \max\left(\frac{\tau_i}{T}, \frac{\zeta_i}{\sigma(T)}\right) I(\zeta_i > 0, \xi_i < 0)$$

(при $a > 0$ событие $\{\zeta_i < 0, \xi_i > 0\}$ невозможно, так как $\xi_i < \zeta_i$). Поэтому

$$\rho_{\mathbb{D}}^{(i)} \leqslant \max\left(\frac{\tau_i}{T}, \frac{X_i^+}{\sigma(T)}\right),$$

где

$$X_i^+ := \zeta_i I(\zeta_i > 0, \xi_i < 0),$$

и при $v > 0$

$$\mathbf{P}(X_i^+ > v) = \mathbf{P}(\zeta_i > v,\ \zeta_i - a\tau_i < 0) = \\ = \mathbf{P}\left(\tau > \frac{\zeta_i}{a},\ \zeta > v\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\tau > \frac{v}{a},\ \zeta > v\right). \qquad (1.6.27)$$

Если $a < 0$, то аналогичным образом находим

$$\rho_{\mathbb{D}}^{(i)} \leqslant \max\left(\frac{\tau_i}{T}, -\frac{X_i^-}{\sigma(T)}\right),$$

где

$$X_i^- := \zeta_i I(\zeta_i < 0,\ \xi_i > 0),$$

так что при $v > 0$

$$\mathbf{P}(X_i^- < -v) = \mathbf{P}(\zeta_i < -v,\ \zeta_i - a\tau_i > 0) = \\ = \mathbf{P}\left(\tau > \frac{\zeta_i}{a}, \zeta < -v\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\tau > \frac{v}{|a|}, \mathrm{e}_a\zeta > v\right), \quad \mathrm{e}_a = \frac{a}{|a|} \qquad (1.6.28)$$

и правая часть в случае $a > 0$ совпадает с правой частью в (1.6.27). В итоге получаем

$$\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{D}}^{(i)} > \delta) \leqslant \mathbf{P}(\tau > \delta T) + \mathbf{P}\left(\tau > \frac{\delta\sigma(T)}{|a|},\ \mathrm{e}_a\zeta > \delta\sigma(T)\right) \qquad (1.6.29)$$

при любом $\delta > 0$,

$$\rho_{\mathbb{D}}\Bigl(y_T(\cdot), s_T\bigl(\theta(\cdot)\bigr)\Bigr) \leqslant \max_{i \leqslant \eta(T)} \rho_{\mathbb{D}}^{(i)}.$$

Введем в рассмотрение множество

$$A_{T,\varepsilon} = \big\{\theta_T(1) < 1+\varepsilon\big\} = \big\{\eta(T) < T(1+\varepsilon)\big\}.$$

Ясно, что $\mathbf{P}(A_{T,\varepsilon}) \to 1$ при $T \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$. На этом множестве

$$\rho_{\mathbb{D}}\Big(y_T(\cdot), s_T\big(\theta(\cdot)\big)\Big) \leqslant \max_{i \leqslant T(1+\varepsilon)} \rho_{\mathbb{D}}^{(i)}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\rho_{\mathbb{D}}\big(y_T(\cdot), s_T\big(\theta(\cdot)\big)\big) > \delta\Big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon}) + \mathbf{P}\Big(\rho_{\mathbb{D}}\big(y_T(\cdot), s_T\big(\theta(\cdot)\big)\big)\Big) > \delta, A_{T,\varepsilon}\Big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon}) + T(1+\varepsilon)\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{D}}^{(i)} > \delta).\end{aligned} \tag{1.6.30}$$

Так как $\mathbf{P}(\overline{A}_{T,\varepsilon}) \to 0$ при $T \to \infty$, то для доказательства (1.6.26) нам достаточно в силу (1.6.29) убедиться, что

$$T\mathbf{P}(\tau > \delta T) \to 0, \qquad T\mathbf{P}\bigg(\tau > \frac{\delta\sigma(T)}{|a|},\ \mathrm{e}_a\zeta > \delta\sigma(T)\bigg) \to 0 \tag{1.6.31}$$

при $T \to \infty$. Первое соотношение очевидно, так как существует $\mathbf{E}\tau$. Для доказательства второго соотношения воспользуемся условием (1.6.22), в силу которого

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigg(\tau > \frac{\delta\sigma(T)}{|a|},\ \mathrm{e}_a\zeta > \delta\sigma(T)\bigg) = o\bigg(F\bigg(\min\Big(|a|, \frac{1}{|a|}\Big)\bigg)\delta\sigma(T)\bigg) = \\ = o\Big(F\big(\sigma(T)\big)\Big) = o\Big(\frac{1}{T}\Big)\end{aligned}$$

при $T \to \infty$. Поэтому второе оцениваемое значение в (1.6.31) есть $o(1)$ при $T \to \infty$. Это доказывает (1.6.26) и утверждение (1.6.23).

Если τ и ζ независимы, то

$$\mathbf{P}\big(\tau > t, a\zeta > t\big) = \mathbf{P}(\tau > t)\mathbf{P}\big(a\zeta > t\big) = o(t^{-2}) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

и выполнение условия (1.6.22) очевидно, что влечет за собой утверждение (1.6.23).

Для процессов z_T рассмотрения проходят аналогично. Теорема 1.6.2 доказана.

Замечание 1.6.2. Условия теоремы 1.6.2 близки к минимальным. Если условие (1.6.22) (более широкое, чем (1.6.5)) не выполнено, то S- и $\mathbb{D}$-сходимость распределений ОПВ y_T, z_T к процессу $w_{\alpha,\beta}$ будут, вообще говоря, отсутствовать. На это указывает пример, приведенный в разделе 1.6.2, когда $\zeta = \tau + \omega$, $\mathbf{E}\omega = 0$, τ и ω независимы, $a = 1$. В этом примере не выполнено не только условие (1.6.5), но и более широкое условие (1.6.22). Действительно, в этом случае $p := \mathbf{P}(\omega > 0) > 0$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau > t,\ \zeta > t) \geqslant \mathbf{P}(\tau > t,\ \tau + \omega > t,\ \omega > 0) =\\ = \mathbf{P}(\tau > t,\ \omega > 0) = p\mathbf{P}(\tau > t) \gg F(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty.\end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом примере $\sup\limits_{u\leqslant 1} y_T(u) \underset{p}{\to} \infty$ при $T \to \infty$ (см. раздел 1.6.2), то $\mathbb{D}$-сходимость $y_T \underset{D}{\Rightarrow} w_{\alpha,\beta}$ отсутствует по тем же причинам, по которым отсутствует S-сходимость. (Функционалы $f(s) = \inf\limits_{u\leqslant 1} s(u)$, $f(s) = \sup\limits_{u\leqslant 1} s(u)$ являются $\rho_{\mathbb{D}}$-непрерывными.) Будет отсутствовать сходимость в метрическом пространстве $\mathbb{D}$ и с любой другой метрикой ρ, относительно которой функционал $f(s) = \sup\limits_{u\leqslant 1} s(u)$ непрерывен.

§ 1.7 Предельные теоремы для времени первого прохождения произвольной границы обобщенным процессом восстановления

1.7.1 Введение

Пусть $g(t) = g_x(t)$, $t > 0$, — произвольная функция (граница), зависящая от параметра $x \to \infty$. Основная цель настоящего раздела — отыскание предельных законов для распределения времени η_g первого прохождения траекториями ОПВ $Y(t)$, $(Z(t))$ границы $g_x(t)$:

$$\eta_g := \inf\bigl\{t > 0 :\ Y(t) > g_x(t)\bigr\}. \tag{1.7.1}$$

Границы $g_x(t)$ будут предполагаться «удаленными», т.е. будет предполагаться, что определено значение

$$t_g := \inf\bigl\{t > 0 :\ at > g_x(t)\bigr\}$$

и, что

$$t_g \to \infty \qquad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{1.7.2}$$

Будут рассмотрены два класса задач. В первом из них будет предполагаться, что случайная величина $\xi = \zeta - a\tau$ имеет конечный второй момент, т.е.

$$\sigma_\xi^2 := \mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 = \mathbf{D}\xi < \infty. \tag{1.7.3}$$

Во втором будет предполагаться, что $\sigma_\xi^2 = \infty$, а случайная величина ξ удовлетворяет условиям притяжения к устойчивому закону (подробнее см. §§ 1.4, 1.6).

Основные предельные теоремы о распределении η_g, приведенные ниже, получены в [14]. Аналогичные результаты для более простых процессов (для случайных блужданий) можно найти в [100, § 5.6], [16].

1.7.2 Случай конечной дисперсии

Изучим распределение времени η_g (см. (1.7.1)) первого прохождения границы $g_x(t)$ траекторией ОПВ $Y(t) = Z_{\eta(t)}$. Перенос полученных результатов на процесс $Z(t) = Z_{\nu(t)}$ и на процессы с линейным сносом будет произведен в теореме 1.7.2.

Будем предполагать, что выполнено (1.7.2) и что граница $g_x(t)$ удовлетворяет следующим двум условиям.

$[\mathcal{A}]_1$. *При некотором $\varepsilon > 0$ существует последовательность $b_x \to b < a$ при $x \to \infty$ такая, что при*

$$|t - t_g| < 2\frac{(1+\varepsilon)L(t_g)}{a-b}, \qquad L(t) := \sigma\sqrt{2t\ln\ln t}, \tag{1.7.4}$$

выполнены соотношения

$$g_x(t) = at_g + (t-t_g)b_x + o(\sqrt{t_g}) \quad \text{\textit{при}} \quad x \to \infty. \tag{1.7.5}$$

.

Введем в рассмотрение ближайшую к t_g точку $t_g^- < t_g$ пересечения функций $g_x(t)$ и $at + (1+\varepsilon)L(t)$:

$$t_g^- := \sup\bigl\{t < t_g : \, g_x(t) > at + (1+\varepsilon)L(t)\bigr\}. \tag{1.7.6}$$

Второе условие на $g_x(t)$ имеет следующий вид:

$[\mathcal{A}]_2$. *$g_x(t) \to \infty$ при любом фиксированном t и $x \to \infty$,*

$$g_x(t) \geqslant at + (1+\varepsilon)L(t) \quad \text{\textit{при}} \quad t \leqslant t_g^-. \tag{1.7.7}$$

Ясно, что

$$t_g^- \geqslant t_g - \frac{2L(t_g)}{a-b} \tag{1.7.8}$$

при достаточно больших x.

Существо условий $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ очевидно — граница $g_x(t)$ должна быть отделена от луча at до момента t_g и его окрестности. В окрестности точки t_g пересечения луча at и границы $g_x(t)$ эта граница должна быть в известном смысле близка к линейной с угловым коэффициентом $b < a$.

Приведем следующие два примера, в которых условия $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ выполнены.

1) Пусть $f(t)$ — фиксированная (не зависящая от x) функция, а $g_x(t)$ получается из $f(t)$ путем растяжения в x раз по обеим осям координат:

$$g_x(t) = xf\left(\frac{t}{x}\right). \tag{1.7.9}$$

Если

$$u_f := \inf\{u : au \geqslant f(u)\},$$

то, очевидно, $t_g = xu_f$. Для выполнения условий $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ здесь достаточно, чтобы

1. $f(u)/u \to \infty$ при $u \downarrow 0$,

2. $f(u) > au + c\delta$ при $u \in [\delta, u_f - \delta]$, достаточно малом δ и некотором $c > 0$.

3. $f(u_f + u) = au_f + bu + O\big(|u|^{1+h}\big)$ при $b = f'(u_f) < a$, $h > 0$, $|u| < \delta \to 0$.

К семейству (1.7.9) можно отнести и функцию

$$g_x(t) = xt^\alpha, \qquad \alpha \in [0, 1). \tag{1.7.10}$$

Действительно, если положить $f(t) = t^\alpha$, то в (1.7.9) получим $g_x(t) = x^{1-\alpha}t^\alpha$ и в качестве нормирующего множителя надо взять не x, а $x^{1-\alpha}$. В случае (1.7.10)

$$t_g = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/(1-\alpha)}, \qquad b = \alpha a < a.$$

2) Во втором примере функция f опять фиксирована,

$$g_x(t) = x + f(t).$$

Здесь значение t_g определено, если

$$\varlimsup_{t\to\infty} \big(at - f(t)\big) = \infty.$$

Если, например, $f(t) = bt + o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, $b < a$, то $t_g = \frac{x+o(\sqrt{x})}{a-b}$ и условия $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ будут выполнены. Они будут выполнены и в случае $f(t) = ct^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

Кроме того, если наряду с функциями $g_x(t)$ в названных выше примерах рассмотреть функции

$$g_x(t) + \sqrt{t}\,\delta_x(t), \tag{1.7.11}$$

где $\sup\limits_t \delta_x(t) \to 0$ при $x \to \infty$, то они также будут удовлетворять условиям $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$, хотя, как видно из (1.7.11), они могут иметь любые колебания и разрывы порядка $o(\sqrt{t_g})$ в окрестности точки t_g.

Теорема 1.7.1. *Пусть $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma < \infty$, функции $g_x(t)$ таковы, что $t_g \to \infty$ при $x \to \infty$* (см. (1.7.2))*, $\tau_1 = o_p(\sqrt{t_g})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t_g})$ и выполнены условия $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$. Тогда при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} < v\right) \to \Phi\big((a-b)v\big),$$

где Φ — функция распределения нормального закона $\boldsymbol{\Phi}$.

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.3.1 (Анскомбе) и проверим выполнение ее условий применительно к процессу $y(t) = \frac{Y(t)-at}{\sigma\sqrt{t}}$ и случайному времени η_g.

Выполнение условия 1) теоремы 1.3.1 для процесса $y(t)$ вытекает из теоремы 1.3.2. Выполнение условия 2) доказывает

Лемма 1.7.1. *Если $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma_\zeta < \infty$, $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$, то процесс $y(t)$ удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 1.3.1*, т.е.*

$$\sup_{|u|<\delta t} \big|y(t+u) - y(t)\big| \underset{p}{\to} 0 \tag{1.7.12}$$

при $t \to \infty$, $\delta = \delta(t) \to 0$.

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Доказательство. Рассмотрим сначала однородный случай. Имеем

$$y(t+u) - y(t) = \frac{Y(t+u) - Y(t) - au}{\sigma\sqrt{t+u}} - \big(Y(t) - at\big)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{t+u}}\right),$$

$$\sup_{|u|<\delta t}\big|y(t+u) - y(t)\big| \leqslant \sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{Y(t+u) - Y(t) - au}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| + \\ + \left|\frac{Y(t) - at}{\sigma\sqrt{t}}\right| \sup_{|u|<\delta t}\left|\sqrt{\frac{t}{t+u}} - 1\right|, \tag{1.7.13}$$

где второе слагаемое в правой части (1.7.13), равное $\bigl|y(t)\bigr|O(\delta)$, есть, очевидно, $o_p(1)$ при $\delta \to 0$. Так как $Y(t) - at = S_{\eta(t)} + a\chi(t)$, то первое слагаемое в правой части (1.7.13) можно записать в виде

$$\sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{S_{\eta(t+u)} - S_{\eta(t)} + a\chi(t+u) - a\chi(t)}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| \leqslant \sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{S_{\eta(t+u)} - S_{\eta(t)}}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| + \\ + \frac{|a|\chi(t)}{\sigma\sqrt{t(1-\delta)}} + \frac{|a|}{\sigma}\sup_{|u|<\delta t}\frac{\chi(t+u)}{\sqrt{t+u}}. \quad (1.7.14)$$

Последние два слагаемых при $a = 0$ исчезают, а при $a \neq 0$, $\sigma_\tau < \infty$ в силу следствия 1.1.3 сходятся к 0 при $t \to \infty$ с вероятностью 1. Остается рассмотреть первое слагаемое в правой части (1.7.14). В силу леммы 1.1.3 для траектории $\eta(t)$ справедлив усиленный закон больших чисел, так что при всех достаточно больших t значения $\eta(t)$ при любом $\delta > 0$ будут располагаться в пределах $a_\tau^{-1}t(1 \mp \delta)$. Это означает, что при $|u| < \delta t$ и достаточно малом δ все значения $\eta(t+u)$ будут располагаться в пределах границ $a_\tau^{-1}t(1 \mp 5\delta)$. Поэтому первое слагаемое в правой части (1.7.14) при

$$n = [ta_\tau^{-1}] \quad (1.7.15)$$

и достаточно больших t не будет превосходить значения

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{t(1-\delta)}}\max_{|k|<5\delta t}|S_{n+k} - S_n|. \quad (1.7.16)$$

(Мы воспользовались здесь тем, что

$$|S_{\eta(t+u)} - S_{\eta(t)}| \leqslant |S_{\eta(t+u)} - S_n| + |S_{\eta(t)} - S_n|.) \quad (1.7.17)$$

Другими словами, при $t \to \infty$, $\delta \to 0$, для первого слагаемого в правой части (1.7.14), которое мы обозначим через M_t, будем иметь

$$\mathbf{P}(M_t > \varepsilon) \leqslant o(1) + \mathbf{P}\left(\max_{|k|\leqslant 5\delta t}|S_{n+k} - S_n| > \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{t}}{3}\right). \quad (1.7.18)$$

Если под знаком вероятности в правой части (1.7.18) заменить t на na_τ (см. (1.7.15)), то мы получим вероятность того же вида, что оценивалась в лемме 1.3.1. В соответствии с этой леммой вероятности в (1.7.18) сходятся к 0 при $t \to \infty$, $\delta \to 0$. Вместе с (1.7.14), (1.7.13) это заканчивает доказательство (1.7.12).

В неоднородном случае следует воспользоваться представлением

$$\widetilde{Y}(t) = \zeta_1 + Y(t - \tau_1), \quad (1.7.19)$$

где $Y(t)$ — однородный ОПВ, условиями $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$ и повторить рассуждения, которые использовались в доказательстве теоремы 1.3.2 в неоднородном случае. Лемма 1.7.1 доказана.

Проверим теперь выполнение условия 3) теоремы 1.3.1. Наряду со значением t_g^- (см. (1.7.6)) введем в рассмотрение точку t_g^+ пересечения функций $g_x(t)$ и $at-(1+\varepsilon)L(t)$:

$$t_g^+ = \min\bigl\{t > t_g : at-(1+\varepsilon)L(t) \geqslant g_x(t)\bigr\},$$

где $L(t)$ определено в (1.7.4).

В силу условия $[\mathcal{A}]_2$ и закона повторного логарифма для процесса $Y(t)$ имеем

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_g \in (t_g^-, t_g^+)\bigr) \to 1 \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

По условию (1.7.8) при достаточно больших x выполняется

$$t_g^+ - t_g^- \leqslant \frac{4L(t_g)}{a-b},$$

так что

$$\mathbf{P}\left(|\eta_g - t_g| < \frac{4L(t_g)}{a-b}\right) \to 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1 \quad \textit{при} \quad x \to \infty \tag{1.7.20}$$

и выполнено условие 3) теоремы 1.3.1 при $\theta(x) = \eta_g$ и $h(x) = t_g$. Поэтому из теоремы 1.3.1 получаем

$$\mathbf{P}(y(\eta_g) < v) \Rightarrow \Phi(v) \quad \textit{при} \quad x \to \infty, \tag{1.7.21}$$

где

$$y(\eta_g) = \frac{Y(\eta_g) - a\eta_g}{\sigma\sqrt{\eta_g}}, \qquad \frac{\sqrt{\eta_g}}{\sqrt{t_g}} \underset{p}{\to} 1 \quad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{1.7.22}$$

Далее,

$$Y(\eta_g) = g_x(\eta_g) + r_g, \tag{1.7.23}$$

где $|r_g| \leqslant \bigl|\zeta(\eta_g)\bigr|$. Положим

$$n_x^{\pm} := \frac{t_g^{\pm}}{a_\tau}(1 \pm \varepsilon),$$

при $\varepsilon > 0$, и введем в рассмотрение события

$$\begin{aligned} &B_1 := \{t_g^- < \eta_g < t_g^+\},\\ &B_2 := \bigl\{\eta(t_g^-) > n_x^-\bigr\},\\ &B_3 := \bigl\{\eta(t_g^+) < n_x^+\bigr\}, \qquad B = B_1B_2B_3. \end{aligned} \tag{1.7.24}$$

Ясно, что $\mathbf{P}(B_1) \to 1$ при $x \to \infty$ и в силу закона больших чисел для $\eta(t)$ выполняется $\mathbf{P}(B_2B_3) \to 1$, так что $\mathbf{P}(B) \to 1$ при $x \to \infty$. При этом на множестве B

$$\begin{aligned} n_x^- < \eta(t_g^-) < \eta(\eta_g) < \eta(t_g^+) < n_x^+, \\ |r_g| \leqslant \max\Big\{\big|\zeta(t)\big| : \, t_g^- < t < t_g^+\Big\} \leqslant \\ \leqslant \max\big\{|\zeta_k| : \, n_x^- < k < n_x^+\big\}. \end{aligned} \tag{1.7.25}$$

Поэтому при любом $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\big(|r_g| > \delta\sqrt{t_g};\, B\big) \leqslant (n_x^+ - n_x^-)\mathbf{P}\big(|\zeta| > \delta\sqrt{t_g}\,\big).$$

Далее, при достаточно больших x и малых ε

$$n_x^+ - n_x^- < \frac{2(t_g^+ - t_g^-)}{a_\tau} < \frac{8L(t_g)}{a_\tau(a-b)},$$

так что

$$\mathbf{P}\big(r_g > \delta\sqrt{t_g}\,\big) \leqslant o(1) + \frac{8L(t_g)}{a_\tau(a-b)}\,\frac{\mathbf{E}\zeta^2}{\delta^2 t_g} = o(1) \quad \text{при } x \to \infty,$$

$r_g = o_p(\sqrt{t_g})$. Поэтому из (1.7.23) и условия $[\mathcal{A}]_1$ получаем

$$\begin{aligned} Y(\eta_g) - a\eta_g = g_x(\eta_g) - a\eta_g + o_p(\sqrt{t_g}) = (a-b_x)(t_g - \eta_g) + o_p(\sqrt{t_g}), \\ y(\eta_g) = -\frac{(a-b_x)(\eta_g - t_g)}{\sigma\sqrt{t_g}} + o_p(1) \end{aligned} \tag{1.7.26}$$

и в силу (1.7.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(-\frac{(a-b_x)(\eta_g - t_g)}{\sigma\sqrt{t_g}} < v\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} > -\frac{v}{a-b_x}\right) \to \Phi(v) \end{aligned} \tag{1.7.27}$$

при $x \to \infty$, или, что то же,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} < u\right) \to \Phi\big((a-b)u\big).$$

Теорема 1.7.1 доказана.

Покажем теперь, что утверждение теоремы 1.7.1 останется верным для ОПВ $Z(t) = Z_{\nu(t)}$ и для процессов

$$Y^{(q)}(t) = Y(t) + qt, \qquad Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt \tag{1.7.28}$$

с линейным сносом qt.

Теорема 1.7.2. *Утверждение теоремы* 1.7.1 *полностью сохранится, если в нем $Y(t)$ заменить на $Z(t)$. Оно полностью сохранится и в случае, если $Y(t)$ заменить на $Y^{(q)}(t)$ или на $Z^{(q)}(t)$ при замене b на $b^{(q)} := b - q$.*

Доказательство. Так как

$$Y(t) - Z(t) = \zeta(t) \tag{1.7.29}$$

и в силу следствия 1.1.3

$$\frac{|\zeta(t)|}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \tag{1.7.30}$$

при $t \to \infty$, то

$$\frac{|Z(t) - Y(t)|}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0. \tag{1.7.31}$$

Отсюда вытекает справедливость теоремы 1.7.1 для ОПВ $Z(t)$ (граница $g_x(t)$ определена с точностью до $o(\sqrt{t_g}\,)$; см. (1.7.5)).

Второе утверждение теоремы очевидно, поскольку рассматриваемая задача сводится к задаче о времени первого прохождения процессами $Y(t)$, $Z(t)$ границы $g(t){-}qt$. Теорема 1.7.2 доказана.

1.7.3 Случай бесконечной дисперсии

Если $\sigma = \sigma_\xi = \infty$, то мы, как и в § 1.5, будем предполагать, что выполнено условие правильного убывания распределения $\xi = \zeta - a\tau$ на бесконечности. Если, как и прежде, положить

$$F_-(t) = \mathbf{P}(\xi \leqslant -t),\ F_+(t) = \mathbf{P}(\xi \geqslant t),$$
$$F(t) = F_-(t) + F_+(t) = \mathbf{P}\big(|\xi| \geqslant t\big),$$

то мы будем предполагать, что выполнено условие

$[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$. *Функция $F(t)$ является правильно меняющейся на бесконечности, т.е. представима в виде*

$$F(t) = t^{-\alpha} l(t), \qquad \alpha \in (1, 2),$$

где $l(t)$ — медленно меняющаяся функция на бесконечности, при этом существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_+(t)}{F(t)} =: \beta_+ \in [0, 1],$$

и мы полагаем $\beta := 2\beta_+ - 1$.

Пусть далее $F^{(-1)}(u)$ — обобщенная обратная функция к $F(t)$:

$$F^{(-1)}(u) = \inf\bigl\{t:\, F(t) < u\bigr\}$$

и

$$\sigma_\xi(n) := F^{(-1)}(1/n). \tag{1.7.32}$$

Функция $\sigma_\xi(n)$ имеет вид $n^{1/\alpha} l_\sigma(n)$, где $l_\sigma(n)$ — медленно меняющаяся последовательность (см., например, [10, § 8.8]).

При выполнении условия $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ нормированные суммы

$$s(n) := \frac{S_n}{\sigma_\xi(n)}$$

слабо сходятся по распределению к устойчивому закону $\mathbf{\Phi}_{\alpha,\beta}$ с параметрами (α, β).

Пусть, как и прежде,

$$\sigma(t) = \sigma_\xi(t) a_\tau^{-1/\alpha}.$$

Как и в разделе 1.7.2 мы будем предполагать здесь, что определено время t_g первого пересечения кривых $g_x(t)$ и at и что граница $g_x(t)$ удовлетворяет условиям $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$, в которых $o(\sqrt{t_g})$ в (1.7.5) следует заменить на $o\bigl(\sigma(t_g)\bigr)$, а вместо $(1+\varepsilon)L(t)$ (при функции $L(t)$, определенной в (1.7.4)) надо писать $L(t)$, где

$$L(t) = \sigma(t)(\ln t)^\theta \tag{1.7.33}$$

при любом фиксированном $\theta > \frac{1}{\alpha}$. Остаточный член $o(\sqrt{t_g})$ в (1.7.5) следует заменить на $o\bigl(\sigma(t_g)\bigr)$. Здесь остаются справедливыми все комментарии к условиям $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$, сделанные в разделе 1.7.2.

Пусть как и прежде η_g определено в (1.7.1).

Теорема 1.7.3. *Пусть ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1,2)$, а функции $g_x(t)$ таковы, что $t_g \to \infty$ при $x \to \infty$, $\tau_1 = o_p\bigl(\sigma(t_g)\bigr)$, $\zeta_1 = o_p\bigl(\sigma(t_g)\bigr)$, и выполнены условия $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ с заменами, названными в* (1.7.33). *Пусть, кроме того,*

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) < cF(t), \qquad \mathbf{P}\bigl(|\zeta| \geqslant t\bigr) < cF(t) \tag{1.7.34}$$

при некотором $c < \infty$. Тогда при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma(t_g)} < v\right) \to \Phi_{\alpha,\beta}\bigl((a-b)v\bigr), \tag{1.7.35}$$

где $\Phi_{\alpha,\beta}$ — функция распределения устойчивого закона с параметрами α, β.

Если $a = 0$, то первое из условий (1.7.34) *излишне.*

Утверждение теоремы полностью сохранится для процессов Z, $Y^{(q)}$, $Z^{(q)}$.

Доказательство теоремы 1.7.3 вполне аналогично доказательству теоремы 1.7.1. Воспользуемся теоремой 1.3.1 и проверим выполнение ее условий 1)–3) применительно к последовательности

$$y(t) = \frac{Y(t) - at}{\sigma(t)}$$

и случайному времени η_g. Выполнение условия 1) вытекает из теоремы 1.4.1.

Покажем теперь, что $y(t)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1.3.1, т.е. установим следующий аналог леммы 1.7.1.

Лемма 1.7.2. *Пусть случайная величина $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1,2)$,*

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) \leqslant cF(t), \qquad c = \text{const}, \tag{1.7.36}$$

$\tau_1 = o_p\big(\sigma(t)\big)$, $\zeta_1 = o_p\big(\sigma(t)\big)$. Тогда

$$\sup_{|u|<\delta t} \big|y(t+u) - y(t)\big| \underset{p}{\to} 0 \tag{1.7.37}$$

при $t \to \infty$, $\delta = \delta(t) \to 0$.

Если $a = 0$, то условие (1.7.36) *излишне.*

Доказательство. Рассмотрим сначала однородный случай. Аналогично (1.7.13) имеем

$$\sup_{|u|<\delta t} \big|y(t+u) - y(t)\big| \leqslant \\ \leqslant \sup_{|u|<\delta t} \frac{|Y(t+u) - Y(t) - au|}{\sigma(t+u)} + \big|y(t)\big| \sup_{u<\delta t} \left|\frac{\sigma(t)}{\sigma(t+u)} - 1\right|,$$

где второе слагаемое в правой части есть, очевидно, $o_p(1)$. Первое слагаемое не превосходит (ср. с (1.7.14))

$$\sup_{|u|<\delta t} \left|\frac{S_{\eta(t+u)} - S_{\eta(t)}}{\sigma(t+u)}\right| + \frac{|a|\chi(t)}{\sigma(t-\delta t)} + \frac{|a|}{\sigma(t-\delta t)} \sup_{|u|<\delta t} \chi(t+u) \tag{1.7.38}$$

Здесь $\sigma(t-\delta t)\sim\sigma(t)\to\infty$ при $t\to\infty$,

$$\frac{\chi(t)}{\sigma(t-\delta t)}\underset{p}{\to}0, \tag{1.7.39}$$

так как распределение $\chi(t)$ сходится при $t\to\infty$ к собственному распределению (см. лемму 1.1.1). Далее,

$$\sup_{|u|<\delta}\chi(t+u)\leqslant\chi(t-\delta t)+\mu_t, \tag{1.7.40}$$

где $\mu_t\underset{p}{\leqslant}\overline{\tau}(2\delta t)=\sup\limits_{u\leqslant 2\delta t}\tau(u)$, $\tau(u)=\tau_{\eta(u)}$, и при $\varepsilon{>}0$, $m=\left[\frac{3\delta t}{a_\tau}\right]\to\infty$ выполняется

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\overline{\tau}(2\delta t)>\varepsilon\sigma(t)\big)\leqslant\mathbf{P}\big(\eta(2\delta t)>m\big)+\mathbf{P}\big(\overline{\tau}_m>\varepsilon\sigma(t)\big)=\\=o(1)+m\mathbf{P}\big(\tau>\varepsilon\sigma(t)\big).\end{aligned}$$

Но по условию (1.7.36)

$$\begin{aligned}m\mathbf{P}\big(\tau>\varepsilon\sigma(t)\big)\leqslant mcF\big(\varepsilon a_\tau^{-1/\alpha}\sigma_\xi(t)\big)\sim\\ \sim mc\,\varepsilon^{-\alpha}a_\tau F\big(\sigma_\xi(t)\big)\sim 3\delta c\,\varepsilon^{-\alpha}=o(1).\end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{\mu_t}{\sigma(t)}=o_p(1)$ и в силу (1.7.39) $\frac{\chi(t-\delta t)}{\sigma(t-\delta t)}=o_p(1)$. Сказанное означает, что последние два слагаемых в (1.7.38) суть $o_p(1)$.

Если $a=0$, то последние два слагаемых в (1.7.38) исчезают и необходимость в проведенных выше оценках отпадает.

Нам остается оценить первое слагаемое в (1.7.38). Здесь используются те же рассуждения, что и при оценке аналогичного слагаемого в (1.7.14) в доказательстве леммы 1.7.1. Согласно этим рассуждениям первое слагаемое в (1.7.38) при

$$n=[ta_\tau^{-1}] \tag{1.7.41}$$

и всех достаточно больших t не будет превосходить на множестве высокой вероятности значения

$$\frac{2}{\sigma(t-\delta t)}\max_{|k|<5\delta t}|S_{n+k}-S_n|$$

(ср. с (1.7.16)). Другими словами, при $t\to\infty$, $\delta\to0$, для первого слагаемого в (1.7.38), которое мы обозначим через M_t, при любом $\varepsilon>0$ будем иметь (ср. с (1.7.18))

$$\mathbf{P}(M_t>\varepsilon)\leqslant o(1)+\mathbf{P}\bigg(\max_{|k|<5\delta t}|S_{n+k}-S_n|>\frac{\varepsilon\sigma(t)}{3}\bigg). \tag{1.7.42}$$

Если под знаком вероятности в правой части (1.7.42) заменить t на na_τ (см. (1.7.41)) и положить $N := 5\delta n a_\tau \to \infty$ при $n \to \infty$, то мы придем к оценкам вероятности вида

$$\mathbf{P}\bigl(\overline{S}_N > \varepsilon c\sigma(n)\bigr),$$

где $c = \text{const}$, $\overline{S}_N = \max_{k\leqslant N} S_k$. Так как $\frac{\sigma(N)}{\sigma(n)} \to 0$ при $n \to \infty$, то эти вероятности в силу результатов § 3.1 в [26] сходятся к 0 при $n \to \infty$. (Можно воспользоваться также сходимостью $\frac{S_{tN}}{\sigma(N)}$ по распределению к устойчивому процессу, из чего следует, что $\frac{\overline{S}_N}{\sigma(N)}$ имеет собственное предельное распределение при $N \to \infty$, $\frac{\overline{S}_N}{\sigma(n)} \underset{p}{\to} 0$.) Сходимость (1.7.37) в однородном случае доказана. В неоднородном случае следует повторить (с очевидными изменениями) рассуждения в доказательстве леммы 1.7.1. Лемма 1.7.2 доказана.

Проверим теперь выполнение условия 3) теоремы 1.3.1. Наряду со значением t_g^- (см. (1.7.6) при замене $(1+\varepsilon)L(t)$ на функцию $L(t)$, определенную в (1.7.33)) введем в рассмотрение точку t_g^+ пересечения прямых $g_x(t)$ и $at - L(t)$ при $L(t)$, определенном в (1.7.33):

$$t_g^+ := \inf\bigl\{t > t_g :\, at - L(t) \geqslant g_x(t)\bigr\}.$$

В силу условия $[\mathcal{A}]_2$ и аналога закона повторного логарифма (теорема 1.4.2) имеем

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_g \in (t_g^-, t_g^+)\bigr) \to 1 \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Из соотношений вида (1.7.8) при достаточно больших x следует неравенство

$$t_g^+ - t_g^- \leqslant \frac{4L(t_g)}{a-b},$$

так что

$$\mathbf{P}\left(|\eta_g - t_g| < \frac{4L(t_g)}{a-b}\right) \to 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1 \quad \textit{при} \quad x \to \infty$$

и выполнено условие 3) теоремы 1.3.1 при $\theta(x) = \eta_g$, $h(x) = t_g$.

Мы можем применить теперь теорему 1.3.1, в силу которой

$$y(\eta_g) \Leftrightarrow \mathbf{\Phi}_{\alpha,\beta} \quad \textit{при} \quad x \to \infty,$$

где

$$y(\eta_g) = \frac{Y(\eta_g) - a\eta_g}{\sigma(\eta_g)}, \qquad \frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1.$$

Положим

$$n_x^{\pm} := (1 \pm \varepsilon) a_\tau^{-1} t_g^{\pm}, \qquad \varepsilon > 0,$$

и воспользуемся представлением (1.7.23). Как и в доказательстве теоремы 1.7.1, рассмотрим события B_1, B_2, B_3, B, определенные в (1.7.24), где, как и прежде, $\mathbf{P}(B_1) \to 1$ при $x \to \infty$. Далее, считая для простоты, что $n_x^{\pm}$ — целые числа, имеем

$$\mathbf{P}\big(\eta(t_g^-) < n_x^-\big) = \mathbf{P}(T_{n_x^-} \geqslant t_g^-) = \mathbf{P}\big(T_{n_x^-} - a_\tau n_x^- \geqslant \varepsilon t_g^-\big). \tag{1.7.43}$$

В силу закона больших чисел вероятность в (1.7.43) сходится к 0 при $x \to \infty$, так что $\mathbf{P}(B_2) \to 1$. Аналогично устанавливается, что $\mathbf{P}(B_3) \to 1$, $\mathbf{P}(B) \to 1$ при $x \to \infty$.

Далее, на множестве B в силу (1.7.23), (1.7.25)

$$\eta(\eta_g) \in (n_x^-, n_x^+), \qquad |r_g| \leqslant \max\big\{|\zeta_k| : n_x^- < k < n_x^+\big\}. \tag{1.7.44}$$

Оценим величину $|r_g|$ в (1.7.23). При любом фиксированном $\delta > 0$ в силу (1.7.44) имеем

$$\mathbf{P}\big(|r_g| > \delta\sigma_\xi(t_g);\ B\big) \leqslant (n_x^+ - n_x^-)\mathbf{P}\big(|\zeta| > \delta\sigma_\xi(t_g)\big).$$

При достаточно больших x и малых ε имеем

$$n_x^+ - n_x^- < 2a_\tau^{-1}(t_g^+ - t_g^-) < \frac{8L(t_g)}{a_\tau(a-b)},$$

так что

$$\mathbf{P}\big(|r_g| > \delta\sigma_\xi(t_g)\big) \leqslant o(1) + \frac{8L(t_g)}{a_\tau(a-b)}\,\mathbf{P}\big(|\zeta| > \delta\sigma_\xi(t_g)\big). \tag{1.7.45}$$

Но в силу (1.7.34) при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(|\zeta| > \delta\sigma_\xi(t_g)\big) \leqslant c\delta^{-\alpha} F\big(\sigma_\xi(t_g)\big)\big(1 + o(1)\big) \sim \frac{c\delta^{-\alpha}}{t_g}.$$

Так как $L(t) = o(t)$, то вместе с (1.7.45) это означает, что $r_g = o_p\big(\sigma(t_g)\big)$. Возвращаясь к (1.7.23), по условию $[\mathcal{A}]_1$ получаем

$$\begin{aligned} Y(\eta_g) - a\eta_g = g_x(\eta_g) - a\eta_g + o_p\big(\sigma(t_g)\big) &= \\ = (a-b)(t_g - \eta_g) + o_p\big(\sigma(t_g)\big). \end{aligned} \tag{1.7.46}$$

Дальнейшие рассуждения, как и равенство (1.7.46), повторяют выкладки (1.7.26), (1.7.27) в доказательстве теоремы 1.7.1 с точностью до замены в них $\sigma\sqrt{t_g}$ на $\sigma(t_g)$ и Φ на $\Phi_{\alpha,\beta}$. Теорема 1.7.3 доказана.

Доказательство, касающееся процессов $Y^{(q)}$, $Z^{(q)}$, повторяет рассуждения в доказательстве теоремы 1.7.2.

§ 1.8 Основные предельные законы для марковских аддитивных процессов (для сумм случайных величин, заданных на состояниях цепи Маркова)

1.8.1 Эргодические теоремы для харрисовых цепей Маркова

Пусть $\{\mathrm{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ — цепь Маркова с состояниями $\mathrm{e} \in E$ в произвольном измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$ с σ-алгеброй $\mathcal{E}$ и переходной вероятностью $P_{\mathrm{e}}(A)$, $A \in \mathcal{E}$. Мы будем рассматривать «харрисовы» цепи Маркова, которые определяются следующим образом. Пусть $\mathrm{x}_n(\mathrm{e})$ есть состояние цепи в момент n при начальном состоянии e; $P_{\mathrm{e},n}(A) := \mathbf{P}\big(\mathrm{x}_n(\mathrm{e}) \in A\big) = \mathbf{P}(\mathrm{x}_n \in A \,|\, \mathrm{x}_0 = \mathrm{e})$ — переходная вероятность за n шагов. Для некоторого фиксированного множества $V \in \mathcal{E}$ определим случайную величину

$$\tau_V(\mathrm{e}) = \min\big\{k \geqslant 1, \mathrm{x}_k(\mathrm{e}) \in V\big\}, \qquad \mathrm{e} \in E,$$

являющуюся временем первого попадания цепи из состояния $\mathrm{e} \in E$ в множество V $\;(\tau_V(\mathrm{e}) = \infty$, если все $\mathrm{x}_k(\mathrm{e}) \notin V)$.

Цепь Маркова $\{\mathrm{x}_n\}$ в $(E, \mathcal{E})$ называется *харрисовой* (или *неприводимой по Харрису*, $\boldsymbol{\varphi}$-неприводимой), если существует множество $V \in \mathcal{E}$, вероятностная мера $\boldsymbol{\varphi}$ на $(E, \mathcal{E})$ и числа $n_0 \geqslant 1$, $p \in (0,1)$ такие, что

$$(\mathrm{I}_0) \qquad \mathbf{P}\big(\tau_V(\mathrm{e}) < \infty\big) = 1 \quad \forall \mathrm{e} \in E$$

$$(\mathrm{II}) \qquad P_{\mathrm{e},n_0}(A) \geqslant p\boldsymbol{\varphi}(A) \quad \text{для всех } \mathrm{e} \in V, \quad A \in \mathcal{E}.$$

Условие (I_0) выполняет роль условия неразложимости цепи: из любой точки $\mathrm{e} \in E$ траектория x_n рано или поздно попадает в V. Условие (II) гарантирует, что через n_0 шагов после попадания в V «блуждающая частица» будет иметь распределение, которое «минорируется» одним и тем же «распределением» $p\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$. Это условие иногда называют условием «перемешивания», оно обеспечивает «частичную потерю памяти» о прошлом траектории.

Если цепь имеет возвратный атом e_0, то условия (I_0), (II) всегда выполнены при $V = \{\mathrm{e}_0\}$, $n_0 = 1$, $p = 1$, $\boldsymbol{\varphi}(A) = P_{\mathrm{e}_0}(A)$, так что такая цепь является харрисовой.

В качестве множества V обычно рассматривают «компактные» множества (если $E = \mathbb{R}^k$, то это будет ограниченные множества), иначе обеспечить выполнение неравенства (II), как правило, не удается. Если само пространство E «компактно» (конечное множество или ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^k$), то условие (II) может быть выполнено и для $V = E$ (условие (I_0) при этом выполнено всегда). Например, если цепь $\{\mathrm{x}_n\}$ конечна, неразложима и непериодична, то найдется n_0 такое, что $P_{\mathrm{e},n_0}(\mathrm{e}_1) \geqslant p > 0$ при всех e, e_1 из E. Стало быть, условие (II) при $V = E$ выполнено, если в качестве $\boldsymbol{\varphi}$ взять равномерное распределение на E.

Условие (II) можно интерпретировать как наличие у всех распределений $P_{\mathrm{e},n_0}(\cdot)$ при $\mathrm{e} \in V$ абсолютно непрерывной компоненты относительно меры $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\inf_{\mathrm{e}\in V} \frac{P_{\mathrm{e},n_0}(dy)}{\boldsymbol{\varphi}(dy)} \geqslant p > 0.$$

Об условиях, достаточных для выполнения (I_0), (II), см., например, § 13.7 в [10].

Нам понадобятся еще условие «положительности» (положительной возвратности) множества V (или «положительности цепи»):

(I) $$\sup_{\mathrm{e}\in V} \mathbf{E}\tau_V(\mathrm{e}) < \infty$$

и условие непериодичности, которое мы запишем в следующем виде. Пусть $\mathrm{x}_k(\boldsymbol{\varphi})$ — цепь Маркова с начальным распределением $\boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — из условия (II). Положим

$$\tau_V(\boldsymbol{\varphi}) = \min\big\{k \geqslant 0 :\, \mathrm{x}_k(\boldsymbol{\varphi}) \in V\big\}.$$

Очевидно, что $\tau_V(\boldsymbol{\varphi})$ в силу (I_0) есть собственная случайная величина.

Условие непериодичности цепи имеет вид:

(III)

$$\text{н.о.д.}\Big\{k \geqslant 1 :\, \mathbf{P}\big(\tau_V(\boldsymbol{\varphi}) = k\big) > 0\Big\} = 1.$$

Условие (III) всегда выполнено, если выполнено (II) при $n_0 = 1$, $\boldsymbol{\varphi}(V) > 0$ (тогда $\mathbf{P}\big(\tau_V(\boldsymbol{\varphi}) = k\big) > 0$ при всех k).

Ясно, что конечная неприводимая непериодическая цепь Маркова всегда удовлетворяет условиям (I_0), (I)–(III). Замечательный факт, установленный в работах Атреа, Нея, Нуммелина (см., например, [59], [107], [81], [8, гл. 1], [10, § 13.7]), состоит в том, что любую харрисову цепь $\{\mathrm{x}_n\}$ можно так «расширить» до цепи $\mathrm{x}_n^* = (\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n)$, где y_n независимы,

$$\mathrm{y}_n = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p,\\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p, \end{cases}$$

что цепь $\{\mathrm{x}_n^*\}$ будет иметь «искусственный» атом $V^* = (V, 1)$ с переходной вероятностью

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{x}_{n+1}^* \in (B, 0 \cup 1) \,|\, \mathrm{x}_n^* = V^*\big) = \boldsymbol{\varphi}(B)$$

(подробнее см., например, [10, гл. 13], [8, гл. 1]).

Так как фазовое пространство $(E, \mathcal{E})$ харрисовой цепи произвольно, то мы можем, не ограничивая по-существу общности, *с самого начала считать*, что цепь $\{\mathrm{x}_n\}$ имеет одноточечный атом $V = \{\mathrm{e}_0\}$.

Тогда траекторию процесса $\{\mathrm{x}_n\}$ после первого попадания в e_0 можно разбить на независимые, одинаково устроенные блоки (циклы), так что естественным образом возникает процесс восстановления по возвращению цепи в состояние e_0. Пусть

$$\tau_1 = \min\{k \geqslant 1 : \mathrm{x}_k = \mathrm{e}_0\}, \quad \tau = \min\{k \geqslant 1 : \mathrm{x}_k(\mathrm{e}_0) = \mathrm{e}_0\}.$$

Тогда длины циклов $\tau_2, \tau_3, \ldots$ будут независимыми копиями τ. Процесс восстановления будет однородным, если $\mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0$. Вероятность

$$Q(k, A) = \mathbf{P}(\mathrm{x}_k \in A \,|\, \mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0, \mathrm{x}_1 \neq \mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{x}_{k-1} \neq \mathrm{e}_0)$$

называется «табу-вероятностью» попадания из e_0 в A за k шагов (не заходя в e_0).

Справедлива следующая эргодическая теорема, по сути являющаяся простым следствием того, что в случае $a_\tau = \mathbf{E}\tau < \infty$ последовательность $\gamma(n) = n - T_{\nu(n)}$, $T_k = \sum_{j=1}^k \tau_j$, имеет собственное предельное распределение (см. лемму 1.1.1) и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\gamma(n) = k\big) = \frac{\mathbf{P}(\tau > k)}{a_\tau}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Теорема 1.8.1. *Если выполнены условия* (I_0), (I)–(III), *т.е. цепь* $\{\mathrm{x}_n\}$ *является непериодичной харрисовой цепью Маркова, то для любых* $\mathrm{e} \in E$, $A \in \mathcal{E}$

$$P_{\mathrm{e},n}(A) \to \pi(A) := \frac{1}{a_\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau > k) Q(k, B) \quad \textit{при } n \to \infty \tag{1.8.1}$$

и $\pi(\cdot)$ *есть инвариантная мера.*

Действительно, пусть e_0 — положительный атом цепи. В силу леммы 1.1.1

$$P_{\mathrm{e},n}(A) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{P}\big(\gamma(n) = l\big) Q(l, A) \to \pi(A) \tag{1.8.2}$$

при $n \to \infty$. Тот факт, что π является инвариантной мерой, и что (1.8.1) сохраняется для любого распределения начального значения x_0, устанавливается без труда.

Справедливо и более сильное, чем (1.8.1), утверждение о сходимости $P_{\mathrm{e},n}(A)$ к $\pi(A)$ по вариации.

Полный текст доказательства теоремы 1.8.1, т.е. приведенные выше рассуждения с добавлением к ним обратного перехода от цепи $\{\mathrm{x}_n^*\}$ к $\{\mathrm{x}_n\}$, см., например в [10, теорема 13.7.1].

1.8.2 Марковские аддитивные процессы

Определение марковского аддитивного процесса (МАП) выглядит следующим образом (см., например, [109, 110]). Пусть наряду с цепью $\{\mathrm{x}_n\}_{n=0}^\infty$ задана последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ такая, что $\big\{(\mathrm{x}_n, \xi_n);\, n = 1, 2, \dots\big\}$ есть цепь Маркова на $(E \times \mathbb{R},\ \mathcal{E} \times \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$, и ее переходная вероятность обладает свойством

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big((\mathrm{x}_{n+1}, \xi_{n+1}) \in A \times B \,|\, \mathcal{F}_n\big) &= \\ &= \mathbf{P}\big((\mathrm{x}_{n+1}, \xi_{n+1}) \in A \times B \,|\, \mathrm{x}_n\big) =: P_{\mathrm{x}_n}(A, B), \quad (1.8.3)\end{aligned}$$

где $A\in\mathcal{E}$, $B\in\mathfrak{B}$, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная $(\mathrm{x}_0, \dots, \mathrm{x}_n;\, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Пусть далее

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k. \tag{1.8.4}$$

Пара $\big\{(\mathrm{x}_n, \mathrm{X}_n), n = 0, 1, \dots\big\}$ называется марковским аддитивным процессом (МАП) с переходной функцией $P_\mathrm{e}(A, B)$. Основные свойства МАП см., например, в [88, 89].

Пусть для простоты E дискретно (счетно). Тогда из определения МАП следует, что

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \,|\, \mathrm{x}_n = \mathrm{e},\ \mathrm{x}_{n+1} = \mathrm{e}_1) = \frac{P_\mathrm{e}(\mathrm{e}_1, B)}{P_\mathrm{e}(\mathrm{e}_1, \mathbb{R})}, \tag{1.8.5}$$

так что распределение ξ_{n+1} зависит, вообще говоря, от *пары* состояний $(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_{n+1})$ (т.е. от переходов цепи).

Мы будем использовать более прозрачное и конструктивное задание МАП, которое больше соответствует подзаголовку § 1.8. В нем вероятность

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \,|\, \mathcal{F}_n, \mathrm{x}_{n+1}) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \,|\, \mathrm{x}_{n+1}) \tag{1.8.6}$$

зависит лишь от x_{n+1}. Эта конструкция не несет в себе потерю общности по сравнению с (1.8.3), (1.8.4), так как процесс (1.8.3), (1.8.4) можно построить и на цепи $\{\overset{\neg}{\mathrm{x}}_n\}$, составленной из «переходов» $\overset{\neg}{\mathrm{x}}_n = (\mathrm{x}_{n-1}, \mathrm{x}_n)$.

Для цепи $\{\overline{\mathrm{x}}_n, \xi_n\}$ будет выполнено (1.8.6). Ясно, что предельные законы для МАП $(\mathrm{x}_n, \mathrm{X}_n)$ и $(\overline{\mathrm{x}}_n, \mathrm{X}_n)$ будут по сути одни и те же.

Предлагаемая конструкция предполагает, что задано семейство распределений $\{\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\}$, зависящих от параметра $\mathrm{e} \in E$. Если $F_{\mathrm{e}}^{(-1)}(t)$ есть квантильное преобразование распределения $\{\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\}$ и ω — случайная величина, равномерно распределенная на $[0,1]$, то

$$\xi(\mathrm{e}) := F_{\mathrm{e}}^{(-1)}(\omega)$$

будет иметь распределение $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ (см., например, [10, § 3.3]).

Отображение $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ пространства E в множество распределений предполагается таким, что функция $F_{\mathrm{e}}^{(-1)}(t)$ на $E\times\mathbb{R}$ измерима относительно $\mathcal{E}\times\mathfrak{B}$ и, как функция от e, обладает при необходимости некоторыми свойствами правильного изменения так, чтобы были определены интегралы, дающие переходную функцию $P_{\mathrm{e}_1}(A,B) = \int_A P_{\mathrm{e}_1}(d\mathrm{e})\mathbf{P}\big(\xi(\mathrm{e}) \in B\big)$. Эти условия не требуются, если E дискретно. Тогда интегралы превращаются в обычные ряды.

Если ω_n равномерно распределены на $[0,1]$ и независимы, то последовательность

$$\xi(\mathrm{x}_n) := F_{\mathrm{x}_n}^{(-1)}(\omega_n), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

называется *последовательностью случайных величин, заданных на цепи Маркова* $\{\mathrm{x}_n\}$.

Основным объектом изучения в этом разделе будут асимптотические свойства распределения сумм

$$\mathrm{X}_n := \sum_{k=0}^{n} \xi(\mathrm{x}_k). \tag{1.8.7}$$

Двумерный процесс

$$\{\mathrm{x}_n, \mathrm{X}_n\}, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

будем называть *марковским аддитивным процессом.* Как уже отмечалось, эта конструкция в известном смысле эквивалентна (1.8.3), (1.8.4). Изучению асимптотических законов МАР посвящена значительная литература (см, например, [39], [40], [60], [75], [95], [99], [102], [108]–[110]). Первые предельные теоремы для МАР в области нормальных уклонений появились, по-видимому, в [102]; в области больших уклонений — в [39, 40, 108]. Общие подходы к изучению аддитивных функционалов от марковских процессов изложены в [95]. Принцип больших уклонений для МАР, определенных на харрисовых цепях Маркова (т.е. по существу на цепях, имеющих положительный атом) установлен в [109, 110] с помощью построения циклов (по возвращению в положительный атом, что индуцирует соответствующий ОПВ). Действительно, если обозначить через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ приращения сумм X_n на циклах длиной $\tau_1, \tau_2, \ldots$, то векторы (τ_j, ζ_j) будут независимы и одинаково распределены при $j \geqslant 2$. Они определяют ОПВ. Временно́й параметр в этом случае целочисленный, и мы обозначаем его через n. Здесь τ_j целочисленны, а компоненты τ_i и ζ_j зависимы, за исключением случая, когда $\xi(\mathrm{e}) = 0$ при $\mathrm{e} \neq \mathrm{e}_0$.

Связь моментных характеристик a и σ для ОПВ со стационарным распределением цепи $\{\mathrm{x}_k\}$ и моментами $\xi(\mathrm{e})$ описана в теореме 13.8.5 в [10]. Для параметра a эта связь вытекает из соотношений

$$\mathbf{E}\mathrm{X}_n \sim n \int \pi(d\mathrm{e})\mathbf{E}\xi(\mathrm{e}) \sim an,$$

так что

$$a = \frac{a_\zeta}{a_\tau} = \int \pi(d\mathrm{e})\mathbf{E}\xi(\mathrm{e}), \qquad a_\tau = \frac{1}{\pi(\mathrm{e}_0)}, \qquad a_\zeta = \frac{a}{\pi(\mathrm{e}_0)},$$

где π — стационарное распределение цепи.

1.8.3 Основные предельные законы для марковских аддитивных процессов

Из результатов гл. 1 вытекают в качестве следствий все основные предельные законы для $\{\mathrm{X}_n\}$. Везде ниже предполагается, что $\{\mathrm{x}_n\}$ — харрисова цепь Маркова.

Теорема 1.8.2. *Если $\mathbf{E}\tau < \infty$, $\mathbf{E}\zeta < \infty$, то справедлив закон больших чисел для X_n:*

$$\frac{\mathrm{X}_n}{n} \underset{p}{\to} a \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8.8}$$

Действительно, величина

$$\mathrm{X}_n = Z(n) + \rho_n, \quad \text{где} \quad \rho_n = \sum_{k=n-\gamma(n)+1}^{n} \xi(\mathrm{x}_k) \tag{1.8.9}$$

при каждом фиксированном $\gamma(n) = l$ условно не зависит от $Z(n)$. Как уже отмечалось, если $\mathbf{E}\tau < \infty$, то существует собственное предельное распределение $\gamma(n)$ при $n \to \infty$, а значит, и собственное предельное распределение ρ_n при $n \to \infty$. Поэтому из закона больших чисел для $Z(n)$ (теорема 1.2.2) вытекает (1.8.8).

Теорема 1.8.3. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1.8.2

$$\mathbf{E}\widehat{\zeta} < \infty,$$

где

$$\widehat{\zeta} := \max_{1\leqslant k\leqslant \tau} \mathrm{X}_k - \min_{1\leqslant k\leqslant \tau} \mathrm{X}_k \tag{1.8.10}$$

(при $\mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0$*), то справедлив усиленный закон больших чисел*

$$\frac{\mathrm{X}_n}{n} \underset{\textit{п.н.}}{\to} a \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8.11}$$

Действительно, если $\mathbf{E}\widehat{\zeta} < \infty$ и $\{\widehat{\zeta}_n\}$ — последовательность независимых копий $\widehat{\zeta}$, где $\widehat{\zeta}_n$ соответствует n-му циклу, то при любом $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\widehat{\zeta}_n > \varepsilon n) \leqslant \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\widehat{\zeta} > t)dt = \mathbf{E}\widehat{\zeta} < \infty.$$

Отсюда и из леммы Бореля–Кантелли следует, что с вероятностью 1 наступает лишь конечное число событий $A_n = \{\widehat{\zeta}_n/n > \varepsilon\}$, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\widehat{\zeta}_n > \varepsilon n) < \infty$. Это значит, что

$$\frac{\widehat{\zeta}_n}{n} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8.12}$$

Далее, траектория $\{\mathrm{X}_n\}$ отличается от $\big\{Z(n)\big\}$ на полуинтервале $(T_{n-1}, T_n]$ не более, чем на величину $\widehat{\zeta}_n$. Поэтому в силу (1.8.12) из усиленного закона больших чисел для $Z(n)$ вытекает (1.8.11).

Теорема 1.8.4. *Если* $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$, *то справедлива центральная предельная теорема для* X_n*:*

$$\frac{\mathrm{X}_n - an}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathbf{\Phi} \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1.3.2, так как в (1.8.9) $\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \underset{p}{\to} 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.8.5. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1.8.4 $\mathbf{E}\widehat{\zeta}^2 < \infty$, *то для последовательности процессов*

$$\frac{\mathrm{X}_{nt} - ant}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1], \tag{1.8.13}$$

справедлив принцип инвариантности.

Действительно, если $\mathbf{E}\widehat{\zeta}^2 < \infty$, то при любых $b > \frac{1}{a_\tau}$, $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\big(\eta(n) > bn\big) \to 0,$$
$$\mathbf{P}\big(\max_{k \leqslant bn} \widehat{\zeta}_k > \varepsilon\sqrt{n}\big) \leqslant bno\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n}\right) = o(1) \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\rho_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{X}_{[nt]}, Z(nt)\big) \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8.14}$$

Отсюда и из теоремы 1.5.2 вытекает принцип инвариантности для процессов (1.8.13).

Теорема 1.8.6. *При выполнении условий теоремы* 1.8.5 *справедлив закон повторного логарифма для последовательности* $\{\mathrm{X}_n\}$*: с вероятностью* 1

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{X}_n - an}{L(n)} \to 1,$$
$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{X}_n - an}{L(n)} = -1,$$

где $L(n) = \sigma\sqrt{2n \ln\ln n}$ *при* $n \geqslant 3$.

Это утверждение следует из теоремы 1.3.3 и того, что

$$\frac{\widehat{\zeta}_n}{\sqrt{n}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Последнее утверждение вытекает из леммы 1.1.4.

Для МАП справедлив также аналог теоремы 1.7.1 о распределении времени первого прохождения траекторией $\{\mathrm{X}_n\}$ удаленной произвольной границы $g_x(n)$. Мы будем рассматривать границы $g_x(t) = g_x(n)$ (время t для МАП дискретно) того же вида, что в п. 1.7.2 (см. (1.7.4)–(1.7.7)). Изучается асимптотика времени первого прохождения

$$\eta_g := \min\big\{n :\, \mathrm{X}_n \geqslant g_x(n)\big\}$$

(ср. с (1.7.1)). Пусть

$$n_g := \min\big\{n \geqslant 1 :\, an \geqslant g_x(n)\big\}.$$

Теорема 1.8.7. *Пусть* $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma < \infty$, $\mathbf{E}\widehat{\zeta}^2 < \infty$, *функция* $g_x(n)$ *такова, что* $n_g \to \infty$ *при* $x \to \infty$, *и выполнены условия* $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ *из* § 1.7. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - n_g}{\sigma\sqrt{t_g}} < v\right) \to \Phi\big((a-b)v\big). \tag{1.8.15}$$

Действительно, пусть η_g^Z — время первого прохождения границы $g_x(n)$ ОПВ $Z(n)$. Тогда, очевидно, $\eta_g \leqslant \eta_g^Z$. Далее, при $n = 2\,t_g$ имеем $\mathbf{P}(\eta_g > n) \to 0$ при $x \to \infty$ и в силу (1.8.14)

$$\rho_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{X}_{[nt]}, Z([nt])\big) = o_p(\sqrt{t_g}) \quad \text{при} \quad t \in [0,1], \quad n \to \infty. \tag{1.8.16}$$

Так как граница $g_x(n)$ определена в условиях $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ с точностью до $o(\sqrt{t_g})$ (см. (1.7.5)), то при выполнении (1.8.16) задачи о времени первого прохождения таких границ для процессов $\mathrm{X}_{[nt]}$ и $Z\big([nt]\big)$ неразличимы и, стало быть, из теоремы 1.7.1 вытекает утверждение теоремы 1.8.7.

Все эти утверждения распространяются и на «неоднородные процессы» при каждом фиксированном $\mathrm{x}_0 \neq \mathrm{e}_0$.

Замечание 1.8.1. В теоремах 1.8.3, 1.8.5, 1.8.6 использовались условия на моменты случайной величины $\widehat{\zeta}$, определенной в (1.8.10). Отметим, что (a) выполнение этих условий не вытекает из выполнения аналогичных условий на ζ и (b) эти условия существенны, т.е. при их нарушении соответствующие утверждения, вообще говоря, не верны. Проиллюстрируем это следующим примером.

Рассмотрим сначала конечную эргодическую цепь Маркова $\{\mathrm{x}_n\}$ с состояниями $0, 1, \ldots, N$, такую, что $\mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0 = 0$, $P_N(0) = 1$, и зададим случайные величины $\xi(0) = 0$, $\big|\xi(j)\big| < c$ при $j \leqslant N$, так что вектор (τ, ζ) удовлетворяет условию Крамера. Затем добавим состояния $N+1, N+2, \ldots$ и на основе цепи $\{\mathrm{x}_n\}$ построим новую цепь $\{\mathrm{x}_n^*\}$, заменив вероятность $P_N(0) = 1$ на $P_N(0) = 0$ и положив при $k = 1, 2, \ldots$

$$P_N(N + 2k - 1) = \frac{c}{k^2}, \quad P_{N+2k-1}(N + 2k) = 1, \quad P_{N+2k}(0) = 1.$$

Далее, на основе x_n^* построим цепь $\{\mathrm{x}_n^*, \xi_k^*\}$, положив

$$\xi^*(N + 2k - 1) = k^s, \quad \xi^*(N + 2k) = -k^s \text{ при } k > 0,$$
$$\xi^*(k) = \xi(k) \text{ при } k \leqslant N.$$

Тогда при очевидных соглашениях относительно обозначений (мы снабжаем верхним индексом «$*$» все обозначения, соответствующие новой цепи $\{\mathrm{x}_n^*, \xi_n^*\}$)

(a) $\tau^* = \tau + 2$, $\zeta^* = \zeta$, $\mathrm{X}^*_{\tau^*-2} = \zeta + \zeta^{**}$, где ζ^{**} не зависит от ζ, $\mathbf{P}(\zeta^{**} = k^s) = ck^{-2}$, $\mathbf{E}|\zeta^{**}| = \infty$ при $s \geqslant 1$, $\mathbf{E}\widehat{\zeta}^* = \infty$ при $\mathbf{E}|\zeta^*| = \mathbf{E}|\zeta| < \infty$;

(b) очевидно, что усиленный закон больших чисел для $\{\mathrm{X}_n^*\}$ не верен, так как с вероятностью 1 наступает бесконечно много событий

$\{\widehat{\zeta}^* > n\}$. Последовательность $\{\mathrm{X}_n^*\}$ не будет удовлетворять также закону повторного логарифма, принципу инвариантности и соотношению (1.8.15), хотя вектор (τ^*, ζ^*) удовлетворяет условию [**C**]. Это вытекает из следующих соотношений. На каждом цикле вероятность того, что максимальное значение x_j^* будет больше, чем $n^{1/3}$, сравнима с $n^{-2/3}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\Big(\max_{k\leqslant n} \mathrm{x}_k^* > n^{1/3}\Big) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Это значит, что при $s = 4$ хотя бы один скачок сумм X_k^*, $k \leqslant n$ с вероятностью, близкой к 1, будет превышать $n^{4/3}$, а при подходящем $q > 0$

$$\mathbf{P}\Big(\max_{k\leqslant n}(\mathrm{X}_k^* - a^* k) > q n^{4/3}\Big) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Ясно, что это делает невозможным выполнение любого из названных выше утверждений для процесса $\{\mathrm{X}_n^*\}$.

Глава 2

Интегро-локальные предельные теоремы в области нормальных уклонений

В этой главе мы будем предполагать, что $\mathbf{E}|\boldsymbol{\xi}|^2 < \infty$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$, и установим более точные, чем центральная предельная теорема, утверждения об асимптотике распределения ненормированных ОПВ $Z(t)$ и $Y(t)$. Эти утверждения касаются вероятностей попадания $Z(t)$ и $Y(t)$ в интервалы малой длины в области нормальных уклонений и называются интегро-локальными теоремами. В главе 5 будут установлены интегро-локальные теоремы в более широкой области, включающей в себя зону больших уклонений. С их помощью в главе 6 мы будем изучать точную асимптотику вероятностей больших уклонений в граничных задачах для ОПВ.

В § 2.1 получены интегро-локальные теоремы в однородном случае для независимых и линейно зависимых τ и ζ при минимальных условиях конечности вторых моментов. В § 2.2 установлены уточнения интегро-локальных теорем Стоуна для многомерных случайных блужданий. С их помощью в § 2.3 удается получить интегро-локальные теоремы для ОПВ в общем случае, но при дополнительных моментных условиях. В § 2.4 полученные результаты распространяются на неоднородный случай. Приложения полученных результатов к марковским аддитивным процессам рассматриваются в § 2.5.

Локальные теоремы для ОПВ в случае арифметических $\boldsymbol{\xi}$ могут быть установлены аналогичным образом при многих упрощениях в формулировках и доказательствах.

Результаты § 2.1 для независимых τ и ζ в их упрощенном виде можно найти в [10, теорема 10.6.3]. Случай линейно зависимых τ и ζ и общий случай изучались в [19].

§ 2.1 Интегро-локальные предельные теоремы в случае независимых или линейно зависимых τ и ζ

Линейная зависимость τ и ζ означает, что τ и ζ связаны соотношением

$$\zeta = h\tau + \omega, \qquad h = \mathrm{const},$$

где τ и ω независимы (τ и ζ независимы, если $c = 0$). Как будет показано ниже, интегро-локальные предельные теоремы для однородных ОПВ $Z(t)$ и $Y(t)$ в случае независимых или линейно зависимых τ и ζ можно получить с помощью интегро-локальной теоремы для однородных *случайных блужданий.* Так как в дальнейшем (см., например, § 2.2) нам понадобятся аналогичные теоремы для случайных блужданий в двумерном случае, то мы сначала приведем здесь формулировку интегро-локальной теоремы Стоуна для случайных блужданий в общем многомерном случае.

2.1.1 Интегро-локальная теорема Стоуна для случайных блужданий

Пусть $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные векторы в $\mathbb{R}^d$,

$$\boldsymbol{a} := \mathbf{E}\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^2 := \mathbf{E}\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\xi}$$

есть матрица вторых моментов (верхний индекс $*$ означает транспонирование, так что $\boldsymbol{\xi}^*$ есть вектор-столбец),

$$\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_k, \qquad n \geqslant 1$$

(векторы мы, как правило, будем обозначать полужирными буквами).

Применительно к рассматриваемым задачам, связанным с ОПВ, вектор $\boldsymbol{\xi}$ часто будет равен $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$, так что в этом случае $\boldsymbol{a} = (a_\tau, a_\xi)$, $\mathbf{S}_n = (T_n, Z_n)$. Будут использоваться и одномерные версии интегро-локальной теоремы.

Мы будем предполагать, что распределение $\boldsymbol{\xi}$ не вырождено, т.е. матрица $\boldsymbol{\sigma}^2$ положительно определена и что подходящим линейным преобразованием (включая перенумерацию координат и сдвиг начала координат) это распределение редуцировано к следующему виду: первые $l \leqslant d$ координат $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(l)}$ вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(d)})$ имеют нерешетчатое распределение, т.е. характеристическая функция

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{E}e^{i\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi}\rangle}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d),$$

($\langle\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}\rangle$ — скалярное произведение $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\xi}$) в случае $l \geqslant 1$ обладает свойством

$$\bigl|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\bigr| < 1 \quad \text{при} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \neq 0.$$

Остальные $d-l$ координат $\xi_{(l+1)}, \ldots, \xi_{(d)}$ арифметичны, т.е. каждая координата целочисленна, общий наибольший делитель разностей ее возможных значений равен 1.

Пусть далее $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и при $\Delta > 0$

$$\boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^{l} [x_j, x_j + \Delta) \prod_{j=l+1}^{d} [x_j, x_j + 1)$$

есть прямое произведение в $\mathbb{R}^d$ полуоткрытых интервалов.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.1. (Стоун; [116], [117]) *Пусть матрица $\boldsymbol{\sigma}^2$ — положительно определена. Тогда при $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\frac{\mathbf{P}\bigl(\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\bigr)}{\Delta^l} = n^{-d/2}\phi_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}n}{\sqrt{n}}\right) + o(n^{-d/2}), \tag{2.1.1}$$

где $\phi_{\boldsymbol{\sigma}}$ есть плотность нормального распределения с параметрами $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^2)$:

$$\phi_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\sigma}|(2\pi)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma}^{-2}\boldsymbol{v}^*}{2}\right\}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d,$$

$\boldsymbol{\sigma}^{-2}$ — матрица, обратная к $\boldsymbol{\sigma}^2$, $|\boldsymbol{\sigma}|^2$ — определитель матрицы $\boldsymbol{\sigma}^2$, остаточный член $o(n^{-d/2})$ равномерен по всем $\boldsymbol{x}$ и по Δ из любого компактного множества, отделенного от нуля.

В одномерном случае $d = 1$ доказательство теоремы 2.1.1 можно найти в учебной литературе (см. [10, § 8.7]).

Теорему 2.1.1 естественно называть *интегро-локальной*, так как она содержит элементы как *интегральных* теорем (изучаются вероятности попадания $\mathbf{S}_n$ *в множество*), так и *локальных* теорем (эти множества *малы*). Такое название позволяет отличать интегро-локальные теоремы вида (2.1.1) от классических локальных теорем для распределений $\mathbf{S}_n$, в которых предполагается существование плотностей и речь идет об асимптотике плотности суммы $\mathbf{S}_n$, и от классических интегральных теорем, которые описывают асимптотику вероятности попадания $\mathbf{S}_n$ в «крупные» множества и которые являются утверждениями значительно более грубыми, чем теорема 2.1.1. Интегральные теоремы можно получить как следствия интегро-локальных теорем, но не наоборот.

Если $j > l$, то координата x_j целочисленна. Если $l = 0$ (все компоненты $\xi_{(j)}$ арифметичны), то можно считать $\boldsymbol{x}$ вектором с целочисленными координатами и левую часть в (2.1.1) заменить на $\mathbf{P}(\mathbf{S}_n = \boldsymbol{x})$. В этом случае интегро-локальная теорема превращается в локальную.

Интегро-локальная теорема Стоуна является наиболее совершенной и точной версией классической центральной предельной теоремы, не предполагающей никаких дополнительных условий, кроме существования дисперсий. Она лишь различает решетчатый и нерешетчатый случаи. Как уже отмечалось, в решетчатом (арифметическом) случае она превращается в локальную теорему. В нерешетчатом случае интегро-локальная теорема Стоуна дает по существу ту же точность, что и локальные предельные теоремы, когда существует плотность $\boldsymbol{\xi}$, но она ничего не предполагает относительно существования плотностей.

Поскольку в нерешетчатом случае Δ может принимать сколь угодно малые значения, то левую часть в (2.1.1) можно назвать «*предплотностью*» распределения $\mathbf{S}_n$. В правой части (2.1.1) стоит (с точностью до $o(n^{-d/2})$) плотность нормального распределения с параметрами $(0, n\boldsymbol{\sigma}^2)$.

Интегро-локальные теоремы являются весьма эффективным и часто наиболее адекватным техническим средством при изучении многих проблем теории вероятностей. Они используются в качестве ключевого элемента, например, при построении наиболее адекватной существу дела теории больших уклонений сумм случайных векторов (см., например, [10, гл. 9]); при установлении интегро-локальных теорем для обобщенных процессов восстановления (см. ниже гл. 5 и [10, гл. 10]); при доказательстве утверждений о времени первого прохождения случайным блужданием произвольной удаленной криволинейной границы (см. гл. 6); и в ряде других задач. Поэтому уточнение и обобщение интегро-локальных теорем представляет, на наш взгляд, несомненный интерес. Уточнение теоремы 2.1.1, полученное в § 2.2, позволит установить интегро-локальную теорему для ОПВ в общем случае, когда τ и ζ зависимы произвольным образом.

В одномерном *арифметическом* случае утверждение (2.1.1) было получено Гнеденко [43]; в многомерном — Рвачевой [112]. В арифметическом случае локальные теоремы для *разнораспределенных* случайных величин и векторов рассматривались в [41, 49, 61, 63, 65].

При выполнении условий Крамера (моментного и на характеристическую функцию) в [28] для случайных блужданий найдены асимптотические разложения в интегро-локальных теоремах по степеням $1/\sqrt{n}$ и неограниченно убывающая нижняя граница для возможных значений Δ. В [11] были получены интегро-локальные теоремы для разнораспределенных случайных величин в схеме серий, включая область больших уклонений.

2.1.2 Интегро-локальные теоремы для однородных ОПВ в случае независимых или линейно зависимых $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\zeta}$

В этом разделе мы докажем интегро-локальную теорему в случае, когда ζ и τ связаны соотношением

$$\zeta = h\tau + \omega, \quad h = \mathrm{const}, \tag{2.1.2}$$

где τ и ω независимы. В этом случае

$$\xi = \zeta - a\tau = \omega - \frac{a_\omega}{a_\tau}\,\tau, \qquad a = \frac{a_\omega}{a_\tau} + h, \qquad \sigma^2 = \frac{a_\tau^2\sigma_\omega^2 + a_\omega^2\sigma_\tau^2}{a_\tau^3},$$

где $a_\omega := \mathbf{E}\omega$, $\sigma_\omega^2 = \mathbf{D}\omega$. Если $h = 0$, то (2.1.2) будет означать независимость ζ и τ.

Пусть

$$\Delta[x) = [x, x + \Delta)$$

есть полуоткрытый интервал длиной $\Delta > 0$, $\chi = \chi_\infty$ есть величина перескока случайным блужданием $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ через бесконечно удаленный барьер, так что

$$\mathbf{P}(\chi \geqslant t) = \frac{1}{a_\tau}\int_t^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant u)du.$$

Отметим еще раз, что если не оговорено противное, то последовательность $\{\tau_j, \zeta_j\}_{j=1}^\infty$ в §§ 2.1–2.3 будем считать *однородной*. Целью этого раздела является доказательство следующей интегро-локальной теоремы для однородных ОПВ.

Теорема 2.1.2. I. *Пусть выполнено* (2.1.2), $a_\omega \neq 0$, $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma_\omega < \infty$ *и случайные величины* τ *и* ω *нерешетчаты. Тогда при* $t \to \infty$

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathbf{P}\Big(Y(t) - at \in \Delta[x),\ \gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v\Big) = \\ = \frac{\mathbf{P}(\chi \geqslant u + v)}{\sqrt{t}}\,\phi_\sigma\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \tag{2.1.3}$$

где остаточный член $o(1/\sqrt{t})$ равномерен по всем x и по Δ из любого фиксированного компактного множества, отделенного от нуля.

Если $a_\omega = 0$, $\sigma_\omega < \infty$ и распределение τ при некотором $r \in (3/2, 2)$ и всех $t > 1$ удовлетворяет условию:

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) \leqslant c_1 t^{-r}, \qquad c_1 = \text{const}, \tag{2.1.4}$$

то $\xi = \omega$ и утверждение (2.1.3) *сохраняется при $\sigma^2 = \frac{\sigma_\omega^2}{a_\tau}$.*

II. *Если случайная величина τ арифметична, а величина ω нерешетчата, то утверждение* I *сохраняется, но в нем t, $\gamma(t)$, $\chi(t)$, u, v целочисленны и следует полагать*

$$\mathbf{P}(\chi \geqslant k) = \frac{1}{a_\tau} \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant j).$$

III. *Если случайная величина ω арифметична, то утверждения* I, II *сохраняются при целых $\Delta \geqslant 1$.*

IV. *Утверждения* I—III *полностью сохранятся, если в них процесс $Y(t)$ заменить на процесс $Z(t)$.*

Случай, когда вместо $Y(t)$ рассматривается процесс $Y(t)+qt$, не связан с дополнительными проблемами, так как центрированный процесс

$$Y(t) + qt - (a+q)t = Y(t) - at$$

имеет тот же вид, что и $Y(t) - at$.

Из теоремы 2.1.2 видно, что случайные величины $Y(t) - at$ с одной стороны и величины $\gamma(t)$ и $\chi(t)$ — с другой, асимптотически независимы.

В случае независимых τ и ζ утверждение теоремы 2.1.2 при $u = v = 0$ получено в [10] (теорема 10.6.3). В случае (2.1.2) оно установлено в [19].

В доказательстве теоремы 2.1.2, приведенном ниже, мы будем использовать одномерные версии теоремы 2.1.1, когда либо $\boldsymbol{\xi} = \tau$ (тогда $\boldsymbol{a} = a_\tau$, $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_\tau^2$), либо $\boldsymbol{\xi} = \omega$ (тогда $\boldsymbol{a} = a_\omega$, $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_\omega^2$).

Доказательство теоремы 2.1.2. I. Пусть ω и τ нерешетчаты. Положим

$$B_t = B_t(u, v) := \bigl\{\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \geqslant v\bigr\}. \tag{2.1.5}$$

Воспользуемся соотношениями $t = T_{\eta(t)} - \chi(t)$,

$$Y(t) - at = S_{\eta(t)} + a\chi(t),$$

где
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \qquad \xi_j = \zeta_j - a\tau_j,$$
и найдем асимптотическое представление для вероятности
$$P_t := \mathbf{P}\big(Y(t) - at \in \Delta[x), B_t^\delta\big) = \mathbf{P}\big(S_{\eta(t)} + a\chi(t) \in \Delta[x), B_t^\delta\big) \tag{2.1.6}$$
при
$$B_t^\delta := B_t^\delta(u,v) = \big\{\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \in \delta[v)\big\}, \qquad \delta[v) = [v, v+\delta).$$
Обозначим
$$n_\pm = \left[\frac{t}{a_\tau} \pm Nt^{3/4}\right], \tag{2.1.7}$$
где $N = N_t \to \infty$ (достаточно медленно) при $t \to \infty$. Имеем
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\eta(t) \leqslant n_-\big) = \mathbf{P}(T_{n_-} > t) = \\ = \mathbf{P}(T_{n_-} - a_\tau n_- > a_\tau N t^{3/4}\big(1 + o(1)\big) \leqslant \\ \leqslant \frac{\sigma_\tau^2 n_-}{a_\tau^2 N^2 t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned} \tag{2.1.8}$$
Аналогично устанавливается, что
$$\mathbf{P}\big(\eta(t) > n_+\big) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{2.1.9}$$
Поэтому
$$\begin{aligned}P_t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \sum_{n=n_-}^{n_+} \mathbf{P}\big(S_n \in \Delta[x), B_t^\delta, \eta(t) = n\big) = \\ = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \sum_{n=n_-}^{n_+} \mathbf{P}\big(\eta(t) = n, B_t^\delta\big)\mathbf{P}\big(S_n \in \Delta[x) \,|\, \eta(t) = n, B_t^\delta\big)\end{aligned} \tag{2.1.10}$$
Дальнейшие рассмотрения разобьем на 4 этапа.

1) Найдем сначала асимптотику первого множителя под знаком суммы в правой части (2.1.10) (с заменой n на $n+1$ для упрощения записи, что на рассматриваемую асимптотику не влияет):
$$\mathbf{P}\big(\eta(t) = n+1, B_t^\delta\big) = \int_0^{t-u} \mathbf{P}(T_n \in dy)\mathbf{P}\big(\tau \in t - y + \delta[v)\big). \tag{2.1.11}$$

Пусть $\sigma_\tau < \infty$. Тогда, пользуясь интегро-локальной теоремой 2.1.1 для $\mathbf{S}_n = T_n$, совершенно аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 10.5.8 в [10], находим в силу (2.1.11)

$$\mathbf{P}\big(\eta(t) = n+1, B_t^\delta\big) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\phi_{\sigma_\tau}\left(\frac{t - a_\tau n}{\sqrt{n}}\right) I_{u+v}^{u+v+\delta} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad (2.1.12)$$

где

$$I_{u+v}^{u+v+\delta} = \int\limits_{u+v}^{u+v+\delta} \mathbf{P}(\tau \geqslant z)dz.$$

(В теореме 10.5.8 в [10] соотношение (2.1.12) было доказано при отсутствии события B_t^δ под знаком вероятности в (2.1.12); присутствие этого события существа выкладок не меняет.)

Очевидно, что точно такое же асимптотическое представление будет иметь место для $\mathbf{P}\big(\eta(t) = n, B_t^\delta\big)$. Полагая

$$n_t = \frac{t}{a_\tau}, \qquad k = n - n_t, \qquad (2.1.13)$$

и замечая, что $n \sim n_t$ при $n \in [n_-, n_+]$, $t \to \infty$, находим

$$\mathbf{P}\big(\eta(t) = n, B_t^\delta\big) = \frac{1}{\sqrt{n_t}}\,\phi_{\sigma_\tau}\left(\frac{k a_\tau}{\sqrt{n_t}}\right) I_{u+v}^{u+v+\delta} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\right). \qquad (2.1.14)$$

2) Найдем теперь асимптотику второго сомножителя под знаком суммы в правой части (2.1.10). Положим

$$\Omega_n = \sum_{j=1}^{n} \omega_j.$$

Тогда

$$S_n = \Omega_n + bT_n, \quad \text{где} \quad b = h - a, \quad a_\omega + b a_\tau = 0,$$

и на множестве $\big\{\eta(t) = n\big\} \cap B_t^\delta$ выполняется $T_n \in t + \delta[v)$,

$$\big\{S_n \in \Delta[x)\big\} = \big\{\Omega_n - a_\omega n \in \Delta[x) - a_\omega(n_t + k) - b(a_\tau n_t + \chi(t))\big\}.$$

Так как $b a_\tau = -a_\omega$, то на множестве $\big\{\eta(t) = n\big\} \cap B_t^\delta$ при достаточно малом δ (таком, что $|b|\delta < \Delta$)

$$\big\{S_n \in \Delta[x)\big\} \subset \big\{\Omega_n - a_\omega n \in [x - b\delta, x + \Delta) - bv - a_\omega k\big\} \qquad (2.1.15)$$

и аналогично

$$\big\{S_n \in \Delta[x)\big\} \supset \big\{\Omega_n - a_\omega n \in [x, x + \Delta - b\delta) - bv - a_\omega k\big\}. \qquad (2.1.16)$$

Пусть для определенности $b \geqslant 0$. Длины полуинтервалов $[x - b\delta, x + \Delta)$ и $[x, x + \Delta - b\delta)$ в (2.1.15), (2.1.16) равны, соответственно, $\Delta + b\delta$ и $\Delta - b\delta$. Так как ω нерешетчаты, Ω_n не зависит от $\{T_k\}_1^\infty$, то в силу (2.1.15), (2.1.16), интегро-локальной теоремы для Ω_n и того, что $n \sim n_t$ при $n \in [n_-, n_+]$, имеем

$$\mathbf{P}\Big(S_n \in \Delta[x] \,|\, \eta(t) = n, B_t^\delta\Big) = \\ = \frac{\Delta + \rho_\delta}{\sqrt{n_t}}\, \phi_{\sigma_\omega}\bigg(\frac{x - a_\omega k}{\sqrt{n_t}}\bigg) + o\bigg(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\bigg), \tag{2.1.17}$$

где $|\rho_\delta| \leqslant b\delta$, остаточный член $o\Big(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\Big)$ равномерен по x (слагаемые $-bv$, $-b\delta$ в правых частях (2.1.15), (2.1.16), добавленные к x, не меняют асимптотику (2.1.17), и такими изменениями x в (2.1.17) можно пренебречь). По аналогичной причине n_t и числа k в (2.1.17) можно считать целыми, положив в (2.1.13) $n_t = \Big[\frac{t}{a_\tau}\Big]$.

Случай $b \leqslant 0$ рассматривается аналогично при $|\rho_\delta| < |b|\delta$.

3) Рассмотрим теперь сумму в правой части (2.1.10), которая определяет главную часть исследуемого значения P_t, определенного в (2.1.6). Обозначим через $Q_{n,1}, Q_{n,2}$ главные части асимптотик в (2.1.14) и (2.1.17), соответственно. Тогда в силу (2.1.10) и того, что

$$\sum_n \mathbf{P}\big(\eta(t) = n, B_t^\delta\big) \leqslant 1,$$

получим

$$P_t = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg) + \sum_{n=n_-}^{n_+} \mathbf{P}\big(\eta(t) = n, B_t^\delta\big) \bigg(Q_{n,2} + o\bigg(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\bigg)\bigg) = \\ = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg) + \sum_{n=n_-}^{n_+} \bigg(Q_{n,1} + o\bigg(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\bigg)\bigg) Q_{n,2} = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg) + \sum_{n=n_-}^{n_+} Q_{n,1} Q_{n,2}.$$

Последнее равенство справедливо, так как $\sum_{n=n_-}^{n_+} Q_{n,2}$ ограничена и, стало быть,

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} o\bigg(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\bigg) Q_{n,2} = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg).$$

Поэтому нам остается рассмотреть сумму (обозначим ее через Σ) произведений главных частей в (2.1.14) и (2.1.17):

$$\Sigma := \sum_{k=-[Nt^{3/4}]}^{[Nt^{3/4}]} \frac{(\Delta + \rho_\delta)}{\sigma_\tau \sigma_\omega 2\pi n_t}\, I_{u+v}^{u+v+\delta} \exp\bigg\{-\frac{k^2 a_\tau^2}{2\sigma_\tau^2 n_t} - \frac{(x - a_\omega k)^2}{2\sigma_\omega^2 n_t}\bigg\}. \tag{2.1.18}$$

Далее будем различать два случая: $a_\omega \neq 0$ и $a_\omega = 0$.

Если $a_\omega \neq 0$, то σ_τ конечно и Σ есть интегральная сумма, приближающая (с точностью до постоянного множителя) свертку в точке $\frac{x}{a_\omega}$ двух нормальных плотностей с параметрами $\left(0, \frac{n_t\sigma_\tau^2}{a_\tau^2}\right)$ и $\left(0, \frac{n_t\sigma_\omega^2}{a_\omega^2}\right)$. Дисперсия случайной величины, соответствующей этой свертке, равна

$$n_t\left(\frac{a_\omega^2\sigma_\tau^2 + a_\tau^2\sigma_\omega^2}{a_\tau^2 a_\omega^2}\right), \tag{2.1.19}$$

и мы можем выписать асимптотику Σ. Точнее, положим

$$m_\tau^2 = \frac{\sigma_\tau^2 n_t}{a_\tau^2}, \qquad m_\omega^2 = \frac{\sigma_\omega^2 n_t}{a_\omega^2}.$$

Тогда при $t \to \infty$ сумма в (2.1.18) равна

$$\Sigma = \frac{(\Delta + \rho_\delta) I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau a_\omega} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{m_\tau}(y)\phi_{m_\omega}\left(\frac{x}{a_\omega} - y\right)dy\big(1 + o(1)\big), \tag{2.1.20}$$

где интеграл в правой части равен

$$\phi_m\left(\frac{x}{a_\omega}\right) = a_\omega \phi_{a_\omega m}(x), \tag{2.1.21}$$

при этом

$$a_\omega^2 m^2 = a_\omega^2(m_\tau^2 + m_\omega^2) = \frac{(a_\omega^2\sigma_\tau^2 + a_\tau^2\sigma_\omega^2)n_t}{a_\tau^2}.$$

В нашем случае $\xi = \zeta - a\tau = \omega + b\tau$, $b = -\frac{a_\omega}{a_\tau}$,

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{E}(\omega + b\tau)^2 = \sigma_\omega^2 + \frac{a_\omega^2\sigma_\tau^2}{a_\tau^2} = \frac{a_\tau^2\sigma_\omega^2 + a_\omega^2\sigma_\tau^2}{a_\tau^2} = \frac{a_\omega^2 m^2}{n_t}$$

и в (2.1.21) имеем

$$\phi_m\left(\frac{x}{a_\omega}\right) = a_\omega \phi_{\sigma_\xi\sqrt{n_t}}(x).$$

Так как

$$n_t = \frac{t}{a_\tau}, \qquad \frac{\sigma_\xi^2}{a_\tau} = \sigma^2,$$

то окончательно из (2.1.20) для суммы Σ в (2.1.18) получаем значение

$$\Sigma = \frac{(\Delta + \rho_\delta) I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau}\, \phi_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big(1 + o(1)\big). \tag{2.1.22}$$

Суммируя сказанное, мы получаем следующее промежуточное утверждение:

Если выполнено (2.1.2), *то при* $t \to \infty$ *и любых фиксированных* $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\big(Y(t) - at \in \Delta[x),\ \gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \in \delta[v)\big) = \\ = \frac{(\Delta + \rho_\delta) I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau \sqrt{t}}\, \phi_\sigma\!\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + o\!\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad (2.1.23)$$

равномерно по x *и всем* Δ *из любого фиксированного компакта, отделенного от нуля. Значение* $|\rho_\delta|$ *в* (2.1.23) *не превосходит* $|b|\delta$.

Отметим, что для доказательства (2.1.23) можно использовать и несколько иной подход — после доказательства существования асимптотически нормальной плотности в (2.1.20), (2.1.21) воспользоваться центральной предельной теоремой (см. § 1.4), с помощью которой определить параметры найденной плотности.

Если $a_\omega = 0$, то по условиям теоремы (см. (2.1.4)) нельзя, вообще говоря, пользоваться соотношением (2.1.18), так как в нем предполагается конечность σ_τ и асимптотическая нормальность T_n. При $a_\omega = 0$ вместо (2.1.7) положим

$$n_\pm = \left[\frac{t}{a_\tau} \pm t^s\right], \qquad s \in \left(\frac{3}{2r}, 1\right),$$

где r определено в (2.1.4). Тогда в силу следствия 3.1.1 в [26] вместо (2.1.8) будем иметь $1 - rs < -1/2$,

$$\mathbf{P}\big(\eta(t) \leqslant n_-\big) = \mathbf{P}\big(T_{n_-} - a_\tau n_- > a_\tau t^s + O(1)\big) \leqslant \\ \leqslant n_-(a_\tau t^s)^{-r} c_1\big(1 + o(1)\big) \sim c_1 a_\tau^{-1-r}\, t^{1-rs} = o\!\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Аналогично устанавливается (2.1.9).

Далее, в случае $a_\omega = 0$ в разделе 1) доказательства теоремы надо дополнительно заметить, что

$$\sum_{k=-[t^s]}^{[t^s]} \mathbf{P}\left(\eta(t) = \left[\frac{t}{a_\tau}\right] + k, B_t^\delta\right) = a_\tau^{-1} I_{u+v}^{u+v+\delta} + o(1). \qquad (2.1.24)$$

Раздел 2) остается без изменений. В разделе 3) доказательства мы приходим к оценке значения (ср. с (2.1.17))

$$\left[\frac{\Delta + \rho_\delta}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi n_t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\omega^2 n_t}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n_t}}\right)\right] \sum_{k=-[t^s]}^{[t^s]} \mathbf{P}\left(\eta(t) = \left[\frac{t}{a_\tau}\right] + k, B_t^\delta\right),$$

которая в силу (2.1.24) дает (ср. с (2.1.23))

$$\mathbf{P}\big(Y(t)-at\in\Delta[x),\ \gamma(t)\geqslant u,\ \chi(t)\in\delta[v)\big)= \\ =\frac{(\Delta+\rho_\delta)I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau\sqrt{n_t}}\,\phi_{\sigma_\omega}\bigg(\frac{x}{\sqrt{n_t}}\bigg)+o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg)= \\ =\frac{(\Delta+\rho_\delta)I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau\sqrt{t}}\,\phi_{\sigma}\bigg(\frac{x}{\sqrt{t}}\bigg)+o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg).$$

Мы получили то же асимптотическое представление, что и (2.1.23) при $\sigma^2=\frac{\sigma_\omega^2}{a_\tau}$.

4) Установим теперь соотношение (2.1.3). При фиксированном целом $K>0$ разобьем полуинтервал $[v,v+\delta)$ на малые полуинтервалы $[v_k,v_k+\delta/K)$ длиной δ/K, где $v_k=k\delta/K$, $k=0,1,\ldots,K$. Обозначим через $\rho_\delta^{(k)}$ поправочное слагаемое при Δ в (2.1.23), соответствующее полуинтервалу $[v_k,v_k+\delta/K)$ и заметим, что $|\rho_\delta^{(k)}|<|b|\delta/K$ при всех k. Суммируя по $k=0,\ldots,K$ обе части равенства (2.1.23) для новых полуинтервалов, получим, что равномерно по x (и Δ в соответствующей области)

$$\mathbf{P}\big(Y(t)-at\in\Delta[x),\ \gamma(t)\geqslant u,\ \chi(t)\in[v,v+\delta)\big)= \\ =\frac{(\Delta+\rho)I_{u+v}^{u+v+\delta}}{a_\tau\sqrt{t}}\,\phi_{\sigma}\bigg(\frac{x}{\sqrt{t}}\bigg)+o\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg), \tag{2.1.25}$$

где $|\rho|<|b|\delta/K$. Так как K в (2.1.25) произвольно, то для левой части в (2.1.25), не зависящей от K, получаем представление в виде правой части в (2.1.25), в которой множитель $(\Delta+\rho)$ заменен на $\big(1+o(1)\big)\Delta$ при $t\to\infty$.

Далее, так как в (2.1.25)

$$\big\{\chi(t)\in[v,v+\delta_1+\delta_2)\big\}= \\ =\big\{\chi(t)\in[v,v+\delta_1)\big\}\bigcup\big\{\chi(t)\in[v+\delta_1,v+\delta_1+\delta_2)\big\},$$

события в правой части этого соотношения не пересекаются и

$$I_{u+v}^{u+v+\delta_1}+I_{u+v+\delta_1}^{u+v+\delta_1+\delta_2}=I_{u+v}^{u+v+\delta_1+\delta_2},$$

то соотношение (2.1.25) сохранится при произвольном $\delta>0$. Поскольку

$$\frac{1}{a_\tau}\,I_{u+v}^{u+v+\delta}\to\frac{1}{a_\tau}\int_{u+v}^{\infty}\mathbf{P}(\tau\geqslant y)dy=\mathbf{P}(\chi\geqslant u+v)\quad \textit{при}\quad \delta\to\infty,$$

то мы в результате из (2.1.25) получаем (2.1.3).

II. Если величина τ арифметична, то доказательство теоремы лишь упростится. Вместо событий B_t^δ в (2.1.6) следует при целых u и v использовать событие

$$B_t^1 = B_t^1(u,v) = \big\{\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) = v\big\}$$

(соответствующее значению $\delta = 1$). При этом отпадает необходимость использовать вложения (2.1.15), (2.1.16), а функция I_{u+v}^{u+v+1} превращается в вероятность $\mathbf{P}(\tau \geqslant u+v)$. Отпадает необходимость и в ряде других рассмотрений, например, рассмотрений в разделе I, 4), связанных с использованием произвольно больших K.

III. Если случайная величина ω арифметична, то в (2.1.15), (2.1.16) следует использовать локальную теорему для Ω_n в арифметическом случае.

IV. Рассмотрим теперь процесс $Z(t) = Z_{\nu(t)}$. Так как

$$t = T_{\nu(t)} + \gamma(t),$$

то

$$Z(t) - at = Z_{\nu(t)} - aT_{\nu(t)} - a\gamma(t) = S_{\nu(t)} - a\gamma(t). \tag{2.1.26}$$

Аналогично (2.1.6) следует ввести в рассмотрение множества

$$^{\delta}B_t := \big\{\gamma(t) \in \delta[u), \chi(t) \geqslant v\big\} \tag{2.1.27}$$

и искать представление для

$$P^t = \mathbf{P}\big(Z(t) - at \in \Delta[x),\ {}^{\delta}B_t\big) = \\ = \mathbf{P}\big(S_{\nu(t)} - a\gamma(t) \in \Delta[x),\ {}^{\delta}B_t\big). \tag{2.1.28}$$

Дальнейшие рассмотрения повторяют, с точностью до небольших изменений, рассмотрения, проведенные в разделе I доказательства. Аналогично соотношению (2.1.11) будем иметь

$$\mathbf{P}\big(\nu(t) = n, {}^{\delta}B_t\big) = \int\limits_{t-u-\delta}^{t-u} \mathbf{P}(T_n \in dy)\mathbf{P}(\tau \geqslant t - y + v). \tag{2.1.29}$$

Если $a_\omega \neq 0$, то после использования для приближения интеграла в (2.1.29) интегро-локальной теоремы для T_n (при малых длинах полуинтервалов) мы получим для левой части (2.1.29) то же асимптотическое представление, что выписано в правой части (2.1.12).

Далее, на множестве ${}^{\delta}B_t$ слагаемое $-bv$ в правых частях соотношений (2.1.15), (2.1.16) следует заменить на bu. В результате для вероятности

$$\mathbf{P}\big(Z(t) - at \in \Delta[x), {}^{\delta}B_t\big) \tag{2.1.30}$$

мы получим то же промежуточное утверждение, что и в (2.1.23): *вероятность* (2.1.30) *имеет то же асимптотическое представление, что выписано в правой части* (2.1.23).

Если $a_\omega = 0$, то мы также аналогично предыдущему приходим к (2.1.23).

Дальнейшие рассуждения повторяют с точностью до очевидных изменений рассуждения в заключительной части раздела I доказательства. Теорема 2.1.2 доказана.

§ 2.2 Уточнение интегро-локальной теоремы Стоуна для случайных блужданий

Для доказательства в § 2.3 интегро-локальных теорем для ОПВ в случае произвольной зависимости τ и ζ нам понадобится уточнение интегро-локальной теоремы 2.1.1.

Вернемся к изложению п.2.1.1 и рассмотрим следующие дополнительные условия.

$[\mathbf{M}_{2+r}]$ — *при некотором* $r \in (0, 1]$ *существует* $\mathbf{E}|\boldsymbol{\xi}|^{2+r} < \infty$.

$[\mathbf{C}_\varphi]$ — *характеристическая функция* $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ *в подпространстве* $\mathbb{R}^l$ *переменных* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ $(\lambda_{l+1} = \cdots = \lambda_d = 0)$ *удовлетворяет условию Крамера:*

$$\varlimsup_{\substack{|\boldsymbol{\lambda}| \to \infty \\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l}} \big|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big| < 1.$$

Напомним, что условие $[\mathbf{C}_\varphi]$ всегда выполнено, если распределение подвектора $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(l)})$ имеет в $\mathbb{R}^l$ пространственную абсолютно непрерывную компоненту. (Тогда каждая из величин $\xi_{(j)}$, $j \leqslant l$, будет иметь абсолютно непрерывную компоненту, но не наоборот.) Напомним также, что применительно к задачам, связанным с ОПВ, которые будут рассматриваться в § 2.3, вектор $\boldsymbol{\xi}$ равен (τ, ζ), $\mathbf{S}_n = (T_n, Z_n)$.

Мы докажем следующее утверждение, уточняющее остаточный член $o(n^{-d/2})$ в (2.1.1) и расширяющее область значений $\boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})$. В этом разделе обозначим через $\boldsymbol{\Delta}$ набор положительных чисел $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_d)$, где $\Delta_j \geqslant 1$ целочисленны при $j > l$, и положим

$$\Pi = \prod_{j=1}^{d} \Delta_j, \qquad \underline{\Delta} = \min_{1 \leqslant j \leqslant d} \Delta_j, \qquad \overline{\Delta} = \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \Delta_j. \tag{2.2.1}$$

Введем в рассмотрение полуоткрытый параллелепипед

$$\boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} [x_j, x_j + \Delta_j). \tag{2.2.2}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.1 *и, кроме того, дополнительные условия* $[\mathbf{M}_{2+r}]$, $[\mathbf{C}_\varphi]$. *Тогда*

$$\frac{\mathbf{P}\big(\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big)}{\Pi} = \frac{1}{n^{d/2}}\, \phi_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}n}{\sqrt{n}}\right) + O(n^{-\frac{d+r}{2}}), \tag{2.2.3}$$

где остаточный член $O(n^{-\frac{d+r}{2}})$ *равномерен по* x *и по* $\boldsymbol{\Delta}$ *в области*

$$q^n \leqslant \underline{\Delta} \leqslant \overline{\Delta} \leqslant c n^{\frac{1-r}{2}} \tag{2.2.4}$$

при некотором $q < 1$ *и любом* $c = \mathrm{const}$.

Из доказательства теоремы будет видно, что остаточный член $O(n^{-\frac{d+r}{2}})$ равномерен также и по всем распределениям, для которых

$$\mathbf{E}|\xi|^{2+r} < c_1 < \infty, \qquad \sup_{|\boldsymbol{\lambda}|>1} \big|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big| < c_2 < 1,$$

а $\boldsymbol{\sigma}$ принадлежит компакту, отделенному от вырожденных значений.

Теорему 2.2.1 мы будем использовать при доказательстве интегро-локальной теоремы для ОПВ в § 2.3.

В условиях теоремы 2.2.1 в нерешетчатом случае $(l = d)$ мы имеем еще бо́льшие основания называть левую часть в (2.2.3) «предплотностью» $\mathbf{S}_n$, так как Δ_j могут экспоненциально убывать с ростом n (см. (2.2.4)).

Отметим также, что экспоненциальная нижняя граница убывания для $\boldsymbol{\Delta}$ в (2.2.4) «качественно» не улучшаема. На это указывает следующий пример. Пусть $d = 1$, $\boldsymbol{\xi} = \xi$ нерешетчата, удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1 и имеет атом в нуле, $\mathbf{P}(\xi = 0) = p > 0$, $a{=}\mathbf{E}\xi{=}0$. Тогда $\mathbf{S}_n$ также будет иметь атом в нуле, $\mathbf{P}(\mathbf{S}_n{=}0) \geqslant p^n$. Это значит, что левая часть в (2.2.3) при $\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{\Delta} = \Delta = p^n$ будет не меньше, чем 1, а правая будет равна $O(n^{-1/2})$, т.е. сходится к 0 при $n \to \infty$, так что утверждение (2.2.3) при $\Delta \leqslant p^n$ перестает быть верным. Таким образом, граница p^n

для Δ (также экспоненциально убывающая, как и q^n в теореме 2.2.1, $q > p$) определяет область значений Δ, в которой утверждение (2.2.3) не верно.

Доказательство теоремы 2.2.1. Рассмотрим сначала случай $l = d$, когда все координаты $\xi_{(j)}$ нерешетчаты. Не ограничивая общности можно считать, что $\boldsymbol{a} = 0$. Для того чтобы иметь возможность пользоваться удобной формулой обращения, воспользуемся «методом сглаживания» и рассмотрим наряду с $\mathbf{S}_n$ суммы

$$\widetilde{\mathbf{S}}_n = \mathbf{S}_n + \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\delta}},$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\delta}}$ не зависит от $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots\}$ и имеет равномерное распределение в параллелепипеде

$$[\boldsymbol{\delta}] = \prod_{j=1}^{d} [-\delta_j, 0],$$

где координаты $\delta_j \leqslant \Delta_j$ вектора $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$ будут выбраны позже. Характеристическая функция $\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})$ величины $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\delta}}$ имеет вид

$$\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{j=1}^{d} \frac{(1 - e^{-i\lambda_j \delta_j})}{i\lambda_j \delta_j}, \tag{2.2.5}$$

а характеристическая функция $\widetilde{\mathbf{S}}_n$ равна $\varphi^n(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})$.

Вероятность

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big) = \int\limits_{\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{\Delta}]} \mathbf{P}\big(\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{v}\big)$$

есть с точностью до множителя Π значение *плотности* в точке $\boldsymbol{x}$ свертки равномерного распределения на $[\boldsymbol{\Delta}]$ и распределения $\widetilde{\mathbf{S}}_n$. Характеристическая функция этой свертки равна произведению

$$\varphi^n(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\Delta}]}(\boldsymbol{\lambda})$$

и является интегрируемой в $\mathbb{R}^d$ функцией. Поэтому справедлива формула обращения

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big) = \\ = \frac{\Pi}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x} \rangle} \varphi^n(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\Delta}]}(\boldsymbol{\lambda})\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_d. \tag{2.2.6}$$

Разобьем интеграл в правой части (2.2.6) на три части $I(B_1)$, $I(B_2)$, $I(B_3)$, соответственно по областям

$$B_1 = \big\{|\boldsymbol{\lambda}| < \gamma_1 n^{-\rho}\big\}, \quad B_2 = \big\{\gamma_1 n^{-\rho} \leqslant |\boldsymbol{\lambda}| < \gamma\big\}, \\ B_3 = \big\{|\boldsymbol{\lambda}| \geqslant \gamma\big\} \tag{2.2.7}$$

при фиксированных $\gamma_1 > 0$, $\gamma > 0$, где значение $\rho \in (0, 1/2)$ будет выбрано позже.

В области $B_1 \cup B_2$ при достаточно малом γ воспользуемся разложением (напомним, что мы считаем, не ограничивая общности, $\boldsymbol{a} = 0$)

$$1 - \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\lambda}^*}{2} + O\big(|\boldsymbol{\lambda}|^{2+r}\big) \quad \text{\textit{при}} \quad |\boldsymbol{\lambda}| \to 0, \tag{2.2.8}$$

где остаточный член зависит только от значения $\mathbf{E}|\boldsymbol{\xi}|^{2+r}$ (см., например, [48], раздел 12.4).

Рассмотрим интеграл $I(B_1)$, в котором положим

$$\varphi_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{[\boldsymbol{\Delta}]}(\boldsymbol{\lambda}) =: \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

и сделаем замену переменных

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\sqrt{n}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}.$$

Получим

$$I(B_1) = n^{-d/2} \int\limits_{|\boldsymbol{u}| < \gamma_1 n^{1/2-\rho}} e^{-i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle} \varphi^n\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) du_1 \ldots du_d. \tag{2.2.9}$$

В силу (2.2.8)

$$n \ln \varphi\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) = n \ln\left[1 - \left(1 - \varphi\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] = \\ = -\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2} + n^{-r/2} O\big(|\boldsymbol{u}|^{2+r}\big). \tag{2.2.10}$$

При $\rho = \frac{1}{2+r}$ и $|\boldsymbol{u}| < \gamma_1 n^{1/2-\rho}$ имеем $-r/2 + (1/2 - \rho)(2 + r) = 0$,

$$n^{-r/2}|\boldsymbol{u}|^{2+r} \leqslant \gamma_1^{2+r},$$

и остаточный член в (2.2.10) выбором γ_1 может быть сделан сколь угодно малым. Поэтому

$$\varphi^n\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) = \Big[1 + n^{-r/2} O\big(|\boldsymbol{u}|^{2+r}\big)\Big] \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2}\right\} \tag{2.2.11}$$

и, кроме того, при $\delta_j \leqslant \Delta_j$,

$$\widehat{\varphi}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{j=1}^{d}\left(1 + O\left(\frac{|u_j|\Delta_j}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{|u_j|\delta_j}{\sqrt{n}}\right)\right) = \\ = 1 + \frac{|\boldsymbol{u}|\overline{\Delta}}{\sqrt{n}}\,O(1) \quad (2.2.12)$$

с равномерным остаточным членом $O(1)$. Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{u}|^b e^{-\frac{\boldsymbol{u\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2}} du_1 \ldots du_d < \infty \quad \textit{при любом} \quad b > 0,$$

то в силу (2.2.9), (2.2.11), (2.2.12)

$$I(B_1) = n^{-d/2} \int\limits_{|\boldsymbol{u}|<\gamma_1 n^{1/2-\rho}} e^{-i\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle - \frac{\boldsymbol{u\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2}} du_1 \ldots du_d + \\ + n^{-\frac{d+r}{2}} O(1) + n^{-d/2}\frac{\overline{\Delta}}{\sqrt{n}} O(1). \quad (2.2.13)$$

Поэтому если $\delta_j \leqslant \Delta_j$, $j = 1, \ldots, d$,

$$\overline{\Delta} \leqslant n^{\frac{1-r}{2}} \quad (2.2.14)$$

то оба равномерные остаточные члены в (2.2.13) можно объединить в один в виде $O(n^{-\frac{d+r}{2}})$.

Интеграл в правой части (2.2.13) по дополнительной области $\{|\boldsymbol{u}| \geqslant \gamma n^{1/2-\rho}\}$ есть

$$O\big(\exp\{-c_1 n^{1-2\rho}\}\big) \quad (2.2.15)$$

при некотором $c_1 > 0$. Поэтому представление (2.2.13) для $I(B_1)$ с остаточным членом $O(n^{-\frac{d+r}{2}})$ останется справедливым, если интеграл в (2.2.13) заменить на интеграл по всему пространству. Этот интеграл согласно формуле обращения для нормального распределения равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle - \frac{\boldsymbol{u\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2}} = \frac{(2\pi)^{d/2}}{|\boldsymbol{\sigma}|}\, \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{v\sigma}^{-2}\boldsymbol{v}^*}{2}\right\}.$$

В итоге мы получаем при $\delta_j \leqslant \Delta_j$, $\overline{\Delta} \leqslant n^{\frac{1-r}{2}}$, $n \to \infty$

$$I(B_1) = \frac{(2\pi)^{d/2} n^{-d/2}}{|\boldsymbol{\sigma}|} e^{-\frac{\boldsymbol{v\sigma}^{-2}\boldsymbol{v}^*}{2}} + O\big(n^{-\frac{d+r}{2}}\big) \quad (2.2.16)$$

равномерно по $\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим теперь интеграл $I(B_2)$. Значение $-\mathrm{Re}\big(1-\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big)$ в (2.2.8) выбором γ (см. (2.2.7)) может быть сделано при $-\gamma<|\boldsymbol{\lambda}|<\gamma$ меньше, чем $-\frac{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\lambda}^*}{3}$, а значение $\mathrm{Re}\big(n\ln\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big)$ (ср. с (2.2.10)) меньше, чем $-\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{4}$ (при той же замене $\boldsymbol{\lambda}=\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}$, что и в (2.2.10)). Поэтому

$$I(B_2)<n^{-d/2}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|\geqslant\gamma_1 n^{1/2-\rho}} e^{-\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{4}}du_1\dots du_d,$$

так что в соответствии со сказанным выше (см. (2.2.15))

$$I(B_2)=O\big(\exp\{-c_2n^{1-2\rho}\}\big)$$

при некотором $c_2\in(0,\infty)$ и всех достаточно больших n. Это означает, что равномерно по $\boldsymbol{x}$

$$I(B_2)=o\big(n^{-\frac{d+r}{2}}\big). \tag{2.2.17}$$

Остается оценить $I(B_3)$. В силу нерешетчатости $\boldsymbol{\xi}$ и условия $[\mathbf{C}_\varphi]$

$$q_\gamma:=\sup_{|\boldsymbol{\lambda}|>\gamma}\big|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big|<1.$$

Поэтому

$$I(B_3)\leqslant q_\gamma^n\int\limits_{|\boldsymbol{\lambda}|\geqslant\gamma}\big|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})\big|d\lambda_1\dots d\lambda_d, \tag{2.2.18}$$

где

$$\big|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})\big|\leqslant\frac{2^{2d}}{\prod_{j=1}^d|\lambda_j|^2\Delta_j\delta_j}, \tag{2.2.19}$$

и функция $\prod_{j=1}^d|\lambda_j|^{-2}$ интегрируема в области $|\boldsymbol{\lambda}|\geqslant\gamma$. Поэтому при $\delta_j=n^{-r/2}\Delta_j$

$$I(B_3)\leqslant\frac{c_3q_\gamma^n n^{\frac{rd}{2}}}{\underline{\Delta}^{2d}},\qquad c_3=\mathrm{const},$$

так что для

$$\underline{\Delta}^{2d}\geqslant q_\gamma^n n^{\frac{rd+d+r}{2}} \tag{2.2.20}$$

будем иметь

$$I(B_3)=O(n^{-\frac{d+r}{2}}). \tag{2.2.21}$$

Ясно, что всегда найдется $q\in(q_\gamma^{\frac{1}{2d}},1)$ такое, что при $\underline{\Delta}\geqslant q^n$ и всех достаточно больших n будет выполнено (2.2.20), (2.2.21).

Итак, сопоставляя (2.2.6), (2.2.16), (2.2.17), (2.2.21), мы получаем

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x}]\big) = \frac{\Pi}{(2\pi n)^{d/2}|\boldsymbol{\sigma}|}\, e^{-\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma}^{-2}\boldsymbol{v}^*}{2}} + \Pi O\big(n^{-\frac{d+r}{2}}\big) =$$

$$= \Pi\big[n^{-d/2}\phi_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{v}) + O(n^{-\frac{d+r}{2}})\big]. \qquad (2.2.22)$$

Но

$$\big\{\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}[\boldsymbol{x})\big\} \subset \big\{\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big\}, \qquad (2.2.23)$$

где $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}[\boldsymbol{x})$ есть параллелепипед

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}[\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^{d}[x_j, x_j + \Delta_j - \delta_j).$$

Поэтому при $\delta_j = n^{-r/2}\Delta_j$

$$\mathbf{P}\big(\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big) \geqslant \Pi\Big[n^{-d/2}(1 - n^{-r/2})^d\phi_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{v}) + O\big(n^{-\frac{d+r}{2}}\big)\Big]. \qquad (2.2.24)$$

Аналогично, если положить

$$\widetilde{\mathbf{S}}_n = \mathbf{S}_n - \boldsymbol{\theta}_\delta,$$

то

$$\big\{\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big\} = \big\{\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x}) - \theta_\delta\big\} \subset \big\{\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{\delta}}[\boldsymbol{x})\big\},$$

где

$$\boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{\delta}}[\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^{d}[x_j, x_j + \Delta_j + \delta_j)$$

и, стало быть,

$$\mathbf{P}\big(\mathbf{S}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x})\big) \leqslant \Pi\big[n^{-d/2}(1 + n^{-r/2})^d\phi_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{v})\big] + O\big(n^{-\frac{d+r}{2}}\big). \qquad (2.2.25)$$

Вместе с (2.2.24) это доказывает (2.2.3) при $l = d$.

Пусть теперь $l = 0$, т. е. все координаты $\xi_{(k)}$ арифметичны. В этом случае при $\Delta_j \equiv 1$ формула обращения для $\mathbf{S}_n$ при целочисленных x_k будет иметь вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{S}_n = \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbf{Z}^d} e^{-i\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}\rangle}\varphi^n(\boldsymbol{\lambda})d\lambda_1\ldots d\lambda_d,$$

где $\mathbf{Z}^d$ — куб в $\mathbb{R}^d$, определенный как прямое произведение отрезков

$$\mathbf{Z}^d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi \leqslant \lambda_j \leqslant \pi].$$

Здесь не требуется вводить операцию сглаживания и все рассмотрения упрощаются. Для простоты будем считать сначала, что $\boldsymbol{a} = 0$, хотя для арифметических $\boldsymbol{\xi}$ это является ограничением. Тогда сохраняются все выкладки первой части доказательства теоремы при том же разбиении области интегрирования $\mathbf{Z}^d$ на подобласти B_1, B_2, B_3, при этом под B_3 надо понимать пересечение

$$\{\boldsymbol{\lambda} : |\lambda| \geqslant \gamma\} \bigcap \mathbf{Z}^d,$$

для которого, как и прежде,

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in B_3} \big|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\big| =: q_\gamma < 1.$$

Если $\boldsymbol{a} \neq 0$, то после замены

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}n = \boldsymbol{v}\sqrt{n}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}} \tag{2.2.26}$$

вместо (2.2.9) будем иметь

$$I(B_1) = n^{-d/2} \int\limits_{|\boldsymbol{u}| < \gamma_1 n^{1/2-\rho}} e^{-i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + i\sqrt{n}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle} \varphi^n\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) du_1 \ldots du_d, \tag{2.2.27}$$

а вместо (2.2.8), (2.2.10), (2.2.11), соответственно,

$$\begin{gathered} 1 - \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = -i\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\lambda}\rangle - \frac{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\lambda}^*}{2} + O\big(|\boldsymbol{\lambda}|^{2+r}\big), \\ n \ln \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = -i\sqrt{n}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\rangle - \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2} + n^{-r/2} O\big(|\boldsymbol{u}|^{2+r}\big) \\ \varphi^n\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{n}}\right) = \Big[1 + n^{-r/2} O\big(|\boldsymbol{u}|^{2+r}\big)\Big] \exp\left\{-i\sqrt{n}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\rangle - \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{u}^*}{2}\right\}. \end{gathered} \tag{2.2.28}$$

Из (2.2.27) и (2.2.28) следует, что представление (2.2.13) для $I(B_1)$ сохранится при $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}n}{\sqrt{n}}$. Все остальные выкладки в доказательстве теоремы после внесения при необходимости очевидных изменений, связанных с заменой переменных (2.2.26), сохраняются.

Если $\Delta_j \geqslant 1$ целочисленны, то утверждение теоремы проще всего получить путем суммирования вероятностей $\mathbf{P}(\mathbf{S}_n = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, y_j целочисленны, $0 \leqslant y_j < \Delta_j$, $j = 1, \ldots, d$.

Нам осталось рассмотреть промежуточный случай $0 < l < d$. Здесь вновь следует воспользоваться сглаживанием распределения $\mathbf{S}_n$, но лишь по первым l координатам и для сглаженной суммы $\widetilde{\mathbf{S}}_n$ пользоваться формулой обращения

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{\mathbf{S}}_n \in \boldsymbol{\Delta}[\boldsymbol{x}]\big) = \\ = \frac{\Delta^l}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^l} \int\limits_{Z^{d-l}} e^{-i\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}\rangle} \varphi^n(\boldsymbol{\lambda}) \varphi^{(l)}_{[\boldsymbol{\Delta}]}(\boldsymbol{\lambda}) \varphi^{(l)}_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda}) d\lambda_1 \dots d\lambda_d, \qquad (2.2.29)$$

где $\varphi^{(l)}_{[\boldsymbol{\delta}]}(\boldsymbol{\lambda})$ — характеристическая функция равномерного распределения на параллелепипеде $\prod_{k=1}^l [-\delta_j \leqslant \lambda_j \leqslant 0]$.

Остальные рассуждения при выводе формулы (2.2.3), связанные с асимптотическим анализом подинтегральных функций в (2.2.29) в областях B_1–B_3, полностью сохраняются с точностью до очевидных и несущественных изменений. В частности, неравенство (2.2.19) останется справедливым, если в нем d заменить на l. Функция $\prod_{j=1}^l |\lambda_j|^{-2}$ будет интегрируема на бесконечности в $\mathbb{R}^l$, так что при $\delta_j = n^{-r/2}\Delta_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, выполняется

$$I(B_3) \leqslant \frac{c_3 q_\gamma^n n^{rl/2}}{\underline{\Delta}^{2l}}$$

и для

$$\underline{\Delta}^{2l} \geqslant q_\gamma^n n^{\frac{lr+d+r}{2}}$$

будет выполнено (2.2.21). Теорема 2.2.1 доказана.

§ 2.3 Интегро-локальные теоремы для обобщенных процессов восстановления в общем случае

Вернемся к интегро-локальным теоремам для ОПВ и рассмотрим теперь общий случай, когда совместное распределение τ и ζ произвольно. В этом случае интегро-локальные теоремы удается получить лишь при дополнительных моментных и структурных условиях. Правда, при этом удается уточнить остаточный член и получить более полные утверждения.

В этом разделе процессы $Z(t) = Z_{\nu(t)}$ и $Y(t) = Z_{\eta(t)}$, как и в § 2.1, предполагаются *однородными.*

Рассмотрим сначала процесс $Z(t)$. Обозначим через

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{E} e^{i(\lambda_1\tau + \lambda_2\zeta)}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2), \qquad \operatorname{Im}\lambda_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

характеристическую функцию вектора $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ и положим

$$\mathbf{B}_t(u, v, \mathbf{w}) := \bigl\{\gamma(t) \geqslant u,\, \chi(t) \geqslant v,\, \zeta(t) \in \mathbf{w}\bigr\},$$

где $\zeta(t) = \zeta_{\eta(t)}$, $\mathbf{w}$ есть произвольное измеримое множество из $\mathbb{R}$. Пусть, как и прежде, $a = a_\zeta/a_\tau$, $\sigma^2 = \sigma_\xi^2/a_\tau$, $\xi = \zeta - a\tau$.

Теорема 2.3.1. I. *Пусть вектор (τ, ζ) является нерешетчатым и удовлетворяет условиям $[\mathbf{M}_r]$ при $r \in (2, 3]$, $[\mathbf{C}_\varphi]$ теоремы 2.2.1 (т.е. выполнено условие Крамера на характеристическую функцию:*

$$\varlimsup_{|\boldsymbol{\lambda}|\to\infty} \bigl|\varphi(\boldsymbol{\lambda})\bigr| < 1) \tag{2.3.1}$$

и

$$\mathbf{E}\tau^r < \infty, \qquad \mathbf{E}|\zeta|^r < \infty, \qquad r \in (2, 3] \tag{2.3.2}$$

(*параметр r в теореме* 2.2.1 *и в* (2.3.2) *имеет разные значения*). *Тогда имеет место представление*

$$\mathbf{P}\bigl(Z(t) - at \in \Delta[x), \mathbf{B}_t(u, v, \mathbf{w})\bigr) = \\ = \frac{\Delta\, I_{u+v}(\mathbf{w})}{a_\tau\sqrt{t}}\, \phi_\sigma\!\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \bigl(p_t(\mathbf{w}) + \Delta I_{u+v}(\mathbf{w})\bigr) O(t^{-\beta}), \tag{2.3.3}$$

где $p_t(\mathbf{w})$ есть распределение, зависящее, вообще говоря, от t,

$$I_u(\mathbf{w}) := \int_u^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant y, \zeta \in \mathbf{w})dy,$$

$\beta = \frac{r(r-1)}{2(1+r)} > \frac{1}{2}$ *при* $r > 1 + \sqrt{2}$, *остаточный член $O(t^{-\beta})$ равномерен по всем x, $u \leqslant \overline{u}$ (при любом фиксированном $\overline{u} > 0$), по v, $\mathbf{w}$ и по Δ из интервала $(t^{1/2-\beta}, ct^{\frac{3-r}{2}})$ при любом $c = \mathrm{const} > 0$.*

II. *Если случайная величина τ арифметична, выполнены условие* (2.3.2) *и условие* (2.3.1) *на характеристическую функцию величины ζ, то представление* (2.3.3) *сохраняется при целых t, $\gamma(t)$, $\chi(t)$, u, v* (ср. с п.II теоремы 2.1.2).

III. *Если случайная величина ζ арифметична, то утверждения I, II сохраняют свою силу при целых $\Delta \geqslant 1$.*

Вопрос о том, будет ли в общем случае справедливо интегро-локальное представление вида (2.1.3) без дополнительных условий $[\mathbf{M}_r]$, $[\mathbf{C}_\varphi]$, остается открытым.

В § 2.5 нам понадобится следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2.3.1.

Следствие 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1 *при* $r \in (1+\sqrt{2}, 3)$, τ *— арифметическая случайная величина, значения* t *целочисленны. Тогда при любом фиксированном* l

$$\mathbf{P}\big(Z(t) - at \in \Delta[x) \,|\, \gamma(t) = l\big) = \frac{\Delta}{\sqrt{t}}\, \phi_\sigma\bigg(\frac{x}{\sqrt{t}}\bigg) + o(t^{-1/2})$$

равномерно по x *и по* Δ *из интервала* $(t^{-\varepsilon}, t^{\varepsilon})$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы 2.3.1. I. Положим для краткости $(u, v, \mathbf{w}) = W$, так что

$$\mathbf{B}_t(W) := \big\{\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v,\ \zeta(t) \in \mathbf{w}\big\}$$

и рассмотрим вероятность

$$P(t, \Delta, W) := \mathbf{P}\big(Z(t) - at \in \Delta[x), \mathbf{B}_t(W)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t, \Delta, W), \quad (2.3.4)$$

где

$$P_n(t, \Delta, W) := \mathbf{P}\big(\nu(t) = n,\ S_n + a\gamma(t) \in \Delta[x),\ \mathbf{B}_t(W)\big) \qquad (2.3.5)$$

(см. (2.1.26)).

Оценим сначала часть суммы в (2.3.4) по значениям n, лежащим вне области $[n_-, n_+]$, где

$$n_\pm := \bigg[\frac{t}{a_\tau} \pm t^h\bigg],$$

число $h \in (1/2, 1)$ мы выберем позже. Вероятность

$$P_n(t, \Delta, W) = \mathbf{P}\big(\eta(t) = n+1,\ S_n + a\gamma(t) \in \Delta[x),\ \mathbf{B}_t(W),\ \zeta(t) \in \mathbf{w}\big),$$

при каждых t и Δ есть мера относительно $\mathbf{w}$. Стало быть,

$$H_t(\mathbf{w}) := \sum_{n \notin [n_-, n_+]} P_n(t, \Delta, W)$$

также есть мера. Оценим $H_t(\mathbb{R})$. Так как $\mathbf{E}\tau^r < \infty$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|T_n - a_\tau n|^r \leqslant c n^{r/2}, \qquad c = \mathrm{const},\\
&\mathbf{P}\big(\eta(t) \leqslant n_-\big) = \mathbf{P}(T_{n_-} > t) \leqslant \mathbf{P}(T_{n_-} - a_\tau n_- > a_\tau t^h) \leqslant\\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{c n_-^{r/2}}{(a_\tau t^h)^r} = O(t^{r(\frac{1}{2} - h)}).
\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{P}\big(\eta(t) > n_+\big) = O\big(t^{r\left(\frac{1}{2}-h\right)}\big).$$

Отсюда следует, что равномерно по x, Δ, u, v, $\mathbf{w}$

$$H_t(\mathbb{R}) = O(t^{\frac{r}{2}-hr}), \quad P(t,\Delta,W) = p_t(\mathbf{w})O(t^{\frac{r}{2}-hr}) + \\ + \sum_{n=n_-}^{n_+} P_n(t,\Delta,W), \quad (2.3.6)$$

где $p_t(\mathbf{w}) := H_t(\mathbf{w})/H_t(\mathbb{R})$ есть распределение, $n \sim t/a_\tau$ при всех $n \in [n_-, n_+]$ и $t \to \infty$.

Основная часть доказательства теоремы состоит в отыскании асимптотики слагаемых $P_n(t,\Delta,W)$ при $n \in [n_-, n_+]$. Исследование этой асимптотики разобьем на несколько этапов.

1) Получим сначала оценки сверху и снизу для $P_n(t,\Delta,W)$. Обозначим

$$\delta[u) = [u, u+\delta), \quad {}^\delta\mathbf{B}_t = {}^\delta\mathbf{B}_t(W) = \big\{\gamma(t) \in \delta[u),\, \chi(t) \geqslant v, \zeta(t) \in \mathbf{w}\big\}, \\ u_k = u + \delta k, \quad k = 0,1,\ldots,K = \left[\frac{t-u}{\delta}\right].$$

Тогда

$$P_n(t,\Delta,W) = \sum_{k=0}^{K} P_n(t,\Delta,W_k,\delta), \qquad (2.3.7)$$

где $W_k = (u_k, v, \mathbf{w})$,

$$P_n(t,\Delta,W_k,\delta) = \mathbf{P}\big(\nu(t) = n,\, Z(t) - at \in \Delta[x),\, {}^\delta\mathbf{B}_t(W_k)\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\nu(t) = n,\, S_n - a\gamma(t) \in \Delta[x),\, {}^\delta\mathbf{B}_t(W_k)\big),$$

(см. (2.1.28)). Пусть для определенности $a \geqslant 0$. Тогда имеют место вложения событий:

$$\big\{S_n - a\gamma(t) \in \Delta[x), {}^\delta\mathbf{B}_t\big\} \subset \big\{S_n \in [x+au,\; x+\Delta+au+a\delta),\; {}^\delta\mathbf{B}_t\big\} = \\ = \big\{S_n \in \Delta_{+\delta}[x+au), {}^\delta\mathbf{B}_t\big\}; \\ \big\{S_n - a\gamma(t) \in \Delta[x), {}^\delta\mathbf{B}_t\big\} \supset \big\{S_n \in \Delta_{-\delta}[x+au+a\delta), {}^\delta\mathbf{B}_t\big\},$$

где $\Delta_{\pm\delta} = \Delta \pm a\delta$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
P_n(t,\Delta,W_k,\delta) \leqslant \mathbf{P}\big(\nu(t)=n,\ S_n\in\Delta_{+\delta}[x+au_k), {}^{\delta}\mathbf{B}_t(W_k)\big) = \\
= \int\limits_{t-u_k-\delta}^{t-u_k} \mathbf{P}\big(T_n\in dy,\ S_n\in\Delta_{+\delta}[x+au_k)\big)\times \\
\times\, \mathbf{P}(\tau_{n+1}\geqslant t-y+v,\ \zeta_{n+1}\in\mathbf{w}) \leqslant \\
\leqslant \mathbf{P}\big(T_n\in\delta[t-u_k-\delta),\ S_n\in\Delta_{+\delta}[x+au_k)\big)\times \\
\times\, \mathbf{P}(\tau\geqslant u_k+v,\ \zeta\in\mathbf{w}); \quad (2.3.8)
\end{aligned}
$$

и аналогично

$$
\begin{aligned}
P_n(t,\Delta,W_k,\delta) \geqslant \int\limits_{t-u_k-\delta}^{t-u_k} \mathbf{P}\big(T_n\in dy,\ S_n\in\Delta_{-\delta}[x+au_k+a\delta)\big)\times \\
\times\, \mathbf{P}(\tau_{n+1}\geqslant t-y+v,\ \zeta_{n+1}\in\mathbf{w}) \geqslant \\
\geqslant \mathbf{P}\big(T_n\in\delta[t-u_k-\delta),\ S_n\in\Delta_{-\delta}[x+au_k+a\delta)\big)\times \\
\times\, \mathbf{P}(\tau\geqslant u_k+v+\delta,\ \zeta\in\mathbf{w}). \quad (2.3.9)
\end{aligned}
$$

При рассмотрении интегралов в (2.3.8), (2.3.9) мы для определенности включили в область интегрирования левые концы интервалов $t-u_k-\delta, t-u_k)$ и исключили правые. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело с суммами этих интегралов по k (см. (2.3.7)), и полученные полуинтервалы $\delta[t-u_k-\delta)$ не пересекаются, то на окончательный результат внесение такой определенности не влияет.

2) С помощью (2.3.8), (2.3.9) получим теперь асимптотическое представление для $P_n(t,\Delta,W)$. Положим

$$
s=t-a_\tau n, \quad Q(s,x)=\frac{s^2}{\sigma_\tau^2}-2\rho\,\frac{sx}{\sigma_\tau\sigma_\xi}+\frac{x^2}{\sigma_\xi^2}, \quad C=\frac{1}{2\pi\sigma_\tau\sigma_\xi\sqrt{1-\rho^2}},
$$

где

$$
\rho=\frac{\mathbf{E}(\tau-a_\tau)\xi}{\sigma_\tau\sigma_\xi}
$$

есть коэффициент корреляции между τ и ξ, $|\rho|<1$.

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1, $n\in[n_-,n_+]$. *Тогда при* $t\to\infty$

$$
\begin{aligned}
P_n(t,\Delta,W) = \Delta I_{u+v}(\mathbf{w})O(t^{-r/2})+ \\
+\frac{C\Delta I_{u+v}(\mathbf{w})}{n}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)n}\,Q(s,x)\Big\} \quad (2.3.10)
\end{aligned}
$$

равномерно по x, $u \leqslant \overline{u} = \mathrm{const} > 0$, v, $\mathbf{w}$, *а также по* Δ *из интервала* $(t^{1-\frac{r}{2}}, ct^{\frac{3-r}{2}})$, $c = \mathrm{const}$.

Доказательство. Заметим сначала, что в указанной области значений n выполняется

$$|s| < a_\tau t^h, \qquad h \in (1/2, 1), \qquad n \sim \frac{t}{a_\tau} \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Воспользуемся следующим уточнением интегро-локальной теоремы, которое вытекает из теоремы 2.2.1.

Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. *Тогда при* $t \to \infty$ *имеем*

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[t), S_n \in \Delta[x)\big) = \Delta\delta O(n^{-r/2}) + \\ + \frac{C\Delta\delta}{n} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)n}\, Q(s,x)\right\} \tag{2.3.11}$$

равномерно по x *и по значениям* Δ, δ *из интервала* $(q^n, cn^{\frac{3-r}{2}})$, $q < 1$, $c = \mathrm{const}$.

Имеем в силу (2.3.8)

$$P_n(t, \Delta, W, \delta) \leqslant \sum_{k=0}^{K} \mathbf{P}\big(T_k \in \delta[t - u_k - \delta), S_n \in \Delta_{+\delta}[x + au_k)\big) \times \\ \times \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v, \zeta \in \mathbf{w}).$$

Пользуясь представлением (2.3.10) при

$$s_k = s - u_k - \delta = t - a_\tau n - u_k - \delta, \quad x_k = x + au_k, \quad \Delta = \Delta_{+\delta} = \Delta + a\delta,$$

получим

$$P_n(t, \Delta, W, \delta) \leqslant (\Delta + a\delta)\delta O(n^{-r/2}) \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v,\ \zeta \in \mathbf{w}) + \\ + \frac{C(\Delta + a\delta)\delta}{n} \sum_{k \geqslant 0} E(s_k, x_k) \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v,\ \zeta \in \mathbf{w}), \tag{2.3.12}$$

где

$$E(s, x) = \exp\left\{-\frac{Q(s,x)}{2(1-\rho^2)n}\right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(s,x)}{\partial s} &= E(s,x)\left(\frac{c_1 x}{n} + \frac{c_2 s}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \\ \frac{\partial E(s,x)}{\partial x} &= E(s,x)\left(\frac{c_3 x}{n} + \frac{c_4 s}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

при $t \to \infty$, где c_1–c_4 не зависят от s, x, n и все оценки $O(\cdot)$ равномерны по x, $|s| \leqslant a_\tau t^h$, $n \in [n_-, n_+]$. Поэтому при $\delta = \frac{1}{n}\min(1,\Delta)$, $a \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{k\geqslant 0} \delta E(s_k, x_k)\mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v, \zeta \in \mathbf{w}) =$$
$$= \sum_{k\geqslant 0} \delta \left[E(s,x) + u_k O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right] \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v,\ \zeta \in \mathbf{w}) =$$
$$= E(s,x) I_{u+v}(\mathbf{w})\big(1 + O(1/t)\big) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.3.14}$$

(мы использовали здесь конечность $\sum_{k\geqslant 0} u_k \delta \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v) \leqslant \mathbf{E}\tau^2$). Оценки $O\left(\frac{1}{t}\right)$, $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ в (2.3.14) равномерны по x, $u \leqslant \overline{u} = \text{const}$, v, $\mathbf{w}$. Так как в (2.3.12) кроме того

$$\sum_{k\geqslant 0} \delta \mathbf{P}(\tau \geqslant u_k + v, \zeta \in \mathbf{w}) \to I_{u+v}(\mathbf{w}) \quad \textit{при} \quad t \to \infty,$$

то из (2.3.7), (2.3.12), (2.3.14) получаем при $\delta = \frac{1}{n}\min(1,\Delta)$, что $(\Delta + \delta) = \Delta\big(1 + O(1/n)\big)$,

$$P_n(t,\Delta,W) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\Delta}{n} E(s,x) I_{u+v}(\mathbf{w}) + \Delta I_{u+v}(\mathbf{w}) O(n^{-r/2}),\ \ \Delta \geqslant t^{1-\frac{r}{2}} \tag{2.3.15}$$

(мы использовали здесь тот факт, что $\frac{r}{2} \leqslant \frac{3}{2}$ и, стало быть, последним слагаемым в правой части (2.3.14) можно пренебречь. Из (2.3.15) видно, что рассматривать значения $\Delta < t^{1-r/2}$ не имеет смысла).

Аналогично из (2.3.9) получается оценка снизу и рассматривается случай $a \leqslant 0$. Лемма 2.3.1 доказана.

3) Заключительная часть доказательства теоремы 2.3.1 состоит в использовании леммы 2.3.1 и исходного представления (2.3.6) для $P(t,\Delta,W)$. Положим в (2.3.6)

$$h = \frac{r}{1+r}.$$

Тогда

$$\beta = rh - \frac{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2(1+r)},$$

и путем суммирования по $n \in [n_-, n_+]$ правых и левых частей в (2.3.10) получаем

$$
\begin{aligned}
&P(t, \Delta, W) = \\
&\quad = p_t(\mathbf{w}) O(t^{-\beta}) + C \Delta I_{u+v}(\mathbf{w}) \sum_{n=n_-}^{n_+} \frac{1}{n} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)n} Q(s, x) \right\} + \\
&\qquad\qquad + (n_+ - n_-) \Delta I_{u+v}(\mathbf{w}) O(t^{-r/2}),
\end{aligned} \tag{2.3.16}
$$

где оценки равномерны по x, Δ, n, $u \leqslant \overline{u}$, v, $\mathbf{w}$ в областях, названных в лемме 2.3.1. Здесь при $h = \frac{r}{1+r}$ выполняется $h - \frac{r}{2} = \frac{r(1-r)}{2(1+r)} = -\beta$,

$$
(n_+ - n_-) O(t^{-r/2}) = O(t^{h - r/2}) = O(t^{-\beta}).
$$

Нетрудно видеть, что

$$
-\beta + \frac{1}{2} = \frac{r(1-r)}{2(1+r)} + \frac{1}{2} = -\frac{(r-1)^2 - 2}{2(1+r)} < 0
$$

при $r > 1 + \sqrt{2}$, а общий остаточный член в (2.3.16) есть $\big(p_t(\mathbf{w}) + \Delta I_{u+v}(\mathbf{w})\big) O(t^{-\beta})$.

Рассмотрим теперь сумму в правой части (2.3.16). В ней происходит суммирование по (нецелым) значениям $s = t - a_\tau n$ в области $|s| \leqslant a_\tau t^h$. Так как

$$
n = \frac{t}{a_\tau} - \frac{s}{a_\tau}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{a_\tau}{t} + O\left(\frac{s}{t^2}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty,
$$

то

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=n_-}^{n_+} \frac{1}{n} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)n} Q(s, x) \right\} = \\
&\qquad = \frac{a_\tau}{t} \sum_{|s| \leqslant a_\tau t^h} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{a_\tau}{t} + O\left(\frac{s}{t^2}\right) \right) Q(s, x) \right\} + \\
&\qquad\qquad + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \sum_{|s| \leqslant a_\tau t^h} s \exp\left\{ -\frac{a_\tau}{(1-\rho^2)t} Q(s, x) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.3.17}
$$

Сделаем теперь общее замечание относительно сумм вида

$$
\sum_{|s| \leqslant a_\tau t^h} \exp\left\{ -\frac{cQ(s, x)}{t} \right\}, \qquad c > 0, \tag{2.3.18}
$$

присутствующих в (2.3.17) и определяющих асимптотику $P(t,\Delta,u,v)$ в (2.3.16). Квадратичная форма $Q(s,x)$ достигает своего минимального по s значения при $s=\frac{\rho x\sigma_\tau}{\sigma_\xi}$ и этот минимум равен

$$\frac{x^2(1-\rho^2)}{\sigma_\xi^2}.$$

Поэтому при $|x|\geqslant\sqrt{t}\,\ln t$ квадратичная форма $\frac{1}{t}\,Q(s,x)$ под знаком exp в (2.3.18) превосходит значение $c_1\ln^2 t$, $c_1=\mathrm{const}$, и, стало быть, сама экспонента в правой части (2.3.18) есть $o(t^{-l})$ при любом $l>0$ и всех s, $|s|<a_\tau t^h$. То же относится и к суммам в (2.3.17).

Мы получим аналогичное утверждение, если в приведенных рассуждениях аргументы x и s поменяем местами: сумма слагаемых в (2.3.18) по значениям s, $|s|>\sqrt{t}\ln t$ тоже есть $O(t^{-l})$ при любом $l>0$. Таким образом, с точностью до слагаемого $O(t^{-l})$ в (2.3.17) достаточно рассматривать значения $|x|\leqslant\sqrt{t}\,\ln t$ и суммирование вести по значениям s, $|s|<\sqrt{t}\,\ln t$.

Вернемся к (2.3.17) и сделаем замену переменных

$$s_1=\frac{s}{\sqrt{t}},\qquad x_1=\frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{t}\,Q(s,x)=Q(s_1,x_1)$$

и первая сумма в правой части (2.3.17) равна

$$O(t^{-l})+\frac{a_\tau}{\sqrt{t}}\sum_{|s_1|\leqslant\ln t}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl\{-\frac{a_\tau}{2(1-\rho^2)}\,Q(s_1,x_1)\bigl[1+ + O(s_1t^{-1/2})\bigr]\Bigr\}. \tag{2.3.19}$$

Так как здесь под знаком exp при $|x_1|<\ln t$ выполняется

$$Q(s_1,x_1)s_1t^{-1/2}=(\ln t)^3O(t^{-1/2})=o(1)$$

при $t\to\infty$, то экспонента в (2.3.19) равна

$$\bigl[1+s_1O(t^{-1/2}\ln^2 t)\bigr]\exp\Bigl\{-\frac{a_\tau Q(s_1,x_1)}{2(1-\rho^2)}\Bigr\}.$$

Ввиду свойств гладкости и убывания функции

$$\exp\left\{-\frac{a_\tau}{2(1-\rho^2)}\,Q(s_1,x_1)\right\}$$

сама сумма (2.3.19) равна

$$O(t^{-l}) + \frac{a_\tau}{\sqrt{t}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{a_\tau}{2(1-\rho^2)}\, Q(s_1, x_1) \right\} ds_1 + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right] + O(t^{-1}\ln^2 t). \quad (2.3.20)$$

Ясно, что главный остаточный член в (2.3.20) есть $O(t^{-1}\ln^2 t)$.

Вторая сумма в (2.3.17) оценивается аналогично: она есть $O(t^{-3/2})$ и ею можно пренебречь.

Возвращаясь к (2.3.16) и замечая, что $\beta < 1$, мы получаем в итоге

$$P(t,\Delta,W) = \big(p_t(\mathbf{w}) + \Delta I_{u+v}(\mathbf{w})\big) O(t^{-\beta}) +$$
$$+ \frac{C\Delta a_\tau I_{u+v}(\mathbf{w})}{\sqrt{t}}\, J(x_1,\rho), \qquad (2.3.21)$$

где

$$J(x_1,\rho) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{a_\tau}{2(1-\rho^2)}\, Q(s_1,x_1) \right\} ds_1. \qquad (2.3.22)$$

Интеграл $J(x_1,\rho)$ в (2.3.22), (2.3.21) можно вычислить непосредственно или сослаться на таблицы, а можно воспользоваться следующими соображениями.

Функция $J(x_1,\rho)$ в представлении (2.3.22) при фиксированном a_τ зависит лишь от x_1 и ρ. Применим утверждение (2.3.21) к случаю линейной зависимости $\zeta = \omega + c\tau$, рассмотренному в § 1.8. При фиксированных a_τ, σ_τ распределение ω всегда можно выбрать так, чтобы коэффициент корреляции между $\xi = \omega + (c-a)\tau = \omega - \frac{a_\omega \tau}{a_\tau}$ и τ равнялся заданному ρ. Поэтому, применяя к таким (τ,ζ) утверждение (2.3.21) при $\mathbf{w} = \mathbb{R}$ и теорему 2.1.2, получим, что главные части асимптотики в (2.3.21) и (2.1.3) должны совпадать. Этот факт и соотношение (2.3.21) доказывают (2.3.3). Границы для возможных значений Δ указаны в лемме 2.3.1. Однако соотношение (2.3.3) показывает, что имеет смысл рассматривать суженную область значений Δ до интервала $\big(t^{\frac{1}{2}-\beta}, ct^{\frac{3-r}{2}}\big)$, где $\frac{1}{2} - \beta > 1 - \frac{r}{2}$.

II, III. Распространение утверждения теоремы на случаи арифметичных τ и арифметичных ζ происходит аналогично тому как это делалось в разделах II, III доказательства теоремы 2.1.2. Теорема 2.3.1 доказана.

Получим теперь аналог теоремы 2.3.1 для процессов $Y(t)$. Пусть

$$I_u = \int\limits_u^\infty \mathbf{P}(\tau > v)dv$$

и, как и прежде,

$$B_t = B_t(u, v) = \big\{\gamma(t) \geqslant u, \chi(t) \geqslant v\big\}.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия раздела* I *теоремы* 2.3.1. *Тогда при* $t \to \infty$

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathbf{P}\big(Y(t) - at \in \Delta[x), B_t\big) = \\ = \frac{I_{u+v}}{a_\tau\sqrt{t}}\,\phi_\sigma\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\big(1 + o(1)\big) + o(t^{-\beta'}), \quad (2.3.23)$$

при любом $\beta' < \beta$, *где* β *определено в теореме* 2.3.1, *остаточные члены* $o(1)$, $o(t^{-\beta'})$ *равномерны по всем* x, $u \leqslant \overline{u} = \mathrm{const}$, v, *а также по* Δ *из любого компакта, отделенного от* 0.

Для простоты мы ограничились в теореме 2.3.2 рассмотрением значений Δ из компактного множества. Аналогично тереме 2.3.1 можно рассматривать также значения Δ из более широких областей, включающих в себя убывающие и растущие Δ при $t \to \infty$. Однако это усложняет формулировки и доказательства.

Доказательство теоремы 2.3.2 основано на теореме 2.3.1. Заметим, что при $\mathbf{w} = \Delta[w)$

$$\mathbf{P}\big(Y(t) - at \in \Delta[x);\, B_t(u, v)\big) = \\ = \int \mathbf{P}\big(Z(T) \in x - dw;\, \mathbf{B}_t\big(u, v, \Delta[w)\big)\big). \quad (2.3.24)$$

При малых δ интеграл в правой части (2.3.24) можно приблизить суммой $\sum\limits_k P_k$, где

$$P_k := \mathbf{P}\Big(Z(T) - at \in \delta[x - w_k);\, \mathbf{B}_t\big(u, v, \Delta[w_k)\big),\ w_k = k\delta\Big), \quad (2.3.25)$$

$k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ Воспользуемся теоремой 2.3.1. Предварительно заметим следующее. Пусть для простоты δ нацело делит Δ. Тогда нетрудно видеть, что

$$\delta \sum_k I_u\big(\Delta[w_k)\big) = \Delta I_u(\mathbb{R}) = \Delta I_u, \quad (2.3.26)$$

где мера $I_u(\mathbf{w})$ определена в теореме 2.3.1,

$$\sum_k p_t\bigl(\Delta[w_k)\bigr) = \frac{\Delta}{\delta}, \qquad \frac{1}{\delta}\,O(t^{-\beta}) = o(t^{-\beta'})$$

при любом $\beta'<\beta$, если $\delta \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$. Поэтому согласно теореме 2.3.1 сумма остаточных членов для слагаемых в (2.3.25) равна

$$\Bigl[\sum_k p_t\bigl(\Delta[w_k)\bigr) + \delta\sum_k I_{u+v}\bigl(\Delta[w_k)\bigr)\Bigr]O(t^{-\beta}) = \Delta O(t^{-\beta'}) \tag{2.3.27}$$

при любом $\beta' < \beta$.

Рассмотрим теперь сумму главных частей P'_k (см. (2.3.3)) слагаемых P_k в (2.3.25). Разобьем ее на две подсуммы $\sum_1$ и $\sum_2$ по областям

$$\mathcal{N}_1 := \Bigl\{k:\, |w_k| < \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr\} \quad \text{и} \quad \mathcal{N}_2 := \Bigl\{k:\, |w_k| \geqslant \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr\},$$

соответственно. Для второй суммы имеем

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k\in\mathcal{N}_2} P'_k \leqslant \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\, I_{u+v}(R_t) \tag{2.3.28}$$

(ср. с (2.3.26)), где

$$R_t := \Bigl\{w \in \mathbb{R}:\, |w| \geqslant \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr\}.$$

Оценим

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\Bigl(\tau \geqslant u,\, \zeta \geqslant \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr)du \leqslant \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\,\mathbf{P}\Bigl(\zeta \geqslant \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr) + \int_{\sqrt{t}/\ln t}^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant u)du \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}|\zeta|^r\Bigl(\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr)^{-r+1} + \frac{\mathbf{E}\tau^r}{r-1}\Bigl(\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\Bigr)^{-r+1}.$$

Аналогично оценивается $\int_0^\infty \mathbf{P}\left(\tau \geqslant u,\, \zeta \leqslant -\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)du$. Вместе с множителем $\frac{\Delta}{\sqrt{t}}$ в (2.3.28) это дает

$$\sum\nolimits_2 = \Delta O\Bigl(\frac{t^{-r/2}}{(\ln t)^{r-1}}\Bigr) = \Delta o(t^{-\beta}). \tag{2.3.29}$$

Рассмотрим далее первую сумму $\sum_1$. Будем различать два случая:
(a) $|x| \leqslant c\sqrt{t\ln t}$,
(b) $|x| \geqslant c\sqrt{t\ln t}$,
где число c выберем позже.

В случае (a), $k \in \mathcal{N}_1$, имеем

$$\exp\left\{-\frac{(x-w_k)^2}{2\sigma^2 t}\right\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right)\right),$$

$$\sum\nolimits_1 = \frac{\Delta I_{u+v}}{a_\tau \sigma\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

В случае (b), $k \in \mathcal{N}_1$, выполняется $x - w_k \sim x$ при $t \to \infty$,

$$\exp\left\{-\frac{(x-w_k)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{c^2 \ln t(1+o(1))}{2\sigma^2}\right\} = O(t^{-1/2})$$

при $c > \sigma\sqrt{2}$. Вместе с множителем $\frac{\delta}{\sqrt{t}}$ в правой части (2.3.3) это дает для $\sum_1$ оценку

$$\sum\nolimits_1 = \Delta O(t^{-1}) = \Delta o(t^{-\beta}). \tag{2.3.30}$$

Сопоставляя (2.3.27), (2.3.29), (2.3.30) мы получим утверждение (2.3.23). Теорема 2.3.2 доказана.

§ 2.4 Распространение результатов §§ 2.1, 2.3 на неоднородный случай

В этом разделе мы докажем вспомогательное утверждение, позволяющее переносить утверждения теорем 2.1.2, 2.3.1, 2.3.2 на неоднородные ОПВ.

Ниже нам будет удобно неоднородный элемент (τ_1, ζ_1) управляющей последовательности обозначить через $(\tau_{(1)}, \zeta_{(1)})$, сохранив обозначения $Z(t)$, $Y(t)$ для однородных процессов, которые управляются последовательностью $\{\tau_j, \zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных векторов. Соответственно, неоднородные ОПВ мы будем обозначать, как и прежде, через $\widetilde{Z}(t)$, $\widetilde{Y}(t)$, так что при $\tau_{(1)} > 0$

$$\widetilde{Z}(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_{(1)}), \\ \zeta_{(1)} + Z(t - \tau_{(1)}) \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau_{(1)}; \end{cases}$$

$$\widetilde{Y}(t) = \begin{cases} \zeta_{(1)} \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_{(1)}), \\ \zeta_{(1)} + Y(t - \tau_{(1)}) \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau_{(1)}. \end{cases}$$

где $Z(t)$, $Y(t)$ — однородные ОПВ, не зависящие от $(\tau_{(1)}, \zeta_{(1)})$ (случай $\tau_{(1)} = 0$ более простой и мы его рассматривать не будем). Пусть далее $\widetilde{\gamma}(t)$, $\widetilde{\chi}(t)$ суть случайные величины вида $\gamma(t)$, $\chi(t)$ (см. (1.1.1), (1.1.2))), но определенные для неоднородной управляющей последовательности $\widetilde{T}_k = \tau_{(1)} + T_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, так что, например,

$$\widetilde{\chi}(t) \underset{p}{=} \begin{cases} \tau_{(1)} - t, & \textit{если} \quad \tau_{(1)} > t, \\ \chi(t - \tau_{(1)}), & \textit{если} \quad \tau_{(1)} \leqslant t, \end{cases}$$

где $\chi(t)$ соответствует однородному процессу $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим

$$\widetilde{B}_t = \bigl\{\widetilde{\gamma}(t) \geqslant u,\, \widetilde{\chi}(t) \geqslant v\bigr\}.$$

Мы будем допускать «частичную схему серий», когда распределения случайных величин $\tau_{(1)} = \tau_{(1)}(t)$, $\zeta_{(1)} = \zeta_{(1)}(t)$ зависят от параметра t.

Будем говорить, что случайная величина $\tau_{(1)} \geqslant 0$, зависящая от параметра t, *равномерно интегрируема*, если

$$\sup_t \mathbf{E}\bigl(\tau_{(1)};\, \tau_{(1)} > N\bigr) \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

Нетрудно видеть, что $\tau_{(1)}$ равномерно интегрируема, если существует интегрируемая функция $q(u)$ такая, что $\mathbf{P}\bigl(\tau_{(1)} > u\bigr) \leqslant q(u)$ при всех t и u.

Итак, пусть заданы случайные величины $\tau_{(1)} \geqslant 0$, $\zeta_{(1)}$, зависящие, вообще говоря, от параметра t.

Теорема 2.4.1. I. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, однородный ОПВ $Y(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.1.2, *так что справедливо интегро-локальное представление* (2.1.3) *и случайные величины $\tau_{(1)} \geqslant 0$, $|\zeta_{(1)}|$ равномерно интегрируемы. Тогда неоднородный процесс $Y_1(t)$ также удовлетворяет интегро-локальному представлению* (2.1.3), *т.е. вероятность $\mathbf{P}\bigl(\widetilde{Y}(t) - at \in \Delta[x);\, \widetilde{B}_t\bigr)$ равна правой части в* (2.1.3).

II. *Пусть однородный ОПВ $Z(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.3.1, *так что справедливо интегро-локальное представление* (2.3.3), *а случайные величины $(\tau_{(1)})^{2\beta}$, $|\zeta_{(1)}|^{2\beta}$ равномерно интегрируемы, где $\beta \in (1/2, 1)$ из теоремы* 2.3.1. *Тогда неоднородный процесс $\widetilde{Z}(t)$ также удовлетворяет интегро-локальному представлению* (2.3.3).

Доказательство. I. В силу неравенства

$$\mathbf{P}\bigl(|\zeta_{(1)}| \geqslant v\bigr) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|\zeta_{(1)}|;\, |\zeta_{(1)}| \geqslant v)}{v} =: \frac{\delta_v}{v},$$

где $\delta_v \to 0$ при $v \to \infty$, найдется последовательность $\varepsilon = \varepsilon_t \to 0$ при $t \to \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}\big(|\zeta_{(1)}| > \varepsilon_t\sqrt{t}\big) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Аналогично, найдется последовательность $\varepsilon_t \to 0$ при $t \to \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}(\tau_{(1)} > \varepsilon_t\sqrt{t}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\tau' = \min(\tau_{(1)}, \varepsilon_t\sqrt{t}\,),\\
&\zeta' = \max\big[\min(\zeta_{(1)}, \varepsilon_t\sqrt{t}\,), -\varepsilon_t\sqrt{t}\,\big],\\
&A = \big\{\tau_{(1)} < \varepsilon_t\sqrt{t},\ |\zeta_{(1)}| < \varepsilon_t\sqrt{t}\,\big\}, \qquad B_t = \big\{\gamma(t) \geqslant u,\, \chi(t) \geqslant v\big\}.
\end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{P}(\overline{A}) = o(1/\sqrt{t})$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\widetilde{Y}(t) - at \in \Delta[x),\, \widetilde{B}_t\big) &= \\
&= \mathbf{P}\big(\zeta_{(1)} - a\tau_1 + Y(t - \tau_{(1)}) - a(t - \tau_{(1)}) \in \Delta[x), \widetilde{B}_t\big) = \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \mathbf{P}\big(\zeta' - a\tau' + Y(t - \tau') - a(t - \tau') \in \Delta[x), B_{t-\tau'}A\big) = \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \int\limits_0^{\varepsilon_t t}\int\limits_{-\varepsilon_t\sqrt{t}}^{\varepsilon_t\sqrt{t}} \mathbf{P}\big(Y(t-\theta) - a(t-\theta) \in \Delta[x - y + a\theta), B_{t-\theta}\big)\times \\
&\qquad\qquad \times \mathbf{P}(\tau' \in d\theta, \zeta' \in dy). \quad (2.4.1)
\end{aligned}$$

Но при любых θ и y из области интегрирования в (2.4.1) при $t \to \infty$ выполняется $t - \theta \sim t$,

$$\frac{(x - y + a\theta)^2}{2\sigma^2(t-\theta)} \qquad \begin{cases} = o(1), & \text{если} \quad |x| = o\big(\sqrt{t}\big),\\ = \frac{x^2}{2\sigma^2 t} + o(1), & \text{если} \quad |x| \quad \text{сравнимо с } \sqrt{t},\\ \to \infty, & \text{если} \quad |x| \gg \sqrt{t}. \end{cases}$$

Поэтому подинтегральная функция в правой части (2.4.1) имеет тот же вид, что и правая часть в (2.1.3). Стало быть, после усреднения в (2.4.1) по распределению (τ', ζ') мы вновь получим представление вида (2.1.3).

II. Доказательство второй части утверждения теоремы требует несколько более точных рассмотрений. В силу интегрируемости $(\tau_{(1)})^{2\beta}$, $|\zeta_{(1)}|^{2\beta}$ для некоторой последовательности $\varepsilon_t{\to}0$ при $t{\to}\infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(\tau_{(1)} > \varepsilon_t\sqrt{t}\,) = o(t^{-\beta}),$$
$$\mathbf{P}\big(|\zeta_{(1)}| > \varepsilon_t\sqrt{t}\big) = o(t^{-\beta}),$$

так что $\mathbf{P}(\overline{A}) = o(t^{-\beta})$. В силу (2.3.3) первый множитель под интегралом в (2.4.1) имеет вид

$$\frac{c}{\sqrt{t-\theta}}\, e^{-\frac{(x-y+a\theta)^2}{2\sigma^2(t-\theta)}} + O\big((t-\theta)^{-\beta}\big), \tag{2.4.2}$$

где c от x, y, t и θ не зависит, $\theta = o\big(\sqrt{t}\,\big)$, $y = o(\sqrt{t})$ (мы ограничимся для простоты рассмотрением случая $\Delta \leqslant \mathrm{const}$). Обозначим

$$e(x,t) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Тогда аналогично (2.3.13) имеем при $t \to \infty$

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial x} = c_1 e(x,t)\, \frac{x}{t} = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg),$$
$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = c_2 e(x,t)\, \frac{x^2}{t^2} = O\bigg(\frac{1}{t}\bigg),$$

где c_1, c_2 от x, t не зависят, а оценки $O(\cdot)$ равномерны по x. Кроме того,

$$\frac{1}{\sqrt{t-\theta}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + O\bigg(\frac{\theta}{t^{3/2}}\bigg) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поэтому выражение в (2.4.2) равно

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}} + O(t^{-\beta}) + |y| O\bigg(\frac{1}{t}\bigg) + \theta O\bigg(\frac{1}{t}\bigg).$$

Так как $\mathbf{E}\tau'$ и $\mathbf{E}\zeta'$ конечны, то интеграл в (2.4.1) будет равен

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}} + O(t^{-\beta}) + O\bigg(\frac{1}{t}\bigg) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Это доказывает соотношение (2.3.3) для процесса $\widetilde{Z}$. Теорема 2.4.1 доказана.

С помощью соотношения (2.4.1) в доказательстве теоремы 2.4.1 нетрудно убедиться, что в случае $a = 0$ утверждение теоремы 2.4.1 останется справедливым, если условие равномерной интегрируемости $\tau_{(1)}$ в части I и равномерной интегрируемости $\tau_{(1)}^{2\beta}$ в части II заменить условиями равномерной интегрируемости $\sqrt{\tau_{(1)}}$ и $\tau_{(1)}^{\beta}$, соответственно.

Как уже отмечалось, «частичная схема серий» для неоднородных ОПВ, когда распределения $\tau_1 = \tau_{(1)}$, $\zeta_1 = \zeta_{(1)}$ зависят от t, имеет место, например, при изучении приращений $Y_u(t) = Y(u+t) - Y(u)$ при $t \to \infty$,

$u = u(t) \to \infty$, которые можно рассматривать как неоднородные процессы с начальными скачками, распределенными как $\chi(u)$, $\zeta(u)$. В этом случае согласно теореме 2.4.1 в условиях, скажем, раздела I надо предполагать равномерную интегрируемость $\sqrt{\chi(u)}$ и $\bigl|\zeta(u)\bigr|$, что всегда имеет место, если $\mathbf{E}\tau^{3/2} < \infty$, $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$.

Если распределение (τ, ζ) удовлетворяет моментному условию Крамера, то интегро-локальные теоремы могут быть установлены в более широкой зоне уклонений, включая область больших уклонений. Этому будет посвящена глава 5.

§ 2.5 Интегро-локальные теоремы для марковских аддитивных процессов

Марковские аддитивные процессы X_n (МАП) были определены в § 1.8. Там же были установлены основные «интегральные» предельные законы для МАП в области нормальных уклонений. Получим теперь интегро-локальные теоремы.

Мы сохраним здесь все обозначения § 1.8 и ограничимся рассмотрением «однородных» процессов, когда $\mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0$ и рассматриваются циклы по возвращению в состояние e_0. Переход к неоднородным процессам осуществляется так же, как при рассмотрении неоднородных ОПВ.

Теорема 2.5.1. *Пусть случайная величина ζ либо удовлетворяет условию Крамера* (2.3.1) *на характеристическую функцию, либо арифметична,*

$$\mathbf{E}\tau^3 < \infty, \quad \mathbf{E}|\zeta|^3 < \infty, \quad \mathbf{E}\widehat{\zeta}^3 < \infty. \tag{2.5.1}$$

Тогда

I.

$$\mathbf{P}\bigl(\mathrm{X}_n - an \in \Delta[x)\bigr) = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}\,\phi_\sigma\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + o(n^{-1/2}) \tag{2.5.2}$$

равномерно по x и по Δ из интервала $(n^{-\varepsilon}, n^{-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. Если ζ арифметична, то в (2.5.2) $\Delta = 1$, *x целочисленно.*

II. *Если $\{\mathrm{x}_n\}$ — конечная, неприводимая, непериодическая цепь Маркова, то $\mathbf{P}(\tau > n) < cq^n$ при некотором $q < 1$ и всех n. Если дополнительно*

$$\max_{j \leqslant m} \mathbf{E}\bigl|\xi(\mathrm{e}_j)\bigr|^3 < \infty, \tag{2.5.3}$$

где $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_m$ — состояния цепи, то выполнено (2.5.1), (2.5.2).

Условие (2.5.1) может быть ослаблено: показатель 3 можно заменить на некоторое значение $r \in (1 + \sqrt{2}, 3)$ (ср. с теоремой 2.3.1).

Доказательство теоремы 2.5.1. Имеем

$$\mathrm{X}_n = Z(n) + \rho_n,$$

где ρ_n определено в (1.8.9). Рассмотрим вероятность

$$P_{n,x} := \mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n - an \in \Delta[x)\big) = \mathbf{P}\big(Z(n) - an + \rho_n \in \Delta[x)\big).$$

При любом $b > 1/a_\tau$ имеем

$$\mathbf{P}\big(\eta(n) > bn\big) = \mathbf{P}(T_{bn} < n) < \frac{bn\sigma_\tau^2}{((a_\tau b - 1)n)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$. Далее, при $\varepsilon_n = \overline{o}(1)$, $n \to \infty$ выполняется

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(|\rho_n| > \varepsilon_n\sqrt{n}\big) = O\left(\frac{1}{n}\right) + \mathbf{P}\big(|\rho_n| > \varepsilon_n\sqrt{n};\ \eta(n) \leqslant bn\big) \leqslant \\ \leqslant O\left(\frac{1}{n}\right) + \mathbf{P}\big(\max_{j\leqslant bn} \widehat{\zeta}_j > \varepsilon_n\sqrt{n}\big) \leqslant O\left(\frac{1}{n}\right) + bn\mathbf{P}\big(\widehat{\zeta} > \varepsilon_n\sqrt{n}\big) \leqslant \\ \leqslant bno\left(\frac{1}{(\varepsilon_n\sqrt{n})^3}\right) = o(n^{-1/2}),\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

где $\widehat{\zeta}_j$ — независимые копии $\widehat{\zeta}$. Поэтому при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}P_{n,x} = \mathbf{P}\big(Z(n) - an \in \Delta[x - \rho_n);\ |\rho_n| \leqslant \varepsilon_n\sqrt{n}\big) + o(n^{-1/2}) = \\ = \mathbf{P}\big(Z(n) - an \in \Delta[x - r_n);\ |\rho_n| \leqslant \varepsilon_n\sqrt{n}\big) + o(n^{-1/2}),\end{aligned}$$

где

$$r_n = \begin{cases} \rho_n, & \text{если} \quad |\rho_n| < \varepsilon_n\sqrt{n}, \\ -\varepsilon_n\sqrt{n}, & \text{если} \quad \rho_n \leqslant -\varepsilon_n\sqrt{n}, \\ \varepsilon_n\sqrt{n}, & \text{если} \quad \rho_n \geqslant \varepsilon_n\sqrt{n}. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.5.4) следует, что при $n \to \infty$

$$P_{n,x} = \mathbf{P}\big(Z(n) - an \in \Delta[x - r_n)\big) + o(n^{-1/2}).$$

Заметим теперь, что при фиксированном l все вышеприведенные выкладки сохранятся и для вероятности

$$\begin{aligned}P_{n,x,l} := \mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n - an \in \Delta[x), \gamma(n) = l\big) = \\ = \mathbf{P}\big(Z(n) - an \in \Delta[x), \gamma(n) = l\big) + o(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Кроме того, случайные величины ρ_n, r_n условно не зависят от $Z(n)$ при условии $\gamma(n)=l$. Поэтому в силу следствия 2.3.1 получаем

$$\mathbf{P}\big(Z(n)-an\in\Delta[x-r_n)\,|\,\gamma(n)=l,r_n\big)=\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\,\phi_\sigma\bigg(\frac{x-r_n}{\sqrt{n}}\bigg)+o(n^{-1/2}).$$

Здесь

$$\phi_\sigma\bigg(\frac{x-r_n}{\sqrt{n}}\bigg)=\begin{cases}\phi_\sigma\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\big(1+o(1)\big) \text{ при } |x|<\sqrt{n}\ln n,\\ o(1) \quad \text{при} \quad |x|\geqslant\sqrt{n}\ln n,\end{cases} \tag{2.5.5}$$

где асимптотика, определенная правой частью в (2.5.5), от r_n не зависит. Поэтому

$$P_{n,x,l}=\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\,\phi_\sigma\bigg(\frac{x}{\sqrt{n}}\bigg)+o(n^{-2/3}).$$

Умножая $P_{n,x,l}$ на $\mathbf{P}\big(\gamma(n)=l\big)$ и суммируя по l в пределах от $l=0$ до $l=N$, получим

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n-an\in\Delta[x),\gamma(n)\leqslant N\big)=\mathbf{P}(\gamma\leqslant N)\bigg[\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\,\phi_\sigma\bigg(\frac{x}{\sqrt{n}}\bigg)+o(n^{-1/2})\bigg],$$

где

$$\mathbf{P}(\gamma\leqslant N)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(\gamma(n)\leqslant N\big)=a_\tau^{-1}\sum_{l=0}^{N}\mathbf{P}(\tau>l)\to 1$$

при $N\to\infty$. Отсюда следует (2.5.2).

II. Неравенство

$$\mathbf{P}(\tau>n)<cq^n,\quad q<1,\quad c=\mathrm{const}, \tag{2.5.6}$$

для длины цикла эргодической конечной цепи Маркова по возвращению в любое фиксированное состояние хорошо известно.

Далее рассмотрим случайную величину $\overline{\xi}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\overline{\xi}\geqslant t)=\max_{j\leqslant m}\mathbf{P}\Big(\big|\xi(\mathrm{e}_j)\big|\geqslant t\Big).$$

Так как $\mathbf{P}(\overline{\xi}\geqslant t)\leqslant\sum_{j\leqslant m}\mathbf{P}\Big(\big|\xi(\mathrm{e}_j)\big|\geqslant t\Big)$, то очевидно, что в силу (2.5.3)) $\mathbf{E}\overline{\xi}^3<\infty$. Далее, на событии $\{\tau=l\}$ выполняется

$$\widehat{\zeta}\underset{p}{\leqslant}\sum_{k=1}^{l}\overline{\xi}_k,$$

где $\overline{\xi}_k$ — независимые копии $\overline{\xi}$,

$$\mathbf{E}\big(\widehat{\zeta}^3\,|\,\tau=l\big)\leqslant l^3\mathbf{E}\overline{\xi}^3.$$

Отсюда и из (2.5.6) следует (2.5.1), (2.5.2). Теорема 2.5.1 доказана.

Глава 3

Принципы больших уклонений для обобщенных процессов восстановления

§ 3.1 Введение

Мы видели в § 1.2–1.7, что распределения ОПВ на больших интервалах времени ведут себя в области *нормальных* уклонений примерно так же, как распределения классических случайных блужданий. Например, $Z(T) - aT$ в случае $\sigma < \infty$ после нормировки имеет то же предельное распределение, что и суммы $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ случайных величин $\xi_j \underset{d}{=} \xi = \zeta - a\tau$ при $n = [T/a_\tau] \to \infty$.

В области *больших* уклонений все становится значительно более сложным. Причина не только в том, что ОПВ управляется двумя последовательностями случайных величин $\{\tau_j\}$ и $\{\zeta_j\}$, причем координаты вектора (τ, ζ) могут быть зависимыми, но и в том, что эти координаты во многих случаях влияют на уклонения ОПВ «в разных направлениях». Например, для независимых τ и ζ в случае $a = 0$ большие значения ζ_j способствуют большим уклонениям $Z(T)$, а большие значения τ_j способствуют малым уклонениям (при $\tau_1 > T$ уклонения от линии $z = at = 0$ вообще отсутствуют). В то же время в области умеренно больших уклонений продолжает сохраняться известная аналогия с поведением классических случайных блужданий (последовательности $\{S_n\}$; см. ниже § 4.8, гл. 7).

В этой главе мы будем предполагать, что выполнено моментное условие Крамера

[C] $\mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta} < \infty$ *в некоторой окрестности нуля* $|\lambda| + |\mu| < v$, $v > 0$.

Такое же условие выполнено для (τ_1, ζ_1).

Проблемам больших уклонений для случайных процессов посвящена обширная литература. Основные подходы к установлению принципов больших уклонений (ПБУ) для случайных процессов общего вида и обзор результатов изложены, например, в [97] (там же см. библиографию). В нашем случае при изучении ОПВ эффективными и более конструктивными оказываются прямые подходы, основанные на знании конкретной природы процессов, определенной в (0.1.3). Они позволяют получить значительно более продвинутые результаты, включая явный вид функции уклонений (deviation rate function) в виде преобразования Лежандра над базовой функцией (см. § 3.5).

Для марковских аддитивных процессов (сумм случайных величин, заданных на состояниях или переходах цепи Маркова) близкие результаты получены в работах [109, 110]. Если цепь является харрисовой (φ-неприводимой), то траектории таких процессов можно разбить на независимые циклы по попаданию цепи в положительный атом (возможно, искусственный; см. § 1.8). Эти циклы образуют ОПВ, который во многих случаях определяет основной вклад в изучаемые суммы. Однако следует иметь в виду, что ОПВ, порожденные циклами, образуют лишь некоторый специальный подкласс ОПВ общего вида (не все возможные совместные распределения τ и ζ можно реализовать с помощью циклов). Отметим, что некоторые результаты в названных источниках сопровождаются условиями, смысл которых прояснить не всегда удается.

Если цепь Маркова конечна, то в [106] для несколько более общего объекта (векторы (τ_j, ζ_j) заданы на переходах цепи Маркова) с помощью результатов [109, 110] изучается ПБУ для ОПВ, порожденного циклами.

Вернемся к ОПВ общего вида. В дальнейшем мы часто будем использовать слова «$\Delta = \Delta_T$ *сходится к* 0 *достаточно медленно при* $T \to \infty$». Чтобы сократить запись этой формулировки мы будем писать

$$\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.1.1}$$

Слова «существует $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ такое, что выполнено соотношение A (зависящее от Δ)», означают, что

1) существует последовательность $\Delta = \Delta_T \to 0$ при $T \to \infty$ такая, что выполнено соотношение A;

2) соотношение A остается выполненным для любой последовательности $\Delta = \Delta'_T \geqslant \Delta_T$, $\Delta'_T \to 0$;

3) если $\Delta'_T < \Delta_T$, то соотношение A может быть неверным.

Например, по закону больших чисел $\left|\frac{Z(T)}{T} - a\right| \underset{p}{\to} 0$ при $T \to \infty$. Отсюда следует, что существует $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$ такое, что

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Z(T)}{T} - a\right| > \varepsilon_T\right) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Ясно, что это соотношение неверно, если, например, $\sigma < \infty$, а последовательность ε_T сходится к 0 быстрее чем $T^{-1/2}$.

Напомним, что при выполнении моментного условия Крамера на распределение ξ, в соответствии с локальным ПБУ для S_n при $x = \alpha n$ и $n \to \infty$ существует $\Delta = \Delta_n = \overline{o}(1)$ такое, что

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Delta[\alpha)\right) = -\Lambda^{(\xi)}(\alpha) + o(1), \tag{3.1.2}$$

где $\Delta[\alpha) = [\alpha, \alpha + \Delta)$, $\Lambda^{(\xi)}(\alpha)$ есть функция уклонений, соответствующая случайной величине ξ, т.е. преобразование Лежандра

$$\Lambda^{(\xi)}(\alpha) = \sup_{\mu} \left\{\alpha\mu - A^{(\xi)}(\mu)\right\} \tag{3.1.3}$$

над функцией $A^{(\xi)}(\mu) = \ln \psi^{(\xi)}(\mu)$, $\psi^{(\xi)}(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\xi}$.

Оказывается, для ОПВ также справедлив аналог соотношения (3.1.2) (т.е. локальный ПБУ), в силу которого существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in \Delta[\alpha)\right),$$

где $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$. Этот предел в соответствии с последующими формулировками мы обозначим через $\widehat{D}(\alpha)$. Он имеет значительно более сложную природу, чем функция уклонений $\Lambda^{(\xi)}(\alpha)$. Замечательный факт состоит в том, что функция $\widehat{D}(\alpha)$ оказывается преобразованием Лежандра

$$\widehat{D}(\alpha) = \sup_{\mu} \left\{\mu\alpha - \widehat{A}(\mu)\right\},$$

(ср. с (3.1.3)) над так называемой базовой функцией $\widehat{A}(\mu)$, которая обладает многими (но, вообще говоря, не всеми) свойствами логарифма преобразования Лапласа над распределением некоторой случайной величины и при этом

$$\widehat{A}(\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}^{\mu Z(T)}. \tag{3.1.4}$$

Например, функция $\widehat{A}(\mu)$ выпукла, $\widehat{A}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{A}'(0) = a \qquad & \left(\sim \frac{\mathbf{E}Z(T)}{T} \quad \text{при} \quad T \to \infty\right), \\ \widehat{A}''(0) = \sigma^2 \qquad & \left(\sim \frac{\mathbf{D}Z(T)}{T} \quad \text{при} \quad T \to \infty\right), \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$\widehat{A}(\mu) \to \infty$ при $|\mu| \to \infty$, если случайная величина ζ разнозначна (т.е. $\mathbf{P}(\zeta \gtrless 0) > 0$) и др. При этом функция $\widehat{A}(\mu)$ может быть найдена в «явном виде» в терминах преобразования Лапласа над распределением (τ, ζ). Именно, если обозначить

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta}$$

и ввести в рассмотрение «обобщенное» решение $A(\mu)$ уравнения

$$A(-\lambda, \mu) = 0$$

относительно λ, положив

$$A(\mu) = \inf \big\{\lambda : \mathbf{A}(-\lambda, \mu) \leqslant 0\big\},$$

то

$$\widehat{A}(\mu) = \max\big(A(\mu), -\lambda_+\big), \qquad \lambda_+ = \sup\big\{\lambda : \psi^{(\tau)}(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\big\}$$

и можно выделить область аналитичности функции $\widehat{A}(\mu)$, в которой $\widehat{A}(\mu) = A(\mu)$ есть «точное» решение относительно λ уравнения

$$\mathbf{A}(-\lambda, \mu) = 0.$$

При этом «несмотря» на свойства (3.1.4), (3.1.5) не существует, вообще говоря, распределения вероятностей, для которого функция $\widehat{A}(\mu)$ была бы логарифмом преобразования Лапласа. То есть, грубо говоря, ОПВ $Z(T)$ в области больших уклонений ведут себя при $T \to \infty$ как суммы некоторых «псевдослучайных» величин (см. свойства (3.1.4), (3.1.5) и § 3.5 ниже), соответствующих «преобразованию» $\widehat{A}(\mu)$.

Настоящая глава посвящена выяснению природы распределений ОПВ в области больших уклонений и установлению для них ПБУ. В § 3.2 выясняется связь распределения ОПВ с мерой восстановления для последовательности $\{T_n, Z_n\}$. § 3.3 посвящен изучению свойств функций уклонений меры восстановления, которые при этом возникают. В § 3.4 устанавливаются ПБУ для ОПВ $Z(t)$. Понятие базовой функции введено в § 3.5, там же изучены ее свойства и ее связь с функциями уклонений. § 3.6 содержит ряд результатов, связанных с ПБУ для процесса $Y(t)$ и для марковских аддитивных процессов. Утверждение (3.1.4) доказано в § 3.7. Принцип умеренно больших уклонений будет установлен в § 4.8.

§ 3.2 Связь обобщенных процессов восстановления с мерой восстановления. Функция уклонений для меры восстановления

3.2.1 Мера восстановления и ОПВ

В § 1.1 было введено понятие функции восстановления $H(t)$, соответствующей последовательности $\{T_k\}$:

$$H(t) = \mathbf{E}\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_k \leqslant t).$$

В многомерном случае естественным обобщением этого понятия является *мера восстановления.* Как и в §§ 2.1–2.4, через

$$\mathbf{S}_n = (T_n, Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_j \tag{3.2.1}$$

обозначим суммы векторов $\boldsymbol{\xi}_j = (\tau_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Мера восстановления $H(B)$, соответствующая *однородной* последовательности $\{\mathbf{S}_n\}$ определяется равенством

$$H(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{S}_n \in B), \tag{3.2.2}$$

где B — измеримое множество из $\mathbb{R}^2$.

Если последовательность $\{\boldsymbol{\xi}_j\}$ *неоднородна* ($\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{\neq} \boldsymbol{\xi}$), то для нее соответствующую меру восстановления будем обозначать через $\widetilde{H}(B)$. В качестве измеримых множеств B мы часто будем брать прямоугольники $B_{t,x} = \delta[t) \times \Delta[x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$; в этом случае мы будем писать $H(B_{t,x}) = H\big(\delta[t), \Delta[x)\big)$.

Поскольку наряду с распределением $Z(t)$ в фазовом пространстве нас будет интересовать также распределение *траекторий* ОПВ $Z(t)$, то нам будет удобно, как и в §§ 1.6, 1.7, рассматривать процесс $Z(\cdot)$ на растущем отрезке времени $[0, T]$, $T \to \infty$ и изучать распределение нормированных процессов $\frac{Z(tT)}{T}$, но теперь при $t \in [0, 1]$.

Мы начнем с грубых интегро-локальных теорем для значений $\frac{Z(T)}{T}$ или, что то же, с *локального* ПБУ для ОПВ в фазовом пространстве.

ОПВ по самой своей природе тесно связан с мерой восстановления, так как по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big) = \\ = \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\big(T_n \in du,\ Z_n \in T\Delta[\alpha),\ \tau_{n+1} > T - u\big). \tag{3.2.3}$$

Если $\alpha \notin (-\Delta, 0]$, то $\mathbf{P}\big(Z_0 \in T\Delta[\alpha)\big) = 0$ и

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big) = \int_0^T H_1\big(du, T\Delta[\alpha)\big)\mathbf{P}(\tau > T - u), \tag{3.2.4}$$

где

$$H_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{S}_n \in B).$$

Если $\alpha \in (-\Delta, 0]$, то в правой части (3.2.3) будет задействовано первое слагаемое $\mathbf{P}(\tau_1 > T)$, соответствующее $n = 0$, так что при всех α

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big) = \\ = \mathbb{1}_{\{\alpha \in (-\Delta, 0]\}}\mathbf{P}(\tau_1 > T) \ + \int_0^T H_1\big(du, T\Delta[\alpha)\big)\mathbf{P}(\tau > T - u). \tag{3.2.5}$$

Если последовательность $\{\boldsymbol{\xi}_k\}$ *неоднородна* ($\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{\neq} \boldsymbol{\xi}$), то меру $H_1(B)$ (мы ее также будем называть мерой восстановления, как и меру $H(B)$ в (3.2.2)) будем обозначать через $\widetilde{H}_1(B)$.

Рассмотрим сначала *однородный* случай.

Для описания асимптотики интеграла в правых частях (3.2.4), (3.2.5) мы будем приближать этот интеграл с помощью сумм, в которые входят значения меры восстановления H_1 для больших прямоугольников: $H_1\big(T\delta[u_k), T\Delta[\alpha)\big)$ при малых δ и Δ, $u_k = k\delta$, $\alpha = x/T$, так что $T\Delta[\alpha) = [x, x + T\Delta)$. Точнее, мы воспользуемся тем, что справедливы следующие неравенства, оценивающие нужный интеграл сверху и снизу:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_1\big(T\delta[u_k], T\Delta[\alpha]\big)\mathbf{P}(\tau > T - u_k) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T H_1\big(du, T\Delta[\alpha]\big)\mathbf{P}(\tau > T - u) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} H_1\big(T\delta[u_k], T\Delta[\alpha]\big)\mathbf{P}(\tau > T - u_{k+1}), \tag{3.2.6}$$

где мы считаем для простоты, что число $N = 1/\delta$ является целым. Нам понадобится грубая асимптотика произведений

$$H_1\big(T\delta[t], T\Delta[\alpha]\big)\mathbf{P}\big(\tau > T(1-t)\big) \quad \text{при} \quad t \in [0,1), \tag{3.2.7}$$

где, как и прежде,

$$H_1\big(T\delta[t], T\Delta[\alpha]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(T_n \in T\delta[t], Z_n \in T\Delta[\alpha]\big), \tag{3.2.8}$$

и, следовательно, понадобится грубая асимптотика меры восстановления H_1 для множеств

$$T\big(\delta[t] \times \Delta[\alpha]\big) = [tT, tT + \delta T) \times [\alpha T, \alpha T + \Delta T).) \tag{3.2.9}$$

3.2.2 Асимптотика меры восстановления и соответствующая функция уклонений

Как уже отмечалось, мы везде в этой главе будем предполагать, что выполнено условие Крамера [**C**]. Наряду с условием [**C**] мы в ряде случаев для τ (для ζ) будем использовать также более сильное условие

$$[\mathbf{C}_\infty] \qquad \begin{array}{c} \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty \quad \text{при всех} \quad \lambda \\ (\mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty \quad \text{при всех } \mu) \end{array}$$

и писать в этих случаях соответственно $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ ($\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$).

Обозначим

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(\lambda,\mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}, \\ &\mathbf{A}_1(\lambda,\mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\mu\zeta_1}, \\ &\mathcal{A} := \{(\lambda,\mu) : \mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty\}, \\ &\mathcal{A}_1 := \big\{(\lambda,\mu) : \mathbf{A}_1(\lambda,\mu) < \infty\big\}. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

В соответствии с условием [**C**] внутренности $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ содержат точку $(\lambda,\mu)=(0,0)$. Мы будем использовать известные интегро-локальные теоремы и локальный ПБУ для сумм $\mathbf{S}_n$ (см. [12], § 2.9). Важную роль при изучении ПБУ для сумм $\mathbf{S}_n$ играет *функция уклонений*

$$\boldsymbol{\Lambda}(v,\alpha):=\sup_{(\lambda,\mu)}\big\{\lambda v+\mu\alpha-\mathbf{A}(\lambda,\mu)\big\},$$

соответствующая случайному вектору $\boldsymbol{\xi}=(\tau,\zeta)$. Это есть преобразование Лежандра над выпуклой непрерывной снизу функцией $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$, поэтому функция $\boldsymbol{\Lambda}(v,\alpha)$ также выпукла и непрерывна снизу. Как вероятностная характеристика функция уклонений изучена, например, в [12] (§ 1.1), [10] (§ 9.1).

По поводу обозначений (3.2.1), (3.2.10) заметим следующее. Некоторые символы, например, S_n, ξ_j и ряд других, мы используем для обозначения как скалярных, так и векторных величин. Чтобы их было проще различить, для обозначения векторных величин мы используем полужирный шрифт. Аналогично, символы A, Λ и ряд других будут использоваться для обозначения функций как одной, так и двух переменных. Чтобы их было удобнее различать, мы для обозначения функций от двух переменных используем полужирный шрифт.

Вернемся к вопросу об асимптотике меры восстановления (3.2.8). Грубая асимптотика меры (3.2.8) изучена весьма полно в [12], § 2.9 (там же см. библиографию). Здесь мы воспроизведем вкратце ход рассуждений, который естественным образом приводит к появлению соответствующей функции уклонений (так называемой второй функции уклонений), описывающей асимптотику логарифма меры восстановления. Логарифмическая асимптотика слагаемых суммы в правой части (3.2.8) известна в силу локального ПБУ для $\mathbf{S}_n$. Именно, в *однородном* случае

$$\begin{aligned}\ln\mathbf{P}\big(T_n\in T\delta[t],Z_n\in T\Delta[\alpha)\big)&=-n\boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{Tt}{n},\frac{T\alpha}{n}\right)+o(n)=\\&=-T\theta\boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{t}{\theta},\frac{\alpha}{\theta}\right)+o(\theta T),\quad\text{где}\quad\theta=\frac{n}{T}\end{aligned}$$

(см, например, § 2.8 в [12]). Поэтому естественно ожидать, что экспоненциальная часть меры восстановления $H_1\big(T\delta[t),T\Delta[\alpha)\big)$ при $T\to\infty$ имеет вид

$$e^{-T\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)+o(T)},\tag{3.2.11}$$

где

$$\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha):=\inf_{\theta>0}\theta\boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{t}{\theta},\frac{\alpha}{\theta}\right),\tag{3.2.12}$$

так что

$$\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha) \leqslant \mathbf{\Lambda}(t,\alpha). \tag{3.2.13}$$

Это есть функция уклонений для меры восстановления (*вторая функция уклонений*), играющая определяющую роль в описании асимптотики меры восстановления. В [12], § 2.9, установлены следующие свойства функции $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$. Она *неотрицательна* и *линейна вдоль любого луча*, т.е. для $v > 0$ и любых t, α

$$\mathbf{D}_\Lambda(vt, v\alpha) = v\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha) \tag{3.2.14}$$

(свойство линейчатости; оно очевидным образом следует из определения (3.2.12)). Поскольку $\mathbf{\Lambda}(t,\alpha) = 0$ при $(t,\alpha) = (a_\tau, a_\zeta) = (\mathbf{E}\tau, \mathbf{E}\zeta)$, то при всех $v > 0$

$$\mathbf{D}_\Lambda(va_\tau, va_\zeta) = v\mathbf{D}_\Lambda(a_\tau, a_\zeta) = 0. \tag{3.2.15}$$

Функция $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$ *выпукла*, т.е. для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$; $(t,\alpha), (u,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{D}_\Lambda(pt + qu, p\alpha + q\beta) \leqslant p\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha) + q\mathbf{D}_\Lambda(u,\beta). \tag{3.2.16}$$

Из выпуклости (3.2.16) и линейчатости (3.2.14) следует *полуаддитивность* функции $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$:

$$\mathbf{D}_\Lambda(t + u, \alpha + \beta) \leqslant \mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha) + \mathbf{D}_\Lambda(u,\beta). \tag{3.2.17}$$

Обозначим $\mathcal{D}^{<\infty} := \big\{(t,\alpha) : \mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha) < \infty\big\}$ область, в которой функция $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$ конечна. Внутри области $\mathcal{D}^{<\infty}$ функция $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$ непрерывна в силу ее выпуклости. Вне области $\mathcal{D}^{<\infty}$ она равна ∞, а на границе $\partial\mathcal{D}^{<\infty}$ множества $\mathcal{D}^{<\infty}$ может иметь разрывы.

Как уже говорилось, естественно ожидать, что функция $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$ будет описывать асимптотику функции

$$-\frac{1}{T}\ln H_1\big(T\delta[t], T\Delta[\alpha)\big).$$

Однако это не совсем так, поскольку функция от t и α, равная

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln H_1(T\delta[t), T\Delta[\alpha)),$$

непрерывна снизу (см. об этом также в § 4.1 в [12]), а функция $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$, определенная в (3.2.12), не является, вообще говоря, непрерывной снизу. Действительно, если, например, $\mathbf{P}(\zeta > 0) = 1$, то $\Lambda(0,0) = \infty$; поэтому $\mathbf{D}_\Lambda(0,0) = \infty$. Но в силу (3.2.15)

$$\lim_{v\to 0}\mathbf{D}_\Lambda(va_\tau, va_\zeta) = 0 < \mathbf{D}_\Lambda(0,0) = \infty,$$

т.е. в точке $(t,\alpha)=(0,0)$ непрерывность снизу функции $\mathbf{D}_\Lambda$ отсутствует. Если же в точках границы $\partial\mathcal{D}^{<\infty}$ (т.е. в точках разрывов функции $\mathbf{D}_\Lambda$, если таковые существуют) «подправить» функцию $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$, заменив ее по непрерывности снизу на функцию

$$\mathbf{D}(t,\alpha) := \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}_\Lambda\big((t,\alpha)_\varepsilon\big), \text{ где } \mathbf{D}_\Lambda(B) := \inf_{(u,\beta)\in B}\mathbf{D}_\Lambda(u,\beta), \tag{3.2.18}$$

$(t,\alpha)_\varepsilon$ — ε-окрестность точки $(t,\alpha)\in\mathbb{R}^2$, а в остальных точках (t,α) (т.е. в точках $(t,\alpha)\notin\partial\mathcal{D}^{<\infty}$) положить

$$\mathbf{D}(t,\alpha) := \mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha),$$

то мы получим непрерывную снизу функцию $\mathbf{D}(t,\alpha)$ (представление (3.2.18) справедливо для всех точек $(t,\alpha)\in\mathbb{R}^2$) и сохраняет все свойства (3.2.13)–(3.2.17) функции $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$. В дальнейшем функцию $\mathbf{D}(t,\alpha)$, наряду с функцией $\mathbf{D}_\Lambda(t,\alpha)$, мы также будем называть *функцией уклонений*, соответствующей мере восстановления случайного вектора $\boldsymbol{\xi}=(\tau,\zeta)$ (*второй функцией уклонений*).

Итак, из сказанного выше и (3.2.11) мы получаем, что в однородном случае при $T\to\infty$

$$\frac{1}{T}\ln H_1\big(T\delta[t],T\Delta[\alpha]\big)\sim -\mathbf{D}(t,\alpha). \tag{3.2.19}$$

Это определяет «вероятностный» смысл функции $\mathbf{D}(t,\alpha)$.

Приведем теперь точную формулировку теоремы об асимптотике меры восстановления $\widetilde{H}_1$ в общем *неоднородном* случае. При этом нам понадобится условие «допустимой неоднородности», при котором неоднородный скачок $\boldsymbol{\xi}_1$ не будет «портить» асимптотику (3.2.19).

Теорема 3.2.1 (см. теорему 2.9.6 в [86][1])**.** *Пусть $\boldsymbol{\xi}_1$ удовлетворяет условию «допустимой неоднородности»*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \big\{(\lambda,\mu):\ \mathbf{A}(\lambda,\mu)\leqslant 0\big\}\subset[\mathcal{A}_1]. \tag{3.2.20}$$

Тогда, если $\delta=\delta_T=\overline{o}(1)$, $\Delta=\Delta_T=\overline{o}(1)$ при $T\to\infty$, то

$$\frac{1}{T}\ln\widetilde{H}_1\big(T\delta[t],T\Delta[\alpha]\big) = -\mathbf{D}(t,\alpha)+o(1). \tag{3.2.21}$$

Ясно, что если $t>0$ или $\alpha\notin(-\Delta,0]$, то «нулевое» слагаемое $\mathbf{P}\big(T_0\in T\delta[t],Z_0\in T\Delta[\alpha]\big)$ в определении функции восстановления равно нулю и $\widetilde{H}_1$ в (3.2.21) можно заменить на $\widetilde{H}$.

[1] В русскоязычном издании [12] монографии [86] утверждение теоремы 2.9.6 доказано при более ограничительном условии $\mathcal{A}^{\leqslant 0}\subset\mathcal{A}_1$.

3.2.3 Предварительная версия локального ПБУ для ОПВ

С помощью проведенных рассмотрений можно получить следующую «предварительную версию» локального ПБУ для ОПВ.

Обозначим

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{x}{T}, \qquad l(T,y) := -\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(\tau > Ty), \\ \lambda_+ := \sup\bigl\{\lambda :\ \psi^{(\tau)}(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\bigr\}. \end{gathered} \tag{3.2.22}$$

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнено условие допустимой неоднородности* (3.2.20). *Тогда*

$$\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\bigr) = \mathbb{1}_{\{\alpha\in(-\Delta,0]\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) + P_T\bigl(T\Delta(\alpha)\bigr), \tag{3.2.23}$$

где для $\Delta = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$

$$P_T\bigl(T\Delta[\alpha)\bigr) := \exp\bigl\{-T\widehat{D}_T(\alpha) + o(T)\bigr\}, \tag{3.2.24}$$

$$\widehat{D}_T(\alpha) := \inf_{0\leqslant t\leqslant 1}\bigl[\mathbf{D}(t,\alpha) + l(T,1-t)\bigr]. \tag{3.2.25}$$

Доказательство. Соотношение (3.2.23) вытекает из соотношения (3.2.5) (в неоднородном случае надо в (3.2.5) заменить H_1 на $\widetilde{H}_1$), в котором интеграл в правой части обозначен через $P_T\bigl(T\Delta[\alpha)\bigr)$. В силу (3.2.6) при $u_k = k\delta$, $N = 1/\delta$ имеем

$$\begin{aligned} P_T\bigl(T\Delta[\alpha)\bigr) &= \int\limits_0^T \widetilde{H}_1\bigl(du, T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}(\tau > T-u) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{H}_1\bigl(T\delta[u_k), T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}(\tau > T - Tu_k) \geqslant \\ &\geqslant \max_{k<N}\widetilde{H}_1\bigl(T\delta[u_k), T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}(\tau > T - Tu_k). \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Далее, по теореме 3.2.1 при $\delta = \overline{o}(1)$, $\Delta = \overline{o}(1)$ имеем при $T \to \infty$

$$\frac{1}{T}\ln P_T\bigl(T\Delta[\alpha)\bigr) \geqslant -\min_{k<N}\bigl[\mathbf{D}(u_k,\alpha) + l(T,1-u_k)\bigr] + o(1) = -\widehat{D}_T(\alpha) + o(1).$$

Получим теперь обратное неравенство. Аналогично (3.2.26) из (3.2.6) получаем

$$\begin{aligned} P_T\bigl(T\Delta[\alpha)\bigr) &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{H}_1\bigl(T\delta[u_k), T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}(\tau > T - Tu_{k+1}) \leqslant \\ &\leqslant N\max_{k<N}\widetilde{H}_1\bigl(T\delta[u_k), T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}(\tau > T - Tu_{k+1}) \end{aligned}$$

Далее, так как $\delta = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$, $N = 1/\delta$, функция $\mathbf{D}(t, \alpha)$ непрерывна в области конечности, то $\frac{\ln N}{T} \to 0$ при $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T} \ln P_T\big(T\Delta[\alpha]\big) \leqslant \frac{\ln N}{T} - \widehat{D}_T(\alpha) + o(1) = -\widehat{D}_T(\alpha) + o(1).$$

Теорема 3.2.2 доказана.

Для получения явных представлений для функции $\widehat{D}_T(\alpha)$ нам понадобятся свойства второй функции уклонений $\mathbf{D}(t, \alpha)$.

§ 3.3 Функции уклонений для меры восстановления и для обобщенных процессов восстановления

3.3.1 Свойства функции $\mathbf{D}(t, \alpha)$ и функций уклонений для ОПВ

Предварительная версия ПБУ (теорема 3.2.2) показывает, что в широких условиях определяющую роль при отыскании асимптотики $\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha]\big)$ играют функции $\widehat{D}_T(\alpha)$ и $l(T, y)$ (см. (3.2.24), (3.2.25)). Чтобы определить асимптотику функции $\widehat{D}_T(\alpha)$, нам понадобятся свойства функций $\mathbf{D}(t, \alpha)$ и $\ln \mathbf{P}(\tau > Ty)$

Как уже отмечалось, функция $\mathbf{D}(t, \alpha)$, определенная в (3.2.18), сохраняет свойства функции $\mathbf{D}_\Lambda(t, \alpha)$, отмеченные в (3.2.14)–(3.2.17). Именно,

Функция $\mathbf{D}(t, \alpha)$ выпукла и линейчата:

$$\mathbf{D}(vt, v\alpha) = v\mathbf{D}(t, \alpha).$$

Кроме того она непрерывна снизу и полуаддитивна:

$$\mathbf{D}(t + u, \alpha + \beta) \leqslant \mathbf{D}(t, \alpha) + \mathbf{D}(u, \beta).$$

В основе многих дальнейших построений (см., например, определение базовой функции в п. 3.5.1, соотношение (3.5.3), теорема 3.5.1 и др.) лежит следующее представление для функции $\mathbf{D}(t, \alpha)$. Его доказательство изложено в [12] (теорема 2.9.1).

Теорема 3.3.1. *При всех (t, α) имеет место представление*

$$\mathbf{D}(t, \alpha) = \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} (\lambda t + \mu\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} (\lambda t + \mu\alpha), \qquad (3.3.1)$$

где $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ — граница множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \big\{(\lambda, \mu) : \mathbf{A}(\lambda, \mu) \leqslant 0\big\}$.

Это утверждение дает, наряду с (3.2.18), еще одну характеризацию второй функции уклонений $\mathbf{D}(t,\alpha)$, которая играет существенную роль в последующем изложении.

Отметим, что в силу линейчатости функции $\mathbf{D}$ при $t>0$ выполняется равенство
$$\mathbf{D}(t,\alpha)=t\mathbf{D}\big(1,\alpha/t\big) \tag{3.3.2}$$
и, стало быть, функция двух переменных $\mathbf{D}(t,\alpha)$ полностью определяется значениями функции одной переменной
$$D(\alpha):=\mathbf{D}(1,\alpha). \tag{3.3.3}$$

Функция $D(\alpha)$ в широких предположениях оказывается функцией уклонений для ОПВ. В силу (3.3.1)
$$D(\alpha)=\sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}}\{\lambda+\mu\alpha\}. \tag{3.3.4}$$

Пусть далее $\big(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\big)$ — точка из $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, в которой достигается sup в представлении (3.3.4) для функции $D(\alpha)$. Тогда
$$D(\alpha)=\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)\alpha. \tag{3.3.5}$$

Для описания функции уклонений ОПВ в общем случае нам понадобится наряду с функцией $D(\alpha)$ функция
$$\widehat{D}(\alpha)=\begin{cases}\inf\limits_{t\in[0,1]}\big[\mathbf{D}(t,\alpha)+(1-t)\lambda_+\big], & \text{если } \lambda_+<\infty,\\ D(\alpha), & \text{если } \lambda_+=\infty,\end{cases} \tag{3.3.6}$$
где, как и прежде,
$$\lambda_+:=\sup\{\lambda:\ \mathbf{E}e^{\lambda\tau}<\infty\}.$$

В дальнейшем важную роль будет играть значение
$$D(0)=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}}\lambda=\sup\{\lambda:\ \inf_{\mu}\mathbf{A}(\lambda,\mu)\leqslant 0\}. \tag{3.3.7}$$

Оно конечно, если случайная величина ζ разнозначна, т.е.
$$\mathbf{P}(\zeta<0)>0,\qquad \mathbf{P}(\zeta>0)>0, \tag{3.3.8}$$
или
$$\mathbf{P}(\zeta=0)>0. \tag{3.3.9}$$

Если выполнено (3.3.8) или (3.3.9), то $\mathbf{\Lambda}(t,0) < \infty$ при некотором $t > 0$,

$$D(0) = \mathbf{D}(1,0) \leqslant \frac{1}{t}\,\mathbf{\Lambda}(t,0) < \infty.$$

Возможность $D(0) = \infty$ связана со специальными случаями, альтернативными к (3.3.8), (3.3.9):

$$\mathbf{P}(\zeta > 0) = 1 \quad \text{или} \quad \mathbf{P}(\zeta < 0) = 1. \tag{3.3.10}$$

В первом случае $\mathbf{\Lambda}(t,\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \downarrow 0$. В то же время

$$D(\alpha) \to D(0) \quad \text{при } \alpha \downarrow 0,$$

где значение $D(0)$, так же как и в (3.3.8), (3.3.9), может быть конечным (см. ниже пример 3.5.2).

Заметим, что число $D(0) = D(1,0) < \infty$ является тем значением, при котором прямая $\lambda = D(0)$ в плоскости (λ,μ) касается справа границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ выпуклого множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ (см. (3.3.7)).

Следующее утверждение описывает ряд свойств функций $D(\alpha)$ и $\widehat{D}(\alpha)$. Изучение этих свойств будет продолжено в § 3.5.

Теорема 3.3.2. (i). *Функции $\widehat{D}(\alpha) \leqslant D(\alpha)$ выпуклы и непрерывны снизу (изнутри области конечности). Они неотрицательны, обращаются в 0 в единственной точке $\alpha = a = \frac{a_\zeta}{a_\tau}$ и*

$$\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha) \tag{3.3.11}$$

в окрестности точки $\alpha = a$. Всегда

$$\widehat{D}(0) = \min\bigl\{D(0), \lambda_+\bigr\}. \tag{3.3.12}$$

(ii). *Если выполнено условие*

$$[\boldsymbol{\lambda}_+] \qquad\qquad \lambda_+ \geqslant D(0), \tag{3.3.13}$$

или, что то же,

$$\widehat{D}(0) = D(0),$$

то равенство (3.3.11) справедливо при всех α.

Если при заданном α точка $\bigl(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\bigr) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ (см. (3.3.5)) обладает свойством $\lambda(\alpha) \leqslant \lambda_+$, то также имеет место равенство (3.3.11).

(iii). *Если выполнено хотя бы одно из следующих четырех условий:*

$$\begin{cases} 1) \ \textit{Область } (\mathcal{A}) \textit{ вложена в полуплоскость } \lambda < \lambda_+, \\ \quad (\textit{как в случае независимых } \tau \textit{ и } \zeta), \\ 2) \ \mathbf{E}\zeta = 0, \\ 3) \ \tau \Subset [\mathbf{C}_\infty] \quad \textit{или} \quad \zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty], \end{cases} \tag{3.3.14}$$

то выполнено условие $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.

(iv). *Если выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \{\lambda < \lambda_+\}, \qquad \mathbf{E}\zeta = 0, \qquad \lambda_+ = \infty,$$

то имеет место строгое неравенство $\lambda_+ > D(0)$.

(v). *Всегда*

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} D(\pm\alpha) > 0. \tag{3.3.15}$$

Если дополнительно $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, *то*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} D(\pm\alpha) = \infty. \tag{3.3.16}$$

Замечание 3.3.1. 1) Тот факт, что условие $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ выполнено не всегда, т.е. возможно неравенство $\lambda_+ < D(0)$, проиллюстрирован ниже в примере 3.5.1.

2) Нетрудно видеть, что условие 1) в (3.3.14) всегда выполнено, если при всех $v > 0$, $w > 0$

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant v, \zeta \gtreqless \pm w) \leqslant \mathbf{P}(\tau \geqslant v)\mathbf{P}(\zeta \gtreqless \pm w) r(v,w), \ \ w > 0, \tag{3.3.17}$$

где

$$\ln r(v,w) \leqslant \varepsilon_v v + \varepsilon_{|w|}|w|, \qquad \varepsilon_t \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{3.3.18}$$

Тогда область $(\mathcal{A})$ будет вложена в прямоугольник $(-\infty, \lambda_+) \times (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$ (как в случае независимости τ и ζ). Например, если при некотором $\beta \in (0,1)$ вне единичного шара выполняется

$$\ln r(v,w) \leqslant c\big(v + |w|\big)^\beta, \qquad c = \text{const},$$

то условие (3.3.17) выполнено, так как $\big(v + |w|\big)^\beta \leqslant v^\beta + |w|^\beta$.

Доказательство теоремы 3.3.2. (i). Если $\lambda_+ = \infty$, то по определению (3.3.6) $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$, где функция $D(\alpha)$ выпукла и непрерывна снизу. Последнее вытекает из свойств выпуклости и непрерывности снизу функции $\mathbf{D}(t,\alpha)$ (см. начало раздела 2.3.1).

Если $\lambda_+ < \infty$, то для любого α найдется значение $t_\alpha \in [0,1]$ такое, что

$$\widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + (1 - t_\alpha)\lambda_+. \tag{3.3.19}$$

Поэтому в силу выпуклости функции $\mathbf{D}(t,\alpha)$ для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, имеем

$$\begin{aligned} p\widehat{D}(\alpha) + q\widehat{D}(\beta) = p\mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + p(1 - t_\alpha)\lambda_+ + q\mathbf{D}(t_\beta, \beta) + q(1 - t_\beta)\lambda_+ \geqslant \\ \geqslant \mathbf{D}(pt_\alpha + qt_\beta, p\alpha + q\beta) + (1 - (pt_\alpha + qt_\beta))\lambda_+ \geqslant \widehat{D}(p\alpha + q\beta). \end{aligned}$$

Выпуклость функции $\widehat{D}(\alpha)$ установлена.

Докажем непрерывность функции $\widehat{D}(\alpha)$ снизу. Пусть $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Считая, не ограничивая общности, что последовательность t_{α_n} сходится к $t \in [0,1]$ при $n \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} \widehat{D}(\alpha_n) = \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{D}(t_{\alpha_n}, \alpha_n) + \lim_{n\to\infty} (1 - t_{\alpha_n})\lambda_+ \geqslant \\ \geqslant \mathbf{D}(t,\alpha) + (1 - t)\lambda_+ \geqslant \widehat{D}(\alpha). \end{aligned}$$

Непрерывность снизу функции $\widehat{D}(\alpha)$ также доказана. Неравенство $\widehat{D}(\alpha) \leqslant D(\alpha)$ следует непосредственно из определения (3.3.6).

В теореме 4.10.1 в [12] установлено, что в окрестности точки $a = \frac{a_\zeta}{a_\tau}$ выполняется $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$, и при $\alpha \to a$

$$D(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - a)^2 D''_a\bigl[1 + o(1)\bigr],$$

где коэффициент

$$D''_a := \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathbf{D}(1,\alpha)\big|_{\alpha=a} \in (0,\infty)$$

может быть найден в явном виде (см. [12], теорема 2.9.2). Поэтому выпуклые функции $D(\alpha)$ и $\widehat{D}(\alpha)$ обращаются в ноль в единственной точке $\alpha = a$.

Докажем (3.3.12). Оценим $\widehat{D}(\alpha)$ снизу. В силу свойства (3.2.14) имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{D}(t,0) = tD(0), \\ \widehat{D}(0) = \inf_{t\in[0,1]}\{tD(0) + (1 - t)\lambda_+\} = \min\{D(0), \lambda_+\}. \end{gathered}$$

(ii). Пусть $\lambda_+ \geqslant D(0)$. В силу теоремы 3.3.1 для любых $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}$ и $t \geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{D}(t, \alpha) \geqslant t\lambda + \alpha\mu = \lambda + \alpha\mu - \lambda(1-t). \qquad (3.3.20)$$

Пусть сначала $D(\alpha) < \infty$. Полагая $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$, в силу (3.3.20) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(t, \alpha) + \lambda_+(1-t) \geqslant \lambda(\alpha) + \alpha\mu(\alpha) + (1-t)(\lambda_+ - \lambda(\alpha)) = \\ = D(\alpha) + (1-t)(\lambda_+ - \lambda(\alpha)).\end{aligned}$$

Так как $\lambda_+ \geqslant D(0)$, то в силу (3.3.7) $\lambda(\alpha) \leqslant D(0) \leqslant \lambda_+$ и при всех $t \in [0,1]$

$$(1-t)(\lambda_+ - \lambda(\alpha)) \geqslant 0. \qquad (3.3.21)$$

Стало быть,

$$\mathbf{D}(t, \alpha) + \lambda_+(1-t) \geqslant D(\alpha) \quad \text{и} \quad \widehat{D}(\alpha) \geqslant D(\alpha).$$

Если $D(\alpha) = \infty$, то при заданном $N > 0$ вместо $\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$ надо выбирать точку $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}$ такую, что $\widehat{\lambda} + \alpha\widehat{\mu} \geqslant N$, и повторить приведенные выше рассуждения. Получим $\widehat{D}(\alpha) \geqslant N$, что в силу произвольности N означает, что $\widehat{D}(\alpha) = \infty$.

Обратное неравенство $\widehat{D}(\alpha) \leqslant D(\alpha)$ очевидно. Это доказывает (3.3.11) при всех α.

Если α таково, что $\lambda_+ \geqslant \lambda(\alpha)$, то неравенство (3.3.21) (для которого требовалось условие $\lambda_+ \geqslant D(0)$) выполнено очевидным образом. Остальные рассуждения, приводящие к (3.3.11), остаются прежними.

(iii). 1) Пусть область $(\mathcal{A})$ вложена в полуплоскость $\lambda < \lambda_+$. Так как в силу (3.3.7)

$$D(0) = \sup\big\{\lambda : \inf_{\mu} \mathbf{A}(\lambda, \mu) \leqslant 0\big\},$$

то этот sup не может превосходить λ_+, поскольку по условию $\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и любом μ. Поэтому $D(0) \leqslant \lambda_+$, $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$.

2) Если $\mathbf{E}\zeta = 0$, то $\mathbf{A}(0, \mu) > 0$ при $\mu \neq 0$, $\mathbf{A}(\lambda, 0) < 0$ при $\lambda < 0$, так что в силу (3.3.7) $D(0) = 0$ и выполнено условие $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ (см. (3.3.13)).

3) Если $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, то $\lambda_+ = \infty$ и выполнение (3.3.13) очевидно.

Пусть теперь $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\lambda_+ < \infty$. Установим сначала, что при любых $\lambda > \lambda_+$ и μ выполнено

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \infty. \qquad (3.3.22)$$

Допустим противное, что $\mathbf{A}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) < \infty$ при некоторых $\widetilde{\lambda} > \lambda_+$ и $\widetilde{\mu}$. Так как $A^{(\zeta)}(-\mu) = \ln \mathbf{E}e^{-\mu\zeta} < \infty$ при любом μ, то при

$$\lambda \in (\lambda_+, \widetilde{\lambda}), \quad p := \frac{\lambda}{\widetilde{\lambda}}, \quad q := 1 - p, \quad \mu := \widetilde{\mu}p, \quad \mu' := \frac{\mu}{q}$$

получим
$$e^{p\mathbf{A}(\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu})} = (\mathbf{E}e^{\widetilde{\lambda}\tau+\widetilde{\mu}\zeta})^p < \infty,$$
и в силу неравенства Гельдера
$$\infty > e^{p\mathbf{A}(\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu})+qA^{(\zeta)}(-\mu')}=(\mathbf{E}e^{\widetilde{\lambda}\tau+\widetilde{\mu}\zeta})^p(\mathbf{E}e^{-\mu'\zeta})^q \geqslant \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta-\mu\zeta}=\mathbf{E}e^{\lambda\tau}=\infty.$$
Полученное противоречие доказывает (3.3.22). Из (3.3.22), (3.3.7) вытекает, что множество $\mathcal{A}$ лежит в полупространстве
$$\{(\lambda,\mu):\ \lambda \leqslant \lambda_+\},$$
и, стало быть, выполнено первое условие в (3.3.14).

(iv). Если $\mathbf{E}\zeta = 0$ или $\lambda_+ = \infty$, то неравенство $\lambda_+ > D(0)$ уже установлено. Соотношение $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \{\lambda < \lambda_+\}$ означает, что λ_+ больше первой координаты любой точки (λ,μ) из $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, то есть (см. (3.3.7))
$$\lambda_+ > \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \lambda = D(0).$$
Условие $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \{\lambda < \lambda_+\}$ можно заменить, очевидно, на условие $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \{\lambda < \lambda_+\}$.

(v). Соотношение (3.3.15) является следствием выпуклости функции $D(\alpha) \geqslant 0$, которая обращается в ноль в единственной точке $a = \frac{a_\zeta}{a_\tau}$.

Установим соотношение (3.3.16) в случае $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Пусть функция $h_+(\lambda)$ при $\lambda \leqslant 0$ определяет верхнюю ветвь границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ выпуклого множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, а функция $h_-(\lambda)$ при $\lambda \leqslant 0$ определяет ее нижнюю ветвь. Так как луч $\big\{(\lambda,\mu):\ \lambda \leqslant 0,\, \mu = 0\big\}$ целиком лежит в множестве $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, то функция $h_+(\lambda)$ не отрицательна, выпукла вверх и не убывает при $|\lambda| \to \infty$ в области $\lambda \leqslant 0$. Аналогично, функция $h_-(\lambda)$ не положительна, выпукла вниз и не возрастает при $|\lambda| \to \infty$ в области $\lambda \leqslant 0$. Поскольку при любом $N < \infty$ в силу неравенства Коши
$$\sup_{|\mu|\leqslant N} \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta} \leqslant \sup_{|\mu|\leqslant N} \sqrt{\mathbf{E}e^{2\mu\zeta}}\sqrt{\mathbf{E}e^{2\lambda\tau}} \to 0$$
при $\lambda \to -\infty$, то для всех достаточно больших R при $\lambda \leqslant -R$ выполняется $h_-(\lambda) \leqslant -N < N \leqslant h_+(\lambda)$. Это означает, что
$$h_\pm(\lambda) \to \pm\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to -\infty. \tag{3.3.23}$$
Так как $(-\alpha,\ h_\pm(-\alpha)) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ при всех $\alpha > 0$, то в силу представления (3.3.4) имеем неравенства
$$D(\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda + \mu\alpha\} \geqslant -\alpha + h_+(-\alpha)\alpha = \alpha\big(h_+(-\alpha) - 1\big);$$
$$D(-\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda - \mu\alpha\} \geqslant -\alpha - h_-(-\alpha)\alpha = \alpha\big(- h_-(-\alpha) - 1\big).$$

Из этих неравенств и из свойства (3.3.23) вытекает, что выпуклая непрерывная снизу функция $D(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ растет быстрее любой линейной функции, т.е. имеет место (3.3.16). Утверждение (iv) теоремы 3.3.2 и сама теорема 3.3.2 доказаны.

В § 3.5 будет показано, что в случае $\lambda_+ < D(0)$ существует окрестность (β_-, β_+) точки 0, в которой $\widehat{D}(\alpha) < D(\alpha)$, а вне этой окрестности $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$. Будет найден явный вид границ $\beta_\pm$ этой окрестности и будет пояснен вероятностный смысл условия $\lambda_+ < D(0)$.

В гл. 5 нам понадобятся более полные сведения о функциях уклонений ОПВ. В связи с этим в § 3.5 будет продолжено изучение свойств функций D, $\widehat{D}$ и ряда других характеристик ОПВ.

§ 3.4 Принципы больших уклонений для $Z(T)$

Теорема 3.3.2 показывает, что существует альтернатива:

$$\begin{aligned} &\textit{либо } \widehat{D}(0) = D(0) \leqslant \lambda_+ \ (\text{выполнено } [\boldsymbol{\lambda}_+]), \\ &\textit{либо } \widehat{D}(0) = \lambda_+ < D(0). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

В первом случае

$$\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha) \quad \text{при всех} \quad \alpha.$$

Во втором случае нам понадобится дополнительное условие (неравенство $\lambda_+ < D(0)$ в него включено).

$[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$. $\lambda_+ < D(0)$ *и предполагается, что выполнено условие «грубой гладкости» распределения* τ (ПБУ для τ)

$$\ln \mathbf{P}(\tau \geqslant T) \sim -\lambda_+ T \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{3.4.2}$$

3.4.1 Общий случай

Основным утверждением этого раздела является

Теорема 3.4.1. *Пусть выполнены условие допустимой неоднородности*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1] \tag{3.4.3}$$

и условие $[\boldsymbol{\lambda}_+] \bigcup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$. *Если* $\alpha = 0$, *то дополнительно к* (3.4.3) *предполагается также, что*

$$\lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E} e^{\lambda \tau_1} < \infty\} \geqslant \min\{D(0), \lambda_+\} = \widehat{D}(0). \tag{3.4.4}$$

При выполнении названных условий

(i). *Справедлив локальный ПБУ, т.е. для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[\alpha)\right) = -\widehat{D}(\alpha), \tag{3.4.5}$$

где $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$ (см. (3.1.1)).

(ii). *Справедлив «интегралный» ПБУ, т.е. для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in B\right) \leqslant -\widehat{D}\big([B]\big), \tag{3.4.6}$$

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\frac{1}{T} Z(T) \in B) \geqslant -\widehat{D}\big((B)\big), \tag{3.4.7}$$

где $[B]$ *и* (B) *— замыкание и внутренность множества* B, *соответственно,*

$$\widehat{D}(B) := \inf_{\alpha\in B} \widehat{D}(\alpha).$$

Функцию $\widehat{D}(\alpha)$ мы будем называть *функцией уклонений ОПВ общего вида*. Если $\lambda_+ \geqslant D(0)$, то $\widehat{D}(\alpha)$ превращается в $D(\alpha)$ и ее мы будем называть просто *функцией уклонений ОПВ*.

Утверждение (i) теоремы 3.4.1 при некотором упрощающем предположении доказано в [12] (см. теорему 4.10.1).

Из теоремы 3.4.1 вытекают аналогичные утверждения для обобщенного процесса восстановления

$$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt, \quad t \in [0, T],$$

с линейным сносом qt.

Следствие 3.4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4.1. *Тогда при любом* $q \in \mathbb{R}$ *для процесса* $Z^{(q)}(T)$ *имеют место все утверждения теоремы* 3.4.1 *с функцией уклонений*

$$D^{Z^{(q)}}(\alpha) = \widehat{D}(\alpha - q).$$

Доказательство теоремы 3.4.1.

(i). Воспользуемся предварительной версией ПБУ в теореме 3.2.2. Согласно этой теореме (см. (3.2.23)–(3.2.25)) нам для доказательства локального ПБУ (3.4.5) надо убедиться, что

$$\lim_{T\to\infty} \widehat{D}_T(\alpha) = \widehat{D}(\alpha), \tag{3.4.8}$$

и что в случае $\alpha = 0$ выполняется

$$\ln \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) \leqslant -T\widehat{D}(0) + o(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.4.9}$$

Докажем (3.4.8). Обозначим

$$\widehat{D}_+(\alpha) := \varlimsup_{T\to\infty} \widehat{D}_T(\alpha), \qquad \widehat{D}_-(\alpha) := \varliminf_{T\to\infty} \widehat{D}_T(\alpha).$$

(a). *Оценка сверху.* Покажем, что

$$\widehat{D}_+(\alpha) \leqslant \widehat{D}(\alpha). \tag{3.4.10}$$

Очевидно,

$$\widehat{D}_T(\alpha) \leqslant \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + l(T, 1 - t_\alpha),$$

где функция $l(T, y)$ определена в (3.2.22), t_α из (3.3.19).

Если $t_\alpha = 1$ (это всегда так, если $\lambda_+ \geqslant D(0)$), то в силу равенства $l(T, 1) = 0$ имеем

$$\widehat{D}_T(\alpha) \leqslant \mathbf{D}(1, \alpha) = \widehat{D}(\alpha).$$

Отсюда следует соотношение (3.4.10).

Если $t_\alpha < 1$, то $\lambda_+ = \widehat{D}(0) < D(0)$ и в силу условия $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau > Ty) = -\lambda_+ y,$$

так что

$$\widehat{D}_+(\alpha) \leqslant \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + \lim_{T\to\infty} l(T, 1 - t_\alpha) = \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + (1 - t_\alpha)\lambda_+ = \widehat{D}(\alpha)$$

(см. (3.3.19), (3.2.25)). Соотношение (3.4.10) установлено.

(b). *Оценка снизу.* Покажем, что

$$\widehat{D}_-(\alpha) \geqslant \widehat{D}(\alpha) \tag{3.4.11}$$

(при этом условие $[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ не требуется).

Рассмотрим сначала случай $\lambda_+ < \infty$. В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$\mathbf{P}(\tau > y) \leqslant c e^{-\lambda_+(1-\varepsilon)y}, \tag{3.4.12}$$

поэтому (см. (3.2.25))

$$\widehat{D}_T(\alpha) \geqslant \inf_{0\leqslant t\leqslant 1} \big[\mathbf{D}(t, \alpha) + \lambda_+(1 - \varepsilon)(1 - t)\big] + O(1/T) \geqslant$$
$$\geqslant (1 - \varepsilon)\widehat{D}(\alpha) + O(1/T),$$
$$\widehat{D}_-(\alpha) = \varliminf_{T\to\infty} \widehat{D}_T(\alpha) \geqslant (1 - \varepsilon)\widehat{D}(\alpha). \tag{3.4.13}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то соотношение (3.4.11) в случае $\lambda_+ < \infty$ доказано.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_+ = \infty$. Повторим предыдущие рассуждения, заменив при этом в (3.4.12) величину λ_+ на произвольное большое N и положив $\varepsilon = 0$. Тогда аналогично (3.4.13) получим неравенство

$$\widehat{D}_-(\alpha) \geqslant \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{\mathbf{D}(t, \alpha) + (1-t)N\}.$$

Так как $\mathbf{D}(t, \alpha)$ — выпуклая по t функция, то существует постоянная d такая, что $\mathbf{D}(t, \alpha) \geqslant \mathbf{D}(1, \alpha) + (t-1)d$. Поэтому

$$\mathbf{D}(t, \alpha) + (1-t)N \geqslant \mathbf{D}(1, \alpha) + (1-t)(N-d) \geqslant \mathbf{D}(1, \alpha) \ \text{ при } \ N > d,$$
$$\widehat{D}_-(\alpha) \geqslant \mathbf{D}(1, \alpha) = \widehat{D}(\alpha).$$

Утверждение (3.4.8) установлено.

Если $\alpha \neq 0$, то первое слагаемое в правой части (3.2.5) равно нулю и утверждение (3.4.5) теоремы 3.4.1 доказано. Если же $\alpha = 0$, то в (3.2.5) будет иметь равенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[0]\right) =$$
$$= \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) + \int_0^T \widetilde{H}_1\big(dt, T\Delta[0]\big)\mathbf{P}(\tau > T - t). \qquad (3.4.14)$$

Мы уже установили, что второе слагаемое в правой части (3.4.14) имеет вид $e^{-T\widehat{D}(0)(1+o(1))}$. Поэтому нам осталось доказать (3.4.9). В силу экспоненциального неравенства Чебышева и предположения (3.4.4) имеем

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) \leqslant e^{-T\widehat{D}(0)(1+o(1))}.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) \leqslant -\widehat{D}(0). \qquad (3.4.15)$$

Это неравенство эквивалентно (3.4.9). Утверждение (i) теоремы 3.4.1 доказано.

(ii). Поскольку локальный ПБУ для $\frac{1}{T} Z(T)$ установлен, то для доказательства «интегрального» ПБУ достаточно убедиться (см., например, [12], § 4.1), что для любого $N < \infty$ найдется $R = R_N < \infty$ такое, что

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} \big|Z(T)\big| \geqslant R\right) \leqslant -N. \qquad (3.4.16)$$

Заметим, что для произвольного $M < \infty$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}|Z(T)| \geqslant R\right) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\big(\nu(T) \geqslant TM\big) + \mathbf{P}\big(|\zeta_1| + \dots + |\zeta_{TM}| \geqslant RT\big), \qquad (3.4.17)$$

где

$$\mathbf{P}(\nu(T) \geqslant TM) \leqslant \mathbf{P}(T_{MT} \leqslant T)$$

(считаем для простоты, что MT — целое число). Из экспоненциального неравенства Чебышева при M таком, что $\frac{1}{M} < \mathbf{E}\tau$, получаем

$$\mathbf{P}(\nu(T) \geqslant TM) \leqslant e^{-MT\Lambda^{(\tau)}(1/M)}.$$

Так как $\Lambda^{(\tau)}(v) \to \infty$ при $v \to 0$, то при достаточно большом $M = N$ находим

$$\mathbf{P}\big(\nu(T) \geqslant TM\big) \leqslant e^{-NT}. \qquad (3.4.18)$$

Поскольку случайные векторы $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1)$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$, определяющие процесс $Z(T)$, удовлетворяют условию [**C**], то с помощью экспоненциального неравенства Чебышева аналогично оценивается и второе слагаемое в правой части (3.4.17), так что в итоге выполнено (3.4.16). Теорема 3.4.1 доказана.

Замечание 3.4.1. Условия (3.4.3), (3.4.4) допустимой неоднородности являются в случае $\widehat{D}(0) = D(0)$ *минимальными* для справедливости локального ПБУ (3.4.5). Это следует из того, что эти условия являются необходимыми для выполнения (3.4.5). Действительно, пусть $\widehat{D}(0) = D(0)$ и справедлив локальный ПБУ (3.4.5). Установим неравенство (3.4.4). Поскольку

$$\mathbf{P}(\tau_1 > T) \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{1}{T}\,Z(T) \in \Delta[0)\right),$$

то

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau_1 > T) \leqslant -D(0).$$

Отсюда вытекает, что для любого $\lambda < D(0)$ выполняется

$$\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{P}(\tau_1 > t)dt < \infty, \qquad \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty.$$

Последнее означает, что $\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant D(0)$ и неравенство (3.4.4) имеет место.

Несколько более сложным образом в [33] установлена необходимость и условия (3.4.3).

Замечание 3.4.2. Если процесс $Z(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4.1, то, очевидно, процесс $-Z(t)$ также удовлетворяет этим условиям. Поэтому локальный ПБУ (3.4.5) допускает следующую эквивалентную (3.4.5) формулировку:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=-\widehat{D}(\alpha),$$

где $(\alpha)_\varepsilon$ есть ε-окрестность точки α, $\varepsilon=\overline{o}(1)$ при $T\to\infty$ ($\varepsilon_T\to 0$ достаточно медленно при $T\to\infty$). Отсюда, в свою очередь, нетрудно получить, что для любой последовательности $T'\sim T$ при $T\to\infty$ выполняется

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T')}{T}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=-\widehat{D}(\alpha).$$

Замечание 3.4.3. Из доказательства теоремы 3.4.1 (см. также замечание 2 в [32]) видно, что утверждения этой теоремы останутся справедливыми и в том случае, когда распределение первого скачка (обозначим его через $\boldsymbol{\xi}_{1,T}=(\tau_{1,T},\zeta_{1,T})$) зависит от T так, что при всех (λ,μ) и достаточно больших T

$$\psi_{1,T}(\lambda,\mu):=\mathbf{E}e^{\lambda\tau_{1,T}+\mu\zeta_{1,T}}\leqslant c\psi_1(\lambda,\mu),\quad c=\mathrm{const},\tag{3.4.19}$$

где $\psi_1(\lambda,\mu)$ — преобразование Лапласа над распределением некоторого *фиксированного* случайного вектора $\boldsymbol{\xi}_1=(\tau_1,\zeta_1)$. При этом условия теоремы 3.4.1 следует относить к этому фиксированному вектору $\boldsymbol{\xi}_1$.

3.4.2 Однородные процесс и процессы со стационарными приращениями

Очевидно, что для *однородных* процессов восстановления $Z(t)$, для которых случайный вектор $\boldsymbol{\xi}_1=(\tau_1,\zeta_1)$ имеет то же распределение, что и вектор $\boldsymbol{\xi}=(\tau,\zeta)$, соотношения (3.4.3), (3.4.4) выполнены. Поэтому *для однородных процессов восстановления в теореме* 3.4.1 *и следствии* 3.4.1 *условия* (3.4.3), (3.4.4) *излишни* (выполняются автоматически).

Обратимся теперь к важному для приложений случаю, когда процесс $Z(t)$ имеет *стационарные приращения*, т.е. распределение разностей

$$Z(t+h)-Z(t)$$

не зависит от $t \geqslant 0$. Как известно, процесс $Z(t)$ является процессом со стационарными приращениями, если «начальный» вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ выбран специальным образом так, что

$$\boldsymbol{\psi}_1(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\mu\zeta_1} = \frac{1}{\lambda \mathbf{E}\tau}\big(\boldsymbol{\psi}(\lambda, \mu) - \boldsymbol{\psi}(0, \mu)\big), \tag{3.4.20}$$

где $\boldsymbol{\psi}(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}$ (см. лемму 1.1.2, а также [12], § 4.10).

Возникает естественный вопрос: в каких случаях условия допустимой неоднородности (3.4.3), (3.4.4) теоремы 3.4.1 будут выполнены для процессов со стационарными приращениями? Ответ на этот вопрос отчасти содержится в следующем утверждении.

Везде в дальнейшем начальные скачки $\boldsymbol{\xi}_1$ для ОПВ со стандартными приращениями мы будем обозначать через $\boldsymbol{\xi}^{(st)}$ — для того, чтобы отличать их от начальных скачков в общем случае. Соответственно, все обозначения, соответствующие $\boldsymbol{\xi}^{(st)}$, будут снабжаться верхним индексом (st). Например, функция $\boldsymbol{\psi}^{(st)}(\lambda, \mu)$ равна правой части в (3.4.20),

$$\mathcal{A}^{(st)} := \big\{(\lambda, \mu) : \ \boldsymbol{\psi}^{(st)}(\lambda, \mu) < \infty\big\}$$

и т.д.

Следствие 3.4.2. *Пусть $Z(t) = Z^{(st)}(t)$ есть ОПВ со стационарными приращениями, (т.е. $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}^{(st)}$) и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий*

(a) *множество $(\mathcal{A})$ прямоугольно (как в случае независимых τ и ζ), т.е.*

$$(\mathcal{A}) = (-\infty, \lambda_+) \times (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)});$$

(b) $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$.
Тогда $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при всех α и справедливы утверждения (3.4.5)–(3.4.7) *теоремы* 3.4.1.

Доказательство. Тот факт, что $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$, вытекает из условий (a), (b) и теоремы 3.3.2 (см. (3.3.14)). Остается проверить выполнение условий допустимой неоднородности (3.4.3), (3.4.4). Так как в силу (3.4.20) для рассматриваемых процессов выполняется $\lambda_+^{(\tau_1)} = \lambda_+$, то условие (3.4.4) выполнено.

Рассмотрим условие (3.4.3). Если выполнено (a), то $(0, \mu) \in \mathcal{A}$ при $\mu \in (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$ и, стало быть, в силу (3.4.20) $(\mathcal{A}^{(st)}) = (\mathcal{A})$, что влечет за собой выполнение (3.4.3). Если выполнено (b), то $\boldsymbol{\psi}(0, \mu) < \infty$ при любом μ и вновь $(\mathcal{A}^{(st)}) = (\mathcal{A})$ и выполнено (3.4.3). Следствие 3.4.1 доказано.

Для зависимых τ и ζ может оказаться, что существует точка $(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ при $\lambda<0$ такая, что $\boldsymbol{\psi}^{(st)}(\lambda,\mu)=\infty$, и условие (3.4.3) не будет выполнено. На это указывает следующий

Пример 4.1. Пусть $\zeta=\tau+\omega$, где ω не зависит от τ. Тогда

$$\boldsymbol{\psi}(\lambda,\mu):=\mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu(\tau+\omega)}=\psi^{(\tau)}(\lambda+\mu)\psi^{(\omega)}(\mu),$$

и в силу (3.4.20)

$$\boldsymbol{\psi}^{(st)}(\lambda,\mu)=\frac{1}{\lambda\mathbf{E}\tau}\psi^{(\omega)}(\mu)\big[\psi^{(\tau)}(\lambda+\mu)-\psi^{(\tau)}(\mu)\big].$$

Выберем τ и ω так, что при некотором $\delta\in(0,1/2)$ имеют место следующие соотношения

$$\psi^{(\tau)}(1-\delta)=\infty,\quad \psi^{(\omega)}(1)\leqslant 1,\quad \psi^{(\omega)}(1+\delta)<\infty.$$

Тогда при $(\lambda,\mu)=(-1+\delta_1,1+\delta_2)$ и всех δ_1, δ_2 таких, что $|\delta_1|+|\delta_2|<\delta$, выполняется

$$\boldsymbol{\psi}^{(st)}(\lambda,\mu)=\frac{1}{(-1+\delta_1)\mathbf{E}\tau}\psi^{(\omega)}(1+\delta_2)\big[\psi^{(\tau)}(\delta_1+\delta_2)-\psi^{(\tau)}(1+\delta_2)\big]=\infty.$$

Это означает, что точка $(-1,1)$ вместе с некоторой окрестностью лежит вне множества $\mathcal{A}^{(st)}$, т.е. $(-1,1)\notin[\mathcal{A}^{(st)}]$. В то же время $\psi(-1,1)=\psi^{(\omega)}(1)\leqslant 1$, т.е. $(-1,1)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}$. Сказанное означает, что условие (3.4.3) при $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}^{(st)}$ не выполнено.

Таким образом, выполнение ПБУ для однородных ОПВ не означает, вообще говоря, его выполнение для ОПВ со стационарными приращениями. Если условия (a), (b) следствия 3.4.1 не выполнены, то требуется дополнительная проверка условия допустимой неоднородности (3.4.3).

3.4.3 ПБУ для процесса $\big(Z(t),\gamma(t)\big)$ и его следствия

Если предположить, что в случае $\lambda_+<\infty$ выполнено условие (3.4.2) «грубой правильности» распределения τ, то можно установить ПБУ для вектора $\big(Z(t),\gamma(t)\big)$, из которого будет вытекать ряд полезных следствий. Для простоты мы ограничимся рассмотрением однородного случая.

Теорема 3.4.2. (i). *Пусть* $\lambda_+<\infty$ *и выполнено условие* (3.4.2). *Тогда при* $u<1$, $\Delta=\overline{o}(1)$, $\delta=\overline{o}(1)$ *при* $T\to\infty$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(Z(T)\in T\Delta[\alpha),\gamma(T)\in T\delta[u)\big)=$$
$$=-D(1-u,\alpha)-\lambda_+u+o(1). \qquad (3.4.21)$$

(ii). *Если $\lambda_+ = \infty$, то при $T \to \infty$*

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big) = \frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha), \gamma(T) < \delta T\big) + o(1) = \\ = -D(\alpha) + o(1). \qquad (3.4.22)$$

Если в (3.4.21) положить $u = u_k = k\delta$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 1/\delta$ (считаем, что N — целое число), то $\mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big)$ будет суммой вероятностей под знаком $\ln$ в (3.4.21) при $u = u_k$, $k = 0, \dots, N-1$. Поэтому из теоремы 3.4.2 следует утверждение теоремы 3.4.1.

Доказательство теоремы 3.4.2 в части (i) повторяет рассуждения в доказательствах теорем 3.2.2, 3.4.1, но в упрощенном виде, так как аналог представления (3.2.26) (теперь для $\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha), \gamma(T) \in T\delta[u)\big)$) будет иметь в правой части вместо $\int_0^T$ (ср. с (3.2.26)) интеграл $\int_{T(1-u-\delta)}^{T(1-u)}$, который оценивается сверху и снизу соответственно значениями

$$H_1\big(T\delta[1-u-\delta), T\Delta[\alpha)\big)\mathbf{P}(\tau > uT) \quad \text{и} \\ H_1\big(T\delta[1-u-\delta), T\Delta[\alpha)\big)\mathbf{P}\big(\tau > T(u+\delta)\big). \qquad (3.4.23)$$

Так как

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(\tau > uT) \sim -\lambda_+ u + o(1) \qquad (3.4.24)$$

при всех $\lambda_+ < \infty$, то остальные рассуждения остаются без изменения.

В случае (ii) в представлении для $\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha),\ \gamma(T) \in T\delta[u)\big)$ вида (3.4.21) при $u \geqslant \delta T$ в правой части (3.4.21) вместо слагаемого $\lambda_+ u$ появится слагаемое, неограниченно растущее при $T \to \infty$. Отсюда вытекает (3.4.22). Теорема 3.4.2 доказана.

Из теоремы 3.4.2 вытекает

Следствие 3.4.3. *При выполнении условий теоремы* 3.4.2

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha), \gamma(T) < \delta T\big) = -D(\alpha) + o(1). \qquad (3.4.25)$$

Отметим, что условия, достаточные для выполнения (3.4.25), можно немного ослабить.

Следствие 3.4.4. *Если выполнено условие* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, *то выполнено* (3.4.25).

Доказательство. Если выполнено $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, то (3.4.25) вытекает из следствия 3.4.3.

Если $\lambda_+ \geqslant D(0)$, то оценка сверху

$$\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha), \gamma(T) < \delta T\big) < \\ < \ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big) = -TD(\alpha) + o(T)$$

вытекает из теоремы 3.4.1. Для получения оценок снизу воспользуемся оценкой в (3.4.23) при $u = 0$, так что

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha), \gamma(T) > \delta T\big) \geqslant H_1\big(T\delta[1-\delta), T\Delta[\alpha)\big)\mathbf{P}(\tau > \delta T),$$

и тем фактом, что, согласно доказательству теоремы 3.4.1, inf в (3.2.25) достигается в случае $\lambda_+ \geqslant D(0)$ в точке $t = 1$. Следствие 3.4.4 доказано.

Таким образом, если несколько сузить событие $\big\{Z(T) \in T\Delta[\alpha)\big\}$, добавив к нему высоковероятное событие $\big\{\gamma(T) < \delta T\big\}$ (вероятность $\mathbf{P}\big(\gamma(T) \geqslant \delta T\big)$ допускает экспоненциальную оценку относительно δT), то для него при условии $[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ всегда будет иметь место ПБУ с функцией уклонений $D(\alpha)$.

§ 3.5 Базовые функции и их свойства. Дальнейшие свойства функций уклонений $D(\alpha)$, $\widehat{D}(\alpha)$. Об условии $\lambda_+ < D(0)$

3.5.1 Базовая функция и ее свойства. Дальнейшие свойства функции $D(\alpha)$

Напомним, что в силу теоремы 3.3.1 имеем (см. (3.3.4))

$$D(\alpha) = \mathbf{D}(1, \alpha) = \sup_{(\lambda,\mu) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} (\lambda + \alpha\mu). \tag{3.5.1}$$

Поэтому для изучения свойств функции $D(\alpha)$ нам нужно описать поведение границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$.

Отметим прежде всего, что так как $\mathbf{E}\tau > 0$, $\mathbf{A}(0,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{A}(\lambda, 0) > 0$, то множество $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ всегда телесно. Для описания границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ рассмотрим сечение $\mathcal{A}_{(\mu)}$ множества $\mathcal{A}$ на уровне μ:

$$\mathcal{A}_{(\mu)} := \{\lambda : \ \mathbf{A}(\lambda, \mu) < \infty\}$$

и положим

$$\mu^+ := \sup\{\mu : \ \mathcal{A}_{(\mu)} \neq \varnothing\}, \qquad \mu^- := \inf\{\mu : \ \mathcal{A}_{(\mu)} \neq \varnothing\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — множество значений μ, для которых $\mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty$ при каком-нибудь λ:

$$(\mu^-,\mu^+) \subset \mathcal{M} := \bigl\{\mu:\ \min_\lambda \mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty\bigr\} \subset [\mu^-,\mu^+].$$

Если $\mu \in \mathcal{M}$, то функция $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$ строго возрастает по λ от $-\infty$ до ∞ и, стало быть, определены значения

$$\begin{aligned} A(\mu) &:= \inf\bigl\{\lambda:\ \mathbf{A}(-\lambda,\mu) \leqslant 0\bigr\} = -\sup\bigl\{\lambda:\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) \leqslant 0\bigr\},\\ A^\infty(\mu) &:= \inf\bigl\{\lambda:\ \mathbf{A}(-\lambda,\mu) < \infty\bigr\} = -\sup\bigl\{\lambda:\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty\bigr\}, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

так что $A(\mu)$ является обобщенным решением относительно λ уравнения

$$\mathbf{A}(-\lambda,\mu) = 0.$$

Очевидно,

$$\bigl(-A(\mu),\mu\bigr) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}, \qquad \bigl(-A^\infty(\mu),\mu\bigr) \in \partial\mathcal{A},$$

т.е. кривая $\lambda = -A(\mu)$ в $\mathbb{R}^2$ есть параметрическое задание границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, а кривая $\lambda = -A^\infty(\mu)$ — параметрическое задание границы множества $\mathcal{A}$ при $\mu \in \mathcal{M}$. Если для $\mu \in \mathbb{R}$ не существует точки λ такой, что $\mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty$, то мы положим $A(\mu) = \infty$, $A^\infty(\mu) = \infty$. Сказанное доопределяет функцию $A(\mu)$ на всей оси; при этом $A(\mu) = \infty$ при $\mu \notin \mathcal{M}$ ($\mu^\pm$ являются точками разрыва; значения $A(\mu^\pm)$ могут быть конечными), а соотношение (3.5.1) можно записать в виде

$$D(\alpha) = \sup_\mu \bigl\{\mu\alpha - A(\mu)\bigr\}. \tag{3.5.3}$$

Это означает, что $D(\alpha)$ *есть преобразование Лежандра над* $A(\mu)$.

Функция $A(\mu)$, определенная в (3.5.2), будет играть в дальнейшем важную роль. Мы назовем ее *базовой функцией для ОПВ.*

Если $\tau_1 \equiv \tau \equiv 1$ ($Z(k) = Z_k$ есть обычное случайное блуждание), то

$$\mathbf{A}(-\lambda,\mu) = -\lambda + A^{(\zeta)}(\mu) \quad \textit{и} \quad A(\mu) = A^{(\zeta)}(\mu).$$

Если τ и ζ независимы, τ имеет экспоненциальное или геометрическое распределение, то однородный ОПВ $Z(t)$ становится процессом с независимыми приращения; функция $A^{(\tau)}(\lambda)$ известна в явном виде, как и решение относительно λ уравнения

$$A^{(\tau)}(-\lambda) + A^{(\zeta)}(\mu) = 0$$

(в терминах функции $A^{(\zeta)}(\mu)$). Если τ имеет экспоненциальное распределение с параметром β, то ОПВ $Z(t)$ становится обобщенным пуассоновским процессом,

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(t)} = \exp\bigl\{t\beta(\psi^{(\zeta)}(\mu)-1)\bigr\}, \quad A^{(\tau)}(\lambda) = \ln\frac{\beta}{\beta-\lambda},$$
$$A(\mu) = \beta(\psi^{(\zeta)}(\mu)-1) = \ln \mathbf{E}e^{\mu Z(1)}.$$

Однако, как мы увидим ниже, в общем случае функция $A(\mu)$ не обязана быть логарифмом преобразования Лапласа.

Приведем основные свойства базовой функции.

Теорема 3.5.1. *Базовая функция $A(\mu)$ выпукла, непрерывна снизу* (*изнутри множества конечности*) *и является преобразованием Лежандра над функцией уклонений $D(\alpha)$, так что наряду с* (3.5.3) *выполняется*

$$A(\mu) = \sup_{\alpha}\bigl\{\mu\alpha - D(\alpha)\bigr\}. \tag{3.5.4}$$

Таким образом, $A(\mu)$ и $D(\alpha)$ образуют пару функций, связанную дуальными преобразованиями Лежандра.

Доказательство. Заметим предварительно, что всегда

$$\mathbf{A}\bigl(-A(\mu),\mu\bigr) \leqslant 0, \quad \text{если} \quad A(\mu) < \infty. \tag{3.5.5}$$

Действительно, из определения (3.5.2) следует, что в случае $A(\mu)<\infty$ существует последовательность $\lambda_n < -A(\mu)$ такая, что $\lambda_n \to -A(\mu)$ при $n\to\infty$ и $\mathbf{A}(\lambda_n,\mu) \leqslant 0$, т.е. $(\lambda_n,\mu) \in (\mathcal{A}^{\leqslant 0})$. Но функция $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$ непрерывна снизу (изнутри области конечности). Поэтому

$$0 \geqslant \mathbf{A}(\lambda_n,\mu) \to \mathbf{A}\bigl(-A(\mu),\mu\bigr) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Это доказывает (3.5.5).

Докажем выпуклость $A(\mu)$, т.е. что *для любых $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q=1$ выполняется*

$$A(p\mu_1+q\mu_2) \leqslant pA(\mu_1)+qA(\mu_2). \tag{3.5.6}$$

Если $A(\mu_1)=\infty$ или $A(\mu_2)=\infty$, то неравенство (3.5.6) выполнено. Если $A(\mu_1)<\infty$ и $A(\mu_2)<\infty$, то согласно (3.5.5)

$$\mathbf{A}\bigl(-A(\mu_1),\mu_1\bigr)\leqslant 0, \qquad \mathbf{A}\bigl(-A(\mu_2),\mu_2\bigr)\leqslant 0.$$

Поэтому в силу выпуклости функции $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$ имеем

$$\mathbf{A}\bigl(-pA(\mu_1)-qA(\mu_2), p\mu_1+q\mu_2\bigr) \leqslant \\ \leqslant p\mathbf{A}\bigl(-A(\mu_1),\mu_1\bigr)+q\mathbf{A}\bigl(-A(\mu_2),\mu_2\bigr)\leqslant 0. \tag{3.5.7}$$

Так как левая часть в (3.5.7) неположительна, то значение первого аргумента функции $\mathbf{A}(\cdot,\cdot)$ в левой части (3.5.7) в силу определения (3.5.2) не превосходит значения функции $-A(\cdot)$ от второго аргумента функции $\mathbf{A}(\cdot,\cdot)$, т.е.

$$-pA(\mu_1) - qA(\mu_2) \leqslant -A(p\mu_1 + q\mu_2).$$

Это доказывает (3.5.6).

Докажем теперь, что функция $A(\mu)$ непрерывна снизу. Для выпуклой функции $A(\mu)$ свойство непрерывности снизу достаточно проверить только в точках разрыва $\mu^{\pm}$. Пусть

$$A_+ := \lim_{\mu\uparrow\mu^+} A(\mu).$$

Если $A_+ = \infty$, то в силу выпуклости $A(\mu)$ имеем $A(\mu^+) = \infty = A_+$. Пусть теперь $A_+ < \infty$. Поскольку функция $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$, определяющая множество $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, выпукла и непрерывна снизу, то множество $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ выпукло и замкнуто и, следовательно, «горизонтальный луч»

$$L_+ := \big\{(\lambda,\mu^+) :\ \lambda \leqslant -A_+\big\}$$

принадлежит $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$. Из определения (3.5.2) следует, что луч L_+ является частью границы $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$. Отсюда вытекает равенство $A(\mu^+) = A_+$, означающее непрерывность снизу функции $A(\mu)$ в правой точке разрыва μ^+. Непрерывность снизу функции $A(\mu)$ в левой точке разрыва μ^- доказывается аналогично.

Так как функция $A(\mu)$ выпукла и непрерывна снизу (как и функция $D(\alpha)$), то в силу (3.5.3) справедливо соотношение (3.5.4) (см., например, [67, § 12]). Теорема 3.5.1 доказана.

Продолжим описание свойств базовой функции $A(\lambda)$.

Очевидно, что всегда

$$A^{\infty}(\mu) \leqslant A(\mu).$$

Так как $(0,0) \in (\mathcal{A})$, $A(0) = 0$, то всегда $A^{\infty}(\mu) < A(\mu)$ в окрестности точки $\mu = 0$. Положим

$$\begin{aligned} \mu_+ &:= \min\big\{\mu > 0 :\ A(\mu) = A^{\infty}(\mu)\big\}, \\ \mu_- &:= \max\big\{\mu < 0 :\ A(\mu) = A^{\infty}(\mu)\big\}. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

При $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ выполняется

$$A^{\infty}(\mu) < A(\mu), \qquad \big(-A(\mu),\mu\big) \in (\mathcal{A})$$

и $\lambda = -A(\mu)$ есть единственное решение уравнения

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) = 0. \tag{3.5.9}$$

По теореме о неявной функции, функция $A(\mu)$ будет аналитической в области (μ_-, μ_+). Эту область мы будем называть *основной областью аналитичности* функции $A(\mu)$.

Значения функции $\mathbf{A}(\lambda, \mu)$ на границе $\partial\mathcal{A}$ (при $\lambda = -A^\infty(\mu)$) могут быть как конечными, так и бесконечными; могут колебаться (поочередно убывать или возрастать). Если эти колебания происходят вокруг нулевого значения, то при $\mu \in (\mu_+, \mu^+)$ возможно появление наряду с основной областью аналитичности (μ_-, μ_+) новых областей, на которых $A(\mu) > A^\infty(\mu)$ и, стало быть, функция $A(\mu)$ вновь станет аналитической, так как будет решением уравнения (3.5.9), лежащим внутри $\mathcal{A}$. Обозначим

$$M = \big\{\mu :\, A(\mu) > A^\infty(\mu)\big\}, \quad M^\infty = \big\{\mu :\, A(\mu) = A^\infty(\mu)\big\}. \tag{3.5.10}$$

Функция $A(\mu)$ будет аналитической в области $M \supset (\mu_-, \mu_+)$ (эта область может быть не односвязной; внутри области M^∞ функция $A(\mu)$ также может иметь области аналитичности). В области

$$(\mu^-, \mu^+) = M \cup M^\infty$$

функция $A(\mu)$ выпукла, непрерывна и, стало быть, почти всюду дифференцируема, но производная $A'(\mu)$ в области M^∞ может иметь разрывы.

Если дана функция $F(u, v)$ двух переменных u и v, то в дальнейшем нижними индексами (1) и (2) мы будем отмечать производные по первому и второму аргументу, соответственно. Например:

$$F'_{(1)}(u_1, v_1) = \frac{\partial}{\partial u} F(u, v)|_{(u,v)=(u_1,v_1)},$$
$$F''_{(1,2)}(u_1, v_1) = \frac{\partial}{\partial u \partial v} F(u, v)|_{(u,v)=(u_1,v_1)}.$$

Рассмотрим некоторые аналитические свойства функции $A(\mu)$ в точке 0. Имеем

$$\mathbf{A}(0,0) = 0, \qquad A(0) = 0,$$
$$\mathbf{A}'_{(1)}(0,0) = a_\tau = \mathbf{E}\tau, \qquad \mathbf{A}'_{(2)}(0,0) = a_\zeta = \mathbf{E}\zeta, \qquad \mathbf{A}''_{(1,1)}(0,0) = \mathbf{D}\tau,$$
$$\mathbf{A}''_{(1,2)}(0,0) = \mathbf{E}\tau\zeta - a_\tau a_\zeta, \qquad \mathbf{A}''_{(2,2)}(0,0) = \mathbf{D}\zeta.$$

Дифференцируя по μ тождество $\mathbf{A}\big(-A(\mu), \mu\big) = 0$ в точке $\mu = 0$, получим

$$A'(0) = \frac{a_\zeta}{a_\tau} = a, \qquad A''(0) = \frac{1}{a_\tau}\,\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 \tag{3.5.11}$$

и, стало быть (см. теорему 1.2.1),

$$A'(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}Z(t)}{t}, \qquad A''(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}Z(t)}{t}, \tag{3.5.12}$$

так что $A'(0)$ и $A''(0)$ суть, соответственно, среднее значение математического ожидания и дисперсии $Z(t)$ на единицу времени. Сказанное показывает, что функция $A(\mu)$ обладает многими существенными свойствами логарифма преобразования Лапласа над распределением. Ниже будет показано (см. теорему 3.7.1), что наряду с (3.5.12) в предположении, что $\lambda_+ \geqslant D(0)$, справедливо соотношение

$$A(\mu) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\mu Z(t)}.$$

Будет получен аналог этого соотношения и в общем случае.

С помощью преобразования Крамера нетрудно убедиться также, что при $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ наряду с (3.5.11) справедливо строгое неравенство

$$A''(\mu) > 0.$$

Возможное несовпадение областей M и (μ^-, μ^+) есть свойство, отличающее функцию $A(\mu)$ от логарифма преобразования Лапласа над некоторым распределением, скажем, от функции $A^{(\zeta)}(\mu)$. Отметим, что для всех распределений, часто встречающихся в приложениях (экспоненциального (для τ), нормального, ограниченного и др.), выполняются соотношения $\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \infty$ при $(\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}$ (при $\lambda = -A^{\infty}(\mu)$) и $A(\mu) > A^{\infty}(\mu)$ при $\mu \in (\mu^-, \mu^+) = (\mu_-, \mu_+)$, так что области M и (μ^-, μ^+) совпадают и отмеченное выше отличие отсутствует.

Вернемся к функции $D(\alpha) = \mathbf{D}(1, \alpha)$. Как уже отмечалось, представление (3.5.1) можно записать в виде

$$D(\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda + \alpha\mu\} = \sup_{\mu} \bigl(\alpha\mu - A(\mu)\bigr), \tag{3.5.13}$$

так что $D(\alpha)$ *есть преобразование Лежандра в точке* α *над выпуклой непрерывной снизу функцией* $A(\mu)$. Другими словами, функция $D(\alpha)$ определяется по функции $A(\mu)$ таким же образом, каким функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ для случайных блужданий определяется по логарифму преобразования Лапласа над распределением скачка. В силу сказанного выше о свойствах функции $A(\mu)$, вторая функция уклонений $D(\alpha)$ будет обладать многими теми же аналитическими свойствами, что и функция уклонений $\Lambda(\alpha)$. Значительная часть этих свойств уже установлена; они немедленно вытекают также из (3.5.13). Добавим к ним еще ряд свойств функций $D(\alpha)$ и $A(\mu)$ и сформулируем итог в виде теоремы.

Обозначим через $\mu(\alpha)$ значение, при котором достигается sup в правой части (3.5.13), так что

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big). \tag{3.5.14}$$

Заметим также, что в силу выпуклости функции $A(\mu)$ п.в. существует монотонно возрастающая производная $A'(\mu)$, $A(\mu) = \int_0^\mu A'(v)dv$. В дальнейшем нам придется иметь дело с функциями, обратными к возрастающим (не обязательно строго монотонно) и не обязательно непрерывным функциям (таким как $A'(\mu)$). Если $F(u)$ есть такая функция, то можно положить, например,

$$F^{(-1)}(v) = \sup\{u: \ F(u) < v\} \tag{3.5.15}$$

(обобщенная обратная функция). Эта функция будет непрерывна слева (снизу). Если неравенство в (3.5.15) заменить на $F(u) \leqslant v$, то $F^{(-1)}(v)$ будет функцией, непрерывной справа (сверху). Если исходная функция $F(u)$ была непрерывной слева, то при определении обратной функции в форме (3.5.15) функция, обратная к $F^{(-1)}(v)$, будет совпадать с F, так что

$$(F^{(-1)})^{(-1)}(u) = F(u). \tag{3.5.16}$$

В ряде случаев оказывается, что на одной полуоси $v > v_0$ нам будет удобно использовать определение (3.5.15), а на другой полуоси $v \leqslant v_0$ вместо неравенства $F(u) < v$ в (3.5.15) использовать неравенство $F(u) \leqslant v$. В том случае, когда у нас есть свобода доопределения по непрерывности исходной функции $F(u)$ (такой произвол всегда есть для возрастающей функции $F(u) = A'(u)$), то также всегда можно добиться выполнения (3.5.16), положив F непрерывной слева при $u > F^{(-1)}(v_0)$ и непрерывной справа при $u \leqslant F^{(-1)}(v_0)$.

Чтобы в дальнейшем не затруднять понимание выкладок такими уточнениями, относящимися главным образом, к функции $A'(\mu)$, можно иметь в виду наиболее распространенный случай, когда функция $A'(\mu)$ строго монотонна и непрерывна в области $\big\{\mu: \ A(\mu) \leqslant 0\big\}$ (тогда названные выше уточнения не потребуются). При переходе к общему случаю функцию $A'(\mu)$ следует определить как функцию непрерывную справа в области $(\mu^-, \mu(0)]$ и непрерывную слева в области $\big(\mu(0), \mu^+\big)$. Аналогичным образом мы определим функцию $\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha)$; для нее точкой, в которой меняется направление непрерывности, является точка $\alpha = 0$. Тогда будет выполняться (3.5.16) при $F = A'$. Таким образом мы будем считать, что функция $A'(\mu)$ определена всюду (а вместе с ней и функция $\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha)$) как функция непрерывная «изнутри» отрезка $[\mu^-, \mu^+]$ в обоих направлениях от точки $\mu(0)$ (от точки 0 на $[\alpha^-, \alpha^+]$ для функции $(A')^{(-1)}(\alpha)$). При этом будут выполнены нужные нам соотношения (3.5.43)–(3.5.46) (см. ниже).

Отметим, что равенство функций (3.5.16) не влечет за собой, вообще говоря, «равенство аргументов», т. е. соотношение
$F^{(-1)}(F(u)) = u$. Последнее равенство будет иметь место, если точка u не принадлежит интервалу постоянства функции F.

Теорема 3.5.2. (i). *Пусть d_+, d_- — границы множества $\mathcal{D}_1^{<\infty}$ конечности функции $D(\alpha)$:*

$$d_+ := \sup\big\{\alpha :\ D(\alpha) < \infty\big\}, \qquad d_- = \inf\big\{\alpha :\ D(\alpha) < \infty\big\}.$$

Тогда

$$d_- = \operatorname{ess\,inf} \frac{\zeta}{\tau}, \qquad d_+ = \operatorname{ess\,sup} \frac{\zeta}{\tau}. \tag{3.5.17}$$

(ii). *При $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$* (см. (3.5.8)) *функция*

$$A(\mu) = -\sup\big\{\lambda :\ \mathbf{A}(\lambda, \mu) \leqslant 0\big\}$$

аналитична и является единственным решением относительно λ уравнения $\mathbf{A}(-\lambda, \mu) = 0$.

(iii). *Функция $\mu(\alpha)$ есть «обобщенная» обратная функция к производной $A'(\mu)$:*

$$\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha) \tag{3.5.18}$$

(нужное нам уточнение свойств непрерывности функции $A'(\mu)$ было произведено выше, а вместе с этим и уточнение обратной функции $(A')^{(-1)}$ такое, чтобы выполнялось (3.5.16)), *так что*

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) &= \mu^+ \quad \text{при} \quad \alpha > \alpha^+ := A'(\mu^+ - 0), \\ \mu(\alpha) &= \mu^- \quad \text{при} \quad \alpha < \alpha^- := A'(\mu^- + 0). \end{aligned}$$

(iv). *При всех α*

$$D'(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha) = \mu(\alpha) \tag{3.5.19}$$

или, что то же,

$$\begin{gathered} D(\alpha) = \int_a^\alpha \mu(v)dv, \quad A'(\mu) = (D')^{(-1)}(\mu); \\ \lim_{\alpha\to\infty} \frac{D(\pm\alpha)}{\alpha} = \pm\mu^\pm. \end{gathered} \tag{3.5.20}$$

Функция $D(\alpha)$ при $\alpha \geqslant a$ склеена (с сохранением непрерывности производных), вообще говоря, из трех кусков:

1) *аналитической функции на* $[a, \alpha_+)$, $\alpha_+ := A'(\mu_+ - 0)$ (μ_+ определено в (3.5.8)). *Функция* $\mu(\alpha)$ *также аналитична в области* $[a, \alpha_+)$.

2) *«промежуточной» части в области* (α_+, α^+), $\alpha^+ = A'(\mu^+ - 0)$, *в которой могут быть интервалы аналитичности. Эта часть отсутствует, если* $\mu_+ = \mu^+$, *или, что то же, если*

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) > 0 \quad \textit{при} \quad (\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}, \quad \mu \in (\mu_-, \mu^+). \tag{3.5.21}$$

3) *линейной части*

$$D(\alpha) = D(\alpha^+) + (\alpha - \alpha^+)\mu^+ \quad \textit{при} \quad \alpha \geqslant \alpha^+.$$

(*эта часть отсутствует, если* $\mu^+ = \infty$ *или* $D(\alpha^+) = \infty$).

Аналогичное склеивание имеет место при $\alpha \leqslant a$ *и значениях* α_-, α^-, *определенных равенствами* $\alpha_- := A'(\mu_- + 0)$, $\alpha^- := A'(\mu^- + 0)$.

(v).

$$D(a) = D'(a) = 0, \qquad D''(a) = \frac{1}{A''(0)} = \frac{a_\tau}{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}. \tag{3.5.22}$$

Отметим, что для независимых τ и ζ

$$d_- = \frac{\operatorname{ess\,inf} \zeta}{\operatorname{ess\,sup} \tau}, \qquad d_+ = \frac{\operatorname{ess\,sup} \zeta}{\operatorname{ess\,inf} \tau}.$$

В силу утверждения (ii), главное «аналитическое» отличие второй функции уклонений $D(\alpha)$ от «обычной» функции уклонений состоит в возможности появления «промежуточных зон» (α^-, α_-), (α_+, α^+) между областями аналитичности и линейности функции $D(\alpha)$. У «обычной» функции уклонений такие зоны отсутствуют (см, например, [10, § 9.1], [12, § 1.1.1]). Напомним, что аналогично функция $A(\mu)$ отличается от логарифма преобразования Лапласа над некоторым распределением возможным появлением промежуточных зон (μ^-, μ_-), (μ_+, μ^+).

Доказательство теоремы 3.5.2. (i). Докажем второе соотношение в (3.5.17). По определению значения $b := \operatorname{ess\,sup} \frac{\zeta}{\tau}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $p > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta}{\tau} > b - \varepsilon\right) \geqslant 2p.$$

При этом всегда найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta}{\tau} > b - \varepsilon, \tau > t_0\right) \geqslant p.$$

Пусть для определенности $b > 0$. Обозначим

$$B_j = \left\{ \frac{\zeta_j}{\tau_j} > b - \varepsilon, \tau_j > t_0 \right\}, \quad B(n) = \prod_{j=1}^{n} B_j,$$

где $(\tau_j, \zeta_j) \underset{p}{=} (\tau, \zeta)$ (процесс однороден), и положим $n_t = t/t_0$. На множестве $B(n_t)$ имеем

$$\eta(t) < \frac{t}{t_0} = n_t. \tag{3.5.23}$$

Пусть для простоты t таково, что n_t есть целое число. Если положить

$$A_t = \left\{ \frac{Z(t)}{t} > b - \varepsilon \right\},$$

то, очевидно,

$$\mathbf{P}(A_t) \geqslant \mathbf{P}\big(A_t B(n_t)\big) = p^{n_t} \mathbf{P}\big(A_t \,|\, B(n_t)\big).$$

Все скачки процесса $Z(u)$ с номерами $j \leqslant n_t$ имеют на множестве $B(n_t)$ «наклон» $\frac{\zeta_j}{\tau_j} > b - \varepsilon$. Следовательно, средний наклон траектории $Z(u)$ на первых $\eta(t) \leqslant n_t$ скачках также будет иметь средний наклон

$$\frac{Z(t)}{t} > b - \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\mathbf{P}\big(A_t \,|\, B(n_t)\big) = 1, \qquad \mathbf{P}(A_t) \geqslant p^{n_t}$$

и в силу (3.5.23)

$$\frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(A_t) \geqslant \frac{n_t}{t} \ln p = \frac{\ln p}{t_0} > -\infty.$$

По ПБУ отсюда следует, что

$$-\infty < \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(t)}{t} > b - \varepsilon \right) \leqslant \varlimsup \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(t)}{t} > b - \varepsilon \right) \leqslant$$
$$\leqslant -\widehat{D}\big((b-\varepsilon, \infty)\big). \tag{3.5.24}$$

С другой стороны, наклон любого скачка (τ_j, ζ_j) процесса $Z(u)$ не может превосходить $b + \varepsilon$, и, стало быть, средний наклон $\frac{Z(t)}{t}$ также обладает этим свойством. В соответствии с ПБУ

$$-\infty = \varliminf \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(t)}{t} > b + \varepsilon \right) \geqslant -\widehat{D}\big((b+\varepsilon, \infty)\big). \tag{3.5.25}$$

Из (3.5.24), (3.5.25) следует, что $\widehat{D}\big((b-\varepsilon,\infty)\big)<\infty$, $\widehat{D}\big((b+\varepsilon,\infty)\big)=\infty$. Так как области конечности функций D и $\widehat{D}$ совпадают (см. ниже теорему 3.5.3), то в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем $d_+=b=\operatorname{ess\,sup}\frac{\zeta}{\tau}$.

Доказательство первого соотношения в (3.5.17) происходит точно так же. Изменения, которые надо внести в доказательство в случае $b<0$ не существенны. Утверждение (i) теоремы 3.5.2 доказано.[1]

(ii). Так как $A'(\mu)$ монотонно возрастает, то при $\alpha\in(\alpha_-,\alpha_+)$ уравнение

$$A'(\mu)=\alpha \tag{3.5.26}$$

для точки $\mu=\mu(\alpha)$, в которой достигается sup в (3.5.13), единственным образом разрешимо и $\mu(\alpha)$, являясь функцией, обратной к $A'(\mu)$, лежит в области аналитичности функции $A(\mu)$. Стало быть, по теореме о неявной функции, функции $\mu(\alpha)$, $A\big(\mu(\alpha)\big)$ и $D(\alpha)=\alpha\mu(\alpha)+A\big(\mu(\alpha)\big)$ аналитичны на (α_-,α_+).

(iii). Чтобы упростить изложение, *мы примем соглашение*, что множество M^∞ в (3.5.10) состоит из не более чем *конечного* числа отрезков или полуинтервалов (на концах области (μ^-,μ^+)), и, стало быть, *производная $A'(\mu)$ имеет конечное число точек разрыва.* Тогда функция $A(\mu)$ всюду дифференцируема за исключением, быть может, конечного числа точек. Пусть для определенности $\alpha>a$ и $\mu_j>0$, $j=1,\dots,k$ — положительные точки разрыва. Если в точке μ существует $A'(\mu)=\alpha$, то согласно (3.5.26) $\mu=\mu(\alpha)$ есть значение функции, обратной к $A'(\mu)$. Рассмотрим теперь точки разрыва. Пусть $\alpha_1=A'(\mu_1-0)$. Тогда при $\alpha>\alpha_1$ величина $\mu(\alpha)$ по ее определению будет сохранять постоянное значение μ_1 в области $(\alpha_1,\alpha_1^+]$, где $\alpha_1^+=A'(\mu_1+0)$. При $\alpha>\alpha_1^+$ вновь будет действовать соотношение (3.5.26) до точки $\alpha_2=A'(\mu_2-0)$ и т.д. Но описанное построение функции $\mu(\alpha)$ есть ни что иное, как определение в (3.5.18) обобщенной обратной функции.

Далее, дифференцируя по $\alpha\in(\alpha_-,\alpha_+)$ тождество

$$D(\alpha)=\alpha\mu(\alpha)-A\big(\mu(\alpha)\big),$$

в силу (3.5.26) находим

$$D'(\alpha)=\mu(\alpha)+\alpha\mu'(\alpha)-A'\big(\mu(\alpha)\big)\mu'(\alpha)=\mu(\alpha). \tag{3.5.27}$$

Отсюда следует, что при $\alpha_0\in(\alpha_-,\alpha_+)$, $\alpha\in(\alpha_-,\alpha_+)$ выполняется

$$D(\alpha)=D(\alpha_0)+\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\mu(\alpha)d\alpha. \tag{3.5.28}$$

[1] Для независимых τ и ζ утверждение п. (i) теоремы 3.5.2 доказано в п. (ii) теоремы 2.2 в [15], но условие независимости в п. (ii) теоремы 2.2 в [15] пропущено.

Как ведет себя функция $D(\alpha)$ при $\alpha > \alpha_+$ и $\alpha < \alpha_-$? Пусть $\alpha{>}\alpha_+$. Вне отрезков $[\alpha_j, \alpha_j^+]$, где $\alpha_j = A'(\mu_j - 0)$, $\alpha_j^+ = A'(\mu_j + 0)$, $j = 1, \ldots, k$, полученное выше соотношение (3.5.27) сохраняется и $\mu(\alpha) = D'(\alpha)$. При $\alpha \in [\alpha_j, \alpha_j^+]$

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big) = \alpha\mu_j - A(\mu_j) = D(\alpha_j) + (\alpha - \alpha_j)\mu_j$$

и функция D является линейной, оставаясь в целом выпуклой и непрерывной. Это значит, что интегральное представление (3.5.28) сохраняется при $\mu(\alpha) = \mu_j$ в областях $\alpha \in [\alpha_j, \alpha_j^+]$, $j = 1, \ldots, k$.

Аналогично, при $\mu^+ < \infty$, $\alpha > \alpha^+ := A'(\mu^+ - 0)$ выполняется

$$D(\alpha) = \alpha\mu^+ - A(\mu^+) = D(\alpha^+) + (\alpha - \alpha^+)\mu^+, \tag{3.5.29}$$

так что $\mu(\alpha) = \mu^+$ при $\alpha \geqslant \alpha^+$. Это доказывает соотношение (3.5.20), из которого следует, что

$$\frac{D(\alpha)}{\alpha} \to \mu^+ \quad \textit{при} \quad \alpha \to \infty. \tag{3.5.30}$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha < \alpha_-$, точки скачков отрицательны, а также случай $\alpha < a$.

Из соотношений (3.5.20), (3.5.18), (3.5.29) и сказанного выше следуют свойства функции D, названные в п. 1)–3) раздела (iv) теоремы.

В общем случае (без упрощающего предположения о конечности числа точек разрыва $A'(\mu)$) соотношения (3.5.18), (3.5.20) доказаны в [53]. Остается неясным насколько названное предположение сужает общность. Нам неизвестны примеры распределений (τ, ζ), для которых функция $A'(\mu)$ имела бы бесконечное число точек разрыва. Построение такого примера (если он существует) требует специальных усилий. Возможными точками разрыва являются точки соприкосновения кривых $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ и $\partial\mathcal{A}$. Поэтому если $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ или если $\mathbf{A}(\lambda, \mu) > 0$ при $(\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}$, то сечение поверхности $z = \mathbf{A}(\lambda, \mu)$ на уровне $z = 0$ аналитично и $A'(\mu)$ вообще не имеет точек разрыва. В случае $(\mathcal{A}) = \{\lambda < \lambda_+\}$ функция $A'(\mu)$ имеет не более 2-х точек разрыва. Если область $(\mathcal{A})$ прямоугольна (как в случае независимых τ и ζ), то число разрывов не превышает 4-х.

(v). Дифференцируя по $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ тождество

$$A'\big(\mu(\alpha)\big) = \alpha,$$

находим

$$\mu'(\alpha) = \frac{1}{A''(\mu(\alpha))}.$$

Так как $\mu(a) = 0$, $D'(\alpha) = \mu(\alpha)$, то в точке $\alpha = a$ получаем,

$$D(a) = D'(a) = 0, \qquad D''(a) = \mu'(a) = \frac{1}{A''(0)}.$$

Отсюда и из (3.5.11) вытекает (3.5.22).

Теорема 3.5.2 доказана.

Следствие 3.5.1. *Из раздела* (v) *теоремы* 3.5.2 *вытекает, что для* α *из окрестности точки* $a \in (\alpha_-, \alpha_+)$ *выполняется*

$$D(\alpha) = \frac{a_\tau(\alpha - a)^2}{2\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2} + O\big(|\alpha - a|^3\big). \tag{3.5.31}$$

Замечание 3.5.1. Отметим следующее свойство функции $A(\mu)$, которое поясняет в какой-то мере ее природу, определяемую аналитическими свойствами преобразования Лапласа $\mathcal{H}(\lambda, \mu)$ над мерой восстановления $H(dt, d\alpha)$ в однородном случае. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\lambda, \mu) := \int e^{\lambda t + \mu\alpha} H(dt, d\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \int e^{\lambda t + \mu\alpha} \mathbf{P}(T_n \in dt, Z_n \in d\alpha) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(\lambda, \mu) = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\psi}(\lambda, \mu)}\end{aligned} \tag{3.5.32}$$

и выпуклая кривая $\lambda = -A(\mu)$ в $\mathbb{R}^2$ является совокупностью особых точек функции $\frac{1}{1-\boldsymbol{\psi}(\lambda,\mu)}$; внутри этой кривой лежит область аналитичности функции $\mathcal{H}(\lambda, \mu)$. Если, например, $\mathbf{A}(\lambda, \mu) > 0$ при $(\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}$, то все особенности на кривой $\lambda = -A(\mu)$ образуют континуальной множество полюсов (нулей функции $1 - \psi(\lambda, \mu)$).

ПБУ для $H\big(T\delta[t], T\Delta[\alpha]\big)$ в теореме 3.2.1 (см. (3.2.21)) вместе с формулой (3.3.1) для функции $\mathbf{D}(t, \alpha)$ являются результатом «грубого» обращения представления (3.5.32) для $\mathcal{H}(\lambda, \mu)$, основанного на расположении особенностей этой функции (т.е на кривой $\lambda = -A(\mu)$).

В одномерном случае такое обращение выглядит несколько проще. Для меры восстановления $H^{(\zeta)}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n \in B)$ преобразование Лапласа имеет вид $\mathcal{H}^{(\zeta)}(\mu) = \big(1 - \psi^{(\zeta)}(\mu)\big)^{-1}$ и при $\alpha > 0$

$$\frac{1}{T} \ln H^{(\zeta)}\big(T\Delta[\alpha]\big) \sim -\mu^{(\zeta)}, \quad \text{при} \quad T \to \infty,\ \ \Delta = \overline{o}(1),$$

где

$$\mu^{(\zeta)} = \max\big(\mu :\ A^{(\zeta)}(\mu) \leqslant 0\big) = \max\big(\mu :\ \psi^{(\zeta)}(\mu) \leqslant 1\big).$$

Если $\mu^{(\zeta)} > 0$, $A^{(\zeta)}(\mu^{(\zeta)} + \varepsilon) < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то точка $\mu^{(\zeta)}$ будет изолированным полюсом функции $\mathcal{H}^{(\zeta)}(\mu)$ и нетрудно получить более точное асимптотическое представление

$$H^{(\zeta)}\big(T\Delta[\alpha)\big) \sim ce^{-\mu^{(\zeta)}\alpha T} \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Замечание 3.5.2. Отметим также, что функции $A(\mu)$, $D(\alpha)$ инвариантны относительно «укрупнения» скачков $\boldsymbol{\xi}$. Именно, рассмотрим ОПВ $Z^*(t)$, управляемый вектором $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$, где $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ независимы. Тогда при очевидных соглашениях относительно обозначений, для логарифма преобразования Лапласа $\mathbf{A}^*(\lambda, \mu)$ над распределением $\boldsymbol{\xi}^*$ имеем

$$\mathbf{A}^*(\lambda, \mu) = 2\mathbf{A}(\lambda, \mu), \quad A^*(\mu) = A(\mu), \quad D^*(\alpha) = D(\alpha),$$

хотя распределения $Z^*(t)$ и $Z(t)$ различны (ср. с замечанием 3.5.4).

3.5.2 Свойства функций $\boldsymbol{\mu(\alpha)}$ и $\boldsymbol{\lambda(\alpha) := -A\big(\mu(\alpha)\big)}$

Продолжим изучение свойств функций $\mathbf{D}(\theta, \alpha)$, $D(\alpha)$ и опишем множество значений α, для которых $\widehat{D}(\alpha) < D(\alpha)$. Для этого нам понадобятся свойства функций $\mu(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ и свойства значения $D(0)$, которое вместе со значением λ_+ определяет возможность появления неравенств $\widehat{D}(\alpha) < D(\alpha)$.

Ряд свойств параметра $D(0)$ сформулируем в виде леммы.

Лемма 3.5.1. (i). *Если*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \{\lambda \leqslant \lambda_+\}, \tag{3.5.33}$$

то $\lambda_+ \geqslant D(0)$.

(ii). *Если величина ζ разнозначна $\big(\mathbf{P}(\zeta \gtrless 0) > 0\big)$, то $D(0) < \infty$.*

(iii). *Пусть $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$, $\mathbf{P}(\zeta = 0) > 0$, $\psi_0^{(\tau)}(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\tau}; \zeta = 0)$. Положим*

$$\lambda_{0,+} := \sup\big\{\lambda : \psi_0^{(\tau)}(\lambda) < \infty\big\}.$$

Тогда $D(0) = \lambda_0 \leqslant \lambda_{0,+}$, где λ_0 — «обобщенное» решение уравнения $\psi_0^{(\tau)}(\lambda) = 1$, т.е.

$$\lambda_0 = \begin{cases} \textit{решение уравнения } \psi_0^{(\tau)}(\lambda) = 1, \textit{ если } \psi_0^{(\tau)}(\lambda_{0,+}) \geqslant 1 \\ \lambda_{0,+}, \textit{ если } \quad \psi_0^{(\tau)}(\lambda_{0,+}) < 1. \end{cases}$$

Всегда $D(0) < \infty$.

Если τ и ζ независимы, то $\lambda_{0,+} = \lambda_+$.

(iv). *Если*

$$\mathbf{P}(\zeta > 0) = 1, \qquad (\mathcal{A}) = (-\infty, \lambda_+) \times (-\infty, \mu_+^{(\zeta)}) \tag{3.5.34}$$

(как для независимых τ и ζ), то $D(0) = \lambda_+$.

Первое утверждение леммы обобщает утверждение 1) п. (iii) теоремы 3.3.2. Утверждения, аналогичные (iii), (iv), справедливы в случае $\mathbf{P}(\zeta \leqslant 0) = 1$.

Лемму 3.5.1 можно дополнить примерами 3.5.1, приведенными ниже, в которых реализуются возможности $\lambda_+ < D(0)$ и $D(0) = \infty$.

Доказательство леммы 3.5.1. (i). В силу (3.5.1)

$$D(0) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \lambda.$$

По условию (3.5.33) это означает, что $D(0) \leqslant \lambda_+$.

(ii). Если ζ разнозначны, то $A(\mu) \to \infty$ при $|\mu| \to \infty$ и, стало быть, $\inf A(\mu) = -D(0) > -\infty$.

(iii). Если $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$, $\mathbf{P}(\zeta = 0) > 0$, то

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) \to \ln \mathbf{E}(e^{\lambda\tau}; \zeta = 0) = \psi_0^{(\tau)}(\lambda) \quad \text{при} \quad \mu \to -\infty.$$

Стало быть, $A(\mu) \to -\lambda_0$ при $\mu \to -\infty$, $D(0) = -\inf A(\mu) = \lambda_0$. Так как λ_0 всегда конечно, то $D(0) < \infty$.

Если τ и ζ независимы, то $\psi_0^{(\tau)}(\lambda) = \psi^{(\tau)}(\lambda)\mathbf{P}(\zeta = 0)$, $\lambda_{0,+} = \lambda_+$, $D(0) = \lambda_0 \leqslant \lambda_+$.

(iv). Так как $\zeta > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{A}(\lambda_+ - \varepsilon, \mu) \to \infty \quad \text{при} \quad \mu \to -\infty.$$

С другой стороны, при всех μ

$$\mathbf{A}(\lambda_+ + 0, \mu) = \infty. \tag{3.5.35}$$

Поэтому

$$A(\mu) \to -\lambda_+ \text{ при } \mu \to -\infty, \quad D(0) = -\inf A(\mu) = \lambda_+. \tag{3.5.36}$$

Лемма 3.5.1 доказана.

Напомним, что условие $\lambda_+ \geqslant D(0)$ является весьма широким. Оно выполнено, если выполнено хотя бы одно из условий (3.3.14) теоремы 3.3.2 и при выполнении условий (i), (iv) леммы 3.5.1.

Условие $\lambda_+ < D(0)$ является «патологическим» условием, при котором теряется «регулярность» поведения функции $\widehat{D}(\alpha)$ (см. ниже) и собирательный характер ПБУ, так как в этом случае согласно ПБУ

$$\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[0]\big) \sim -T\widehat{D}(0) = -T\lambda_+ \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

и основной вклад в вероятность события $\big\{Z(T) \in T\Delta[v]\big\}$ делает один большой скачок $\tau_1 > T$ (напомним, что $\{\tau_1 > T\} \subset \big\{Z(T) = 0\big\}$ и по условию $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ в однородном случае $\ln \mathbf{P}(\tau_1 > T) \sim -T\lambda_+$ при $T \to \infty$).

Для отыскания представлений для функции $\widehat{D}(\alpha)$ нам понадобится вид производных функции $\mathbf{D}(\theta, \alpha)$.

Лемма 3.5.2. *При всех $\theta > 0$, α*

$$\mathbf{D}'_{(1)}(\theta, \alpha) = \lambda(\alpha/\theta), \qquad \mathbf{D}'_{(2)}(\theta, \alpha) = \mu(\alpha/\theta).$$

Доказательство. Из сказанного выше следует, что функция $\mathbf{D}(\theta, \alpha) = \theta D(\alpha/\theta)$ конечна в конусе

$$\mathcal{D}^{<\infty} = \left\{(\theta, \alpha) :\, D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) < \infty\right\},$$

и аналитична в конусе

$$\mathcal{D} = \left\{(\theta, \alpha) :\, \frac{\alpha}{\theta} \in (\alpha_-, \alpha_+)\right\}. \tag{3.5.37}$$

Если положить

$$\lambda(\alpha) := -A\big(\mu(\alpha)\big),$$

то из (3.5.14) при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ имеем

$$\begin{gathered} D(\alpha) = \lambda(\alpha) + \alpha\mu(\alpha), \quad \mathbf{A}\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) = 0, \\ \big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) \in (\mathcal{A}), \end{gathered} \tag{3.5.38}$$

т.е. точка $\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$ с ростом $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ движется по границе $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, проходя через точку $(0, 0)$ при $\alpha = a$. Пара $\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$ определяет наряду с $\big(-A(\mu), \mu\big)$ еще одно параметрическое задание гладкого участка границы множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$.

В силу равенств $\mathbf{D}(\theta, \alpha) = \theta D(\alpha/\theta)$ (см. (3.3.2)) и (3.5.20) при $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{(1)}(\theta, \alpha) &= D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) - \frac{\alpha}{\theta}\, D'\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \frac{\alpha}{\theta}\,\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) - A\left(\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) - \frac{\alpha}{\theta}\,\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \\ &= -A\left(\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \end{aligned} \tag{3.5.39}$$

$$\mathbf{D}'_{(2)}(\theta, \alpha) = D'\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right). \tag{3.5.40}$$

Но по теореме 3.5.2 функция $D(\alpha)$ дифференцируема всюду, $D'(\alpha)=\mu(\alpha)$, так что эти соотношения остаются справедливыми всюду. Лемма 3.5.2 доказана.

Рассмотрим теперь свойства функции $\lambda(\alpha)$. Чтобы сформулировать следующую лемму, в случае $\lambda_+ < D(0)$ нам понадобятся значения

$$\begin{aligned} m_- &= \begin{cases} \min\{\mu:\ A(\mu) = -\lambda_+\}, & \text{если} \quad A(\mu^-) \geqslant -\lambda_+, \\ \mu^-, & \text{если} \quad A(\mu^-) < -\lambda_+; \end{cases} \\ m_+ &= \begin{cases} \max\{\mu:\ A(\mu) = -\lambda_+\}, & \text{если} \quad A(\mu^+) \geqslant -\lambda_+, \\ \mu^+, & \text{если} \quad A(\mu^+) < -\lambda_+. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5.41}$$

Отметим, что условие $A(\mu^\pm) < -\lambda_+$ *эквивалентно неравенству*

$$\mathbf{A}(\lambda_+, \mu^\pm)<0.$$

Действительно, по определению

$$A(\mu^-) = -\sup\bigl\{\lambda:\ \mathbf{A}(\lambda, \mu^-) \leqslant 0\bigr\}.$$

Пусть для простоты $\mathbf{A}\bigl(-A(\mu^-), \mu^-\bigr) = 0$. Тогда, если $\lambda_+ < -A(\mu^-)$, то $\mathbf{A}(\lambda_+, \mu^-) < 0$, и наоборот. Аналогично рассматривается случай $\lambda_+ < -A(\mu^+)$.

Лемма 3.5.3. (i). *Функция* $\lambda(\alpha) = -A\bigl(\mu(\alpha)\bigr)$ *достигает своего максимального значения в точке* $\alpha = 0$, $\lambda(0) = D(0)$. *Она возрастает (с возможными участками постоянства) при* $\alpha < 0$ *и убывает при* $\alpha > 0$; $\lambda(a) = 0$.

(ii). *Пусть* $\lambda_+ < D(0)$, (β_-, β_+) — *максимальный интервал, на котором* $\lambda(\alpha) > \lambda_+$, *так что*

$$\lambda(\alpha) \leqslant \lambda_+ \quad \textit{при} \quad \alpha \notin (\beta_-, \beta_+), \quad 0 \in (\beta_-, \beta_+).$$

Пусть далее $A(\mu^-) \geqslant -\lambda_+$ (это возможно только если $a > 0$ и ζ разнозначна, т.е. $\mathbf{P}(\gtrless \zeta > 0) > 0$). *Тогда существуют два конечных решения* $m_- < m_+ < 0$ *уравнения* $A(\mu) = -\lambda_+$ *и*

$$\begin{aligned} \beta_- &= A'(m_-) := A'(m_- + 0), \\ \beta_+ &= A'(m_+) := A'(m_+ - 0) \in (0, a). \end{aligned} \tag{3.5.42}$$

Соотношение $\beta_- = -\infty$ *возможно лишь в случае* $A(\mu^-) = -\lambda_+$ $(m_- = \mu^-)$, $A'(\mu^-) = -\infty$.

Если $A(\mu^-) < -\lambda_+$, *то* $A(m_+) = -\lambda_+$, *верно второе соотношение в* (3.5.42) *и* $\beta_- = -\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы в случае $a < 0$.

(iii). *Пусть $\lambda_+ < D(0)$, $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$. Тогда $\mu^- = -\infty$, $A(\mu_-) = -D(0) < -\lambda_+$, $\beta_- = -\infty$. Аналогичное утверждение справедливо в случае $\mathbf{P}(\zeta \leqslant 0) = 1$.*

Доказательство. (i). Первое утверждение леммы вытекает из равенства $\lambda(\alpha) = -A\big(\mu(\alpha)\big)$, того, что функция $\mu(\alpha)$ возрастает, и соотношений

$$\inf_\alpha A\big(\mu(\alpha)\big) = \inf_\mu A(\mu) = -D(0) = A\big(\mu(0)\big).$$

Равенство $\lambda(a) = 0$ очевидно, так как $\lambda(a) = -A\big(\mu(a)\big) = -A(0) = 0$.

(ii). Докажем второе утверждение. Так как $a > 0$, $A(0) = 0$, функция $A(\mu)$ выпукла и непрерывна изнутри, то

$$\inf A(\mu) = \inf_{\mu \leqslant 0} A(\mu) = -D(0) < -\lambda_+.$$

Поэтому в случае $A(\mu^-) > -\lambda_+$ существует два конечных решения $m_- < m_+ < 0$, $m_- > \mu^-$ уравнения $A(\mu) = -\lambda_+$. Если $A(\mu^-) = -\lambda_+$, то $m_- = \mu^-$, но случай $\mu^- = -\infty$ в силу выпуклости $A(\mu)$ невозможен, так что $m_- = \mu^- > -\infty$.

Рассмотрим значения $\beta_\pm$. Имеем

$$\beta_+ = \sup\{\alpha > 0:\ \lambda(\alpha) > \lambda_+\} = \sup\{\alpha > 0:\ \mu(\alpha) < m_+\}, \tag{3.5.43}$$

где в правой части стоит ни что иное как определение непрерывной слева функции, обратной к $\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha)$. Так как $A'(\mu)$ также непрерывна слева на $(\mu(0), \mu^+)$, $m_+ < 0$, то в силу (3.5.16)

$$\beta_+ = \mu^{(-1)}(m_+) = A'(m_+) \in (0, a). \tag{3.5.44}$$

Далее,

$$\beta_- = \inf\big\{\alpha < 0:\ \lambda(\alpha) = -A(\mu(\alpha)) > \lambda_+\big\}.$$

Так как функция $-A(\mu)$ в области $\big(\mu^-, \mu(0)\big)$ возрастает, то

$$\beta_- = \inf\big\{\alpha < 0:\ \mu(\alpha) > m_-\big\} = \sup\big\{\alpha < 0:\ \mu(\alpha) \leqslant m_-\big\}. \tag{3.5.45}$$

Здесь в правой части стоит соотношение, определяющее значение непрерывной справа обратной функции к $(A')^{(-1)}(\mu)$ в точке m_-. Так как функция $A'(\mu)$ также непрерывна справа на $(\mu^-, \mu(0))$, то в силу (3.5.16)

$$\beta_- = \mu^{(-1)}(m_-) = A'(m_-). \tag{3.5.46}$$

Если

$$A(\mu^-) = -\lambda_+ \ \ (m_- = \mu^-) \ \text{ и } \ \alpha^- = A'(\mu^- + 0) = A'(\mu^-) = A'(m_-) = -\infty,$$

то $\beta_- = -\infty$.

Если

$$A(\mu^-) > -\lambda_+ \text{ или } A(\mu^-) = -\lambda_+ \ (m_- = \mu^-),\ A'(\mu^-) = A'(\mu^- + 0) > -\infty,$$

то $\beta_- > -\infty$.

Последнее утверждение п. (ii) очевидно.

Утверждение п. (iii) очевидно.

Лемма 3.5.3 доказана.

В заключение этого раздела приведем на следующей странице краткую схему, поясняющую связи между основными характеристиками ОПВ (без детализации условий).

3.5.3 Свойства функции уклонений общего вида и соответствующей базовой функции

Мы можем теперь описать свойства функции уклонений $\widehat{D}(\alpha)$ общего вида (3.3.6). Как уже отмечалось, $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при всех α, если $\lambda_+ \geqslant D(0)$. При $\lambda_+ > D(0)$ отрезок $[\beta_-, \beta_+]$ пуст. При $\lambda_+ = D(0)$ в широком классе случаев отрезок $[\beta_-, \beta_+]$ вырождается в точку $\beta_\pm = 0$; например, в случае, когда точка 0 принадлежит интервалу $\big(A'(\mu_- + 0), A'(\mu_+ - 0)\big)$, где $(\mu_-, \mu_+) \ni 0$ — область аналитичности функции $A(\mu)$.

Рассмотрим случай $\lambda_+ < D(0)$. Справедливо следующая теорема, в которой некоторые утверждения для полноты формулировок повторяют утверждения леммы 3.5.3.

Теорема 3.5.3. *Пусть $\lambda_+ < D(0)$ и для определенности $a > 0$* (в этом случае $\beta_+ \in (0, a)$).

(i). *Если $A(\mu^-) \geqslant -\lambda_+$* (это возможно лишь для разнозначных ζ: $\mathbf{P}(\pm\zeta > 0) > 0$), *то существуют решения $m_- < m_+ < 0$ уравнения $A(\mu) = -\lambda_+$,*

$$\beta_\pm = A'(m_\pm), \tag{3.5.47}$$

и $\beta_- = -\infty$ лишь в случае $A(\mu^-) = -\lambda_+$, $A'(\mu^-) = -\infty$;

$$\widehat{D}(\alpha) = \begin{cases} D(\alpha) \quad \textit{при} \quad \alpha \notin (\beta_-, \beta_+), \\ D(\beta_-) + (\alpha - \beta_-)m_- = \alpha m_- + \lambda_+ \ \ \textit{при}\ \alpha \in (\beta_-, 0], \\ D(\beta_+) + (\alpha - \beta_+)m_+ = \alpha m_+ + \lambda_+ \ \ \textit{при}\ \alpha \in [0, \beta_+). \end{cases} \tag{3.5.48}$$

Если точка $m_\pm$ не принадлежит интервалу постоянства функции $A'(\mu)$ (например, если $A''(m_\pm) > 0$), *то справедливо также равенство «обратное» к (3.5.47), т.е. $m_\pm = \mu(\beta_\pm)$.*

Основные характеристики ОПВ

Исходное преобразование Лапласа: $\Rightarrow$ **Функция уклонений для** (τ,ζ): $\Rightarrow$ **Вторая функция уклонений** (для меры восстановления)

$\mathbf{A}(\lambda,\mu)=\ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta};,$
$\mathcal{A}^{\leqslant 0}=\big\{(\lambda,\mu):\ \mathbf{A}(\lambda,\mu)\leqslant 0\big\}.$

$\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha)=(\mathrm{Le}\mathbf{A})(\theta,\alpha)=,$
$=\sup_{\lambda,\mu}\big(\theta\lambda+\alpha\mu-\mathbf{A}(\lambda,\mu)\big)$

$\mathbf{D}(\theta,\alpha)=\inf_{r>0} r\boldsymbol{\Lambda}\Big(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}\Big)=$
$=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}}(\lambda\theta+\mu\alpha)$

$\Downarrow$

Функции уклонений для $Z(t)$**:**

1) $D(\alpha)=\mathbf{D}(1,\alpha)$ при широком условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$
2) $\widehat{D}(\alpha)=\inf_{t\in(0,1)}\big[\mathbf{D}(t,\alpha)+\lambda_+(1-t)\big]$ в общем случае

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Базовые функции

1) $A(\mu)=-\sup\big\{\lambda:\ \mathbf{A}(\lambda,\mu)<0\big\}$ при широком условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.
Функция $\lambda=A(\mu)$ в области аналитичности есть решение уравнения $\mathbf{A}(-\lambda,\mu)=0$.
2) $\widehat{A}(\mu)=\max\big(A(\mu),-\lambda_+\big)$ в общем случае

$\Longrightarrow$

$\Downarrow$

Основные соотношения

$\widehat{A}(\mu)=(\mathrm{Le}\widehat{D})(\mu),\quad \widehat{D}(\alpha)=(\mathrm{Le}\widehat{A})(\alpha),$
$\frac{1}{T}\ln\mathbf{E}e^{\mu Z(T)}\to\widehat{A}(\mu)$ при $T\to\infty$.
$\widehat{A}(\mu)=A(\mu)$, $\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha)$ при широком условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$

Важную роль играют также параметры $\mu(\alpha)=D'(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)=-A\big(\mu(\alpha)\big)$; $\big(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\big)\in\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$.

Для них $A'\big(\mu(\alpha)\big)=\alpha$, $\dfrac{\partial\mathbf{D}(\theta,\alpha)}{\partial\theta}=\lambda\Big(\dfrac{\alpha}{\theta}\Big)$, $\dfrac{\partial\mathbf{D}(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}=\mu\Big(\dfrac{\alpha}{\theta}\Big)$.

Функции $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\mathbf{D}$, A, $\widehat{A}$, D, $\widehat{D}$ выпуклы и непрерывны снизу.

Схема 1.

(ii). *Если* $A(\mu^-) < -\lambda_+$ *и* ζ *разнозначна, то существует единственное решение* $m_+ < 0$ *уравнения* $A(\mu) = -\lambda_+$*;* $\mu^- > -\infty$ *и справедливо* (3.5.48)*, где среднюю строчку следует заменить на*

$$\widehat{D}(\alpha) = \alpha\mu^- + \lambda_+ \quad \textit{при} \quad \alpha < 0. \tag{3.5.49}$$

Если $A(\mu^-) < -\lambda_+$ *и* $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$*, то* $\mu^- = -\infty$*, а среднюю строчку в* (3.5.48) *следует заменить на*

$$\widehat{D}(\alpha) = \infty \quad \textit{при} \quad \alpha < 0. \tag{3.5.50}$$

В случае $a < 0$ *справедливы аналогичные* («симметричные») *соотношения.*

Если воспользоваться определениями (5.3.3) значений $m_\pm$, то все утверждения (3.5.48)–(3.5.50) теоремы 3.5.3 можно записать в единой форме при любом a:

Следствие 3.5.2. *Если* $\lambda_+ < D(0)$*, то*

$$\widehat{D}(\alpha) = \begin{cases} D(\alpha) & \textit{при} \quad \alpha \notin (\beta_-, \beta_+), \\ \alpha m_- + \lambda_+ & \textit{при} \quad \alpha \in (\beta_-, 0], \\ \alpha m_+ + \lambda_+ & \textit{при} \quad \alpha \in [0, \beta_+). \end{cases}$$

Из теоремы 3.5.3 следует также, что если $a > 0$, $A''(m_+) > 0$, то функция $\widehat{D}(\alpha)$ дифференцируема в точке $\alpha = \beta_+$:

$$\widehat{D}'(\beta_+) = m_+ = \mu(\beta_+) = D'(\beta_+),$$

т.е. прямая $y = D(\beta_+) + (\alpha - \beta_+)m_+$ (см. (3.5.48)) является касательной к кривой $y = D(\alpha)$ в точке $\alpha = \beta_+$.

Аналогичное утверждение справедливо для точки $\alpha = \beta_-$ при $a < 0$.

Доказательство теоремы 3.5.3. (i). Пусть $A(\mu^-) \geqslant -\lambda_+$. Тогда в силу леммы 3.5.3 значения $m_- < m_+ < 0$ конечны, $\beta_\pm = A'(m_\pm)$. Из определения функции $\mathbf{D}(\theta, \alpha)$ следует, что она линейчата, т.е. $\mathbf{D}(t\theta, t\alpha) = t\mathbf{D}(\theta, \alpha)$ при $t > 0$, так что

$$\mathbf{D}(t, \alpha) = tD\left(\frac{\alpha}{t}\right). \tag{3.5.51}$$

Далее, в силу леммы 3.5.2

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{D}(t, \alpha) + \lambda_+(1 - t)\right] = \lambda\left(\frac{\alpha}{t}\right) - \lambda_+, \tag{3.5.52}$$

При $t = 1$ и $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ правая часть (3.5.52) равна $\lambda(\alpha) - \lambda_+ > 0$. Т.е. функция под знаком производной в (3.5.52) выпукла и убывает при уменьшении t от значения $t = 1$ и, стало быть,

$$\widehat{D}(\alpha) < \mathbf{D}(1, \alpha) = D(\alpha).$$

При $t = 1$ и $\alpha \notin (\beta_-, \beta_+)$ правая часть в (3.5.52) равна $\lambda(\alpha) - \lambda_+ \leqslant 0$ и выпуклая функция под знаком производной в (5.2.2) возрастает при уменьшении t от значения $t = 1$, так что $\widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(1, \alpha) = D(\alpha)$.

Далее, при $\alpha \in [0, \beta_+)$ обозначим через t_α точку из $[0, 1]$, в которой достигается inf в определении функции $\widehat{D}(\alpha)$ (см. (3.3.6)).

Из определения числа β_+ (см. лемму 3.5.3) вытекают неравенства

$$\lambda(\beta_+ - 0) > \lambda_+, \qquad \lambda(\beta_+ + 0) \leqslant \lambda_+. \tag{3.5.53}$$

Так как функция $D(t, \alpha)$ выпукла, то в силу (3.5.52) неравенства (3.5.53) означают, что

$$\frac{\alpha}{t_\alpha} = \beta_+, \qquad t_\alpha = \frac{\alpha}{\beta_+}. \tag{3.5.54}$$

Поэтому при $\alpha \in [0, \beta_+)$ согласно (3.3.6) имеем

$$\widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(t_a, \alpha) + \lambda_+(1 - t_\alpha) = \frac{\alpha}{\beta_+} D(\beta_+) + \lambda_+ \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_+}\right).$$

В результате получаем

$$\widehat{D}(\alpha) = \begin{cases} D(\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \notin (\beta_-, \beta_+), \\ D(\beta_+) + \frac{\alpha - \beta_+}{\beta_+}(D(\beta_+) - \lambda_+) \ \text{при} \quad \alpha \in [0, \beta_+). \end{cases} \tag{3.5.55}$$

Покажем, что

$$D(\beta_+) = m_+ \beta_+ + \lambda_+. \tag{3.5.56}$$

Есть две возможности:

$$\text{либо} \quad \mu(\beta_+) = m_+, \qquad \text{либо} \quad \mu(\beta_+) \neq m_+. \tag{3.5.57}$$

В первом случае (он всегда имеет место, если $A''(m_+) > 0$)

$$D(\beta_+) = \mu(\beta_+)\beta_+ - A\big(\mu(\beta_+)\big) = \mu(\beta_+)\beta_+ + \lambda(\beta_+) = m_+\beta_+ + \lambda_+.$$

Во втором случае функция $\mu(\alpha)$ с необходимостью имеет разрыв в точке $\alpha = \beta_+$, а непрерывная слева при $\mu > \mu(0)$ обобщенная обратная к $\mu(\alpha)$ функция $A'(\mu)$ имеет полуинтервал постоянства

$$\mathcal{M} := \big[\mu(\beta_+),\ \mu(\beta_+ + 0)\big),$$

и при этом точка m_+ лежит в этом полуинтервале (так что вторую возможность в (3.5.57) можно записать в виде $m_+ \in \mathcal{M}$ и она не исключает первую возможность). Далее,

$$D(\beta_+) = \sup_{\mu} \{\mu\beta_+ - A(\mu)\} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \{\mu\beta_+ - A(\mu)\}, \tag{3.5.58}$$

где при $\mu \in \mathcal{M}$ выполняется

$$A(\mu) = A(m_+) + (\mu - m_+)A'(m_+) = -\lambda_+ + (\mu - m_+)\beta_+,$$

так что разность под знаком sup в (3.5.58)

$$\mu\beta_+ - A(\mu) = \lambda_+ + m_+\beta_+$$

от $\mu \in \mathcal{M}$ не зависит,

$$D(\beta_+) = \lambda_+ + m_+\beta_+.$$

Соотношение (3.5.56) вновь доказано.

Подставляя значение $D(\beta_+) - \lambda_+ = m_+\beta_+$ во вторую строку правой части в (3.5.55), мы получим первое равенство в третьей строке в (3.5.48). Подставляя туда вновь значение $D(\beta_+)$ из (3.5.56), получим второе равенство. Утверждение (3.5.48) при $\alpha \geqslant 0$ доказано.

Случай, когда α принадлежит полуинтервале $(\beta_-, 0]$ исследуется аналогично. Утверждение (3.5.48) полностью доказано.

Утверждение, касающееся случая $\beta_- = -\infty$ вытекает из (3.5.42).

(ii). Пусть ζ разнозначна, $A(\mu^-) < -\lambda_+$. Так как ζ разнозначна, то $A(\mu) \to \infty$ при $\mu \to -\infty$. Но $A(\mu^-) < -\lambda_+$, так что с необходимостью $\mu^- > -\infty$.

(a). Рассмотрим сначала случай $\alpha^- = A'(\mu^- + 0) \geqslant 0$. Как и прежде, при всех $\alpha \in [0, \beta_+)$ выполняется $t_\alpha = \frac{\alpha}{\beta_+}$ и $\widehat{D}(\alpha)$ определяется последней строкой в (3.5.55); $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при $\alpha \geqslant \beta_+$.

Рассмотрим область $\alpha < 0$. Имеем

$$\inf A(\mu) = A(\mu^-) = -D(0), \quad \mu^- = \mu(0),$$
$$\mu(\alpha) = \mu^-, \quad \lambda(\alpha) = -A(\mu^-) > \lambda_+ \quad \text{при всех} \quad \alpha < 0; \quad \beta_- = -\infty.$$

Поэтому при $\alpha < 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t, \alpha) = \lambda\left(\frac{\alpha}{t}\right) = -A(\mu^-) > \lambda_+, \tag{3.5.59}$$

и производная в (3.5.52) при всех t постоянна и положительна. Это означает, что

$$\widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(0, \alpha) + \lambda_+,$$

и в силу (3.5.59)

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}(1,\alpha) = \mathbf{D}(0,\alpha) - A(\mu^-),\\ &\quad \widehat{D}(\alpha) = D(\alpha) + A(\mu^-) + \lambda_+ = D(\alpha) + \lambda_+ - D(0). \end{aligned}$$

Но при $\alpha < 0$

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big) = \alpha\mu^- - A(\mu^-) = \alpha\mu^- + D(0),$$

так что

$$\widehat{D}(\alpha) = \alpha\mu^- + \lambda_+.$$

(b). Рассмотрим теперь случай $\alpha^- = A(\mu^- + 0) < 0$. Здесь

$$A(\mu^-) > -D(0), \qquad \mu(\alpha) = \mu^-, \qquad \lambda(\alpha) = -A(\mu^-) > 0$$

при всех $\alpha \leqslant \alpha^-$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\alpha) = -A\left(\mu\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right) > 0 \quad \text{при всех} \quad \frac{\alpha}{t} \leqslant \alpha^-$$

и производная $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\alpha)$ постоянна и равна $-A(\mu^-)$ при $\frac{\alpha}{t} \leqslant \alpha^-$, т.е. при $t \leqslant \frac{\alpha}{\alpha^-}$ ($\frac{\alpha}{\alpha^-} \geqslant 1$ при $\alpha \leqslant \alpha^- < 0$). Поэтому $\mathbf{D}(1,\alpha) = \mathbf{D}(0,\alpha) - A(\mu^-)$ при $\alpha \leqslant \alpha^-$. Отсюда, как и прежде, получаем

$$\widehat{D}(\alpha) = \alpha\mu^- + \lambda_+ \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant \alpha^-. \tag{3.5.60}$$

Если $\alpha \in (\alpha^-, 0)$, то производная $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\alpha)$ постоянна и равна $-A(\mu^-)$ лишь при $t \leqslant \frac{\alpha}{\alpha^-} < 1$. Поэтому в этом случае

$$\begin{gathered} \mathbf{D}\left(\frac{\alpha}{\alpha^-},\alpha\right) = \mathbf{D}(0,\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha^-}A(\mu^-), \;\; \mathbf{D}(0,\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^-}D(\alpha^-) + \frac{\alpha}{\alpha^-}A(\mu^-),\\ \widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(0,\alpha) + \lambda_+ = \frac{\alpha}{\alpha^-}(D(\alpha^-) + A(\mu^-)) + \lambda_+ = \alpha\mu^- + \lambda_+\\ \text{при} \;\; \alpha \in (\alpha^-, 0). \end{gathered}$$

Таким образом, равенство (3.5.60) справедливо при всех $\alpha < 0$. Утверждение (3.5.49) доказано.

Если $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$, $A(\mu^-) < -\lambda_+$, то $\widehat{D}(\alpha) = \infty = D(\alpha)$ при $\alpha < 0$. Это следует, например, из ПБУ и того, что $\mathbf{P}\big(Z(T) < 0\big) = 0$. Это следует также из исходного определения $\widehat{D}(\alpha)$ (см. [35]), так как $\Lambda(t,\alpha) = \mathbf{D}(t,\alpha) = \infty$ при $\alpha < 0$. Это доказывает (3.5.50).

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично. Теорема 3.5.3 доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$\widehat{A}(\mu) = \max\big(A(\mu), -\lambda_+\big). \tag{3.5.61}$$

Эта функция, как и функция $A(\mu)$, выпукла и непрерывна снизу. Она превращается в $A(\mu)$, если $\lambda_+ \geqslant D(0)$ $(= -\inf A(\mu))$.

Теорема 3.5.4. *Функции $\widehat{D}(\alpha)$ и $\widehat{A}(\mu)$ связаны дуальными преобразованиями Лежандра:*

$$\widehat{A}(\mu) = \sup_{\alpha}\big(\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big), \qquad \widehat{D}(\alpha) = \sup_{\mu}\big(\alpha\mu - \widehat{A}(\mu)\big). \tag{3.5.62}$$

По аналогии с предыдущим функцию $\widehat{A}(\mu)$ можно назвать *базовой функцией общего вида* для ОПВ $Z(t)$. Она совпадает с $A(\mu)$ в случае $\lambda_+ \geqslant D(0)$ и всегда совпадает с $A(\mu)$ в окрестности нуля. Кроме того, она обладает свойством

$$\ln \mathbf{E} e^{\mu Z(T)} \sim T\widehat{A}(\mu)$$

при $T \to \infty$ (см. ниже теорему 3.7.1).

Доказательство. Так как функции $\widehat{A}$ и $\widehat{D}$ являются выпуклыми и непрерывными снизу, то нам достаточно доказать лишь одно из соотношений (3.5.62) и лишь в случае $\lambda_+ < D(0)$ (при $\lambda_+ \geqslant D(0)$ теорема 3.5.4 уже доказана; см. теорему 3.5.1).

Рассмотрим сначала случай, когда ζ разнозначна, $|\beta_\pm| < \infty$, и докажем второе из соотношений (3.5.62); т.е., обозначив

$$\widetilde{D}(\alpha) = \sup_{\mu}\big(\alpha\mu - \widehat{A}(\mu)\big),$$

покажем, что $\widetilde{D}(\alpha) = \widehat{D}(\alpha)$, где функция $\widehat{D}(\alpha)$ определена в (3.3.6). Функция $\widehat{A}(\mu)$ почти всюду дифференцируема в области конечности, точка $\mu = \widehat{\mu}(\alpha)$, в которой достигается sup в (3.5.62), при почти всех α удовлетворяет уравнению

$$\widehat{A}'(\mu) = \alpha$$

так что, аналогично предыдущему (ср. с теоремой 3.5.2), $\widehat{\mu}(\alpha) = (\widehat{A}')^{(-1)}(\alpha)$ есть обобщенная обратная функция к $\widehat{A}'$. В силу выпуклости $\widehat{A}$ функция $\widehat{\mu}(\alpha)$ является неубывающей. Так как $\widehat{A}(\mu)=A(\mu)$ при $\mu \leqslant \mu(\beta_-) = m_-$, то при $\alpha \leqslant \beta_-$ выполняется $\widehat{\mu}(\alpha) = \mu(\alpha)$ и

$$\widetilde{D}(\alpha) = \alpha\widehat{\mu}(\alpha) - \widehat{A}\big(\widehat{\mu}(\alpha)\big) = \alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big) = D(\alpha).$$

Аналогичное соотношение справедливо при $\alpha \geqslant \beta_+$.

Если $\alpha \in (\beta_-, 0)$, то sup в (3.5.62) достигается при минимальном возможном значении $\mu \geqslant \mu(\beta_-)$, т.е. при $\mu = \mu(\beta_-) = m_- = \widehat{\mu}(\alpha)$, так что

$$\widetilde{D}(\alpha) = \alpha\mu(\beta_-) - \widehat{A}\big(\mu(\beta_-)\big) = \alpha\mu(\beta_-) + \lambda_+ = D(\beta_-) + (\alpha - \beta_-)\mu(\beta_-).$$

При $\alpha > 0$, $\alpha \in (0, \beta_+)$ справедливы аналогичные рассуждения, и

$$\widetilde{D}(\alpha) = D(\beta_+) + (\alpha - \beta_+)\mu(\beta_+).$$

Таким образом, $\widetilde{D}(\alpha) = \widehat{D}(\alpha)$.

Рассмотрим теперь случай $a > 0$, $\beta_- = -\infty$, $\mu^- > -\infty$ и докажем первое из соотношений (3.5.62). В силу (3.5.49) $\sup_\alpha \big(\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big)$ при $\mu < \mu^-$ достигается при $\alpha = -\infty$ и равен ∞. Из последнего соотношения в правой части (3.5.48) следует, что рассматриваемый sup при $\mu \in \big[\mu^-, \mu(\beta_+)\big]$ достигается при $\alpha = 0$ и равен $-\lambda_+$. Наконец, при $\mu > \mu(\beta_+)$ sup достигается в той же точке $\alpha(\mu)$, что и при рассмотрении $\sup_\alpha \big(\alpha\mu - D(\alpha)\big)$ и, стало быть, равен $A(\mu)$. Полученное описание $\sup_\alpha \big(\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big)$ совпадает с определением $\widehat{A}(\mu)$ в (3.5.61).

Случай $a > 0$, $\beta_- = -\infty$, $\mu^- = -\infty$ (т.е. случай $\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1$) рассматривается аналогично. Таким же («симметричным») образом рассматривается случай $a < 0$, $\beta_+ = \infty$.

Теорема 3.5.4 доказана.

3.5.4 Условие $\boldsymbol{\lambda_+ < D(\alpha)}$ и сильная зависимость в области больших уклонений между $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\zeta}$

Из теоремы 3.3.2 (см. (3.3.14)) видно, что условие $\lambda_+ < D(0)$ с необходимостью означает зависимость τ и ζ, неравенство $\mathbf{E}\zeta \neq 0$ и конечность λ_+ и $\max\{|\mu_-^{(\zeta)}|,\ \mu_+^{(\zeta)}\}$. Тот факт, что возможность $\lambda_+ < D(0)$ реализуется (на зависимости вида $\zeta = c\tau + \omega$, где τ и ω независимы) будет проиллюстрирован в примере 3.5.1, приведенном ниже.

Как уже отмечалось, вероятностный смысл условия $\lambda_+ < D(0)$ состоит в том, что в этом случае вероятность однородному процессу $Z(t)$ попасть в момент T в окрестность нуля первым скачком $\tau_1 > T$ существенно выше, чем вероятность попасть когда-либо в Δ-окрестность точки $(1, 0)$ случайным блужданием $\{\mathbf{S}_n\}$ (см. теорему 3.5.1). Это обстоятельство, связанное с «чрезмерным» влиянием на $Z(T)$ первого скачка $\tau_1 > T$ (при этом координата ζ_1 на $Z(T)$ не влияет, но влияет на $Y(T)$), «портит» аналитические свойства функции уклонений ОПВ в окрестности нуля (порождая зону «нерегулярности» (β_-, β_+)) и свойства траекторий ОПВ.

Далее, условие $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ при $D(0) < \infty$ означает сильную форму зависимости τ и ζ в области больших уклонений. Именно, мы покажем, что наряду с (3.4.2) при некотором $\delta > 0$ и $T \to \infty$ имеет место соотношение

$$\ln \mathbf{P}(\tau > T,\ \zeta = o(T)) \leqslant -(\lambda_+ + \delta)T, \qquad (3.5.63)$$

так что условная вероятность $\mathbf{P}\big(\zeta = o(T) |\ \tau \geqslant T\big)$ экспоненциально (относительно T) мала и уклонения τ порядка T влекут за собой с высокой вероятностью уклонения $|\zeta|$ того же порядка (см. ниже (3.5.66)). Неравенство (3.5.63) реализуется, например, для зависимостей вида

$$\zeta = c\tau + \omega, \qquad c \neq 0, \tag{3.5.64}$$

где ω не зависит от τ, $\omega \Subset [\mathbf{C}_0]$. Соотношение (3.5.63) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3.5.4. *Пусть выполнено условие $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau > T,\ |\zeta| < \varepsilon_T T) \leqslant -D(0). \tag{3.5.65}$$

Так как в силу $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ выполняются (3.4.2) и неравенство $D(0) > \lambda_+ + \delta$ при некотором $\delta > 0$, то из леммы 3.5.4 получаем, что при всех достаточно больших T

$$\ln \mathbf{P}\big(|\zeta| < \varepsilon_T T \,|\, \tau \geqslant T\big) < -\delta T. \tag{3.5.66}$$

Доказательство леммы 3.5.4. Обозначим через B множество

$$B := \big\{(t, \alpha) :\ t > 1,\ |\alpha| < \varepsilon\big\}$$

(оно зависит от T через $\varepsilon = \varepsilon_T$). Тогда событие под знаком вероятности в (3.5.65) можно записать в виде $\big\{(\tau, \zeta) \in TB\big\}$. Так как множество TB открыто и выпукло, то в силу экспоненциального неравенства Чебышева (см. § 4.4 в [12])

$$\mathbf{P}\big((\tau, \zeta) \in TB\big) \leqslant e^{-\boldsymbol{\Lambda}(TB)}, \qquad \boldsymbol{\Lambda}(TB) = \inf_{(t,\alpha)\in TB} \boldsymbol{\Lambda}(t, \alpha).$$

Поскольку в силу (3.2.12), (3.2.18)

$$\boldsymbol{\Lambda}(t, \alpha) \geqslant \mathbf{D}_\Lambda(t, \alpha) \geqslant \mathbf{D}(t, \alpha),$$

то

$$\mathbf{P}\big((\tau, \zeta) \in TB\big) \leqslant e^{-T\mathbf{D}(B)}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D}(B) := \inf_{(t,\alpha)\in B} \mathbf{D}(t, \alpha). \tag{3.5.67}$$

Поэтому для доказательства (3.5.65) нам осталось убедиться, что

$$\varliminf_{T\to\infty} \mathbf{D}(B) \geqslant D(0).$$

Имеем

$$\mathbf{D}(B) = \inf_{t>1,\ |\alpha|<\varepsilon} \mathbf{D}(t,\alpha) = \inf_{t>1} t \inf_{|\alpha|<\varepsilon} \mathbf{D}(1,\alpha/t) =$$
$$= \inf_{t>1} t \inf_{|\beta|<\varepsilon/t} \mathbf{D}(1,\beta) \geqslant \inf_{t>1} t \inf_{|\beta|<\varepsilon} \mathbf{D}(1,\beta) =$$
$$= \inf_{|\beta|<\varepsilon} \mathbf{D}(1,\beta) \inf_{t>1} t = \inf_{|\beta|<\varepsilon} \mathbf{D}(1,\beta).$$

В силу непрерывности снизу функции $\mathbf{D}(1,\beta)$

$$\varliminf_{T\to\infty} \mathbf{D}(B) \geqslant \varliminf_{T\to\infty} \inf_{|\beta|<\varepsilon} \mathbf{D}(1,\beta) = \mathbf{D}(1,0) = D(0).$$

Отсюда и из (3.5.67) вытекает (3.5.65). Лемма 3.5.4 доказана.

Сказанное выше означает, что, как уже отмечалось, возможность $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ является весьма специальной и «менее собирательной», чем $[\boldsymbol{\lambda}_+]$. Отметим также, что соотношения (3.5.63), (3.5.66)) не могут быть характеристическими для возможности $\lambda_+ < D(0)$ в (3.4.1), поскольку, например, для зависимостей (3.5.64) при $\mathbf{E}\omega = -c\mathbf{E}\tau$ одновременно реализуется первая возможность в (3.4.1) и неравенство (3.5.63).

Замечание 3.5.3. Пользуясь непрерывностью снизу функции $D(\alpha)$, можно так же, как в доказательстве леммы 3.5.4, установить, что при *фиксированном* $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(\tau > T,\ |\zeta| < \varepsilon T\big) \leqslant -D(0) + \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon) > 0$ выбором ε можно сделать сколь угодно малым.

3.5.5 Примеры

Пример 3.5.1. Пусть $\zeta = c\tau + \omega$, где τ, ω независимы. Тогда, как уже отмечалось, при естественных соглашениях относительно обозначений

$$\mathbf{A}(\lambda,\mu) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau+\mu\zeta} = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau+\mu(c\tau+\omega)} =$$
$$= A^{(\tau)}(\lambda + c\mu) + A^{(\omega)}(\mu). \qquad (3.5.68)$$

Поэтому внутренность области $\mathcal{A}$ конечности функции $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$ имеет вид

$$(\mathcal{A}) = \big\{(\lambda,\mu):\ \lambda + c\mu < \lambda_+, \quad \mu_-^{(\omega)} < \mu < \mu_+^{(\omega)}\big\},$$

где $(\mu_-^{(\omega)},\ \mu_+^{(\omega)})$ — область конечности (аналитичности) функции $A^{(\omega)}(\mu)$.

Функция $A^{(\tau)}(\lambda)$ монотонно возрастает, стало быть, существует обратная (обобщенная) функция

$$(A^{(\tau)})^{(-1)}(v) = \sup\{\lambda:\ A^{(\tau)}(\lambda) \leqslant v\}.$$

Ясно, что
$$(A^{(\tau)})^{(-1)}(v) = \lambda_+ \quad \text{при} \quad v \geqslant A^{(\tau)}(\lambda_+). \tag{3.5.69}$$

Согласно (3.5.68)

$$\begin{aligned} A(\mu) = -\sup\{\lambda:\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) \leqslant 0\} = -\sup\{\lambda:\ A^{(\tau)}(\lambda{+}c\mu) \leqslant -A^{(\omega)}(\mu)\} = \\ = -(-c\mu + (A^{(\tau)})^{(-1)}(-A^{(\omega)}(\mu)) = \\ = c\mu - (A^{(\tau)})^{(-1)}(-A^{(\omega)}(\mu)). \end{aligned} \tag{3.5.70}$$

Ясно, что если $\omega > 0$, то

$$-A^{(\omega)}(\mu) \to \infty, \quad (A^{(\tau)})^{(-1)}\big(-A^{(\omega)}(\mu)\big) \to \lambda_+ \quad \text{при} \quad \mu \to -\infty$$

и, стало быть, $A(\mu) \sim c\mu \to -\infty$ при $\mu \to -\infty$, $\lambda_+ < \infty$, $c > 0$, так что
$$D(0) = -\inf A(\mu) = \infty, \qquad \lambda_+ < D(0).$$

Покажем теперь, что возможность $\lambda_+ < D(0)$ может быть реализована и для разнозначных ζ, т.е. при $D(0) < \infty$.

Если $\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-t}$, то

$$A^{(\tau)}(\lambda) = -\ln(1-\lambda), \qquad (A^{(\tau)})^{(-1)}(v) = 1 - e^{-v},$$
$$A(\mu) = c\mu + e^{A^{(\omega)}(\mu)} - 1,$$
$$D(0) = \sup_\mu\{-A(\mu)\} = 1 + \sup_\mu[-c\mu - (e^{A^{(\omega)}(\mu)} - 1)].$$

Это означает, что $D(0) - 1$ есть преобразование Лежандра в точке $-c$ над выпуклой функцией $e^{A^{(\omega)}(\mu)} - 1$. Если $\mathbf{P}(\omega \gtrless 0) > 0$, то $A^{(\omega)}(\mu) \to \infty$ при $|\mu| \to \infty$ и, следовательно, $D(0) \to \infty$ при $|c| \to \infty$. Таким образом, выбором c мы можем вновь убедиться, что неравенство $\lambda_+ < D(0)$ возможно, так что запретное множества (β_-, β_+) будет непусто при достаточно большом $|c|$.

Вернемся к (3.5.70). Пусть

$$\mu \in (\mu_-^{(\omega)}, \mu_+^{(\omega)}), \qquad v = -A^{(\omega)}(\mu) < A^{(\tau)}(\lambda_+).$$

При таких μ функция $(A^{(\tau)})^{(-1)}(v)$ становится «обычной» обратной функцией к $A^{(\tau)}(\lambda)$ $\big(A^{(\tau)}\big((A^{(\tau)})^{(-1)}(v)\big) \equiv v\big)$, а функция $(A^{(\tau)})^{(-1)} \times \big(-A^{(\omega)}(\mu)\big)$ — аналитичной функцией от μ.

Если же
$$-A^{(\omega)}(\mu) \geqslant A^{(\tau)}(\lambda_+)$$

(это возможно при $\mathbf{E}\omega \neq 0$, $|\mu_{\pm}^{(\omega)}|>0$, так как в этом случае $\min\limits_{\mu} A^{(\omega)}(\mu)<0$), то при таких μ

$$A(\mu) = c\mu - \lambda_+ = A^{\infty}(\mu)$$

(см. (3.5.69), (3.5.70)). Если, например, $\mathbf{E}\omega < 0$, то $\min\limits_{\mu>0} A^{(\omega)}(\mu) < 0$,

$$\mu_- = \mu^- = \mu_-^{(\omega)}, \quad \mu_+ < \mu^+ = \mu_+^{(\omega)}, \quad \mu_+ > 0.$$

Если $c = 0$, $\tau \equiv 1$, то

$$A^{(\tau)}(\lambda) = \lambda, \qquad \lambda_+ = \infty, \qquad A(\mu) = A^{(\omega)}(\mu) = A^{(\zeta)}(\mu).$$

В важном частном случае, когда τ и ζ независимы ($c = 0$), справедливо следующее утверждение (оно во многом уже доказано).

Лемма 3.5.5. *Если τ и ζ независимы, то*

(i).
$$\begin{aligned} &\mu^- = \mu_-^{(\zeta)} := \inf\{\mu :\ A^{(\zeta)}(\mu) < \infty\}, \\ &\mu^+ = \mu_+^{(\zeta)} := \sup\{\mu :\ A^{(\zeta)}(\mu) < \infty\}, \\ &A^{\infty}(\mu) = -\lambda_+ \quad \text{при} \quad \mu \in (\mu^-, \mu^+). \end{aligned}$$

(ii). *Если*

$$-\inf_{\mu} A^{(\zeta)}(\mu) < A^{(\tau)}(\lambda_+) \tag{3.5.71}$$

(это всегда так при $\mathbf{E}\zeta = 0$), то $\lambda_+ > D(0)$, интервал $(\mu^-, \mu^+) = (\mu_-, \mu_+)$ является основной областью аналитичности функции $A(\mu)$,

$$A(\mu) = -(A^{(\tau)})^{(-1)}(-A^{(\zeta)}(\mu)). \tag{3.5.72}$$

Если

$$-\inf_{\mu} A^{(\zeta)}(\mu) \geqslant A^{(\tau)}(\lambda_+), \tag{3.5.73}$$

то определены решения $\mu'_- \leqslant \mu'_+$ уравнения

$$A^{(\zeta)}(\mu) = -A^{(\tau)}(\lambda_+).$$

При $\mathbf{E}\zeta > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} &\mu'_{\pm} < 0, \quad \mu_- = \mu'_+, \quad \mu_+ = \mu^+, \\ &\qquad A(\mu) = A^{\infty}(\mu), \quad \text{при} \quad \mu \in [\mu'_-, \mu'_+]. \end{aligned} \tag{3.5.74}$$

При $\mathbf{E}\zeta < 0$ выполняется

$$\begin{aligned} &\mu'_{\pm} > 0, \quad \mu_- = \mu^-, \quad \mu_+ = \mu'_-, \\ &\qquad A(\mu) = A^{\infty}(\mu), \quad \text{при} \quad \mu \in [\mu'_-, \mu'_+]. \end{aligned} \tag{3.5.75}$$

Доказательство леммы 3.5.5. Утверждение (i) очевидно.

(ii). Если $-A^{(\zeta)}(\mu) \geqslant A^{(\tau)}(\lambda_+)$, то

$$A(\mu) = -\sup\big\{\lambda :\ A^{(\tau)}(\mu) \leqslant -A^{(\zeta)}(\mu)\big\} = -\lambda_+ = A^{\infty}(\mu). \tag{3.5.76}$$

Если $-A^{(\zeta)}(\mu) < A^{(\tau)}(\lambda_+)$ (см. условие (3.5.71)), то в силу монотонности функции $(A^{(\tau)})^{(-1)}(y)$, обратной к $A^{(\tau)}(\lambda)$, имеем

$$A(\mu) = -\sup\Big\{\lambda :\ \lambda \leqslant (A^{(\tau)})^{(-1)}\big(-A^{(\zeta)}(\mu)\big)\Big\} = -(A^{(\tau)})^{(-1)}\big(-A^{(\zeta)}(\mu)\big),$$

где правая часть есть аналитическая функция. Это доказывает (3.5.72).

Если выполнено (3.5.73), то при $\mu \in [\mu'_-, \mu'_+]$ справедливы соотношения (3.5.76), (3.5.74), (3.5.75). Лемма 3.5.5 доказана.

Из доказательства следует также, что *условия* (3.5.71) *и* $D(0) < \lambda_+$ *эквивалентны*, а области (μ^-, μ'_-) при $\mathbf{E}\zeta < 0$ и (μ'_+, μ_+) при $\mathbf{E}\zeta < 0$ будут областями «невырожденной» аналитичности $(A(\mu) \not\equiv -\lambda_+)$.

Существует мало примеров, когда функции $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$, $A(\mu)$ можно найти в явном виде. Приведем один из них.

Пример 3.5.2. Пусть τ и ζ независимы и имеют Γ-распределения, соответственно, с параметрами (λ_+,γ) и (μ_+,γ). Пометим левым верхним индексом γ зависимость рассматриваемых характеристик от γ, так что в нашем случае

$$^{\gamma}\mathbf{A}(\lambda,\mu) = -\gamma\ln\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_+}\right) - \gamma\ln\left(1-\frac{\mu}{\mu_+}\right), \tag{3.5.77}$$

и обозначим

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(\lambda,\mu) := {}^{1}\mathbf{A}(\lambda,\mu) = -\ln\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)\left(1-\frac{\mu}{\mu_+}\right),\\ \mathbf{\Lambda}(\theta,\alpha) := {}^{1}\mathbf{\Lambda}(\theta,\alpha), \quad \mathbf{D}_{\Lambda}(\theta,\alpha) := {}^{1}\mathbf{D}_{\Lambda}(\theta,\alpha).\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}{}^{\gamma}\mathbf{A}(\lambda,\mu) = \gamma\mathbf{A}(\lambda,\mu),\\ {}^{\gamma}\mathbf{\Lambda}(\theta,\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)}\{\lambda v + \mu\alpha - \gamma\mathbf{A}(\lambda,\mu)\} = \gamma\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\theta}{\gamma},\frac{\alpha}{\gamma}\right),\\ {}^{\gamma}\mathbf{D}_{\Lambda}(\theta,\alpha) = \inf_{r>0} r\gamma\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\theta}{r\gamma},\frac{\alpha}{r\gamma}\right) = \mathbf{D}_{\Lambda}(\theta,\alpha),\end{gathered} \tag{3.5.78}$$

т.е. ${}^{\gamma}\mathbf{D}_{\Lambda}(\theta,\alpha)$ от γ не зависит.

Замечание 3.5.4. Названное обстоятельство соответствует тому факту, что вторая функция уклонений $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ инвариантна относительно укрупнения скачков. Под укрупнением скачков мы понимаем рассмотрение вместо $\boldsymbol{\xi}$ скачков ${}^k\boldsymbol{\xi} \underset{d}{=} \mathbf{S}_k$ при фиксированном k. Тогда естественно ожидать, что число попаданий укрупненным случайным блужданием $\{{}^k\mathbf{S}_n\}$, $n=0,1,\ldots$, в удаляющееся множество TB будет примерно в k раз меньше, чем для исходного блуждания $\{\mathbf{S}_n\}$. Это значит, что для соответствующей меры восстановления ${}^kH$ мы будем иметь

$$
{}^kH(TB) \approx \frac{1}{k}H(TB).
$$

Это, в свою очередь, означает, что асимптотика $\ln {}^kH(TB)$ и $\ln H(TB)$ при $T\to\infty$ будет одна и та же. Это поясняет инвариантность второй функции уклонений $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ относительно укрупнений (ср. с замечаниями 3.5.1, 3.5.2).

Если же под укрупнением понимать замену $\boldsymbol{\xi}$ на ${}^{(b)}\boldsymbol{\xi} := b\boldsymbol{\xi}$ (изменение масштаба), то при очевидных соглашениях относительно обозначений будем иметь

$$
\begin{gathered}
{}^{(b)}\mathbf{A}(\lambda,\mu) = \mathbf{A}(b\lambda, b\mu),\\
{}^{(b)}\Lambda(\theta,\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)}\{\lambda\theta+\mu\alpha-\mathbf{A}(b\lambda,b\mu)\} = \Lambda\left(\frac{\theta}{b},\frac{\alpha}{b}\right),\\
{}^{(b)}\mathbf{D}_\Lambda(\theta,\alpha) = \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{rb},\frac{\alpha}{rb}\right) = \frac{1}{b}\mathbf{D}_\Lambda(\theta,\alpha) = \mathbf{D}_\Lambda\left(\frac{\theta}{b},\frac{\alpha}{b}\right).
\end{gathered}
$$

Вернемся к примеру 3.5.2. Соотношение (3.5.78) означает, что для отыскания ${}^\gamma\mathbf{D}(\theta,\alpha) = \mathbf{D}(\theta,\alpha)$ нам достаточно рассмотреть случай, когда $\gamma=1$, т.е. τ и ζ имеют экспоненциальное распределение, а процесс $Z(t)$ является обобщенным пуассоновским процессом. В этом случае

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha) &= \Lambda^{(\tau)}(\theta)+\Lambda^{(\zeta)}(\alpha) = \lambda_+\theta+\mu_+\alpha-2-\ln\theta\alpha\lambda_+\mu_+,\\
\mathbf{D}_\Lambda(\theta,\alpha) &= \lambda_+\theta+\mu_+\alpha+\inf_{r>0} r[2\ln r-2-\ln\theta\alpha\lambda_+\mu_+].
\end{aligned}
$$

Дифференцируя по r функцию, стоящую под знаком inf, получаем уравнение

$$
2\ln r - 2 - \ln\theta\alpha\lambda_+\mu_+ + 2 = 0
$$

для точки

$$
r = r(\theta,\alpha) = \sqrt{\theta\alpha\lambda_+\mu_+},
$$

в которой достигается inf. Отсюда находим, что при положительных θ и α

$$
\mathbf{D}(\theta,\alpha) = \mathbf{D}_\Lambda(\theta,\alpha) = \lambda_+\theta+\mu_+\alpha-2\sqrt{\theta\alpha\lambda_+\mu_+}. \tag{3.5.79}
$$

Если же рассматривать точки (θ, α) на границе положительного квадранта, то, например, при $\theta = 0$ имеем $\Lambda(0,\alpha) = \infty$, $\mathbf{D}_\Lambda(0,\alpha) = \infty$. Аналогично, $\mathbf{D}_\Lambda(\theta, 0) = \infty$. Функция $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ ликвидирует этот разрыв и $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ при всех $\theta \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ равна правой части в (3.5.79). В частности,

$$D(\alpha) = \mathbf{D}(1,\alpha) = \mu_+\alpha - 2\sqrt{\alpha\lambda_+\mu_+} + \lambda_+, \tag{3.5.80}$$

$$D(0) = \lambda_+, \quad \mu(\alpha) = D'(\alpha) = \mu_+ - \sqrt{\frac{\lambda_+\mu_+}{\alpha}}. \tag{3.5.81}$$

Далее, базовая функция ${}^\gamma A(\mu)$ является решением уравнения ${}^\gamma\mathbf{A}(-\lambda,\mu) = 0$ или, что то же (см. (3.5.77)), уравнения

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_+}\right)\left(1 - \frac{\mu}{\mu_+}\right) = 1,$$

и также не зависит от γ,

$$\begin{gathered} {}^\gamma A(\mu) = A(\mu) = \frac{\lambda_+\mu}{\mu_+ - \mu}, \\ \lambda(\alpha) = -A(\mu(\alpha)) = \lambda_+ - \sqrt{\alpha\lambda_+\mu_+}. \end{gathered} \tag{3.5.82}$$

Можно проверить, что формулы (3.5.80)—(3.5.82) влекут за собой равенство

$$D(\alpha) = \lambda(\alpha) + \mu(\alpha)\alpha$$

и что $A(\mu)$ есть преобразование Лежандра над $D(\alpha)$.

§ 3.6 О принципах больших уклонений для процесса $Y(t)$ и для марковских аддитивных процессов

Если доказывать ПБУ для $Y(t)$, пользуясь тем же подходом, что и в разделе 3.4.1, то в однородном случае мы придем при $x = \alpha T$ к представлению

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(Y(T) \in T\Delta[\alpha)\big) &= \mathbf{P}\big(\tau > T,\ \zeta \in T\Delta[\alpha)\big) + \\ &+ \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_1(du, dy)\mathbf{P}\big(\tau > T - u,\ \zeta \in T\Delta[\alpha - y)\big). \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Исследование грубой асимптотики двумерного интеграла в (3.6.1) приводит к весьма громоздким вычислениям. В то же время, если аналогично п. 3.4.3 сузить событие $\big\{Y(T)\in T\Delta[\alpha)\big\}$ до события $\big\{Y(T)\in T\Delta[\alpha),\ \chi(T)<T\delta\big\}$ при $\delta\to 0$, то мы получим возможность установить ПБУ (с функцией уклонений $D(\alpha)$) без большого труда.

Другая возможность упростить задачу — предположить независимость τ и ζ. Рассмотрим эти две возможности.

3.6.1 ПБУ для процесса $\boldsymbol{Y(t)}$ на сужении множества $\big\{\boldsymbol{Y(T)\in T\Delta[\alpha)}\big\}$

Теорема 3.6.1. (i) *При всех* $\alpha\in\mathbb{R}$, $\Delta=\overline{o}(1)$, $\delta=\overline{o}(1)$ *и* $T\to\infty$

$$\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(Y(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \chi(T)<\delta T\big)\leqslant -D(\alpha)+o(1). \tag{3.6.2}$$

(ii) *Пусть при каком-нибудь* $h>0$ *и всех достаточно больших* t *выполнено хотя бы одно из следующих условий*

(a) $\lambda_+<\infty$, *выполнено* (3.4.2) *и*

$$\mathbf{P}\big(\tau\in(t,2t),\ |\zeta|\geqslant ht\big)<\frac{1}{2}\,\mathbf{P}\big(\tau\in(t,2t)\big); \tag{3.6.3}$$

(b) *выполнено условие* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ *и при каких-нибудь* $h>0$, p, q, $p+q<1$, *и всех* $v<t$, $t\to\infty$, *выполняется*

$$\mathbf{P}(\tau\geqslant v+t)<p\,\mathbf{P}(\tau\geqslant v),\qquad \mathbf{P}\big(\tau\in(v,v+t),|\zeta|\geqslant ht\big)<q\,\mathbf{P}(\tau\geqslant v).$$

Тогда

$$\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(Y(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \chi(T)<\delta T\big)=-D(\alpha)+o(1). \tag{3.6.4}$$

Условие (b) является весьма широким, оно выполняется при отсутствии растущих лакун для распределения τ, для независимых, слабо зависимых и линейно зависимых ζ и τ.

Доказательство теоремы 3.6.1. Первое утверждение следует из теоремы 3.2.1 и очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\big(Y(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \chi(T)<\delta T\big)\leqslant H_1\big(T\delta[1),T(\alpha)_\Delta\big).$$

Докажем второе утверждение. Пусть выполнено условие (a). Обозначим

$$B(\delta,\Delta)=\big\{Y(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \chi(T)<\delta T\big\}$$

и заметим, что событие

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{T_k \in T\delta[1-\delta),\ Z_k \in T(\alpha)_\Delta,\ \gamma(T) < \delta T,\\ \tau_{k+1} \in (\delta T, 2\delta T),\ |\zeta_{k+1}| < h\delta T\big\}$$

влечет за собой событие $B(2\delta, \Delta + h\delta)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\big(B(2\delta, \Delta + h\delta)\big) \geqslant \\ \geqslant H_1\big(T\delta[1-\delta),\ T(\alpha)_\Delta\big)\mathbf{P}\big(\tau \in (\delta T, 2\delta T),\ |\zeta| < h\delta T\big). \quad (3.6.5)$$

Здесь логарифм первого сомножителя в правой части по теореме 3.2.1 асимптотически эквивалентен

$$-T\mathbf{D}(1-\delta, \alpha) + o(T) = -T\mathbf{D}(1, \alpha) + o(T). \quad (3.6.6)$$

Для второго сомножителя по условию (a) имеем при $t \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(\tau \in (t, 2t), |\zeta| < ht\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\tau \in (t, 2t)\big) - \mathbf{P}\big(\tau \in (t, 2t), |\zeta| \geqslant ht\big) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathbf{P}\big(\tau \in (t, 2t)\big).$$

Поэтому при $t = \delta T$ в силу (3.4.2) логарифм второго сомножителя в правой части (3.6.5) больше или равен $-\lambda_+ t + o(t) = -\lambda_+\delta T + o(\delta T) = o(T)$. Вместе с (3.6.2), (3.6.5) и (3.6.6) это влечет за собой равенство

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(B(2\delta, \Delta + h\delta)\big) = -D(\alpha) + o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Это доказывает (3.6.4) (при $\Delta > h\delta$).

Пусть теперь выполнено условие (b). Тогда при $\Delta_1 = \Delta + h\delta$ имеет место вложение

$$\big\{Z(T) \in T(\alpha)_\Delta,\ \gamma(T) < \delta T,\ \chi(T) < \delta T,\ |\zeta_{\eta(T)}| < h\delta T\big\} \subset B(\delta, \Delta_1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(B(\delta,\Delta_1)\big) \geqslant \\
&\quad\geqslant \int\limits_0^{\delta T} \mathbf{P}\big(Z(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \gamma(T)\in dv,\ \chi(T)<\delta T,\ |\zeta_{\eta(T)}|<h\delta T\big) = \\
&\qquad = \int\limits_0^{\delta T} \mathbf{P}\big(Z(T)\in T(\alpha)_\Delta, \gamma(T)\in dv\big)\times \\
&\qquad\quad \times \mathbf{P}\big(\chi(T)<\delta T,\ |\zeta_{\eta(T)}|<h\delta T \,|\, \gamma(T)=v\big) = \\
&\qquad = \int\limits_0^{\delta T} \mathbf{P}\big(Z(T)\in T(\alpha)_\Delta,\ \gamma(T)\in dv\big)\times \\
&\qquad\quad \times \mathbf{P}\big(\tau\in(v,v+\delta T),\ |\zeta|<h\delta T \,|\, \tau>v\big).
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Здесь при $t=\delta T\to\infty$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\tau\in(v,v+t),\ |\zeta|<ht \,|\, \tau>v\big) = \\
&\qquad = \frac{\mathbf{P}(\tau\in(v,v+t))}{\mathbf{P}(\tau>v)} - \frac{\mathbf{P}(\tau\in(v,v+\delta t),\ |\zeta|\geqslant ht)}{\mathbf{P}(\tau>v)}.
\end{aligned}$$

По условию (b) это значение больше, чем $1-p-q=r>0$. Поэтому в силу (3.6.7)

$$\mathbf{P}\big(B(\delta,\Delta_1)\big) \geqslant r\,\mathbf{P}\big(Z(T)\in T(\alpha)_\Delta, \gamma(T)<\delta T\big),$$

где для правой части по условию $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ и следствию 3.4.4 выполнено (3.4.25). Требуемая оценка снизу для $\mathbf{P}\big(B(\delta,\Delta_1)\big)$ установлена. Вместе с (3.6.2) это дает (3.6.4). Теорема 3.6.1 доказана.

Отметим также, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.6.2. *Если* $|\zeta|<c=\mathrm{const}$ *или* $\tau<c$ *и*

$$\sup_{v\in(0,c)} \mathbf{P}\big(|\zeta|>t \,|\, \tau>v\big) < q < 1 \quad \text{\textit{при}} \quad t\to\infty, \tag{3.6.8}$$

то

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(Y(T)\in T\Delta[\alpha)\big) = -D(\alpha)+o(1) \quad \text{\textit{при}} \quad T\to\infty. \tag{3.6.9}$$

Доказательство. Если $|\zeta| < c$, то $\lambda_+ \geqslant D(0)$, $\bigl|Y(T) - Z(T)\bigr| < c$ и утверждение (3.6.9) очевидно. Если $\tau < c$ и выполнено (3.6.8), то выполнено условие (b) теоремы 3.6.1 и

$$\ln \mathbf{P}\bigl(Y(T) \in T\Delta[\alpha)\bigr) = \\ = \ln \mathbf{P}\bigl(Y(T) \in T\Delta[\alpha), \chi(T) < \delta T\bigr) = -TD(\alpha) + o(T).$$

Теорема 3.6.2 доказана.

3.6.2 ПБУ для $Y(t)$, когда τ и ζ независимы

Теорема 3.6.3. *Пусть τ и ζ независимы. Тогда*

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\bigl(Y(T) \in T\Delta[\alpha)\bigr) = -D(\alpha) + o(1), \tag{3.6.10}$$

где $\Delta = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$.

Так же, как в теореме 3.4.1, из локального ПБУ (3.6.10) следует интегральный ПБУ вида (3.4.6), (3.4.7). Таким образом, в случае независимых τ и ζ ПБУ для процессов $Z(t)$ и $Y(t)$ совпадают.

Доказательство. Если τ и ζ независимы, то

$$P_{T,\alpha} := \mathbf{P}\bigl(Y(T) \in T\Delta[\alpha)\bigr) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta \in dy)\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in T\Delta[\alpha - y/T)\bigr).$$

Полагая $y_k = k\Delta$, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, приходим к грубой аппроксимации $P_{t,\alpha}$ в виде сумм

$$P_{T,\alpha} \approx \sum_k \mathbf{P}\bigl(\zeta \in T\Delta[y_k)\bigr)\mathbf{P}\bigl(Z(T) \in T\Delta[\alpha - y_k)\bigr) \tag{3.6.11}$$

Обоснование такой аппроксимации с помощью неравенств происходит аналогично тому как это делалось в доказательстве теоремы 3.4.1. Обозначим через $P_{T,\alpha,k}$ слагаемое суммы в (3.6.11), соответствующее индексу суммирования k, и рассмотрим слагаемые при $k \geqslant 0$. Они отличны от 0, если $\mathbf{P}(\zeta > 0) > 0$. Пусть сначала $\mu_+^{(\zeta)} < \infty$. Тогда по неравенству Чебышева при $k \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\bigl(\zeta \in T\Delta[y_k)\bigr) \leqslant \mathbf{P}(\zeta \geqslant Ty_k) \leqslant e^{-Ty_k\mu_+^{(\zeta)}(1+o(1))}. \tag{3.6.12}$$

Далее, в силу теоремы 3.4.1

$$P_{T,\alpha,k} = \mathbf{P}\bigl(\zeta \in T\Delta[y_k)\bigr)e^{-TD(\alpha - y_k) + o(T)},$$

где в силу выпуклости функции $D(\alpha)$

$$TD(\alpha - y_k) \geqslant TD(\alpha) - D'(\alpha)y_k T. \qquad (3.6.13)$$

Возвращаясь к слагаемым $P_{T,\alpha,k}$, находим

$$P_{T,\alpha,0} = e^{-TD(\alpha)+o(T)}$$

и при $k \geqslant 1$

$$P_{T,\alpha,k} \leqslant e^{-TD(\alpha)+D'(\alpha)Ty_k - Ty_k\mu_+^{(\zeta)}(1+o(1))}.$$

В теореме 3.5.2 установлено, что $D(\beta)/\beta \to \mu^+$ при $\beta \to \infty$, где для независимых τ и ζ имеем $\mu^+ = \mu_+^{(\zeta)}$. Поэтому в силу выпуклости $D(\alpha)$ получаем при $\Delta \to 0$, $\Delta T \to \infty$, $T \to \infty$

$$D'(\alpha) - \mu_+^{(\zeta)} \leqslant 0, \qquad (3.6.14)$$

и при любом $N < \infty$ в силу (3.6.12), (3.6.13)

$$\sum_{k=1}^{N} P_{T,\alpha,k} \leqslant Ne^{-TD(\alpha)+o(T)}.$$

Выберем N так, чтобы выполнялось $\alpha - N\Delta < a$. Тогда сумма в (3.6.11) по $k \geqslant N$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k\geqslant N} P_{T,\alpha,k} \leqslant \mathbf{P}\big(Z(T) < T(\alpha - N\Delta)\big)\mathbf{P}(\zeta > TN\Delta). \qquad (3.6.15)$$

В соответствии с (3.6.12)–(3.6.14) и интегральным ПБУ для $Z(T)$ правая часть в (3.6.15) не превосходит

$$e^{-TD(\alpha-N\Delta)-TN\Delta\mu_+^{(\zeta)}+o(T)} \leqslant e^{-TD(\alpha)+o(T)}.$$

В итоге получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{T,\alpha,k} = e^{-TD(\alpha)+o(T)}.$$

Аналогичным образом рассматриваются суммы $\sum_{k<0} P_{T,\alpha,k}$ в случае $\mathbf{P}(\zeta < 0)>0$, $\mu_-^{(\zeta)} > -\infty$.

Если $\mu_+^{(\zeta)} = \infty$ или $\mu_-^{(\zeta)} = -\infty$, то приведенные выше оценки только усиливаются. Теорема 3.6.3 доказана.

3.6.3 О принципах больших уклонений для марковских аддитивных процессов

Пусть $\{\mathrm{x}_n, \mathrm{X}_n\}$ — МАП, определенный в § 1.8 на харрисовой цепи $\{\mathrm{x}_n\}$ в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$, τ — длина цикла по возвращению цепи $\{\mathrm{x}_n\}$ в положительный атом (возможно, искусственный), ζ — приращение на этом цикле сумм X_n.

Чтобы упростить формулировки ограничимся рассмотрением счетных эргодических цепей Маркова с состояниями $0, 1, \dots$, переходными вероятностями $P_i(j)$, $i, j = 0, 1, \dots$, и атомом $\mathrm{e}_0 = 0$. Известно, что «грубая» асимптотика распределения X_n в этом случае определяется преобразованием Лежандра над логарифмом максимального собственного значения матрицы $M(\mu) = \|P_i(j)\mathbf{E}e^{\mu\xi(j)}\|$ (см., например, [60], [109, 110] и обозначения в § 1.8).

Приведем более точные формулировки. Пусть, как и прежде, $\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}$ и $\mathcal{A}$ — область конечности функции $\mathbf{A}(\lambda, \mu)$. Пусть далее $A_M(\mu)$ — логарифм максимального собственного значения матрицы $M(\mu)$. Из результатов [109] вытекает следующее утверждение.

Если множество $\mathcal{A}$ открыто, то для любого фиксированного $\mathrm{e} \in E$ *и множества $E_1 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющего некоторым условиям* (трудно описываемым)*, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n \in n\Delta[\alpha]; \mathrm{x}_n \in E_1 \,|\, \mathrm{x}_0 = \mathrm{e}\big) = -D(\alpha), \tag{3.6.16}$$

где $D(\alpha) = \sup_\mu \big(\alpha\mu - A_M(\mu)\big)$ — преобразование Лежандра над $A_M(\mu)$, $\Delta = \overline{o}(1)$ при $n \to \infty$; при этом функция $A_M(\mu)$ удовлетворяет уравнению (относительно λ)

$$\mathbf{A}(-\lambda, \mu) = 0.$$

Таким образом, применительно к МАП и циклам (τ, ζ), порожденным этими процессами, *базовая функция $A(\mu)$ появляется как функция* $A_M(\mu)$. Если $\mathcal{A}$ открыто, то $A(\mu)$ — аналитическая функция, а правая часть в (3.6.16) равна так же, как для ОПВ, преобразованию Лежандра над $A(\mu)$:

$$-D(\alpha) = -(\mathrm{Le}A)(\alpha).$$

Из результатов [110] вытекает следующее распространение (3.6.16) на общий случай.

При некоторых условиях на e *и* E_1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n \in n\Delta[\alpha];\ \mathrm{x}_n \in E_1 \,|\, \mathrm{x}_0 = \mathrm{e}\big) = \\ = -D(\alpha) = -(\mathrm{Le}A)(\alpha), \tag{3.6.17}$$

где $A(\mu) = \sup\{\lambda :\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) \leqslant 0\}$, $\Delta = \overline{o}(1)$ *при* $n \to \infty$.

Замечание 3.6.1. В утверждениях (3.6.16), (3.6.17) условия на множество E_1 существенны, так как, если эти условия убрать и положить $E_1 = E$, то названные утверждения перестают, вообще говоря, быть верными. На это указывает пример МАП $(\mathrm{x}^*_n, \mathrm{X}^*_n)$, построенный в замечании 1.8.1, для которого характеристики (τ^*, ζ^*) цикла для цепи $(\mathrm{x}^*_n, \mathrm{X}^*_n)$ равны $(\tau^*, \zeta^*) = (\tau + 2, \zeta)$. Пусть в обозначениях этого замечания $\gamma^*(n) := \min(j \geqslant 0 :\ \mathrm{x}_{n-j} = \mathrm{e}_0) = l$ (т.е. $n - l$ есть момент последнего попадания цепи $\{\mathrm{x}_k\}$ в атом $\mathrm{e}_0 = 0$ перед моментом n). Выберем l так, что в названном примере $p := P_{0,l-1}(N) > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\mathrm{x}^*_n = N + k) = ck^{-2} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \xi^*(N + k) = k^s.$$

Поэтому, полагая $k = n^{2/s}$, получим, что приращение ξ^*_n сумм X^*_n в последний момент с вероятностью

$$\mathbf{P}(\gamma^*(n) = l)pck^{-2} = \frac{\mathbf{P}(\tau > l)}{a_\tau}\, pcn^{-4/s}\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при } n \to \infty$$

равно n^2. Очевидно, что в этом случае ПБУ не может иметь место.

Замечание 3.6.2. Из утверждений (3.6.16), (3.6.17) видно, что функция уклонений для X_n при всех α равна $D(\alpha)$. Для ОПВ $Z(n)$ в случае $\lambda_+ < D(0)$ это не так. Как уже отмечалось, последнее объясняется тем, что при выполнении условия $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ имеем $\ln \mathbf{P}(\tau_1 > n) \sim -\lambda_+ n$ при $n \to \infty$ и выполняется неравенство $\ln \mathbf{P}\big(Z(n) = 0\big) \geqslant -\lambda_+ n\big(1 + o(1)\big) \gg -nD(0)$. Для МАП такого рода соотношения отсутствуют, по-видимому потому, что соотношение $\lambda_+ < D(0)$ для циклов, порожденных МАП, не реализуется. Это подтверждает случай конечных цепей Маркова, когда простое доказательство ПБУ для МАП с функцией уклонений $D(\alpha)$ удается получить без использования ОПВ; см. [12, § 4.11].

Замечание 3.6.3. Метод доказательства ПБУ для МАП в [109, 110] является весьма сложным и требует привлечения результатов ряда других работ. В то же время мы видели в § 1.8, что все основные предельные законы для МАП в области нормальных уклонений весьма просто устанавливаются с помощью тех же законов для ОПВ. В области больших уклонений можно поступить аналогичным образом.

Пусть $Z(n)$ — ОПВ, построенный по циклам, с параметрами (τ, ζ). Тогда при условии $\lambda_+ \geqslant D(0)$ согласно теореме 3.4.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(Z(n) \in n\Delta[\alpha)\big) = -D(\alpha) \tag{3.6.18}$$

при $\Delta = \overline{o}(1)$, $n \to \infty$. Кроме того, мы имеем представление

$$\mathrm{X}_n = Z(n) + \rho_n, \quad \text{где} \quad \rho_n = \sum_{k=n-\gamma(n)+1}^{n} \xi(\mathrm{x}_k) \tag{3.6.19}$$

(см. (1.8.9)). Приведенные выше утверждения (3.6.16), (3.6.17) означают, что добавление к $Z(n)$ слагаемого ρ_n не меняет асимптотику $\ln \mathbf{P}\big(Z(n) \in n\Delta[\alpha)\big)$. Это указывает на то, что ПБУ для МАП можно установить непосредственно с помощью (3.6.18), (3.6.19) и оценки слагаемого ρ_n. Согласно замечанию 3.6.1 для этого потребуются аналогично утверждениям в § 1.8 условия на «колебания» $\widehat{\zeta} = \max_{k\leqslant\tau} \mathrm{X}_k - \min_{k\leqslant\tau} \mathrm{X}_k$ (при $\mathrm{x}_0 = \mathrm{e}_0$) на цикле.

Таким образом, альтернативный подход к доказательству ПБУ для МАП состоит в (a) проверке для процесса $\big\{Z(n)\big\}$ индуцированного процессом $\{\mathrm{X}_k\}$ условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcap[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ с тем, чтобы использовать теорему 3.4.1; при этом случай $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, по-видимому, не реализуется. Проверка названного условия для конечных харрисовых цепей Маркова трудностей не вызывает; и (b) в доказательстве пренебрежимости слагаемого ρ_n в (3.6.19).

Возможные подходы к оценке слагаемого ρ_n проиллюстрированы в § 5.6 при доказательстве значительно более точных интегро-локальных предельных теорем для МАП.

§ 3.7 Грубая асимптотика преобразования Лапласа над распределением обобщенного процесса восстановления

Напомним, что в общем случае через $\mu^{\pm}$ мы обозначаем границы множества конечности функции $A(\mu)$:

$$\mu^- := \inf\big\{\mu :\ A(\mu) < \infty\big\}, \qquad \mu^+ := \sup\big\{\mu :\ A(\mu) < \infty\big\}$$

Теорема 3.7.1. *Пусть выполнено условие* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ *и условия допустимой неоднородности*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \qquad \lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda :\ \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geqslant D(0).$$

Тогда для любого $\mu \neq \mu^{\pm}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = \widehat{A}(\mu). \tag{3.7.1}$$

Утверждение (3.7.1), по-видимому, будет справедливым и при $\mu{=}\mu^{\pm}$.

Это утверждение в случае $\lambda_+ \geqslant D(0)$ $(\widehat{A} = A)$ было анонсировано в п. (v) теоремы 2.2. в [15], но его доказательство было проведено при упрощающих предположениях (для прозрачности изложения), так что оно является не полным. Ниже приводится полное доказательство теоремы 3.7.1.

Доказательство теоремы 3.7.1. Если $\mu = 0$, то левая и правая части равенства (3.7.1) равны 0 и равенство (3.7.1) очевидно.

Рассмотрим случай $\mu \in (0, \mu^+)$. Обозначим

$$E(B) := \mathbf{E}\left(e^{\mu Z(T)};\ \frac{Z(T)}{T} \in B\right),$$

$$\overline{L}(B) := \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln E(B), \qquad \underline{L}(B) := \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln E(B).$$

Наша цель — оценить значения $\overline{L}(\mathbb{R})$, $\underline{L}(\mathbb{R})$ и доказать соотношение

$$\overline{L}(\mathbb{R}) \leqslant \widehat{A}(\mu) \leqslant \underline{L}(\mathbb{R}). \tag{3.7.2}$$

Пусть $d_- < d_+$ — границы множества $\mathcal{D}_1^{<\infty} = \big\{\alpha:\ D(\alpha) < \infty\big\} = \big\{\alpha:\ \widehat{D}(\alpha) < \infty\big\}$. В силу теорем 3.5.2, 3.5.4

$$\widehat{A}(\mu) = \sup_{\alpha}\big\{\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big\} = \sup_{\alpha\in\mathcal{D}_1^{<\infty}}\big\{\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big\} = \sup_{(d_-,d_+)}\big\{\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big\}$$

Мы будем различать 4 случая, связанных с конечностью или бесконечностью значений d_-, d_+. Доказательство соотношения (3.7.2) разобьем на несколько этапов, которые будут представлены в виде лемм.

Лемма 3.7.1. *Пусть* $\mu \in (0, \mu^+)$, $|d_-| < \infty$, $d_+ = \infty$. *Тогда*

$$\overline{L}(\mathbb{R}) \leqslant \widehat{A}(\mu). \tag{3.7.3}$$

Доказательство. При малом $\varepsilon > 0$ и большом $N > d_-$ положим

$$B_1 = (-\infty, d_- - \varepsilon],\ \ B_2 = (d_- - \varepsilon, d_- + \varepsilon),\ \ B_3 = [d_- + \varepsilon, N],\ \ B_4 = (N, \infty).$$

Тогда

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = E(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{4} E(B_i).$$

Локальный принцип больших уклонений для ОПВ $Z(t)$ при выполнении условий теоремы 3.7.1, установленный в теореме 3.4.1, можно записать в виде: *при любом* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \leqslant -\widehat{D}(\alpha), \tag{3.7.4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \geqslant -\widehat{D}(\alpha). \tag{3.7.5}$$

Из него следует, что

$$D(B_1) = \infty, \qquad \overline{L}(B_1) = -\infty \tag{3.7.6}$$

и что при любом $G > 0$ найдется малое $\varepsilon > 0$, такое что

$$\overline{L}(B_2) \leqslant \begin{cases} -G, \quad \text{если } \widehat{D}(d_-) = \infty, \\ \mu d_- - \widehat{D}(d_-) + \delta_\varepsilon \leqslant \sup\limits_{[d_-,d_+]} \big\{\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)\big\} + \delta_\varepsilon = \\ \qquad\qquad\qquad = \widehat{A}(\mu) + \delta_\varepsilon, \ \text{если } \widehat{D}(d_-) < \infty, \end{cases}$$

где $\delta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, всегда

$$\overline{L}(B_2) \leqslant \widehat{A}(\mu) + \delta_\varepsilon. \tag{3.7.7}$$

Оценим теперь $\overline{L}(B_3)$. В силу (3.7.4) для любого $\alpha \in B_3$ и заданных $\varepsilon > 0$, $h > 0$ существует $\varepsilon(\alpha) \leqslant \varepsilon$ такое, что

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_{\varepsilon(\alpha)}\right) \leqslant -\widehat{D}(\alpha) + h. \tag{3.7.8}$$

Окрестности $\big\{(\alpha)_{\varepsilon(\alpha)};\, \alpha \in B_3\big\}$ в (3.7.8) образует покрытие компакта B_3. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

$$\big\{(\alpha_j, \varepsilon_j);\, j = 1, \ldots, M\big\}, \tag{3.7.9}$$

где $\varepsilon_j := \varepsilon(\alpha_j) \leqslant \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$. Поэтому в силу (3.7.8)

$$E(B_3) = \mathbf{E}\left(e^{\mu Z(T)};\, \frac{Z(T)}{T} \in B_3\right) \leqslant \sum_{j=1}^{M} E\big((\alpha_j)_{\varepsilon_j}\big) \leqslant \\ \leqslant M \max_{1\leqslant j\leqslant M} E\big((\alpha_j)_{\varepsilon_j}\big). \tag{3.7.10}$$

Из (3.7.8), (3.7.9) следует, что

$$\overline{L}(B_3) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant M} \big\{\mu(\alpha_j + \varepsilon_j) - \widehat{D}(\alpha_j) + h\big\} \leqslant \\ \leqslant \sup_{\alpha\in B_3} \big\{\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)\big\} + \mu\varepsilon + h. \tag{3.7.11}$$

Так как

$$\sup_{\alpha\in B_3} \big\{\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)\big\} \leqslant \widehat{A}(\mu),$$

$\varepsilon > 0$ и $h > 0$ произвольно малы, то

$$\overline{L}(B_3) \leqslant \widehat{A}(\mu). \tag{3.7.12}$$

Чтобы получить требуемую оценку для $L(\mathbb{R})$, нам осталось оценить $\overline{L}(B_4)$.

Докажем, что для любого $G < \infty$ найдется $N = N_G < \infty$ такое, что

$$\overline{L}(B_4) \leqslant -G. \tag{3.7.13}$$

Считая для простоты, что N и T целые числа, рассмотрим разбиение областей $t \leqslant T$, $z \geqslant TN$ на полуинтервалы

$$\delta[j) := [j, j+1), \qquad \Delta[k) := [k, k+1),$$

соответствующие значениям $\delta = \Delta = 1$. Тогда

$$E(B_4) = \sum_{k \geqslant TN} \mathbf{E}\big(e^{\mu Z(T)};\, Z(T) \in \Delta[k)\big) = \sum_{k \geqslant TN} E\biggl(\frac{1}{T}\,\Delta[k)\biggr).$$

Оценим сверху

$$\begin{aligned} E\biggl(\frac{1}{T}\,\Delta[k)\biggr) &= \sum_{n \geqslant 1} \int_0^T \int_{z \in \Delta[k)} e^{\mu z}\mathbf{P}(T_n \in dt,\ Z_n \in dz)\mathbf{P}(\tau > T - t) \leqslant \\ &\leqslant e^{\mu(k+1)} \sum_{n \geqslant 1} \sum_{j \leqslant T} P_n(j,k)\mathbf{P}(\tau > T - j - 1), \end{aligned} \tag{3.7.14}$$

где

$$P_n(j,k) := \mathbf{P}\big(T_n \in \delta[j),\ T_n \leqslant T,\ Z_n \in \Delta[k)\big).$$

Выделим в сумме для $E(B_4)$ подсумму

$$\Sigma_1 := \sum_{k \geqslant NT} e^{\mu(k+1)} \sum_{n \geqslant k+1} \sum_{j \leqslant T} P_n(j,k)\mathbf{P}(\tau > T - j - 1), \tag{3.7.15}$$

которая берется по n таким, что

$$n - 1 \geqslant k \geqslant NT > 2\,\frac{T}{a_\tau} \quad \text{при} \quad N > \frac{2}{a_\tau}.$$

Из экспоненциального неравенства Чебышева (с учетом того, что распределение τ_1 отличается, вообще говоря, от распределения τ) вытекает

$$\begin{aligned} P_n(j,k) \leqslant \mathbf{P}(T_n \leqslant T) \leqslant \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leqslant T) &\leqslant \\ \leqslant e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{T}{n-1}\right)} &\leqslant e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}(1/N)}, \end{aligned}$$

где $\Lambda^{(\tau)}$ — функция уклонений для $\tau > 0$, обладающая свойством: $\Lambda^{(\tau)}(1/N) \to \infty$ при $N \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{n\geqslant k+1} P_n(j,k)\mathbf{P}(\tau > T-j-1) \leqslant$$
$$\leqslant [1-e^{-\Lambda^{(\tau)}(1/N)}]^{-1}\, e^{-k\Lambda^{(\tau)}(1/N)}\mathbf{P}(\tau > T-j-1),$$

и при достаточно большом N имеем

$$[1-e^{-\Lambda^{(\tau)}(1/N)}]^{-1} \leqslant 2,$$
$$\mu(k+1) - k\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant -k, \qquad \sum_{j\leqslant T}\mathbf{P}(\tau > T-j-1) \leqslant \mathbf{E}\tau + 1,$$
$$\Sigma_1 \leqslant 2\sum_{k\geqslant NT}(1+\mathbf{E}\tau)e^{-k} \leqslant c_1 e^{-NT}, \qquad c_1 = \mathrm{const}.$$

Оценим теперь оставшуюся подсумму Σ_2 суммы $E(B_4)$ (по $n\leqslant k$ в (3.7.14), ср. с (3.7.15)). Для этого выберем $h>0$ так, что $\mu_h := \mu + 2h < \mu^+$. Обозначим $\lambda_h := -A(\mu_h)$, так что точка (λ_h, μ_h) лежит на границе $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$, $\psi(\lambda_h,\mu_h) \leqslant 1$, $\psi_1(\lambda_h,\mu_h) < \infty$. Имеем

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[j], T_n \leqslant T, Z_n \in \Delta[k]\big) =$$
$$= \mathbf{E}\big(e^{\pm\lambda_h T_n + \pm\mu_h Z_n}; T_n \in \delta[j], T_n \leqslant T, Z_n \in \Delta[k]\big) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda_h j - \mu_h k + |\lambda_h| + \mu_h}\mathbf{E}(e^{\lambda_h T_n + \mu_h Z_n}) \leqslant e^{|\lambda_h|T + |\lambda_h| - \mu_h k + \mu_h}\psi_1(\lambda_h,\mu_h) \leqslant$$
$$\leqslant c_2 e^{|\lambda_h|T - \mu_h k}, \ c_2 = \mathrm{const}.$$

Поэтому равномерно по $j \leqslant T+1$ и n

$$e^{\mu(k+1)}P_n(j,k) \leqslant c_2 e^{-(\mu_h-\mu)k + |\lambda_h|T + \mu}.$$

Поскольку $k \geqslant NT$, то при всех достаточно больших N и всех n

$$e^{\mu(k+1)}P_n(j,k) \leqslant c_3 e^{-hk}, \qquad c_3 = \mathrm{const}.$$

Поэтому

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{k\geqslant NT}\sum_{n\leqslant k}\sum_{j\leqslant T+1} e^{\mu(k+1)}P_n(j,k)\mathbf{P}(\tau > T-j-1) \leqslant$$
$$\leqslant c_3(\mathbf{E}\tau+1)\sum_{k\geqslant NT} k e^{-hk} \leqslant c_4 NT e^{-hNT}, \qquad c_3, c_4 = \mathrm{const}.$$

Итак, мы установили, что

$$E(B_4) \leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2 \leqslant c_1 e^{-NT} + c_4 NT e^{-hNT}.$$

Считая для определенности, что $h < 1$, отсюда находим, что

$$\overline{L}(B_4) \leqslant -hN.$$

Это доказывает (3.7.13).

Сопоставляя (3.7.6), (3.7.7), (3.7.12), (3.7.13), мы получаем, что в условиях леммы 3.7.1

$$\overline{L}(\mathbb{R}) \leqslant \widehat{A}(\mu) + \delta_\varepsilon, \tag{3.7.16}$$

где $\delta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как ε произвольно мало, то лемма 3.7.1 доказана.

Лемма 3.7.2. *Если* $\mu \in (0, \mu^+)$, $d_- = -\infty$, $|d_+| < \infty$, *то справедливо* (3.7.2).

Доказательство. В условиях этой леммы положим при $-N<d_+$, $\varepsilon > 0$,

$$B_1 = (-\infty, -N), \quad B_2 = [-N, d_+ - \varepsilon],$$
$$B_3 = (d_+ - \varepsilon, d_+ + \varepsilon), \quad B_4 = [d_+ + \varepsilon, \infty).$$

Оценки сверху значений $\overline{L}(B_2)$, $\overline{L}(B_3)$, $\overline{L}(B_4)$ в условиях этой леммы происходят точно так же как оценки $\overline{L}(B_3)$, $\overline{L}(B_2)$, $\overline{L}(B_1)$, соответственно, в условиях леммы 3.7.1. Остается оценить $\overline{L}(B_1)$. Имеем

$$E(B_1) = \mathbf{E}\left(e^{\mu Z(T)}; \frac{Z(T)}{T} < -N\right) < e^{-\mu NT}.$$

Так как $\mu > 0$, то при любом $b > 0$ мы всегда можем обеспечить выполнение неравенства

$$\overline{L}(B_1) < -G.$$

Как и в лемме 3.7.1, это приводит к неравенству (3.7.16). Это доказывает лемму 3.7.2.

Для того чтобы получить оценку сверху для $\overline{L}(\mathbb{R})$ в (3.7.2), нам осталось рассмотреть две возможности: возможность

$$d_- = -\infty, \qquad d_+ = \infty$$

с множествами

$$B_1 = (-\infty, -N), \qquad B_2 = [-N, N], \qquad B_3 = (N, \infty)$$

и возможность $|d_-| < \infty$, $d_+ < \infty$ с множествами

$$B_1 = (-\infty, d_- - \varepsilon], \quad B_2 = (d_- - \varepsilon, d_- + \varepsilon), \quad B_3 = [d_- + \varepsilon, d_+ - \varepsilon],$$
$$B_4 = (d_+ - \varepsilon, d_+ + \varepsilon), \quad B_5 = [d_+ + \varepsilon, \infty).$$

Оценки сверху значений $\overline{L}(B_j)$ для множеств B_j всех этих видов содержатся в доказательствах лемм 3.7.1, 3.7.2. Поэтому мы получаем

Следствие 3.7.1. *При выполнении условий теоремы* 3.7.1 *и* $\mu \in (0, \mu^+)$

$$\overline{L}(\mathbb{R}) \leqslant \widehat{A}(\mu).$$

Для доказательства теоремы 3.7.1 в случае $\mu \in (0, \mu^+)$ нам осталось получить оценку снизу для $\underline{L}(\mathbb{R})$.

Лемма 3.7.3. *При выполнении условий теоремы* 3.7.1 *и* $\mu \in (0, \mu^+)$

$$\underline{L}(\mathbb{R}) \geqslant \widehat{A}(\mu). \tag{3.7.17}$$

Доказательство. Так как $\widehat{A}(\mu) = \sup\big(\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mu\alpha_\varepsilon - \widehat{D}(\alpha_\varepsilon) \geqslant \widehat{A}(\mu) - \varepsilon.$$

Для любого $\gamma \in (0, 1)$ в силу (3.7.5) имеем

$$\underline{L}(\mathbb{R}) \geqslant \underline{L}\big((\alpha_\varepsilon)_\gamma\big) \geqslant \mu\alpha_\varepsilon - \mu\gamma + \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha_\varepsilon)_\gamma\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mu\alpha_\varepsilon - \mu\gamma - \widehat{D}(\alpha_\varepsilon) - \delta_\gamma \geqslant \widehat{A}(\mu) - \mu\gamma - \varepsilon - \delta_\gamma,$$

где $\delta_\gamma \to 0$ при $\gamma \to 0$. Устремляя γ и ε к 0, получим (3.7.17). Лемма 3.7.3 доказана.

Случай $\mu \in (\mu^-, 0)$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\mu \notin [\mu^-, \mu^+]$. Тогда $\widehat{A}(\mu) = A(\mu) = \infty$, и для доказательства (3.7.1) достаточно установить соотношение

$$L := \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\mu Z(t)} = \infty. \tag{3.7.18}$$

Имеем при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$L \geqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\left(e^{\mu Z(t)};\ \frac{Z(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mu\alpha - |\mu|\varepsilon + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon\right).$$

Применяя далее оценку снизу в ПБУ, получаем

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \geqslant -\widehat{D}\big((\alpha)_\varepsilon\big) \geqslant -\widehat{D}(\alpha),$$

поэтому

$$L \geqslant \mu\alpha - \widehat{D}(\alpha) - |\mu|\varepsilon.$$

Так как α произвольно, то отсюда в силу первого соотношения в утверждении (3.5.62) теоремы 3.5.4 получаем

$$L \geqslant \sup_\alpha \big\{\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)\big\} - |\mu|\varepsilon = \widehat{A}(\mu) - |\mu|\varepsilon = \infty.$$

Это доказывает (3.7.18). Теорема 3.7.1 доказана.

Отметим, что часть доказательства теоремы 3.7.1 можно извлечь из теоремы 4.3.1 в [93] (см. также [119]), где рассматривается последовательность $Z(T)$ более общей природы, удовлетворяющая принципу больших уклонений. В этих работах показано, что в предположении о существовании подходящих оценок сверху для $\overline{L}(-\infty, -N)$ и $\overline{L}(N, \infty)$ значение $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E} e^{\mu Z(T)}$ равно преобразованию Лежандра над функцией уклонений, соответствующей $Z(T)$. Такой подход был использован в [36], где также доказана теорема 3.7.1. В [57] аналогичным образом изучен случай, когда процесс $Z(t)$ является многомерным и арифметическим.

Глава 4

Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления

В этой главе продолжены исследования принципов больших уклонений для обобщенных процессов восстановления. Основным объектом изучения станут вероятности больших уклонений *траекторий* ОПВ.

Результаты § 4.1 носят предварительный характер. В §§ 4.2, 4.3 установлены так называемые «частичные» ПБУ (локальные ПБУ, действующие лишь в пространстве абсолютно непрерывных функций). В §§ 4.4, 4.5 при весьма ограничительных условиях получены так называемые «полные» ПБУ. В граничных задачах в §§ 4.6, 4.7 удается установить ПБУ при более широких условиях и с явным видом функционала уклонений. В § 4.8 установлен принцип умеренно больших уклонений для ОПВ.

§ 4.1 Условия выполнения принципа больших уклонений для приращений процесса и для конечномерных распределений

4.1.1 ПБУ для приращений ОПВ

Пусть выполнены условия теоремы 3.4.1 о ПБУ для ОПВ в фазовом пространстве и пусть $U < T$ неограниченно возрастает вместе с T так, что $T - U \to \infty$. Будут ли в этом случае выполнены условия, обеспечивающие выполнение ПБУ для приращений $Z(T) - Z(U)$? Начальные скачки $\boldsymbol{\xi}_{1,U}$ сужения процесса $Z(t)$ на $[U,T]$ имеют следующий вид. Обозначим, как и прежде,

$$\gamma(U) := U - T_{\nu(U)}, \quad \chi(U) := T_{\eta(U)} - U,$$
$$\zeta(U) := \zeta_{\eta(U)}, \quad \boldsymbol{\xi}(U) := (\chi(U), \zeta(U)).$$

Тогда $\boldsymbol{\xi}_{1,U} = \boldsymbol{\xi}(U)$. Распределение $\boldsymbol{\xi}_{1,U}$ в общем неоднородном случае определяется соотношениями ($B \subset \mathbb{R}$)

$$P(u,B) := \mathbf{P}(\chi(U) \geqslant u,\ \zeta(U) \in B) = \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant U + u,\ \zeta_1 \in B) + \\ + \int_0^U \widetilde{H}_1(dt) \mathbf{P}(\tau \geqslant U - t + u,\ \zeta \in B), \tag{4.1.1}$$

где

$$\widetilde{H}_1(dt) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_n \in dt) = \widetilde{H}(dt) \quad \text{при} \quad t \neq 0.$$

Так как $\int_0^t \widetilde{H}_1(t) \leqslant c_1 t + c_2$ при некоторых c_1, c_2, то интегрированием по частям нетрудно убедиться, что

$$P(u,B) \leqslant \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant U + v,\ \zeta_1 \in B) + c_1 \int_0^U \mathbf{P}(\tau \geqslant U - t + v,\ \zeta \in B) dt \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant U + v,\ \zeta_1 \in B) + c_1 \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v,\ \zeta \in B) dt.$$

Отсюда аналогично предыдущему (см. лемму 1.1.2) находим

$$\psi_{(U)}(\lambda,\mu) := \mathbf{E} e^{\lambda\chi(U) + \mu\zeta(U)} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{E}(e^{\lambda(\tau_1 - U) + \mu\zeta_1};\ \tau_1 \geqslant U) + c_1 \frac{\psi(\lambda,\mu) - \psi(0,\mu)}{\lambda} \leqslant \\ \leqslant \psi_1(\lambda,\mu) + c_1 \mathbf{E}\tau \psi^{(st)}(\lambda,\mu), \tag{4.1.2}$$

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}^{(st)} \subset \mathcal{A}_{(U)} := \big\{(\lambda,\mu):\ \psi_{(U)}(\lambda,\mu) < \infty\big\}.$$

Учитывая замечание 3.4.3 к теореме 3.4.1 (неравенство (4.1.2) можно представить в виде (3.4.19)), получаем следующее утверждение

Теорема 4.1.1. *Условие*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}^{(st)}] \tag{4.1.3}$$

(ср. с (3.4.3)) *вместе с другими условиями теоремы* 3.4.1 *влекут за собой выполнение ПБУ для* $Z(T) - Z(U)$.

По-видимому, при выполнении равенства $\widehat{D}(0) = D(0)$ имеет место утверждение и о необходимости условия (4.1.3) в теореме 4.1.1 (ср. с замечанием 3.4.1).

Рассмотрим теперь более сильное чем (4.1.3) условие, обеспечивающее выполнение *условного* ПБУ для $Z(T) - Z(U)$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_U$, порожденной траекториями процесса $Z(t)$ на $[0, U]$. Это условие тесно связано с условиями асимптотической независимости приращений процесса $Z(t)$. Для $B \subset \mathbb{R}^2$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_{1,U} \in B) = \mathbf{P}\big((\tau_1 - U,\ \zeta_1) \in B;\ \tau_1 \geqslant U\big) + \\ + \mathbf{P}\big(\boldsymbol{\xi}(U - \tau_1) \in B;\ \tau_1 < U\big). \qquad (4.1.4)\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, область конечности преобразования Лапласа над первым (несобственным) распределением в правой части (4.1.4) содержит в себе $\mathcal{A}_1$. Рассмотрим область конечности преобразования Лапласа над вторым (тоже несобственным) распределением в правой части (4.1.4). Вся зависимость траектории $Z(t)$ на $[U, T]$ от траектории на $[0, U]$ сосредоточена в значении $\gamma(U)$. Для первого скачка $\boldsymbol{\xi}_{1,U} = \boldsymbol{\xi}(U) = \big(\chi(U), \zeta(U)\big)$ процесса $Z(t)$ на $[U, T]$ на множестве $\big\{\gamma(U) \in dt\big\} \in \mathfrak{A}_U$ имеем при $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\chi(U) \geqslant v,\ \zeta(U) \geqslant w |\ \mathfrak{A}_U) = \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v,\ \zeta \geqslant w |\ \tau \geqslant t),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\chi(U) \geqslant v,\ \zeta(U) < -w |\ \mathfrak{A}_U) = \\ = \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v,\ \zeta < -w |\ \tau \geqslant t). \qquad (4.1.5)\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение меру $\mathbf{Q}$ в полупространстве $\{v \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^2$, определив ее на квадрантах $\{v \geqslant 0, w \geqslant 0\}$ и $\{v \geqslant 0, w < 0\}$ соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\big([v, \infty) \times [w, \infty)\big) &:= \sup_{t>0} \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v,\ \zeta \geqslant w |\ \tau \geqslant t), \\ \mathbf{Q}\big([v, \infty) \times [-\infty, -w)\big) &:= \sup_{t>0} \mathbf{P}(\tau \geqslant t + v,\ \zeta < -w |\ \tau \geqslant t),\end{aligned} \qquad (4.1.6)$$

соответственно. Если пронормировать эту меру суммой

$$Q_0 = \mathbf{Q}\big([0, \infty) \times [0, \infty)\big) + \mathbf{Q}\big([0, \infty) \times (-\infty, 0)\big),$$

то получим распределение, соответствующее, возможно, несобственному случайному вектору, который мы обозначим через $\boldsymbol{\xi}_\infty = (\tau_\infty, \zeta_\infty)$.

Если τ и ζ независимы, то сумма Q_0 равна 1, $\zeta_\infty \overset{d}{=} \zeta$, τ_∞ и ζ_∞ также независимы. «Хвосты» распределения (4.1.6) равномерно по U и по всем направлениям мажорируют соответствующие «хвосты» условных распределений (4.1.5).

В дальнейшем важную роль будет играть условие

$$\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}]. \tag{4.1.7}$$

Пусть

$$\mathcal{A}_\infty := \big\{(\lambda,\mu):\ \psi_\infty(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_\infty+\mu\zeta_\infty} < \infty\big\}.$$

Если выполнено (4.1.7), то область $\mathcal{A}_\infty$ содержит некоторую окрестность нуля и вложена в область конечности преобразования Лапласа над начальными скачками $\boldsymbol{\xi}_{1,U} = \boldsymbol{\xi}(U)$ при всех U и любой предыстории из $\mathfrak{A}_U$. Стало быть, если $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_\infty]$, то условия вида $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1]$ будут выполнены равномерно для всех начальных скачков $\boldsymbol{\xi}_{1,U}$ сужений процесса $Z(t)$ на $[U,T]$.

Учитывая (4.1.4) и сказанное выше, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1.2. *Условия*

$$\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}], \qquad \mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_\infty] \tag{4.1.8}$$

вместе с другими условиями теоремы 3.4.1 *влекут за собой равномерное по всем элементарным событиям из* $\mathfrak{A}_U$ *выполнение условного ПБУ для траекторий* $Z(T)-Z(U)$*:*

$$\lim_{T-U\to\infty} \frac{1}{T-U} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)-Z(U)}{T-U} \in \Delta[\alpha) \big|\ \mathfrak{A}_U\right) = -\widehat{D}(\alpha)$$

(ср. с (3.4.5)) *при* $\Delta = \overline{o}(1)$, $T-U\to\infty$.

Имеет место также аналогичное (3.4.6), (3.4.7) утверждение для условного «интегрального» ПБУ.

Условие $\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}]$ выполнено не всегда. Оно не выполнено, если распределение τ имеет большие лакуны. Другой признак невыполнения условия $\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}]$ мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.1.1. *Пусть существуют постоянная* $c>0$ *и последовательности*

$$t_n \uparrow t_\infty \leqslant \infty \quad \text{и} \quad w_n \begin{cases} \geqslant ct_n, & \text{если} \quad t_\infty = \infty,\\ \to\infty, & \text{если} \quad t_\infty < \infty,\end{cases}$$

при $n \to \infty$, такие, что

$$\mathbf{P}\big(|\zeta| \geqslant w_n | \ \tau \geqslant t_n\big) \geqslant \begin{cases} e^{o(t_n)}, & \textit{если} \quad t_\infty = \infty, \\ p > 0, & \textit{если} \quad t_\infty < \infty. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

Тогда $\zeta_\infty \not\Subset [\mathbf{C}]$.

Условие (4.1.9) свидетельствует о сильной зависимости ζ и τ. Оно всегда выполнено, например, для зависимостей вида $\zeta = h\tau + \omega$ при $t_\infty = \infty$. В случае $t_\infty < \infty$ оно выполнено, например, для вектора (τ, ζ), где величина τ равномерно распределена на $[0,1]$, $t_n \uparrow 1$, $w_n = -\ln(1 - t_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\zeta = \ln(1-\tau) + \omega$, ω не зависит от τ, $\omega \Subset [\mathbf{C}]$.

Доказательство леммы 4.1.1. При любом $\mu > 0$ имеем

$$\mathbf{E}\big(e^{\mu|\zeta|}| \ \tau \geqslant t_n\big) \geqslant \mathbf{E}\big(e^{\mu|\zeta|}, \ |\zeta| \geqslant w_n \,|\, \tau \geqslant t_n\big) \geqslant$$
$$\geqslant e^{\mu w_n}\mathbf{P}\big(|\zeta| \geqslant w_n \,|\, \tau \geqslant t_n\big) \geqslant \begin{cases} e^{\mu c t_n + o(t_n)}, & \text{если} \quad t_\infty = \infty, \\ p e^{\mu w_n}, & \text{если} \quad t_\infty < \infty. \end{cases}$$

Правые части этих соотношений неограниченно возрастают при $n \to \infty$. Это означает, что $\zeta_\infty \not\Subset [\mathbf{C}]$. Лемма доказана.

Условие $\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}]$ всегда выполнено, если τ и ζ независимы, а распределение τ имеет вид $\mathbf{P}(\tau \geqslant v) = e^{-\lambda_+ v} l(v)$, где $l(v)$ — правильно меняющаяся функция на бесконечности. В этом случае $\mathbf{P}(\tau \geqslant t+v \,|\, \tau \geqslant t) = e^{-\lambda_+ v} \frac{l(t+v)}{l(t)}$, где $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{l(t+v)}{l(t)} = 1$, так что

$$\zeta_\infty \stackrel{d}{=} \zeta, \qquad \mathbf{P}(\tau_\infty \geqslant v) \leqslant c e^{-\lambda_+ v}, \qquad c = \text{const}.$$

Справедливо следующее более общее утверждение.

Лемма 4.1.2. *Пусть $\lambda_+ < \infty$ и выполнены следующие условия*

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathbf{P}(\tau \geqslant v, \zeta \geqslant w) &\leqslant \mathbf{P}(\tau \geqslant v) e^{a(v,w)} \mathbf{P}(\zeta \geqslant w) e^{b(v,w)}, \\ \mathbf{P}(\tau \geqslant v, \zeta < -w) &\leqslant \mathbf{P}(\tau \geqslant v) e^{a(v,w)} \mathbf{P}(\zeta < -w) e^{b(v,w)}, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где

$$\sup_w \frac{a(v,w)}{v} \to 0 \quad \textit{при} \quad v \to \infty, \quad \sup_v \frac{b(v,w)}{w} \to 0 \quad \textit{при} \quad w \to \infty.$$

$$2) \qquad \ln \mathbf{P}(\tau \geqslant v) = -\lambda_+ v + h(v), \tag{4.1.11}$$

где

$$\sup_t \frac{|h(t+v)-h(t)|}{v} \to 0 \quad \textit{при} \quad v \to \infty.$$

Тогда $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}$ *и область* $\mathcal{A}$ *прямоугольна.*

Доказательство. Имеем

$$\ln \mathbf{P}(\tau_\infty \geqslant v, \zeta_\infty \geqslant w) \leqslant \ln Q_0 + \ln \sup_{t\geqslant 0} \frac{\mathbf{P}(\tau \geqslant t+v)}{\mathbf{P}(\tau \geqslant t)} + o(v) + \\ + \ln \mathbf{P}(\zeta \geqslant w) + o(w) \quad \text{при} \quad v \to \infty, w \to \infty,$$

где

$$\sup_{t\geqslant 0} \ln \frac{\mathbf{P}(\tau \geqslant t+v)}{\mathbf{P}(\tau \geqslant t)} \leqslant -\lambda_+ v + \sup_{t\geqslant 0} \big|h(t+v) - h(t)\big| = -\lambda_+ v + o(v)$$

при $v \to \infty$. Отсюда следует, что при $c = \mathrm{const}$

$$\mathbf{P}(\tau_\infty \geqslant v, \zeta_\infty \geqslant w) \leqslant c \exp\big\{ -\lambda_+ v + o(v)\big\} \mathbf{P}(\zeta \geqslant w) e^{o(w)}.$$

Аналогичное неравенство справедливо для $\mathbf{P}(\tau_\infty \geqslant v, \zeta_\infty < -w)$.

Из полученных соотношений вытекает, что $\mathbf{E}e^{\lambda\tau_\infty + \mu\zeta_\infty} < \infty$ при любых $\lambda < \lambda_+$ и $\mu \in (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$. Лемма доказана.

Сформулируем теперь утверждение, которое показывает, что условие $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| < \infty) > 0$ (и тем более $\zeta_\infty \Subset [\mathbf{C}]$) несовместимо с неравенством $\widehat{D}(0) < D(0)$ $(\lambda_+ < D(0))$.

Лемма 4.1.3. *Если* $\mathbf{P}\big(|\zeta_\infty| < \infty\big) > 0$, *то* $\lambda_+ \geqslant D(0) = \widehat{D}(0)$.

Лемма 4.1.3 будет доказана в разделе 4.1.2.

Условия (4.1.10) «грубой» асимптотической независимости приращений процесса $Z(t)$ могут быть несколько расширены. Именно, справедлива

Теорема 4.1.3. *Пусть* $\boldsymbol{\xi}_1 \Subset [\mathbf{C}]$, $\boldsymbol{\xi} \Subset [\mathbf{C}]$, $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1]$, *и выполнено хотя бы одно из следующих условий*

$$\begin{aligned} &1)\ \boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}], \quad \mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_\infty] \text{ (условия теоремы 4.1.2);} \\ &2)\ \textit{Выполнены условия } (4.1.10),\ (4.1.11) \\ &\quad \text{(условия леммы 4.1.2);} \\ &3)\ \tau \quad \textit{и} \quad \zeta \quad \textit{независимы}, \qquad \tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]; \\ &4)\ \zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Тогда при любом фиксированном $u \in (0,1)$ *приращения* $Z(uT)$ *и* $Z(T) - Z(uT)$ *асимптотически независимы в смысле грубой асимптотики и удовлетворяют «совместному» ПБУ:*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\biggl(\frac{Z(uT)}{T} \in \Delta[\alpha), \quad \frac{Z(T)-Z(uT)}{T} \in \Delta[\beta)\biggr) =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \biggl[\mathbf{P}\biggl(\frac{Z(uT)}{T} \in \Delta[\alpha)\biggr)\mathbf{P}\biggl(\frac{Z(T)-Z(uT)}{T} \in \Delta[\beta)\biggr)\biggr] =$$
$$= -u\mathbf{D}\biggl(1, \frac{\alpha}{u}\biggr) - (1-u)\mathbf{D}\biggl(1, \frac{\beta}{1-u}\biggr) =$$
$$= -\mathbf{D}(u,\alpha) - \mathbf{D}(1-u,\beta), \quad (4.1.13)$$

где $\Delta = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$.

Отметим, что условия теоремы 3.4.1 о ПБУ для ОПВ в фазовом пространстве недостаточны для выполнения ПБУ (4.1.13) для конечномерных распределений. На это указывает следующий пример.

Пример 4.1.1. Построим однородный ОПВ ($\xi_1 \underset{d}{=} \xi$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$), для которого $\widehat{D}(0) = D(0)$ (и, стало быть, выполнены условия теоремы 3.4.1), но ПБУ (4.1.13) не будет иметь места. Пусть $\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-t}$, $\zeta = \pm\tau$ с вероятностями $1/2$. Тогда $\mathbf{E}\zeta = 0$, $D(0) = 0$, $\lambda_+ = 1$, $\lambda_+ > D(0) = \widehat{D}(0) = 0$, и условия теоремы 3.4.1 выполнены. Рассмотрим для $u = 1/2$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon T \to \infty$ при $T \to \infty$ вероятность

$$P := \mathbf{P}\biggl(\frac{Z(uT)}{T} \in (0)_\varepsilon, \frac{Z(T)-Z(uT)}{T} \in (1)_\varepsilon\biggr).$$

Ясно, что при $T \to \infty$ эта вероятность не меньше, чем

$$\frac{1}{3}\mathbf{P}\bigl(\tau \geqslant T(1-\varepsilon)\bigr) = \frac{1}{3}e^{-T(1-\varepsilon)}, \qquad \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln P \geqslant -1.$$

В то же время $\mathbf{D}(1,2) = \infty$, так как скорость роста $Z(t)$ не превышает 1 ($\mathbf{P}\bigl(Z(T) > T\bigr) = 0$). Поэтому равенство (4.1.13) неверно.

Доказательство теоремы 4.1.3. Из теоремы 3.3.2, леммы 4.1.3 и любого из условий (4.1.12) вытекает, что $\lambda_+ \geqslant D(0) = \widehat{D}(0)$. Первое утверждение теоремы следует непосредственно из теоремы 4.1.1 и леммы 4.1.3. Второе утверждение вытекает из первого и леммы 4.1.2.

Докажем третье утверждение. Рассмотрим однородный случай. Пусть B_1, B_2 — два события, стоящие под знаком вероятности в левой части (4.1.13), $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Тогда при $U = uT$ имеем

$$\mathbf{P}(B_1B_2) = \mathbf{P}(B_1B_2B_T) + \mathbf{P}(B_1B_2\overline{B}_T), \qquad (4.1.14)$$

где $n = [MT]$ и при любом $M > 0$

$$B_T := \big\{\eta(U) < n,\ \tau(U) < \delta T\big\},$$
$$\mathbf{P}(B_1 B_2 \overline{B}_T) \leqslant \mathbf{P}\big(\eta(U) \geqslant n\big) + n\mathbf{P}(\tau \geqslant \delta T) =$$
$$= \mathbf{P}(T_n < U) + n\mathbf{P}(\tau \geqslant \delta T). \tag{4.1.15}$$

Ясно, что при $T \to \infty$ первая вероятность в правой части (4.1.15) выбором M может быть сделана меньше, чем e^{-NT} при любом заданном $N > 0$. Вторая вероятность в правой части (4.1.15) при заданном $\delta > 0$ и $T \to \infty$ будет также меньше e^{-NT}, так как $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Эта оценка сохранится, очевидно, и для $\delta = \delta_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$, так что
$$\mathbf{P}(B_1 B_2 \overline{B}_T) \leqslant 2e^{-NT}.$$
Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части (4.1.14), равное
$$\mathbf{P}(B_1 B_T)\mathbf{P}(B_2|\ B_1 B_T).$$
Очевидно, что при достаточно большом N
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_1 B_T) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_1) = -uD\bigg(\frac{\alpha}{u}\bigg).$$
Далее,
$$\mathbf{P}(B_2|\ B_1 B_T) = \mathbf{P}\bigg(\frac{Z^*\big((1-u)T\big)}{T} \in \Delta[\beta)\bigg),$$
где $Z^*(t)$ есть ОПВ, первый скачок которого (τ_1^*, ζ_1^*) обладает свойствами
$$\tau_1^* < \delta T, \qquad \xi_1^* \underset{d}{=} \zeta.$$
Если мы заменим этот скачок на вектор $(\tau_1^{**}, \zeta_1^{**}) = (0, \zeta_1^*)$, то получим процесс $Z^{**}(t)$, удовлетворяющий всем условиям теоремы 3.4.1 и такой, что $Z(T) - Z(U) = Z^{**}(T_1)$, где $T_1 = (1-u)T - \tau_1^*$, $\tau_1^* \leqslant \delta T$, так что $T_1 \sim (1-u)T$ при $T \to \infty$. Остается воспользоваться теоремой 3.4.1 и замечанием 3.4.2, в силу которых для любой последовательности $T_1 \sim (1-u)T$ при $T \to \infty$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\bigg(\frac{Z^{**}(T_1)}{T} \in \Delta[\beta)\bigg) = -(1-u)D\bigg(\frac{\beta}{1-u}\bigg).$$

Утверждение 4) вытекает из ПБУ для нормированных *траекторий* $z_t(t) = \frac{Z(tT)}{T}$, $t \in [0,1]$, доказанного ниже в теореме 4.5.1.

Изменения, которые нужно внести в доказательство в неоднородном случае, очевидны.

Теорема 4.1.3 доказана.

Из теоремы 4.1.3 в свою очередь вытекает ПБУ для конечномерных распределений процесса $Z(t)$ в моменты u_jT, $j = 0, \dots, k$; $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_k = 1$.

Теорема 4.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1.3. *Тогда при любых* α_j, $j = 1, \dots, k$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{k} \bigg\{ \frac{1}{T} \big(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T) \big) \in \Delta[\alpha_j] \bigg\} \Bigg) = I(f), \quad (4.1.16)$$

где $\Delta = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$,

$$I(f) := \int\limits_0^1 D\big(f'(t)\big) dt,$$

$f(t)$ — *непрерывная ломаная на* $[0,1]$, $f(0) = 0$, *с узловыми точками* $(u_j, \sum_{i=0}^{j} \alpha_i)$, $j = 0, \dots, k$.

Справедлив также «интегральный» ПБУ для конечномерных распределений процесса $Z(t)$: *для любых измеримых множеств* $B_j \subset \mathbb{R}$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{k} \bigg\{ \frac{1}{T} \big(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T) \big) \in B_j \bigg\} \Bigg) \leqslant -I([B]), \quad (4.1.17)$$

$$\underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{k} \bigg\{ \frac{1}{T} \big(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T) \big) \in B_j \bigg\} \Bigg) \geqslant -I((B)), \quad (4.1.18)$$

где

$$I(B) := \inf_{f \in B} I(f),$$

B *есть совокупность непрерывных ломаных* $f(t)$ *с изломами в точках* u_j, $j = 1, \dots, k$ *на отрезке* $[0,1]$ *таких, что* $f(0) = 0$, $f(u_j) - f(u_{j-1}) \in B_j$ *при* $j = 1, \dots, k$; $[B]$ *и* (B) — *замыкание и внутренность множества* B *в равномерной метрике.*

Интегральный ПБУ (4.1.17)-(4.1.18) устанавливается с помощью локального ПБУ (4.1.16) так же, как это делается в доказательстве теоремы 3.4.1.

Вопрос о том, достаточно ли для выполнения ПБУ (4.1.16)–(4.1.18) лишь условий $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{A}_1$, $\lambda_+ \geqslant D(0)$, остается открытым.

4.1.2 Доказательство леммы 4.1.3

Для доказательства леммы 4.1.3 и в дальнейшем нам понадобится

Лемма 4.1.4. *Справедливо равенство*

$$l^{(\tau)} := -\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau \geqslant T) = \lambda_+. \tag{4.1.19}$$

Доказательство. В силу экспоненциального неравенства Чебышева при $T \geqslant \mathbf{E}\tau$, любом $\delta > 0$ и естественных соглашениях относительно обозначений имеем

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant T) \leqslant \psi^{(\tau)}(\lambda_+ - \delta)e^{-T(\lambda_+ - \delta)},$$

так что $-l^{(\tau)} \leqslant -\lambda_+ + \delta$. Поскольку δ произвольно, то

$$l^{(\tau)} \geqslant \lambda_+. \tag{4.1.20}$$

Если $\lambda_+ = \infty$, то, очевидно, $l^{(\tau)} = \infty$ и равенство (4.1.19) доказано.

Установим теперь обратное к (4.1.20) неравенство в случае $\lambda_+ < \infty$. Допустим противное, что при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$l^{(\tau)} \geqslant \lambda_+ + \delta. \tag{4.1.21}$$

Оно означает, что в силу определения $l^{(\tau)}$

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) \leqslant e^{-\lambda_+ t - \delta t + o(t)} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Из этого неравенства вытекает, что для всех $\lambda \in [0,\ \lambda_+ + \delta)$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$, т.е. $\lambda_+ \geqslant \lambda_+ + \delta$. Мы получили противоречие. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.1.3. Покажем, что в случае $\widehat{D}(0) < D(0)$ выполнено равенство $\mathbf{P}\big(|\zeta_\infty| = \infty\big) = 1$.

Пусть

$$\lambda_+ = \widehat{D}(0) < D(0).$$

Имеем при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $t_n \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(\tau \geqslant t_n,\ |\zeta| \geqslant \varepsilon t_n\big) = \mathbf{P}(\tau \geqslant t_n) - \mathbf{P}\big(\tau \geqslant t_n,\ |\zeta| < \varepsilon t_n\big). \tag{4.1.22}$$

По лемме 4.1.4 существует последовательность $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t_n) = e^{-\lambda_+ t_n + o(t_n)}. \tag{4.1.23}$$

Поэтому в силу замечания 3.5.3 к лемме 3.5.4

$$\mathbf{P}\big(\tau \geqslant t_n,\ |\zeta| < \varepsilon t_n\big) \leqslant e^{-(D(0)-\delta(\varepsilon))t_n + o(t_n)}, \tag{4.1.24}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\delta(\varepsilon) < \frac{D(0)-\lambda_+}{2} =: r$. Тогда $D(0) - \delta(\varepsilon) > \lambda_+^{(\tau)} + r$ и правая часть в (4.1.24) не будет превосходить

$$e^{-(\lambda_+ + r)t_n + o(t_n)}.$$

Так как $r > 0$, то вместе с (4.1.23) это означает, что второе слагаемое в правой части (4.1.22) будет пренебрежимо мало при $n \to \infty$ по сравнению с первым и, стало быть

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\big(\tau \geqslant t_n,\ \ |\zeta| \geqslant \varepsilon t_n\big) \sim \mathbf{P}(\tau \geqslant t_n),\\ \mathbf{P}\big(|\zeta| \geqslant \varepsilon t_n |\ \tau \geqslant t_n\big) \to 1\end{gathered} \tag{4.1.25}$$

при $n \to \infty$. Поэтому при любом $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\zeta_\infty| \geqslant N) &= \mathbf{P}(\zeta_\infty \geqslant N) + \mathbf{P}(\zeta_\infty \leqslant -N) = \\ &= \sup_{t>0} \mathbf{P}(\zeta \geqslant N|\ \tau \geqslant t) + \sup_{t>0} \mathbf{P}(\zeta \leqslant -N|\ \tau \geqslant t) \geqslant \\ &\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta \geqslant N|\ \tau \geqslant t_n) + \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta \leqslant -N|\ \tau \geqslant t_n) \geqslant \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta| \geqslant N|\ \tau \geqslant t_n) = 1.\end{aligned}$$

Лемма 4.1.3 доказана.

Для доказательства несовместимости условий $\lambda_+ < D(0)$ и $\zeta_\infty \Subset [\mathbf{C}]$ ($\boldsymbol{\xi}_\infty \Subset [\mathbf{C}]$) можно было бы также воспользоваться леммой 4.1.1, так как в силу (4.1.25) условие (4.1.9) этой леммы выполнено.

§ 4.2 Первый частичный локальный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления

Для произвольной фиксированной последовательности $x = x(T) \sim T$ при $T \to \infty$ рассмотрим семейство случайных процессов

$$z_T = z_T(t) = \frac{Z(tT)}{x}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Процесс z_T принимает значения в измеримом пространстве $(\mathbb{D}, \mathfrak{B})$, где $\mathbb{D} = \mathbf{D}[0,1]$ — пространство функций $f = f(t)$ на отрезке $[0,1]$ без разрывов второго рода. Нам будет удобно наделить пространство $\mathbb{D}$ равномерной метрикой

$$\rho(f,g) := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \big|f(t) - g(t)\big|,$$

так что $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств относительно этой метрики. Через $(f)_\varepsilon$ обозначим ε-окрестность функции $f \in \mathbb{D}$ относительно метрики ρ. Пусть далее $\mathbb{C} = \mathbb{C}[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $f = f(t)$, $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}$ — класс абсолютно непрерывных функций $f = f(t)$, таких, что $f(0) = 0$. Цель настоящего и следующего параграфов — доказать: (a) два так называемых *«частичных»* локальных ПБУ для траекторий обобщенного процесса восстановления (определения см. ниже) и (b) — доказать «полный» локальный ПБУ при более ограничительных условиях. В случае (a) мы укажем условия (см. теоремы 4.2.1, 4.3.1 ниже), при которых для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$ (достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \to \infty$) имеют место соотношения

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\big(\zeta_T \in (f)_\varepsilon\big) \to \begin{cases} -I(f), & \text{если} \quad \lambda_+ \geqslant D(0) \\ & \text{(теорема 4.2.1)}, \\ -\widehat{I}(f), & \text{если} \quad \lambda_+ < D(0) \\ & \text{(теорема 4.3.1)}, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

где

$$I(f) := \int_0^1 D\big(f'(t)\big)dt, \quad \text{если} \quad f \in \mathbb{C}_a, \tag{4.2.2}$$

а функционал $\widehat{I}(f)$ будет определен позже. Если $f \in \mathbb{D}\setminus\mathbb{C}_a$ и выполнено лишь условие $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta) \Subset [\mathbf{C}]$, то пределы в левой части (4.2.1) могут не существовать. Подробнее об этом см. в начале § 4.4.

В случае (b) в теореме 4.4.1 будет доказано, что при дополнительном условии $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ для любой функции $f \in \mathbb{D}$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \to \infty$, имеет место *верхнее соотношение* в (4.2.1) (соответствующее случаю $\lambda_+ \geqslant D(0)$), в котором функционал $I(f)$ на функциях $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$ доопределен как ∞.

Итак, рассмотрим сначала случай $\lambda_+ \geqslant D(0) = \widehat{D}(0)$, $f \in \mathbb{C}_a$.

4.2.1 Основное утверждение и его доказательство

Теорема 4.2.1 (первый частичный локальный ПБУ). *Предположим, что*

$$\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta) \Subset [\mathbf{C}], \qquad \lambda_+ \geqslant D(0)$$

и справедлив локальный ПБУ (3.4.5) *в фазовом пространстве. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$*

при $T \to \infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = -I(f). \tag{4.2.3}$$

Мы называем утверждение теоремы 4.2.1 *частичным* локальным ПБУ потому, что оно справедливо не для всех функций $f \in \mathbb{D}$, а лишь для $f \in \mathbb{C}_a$. Второй частичный локальный ПБУ в альтернативном случае $\lambda_+ < D(0)$ установлен в § 4.3 (теорема 4.3.1). Полные локальные ПБУ для любых $f \in \mathbb{D}$ при дополнительном условии $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ рассмотрены в § 4.4.

Доказательство теоремы 4.2.1 выполним для случая, когда нормирующая последовательность $x = x(T)$ имеет вид $x(T) = T$. Нетрудно видеть, что в общем случае $x \sim T$ при $T \to \infty$ утверждение теоремы 4.2.1 является следствием этого специального случая (см. замечание 3.4.2 и лемму 4.5.1 ниже).

Для целого $L \geqslant 1$ через $\mathbf{t}_L = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_L = 1\}$ обозначим разбиение полуинтервала $(0, 1]$ на L полуинтервалов $(t_{l-1}, t_l]$, $l = 1, \ldots, L$. Через $f^{\mathbf{t}_L} = f^{\mathbf{t}_L}(t)$ обозначим непрерывную ломаную, построенную по узловым точкам

$$\big(t_l, f(t_l)\big), \qquad l = 0, 1, \ldots, L.$$

Ломаная $f^{\mathbf{t}_L}$ спрямляет функцию $f \in \mathbb{C}_a$, так что всегда справедливо неравенство (см., например, [12, § 4.2] или [31])

$$I(f) \geqslant I(f^{\mathbf{t}_L}). \tag{4.2.4}$$

Если рассмотреть так называемые «плотные» последовательности разбиений $\mathbf{t}_L$, для которых

$$\max_{1\leqslant l\leqslant L} (t_l - t_{l-1}) \to 0 \quad \text{при} \quad L \to \infty,$$

то имеет место сходимость

$$I(f^{\mathbf{t}_L}) \to I(f) \quad \text{при} \quad L \to \infty \tag{4.2.5}$$

(см., например, [12, § 4.2]). Очевидно, что равномерные разбиения

$$\mathbf{t}_L^U = \left\{ \frac{l}{L} \right\}_{l=0}^{L}$$

образуют плотную последовательность. Если разбиения $\mathbf{t}_L$ вложенные, т.е. $\mathbf{t}_L \subset \mathbf{t}_{L+1}$, то, очевидно, сходимость в (4.2.5) будет монотонной:

$$I(f^{\mathbf{t}_L}) \uparrow I(f) \quad \text{при} \quad L \uparrow \infty. \tag{4.2.6}$$

Если функция $f \in \mathbb{C}$ фиксирована и содержит линейные участки (на которых $f'(t) = \text{const}$), то сходимость (4.2.5), (4.2.6) будет иметь место и для последовательностей более «бедных» разбиений (зависящих от f), не обязательно «везде плотных». Ясно, например, что если $f(t) = ct$, $t \in [0,1]$, то $I(f) = I(f^{\mathbf{t}_1})$, и разбиения для сходимости (4.2.5) вообще не нужны. Поэтому на участках постоянства функции $f'(t)$ использовать разбиения для обеспечения сходимости (4.2.5), (4.2.6) нет необходимости.

Более того, доказательство, которое мы будем использовать, не допускает наличие точек разбиения на участках постоянства функции f. Поэтому мы будем строить вложенные разбиения для $f \in \mathbb{C}$ следующим образом. Если f имеет участки постоянства, то мы обозначим (u_r^-, u_r^+), $r = 1, \ldots, R$, максимальные интервалы, на которых вариация f равна 0 $\quad (f'(t) = 0$ п.в.) и занумеруем их в порядке убывания их длины. Рассмотрим вложенные разбиения

$$\mathbf{t}_L = \bigcup_{k=1}^{L} \mathbf{t}_k^U. \tag{4.2.7}$$

Для того, чтобы точки разбиения, которое мы строим, распределялись с ростом его номера «равномерно» по отрезку $[0,1]$, мы занумеруем элементы $\mathbf{t}_L$ следующим образом: сначала идут элементы из $\mathbf{t}_1^U$ в порядке возрастания, затем — новые элементы из $\mathbf{t}_2^U$ в порядке возрастания и т.д. Например, разбиение $\mathbf{t}_4$ будет иметь вид $\{0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4\}$. Далее рассмотрим пересечение $\mathbf{t}_L V$ разбиения $\mathbf{t}_L$ с множеством

$$V := [0,1] \setminus \bigcup_{r=1}^{R} [u_r^-, u_r^+), \tag{4.2.8}$$

не имеющим участков постоянства функции f.

Пусть L_1 есть наименьшее число, при котором количество точек в $\mathbf{t}_{L_1} V$ превосходит L. При заданном L включим в разбиение $\mathbf{u}_L$, которое мы строим, точку 0 и L первых точек из $\mathbf{t}_{L_1}$ (точка $t = 0$ не будет входить в разбиение $\mathbf{t}_L V$, если одно из чисел u_r^- окажется равным 0). Ясно, что точки u_r^-, не равные 0, не входят в $\mathbf{u}_L$ и что полученная последовательность вложенных разбиений будет плотной на множестве V, так что для нее сходимость (4.2.6) сохранится:

$$I(f^{\mathbf{u}_L}) \uparrow I(f) \quad \text{при} \quad L \uparrow \infty. \tag{4.2.9}$$

Разбиение $\mathbf{u}_L$ мы будем называть *f-разбиением.*

Рассмотрим теперь точки u_l, $l = 0, \dots, L$, из разбиения $\mathbf{u}_L$, расположенные в порядке возрастания, и обозначим χ_l величину перескока блужданием $\{\frac{1}{T}T_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, через уровень u_l:

$$\chi_l := \frac{1}{T}\, T_{\eta(u_l T)} - u_l, \tag{4.2.10}$$

где время первого прохождения $\eta(t)$ определено в § 1.1. Время $u_l + \chi_l$ есть момент первого скачка процесса $z_T(t)$ после момента $t = u_l$. Обозначим

$$\overline{\chi}_L := \max\{\chi_l :\ 1 \leqslant l \leqslant L-1\}. \tag{4.2.11}$$

Ясно, что для заданной функции f найдется последовательность $\delta_T \downarrow 0$ при $T \uparrow \infty$ такая, что событие $\{z_T \in (f)_\varepsilon\}$ при $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ влечет за собой событие $\{\overline{\chi}_L < \delta_T\}$ (Напомним, что точки $\{u_k^-\}$ в разбиение $\mathbf{u}_L$ не входят. Если $\chi_l > c = \mathrm{const} > 0$, то процесс $z_T(t)$ сохраняет постоянное значение на $[u_l, u_l + c]$, а функция f — не сохраняет, и события $\{\chi_l > c\}$ и $z_T \in (f)_\varepsilon$ несовместны при всех достаточно больших T).

Кроме того ясно, что событие $\{z_T \in (f)_\varepsilon\}$ влечет за собой событие

$$\{\overline{\zeta}(T) < 2\varepsilon T\}, \quad \text{где} \quad \overline{\zeta}(T) := \max_{0 \leqslant k \leqslant \nu(T)} |\zeta_k|,$$

величина $\nu(T)$ определена в § 1.1.

Таким образом, мы получили включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \Big\{ z_T(u_l) \in \big(f(u_l)\big)_\varepsilon \ \text{ при всех } \ 1 \leqslant l \leqslant L, \\ \overline{\zeta}(T) < 2\varepsilon T, \ \ \overline{\chi}_L < \delta_T \Big\}. \tag{4.2.12}$$

Важную роль в доказательстве теоремы 4.2.1 играет

Лемма 4.2.1. *Пусть фиксирована произвольная функция* $f \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$. *Тогда:*

(i). *Если выполнены условия теоремы* 4.2.1, *то для* f*-разбиения* $\mathbf{u}_L = \{u_l\}_{l=0}^L$ *и любых последовательностей* $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$, $\delta_T \to 0$ *при* $T \to \infty$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon \ \textit{при всех} \ 1 \leqslant l \leqslant L, \\ \overline{\zeta}(T) < 2\varepsilon T, \ \overline{\chi}_L < \delta_T \Big) \leqslant -I(f^{\mathbf{u}_L}). \tag{4.2.13}$$

(ii). *Если выполнены условия теоремы* 3.4.1, *то для любого фиксированного* $\delta > 0$ *и любого разбиения* $\mathbf{t}_L$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех} \, 1 \leqslant l \leqslant L \Big) \geqslant -I(f^{\mathbf{t}_L}). \tag{4.2.14}$$

Из утверждения (ii) леммы 4.2.1 нетрудно получить

Следствие 4.2.1. *Для любого фиксированного* $\delta > 0$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big) \geqslant \\ \geqslant -I\big((f^{\mathbf{t}_L})_\delta\big), \quad (4.2.15)$$

где

$$I(B) := \inf_{f\in B} I(f).$$

Доказательство следствия 4.2.1. При любой функции $g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta$ и для достаточно малого $\gamma > 0$ выполняется

$$\Big\{z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big\} \supset \\ \supset \Big\{z_T(t_l) \in \big(g(t_l)\big)_\gamma \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big\}. \quad (4.2.16)$$

Поэтому

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big) \geqslant \\ \geqslant \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(g(t_l)\big)_\gamma \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big).$$

Применяя (4.2.14) к правой части последнего неравенства, получаем

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big) \geqslant -I(g^{\mathbf{t}_L}). \quad (4.2.17)$$

Левая часть неравенства (4.2.17) не зависит от выбора функции g в пределах $(f^{\mathbf{t}_L})_\delta$. Поэтому, заменяя правую часть в (4.2.17) точной верхней гранью по $g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta$, получаем

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Big(z_T(t_l) \in \big(f(t_l)\big)_\delta \ \textit{при всех}\ 1 \leqslant l \leqslant L\Big) \geqslant -\inf_{g\in(f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g^{\mathbf{t}_L}).$$

Для любой функции $g \in \mathbb{D}$ выполняется $I(g) \geqslant I(g^{\mathbf{t}_L})$. Поэтому

$$I\big((f^{\mathbf{t}_L})_\delta\big) := \inf_{g\in(f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g) \geqslant \inf_{g\in(f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g^{\mathbf{t}_L}),$$

и мы получаем (4.2.15). Следствие 4.2.1 доказано.

Опираясь на лемму 4.2.1 (которую мы докажем позже) и следствие 4.2.1, продолжим доказательство теоремы 4.2.1.

(i). *Оценка сверху.* Из (4.2.12) и леммы 4.2.1 получаем

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \leqslant -I(f^{\mathbf{u}_L}). \tag{4.2.18}$$

Так как левая часть в (4.2.18) от разбиения $\mathbf{u}_L$ не зависит, то в силу соотношения (4.2.9) правую часть в (4.2.18) можно заменить на $-I(f)$. Оценка сверху для (4.2.3) установлена.

(ii). *Оценка снизу.* Покажем, что

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\delta\big) \geqslant -I(f) \tag{4.2.19}$$

для любого фиксированного $\delta > 0$. Если $I(f) = \infty$, то эта оценка очевидна. Поэтому везде в дальнейшем будем считать, что $I(f)<\infty$. Допустим сначала, что при некотором $N < \infty$ случайные векторы $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1)$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ с вероятностью 1 удовлетворяют неравенствам

$$\tau_1 \geqslant \frac{1}{N}, \qquad \tau \geqslant \frac{1}{N}, \qquad |\zeta_1| \leqslant N, \qquad |\zeta| \leqslant N. \tag{4.2.20}$$

Тогда, повторяя рассуждения, которые использовались при получении оценки снизу в локальном принципе больших уклонений для траекторий случайных блужданий (см. [12, § 4.2] или [31]), находим, что для любого фиксированного $\delta > 0$ существует число $L^0 = L^0_{\delta,f,N} < \infty$ такое, что для всех $L \geqslant L^0$ и всех достаточно больших T выполняется

$$\big\{z_T \in (f)_\delta\big\} \supset \Big\{z_T(l/L) \in \big(f(l/L)\big)_{\frac{\delta}{2}} \ \textit{при всех}\ l = 1, \ldots, L\Big\}.$$

Из этого соотношения, используя оценку (4.2.15) из следствия 4.2.1, получаем для всех $L \geqslant L^0$ неравенство

$$Q_\delta(f) := \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\delta\big) \geqslant -I\big((f^{\mathbf{t}_L})_\delta\big). \tag{4.2.21}$$

Отсюда и из неравенства (4.2.4) следует требуемая оценка снизу (4.2.19) при выполнении дополнительного предположения (4.2.20).

Если же неравенства (4.2.20) не выполнены, то введем в рассмотрение «срезанные» случайные векторы ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}_1$, ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}$, определив распределение ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}$ равенством ($B \subset \mathbb{R}^2$)

$$\mathbf{P}({}^{(N)}\boldsymbol{\xi} \in B) = \mathbf{P}\bigg(\boldsymbol{\xi} \in B \big|\ \tau \geqslant \frac{1}{N},\ |\zeta| \leqslant N\bigg). \tag{4.2.22}$$

Аналогично определим распределение срезки ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}_1$. Случайные векторы ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}_i$, $i = 2, 3, \ldots$, суть независимые копии ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}$, не зависящие от ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}_1$. Случайный процесс, построенный по срезанным векторам обозначим через ${}^{(N)}z_T = {}^{(N)}z_T(t)$. Для срезанных векторов ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}_i$ сохраним все обозначения, соответствующие случайным векторам $\boldsymbol{\xi}_i$, снабдив их верхним левым индексом (N).

Пусть далее $M > 0$ — произвольное число. Обозначим

$$A_{M,N} := \Bigl\{\tau_i \geqslant \frac{1}{N},\ |\zeta_i| \leqslant N \quad \textit{при всех} \ \ i = 0, 1, \ldots, [MT]\Bigr\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta) \geqslant \mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta,\ \nu(T) \leqslant TM,\ A_{M,N}) =\\ = \mathbf{P}(A_{M,N})\mathbf{P}\bigl({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta,\ {}^{(N)}\nu(T) \leqslant TM\bigr).\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Здесь

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(A_{M,N}) \to M \ln P(N) \tag{4.2.24}$$

при $T \to \infty$, где

$$P(N) := \mathbf{P}\Bigl(\tau \geqslant \frac{1}{N},\ |\zeta| \leqslant N\Bigr) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{4.2.25}$$

Второй сомножитель в правой части (4.2.23) больше или равен

$$\mathbf{P}\bigl({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta\bigr) - \mathbf{P}\bigl({}^{(N)}\nu(T) > TM\bigr). \tag{4.2.26}$$

Оценим сначала значение

$${}^{(N)}Q_\delta(f) := \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln \mathbf{P}\bigl({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta\bigr).$$

К нему применимо соотношение (4.2.21). Поэтому

$${}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -{}^{(N)}I\bigl((f^{\mathbf{t}_L})_\delta\bigr), \tag{4.2.27}$$

где

$${}^{(N)}I\bigl((f^{\mathbf{t}_L})_\delta\bigr) = \inf_{g\in B_L} {}^{(N)}I(g^{\mathbf{t}_L}), \qquad B_L := (f^{\mathbf{t}_L})_\delta. \tag{4.2.28}$$

Стало быть, для любых $g \in B_L$

$${}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -{}^{(N)}I(g^{\mathbf{t}_L}). \tag{4.2.29}$$

Полагая $t_l = \frac{l}{L}$ при $l = 0, 1, \ldots, L$;

$$\alpha_l = \Bigl[f\Bigl(\frac{l}{L}\Bigr) - f\Bigl(\frac{l-1}{L}\Bigr)\Bigr]L, \quad \beta_l = \Bigl[g\Bigl(\frac{l}{L}\Bigr) - g\Bigl(\frac{l-1}{L}\Bigr)\Bigr]L$$

при $l = 1, \ldots, L$, получаем для любой функции $g \in B_L$

$$ {}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -\frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} {}^{(N)}D(\beta_l). $$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от g из множества B_L и $|\beta_l - \alpha_l| < 2\delta$ при $g \in B_L$, то

$$ \varliminf_{N\to\infty} {}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -\frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \varlimsup_{N\to\infty} \inf_{|\beta_l-\alpha_l|<2\delta} {}^{(N)}D(\beta_l). \tag{4.2.30} $$

Воспользуемся теперь следующим утверждением, которое будет доказано позже.

Лемма 4.2.2. *Для любых $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$ \varlimsup_{N\to\infty} \inf_{|\beta-\alpha|<\delta} {}^{(N)}D(\beta) \leqslant D(\alpha). \tag{4.2.31} $$

Утверждение (4.2.31) *полностью сохранится для функции уклонений ${}^{[N]}D(\alpha)$ срезок ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}$ с распределением*

$$ \mathbf{P}({}^{[N]}\boldsymbol{\xi} \in B) := \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in B, \tau \leqslant N, |\zeta| \leqslant N)}{\mathbf{P}(\tau \leqslant N, |\zeta| \leqslant N)}. \tag{4.2.32} $$

Применяя (4.2.31) к правой части (4.2.30), находим

$$ \varliminf_{N\to\infty} {}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -\frac{1}{L} \varlimsup_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{L} {}^{(N)}D(\alpha_l) = -I(f^{\mathbf{t}_L}). \tag{4.2.33} $$

Отсюда в силу неравенства $I(f^{\mathbf{t}_L}) \leqslant I(f)$ получаем оценку снизу

$$ \varliminf_{N\to\infty} {}^{(N)}Q_\delta(f) \geqslant -I(f). \tag{4.2.34} $$

Вернемся теперь к неравенству (4.2.23). Из него и из (4.2.26) следует, что при любом N

$$ \begin{aligned} Q_\delta(f) \geqslant r(N) + {} \\ + \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \Big[\mathbf{P}\big({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta\big) - \mathbf{P}\big({}^{(N)}\nu(T) > MT\big) \Big], \end{aligned} \tag{4.2.35} $$

где

$$ r(N) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(A_{N,M}) \to 0 \tag{4.2.36} $$

при $N \to \infty$. Заметим далее, что ${}^{(N)}\tau \underset{d}{\geqslant} \tau$, ${}^{(N)}\nu(T) \underset{d}{\leqslant} \nu(T)$. Поэтому при всех N

$$\mathbf{P}\big({}^{(N)}\nu(T) > MT\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\nu(T) > MT\big).$$

В (3.4.18) показано, что для любого $N < \infty$ найдется M такое, что

$$\mathbf{P}\big(\nu(T) > MT\big) \leqslant e^{-NT}. \tag{4.2.37}$$

Поэтому в случае $I(f) < \infty$ всегда можно выбрать $M < \infty$ так, что при всех N

$$\mathbf{P}\big({}^{(N)}\nu(T) \geqslant MT\big) \leqslant e^{-3TI(f)}.$$

В то же время, согласно (4.2.34) вероятность $\mathbf{P}\big({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta\big)$ превосходит $e^{-2TI(f)}$ при всех достаточно больших N и T. Поэтому второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (4.2.35) пренебрежимо мало по сравнению с первым. Учитывая (4.2.36) и (4.2.34), мы получаем в итоге из (4.2.35) требуемую оценку

$$Q_\delta(f) \geqslant -I(f).$$

Неравенство (4.2.19), а вместе с ним и теорема 4.2.1, доказаны.

4.2.2 Доказательство лемм 4.2.1, 4.2.2

Доказательство леммы 4.2.1. (i). *Оценка сверху.*

Доказательство проведем по индукции по L. При $L = 1$ неравенство (4.2.13) следует из теоремы 3.4.1. Докажем теперь (4.2.13) при $L = 2$. При $L \geqslant 3$ переход от значения $L - 1$ к L при доказательстве (4.2.13) будет осуществляться точно таким же способом, как и при $L = 2$.

Итак, рассмотрим разбиение $u_0 = 0$, $u_1 = u$, $u_2 = 1$, $u \in (0, 1)$, и обозначим

$$\alpha_l := f(u_l) - f(u_{l-1}), \qquad \Delta_l := u_l - u_{l-1}, \quad l = 1, 2. \tag{4.2.38}$$

Пусть далее

$$A_1 := \big\{z_T(u) \in (\alpha_1)_\varepsilon, \ \ |\zeta_{\eta(uT)}| < 2\varepsilon T, \ \ \chi := \chi_1 < \delta_T\big\}, \tag{4.2.39}$$

(χ_l определено в (4.2.10)),

$$A_2 := \big\{z_T(1) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\varepsilon\big\},$$

A — событие под знаком вероятности в (4.2.13) при $L = 2$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами

$\eta(uT), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\eta(uT)}$. Ясно, что величины $\zeta_{\eta(uT)}$ и χ измеримы относительно $\mathfrak{A}$, $A_1 \in \mathfrak{A}$.

Эволюция процесса $z_T(t)$ на $(u+\chi,\ 1]$ от σ-алгебры $\mathfrak{A}$ не зависит. Поэтому при $L = 2$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{E}\mathbf{1}(A_1)\mathbf{E}\big(\mathbf{1}(A_2)|\ \mathfrak{A}\big). \tag{4.2.40}$$

Обозначим через $Z^*(t)$ однородный процесс восстановления на $[0, \infty)$, не зависящий от $Z(t)$, и рассмотрим множитель

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{1}(A_2)|\ \mathfrak{A}\big) = \mathbf{P}(A_2 \mid \mathfrak{A}).$$

Эту функцию от элементарных исходов из $\mathfrak{A}$ на множестве A_1 можно рассматривать как вероятность

$$\begin{aligned} P_T := \mathbf{P}\Big((\alpha_1 + y)T + Z^*\big((\Delta_2 - v)T\big) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\varepsilon T\Big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\bigg(Z^*(T^*) \in (\alpha_2 - y)_\varepsilon T^* \times \frac{T}{T^*}\bigg) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\bigg(Z^*(T^*) \in (\alpha_2)_{3\varepsilon} T^* \times \frac{T}{T^*}\bigg), \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

где

$$T^* := (\Delta_2 - v)T \sim \Delta_2 T, \quad \frac{T^*}{T} \sim \Delta_2 \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

при неслучайных v и y таких, что $|y| < 2\varepsilon_T$, $v \in [0, \delta_T)$. Мы находимся в условиях теоремы 3.4.1, в силу которой

$$\varlimsup_{T^* \to \infty} \frac{1}{T^*} \ln P_T \leqslant -D\bigg(\frac{\alpha_2}{\Delta_2}\bigg) \sim -\frac{T}{T^*}\Delta_2 D\bigg(\frac{\alpha_2}{\Delta_2}\bigg). \tag{4.2.42}$$

Другими словами, на всем множестве A_1

$$\mathbf{P}\big(A_2|\ \mathfrak{A}\big) \leqslant \exp\bigg\{-T\Delta_2 D\bigg(\frac{\alpha_2}{\Delta_2}\bigg) + o(T)\bigg\}. \tag{4.2.43}$$

Поэтому в силу (4.2.40)

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \exp\bigg\{ - T\Delta_2 D\Big(\frac{\alpha_2}{\Delta_2}\Big) + o(T)\bigg\} \times \mathbf{P}\big(Z(uT) \in T(\alpha_1)_\varepsilon\big), \tag{4.2.44}$$

где вновь в силу теоремы 3.4.1

$$\mathbf{P}\big(Z(uT) \in T(\alpha_1)_\varepsilon\big) = \exp\bigg\{-T\Delta_1 D\bigg(\frac{\alpha_1}{\Delta_1}\bigg) + o(T)\bigg\}.$$

В итоге получаем

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \exp\left\{ -TI(f^{\mathbf{u}_2}) + o(T)\right\}.$$

Требуемая оценка сверху (4.2.13) при $L = 2$ установлена.

Как уже отмечено, переход в доказательстве по индукции от значения $L-1$ к L при $L \geqslant 3$ происходит точно так же — надо в приведенных выше рассуждениях в качестве точки u взять предпоследнюю точку u_{L-1} разбиения $\mathbf{u}_L$. Оценка сверху (4.2.13) доказана.

(ii). *Оценка снизу* в лемме 4.2.1 происходит до некоторой степени аналогично предыдущему. Но теперь для обеспечивания соотношений

$$\overline{\zeta}(T) = o(T), \quad \overline{\chi}_L = o(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

мы будем использовать не специальную конструкцию разбиения, а метод срезок. Именно, используя опять индукцию, мы докажем неравенство

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T(t_l) \in (\alpha_l + \alpha_{l-1})_\delta, \quad l = 1, 2\big) \geqslant -I(f^{\mathbf{t}_2})$$

при любом $\delta > 0$, но сначала в случае, когда для некоторой константы $N < \infty$ с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$\tau_1 \leqslant N, \qquad \tau \leqslant N. \qquad |\zeta_1| \leqslant N, \qquad |\zeta| \leqslant N. \tag{4.2.45}$$

Очевидно, что в этом случае

$$\overline{\zeta}(T) \leqslant N, \qquad \overline{\chi}_L \leqslant \frac{N}{T}.$$

Пусть аналогично (4.2.38), (4.2.39) при $L = 2$

$$\begin{aligned} &A_1 := \Big\{ z_T(u) \in (\alpha_1)_\delta, \quad |\zeta_{\eta(uT)}| \leqslant N, \quad \chi := \chi_1 \leqslant \frac{N}{T} \Big\}, \\ &A_2 := \{ z_T(1) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\delta \}, \end{aligned}$$

A — событие, стоящее под знаком вероятности в (4.2.14) при $L = 2$, σ-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет прежний смысл. Тогда (ср. с (4.2.40))

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{E}\mathbf{1}(A_1)\mathbf{E}(\mathbf{1}(A_2) |\, \mathfrak{A}).$$

Здесь вместо (4.2.41) будем иметь при $T > \frac{N}{\delta}$

$$P_T \geqslant \mathbf{P}\bigg(Z^*(T^*) \in (\alpha_2)_{\delta/2} T^* \times \frac{T}{T^*} \bigg)$$

при тех же обозначениях, что и в (4.2.41). Далее, следуя (4.2.42)–(4.2.44), получаем

$$\mathbf{P}(A) \geqslant \exp\bigl\{-TI(f^{\mathbf{t}_2}) + o(T)\bigr\}.$$

Требуемая оценка снизу (4.2.14) при $L = 2$ установлена. Переход от значения $L-1$ к L при $L \geqslant 3$ происходит точно так же, как и в разделе (i).

Если неравенства (4.2.45) не выполнены, то следует воспользоваться методом срезок так же, как мы пользовались им в доказательстве теоремы 4.2.1, с той лишь разницей, что теперь срезки имеют иную форму, чем в (4.2.23). Согласно (4.2.45) следует рассматривать «срезанные» векторы ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}_1$, ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}$, определив распределение ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}$ равенством ($B \subset \mathbb{R}^2$; ср. с (4.2.22))

$$\mathbf{P}({}^{[N]}\boldsymbol{\xi} \in B) = \mathbf{P}\bigl(\boldsymbol{\xi} \in B \mid \tau \leqslant N,\ |\zeta| \leqslant N\bigr). \tag{4.2.46}$$

Аналогично определим распределение срезки ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}_1$. Если следовать рассуждениям в доказательстве теоремы 4.2.1, то мы получим требуемую оценку снизу, если воспользуемся вторым утверждением леммы 4.2.2. Лемма 4.2.1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 4.2.2 об асимптотических свойствах функций ${}^{(N)}D(\alpha)$ и ${}^{[N]}D(\alpha)$ при $N \to \infty$. Для того, чтобы изучить эти свойства, нам понадобятся аналогичные свойства функций уклонений ${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}(v,\alpha)$, ${}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(v,\alpha)$. Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, а утверждения более общими, мы на время сменим обозначения и вместо двумерных векторов (v,α) будем рассматривать d-мерные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, $d \geqslant 1$, и асимптотические свойства функций уклонений ${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$, ${}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$, срезок ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}$ и ${}^{[N]}\boldsymbol{\xi}$, соответственно, случайных векторов $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_d)$, где $\xi_1 \geqslant 0$ и срезка ${}^{(N)}\boldsymbol{\xi}$ предполагает $\xi_1 \leqslant 1/N$, $|\xi_j| \leqslant N$ при $j \geqslant 2$. Обозначим $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ функцию уклонений, соответствующую $\boldsymbol{\xi}$ и через S выпуклую оболочку носителя распределения $\boldsymbol{\xi}$, так что $(\mathrm{S}) = (\Lambda^{<\infty})$, где $\Lambda^{<\infty} := \{\boldsymbol{\alpha} :\ \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) < \infty\}$.

Нужные нам свойства функций ${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$, ${}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ описываются в следующем утверждении.

Лемма 4.2.3. *Если* $\alpha \in (\mathrm{S})$, *то*

$${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \to \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{4.2.47}$$

Если $\boldsymbol{\alpha} \in \partial\mathrm{S}$, *то при любом* $\delta > 0$

$${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}\bigl((\boldsymbol{\alpha})_\delta\bigr) \to \boldsymbol{\Lambda}\bigl((\boldsymbol{\alpha})_\delta\bigr) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Если $\boldsymbol{\alpha} \notin [\mathrm{S}]$, *то*

$${}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \infty.$$

Аналогичные утверждения справедливы для ${}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$.

Из леммы 4.2.3 вытекает

Следствие 4.2.2. *Для любого* α *найдется* $\delta = \delta(\boldsymbol{\alpha}) > 0$ *такое, что*

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} {}^{(N)}\boldsymbol{\Lambda}\big((\boldsymbol{\alpha})_\delta\big) \to \boldsymbol{\Lambda}\big((\boldsymbol{\alpha})_\delta\big) \leqslant \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}),\\ &\lim_{N\to\infty} {}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}\big((\boldsymbol{\alpha})_\delta\big) \to \boldsymbol{\Lambda}\big((\boldsymbol{\alpha})_\delta\big) \leqslant \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Нетрудно убедиться, что в одномерном случае $d = 1$ сходимость (4.2.47) имеет место при всех α. Однако при $d > 1$ это, вообще говоря, не так, и удается установить лишь «ослабленную» версию (4.2.48) этой сходимости.

Доказательство леммы 4.2.3. Чтобы упростить изложение, мы остановимся подробно лишь на доказательстве для срезок ${}^{[N]}\xi$. Доказательство для срезок ${}^{(N)}\xi$ происходит аналогично. Пусть на время $|\boldsymbol{\xi}| = \sum_{i=1}^d |\xi_i|$,

$$\mathbf{P}({}^{[N]}\boldsymbol{\xi} \in B) = \mathbf{P}\big(\boldsymbol{\xi} \in B \,|\, |\boldsymbol{\xi}| \leqslant N\big)$$

(ср. с (4.2.46). Названная замена норм сделана для упрощения записи и в доказательстве ничего не меняет.). Обозначим

$$\psi_N(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{E}(e^{\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi}\rangle};\ |\boldsymbol{\xi}| \leqslant N), \qquad \delta_N := \ln \mathbf{P}(|\boldsymbol{\xi}| \leqslant N).$$

Тогда

$$\delta_N \uparrow 0, \qquad \psi_N(\boldsymbol{\lambda}) \uparrow \psi(\boldsymbol{\lambda}), \qquad \mathbf{A}_N(\boldsymbol{\lambda}) := \ln \psi_N(\boldsymbol{\lambda}) \uparrow \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$$

при $N \uparrow \infty$. Далее

$${}^{[N]}\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{A}_N(\boldsymbol{\lambda}) - \delta_N,\ \ {}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\lambda} \big\{ \langle \lambda, \alpha\rangle - {}^{[N]}A(\boldsymbol{\lambda})\big\} = \boldsymbol{\Lambda}_N(\boldsymbol{\alpha}) + \delta_N,$$

где

$$\boldsymbol{\Lambda}_N(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \big\{ \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - \mathbf{A}_N(\boldsymbol{\lambda})\big\} \downarrow \quad \text{при} \quad N \uparrow \infty.$$

Так как $\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - \mathbf{A}_N(\boldsymbol{\lambda})$ и $\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ суть выпуклые вверх функции, то нетрудно видеть, что для $\alpha \in (\mathrm{S}) = (\Lambda_{<\infty})$ выполняется

$$\boldsymbol{\Lambda}_N(\boldsymbol{\alpha}) \downarrow \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad {}^{[N]}\Lambda(\alpha) \to \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$$

при $N \uparrow \infty$. Это можно извлечь также из теорем сходимости в выпуклом анализе.

Пусть теперь $\alpha \in \partial\mathrm{S}$. Для $\beta \in (\alpha)_\delta \cap (\mathrm{S})$ в силу первого утверждения леммы

$$\varlimsup_{N\to\infty} {}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}\big((\boldsymbol{\alpha})_\delta\big) \leqslant \varlimsup_{N\to\infty} {}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}).$$

Отсюда следует, что левая часть этого неравенства (она не зависит от $\boldsymbol{\beta}$) не превосходит $\inf\{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\beta} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta \cap (\mathrm{S})\}$. Так как функция $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta})$ непрерывна на $\partial\mathrm{S}$ изнутри множества S (по лучам), то inf можно взять по множеству $\boldsymbol{\beta} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta \cap [\mathrm{S}]$. Это доказывает оценку сверху во втором утверждении леммы (4.2.47), поскольку $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) = \infty$ при $\boldsymbol{\beta} \notin [\mathrm{S}]$. Оценка снизу очевидна, так как ${}^{[N]}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\Lambda}_N(\boldsymbol{\alpha}) + \delta_N \geqslant \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) + \delta_N$.

Последнее утверждение леммы вытекает из вложения ${}^{[N]}\Lambda^{<\infty} \subset \Lambda^{<\infty}$. Лемма 4.2.3 доказана.

Вернемся к прежним обозначениям и доказательству леммы 4.2.2. Оно оказывается несколько более громоздким, чем доказательство леммы 4.2.3.

Доказательство леммы 4.2.2. Обозначим левую часть (4.2.31) через

$$ {}^{(\infty)}D_\delta(\alpha) := \varlimsup_{N\to\infty} {}^{(N)}D((\alpha)_\delta). $$

Надо доказать, что для любых фиксированных $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство (см. (4.2.31))

$$ {}^{(\infty)}D_\delta(\alpha) \leqslant D(\alpha) = \mathbf{D}(1, \alpha). \tag{4.2.49} $$

Положим

$$ {}^{(\infty)}\mathbf{D}_{(\omega)}(1, \alpha) := \varlimsup_{N\to\infty} {}^{(N)}\mathbf{D}((1, \alpha)_\omega). $$

Неравенство (4.2.49) для фиксированного $\alpha \in \mathbf{R}$ будет получено как следствие следующих двух утверждений:

(A) *для любых $\delta > 0$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ найдется $\omega = \omega(\delta, \gamma) > 0$ такое, что*

$$ {}^{(\infty)}D_\delta(\alpha) \leqslant \frac{1}{1-\gamma} {}^{(\infty)}\mathbf{D}_{(\omega)}(1, \alpha); \tag{4.2.50} $$

(B) *для любого $\omega > 0$*

$$ {}^{(\infty)}\mathbf{D}_{(\omega)}(1, \alpha) \leqslant \mathbf{D}(1, \alpha). \tag{4.2.51} $$

Установим утверждение (A). Для вещественных чисел $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $h \in (-\gamma, \gamma)$ имеем

$$ {}^{(N)}\mathbf{D}(1, \beta) = \frac{1}{1-h} {}^{(N)}\mathbf{D}\big(1-h, (1-h)\beta\big) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{1-\gamma} {}^{(N)}\mathbf{D}\big(1-h, (1-h)\beta\big). \tag{4.2.52} $$

Поскольку левая часть (4.2.52) не зависит от h, то неравенство сохранится, если правую часть (4.2.52) заменить на точную нижнюю грань по $|h| < \gamma$:

$$ {}^{(N)}\mathbf{D}(1,\beta) \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \inf_{|h|<\gamma} {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl(1-h,(1-h)\beta\bigr). \tag{4.2.53} $$

Из (4.2.53) следует, что

$$ \begin{aligned} {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl(1,(\alpha)_\delta\bigr) &= \inf_{|\beta-\alpha|<\delta} {}^{(N)}\mathbf{D}(1,\beta) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{1-\gamma} \inf_{\substack{|h|<\gamma \\ |\beta-\alpha|<\delta}} {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl(1-h,(1-h)\beta\bigr) = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \inf_{(v,b)\in B(\gamma,\delta)} {}^{(N)}\mathbf{D}(v,b), \end{aligned} \tag{4.2.54} $$

где $v := 1-h$, $b := (1-h)\beta$,

$$ B(\gamma,\delta) := \bigl\{(v,b) = \bigl(1-h,(1-h)\beta\bigr) : |h| < \gamma,\ |\beta-\alpha| < \delta\bigr\}. $$

Тогда неравенство (4.2.54) будет иметь вид

$$ {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl(1,(\alpha)_\delta\bigr) \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \inf_{(v,b)\in B(\gamma,\delta)} {}^{(N)}\mathbf{D}(v,b). \tag{4.2.55} $$

Поскольку для любых фиксированных $\delta > 0$ и $\gamma \in \bigl(0,\frac{1}{2}\bigr)$ найдется $\omega = \omega(\gamma,\delta) > 0$ такое, что справедливо включение $(1,\alpha)_\omega \subset B(\gamma,\delta)$, то из (4.2.55) получаем неравенство

$$ {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl(1,(\alpha)_\delta\bigr) \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\, {}^{(N)}\mathbf{D}\bigl((1,\alpha)_\omega\bigr), $$

из которого вытекает (4.2.50).

Установим теперь утверждение (B). Напомним, что функции $\mathbf{D}(v,b)$ и $\mathbf{D}_\Lambda(v,b)$ связаны соотношением (3.2.18), из которого следуют для любого $\delta > 0$ неравенства

$$ \mathbf{D}_\Lambda((v,b)_\delta) \leqslant \mathbf{D}(v,b) \leqslant \mathbf{D}_\Lambda(v,b). \tag{4.2.56} $$

Поэтому для для любых $(v,b) \in (1,\alpha)_\omega$, $\theta > 0$ справедливы неравенства

$$ {}^{(N)}\mathbf{D}((1,\alpha)_\omega) \leqslant {}^{(N)}\mathbf{D}(v,b) \leqslant {}^{(N)}\mathbf{D}_\Lambda(v,b) \leqslant {}^{(N)}\mathbf{\Lambda}\biggl(\frac{v}{\theta},\frac{b}{\theta}\biggr)\theta. $$

Левая часть последней цепочки неравенств не зависит от выбора $\left(\frac{v}{\theta}, \frac{b}{\theta}\right)$ в пределах множества $\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\frac{\omega}{\theta}}$, поэтому правую часть можно заменить на точную верхнюю грань по этому множеству. Получили соотношение

$$^{(N)}\mathbf{D}((1,\alpha)_\omega) \leqslant {}^{(N)}\mathbf{\Lambda}\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\frac{\omega}{\theta}}\right)\theta,$$

из которого с помощью предельного перехода по $N \to \infty$ получаем для произвольного $\theta > 0$ неравенство

$$^{(\infty)}\mathbf{D}_{(\omega)}(1,\alpha) \leqslant \varlimsup_{N\to\infty} {}^{(N)}\mathbf{\Lambda}\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\frac{\omega}{\theta}}\right)\theta. \tag{4.2.57}$$

Воспользуемся теперь следствием 4.2.2, из которого вытекает, что правая часть в (4.2.57) равна

$$\mathbf{\Lambda}\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\frac{\omega}{\theta}}\right)\theta.$$

Обращаясь далее к определению (3.2.12) функции $\mathbf{D}_\Lambda$ и учитывая первое неравенство в (4.2.56), убеждаемся, что

$$\inf_{\theta>0} \mathbf{\Lambda}\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\frac{\omega}{\theta}}\right)\theta \leqslant \mathbf{D}_\Lambda\big((1,\alpha)_\omega\big),$$

$$^{(\infty)}D_{(\omega)}(1,\alpha) \leqslant \mathbf{D}_\Lambda\big((1,\alpha)_\omega\big) \leqslant \mathbf{D}(1,\alpha).$$

Утверждение (B) и первое утверждение леммы 4.2.2 доказаны. Второе утверждение доказывается точно так же. Лемма 4.2.2 доказана.

§ 4.3 Второй частичный локальный принцип больших уклонений

Напомним, что мы рассматриваем метрическое пространство $(\mathbb{D}, \rho)$ функций $f = f(t)$ без разрывов второго рода, наделенное равномерной метрикой ρ и изучаем в этом пространстве семейство процессов

$$z_T = z_T(t) := \frac{Z(tT)}{x}, \qquad t \in [0,1],$$

где $x \sim T$ при $T \to \infty$, $Z(t)$ — обобщенный процесс восстановления, определенный в § 1.1.

Первый частичный принцип больших уклонений установлен в теореме 4.2.1 в предположении $\lambda_+ \geqslant D(0)$.

4.3.1 Основные утверждения

Рассмотрим теперь альтернативный случай

$$\lambda_+ < D(0). \tag{4.3.1}$$

В этом случае в формировании наиболее вероятных траекторий события $\{z_T(1) \in (\alpha)_\varepsilon\}$ будут участвовать большие скачки τ (сравнимые с T). Здесь утверждения будут носить менее «собирательный» характер, так как

1) Само условие $\lambda_+ < D(0)$, как уже отмечалось, является весьма специальным; оно влечет за собой сильную асимптотическую зависимость τ и ζ в области больших уклонений. Точнее, в лемме 3.5.4 установлено, что при выполнении (4.3.1) и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\big(|\zeta| \geqslant \varepsilon t|\ \tau \geqslant t\big) = 1$$

(см. (3.5.65)).

2) В случае $\lambda_+ < D(0)$ налагается дополнительное условие

$$\ln \mathbf{P}(\tau \geqslant T) \sim -\lambda_+ T \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{4.3.2}$$

на «грубую» асимптотику распределения τ (см. условие $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$).

3) В зависимости от вида функции f будут накладываться дополнительные условия на распределение $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1)$.

Чтобы сформулировать основное утверждение, введем ряд новых обозначений. Положим

$$\begin{aligned} t^{1]} &= t^{1]}(f) := \min\{u:\ \mathrm{Var}_{[u,1]} f(t) = 0\},\\ t^{[0} &= t^{[0}(f) := \max\{u:\ \mathrm{Var}_{[0,u]} f(t) = 0\}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

В терминах конструкции f-разбиений $\big\{(u_r^-, u_r^+)_{r=1}^R\big\}$, введенных для доказательства теоремы 4.2.1, в случае $t^{1]} < 1$ найдется $r \leqslant R$ такое, что $u_r^+ = 1$, $t^{1]} = u_r^-$, где $[u_r^-, u_r^-]$ — участки постоянства функции f. Аналогично, в случае $t^{[0} > 0$ найдется $r \leqslant R$ такое, что $u_r^- = 0$, $t^{[0} = u_r^+$.

Обозначим для $f \in \mathbb{C}_a$

$$\widehat{I}(f) := \int_0^{t^{1]}} D\big(f'(t)\big)dt + (1 - t^{1]})\widehat{D}(0),$$

так что

$$\widehat{I}(f) = I(f) = \int_0^1 D\big(f'(t)\big)dt, \text{ если } \lambda_+ \geqslant D(0)\ \big(\widehat{D}(0) = D(0)\big). \tag{4.3.4}$$

Теорема 4.3.1 (второй частичный локальный ПБУ). *Предположим, что* $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1) \Subset [\mathbf{C}]$, $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta) \Subset [\mathbf{C}]$ *и* $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1]$. *Если* $t^{1]} < 1$, $\lambda_+ < D(0)$, *то предполагается также, что выполнено условие «гладкости»* (4.3.2); *если при этом* $f(t) \equiv 0$, *то предполагается дополнительно, что* $\lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geqslant \lambda_+$. *Если выполнены эти условия, то для* $f \in \mathbb{C}_a$ *и любой последовательности* $\varepsilon = \varepsilon_T$, *достаточно медленно сходящейся к* 0 *при* $T \to \infty$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = -\widehat{I}(f), \tag{4.3.5}$$

Таким образом, утверждение (4.3.5) в силу (4.3.4) является обобщением теоремы 4.2.1. Так как теорема 4.2.1 уже доказана, то доказательство теоремы 4.3.1 мы будем проводить лишь в случае $\lambda_+ < D(0)$.

Следствие 4.3.1. *Если* $f \in \mathbb{C}_a$ *не имеет в конце отрезка* $[0,1]$ *участка постоянства, т.е.* $t^{1]}(f) = 1$, *то при любом соотношении между* λ_+ *и* $D(0)$ *левая часть в* (4.3.5) *равна* $-I(f)$.

В качестве следствий из теорем 4.2.1, 4.3.1 получаем также частичные локальные ПБУ для траекторий ОПВ $z_T^{(q)}$ с линейным сносом:

$$z_T^{(q)} = z_T^{(q)}(t) := \frac{1}{x} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + q\mathrm{e}(t), \qquad \mathrm{e}(t) := t; \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Следствие 4.3.2. *Пусть выполнены условия теорем* 4.2.1 *или* 4.3.1. *Тогда при любом* $q \in \mathbb{R}$ *семейство* $\{z_T^{(q)}\}$ *удовлетворяет частичному локальному ПБУ* (4.3.5) *с функционалом уклонений* $\widehat{I}^{(q)}(f) := \widehat{I}(f - q\mathrm{e})$.

Для доказательства следствия 4.3.2 достаточно воспользоваться тождеством

$$\mathbf{P}\big(z_T^{(q)} \in (f)_\varepsilon\big) = \mathbf{P}\big(z_T \in (f - q\mathrm{e})_\varepsilon\big),$$

а затем к правой части этого тождества применить теорему 4.2.1 или 4.3.1.

Наряду с процессом $Z^{(q)}$ рассмотрим теперь очень близкий к нему процесс $Z^{[q]}$, управляемый последовательностью

$$\boldsymbol{\xi}_n^{[q]} = (\tau_n^{[q]}, \zeta_n^{[q]}) := (\tau_n, \zeta_n + q\tau_n), \quad n \geqslant 0.$$

Близость процессов $Z^{(q)}$ и $Z^{[q]}$ состоит в том, что их значения в моменты скачков $T_{1,k}$ совпадают. Отличие состоит в том, что часть $q\tau_k$

приращения $\zeta_k^{[q]} = \zeta_k + q\tau_k$ на полуинтервале $(T_{1,k-1},\ T_{1,k}]$ процесс $Z^{(q)}$ в отличие от $Z^{[q]}$ набирает непрерывным образом со скоростью q. Возникает естественный вопрос, совпадают ли для этих процессов ПБУ Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим, прежде всего, вторую функцию уклонений $D^{[q]}$, соответствующую вектору $\boldsymbol{\xi}^{[q]}$. При естественных соглашениях относительно обозначений имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{[q]}(\lambda,\mu) &:= \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau+\mu(\zeta+q\tau)} = \mathbf{A}(\lambda+q\mu,\mu), \\ \boldsymbol{\Lambda}^{[q]}(v,\alpha) &:= \sup_{(\lambda,\mu)} \left\{\lambda v + \mu\alpha - \mathbf{A}^{[q]}(\lambda,\mu)\right\} = \boldsymbol{\Lambda}(v,\alpha-qv). \end{aligned}$$

Поэтому вторая функция уклонений для $\xi^{[q]}$ имеет вид

$$\mathbf{D}_\Lambda^{[q]}(v,\alpha) = \inf_{\theta>0} \theta\boldsymbol{\Lambda}^{[q]}\Big(\frac{v}{\theta},\frac{\alpha}{\theta}\Big) = \inf_{\theta>0}\theta\boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{v}{\theta},\frac{\alpha-qv}{\theta}\right) = \mathbf{D}_\Lambda(v,\alpha-qv),$$

так что

$$\mathbf{D}_\Lambda^{[q]}(1,\alpha) = \mathbf{D}_\Lambda(1,\alpha-q), \qquad D^{[q]}(\alpha) = D(\alpha-q).$$

Как мы видели, важную роль при определении функции уклонений, соответствующей процессу Z, играет соотношение между λ_+ и $D(0)$, т.е. между λ_+ и $D(-q)$ в нашем случае. Функция $D(-q)$ является неотрицательной выпуклой и достигает минимума, равного 0 в точке $q = -a = -\frac{a_\zeta}{a_\tau}$. Поэтому определены два решения $q_- < q_+$ уравнения

$$D(-q) = \lambda_+,$$

и условие $\lambda_+ \geqslant D^{[q]}(0)$ принимает вид

$$q \in [q_-, q_+]. \tag{4.3.6}$$

Таким образом, в условиях теоремы 3.4.1 функции уклонений для процессов $Z^{(q)}$ и $Z^{[q]}$ будут при выполнении (4.3.6) иметь один и тот же вид $D(\alpha-q)$. То же относится и к утверждению следствия 4.3.2, но с одним существенным дополнением: если функция f не имеет линейного участка в конце отрезка $[0,1]$, т.е. если $t^{1]}(f') = 1$ (f' не имеет участка постоянства в конце $[0,1]$), то всегда (ср. со следствием 4.3.2)

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T^{[q]} \in (f)_\varepsilon\big) &= \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(z_T^{(q)} \in (f)_\varepsilon\big) = -I(f-q\mathrm{e}). \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Если ли же f имеет линейный участок в конце $[0,1]$ и при $q = f'(1)$ не выполнено (4.3.6), то соотношение (4.3.7) не будет иметь место.

4.3.2 О наиболее вероятных траекториях

Отметим два обстоятельства, показывающие, что в случае $\lambda_+<D(0)$, допускающем влияние больших скачков τ на формирование наиболее вероятной траектории в событии $\big\{z_T(1)\in(0)_\varepsilon\big\}$, нарушаются привычные свойства траекторий случайных блужданий и процессов восстановления, которые имеют место в случае $\lambda_+\geqslant D(0)$ $(\widehat{D}(0)=D(0))$.

1. Пусть для определенности $\alpha>0$, $\widehat{D}(\alpha)<D(\alpha)$ и $f(t)=\alpha t$. Тогда согласно (4.3.5)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(z_T\in(f)_\varepsilon)=-D(\alpha).$$

Но в силу теоремы 3.4.1

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(z_T(1)\in(\alpha)_\varepsilon\big)=-\widehat{D}(\alpha)>-D(\alpha). \tag{4.3.8}$$

Это означает, что прямолинейная траектория $f(t)=\alpha t$ не является наиболее вероятной в событии $\big\{z_T(1)\in(\alpha)_\varepsilon\big\}$. Если $t_\alpha<1$ таково, что

$$\widehat{D}(\alpha)=\mathbf{D}(t_\alpha,\alpha)+(1-t_\alpha)\lambda_+,$$

то наиболее вероятной траекторией, определяющей вероятность (4.3.8), будет ломаная, соединяющая точки $(0,0)$, (t_α,α), $(1,\alpha)$. В случае $\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha)$ или для случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин (см., например, [12]) это невозможно. В этом состоит существенное отличие свойств траекторий $z_T(\cdot)$ при $\lambda_+=\widehat{D}(0)<D(0)$ от свойств траекторий названных выше процессов, для которых наиболее вероятные траектории всегда прямолинейны.

2. Другое характерное свойство процессов $Z(t)$ в случае

$$\lambda_+\geqslant D(0)\qquad(\widehat{D}(0)=D(0))$$

состоит в том, что «узкие пучки» траекторий таких процессов на непересекающихся интервалах «асимптотически независимы» в смысле грубой асимптотики. Действительно, пусть $\lambda_+\geqslant\widehat{D}(0)=D(0)$, процесс $Z(t)$ удовлетворяет условиям $\mathcal{A}^{\leqslant 0}\subset[\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}^{(st)}]$ или $\mathcal{A}^{\leqslant 0}\subset[\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_\infty]$ (см. §§ 3.4, 4.1) и f_1, f_2 — две произвольные функции из $\mathbb{C}_a$, $f_1(0)=f_2(0)=0$. При любом фиксированном $u\in(0,1)$ положим

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t), & \text{при}\quad t\in[0,u],\\ f_1(u)+f_2(t-u), & \text{при}\quad t\in[u,1],\end{cases}$$

и обозначим $B_\varepsilon = \{z_T \in (f)_\varepsilon\}$, где $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$,

$$B_{1,\varepsilon} = \Big\{z_T(t) \in \big(f_1(t)\big)_\varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [0,u]\Big\},$$
$$B_{2,\varepsilon} = \Big\{z_T(u+t) - z_T(u) \in \big(f_2(t)\big)_\varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [0,1-u]\Big\}.$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon}B_{2,\varepsilon}) \leqslant \mathbf{P}(B_{2\varepsilon}) \leqslant \mathbf{P}(B_{1,4\varepsilon}B_{2,4\varepsilon}).$$

Поэтому

$$\frac{\mathbf{P}(B_{\varepsilon/2})}{\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon})} \leqslant \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}|\ B_{1,\varepsilon}) \leqslant \frac{\mathbf{P}(B_{2\varepsilon})}{\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon})},$$

и в силу теоремы 4.2.1

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}|\ B_{1,\varepsilon}) \leqslant -\int_0^1 D\big(f'(t)\big)dt + \int_0^u D\big(f'(t)\big)dt =$$
$$= -\int_u^1 D\big(f'(t)\big)dt. \qquad (4.3.9)$$

Оценка снизу производится аналогично и имеет ту же правую часть. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}|\ B_{1,\varepsilon}) = -\int_u^1 D\big(f'(t)\big)dt =$$
$$= -\int_0^{1-u} D\big(f_2'(t)\big)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}).$$

Последнее равенство имеет место в силу условий $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}^{(st)}]$ или $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_\infty]$ (см. теоремы 4.1.1, 4.1.2). Таким образом, события $B_{1,\varepsilon}$ и $B_{2,\varepsilon}$ асимптотически независимы в смысле грубой асимптотики.

Если же $\lambda_+ = \widehat{D}(0) < D(0)$, то такой независимости не будет. Действительно, выберем f_1 и f_2 так, что $f'(1) \neq 0$ и функция f имеет участок постоянства (u^-, u^+), содержащий точку u, $u^- > 0$, $u_+ < 1$. Тогда по теореме 4.3.1 соотношение (4.3.9) не будет верным, т.к. представления для $\mathbf{P}(B_\varepsilon)$, $\mathbf{P}(B_{2,\varepsilon})$ сохранятся, но

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{1,\varepsilon}) = -\int_0^{u^-} D\big(f_1'(t)\big)dt - (u-u^-)\lambda_+ > -\int_0^u D\big(f_1'(t)\big)dt.$$

Заметим, что отмеченная выше асимптотическая независимость «узких пучков» траекторий вдоль функций из $\mathbb{C}_a$ еще не влечет за собой, вообще говоря, асимптотическую независимость самих приращений процесса (в нашем случае приращений $Z(U)$ и $Z(T) - Z(U)$), поскольку при рассмотрении названных «узких пучков» исключалось влияние больших вертикальных скачков ζ_j. Условия асимптотически слабой зависимости координат τ и ζ, достаточные для асимптотической независимости приращений $Z(U)$ и $Z(T)-Z(U)$, найдены в теореме 4.1.3. Напомним, что одно из этих условий вытекает из теоремы 4.5.1, установленной ниже (главная часть этого условия состоит в предположениях $\zeta_1 \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$).

Продолжение исследований, связанных с наиболее вероятными траекториями, см. в разделе 4.6.1.

4.3.3 Вспомогательные предложения

Вернемся к теоремам 3.4.1, 4.2.1 и получим утверждение, которое дополняет эти теоремы и понадобится нам при доказательстве теоремы 4.3.1.

Лемма 4.3.1. *Пусть имеет место локальный ПБУ* (3.4.5) *и выполнено условие $\lambda_+ < D(0)$. Пусть, кроме того, выполнено по крайней мере одно из двух условий:*

$$\textit{либо } \mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \ \ \textit{либо } \lambda_+^{(\tau_1)} < D(0), \ \ D(0) \leqslant D^{(1)}(0), \tag{4.3.10}$$

где функция $D^{(1)}$ определяется так же, как D, но для вектора $\boldsymbol{\xi}_1$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$, $\delta = \delta_T \to 0$ при $T \to \infty$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon, \ |\zeta_{\eta(T)}| < T\delta\right) \leqslant -D(\alpha). \tag{4.3.11}$$

Соотношение (4.3.11) и теорема 3.4.1 показывают, что в случае $\lambda_+ < D(0)$ основной вклад в вероятность события $\left\{\frac{1}{T} Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon\right\}$ при $T \to \infty$ и $D(\alpha) > \widehat{D}(\alpha)$ дают те траектории, для которых $|\zeta_{\eta(T)}| \geqslant cT$ при некотором $c > 0$.

Доказательство леммы 4.3.1 аналогично доказательству оценки сверху в утверждении (i) теоремы 3.4.1. Пусть $\alpha \neq 0$. Исходным здесь является следующий аналог соотношения (3.2.4):

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}Z(T)\in\Delta[\alpha),\ |\zeta_{\eta(T)}|<T\delta\right)=$$
$$=\int\limits_0^T H_1\bigl(dt,T\Delta[\alpha)\bigr)\mathbf{P}\bigl(\tau>T-t,\ |\zeta|<T\delta\bigr). \quad (4.3.12)$$

Далее, в силу теоремы 3.2.1 об асимптотике меры восстановления H_1, как и прежде, приходим к соотношению вида (3.2.25):

$$-\frac{1}{T}\,\ln\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}\,Z(T)\in\Delta[\alpha)\right)\sim\inf_t\bigl\{D(t,\alpha)+l^*(T,t)\bigr\},$$

в котором функция $l(T,t)$ в (3.2.25) заменена на функцию

$$l^*(T,t):=-\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\Bigl(\tau>\bigl(T(1-t)\bigr),\ |\zeta|<T\delta\Bigr).$$

Если ранее в силу условия $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ мы имели соотношение $l(T,t)\sim(1-t)\lambda_+$ при $T\to\infty$, откуда следовало, что правая часть в (3.2.25) равна $\widehat{D}(\alpha)$, то теперь в силу леммы 3.5.3 мы имеем

$$l^*(T,t)\geqslant(1-t)D(0).$$

Это дает нам для левой части в (4.3.11) оценку сверху

$$-\inf_{t\in[0,1]}\{\mathbf{D}(t,\alpha)+(1-t)\mathbf{D}(1,0)\}.$$

Но в силу полуаддитивности функции $\mathbf{D}(t,\alpha)$ (см. п. 2.3.1)

$$\mathbf{D}(t,\alpha)+(1-t)\mathbf{D}(1,0)=\mathbf{D}(t,\alpha)+\mathbf{D}(1-t,0)\geqslant\mathbf{D}(1,\alpha)=D(\alpha).$$

Это доказывает (4.3.11).

Пусть теперь $\alpha=0$. Доказательство в этом случае происходит совершенно аналогично, но вместо (4.3.12) теперь надо использовать аналог представления (3.2.4). Тогда по сравнению с предыдущими рассмотрениями появится дополнительное слагаемое в правой части (4.3.12), равное

$$\mathbf{P}(\tau_1>T,\ |\zeta_1|<T\varepsilon).$$

Оценка этого слагаемого вытекает из следующего аналога леммы 3.5.3.

Лемма 4.3.2. *При выполнении условий* (4.3.10) *справедливо соотношение*

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\bigl(\tau_1>T,\ |\zeta_1|<T\varepsilon\bigr)\leqslant-D(0).$$

Доказательство. Пусть выполнено первое из условий (4.3.10). Тогда для любых $(\lambda,\mu)\in(\mathcal{A}^{\leqslant 0})\subset\mathcal{A}_1$, $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{T}\mathbf{\Lambda}_1(Tv,T\alpha)\geqslant\lambda v+\mu\alpha-\frac{1}{T}\mathbf{A}_1(\lambda,\mu).$$

Поэтому для $v=v_T\to v$, $\alpha=\alpha_T\to 0$ при $T\to\infty$ имеем

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{\Lambda}_1(Tv_T,T\alpha_T)\geqslant\lambda v. \tag{4.3.13}$$

Левая часть неравенства (4.3.13) не зависит от (λ,μ) в пределах множества $(\mathcal{A}^{\leqslant 0})$, поэтому правую часть (4.3.13) можно заменить на точную верхнюю грань по $(\lambda,\mu)\in(\mathcal{A}^{\leqslant 0})$, так что

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{\Lambda}_1(Tv_T,T\alpha_T)\geqslant\sup_{(\lambda,\mu)\in(\mathcal{A}^{\leqslant 0})}\{\lambda v\}=\mathbf{D}(v,0).$$

Отсюда для любых $v>0$ и $\varepsilon=\varepsilon_T\to 0$ при $T\to\infty$ получаем

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\inf_{\substack{|u-Tv|<T\varepsilon\\|\beta|<T\varepsilon}}\mathbf{\Lambda}_1(u,\beta)\geqslant\mathbf{D}(v,0). \tag{4.3.14}$$

Используя экспоненциальное неравенство Чебышева для выпуклых открытых множеств (см. [12], § 4.4) и соотношение (4.3.14), устанавливаем следующую оценку сверху: для любых $v>0$ и $\varepsilon=\varepsilon_T\to 0$

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(|\tau_1-Tv|<T\varepsilon,\ |\zeta_1|<T\varepsilon\big)\leqslant-\mathbf{D}(v,0). \tag{4.3.15}$$

Далее, для любого $N<\infty$ найдется такое $M<\infty$, что

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\tau_1>TM)\leqslant-N. \tag{4.3.16}$$

Из соотношений (4.3.15), (4.3.16) вытекает требуемая оценка сверху:

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\big(\tau_1>T,\ |\zeta_1|<T\varepsilon\big)\leqslant-\inf_{v\geqslant 1}\mathbf{D}(v,0)=-\mathbf{D}(1,0).$$

Если выполнено второе условие в (4.3.10), то утверждение леммы 4.3.2 очевидным образом вытекает из леммы 3.5.3. Леммы 4.3.2 и 4.3.1 доказаны.

4.3.4 Доказательство теоремы 4.3.1

Доказательство теоремы 4.3.1. Схема доказательства здесь во многом близка схеме доказательства теоремы 4.2.1, но есть и существенные отличия. Теперь $\widehat{D}(0) < D(0)$ и в качестве множества V (ср. с (4.2.8)), которое не содержит участков постоянства, мы будем рассматривать множество

$$V = [0,1] \setminus \bigcup_{r=1}^{R} (u_r^-, u_r^+),$$

содержащее все точки $u_r^{\pm}$. Разбиение $\mathbf{t}_L$ определим как объединение правой части в (4.2.7) с множеством, состоящим из $\min\{R, L/2\}$ первых точек $u_r^{\pm}$, $r = 1, 2, \dots$ Обозначим через L_1 наименьшее целое число, при котором число точек в $\mathbf{t}_{L_1} V$ превосходит L. Дальнейшее построение f-разбиений повторяет построение f-разбиений в условиях теоремы 4.2.1, так что справедлива сходимость (4.2.9). Для нового f-разбиения событие $\{z_T \in (f)_\varepsilon\}$, вообще говоря, не влечет за собой событие $\{\overline{\chi}_L \leqslant \delta_T\}$ (см. (4.2.11)). Такое включение будет иметь место, если теперь под $\overline{\chi}_L$ понимать значение

$$\overline{\chi}_L := \max\bigl\{\chi_l \ \text{ по всем } \ u_l \notin \{u_r^-\},\ l \leqslant L - 1\bigr\}.$$

Поэтому вместо (4.2.12) мы будем использовать другое включение. Для точек $u_l \in \{u_r^-\}$ обозначим

$$\gamma_l := u_l - \frac{1}{T} T_{\nu(u_l T)},$$
$$\overline{\gamma}_L := \max\bigl\{\gamma_l \ \text{ по всем } \ u_l \in \{u_r^-\},\ u_l \neq 0,\ l \leqslant L\bigr\}.$$

Тогда очевидно

$$\bigl\{z_T \in (f)_\varepsilon\bigr\} \subset \{\overline{\gamma}_L < \delta_T\}.$$

Включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \{\overline{\zeta}(T) \leqslant 2\varepsilon T\}$$

очевидно сохраняется. Таким образом, вместо (4.2.12) мы имеем теперь включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \bigl\{z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon$$

при всех $1 \leqslant l \leqslant L,\ \overline{\zeta}(T) \leqslant 2\varepsilon T,\ \overline{\chi}_L < \delta_T,\ \overline{\gamma}_L < \delta_T\bigr\}$.

Роль леммы 4.2.1 теперь играет

Лемма 4.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3.1 *и фиксирована произвольная функция $f \in \mathbb{C}_a$, $f(0) = 0$. Тогда для f-разбиения $\mathbf{u}_L = \{u_l\}_{l=0}^{L}$ и любых последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$, $\delta_T \to 0$ при $T \to \infty$*

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\Big(z_T(u_l)\in\big(f(u_l)\big)_\varepsilon\quad\textit{при всех}\ \ 1\leqslant l\leqslant L;$$
$$\overline{\zeta}(T)\leqslant 2\varepsilon T,\ \overline{\chi}_L<\delta_T,\ \overline{\gamma}_L<\delta_T\Big)\leqslant -\widehat{I}(f^{\mathbf{u}_L}). \qquad (4.3.17)$$

Второе утверждение леммы 4.2.1, дающее нужную нам оценку снизу, полностью сохраняется и мы его здесь не воспроизводим.

Доказательство леммы 4.3.3 аналогично доказательству оценки сверху в лемме 4.2.1. Мы вновь будем пользоваться индукцией по L. При $L=1$ оценка (4.3.17) следует из теоремы 3.4.1. Выполним переход от $L=1$ к $L=2$. Но теперь мы будем различать случаи $u_1=u\notin\{u_r^-\}$ и $u\in\{u_r^-\}$.

Если $\alpha_2\neq 0$, то с необходимостью $u\notin\{u_r^-\}$ и доказательство леммы 4.2.1 полностью сохраняется, если наряду с утверждением теоремы 3.4.1 использовать также лемму 4.3.1.

Если $\alpha_2=0$, то $u\in\{u_r^-\}$, $\alpha_1\neq 0$ (см. (4.2.38)) и событие A_1 в (4.2.39) надо заменить на событие

$$A_1:=\big\{z_T(u)\in(\alpha_1)_\varepsilon,\quad |\zeta_{\eta(uT)}|<2\varepsilon T,\ \gamma<\delta_T\big\},$$

где $\gamma:=u-\frac{1}{T}Z_{\nu(uT)}$. Пусть обозначение $\mathfrak{A}$ имеет прежний смысл, что и в (4.2.40). Ясно, что $A_1\in\mathfrak{A}$ и равенство (4.2.40) сохранится. Рассмотрим множитель

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{1}(A_2)|\ \mathfrak{A}\big)=\mathbf{P}(A_2|\ \mathfrak{A}).$$

Эту функцию на множестве A_1 можно рассматривать как вероятность (при $T^*=(1-u)T$)

$$\mathbf{P}\bigg(Z^*(T^*)\in(\alpha_2-y)_\varepsilon T^*\times\frac{T}{T^*}|\ \mathfrak{A}\bigg)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\bigg(Z^*(T^*)\in(0)_{3\varepsilon}T^*\times\frac{T}{T^*}|\ \gamma=v\bigg)=:P_v(T^*), \qquad (4.3.18)$$

где $v<\delta_T$, $Z^*(t)$ — процесс восстановления с начальным скачком $(\tau_1,\zeta_1)=(\chi,0)$,

$$\mathbf{P}(\chi>t):=\frac{\mathbf{P}(\tau>v+t)}{\mathbf{P}(\tau>v)}.$$

Так как τ удовлетворяет условию гладкости $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, то при $v<\delta_T$

$$\mathbf{P}(\tau>v)\geqslant\mathbf{P}(\tau>\delta_T)=e^{o(T)},$$

и при значениях t, сравнимых с T,

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) = \mathbf{P}(\chi > t) \leqslant \mathbf{P}(\tau > t)e^{o(T)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) \leqslant \mathbf{P}(\tau > t)e^{o(t)} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.3.19}$$

Нетрудно видеть, что все утверждения о грубой асимптотике меры восстановления $H_0\big(T\Delta[t), T\Delta[y)\big)$ для процесса восстановления с начальным скачком $(\tau_1, 0)$, удовлетворяющим (4.3.19), будут иметь тот же вид, что и для функции восстановления H, соответствующей однородному процессу восстановления, $\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant \lambda_+$. Поэтому из соотношения (3.4.14) и последующих за ним рассмотрений мы, как и в доказательстве теоремы 3.4.1, получаем соотношение (3.4.5), или, что то же, получаем утверждение о том, что в нашем случае на множестве A_1 для правой части (4.3.18) выполняется соотношение

$$\lim_{T^* \to \infty} \frac{1}{T^*} \ln P_v(T^*) = -\widehat{D}(0).$$

Это, в свою очередь, означает, что на множестве A_1

$$\lim_{T^* \to \infty} \frac{1}{T^*} \ln \mathbf{P}(A_2 |\, \mathfrak{A}) = -\widehat{D}(0) = -\lambda_+.$$

В итоге, аналогично (4.2.44) находим

$$\mathbf{P}(A) \leqslant e^{-T\widehat{I}(f^{\mathbf{u}_2}) + o(T)}.$$

Требуемая оценка сверху (4.3.17) при $L = 2$ установлена. Переход в доказательстве по индукции происходит так же, как в лемме 4.2.1. Оценка (4.3.17) установлена. Лемма 4.3.3 доказана.

Опираясь на лемму 4.3.3, продолжим доказательство теоремы 4.3.1.

(i). *Оценка сверху.* Из (4.2.13) и леммы 4.3.3 получаем

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \leqslant -\widehat{I}(f^{\mathbf{u}_L}). \tag{4.3.20}$$

Поскольку левая часть (4.3.20) от разбиения $\mathbf{u}_L$ не зависит, то в силу (4.2.9) правую часть в (4.3.20) можно заменить на $-\widehat{I}(f)$. Оценка сверху для доказательства (4.3.5) получена.

(ii). *Оценка снизу.* Из утверждения (ii) леммы 4.2.1 вытекает, что

$$\underline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \geqslant -I(f). \tag{4.3.21}$$

Следовательно, для тех функций $f \in \mathbb{C}_a$, для которых $\widehat{I}(f) = I(f)$, необходимая оценка снизу для доказательства (4.3.5) установлена.

Пусть теперь $\widehat{I}(f) < I(f)$, т.е. функция f имеет участок постоянства $[u, 1]$, $u := t^{1]}(f)$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$ найдется последовательность $\delta_T \to 0$ такая, что справедливо равенство

$$\Big\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant u} \big| z_T(t) - f(t) \big| < \varepsilon \Big\} = \Big\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant u} \big| z_T(t) - f(t) \big| < \varepsilon, \gamma(uT) \leqslant T\delta_T \Big\},$$

где, как и прежде,

$$\gamma(uT) := Tu - T_{\nu(Tu)}$$

— величина недоскока блуждания T_k до уровня Tu. Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \geqslant \\ &\quad \geqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant u} \big| z_T(t) - f(t) \big| < \varepsilon,\, \gamma(uT) \leqslant T\delta_T,\, \chi(Tu) > T(1-u) \Big) \geqslant \\ &\quad\quad \geqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant u} \big| z_T(t) - f(t) \big| < \varepsilon \Big) \mathbf{P}\big(\tau > T(1-u) + T\delta_T\big). \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Для оценки снизу первого сомножителя в правой части последнего равенства воспользуемся уже установленным соотношением (4.3.21), а для оценки снизу второго сомножителя — условием грубой гладкости $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$. В результате получим, что левая часть (4.3.22) больше или равна

$$\exp\Big\{ -T \Big[\int_0^u D\big(1, f'(t)\big) dt + \lambda_+(1-u) \Big] + o(T) \Big\} = \exp\big\{ -T\widehat{I}(f) + o(T) \big\}.$$

Необходимая оценка снизу для доказательства (4.3.5) установлена. Теорема 4.3.1 доказана.

§ 4.4 Полный локальный принцип больших уклонений

Как уже отмечалось, локальные ПБУ, полученные в §§ 4.2, 4.3, являются «частичными», так как они справедливы не для всех функций $f \in \mathbb{D}$, а лишь для $f \in \mathbb{C}_a$. Получить с помощью таких локальных ПБУ «интегральный» ПБУ об асимптотике $\mathbf{P}(z_T \in B)$, $B \subset \Delta$, не представляется возможным, так как асимптотика $\mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon)$ при $f \notin \mathbb{C}_a$ остается неизвестной. Если $f \notin \mathbb{C}_a$ и выполнено лишь условие $[\mathbf{C}]$ (но не $[\mathbf{C}_\infty]$), то предел в (4.2.3) (конечный или бесконечный) может не существовать. Пусть, например, τ_1 и τ арифметичны, ζ не зависит от τ и имеет экспоненциальное распределение на правой полуоси:

$$\mathbf{P}(\zeta > v) = ce^{-bv} \quad \text{при} \quad v > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad \mathbf{E}\zeta = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда при целых *четных* $T \to \infty$ траектория $z_T(t)$ с вероятностью близкой к $\frac{1}{\mathbf{E}\tau}$ будет иметь скачок в точке $t = \frac{1}{2}$, и при $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$ будет существовать

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = -D(0) - b.$$

Если же $T \to \infty$ по целым *нечетным* значениям, то вероятность иметь скачок в точке $t = \frac{1}{2}$ равна нулю, и соответствующий предел будет равен $-\infty$. Здесь сказывается «несогласованность» равномерной метрики с природой пространства $\mathbb{D}$: для функций f с разрывом в точке t_0 окрестность $(f)_\varepsilon$ в равномерной метрике оказывается слишком «тонкой» и любая функция $g \in (f)_\varepsilon$ при достаточно малом ε с необходимостью должна иметь разрыв в той же точке t_0. Это «неудобство» в значительной мере исчезает, если потребовать, чтобы величина ζ удовлетворяла условию $[\mathbf{C}_\infty]$. Тогда наличие скачков у функции f в (4.2.3) всегда обращает предел в (4.2.3) в $-\infty$ и будет иметь место «более полный» локальный ПБУ, справедливый для всех $f \in \mathbb{D}$.

С другой стороны, равномерной метрике ρ соответствуют наиболее тонкие границы множеств B и наиболее широкий класс функционалов, непрерывных относительно этой метрики. Имеется в виду сравнение с метриками в $\mathbb{D}$, рассмотренными в [12, гл. 4] (в том числе с метрикой $\rho_{\mathbb{D}}$, рассмотренной в § 1.7 и являющейся некоторым ослаблением метрики Скорохода), для которых названное выше «неудобство» отсутствует. Поэтому, если рассматривать «интегральный» ПБУ в $(\mathbb{D}, \rho)$ с равномерной метрикой, то условие непрерывности, нужное для совпадения верхних и нижних пределов, будет выполнено для наиболее широкого класса множеств (см. следствие 4.5.2).

В этом разделе мы получим «полный» локальный ПБУ, позволяющий доказать «полный интегральный» ПБУ (см. § 4.5); однако это удается сделать лишь при условии $\zeta_1 \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. В этом случае в силу теоремы 3.3.2 (см. (3.3.14)) с необходимостью $\lambda_+ \geqslant D(0)$ $(\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha))$.

Теорема 4.4.1 (полный локальный ПБУ). *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2.1 *и, кроме того,* $\zeta_1 \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathbb{D}$ *и любой последовательности* $\varepsilon = \varepsilon_T$, *достаточно медленно сходящейся к* 0 *при* $T \to \infty$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = -I(f), \tag{4.4.1}$$

в котором

$$I(f) := \begin{cases} \int\limits_0^1 D\big(f'(t)\big)dt, & \textit{если} \quad f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \textit{если} \quad f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a. \end{cases}$$

В качестве очевидного следствия из теоремы 4.4.1 получаем полный локальный ПБУ для траекторий обобщенных процессов восстановления $z_T^{(q)}$ с линейным сносом:

$$z_T^{(q)} = z_T^{(q)}(t) := \frac{1}{x} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + q\mathrm{e}(t), \qquad \mathrm{e}(t) := t;\ 0 \leqslant t < \infty.$$

Следствие 4.4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.4.1. *Тогда при любом* $q \in \mathbb{R}$ *семейство* $\{z_T^{(q)}\}$ *удовлетворяет соответствующему локальному ПБУ* (4.4.1) *с функционалом уклонений* $I^{(q)}(f) := I(f - q\mathrm{e})$.

Доказательство теоремы 4.4.1 следует той же схеме, что и в теореме 4.2.1, но для функций f из $\mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$ нужны дополнительные рассмотрения. Именно, мы установим следующие два утверждения:

1) *Если* f *имеет разрыв, то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = -\infty. \tag{4.4.2}$$

2) *Если* $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_a$, *то соотношение* (4.4.2) *также имеет место.*

Докажем первое утверждение. Если f имеет разрыв в точке $t \in (0,1)$ величиной $2h$, то любая функция $g \in (f)_\varepsilon$ при достаточно малом ε будет иметь разрыв в точке t величиной не менее h. Если $\mathbf{P}(T_k = t) = 0$ при всех k, то $\mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) = 0$, и выполнение (4.4.2) очевидно. Если

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{T_k = t\}\Big) > 0,$$

то при целом MT, $\overline{\zeta}_n := \max\limits_{k \leqslant n} |\zeta_k|$ имеем

$$\mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\eta(Tt) > MT\big) + \mathbf{P}(\overline{\zeta}_{MT} \geqslant hT). \tag{4.4.3}$$

Как мы уже видели, для любого заданного $N < \infty$ найдется число $M < \infty$ такое, что (см. (4.2.37))

$$\mathbf{P}\big(\eta(T) \geqslant MT\big) \leqslant e^{-NT}.$$

Кроме того, по условию $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ при всех достаточно больших T

$$\mathbf{P}(\overline{\zeta}_{MT} \geqslant hT) \leqslant MT\mathbf{P}\big(|\zeta| \geqslant hT\big) \leqslant MTe^{-NT}.$$

Вместе с (4.4.3) это означает, что левая часть в (4.4.2) не превосходит $-N$ при любом N. Это доказывает утверждение 1).

Установим теперь утверждение 2) для $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_a$. В силу соотношения (4.2.12) и леммы 4.2.1 в этом случае

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_\varepsilon\big) \leqslant -I(f^{\mathbf{u}_L}).$$

Согласно результатам [12, § 4.2] при $L \to \infty$ имеет место сходимость

$$I(f^{\mathbf{u}_L}) \to J(f) := \begin{cases} \infty, \ \text{если } \mathrm{Var} f = \infty, \\ I(f_a) + \mu_+^{(\zeta)} \mathrm{Var}\, f_s^+ - \mu_-^{(\zeta)} \mathrm{Var}\, f_s^-, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \mathrm{Var} f < \infty, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

где f_a и f_s — абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты функции $f = f_a + f_s$; $f_s^\pm$ — возрастающая и убывающая компоненты функции f_s, $\mu_\pm^{(\zeta)}$ — концы максимального интервала $(\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$, на котором функция $\mathbf{E}e^{\mu\zeta}$ конечна. Поскольку $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, то $\mu_\pm = \pm\infty$. Стало быть, $J(f) = \infty$, если $\mathrm{Var}\, f_s > 0$. Утверждение 2), а вместе с ним и теорема 4.4.1 доказаны.

§ 4.5 Интегральный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления

4.5.1 Основное утверждение и его доказательство

В настоящем разделе мы покажем, что при выполнении условий теоремы 4.4.1 процесс $z_T = z_T(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, будет удовлетворять «интегральному» ПБУ.

Основным утверждением этого раздела является

Теорема 4.5.1. *(Полный интегральный ПБУ). Пусть выполнены условия теоремы* 4.4.1. *Тогда для семейства процессов* $\{z_T\}$ *имеет место ПБУ (интегральный): для любого измеримого множества* $B \subset \mathbb{D}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \leqslant -I([B]), \tag{4.5.1}$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \geqslant -I((B)), \tag{4.5.2}$$

где $[B]$, (B) *— соответственно замыкание и внутренность множества* B *относительно равномерной метрики,*

$$I(B) := \inf_{f\in B} I(f).$$

Как и прежде, из ПБУ для z_T в качестве простого следствия вытекает аналогичное утверждение для семейства

$$z_T^{(q)} := \frac{1}{x}\, Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

соответствующего обобщенному процессу восстановления $Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt$ с линейным сносом qt.

Следствие 4.5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5.1. *Тогда для семейства* $\{z_T^{(q)}\}$ *при любом* $q \in \mathbb{R}$ *имеет место ПБУ с функционалом уклонений* $I^{(q)}(f) := I(f - q\mathrm{e})$, *где* $\mathrm{e} = \mathrm{e}(t) = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Как уже отмечалось перед теоремой 4.4.1, равномерной метрике ρ соответствует наиболее широкий класс множеств, для которых выполнено условие непрерывности $I\big((B)\big) = I\big([B]\big)$. В частности, равномерной метрике соответствует наиболее широкий класс функционалов G на $\mathbb{D}$, непрерывных относительно этой метрики. Пусть

$$B_y := \big\{f \in \mathbb{D}:\ G(f) < y\big\}.$$

Тогда для функционалов G, непрерывных относительно ρ, множество $B_y = (B_y)$ будет открытым, а множество $\big\{f \in \mathbb{D}:\ G(f) \leqslant y\big\} = [B_y]$ — замкнутым.

Следствие 4.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.4.1, G *— функционал, непрерывный относительно равномерной метрики. Тогда для почти всех* y *существует*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(G(z_T) < y\big) = -I(B_y). \tag{4.5.3}$$

Доказательство. Так как функция $I(B_y)$ не возрастает по y, то она п.в. непрерывна и, стало быть, для почти всех y

$$I(B_y) = I\big([B_y]\big).$$

Поэтому (4.5.3) следует из (4.5.1), (4.5.2). Следствие доказано.

При доказательстве теоремы 4.5.1 нам будет удобно использовать ряд понятий.

Будем называть функционал $I = I(f)$ *компактным*, если для любого $N \geqslant 0$ множество $\big\{f \in \mathbb{D} :\ I(f) \leqslant N\big\}$ является компактом в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$, где ρ — равномерная метрика.

Мы будем говорить, что процессы $z_T(t)$ и $\widetilde{z}_T(t)$, $t \in [0,1]$, *асимптотически эквивалентны* (относительно ПБУ), если при любом $\delta > 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(\rho(z_T,\ \widetilde{z}_T) \geqslant \delta\big) = -\infty. \tag{4.5.4}$$

Смысл введения этого понятия поясняет

Лемма 4.5.1. *Если процессы z_T, $\widetilde{z}_T$ асимптотически эквивалентны и процесс z_T удовлетворяет интегральному ПБУ* (*локальному ПБУ*) *с непрерывным снизу компактным функционалом уклонений $I = I(f)$, то и процесс $\widetilde{z}_T$ также удовлетворяет интегральному ПБУ* (*локальному ПБУ*) *с тем же функционалом уклонений.*

Доказательство леммы 4.5.1. Пусть процесс z_T удовлетворяет ПБУ.

(i). *Оценка сверху.* Воспользуемся очевидным неравенством

$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in B) \leqslant \mathbf{P}\big(z_T \in (B)_\delta\big) + \mathbf{P}\big(\rho(z_T,\ \widetilde{z}_T) \geqslant \delta\big),$$

в котором $(B)_\delta$ есть δ-окрестность множества B. Применяя далее оценку сверху в ПБУ для z_T и соотношение (4.5.4), получаем для любого $\delta > 0$ неравенство

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in B) \leqslant -I\Big(\big[(B)_\delta\big]\Big) \leqslant -I\big((B)_{2\delta}\big).$$

Устремляя δ к нулю, приходим к неравенству

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in B) \leqslant\ -I(B+),$$

где $I(B+) := \lim\limits_{\delta\to 0} I\big((B)_\delta\big)$.

Далее, пусть для определенности ζ разнозначна. Из утверждения (iv) теоремы 3.3.2 следует, что выпуклая непрерывная снизу функция

$\mathbf{D}(\alpha)$ для $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ растет при $\alpha \to \pm\infty$ быстрее любой линейной функции. Поэтому функционал $I(f)$ является *выпуклым, непрерывным снизу, компактным функционалом* (см., например, [12], § 4.2).

Остается заметить, что для непрерывного снизу, компактного функционала I имеет место равенство (см. [12], § 4.2)

$$I(B+) = I\big([B]\big).$$

Это доказывает оценку сверху

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in B) \leqslant -I\big([B]\big)$$

в ПБУ для $\widetilde{z}_T$.

(ii). *Оценка снизу.* Для любого фиксированного $\delta > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{z}_T \in (f)_\delta\big) \geqslant \mathbf{P}\big(z_T \in (f)_{\delta/2}\big) - \mathbf{P}\big(\rho(z_T,\ \widetilde{z}_T) \geqslant \delta/2\big).$$

Применяя далее оценку снизу в ПБУ для z_T и (4.5.4), получаем оценку снизу в локальном ПБУ для $\widetilde{z}_T$:

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(\widetilde{z}_T \in (f)_\delta\big) \geqslant -I\big((f)_{\frac{\delta}{2}}\big) \geqslant -I(f).$$

Отсюда вытекает оценка снизу в ПБУ для $\widetilde{z}_T$ (см. [12], § 4.2):

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in B) \geqslant -I\big((B)\big).$$

Утверждение леммы, относящееся к локальному ПБУ, доказывается аналогично. Лемма 4.5.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.5.1. Будем считать, не ограничивая общности, что нормирующая последовательность $x = x(T)$, по которой строится процесс $z_T(t)$, имеет вид $x = T$ (см. также доказательство теоремы 4.2.1). Если это не так, то можно заменить процесс $z_T(t)$ асимптотически эквивалентным ему процессом $\frac{x}{T} z_T(t)$, у которого нормирующая последовательность имеет нужный вид.

Нам будет удобно доказывать ПБУ не непосредственно для исходного процесса z_T, а для асимптотически эквивалентного ему процесса $\widetilde{z}_T$, который мы определим в два этапа.

Сначала построим «укрупненный» процесс восстановления $Z^*(t)$ по скачкам (τ_1^*, ζ_1^*), (τ_i^*, ζ_i^*), $i \geqslant 1$, где названные случайные величины определяются следующим образом:

$$\tau_1^* := T_\eta, \quad \zeta_1^* := Z_\eta, \qquad \eta := \eta(1) = \min\{k \geqslant 0 :\ T_k > 1\}. \qquad (4.5.5)$$

Случайные векторы (τ_i^*, ζ_i^*) при $i \geqslant 2$, суть независимые копии случайного вектора (τ^*, ζ^*), который также определяется соотношениями (4.5.5), но для однородной последовательности $\{T_k, Z_k\}$. Ясно, что процессы Z и Z^* можно построить на одном вероятностном пространстве, так что значения $Z(t)$ и $Z^*(t)$ в моменты τ_1^*, $\tau_1^* + \tau_2^*$, ... совпадают.

На втором этапе «сгладим» процесс $Z^*(t)$, построив с его помощью непрерывную ломаную $\widetilde{Z}(t)$ с узловыми точками $(0,0)$, $\big(\tau_1^*, Z^*(\tau_1^*){=}\zeta_1^*\big)$, $\big(\tau_1^* + \tau_2^*, Z^*(\tau_1^* + \tau_2^*) = \zeta_1^* + \zeta_2^*\big)$, ... и т.д. Процесс

$$\widetilde{z}_T(t) := \frac{1}{T}\widetilde{Z}(Tt), \quad t \in [0,1],$$

и будет в дальнейшем рассматриваться в качестве асимптотически эквивалентного для процесса z_T.

Для того, чтобы провести доказательство теоремы 4.5.1 с помощью предложенной конструкции, нам нужно

I. Доказать асимптотическую эквивалентность процессов z_T и $\widetilde{z}_T$.

II. Доказать ПБУ для процесса $\widetilde{z}_T$.

Начнем с первого этапа. Нам понадобятся свойства скачков ζ_i^*, $i \geqslant 1$.

Лемма 4.5.2. *Если $\zeta_1 \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, то $\zeta_i^* \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим неотрицательный мартингал

$$X_0 = 1, \qquad X_k = \frac{e^{\lambda Z_k}}{\psi_1(\lambda)\psi^{k-1}(\lambda)},$$

где $\psi_1(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\zeta_1}$, $\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\zeta}$. Величина η является марковским моментом относительно последовательности $\big\{(\tau_i, \zeta_i);\ i \geqslant 1\big\}$. Поэтому

$$\mathbf{E}X_\eta \leqslant 1 \tag{4.5.6}$$

(см., например, следствие 15.2.2 в [10]). Далее, в силу неравенства Коши и (4.5.6)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{\lambda Z_\eta} = \mathbf{E}\frac{e^{\lambda Z_\eta}}{\sqrt{\psi_1(2\lambda)\psi^{\eta-1}(2\lambda)}}\sqrt{\psi_1(2\lambda)\psi^{\eta-1}(2\lambda)} \leqslant \\ \leqslant \left[\mathbf{E}\frac{e^{2\lambda Z_\eta}}{\psi_1(2\lambda)\psi^{\eta-1}(2\lambda)}\right]^{1/2}\big[\mathbf{E}\psi_1(2\lambda)\psi^{\eta-1}(2\lambda)\big]^{1/2} \leqslant \\ \leqslant [\frac{\psi_1(2\lambda)}{\psi(2\lambda)}]^{1/2}[\mathbf{E}\psi^\eta(2\lambda)]^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Заметим далее, что $\eta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Действительно, по экспоненциальному неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(\eta > n+1) \leqslant \mathbf{P}(T_n \leqslant 1) \leqslant e^{-n\Lambda^{(\tau)}(\frac{1}{n})},$$

где $\Lambda^{(\tau)}(v) \to \infty$ при $v \to 0$. Стало быть, $\mathbf{E}e^{\lambda Z_\eta} < \infty$ при любом λ. Отсюда и из (4.5.7) следует, что

$$\zeta_1^* \underset{d}{=} Z_\eta \Subset [\mathbf{C}_\infty].$$

Если положить $\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda)$, то получим также, что в однородном случае

$$\zeta^* \underset{d}{=} Z_\eta \Subset [\mathbf{C}_\infty].$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть также, что

$$\mathbf{P}(\tau_1^* \geqslant t) \leqslant \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant t) + \int\limits_0^1 \widetilde{H}(dv)\mathbf{P}(\tau \geqslant t - v) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant t) + \widetilde{H}(1)\mathbf{P}(\tau \geqslant t - 1),$$

и, стало быть, τ_1^* удовлетворяет тем же условиям, что и τ_1, τ.

Следствие 4.5.3. *Если выполнены условия леммы* 4.5.2, *то*

$$\overline{Z}_\eta := \max_{k \leqslant \eta} |Z_k| \Subset [\mathbf{C}_\infty], \tag{4.5.8}$$

$$\max_{t \leqslant \tau_1^*} \big|\widetilde{Z}(t) - Z(t)\big| \Subset [\mathbf{C}_\infty], \tag{4.5.9}$$

$$\max_{t \leqslant \tau_1^*} \big|Z^*(t) - Z(t)\big| \Subset [\mathbf{C}_\infty]. \tag{4.5.10}$$

Доказательство. Мы получим утверждение (4.5.8), если воспользуемся неравенством

$$\overline{Z}_\eta \leqslant \sum_{k=1}^{\eta} |Z_k - Z_{k-1}|$$

и леммой 4.5.2 для слагаемых $|Z_1| = |\zeta_1|$, $|Z_k - Z_{k-1}| = |\zeta_k|$ при $k \geqslant 2$.

Утверждение (4.5.9) вытекает из (4.5.8) и неравенства

$$\max_{t \leqslant \tau_1^*} \big|\widetilde{Z}(t) - Z(t)\big| \leqslant \overline{Z}_\eta + |Z_\eta|.$$

Утверждение (4.5.10) доказывается аналогично. Следствие доказано.

Мы можем доказать теперь основное утверждение раздела I доказательства теоремы 4.5.1.

Лемма 4.5.3. *При выполнении условий леммы* 4.5.2 *процессы* z_T, $\widetilde{z}_T$ *и* $z_T^*(t) := \frac{1}{T} Z^*(Tt)$ *асимптотически эквивалентны.*

Доказательство. Так как $\tau_i^* \geqslant 1$, то

$$P_T := \mathbf{P}\Big(\max_{t\leqslant T}\big|\widetilde{Z}(t) - Z(t)\big| \geqslant \delta T\Big) \leqslant \mathbf{P}(W_1 > \delta T) + T\mathbf{P}(W \geqslant \delta T),$$

где

$$W_1 := \max_{t\leqslant \tau_1^*}\big|\widetilde{Z}(t) - Z(t)\big|, \qquad W := \max_{t\leqslant \tau^*}\big|\widetilde{Z}(t) - Z(t)\big|,$$

τ_1^*, τ^* определены в (4.5.5). В силу экспоненциального неравенства Чебышева

$$P_T \leqslant e^{-\Lambda^{(W_1)}(\delta T)} + Te^{-\Lambda^{(W)}(\delta T)},$$

где $\Lambda^{(W_1)}$, $\Lambda^{(W)}$ — функции уклонений величин W_1 и W, соответственно. Так как в силу леммы 4.5.3 $\Lambda^{(W_1)}(v) \gg v$, $\Lambda^{(W)}(v) \gg v$ при $v \to \infty$, то $\frac{1}{T}\ln P_T \to -\infty$ при $T \to \infty$. Это значит, что процессы z_T и $\widetilde{z}_T$ асимптотически эквивалентны. Эквивалентность z_T и z_T^* устанавливается аналогично. Лемма доказана.

Перейдем теперь к разделу II и докажем ПБУ для процесса $\widetilde{z}_T$. В соответствии с общими теоремами о ПБУ в метрических пространствах (см., например, [12], гл. 4), для доказательства ПБУ для траекторий $\widetilde{z}_T(t)$ достаточно доказать два факта:

1. Выполнение локального ПБУ для $\widetilde{z}_T(t)$.

2. «Экспоненциальную плотность» распределения $\widetilde{z}_T$, т.е. что для любого $N < \infty$ найдется компакт K в пространстве $(\mathbb{C}, \rho)$ такой, что при всех достаточно больших T

$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \notin K) \leqslant e^{-TN}. \tag{4.5.11}$$

Выполнение локального ПБУ для $\widetilde{z}_T(t)$ следует из теоремы 4.4.1 и лемм 4.5.2, 4.5.3. Свойство (4.5.11) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.5.4. *Если выполнены условия теоремы* 4.5.1*, то выполнено* (4.5.11)*.*

Таким образом, для доказательства теоремы 4.5.1 нам осталось доказать лемму 4.5.4.

Доказательство леммы 4.5.4. Из сказанного выше видно, что наличие неоднородности $\boldsymbol{\xi}_1 \neq_d \boldsymbol{\xi}$, когда $\boldsymbol{\xi}_1 \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, $\boldsymbol{\xi} \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, никак не меняет нужных нам свойств траекторий $Z(t)$, $\widetilde{Z}(t)$ по сравнению с однородным случаем. Поэтому в дальнейшем для упрощения изложения мы везде будем полагать, что $\tau_1 \underset{d}{=} \tau$. Кроме того, для упрощения записи будем считать, что T — целочисленны. Наряду с укрупненным процессом z_T^* и его непрерывной версией $\widetilde{z}_T$ рассмотрим траекторию случайного блуждания $s_n(t)$ при $n = T$, построенную как непрерывная ломаная с узловыми точками $(\frac{k}{n}, \frac{Z_k^*}{x})$, где

$$Z_0^* = 0, \qquad Z_k^* = \sum_{j=1}^{k} \zeta_j^*, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Заметим далее, что если $\zeta^* \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, то множество

$$K_v := \big\{ f \in \mathbb{C} : \ f(0) = 0, \ \ I^*(f) \leqslant v \big\}$$

является компактом в $(\mathbb{C}, \rho)$, где

$$I^*(f) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(f'(t))dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{C}_a; \\ \infty, & \text{если} \quad f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a, \end{cases}$$

и Λ^* — функция уклонений случайной величины ζ^* (см., например, [12], § 4.2).

Предположим сначала, что $\mathbf{E}\zeta = 0$, так что $\mathbf{E}\zeta^* = \mathbf{E}\zeta\mathbf{E}\eta = 0$. В целях упрощения записи верхний индекс $*$ у обозначений τ_i^*, ζ_i^*, Λ^*, I^*, $\eta^*(t)$ будем опускать и считать, что $\tau_i \geqslant 1$, $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$.

Нам нужно оценить

$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \notin K_v) \leqslant \mathbf{P}\big(I(\widetilde{z}_T) > v\big) \leqslant \mathbf{P}\Bigg(\sum_{k=1}^{\eta(T)} \tau_k \Lambda\bigg(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\bigg) > vT\Bigg).$$

Так как $\eta(T) \leqslant T$, и по предположению, $T = n$ — целое число, то будем иметь

$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \notin K_v) \leqslant \mathbf{P}\Bigg(\sum_{k=1}^{n} \tau_k \Lambda\bigg(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\bigg) > vn\Bigg).$$

В силу выпуклости функции Λ и того, что $\Lambda(0) = 0$, $\tau_k \geqslant 1$ имеем $\frac{1}{\tau_k} \leqslant 1$,

$$\Lambda\bigg(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\bigg) \leqslant \bigg(1 - \frac{1}{\tau_k}\bigg)\Lambda(0) + \frac{1}{\tau_k}\Lambda(\zeta_k) = \frac{1}{\tau_k}\Lambda(\zeta_k),$$

так что

$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \notin K_v) \leqslant \mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} \Lambda(\zeta_k) > vn\Big). \tag{4.5.12}$$

Из леммы 4.4.4 в [12] следует, что правая часть в (4.5.12) не превосходит

$$e^{-n(v - \mathbf{E}\gamma)},$$

где $\gamma := \Lambda(\zeta)$, $\mathbf{E}\gamma < \infty$. При $v = N + \mathbf{E}\gamma$ это доказывает (4.5.11).

Пусть теперь $a_\zeta := \mathbf{E}\zeta \neq 0$. Тогда

$$\widetilde{z}_T(t) = \widetilde{z}^0_T(t) + a_\zeta \pi_T(t),$$

где процесс $\widetilde{z}^0_T$ построен так же, как $\widetilde{z}_T$, но по скачкам $\zeta^0 = \zeta - a_\zeta$, $\mathbf{E}\zeta^0 = 0$; процесс $\pi_T(t)$ есть непрерывная ломаная, построенная по простому процессу восстановления с теми же точками скачков T_k (в которых теперь происходят скачки величиной 1), что и для процесса z^*_T. Если $\widetilde{z}^0_T \in K_{(1)}$, $a_\zeta \pi_T(t) \in K_{(2)}$, где $K_{(1)}$, $K_{(2)}$ — компакты, то очевидно, что

$$\widetilde{z}^0_T + a_\zeta \pi_T(t) \in K_{(3)},$$

где $K_{(3)} := K_{(2)} \cup K_{(2)}$ — тоже компакт. Пусть для определенности $a_\zeta > 0$. Тогда, в силу того, что $\tau_k \geqslant 1$, имеем для всех $t \in [0,1]$ неравенства $0 \leqslant a_\zeta \pi'_T(t) \leqslant a_\zeta$ и, следовательно, $a_\zeta \pi_T(t) \in K_{(2)}$, где

$$K_{(2)} := \bigl\{f:\ f(0)=0,\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant a_\zeta\bigr\}$$

— компакт. Далее,

$$\mathbf{P}\bigl(\widetilde{z}^0_T \in K_{(1)},\quad a_\zeta \pi_T(t) \in K_{(2)}\bigr) \leqslant \mathbf{P}(\widetilde{z}_T \in K_{(3)}),$$
$$\mathbf{P}(\widetilde{z}_T \notin K_{(3)}) \leqslant \mathbf{P}(\widetilde{z}^0_T \notin K_{(1)}).$$

Остается воспользоваться первой частью доказательства. Лемма 4.5.4, а вместе с ней и теорема 4.5.1, доказаны.

Отметим, что возможны и иные подходы к доказательству леммы 4.5.4. Пусть $T = n$ — целое число и $s_n(t)$ — непрерывная ломаная, построенная по узловым точкам $(\frac{k}{n}, \frac{Z^*_k}{x})$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\omega(\Delta, \widetilde{z}_T) \leqslant \omega(\Delta, s_n). \tag{4.5.13}$$

где $\omega(\Delta, f)$ — модуль непрерывности функции f:

$$\omega(\Delta, f) := \sup\Bigl\{\bigl|f(u+v) - f(u)\bigr|:\ 0 \leqslant u < u+v \leqslant 1,\ v \leqslant \Delta\Bigr\}.$$

Затем, пользуясь условием $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, можно построить в явном виде (по функции уклонений случайной величины ζ) функцию $\delta(v) \downarrow 0$ при $v \downarrow 0$ и соответствующий компакт

$$K^{(\delta)} := \bigl\{f \in \mathbb{C}:\ f(0)=0,\ \omega(\Delta, f) \leqslant \delta(\Delta) \text{ при } 0 \leqslant \Delta \leqslant 1\bigr\},$$

для которого будет выполнено соотношение (4.5.11) для процесса s_n, а стало быть, в силу (4.5.13), и для процесса $\widetilde{z}_T$.

«Высоковероятностный» компакт для s_n можно строить и как множество $\bigl\{I^*(f) \leqslant v\bigr\}$.

4.5.2 Об ослаблении условий теоремы 4.5.1

Мы видели в предыдущих разделах, что доказательство ПБУ в пространстве $\mathbb{D}$ с равномерной метрикой ρ сопряжено с использованием весьма ограничительного условия $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Ослабление этого условия до «минимального» условия $\boldsymbol{\xi} \Subset [\mathbf{C}]$, которое использовалось в ПБУ для процессов $Z(t)$ в фазовом пространстве (теорема 3.4.1), возможно в следующих альтернативных направлениях:

a) замена равномерной метрики на более слабую метрику;

b) сужение класса рассматриваемых ОПВ;

c) сужение класса множеств B (или функционалов f), для которых справедлив ПБУ (это направление проиллюстрировано в 4.6, 4.7).

Рассмотрим кратко эти подходы.

a) Замена равномерной метрики на более слабую метрику связана с сужением класса функционалов, непрерывных относительно новой метрики (и класса множеств B, для которых существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B);$$

т.е. связан с направлением c). Аналогичная ситуация имеет место при исследовании ПБУ для случайных блужданий, например, для блужданий $\{Z_k\}$ (или, что то же, для $Z(k)$ при $\tau_k \equiv 1$). Для них сначала был установлен ПБУ для траекторий при условии $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ (см. [4], а также [12], гл. 4, и библиографию там). Позже, чтобы ослабить это условие, потребовалось в [31] (см. также [12], гл. 4, и библиографию там) существенно изменить саму постановку задачи и подход к доказательству, введя в рассмотрение более слабую метрику $\rho_{\mathbb{D}}$, что повлекло за собой изменение и функционала уклонений.

Новая метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ была описана в § 1.6. Функционал уклонений $J(f)$, соответствующий этой метрике, имеет вид (4.4.4), и этот функционал будет, вообще говоря, отличаться от $I(f)$ при невыполнении условия $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, так что условие $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ является в известном смысле необходимым для выполнения ПБУ с функционалом $I(f)$ (см. также (4.5.1), (4.5.2) в теореме 4.5.1).

ПБУ в пространстве $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ с функционалом уклонений (4.4.4) назван в [12], [31] *расширенным* ПБУ В [52] для обобщенного пуассоновского процесса (т.е. для ОПВ с экспоненциальным распределением для τ) был установлен расширенный ПБУ, в котором по сути использовались сразу все три альтернативных подхода a)–c). Установлен следующий ПБУ в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{D}})$, где $\mathbb{V}$ — пространство функций с ограниченной вариацией.

Теорема 4.5.2. *Пусть $Z(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс, $\zeta \Subset [\mathbf{C}]$. Тогда нормированные процессы $z_T(t) = \frac{Z(tT)}{T}$, $t \in [0,1]$, удовлетворяют расширенному ПБУ в пространстве $(\mathbb{V}, \rho_{\mathbb{D}})$ с функционалом уклонений $J(f)$, т.е. справедливы соотношения*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \leqslant -J(B+),$$
$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \geqslant -J\big((B)\big),$$

где (B) есть внутренность множества B,

$$J(B+) := \lim_{\varepsilon\to 0} J\big((B)_\varepsilon\big),$$

$(B)_\varepsilon$ есть ε-окрестность множества B, $J(B) = \inf\limits_{f\in B} J(f)$,

$$J(f) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \mathrm{Var} f = \infty, \\ \int\limits_0^1 \Lambda\big(f'_a(t)\big)dt + \mu_+^{(\zeta)} \mathrm{Var}\, f_s^+ - \mu_-^{(\zeta)} \mathrm{Var}\, f_s^-, & \text{если } \mathrm{Var} f < \infty, \end{cases}$$

где f_a и f_s — абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты функции $f = f_a + f_s$, $f_s^\pm$ — возрастающая и убывающая компоненты функции f_s, $\mu_\pm^{(\zeta)}$ — концы максимального интервала $(\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$, на котором функция $\mathbf{E}e^{\mu Z(1)}$ конечна, $\Lambda(\alpha)$ — функция уклонений, соответствующая случайной величине $Z(1)$.

Другими словами, процессы $z_T(t)$ удовлетворяют тому же расширенному ПБУ, что и нормированные случайные блуждания $\left\{\frac{Z(k)}{T}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

В [54] это утверждение распространено на процессы с независимыми приращениями общего вида в пространстве $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$, удовлетворяющие условию $[\mathbf{C}]$.

Доказательство теоремы 4.5.2 сопряжено с техническими трудностями, которые выходят за рамки этой книги, и мы его опускаем.

В прикладных задачах, связанных с отысканием асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B)$ множества B устроены достаточно просто и вряд ли можно ожидать, что $\inf_{f\in B} J(f)$ достигается на функции f не из класса $\mathbb{C}_a$. Если $f \in \mathbb{C}_a$, то $J(f) = I(f)$ и возникает возможность реализовать третий альтернативный подход c), при котором ПБУ (4.5.1), (4.5.2) остается справедливым лишь при условии $[\mathbf{C}]$. Классом событий B, для которых такой подход оправдан, является, например, класс событий, связанных с пересечением или непересечением траекторией $z_T(t)$ удаленной границы. Следующие два параграфа будут посвящены отысканию

$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B)$ в названных граничных задачах при выполнении лишь условия [**C**].

§ 4.6 Принцип больших уклонений в первой граничной задаче

Как мы видели, отыскание асимптотики

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B), \;\; z_T = z_T(t) = \frac{Z(tT)}{T}, \;\; t \in [0,1] \text{ при } T \to \infty \qquad (4.6.1)$$

для произвольных измеримых множеств B, скажем, в пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода, сопряжено с большими трудностями и привлечением весьма ограничительных условий (см. теоремы 4.4.1, 4.5.1).

В этом и следующем разделах *мы будем рассматривать множества B, соответствующие граничным задачам двух типов.* Напомним, что

$$\frac{Z(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} a := \frac{a_\tau}{a_\zeta} \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \text{где} \quad a_\tau := \mathbf{E}\tau, \quad a_\zeta := \mathbf{E}\zeta.$$

I. Так называемая *первая граничная задача* в области больших уклонений связана с отысканием асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_g)$, где для заданной функции $g(t) > at$, $t \in [0,1]$ из пространства $\mathbb{D}$

$$B_g = \Big\{ f \in \mathbb{D} : \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) - g(t)\big) \geqslant 0 \Big\}. \qquad (4.6.2)$$

II. *Вторая граничная задача* связана с отысканием асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+})$, где множество $B_{g_-g_+}$ имеет вид

$$B_{g_-g_+} = \big\{ f \in \mathbb{D} : \, g_-(t) \geqslant f(t) \geqslant g_+(t) \text{ при всех } \; t \in [0,1] \big\}, \qquad (4.6.3)$$

а заданные функции $g_-(t) < g_+(t)$, $g_-(0) < 0 < g_+(0)$, из $\mathbb{D}$ имеют конечное число скачков и таковы, что прямая $z = at$ пересекает хотя бы одну из кривых $g_\pm$.

При исследовании асимптотики (4.6.1) для описанных множеств B нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

Напомним, что если выполнены условия $[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ и условия допустимой неоднородности

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \qquad \lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant \min[\lambda_+, D(0)], \qquad (4.6.4)$$

то ПБУ, полученные выше, для однородных и неоднородных ОПВ совпадают (второе условие в (4.6.4) нужно лишь в немногих специальных случаях, когда в рассмотрениях участвует нулевая траектория).

4.6.1 Линии уровня

Для описания асимптотики

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(z_T \in B_g) \tag{4.6.5}$$

в первой граничной задаче (см. (4.6.2)) потребуется ввести понятие *линий уровня*. Применительно к случайным блужданиям такие линии были введены и изучены в [3], [12], § 3.7. В названных работах они позволяли найти грубую и точную асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_g)$, когда z_T — траектория случайного блуждания ($\tau \equiv 1$). Для ОПВ *линии* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *уровня* α определяются вполне аналогично. Именно, это линии (функции), для которых $\mathfrak{l}_\alpha(1) = \alpha$, а предел при $T \to \infty$ последовательности

$$\frac{1}{tT}\ln \mathbf{P}\Big(z_T(t) \in \Delta\big[\mathfrak{l}_\alpha(t)\big)\Big)$$

при $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ и всех $t \in (0,1]$ сохраняет неизменное значение (равное $D(\alpha)$). Из теоремы 3.4.1 следует, что при выполнении условий $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, (4.6.4) (второе условие в (4.6.4) превращается при этом в неравенство $\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant D(0)$) такая функция должна удовлетворять уравнению

$$tD\left(\frac{\mathfrak{l}_\alpha(t)}{t}\right) = D\big(\mathfrak{l}_\alpha(1)\big) = D(\alpha). \tag{4.6.6}$$

Если $D(d_+) = \infty$ (т.е. исключается случай $\mathbf{P}(\zeta/\tau = d_+) > 0$), то из свойств функции $D(\alpha)$ вытекает, что она в области (a, d_+) непрерывно и строго монотонно возрастает от 0 до ∞. Стало быть, ветвь функции D в области (a, d_+) всегда имеет обратную функцию $D^{(-1)}$.

Определение 4.6.1. Функция

$$\mathfrak{l}_\alpha(t) := tD^{(-1)}\left(\frac{D(\alpha)}{t}\right), \qquad t \in (0,1], \quad a < \alpha < d_+, \tag{4.6.7}$$

называется *линией уровня* α.

В точке $t = 0$ функцию $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ определим по непрерывности справа: $\mathfrak{l}_\alpha(0) = \mathfrak{l}_\alpha(+0)$.

Свойства линии уровня изложены в следующем утверждении.

Лемма 4.6.1. *Пусть* $\alpha \in (a, d_+)$, $D(d_+) = \infty$ $(\mathbf{P}(\zeta/\tau = d_+) = 0)$. *Тогда*

(i)

$$\mathfrak{l}_\alpha(0) = \frac{D(\alpha)}{\mu^+} \ \ \Big(\mu^+ = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{D(\alpha)}{\alpha}\Big), \quad \frac{\mathfrak{l}_\alpha(t)}{t} \to \infty \ \text{ при } \ t \to 0. \tag{4.6.8}$$

(ii) *Функции* $\mathfrak{l}_\alpha(t) - at$ *возрастают на* $[0,1]$ *и вогнуты* ($\mathfrak{l}''_\alpha(t) \leqslant 0$ *п.в.*). *При каждом* t *значение* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *возрастает по* α.

(iii) *Функция* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *склеена (с сохранением непрерывности производной), вообще говоря, из трех частей:*

1) *линейной функции*

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_\alpha(t) &= \frac{D(\alpha)}{\mu^+} + t\Big(\alpha^+ - \frac{D(\alpha^+)}{\mu^+}\Big) \quad \textit{при} \quad t \in [0, t_+], \\ t_+ &= t_+(\alpha) := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha^+)}; \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

(*эта часть отсутствует, если* $\mu^+ = \infty$ *или* $D(\alpha^+) = \infty$).

2) *«промежуточной» части на* $[t_+, t^+]$, $t^+ := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha_+)}$, *в которой могут быть интервалы аналитичности функции* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$. (*Эта часть отсутствует, если* $\mu^+ = \mu_+$ *или, что то же, если* $\mathbf{A}(\lambda, \mu) > 0$ *при* $(\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}$, $\mu \in (0, \mu^+)$.)

3) *аналитической, строго вогнутой функции в области* $(t^+, 1]$.

(iv) *Положим для краткости* $\mathfrak{l}_\alpha(t) = \mathfrak{l}$. *При* $\alpha \in (a, \alpha_+)$ *справедливы сотношения*

$$\mathfrak{l}'_\alpha(t) = \frac{A\big(\mu(\mathfrak{l}/t)\big)}{\mu(\mathfrak{l}/t)} = -\frac{\lambda(\mathfrak{l}/t)}{\mu(\mathfrak{l}/t)}, \tag{4.6.10}$$

$$\mathfrak{l}'_\alpha(1) = -\frac{\lambda(\alpha)}{\mu(\alpha)} \in (0, \alpha). \tag{4.6.11}$$

Из леммы следует, что в случае $D(\alpha_+) = \infty$ линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ строго вогнуты и аналитичны на всем интервале $(0,1)$.

Доказательство. Если для упрощения выкладок положить $a = 0$, то доказательство разделов (i), (ii) леммы 4.6.1 повторяет доказательство соответствующих разделов в теореме 3.7.2 в [12], в которой изучались линии уровня для случайных блужданий (при этом в [12] надо заменить $\Lambda(\alpha)$ на $D(\alpha)$, λ_+ на μ^+). Случай $a \neq 0$ не вносит существенных изменений в доказательство.

Некоторое отличие от теоремы 3.7.2 в [12] появляется при доказательстве разделов (iii), (iv) леммы. В соответствии с теоремой 3.5.2 функция $D(\alpha)$ при $\alpha > a$ склеена, вообще говоря, из трех кусков, описанных в п.п. 1)–3) теоремы 3.5.2 (напомним, что правая ветвь функции $\Lambda(\alpha)$ склеена из 2-х кусков). Так как $D'(\alpha) > 0$ в области (a, ∞), то обратная функция $D^{(-1)}(v)$ к правой ветви функции $D(\alpha)$ в области $(0, \infty)$ также склеена, вообще говоря, из трех кусков с точками склеивания $v_+ = D(\alpha_+)$ и $v^+ = D(\alpha^+)$ (см. теорему 3.5.2). На интервале

$(0, v_+)$ функция $D^{(-1)}(v)$ будет аналитической, а в области (v^+, ∞) — линейной:

$$D^{(-1)}(v) = \alpha^+ + \frac{v - D(\alpha^+)}{\mu^+}.$$

Поэтому в силу определения (4.6.7), функция $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ будет аналитической при $\frac{D(\alpha)}{t} < v_+$ или, что то же, при

$$t > \frac{D(\alpha)}{D(\alpha_+)} = t^+.$$

При $t \in (t^+, t_+)$, $t_+ := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha^+)}$ функция $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ будет носить «промежуточный» характер, а при $\frac{D(\alpha)}{t} > v^+$ или, что то же, при $t < t_+$, согласно (4.6.7)

$$\mathfrak{l}_\alpha(t) = t\left[\alpha^+ + \frac{D(\alpha)/t - D(\alpha^+)}{\mu^+}\right],$$

что эквивалентно (4.6.9).

(iv). Дифференцируя по t тождество (4.6.6), получим

$$D(\mathfrak{l}/t) + t\mu(\mathfrak{l}/t)\left(\frac{\mathfrak{l}'_\alpha(t)}{t} - \frac{\mathfrak{l}}{t^2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{l}'_\alpha(t)\mu(\mathfrak{l}/t) = \frac{\mathfrak{l}}{t}\,\mu(\mathfrak{l}/t) - D(\mathfrak{l}/t) = A\big(\mu(\mathfrak{l}/t)\big) > 0.$$

Отсюда следует (4.6.10). Так как $\mathfrak{l}_\alpha(1) = \alpha$, то в точке $t = 1$ имеем

$$\mathfrak{l}'_\alpha(1) = \frac{A(\mu(\alpha))}{\mu(\alpha)} = -\frac{\lambda(\alpha)}{\mu(\alpha)}.$$

Далее, при $a > 0$, $\mu > 0$ всегда $A(\mu)/\mu < A'(\mu)$. Поэтому

$$\frac{A\big(\mu(\alpha)\big)}{\mu(\alpha)} < A'\big(\mu(\alpha)\big) = \alpha.$$

Это доказывает (4.6.11). Лемма 4.6.1 доказана.

Как и в разделе 3.7.2 в [12], из леммы 4.6.1 нетрудно получить, что при малых значениях $\alpha - a$, v и каждом $t \in (0, 1]$

$$D(\alpha) \approx \frac{(\alpha - a)^2}{2\sigma^2}, \qquad D^{(-1)}(v) \approx a + \sigma\sqrt{2v}, \qquad \mathfrak{l}_\alpha(t) \approx at + (\alpha - a)\sqrt{t}.$$

4.6.2 Неравенства для распределения максимального значения ОПВ

Для доказательства основной теоремы 4.6.2 нам понадобятся оценки для распределения
$$\overline{Z}(T) := \sup_{t \leqslant T} Z(t),$$
представляющие и самостоятельный интерес. Следующее утверждение является аналогом теоремы 1.1.1 в [12] об оценках для распределения максимума сумм случайных величин.

Теорема 4.6.1. *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, (4.6.4). *Тогда*
(i) *При* $T \to \infty$ *и всех* $x > 0$, $\mu \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \exp\Big\{ -\mu x + T \max\big(0, \widehat{A}(\mu)\big) + o(T)\Big\}. \qquad (4.6.12)$$

(ii) *Пусть* $a < 0$,

$$\begin{aligned} \mu_0^{(\zeta)} &:= \sup\big\{\mu :\ \mathbf{A}(0,\mu) = A_\zeta(\mu) \leqslant 0\big\},\\ \mu_0 &:= \sup\big\{\mu :\ A(\mu) \leqslant 0\big\}. \end{aligned}$$

Тогда, если $A(\mu^+) \leqslant 0$, *то*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \min(e^{-\mu_0^{(\zeta)} x}, e^{-\mu^+ x}) \qquad (4.6.13)$$

(для независимых τ и ζ всегда $\mu_0^{(\zeta)} = \mu_0$),
Если $A(\mu^+) > 0$, *то*

$$\begin{aligned} &A(\mu_0) = 0, \quad \alpha_0 := A'(\mu_0) \in (0,\infty),\\ &D(\alpha) \geqslant \mu_0\alpha, \quad D(\alpha_0) = \mu_0\alpha_0 \end{aligned} \qquad (4.6.14)$$

и при $T \to \infty$, $\alpha = x/T$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \begin{cases} e^{-\mu_0 x} & \textit{при всех} \quad \alpha,\\ e^{-TD(\alpha)+o(T)} & \textit{при} \quad \alpha \geqslant \alpha_0. \end{cases} \qquad (4.6.15)$$

(iii) *Если* $a \geqslant 0$, *то при* $\alpha = x/T \geqslant a$, $T \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant e^{-TD(\alpha)+o(T)}. \qquad (4.6.16)$$

(iv) (a) *В случае* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $a < 0$, $A(\mu^+) \leqslant 0$ *при* $x \to \infty$, $T \to \infty$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) = e^{-\mu_0 x + o(x)}. \qquad (4.6.17)$$

(b) *В случаях*

$$\alpha = \frac{x}{T} > a \geqslant 0$$

и

$$a < 0, \qquad A(\mu^+) > 0, \qquad \alpha > \alpha_0$$

выполняется

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) = e^{-TD(\alpha)+o(T)}. \tag{4.6.18}$$

Сравнение утверждения (iv) с неравенствами (4.6.13), (4.6.16) и вторым неравенством в (4.6.15) показывает, что эти неравенства экспоненциально не улучшаемы. Это означает также выполнение ПБУ для $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big)$.

В § 5.6 следующей главы будет получено уточнение теоремы 4.6.1.

Доказательство. (i). Положим

$$\eta_x = \min\big\{t : \, Z(t) \geqslant x\big\}.$$

Так как ОПВ $Z(t)$ может превысить уровень $x > 0$ только скачком, то η_x — марковский момент. Поэтому при $t < T$ события $\{\eta_x \in dt\}$ и случайная величина $Z(T) - Z(t)$ независимы, процесс $Z(t+u) - Z(t)$ на множестве $\{\eta_x \in dt\}$ является однородным ОПВ,

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} \geqslant \int_0^T \mathbf{E}(e^{\mu Z(T)};\, \eta_x \in dt) \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \mathbf{P}(\eta_x \in dt)\mathbf{E}\big(e^{\mu(x+Z(T)-Z(t))} \,|\, \eta_x = t\big). \tag{4.6.19}$$

Так как в силу теоремы 3.7.1 (см. (3.7.1)) и условий теоремы

$$\mathbf{E}\big(e^{\mu(Z(T)-Z(t))} \,|\, \eta_x = t\big) = e^{(T-t)\widehat{A}(\mu)+o(T-t)} \quad \text{при} \quad T - t \to \infty,$$

то из (4.6.19) получаем

$$e^{T\widehat{A}(\mu)+o(T)} \geqslant \begin{cases} e^{\mu x+o(T)}\,\mathbf{P}(\eta_x \leqslant T), & \textit{если} \quad \widehat{A}(\mu) \geqslant 0, \\ e^{\mu x+\widehat{A}(\mu)T+o(T)}\,\mathbf{P}(\eta_x \leqslant T), & \textit{если} \quad \widehat{A}(\mu) < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\mathbf{P}(\eta_x \leqslant T) = \mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big)$, то отсюда вытекает (4.6.12).

(ii). Так как

$$\overline{Z}(T) \leqslant \overline{Z} := \sup_{t\geqslant 0} Z(t) = \sup_{k\geqslant 0} Z_k,$$

то в случае $a < 0$ согласно теореме 1.1.1 в [12]

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\overline{Z}(\infty) \geqslant x\big) = \mathbf{P}(\overline{Z} \geqslant x) \leqslant e^{-\mu_0^{(\zeta)} x}. \qquad (4.6.20)$$

Кроме того, при

$$A(\mu^+) \leqslant 0$$

из (4.6.12) при $\mu = \mu^+$, нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(\infty) \geqslant x\big) \leqslant e^{-\mu^+ x}. \qquad (4.6.21)$$

Отсюда следует (4.6.13).

Если

$$A(\mu^+) > 0,$$

то

$$A(\mu_0) = 0, \qquad \alpha_0 = A'(\mu_0) \in (0, \infty).$$

Так как функция $D(\alpha)$ есть преобразование Лежандра над $A(\mu)$, то

$$D(\alpha) \geqslant \alpha\mu_0 - A(\mu_0) = \alpha\mu_0. \qquad (4.6.22)$$

Кроме того, $\mu_0 = \mu(\alpha_0)$,

$$D(\alpha_0) = \alpha_0\mu_0.$$

Это доказывает (4.6.14).

Если $\alpha = x/n \geqslant \alpha_0$, то $\mu(\alpha) \geqslant \mu_0$, $A\big(\mu(\alpha)\big) \geqslant A(\mu_0) = 0$. Для таких α, применяя (4.6.12), находим

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant e^{-T(\alpha\mu - A(\mu)) + o(T)},$$

что при $\mu = \mu(\alpha)$ дает второе неравенство в (4.6.15). Первое неравенство в (4.6.15) вытекает из (4.6.12) при $\mu = \mu_0$ и того, что $\widehat{A}(\mu_0) = A(\mu_0) = 0$.

(iii). При $a \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ выполняется $A(\mu) \geqslant 0$. Кроме того, $\mu(a) = 0$ и, стало быть, $\mu(\alpha) \geqslant 0$ при $\alpha \geqslant a$. Поэтому, подставляя в (4.6.12) $\mu = \mu(\alpha)$, получим (4.6.16).

(iv). (a). В случае $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $a < 0$, $A(\mu^+) \leqslant 0$ при любом $t \leqslant 1$ имеем в силу теоремы 3.4.1

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \geqslant \mathbf{P}\big(Z(tT) \geqslant x\big) = e^{-tTD\left(\frac{x}{tT}\right) + o(tT)}, \qquad (4.6.23)$$

где при $\gamma = \frac{x}{tT}$

$$tTD\left(\frac{x}{tT}\right) = \frac{x}{\gamma}\, D(\gamma).$$

Для значений $\gamma \geqslant \alpha^+ := A'(\mu^+ - 0)$ в силу утверждения (iii), 3) теоремы 3.5.2 выполняется $\mu(\gamma) = \mu^+$,

$$D(\gamma) = D(\alpha^+) + \mu^+(\gamma - \alpha^+) = -A(\mu^+) + \gamma\mu^+.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать t настолько малым, что $\gamma \geqslant \alpha^+$,

$$\frac{D(\gamma)}{\gamma} \leqslant \mu^+ + \varepsilon.$$

Для таких γ в силу (4.6.23)

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \geqslant e^{-x(\mu^+ + \varepsilon) + o(tT)}. \tag{4.6.24}$$

Так как $tT = x/\gamma$, $o(tT) = o(x)$, $\varepsilon > 0$ произвольно, а левая часть (4.6.24) от ε не зависит, то мы получаем

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \geqslant e^{-x\mu^+ + o(x)}.$$

Это вместе с (4.6.13) доказывает (4.6.17).

(b). В условиях п. (b) доказательство почти очевидно. Если $\alpha > a \geqslant 0$, то согласно теореме 3.4.1

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \geqslant \mathbf{P}\big(Z(T) \geqslant x\big) = e^{-TD(\alpha) + o(T)}.$$

Сравнение с (4.6.16) приводит к (4.6.18).

Если $a < 0$, $\alpha > \alpha_0$, то все происходит аналогично.

Теорема 4.6.1 доказана.

4.6.3 Принцип больших уклонений в первой граничной задаче

Сформулируем теперь основное утверждение этого раздела об асимптотике последовательности (4.6.5). Для определенности функцию $g(t) > at$, $t \in [0, 1]$ в (4.6.2), (4.6.5) мы будем предполагать непрерывной снизу, т.е. при каждом $t \in (0, 1)$

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{u \in (t)_\varepsilon} g(u), \tag{4.6.25}$$

где $(t)_\varepsilon = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Обозначим через α^g значение α, при котором линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ при возрастании α от нулевых значений впервые коснутся кривой $g(t)$. Пусть t^g — наименьшее значение t, при котором

$$\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t^g) = g(t^g)$$

(в силу (4.6.25) такое значение всегда существует).

Теорема 4.6.2. *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\cup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ *и условия допустимой неоднородности* (4.6.4). *Пусть, кроме того,* $D(d_+)=\infty$ $(\mathbf{P}(\zeta/\tau=d_+)=0)$, $t^g>0$. *Тогда*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(z_T\in B_g)=-D(\alpha^g). \tag{4.6.26}$$

Замечание 4.6.1. (a). Если $\min_{t\in[0,1]}g(t)>0$, то второе условие в (4.6.4), по-видимому, излишне, так как функция $f_0(t)\equiv 0$ не принадлежит множеству B_g.

(b). Условие $D(d_+)=\infty$ излишне, если $\alpha^g<d_+$. Описание линий уровня в случае $\alpha^g=d_+$, $D(d_+)<\infty$ см. в теореме 3.7.2 в [12] при замене в ней функции Λ на D. Мы не стали рассматривать случай $D(d_+)<\infty$, поскольку он весьма частный и усложняет доказательство.

Доказательство теоремы 4.6.2. Пусть выполнены условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]\cup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, (4.6.4).

Оценка сверху. Обозначим

$$\eta_g=\min\{t:\,z_T(t)\geqslant g(t)\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(z_T\in B_g)=\mathbf{P}(\eta_g\leqslant 1).$$

Получение оценок сверху для этой вероятности разобьем на три этапа. Положим для краткости $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t)=\mathfrak{l}(t)$.

I. Рассмотрим некоторое значение $t_*\in(0,t^g)$, которое будет выбрано позже, и оценим $\mathbf{P}(\eta_g\leqslant t_*)$. Так как $g(t)>\mathfrak{l}(t)$ при всех $t\in[0,t^g)$ и $\mathfrak{l}(t)$ — гладкая функция, то найдутся $t_*\in(0,t^g)$ и $g_0>0$ такие, что

$$\begin{gathered}\min_{t\in[0,t_*]}g(t)>g_0>\mathfrak{l}(0),\\ \mathbf{P}(\eta_g\leqslant t_*)\leqslant\mathbf{P}\big(\max_{t\leqslant t_*}z_T(t)\geqslant g_0\big)=\mathbf{P}\big(\overline{Z}(t_*T)\geqslant Tg_0\big).\end{gathered} \tag{4.6.27}$$

Пусть сначала $a\geqslant 0$. Тогда при t_* таких, что $g_0/t_*\geqslant a$, в силу утверждения (iii) теоремы 4.6.1 находим

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(t_*T)\geqslant Tg_0\big)\leqslant e^{-Tt_*D\left(\frac{g_0}{t_*}\right)+o(T)}, \tag{4.6.28}$$

где $\gamma=g_0/t_*$ выбором t_* может быть сделано большим.

Так как $\frac{D(\gamma)}{\gamma}\to\mu^+$ при $\gamma\to\infty$, то в случае $\mu^+<\infty$ значение $t_*D\left(\frac{g_0}{t_*}\right)$ выбором t_* может быть сделано сколь угодно близким к

$$g_0\mu^+>\mathfrak{l}(0)\mu^+=D(\alpha^g) \tag{4.6.29}$$

(см. (4.6.8)). Это означает в силу (4.6.28), что

$$\mathbf{P}(\eta_g \leqslant t_*) = o(e^{-TD(\alpha^g)}). \tag{4.6.30}$$

В случае $\mu^+ = \infty$ значение $t_* D\left(\frac{g_0}{t_*}\right)$ выбором t_* может быть сделано сколь угодно большим, что вместе (4.6.28) вновь приводит к (4.6.30).

Пусть теперь

$$a < 0, \qquad A(\mu^+) > 0.$$

В этом случае надо воспользоваться вторым неравенством в (4.6.15) и повторить рассуждения, приведенные выше (при замене в них a на $\alpha_0 = A'(\mu_0)$), которые вновь приводят к (4.6.30).

Рассмотрим, наконец, случай

$$a < 0, \qquad A(\mu^+) \leqslant 0.$$

Здесь в силу (4.6.13), (4.6.27), (4.6.29)

$$\mathbf{P}(\eta_g \leqslant t_*) \leqslant \mathbf{P}\big(\overline{Z}(t_* T) \geqslant \\ \leqslant Tg_0\big) \leqslant e^{-T\mu^+ g_0} < e^{-T\mu^+ \mathfrak{l}(0)} = e^{-TD(\alpha^g)}. \tag{4.6.31}$$

II. Оценим теперь вероятность

$$\mathbf{P}\big(\eta_g \in (t_*, 1]\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]\big) \tag{4.6.32}$$

в случае

$$\mathfrak{l}'(1) \geqslant 0.$$

В этом случае траектория $z_T(t)$ может пересечь границу $\mathfrak{l}(t)$ только вертикальными скачками и, стало быть, $\eta_{\mathfrak{l}}$ есть марковский момент.

Не ограничивая общности будем считать, что

$$p := \mathbf{P}(\tau \geqslant 1) > 0, \tag{4.6.33}$$

и обозначим через $\varkappa$ номер скачка блуждания $\{T_k\}$, на котором значение Z_k впервые превзошло значение $T\mathfrak{l}\left(\frac{T_k}{T}\right)$. Тогда

$$\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]\big) = \frac{1}{p}\,\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1], \tau_{\varkappa+1} \geqslant 1\big).$$

Но событие $\big\{\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1],\ \tau_{\varkappa+1} \geqslant 1\big\}$ влечет за собой объединение событий

$$\bigcup_{t_* T \leqslant k \leqslant T} \left\{ z_T\left(\frac{k}{T}\right) \geqslant \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T} \right\}, \\ \text{где} \quad b_* = \max_{t \in (t_*, 1)} \mathfrak{l}'(t) = \mathfrak{l}'(t_*) > 0. \tag{4.6.34}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]\big) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{t_* T \leqslant k \leqslant T} \mathbf{P}\left(z_T\left(\frac{k}{T}\right) \geqslant \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T}\right). \qquad (4.6.35)$$

Но при любом $k \geqslant t_* T$ и $t = \frac{k}{T}$ по определению линии уровня получаем (см. теорему 3.4.1)

$$\mathbf{P}\big(z_T(t) > \mathfrak{l}(t) - b_*/T\big) = e^{-tTD\left(\frac{\mathfrak{l}(t)}{t}\right) + o(T)} = e^{-TD(\alpha^g) + o(T)}.$$

Отсюда и из (4.6.35) следует, что

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\big(\eta_g \in (t_*, 1]\big) \leqslant -D(\alpha^g). \qquad (4.6.36)$$

III. Оценим далее вероятность (4.6.32) при условии

$$\mathfrak{l}'(1) < 0.$$

Так как $\mathfrak{l}'(t)$ монотонно и непрерывно убывает, то при $\mathfrak{l}'(t_*) > 0$ найдется точка $t^* < 1$, для которой $\mathfrak{l}'(t^*) = 0$. Если $\mathfrak{l}'(t_*) \leqslant 0$, то мы полагаем $t^* = t_*$. Если интервал (t_*, t^*) не пуст, то $\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, t^*]\big)$ оценивается точно так же, как в разделе II. Остается оценить

$$\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]\big).$$

На участке $(t^*, 1]$ функция $\mathfrak{l}(t)$ убывает, и ее пересечение траекторией $z_T(t)$ возможно как вертикальным скачком (событие A), так и горизонтальным (событие B). Вероятность $\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1];\, A\big)$ вновь оценивается так же, как в разделе II (при замене числа b_* на 0).

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1];\, B\big)$. Пусть $\mathfrak{l}^{(-1)}(u)$ есть функция, обратная к монотонной, непрерывной на интервале $(t^*, 1)$ функции $\mathfrak{l}(t)$, и $\tau_\varkappa$ есть скачок, пересекающий убывающую границу $T\mathfrak{l}\left(\frac{t}{T}\right)$ при $t \in (t^*, 1]$. Если $\mathfrak{l}(1) < 0$, то возможно значение $\varkappa = 1$. В этом случае

$$\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1];\, B\big) = \mathbf{P}\big(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{(-1)}(0)\big) + \mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1];\, B, \varkappa > 1\big),$$

где

$$\ln \mathbf{P}\big(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{-1}(0)\big) \leqslant -T\lambda_+^{(\tau_1)} \mathfrak{l}^{(-1)}(0) + o(T),$$
$$\lambda_+^{(\tau_1)} = \sup\{\lambda :\, \mathbf{E}^{\lambda \tau_1} < \infty\},$$

и по второму условию (4.6.4) при $t = \mathfrak{l}^{(-1)}(0)$ выполняется

$$\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant D(0), \qquad \lambda_+^{(\tau_1)} \mathfrak{l}^{(-1)}(0) \geqslant D(0)\mathfrak{l}^{-1}(0) = tD\left(\frac{\mathfrak{l}(t)}{t}\right) = D(\alpha^g).$$

Поэтому

$$\ln \mathbf{P}\big(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{(-1)}(0)\big) \leqslant -TD(\alpha^g) + o(T).$$

Остается рассмотреть

$$\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1];\ B, \varkappa > 1\big).$$

Если $(u, x) = \big(T_{\varkappa-1}, Z(T_{\varkappa-1})\big)$, $x < T\mathfrak{l}\left(\frac{t}{T}\right)$, $t \leqslant T$, — точка, откуда стартует горизонтальный скачок длиной $\tau_\varkappa$, пересекающий убывающую границу $T\mathfrak{l}(t/T)$, $t \leqslant T$, то с необходимостью $\tau_\varkappa \geqslant T\mathfrak{l}^{(-1)}(x/T) - u$ и распределение скачка $\tau_\varkappa$ есть условное распределение

$$\mathbf{P}\big(\tau > v \,|\, \tau > T\mathfrak{l}^{(-1)}(x/T) - u\big)$$

(вся предистория процесса $Z(t)$ до момента $T_{\varkappa-1}$ на распределение $\tau_\varkappa$, очевидно, не влияет). Но при любом s

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant v \,|\, \tau \geqslant s) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \textit{при} \quad v \leqslant s, \\ \dfrac{\mathbf{P}(\tau \geqslant v)}{\mathbf{P}(\tau \geqslant s)} & \textit{при} \quad v < s \end{matrix} \right\} \geqslant \mathbf{P}(\tau \geqslant v),$$

так что $\tau_\varkappa \underset{p}{\geqslant} \tau$. Поэтому, считая опять, не ограничивая общности, что выполнено условие (4.6.33), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \varkappa > 1\big) = \frac{\mathbf{P}(\eta_l \in (t^*, 1], B, \tau_\varkappa \geqslant 1, \varkappa > 1)}{\mathbf{P}(\tau_\varkappa \geqslant 1 \mid \eta_l \in (t^*, 1], B, \varkappa > 1)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{p}\mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \tau_\varkappa \geqslant 1, \varkappa > 1\big). \end{aligned} \tag{4.6.37}$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны доводам раздела II доказательства. Событие под знаком вероятности в правой части (4.6.37) влечет за собой объединение событий

$$\bigcup_{Tt^* \leqslant k \leqslant T} \left\{ z_T\left(\frac{k}{T}\right) \geqslant \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b^*}{T}, \varkappa > 1 \right\},$$

где $b^* = -\mathfrak{l}'(1) > 0$. Поэтому по определению линий уровня и по теореме 3.4.1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \varkappa > 1\big) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{Tt^* \leqslant k \leqslant T} \mathbf{P}\left(z_T\left(\frac{k}{T}\right) \geqslant \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T} \right) \leqslant \\ \leqslant \frac{(1-t^*)T}{p}\, e^{-TD(\alpha^g) + o(T)} = e^{-TD(\alpha^g) + o(T)}. \end{aligned} \tag{4.6.38}$$

Сопоставляя полученные результаты, мы получаем искомую оценку сверху
$$\mathbf{P}(\eta_g \leqslant 1) \leqslant \mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \leqslant 1) \leqslant e^{-TD(\alpha^g)+o(T)}. \tag{4.6.39}$$

Оценка снизу почти очевидна. Так как
$$\bigl\{z_T(t_g) \geqslant g(t_g)\bigr\} \subset \{\eta_g \leqslant 1\},$$
то по теореме 3.4.1
$$\mathbf{P}(\eta_g \leqslant 1) \geqslant \mathbf{P}\bigl(z_T(t_g) \geqslant g(t_g)\bigr) = e^{-Tt_gD\left(\frac{g(t_g)}{t_g}\right)+o(T)} = \\ = e^{-Tt_gD\left(\frac{\mathfrak{l}(t_g)}{t_g}\right)+o(T)} = e^{-TD(\alpha^g)+o(T)}.$$

Соотношение (4.6.26) доказано.

Теорема 4.6.2 доказана.

§ 4.7 Принцип больших уклонений во второй граничной задаче

4.7.1 Наиболее вероятные (кратчайшие) траектории

Рассмотрим сначала в дополнение к разделу 4.3.2 более детально вопрос о наиболее вероятных траекториях.

Наиболее вероятными (*кратчайшими*) *траекториями* нормированного ОПВ $z_T(t)$, соединяющими точку $(0,0)$ с малой окрестностью $\bigl(1,(\alpha)_\varepsilon\bigr)$ точки $(1,\alpha)$, мы называем такие траектории (функции) $f(t)\in\mathbb{C}_a$, $f(0)=0$, $f(1)=\alpha$, для которых
$$-I_P(f) := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\bigl(z_T(\cdot)\in(f)_\varepsilon\bigr) = -\widehat{D}(\alpha) \\ \Bigl(= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\bigl(z_T(1)\in(\alpha)_\varepsilon\bigr)\Bigr), \tag{4.7.1}$$
где $\varepsilon=\varepsilon_T$ сходится к 0 достаточно медленно при $T\to\infty$.

В этом разделе мы докажем следующее утверждение. Обозначим через $f_\alpha(t)$ линейную функцию
$$f_\alpha(t) := \alpha t, \qquad t\in[0,1],$$
через $\mathcal{R}$ — множество значений α, для которых $\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha)$ (так что $\mathcal{R}=\mathbb{R}\setminus(\beta_-,\beta_+)$; см. лемму 3.5.3), и через $\mathcal{L}$ какой-нибудь интервал (если он существует), на котором функция $D(\alpha)$ линейна.

Теорема 4.7.1. *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\bigcup[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ *и условия допустимой неоднородности* (4.6.4). *Тогда*

(i). *Если* $\alpha \in (\mathcal{R})$ *и* $\alpha \notin \mathcal{L}$ *ни при каком интервале линейности* $\mathcal{L}$, *то прямолинейная траектория* $f_\alpha(t)$ *является единственной кратчайшей траекторией, соединяющей точки* $(0,0)$ *и* $(1,\alpha)$.

(ii). *Если* $\alpha \in (\mathcal{R})\bigcap\mathcal{L}$ *при каком-нибудь* $\mathcal{L}$, *то наряду с* f_α *существует континуальное множество кратчайших путей.*

(iii). *Если* $\alpha \notin \mathcal{R}$, $t_\alpha \in (0,1)$, *то* $\alpha/v \in \mathcal{R}$ *при любом* $v \leqslant t_\alpha$. *Если, кроме того,* $\alpha/t_\alpha \notin \mathcal{L}$, *то существует единственная кратчайшая траектория* g_{t_α} (построенная ниже; см. (4.7.4)), *отличная от* f_α.

(iv). *Если* $\alpha \notin \mathcal{R}$, $t_\alpha \in (0,1)$, $\frac{\alpha}{t_\alpha} \in \mathcal{L}$, *то наряду с* g_{t_α} *существует континуальное множество кратчайших путей.*

(v). *Если* $\alpha = 0 \notin \mathcal{L}$, *то траектория* $f_0(t)$ *является единственной кратчайшей траекторией.*

Замечание 4.7.1. Если $\lambda_+ < D(0)$, $\alpha > 0$, $\mathbf{P}(\zeta > 0) > 0$, то $t_\alpha \in (0,1)$. Это следует из того, что в этом случае $\beta_+ \in (0,\infty)$, $t_\alpha = \frac{\alpha}{\beta_+}$ (см. (3.5.54)). Аналогичное утверждение справедливо в случае $\alpha < 0$, $\mathbf{P}(\zeta < 0) < 0$. Таким образом, для разнозначных ζ и $\alpha \neq 0$ всегда $t_\alpha \in (0,1)$.

Из разделов (iii), (iv) теоремы следует, что (в отличие от случайных блужданий) для ОПВ прямолинейная траектория может не быть кратчайшим путем.

Доказательство теоремы 4.7.1. Пусть выполнены условия (4.6.4). Тогда из теорем 4.2.1, 4.3.1 следует, что

$$I_P(f) = I(f) \quad \textit{при выполнении} \quad [\boldsymbol{\lambda}_+], \tag{4.7.2}$$

$$I_P(f) = \widehat{I}(f) \quad \textit{при выполнении} \quad [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+] \tag{4.7.3}$$

(см. (4.7.1), (4.2.3), (4.3.5)). Рассмотрим сначала вторую возможность (4.7.3).

(i). Если $\alpha \in (\mathcal{R})$, $\alpha \notin \mathcal{L}$, то множество значений $g'(t)$ для $g \in \mathbb{C}_a$, $g \neq f_\alpha$, $g(0) = 0$, $g(1) = \alpha$, будет задевать область строгой выпуклости функции D и при $t^{1]} = 1$ (см. (4.3.3))

$$\widehat{I}(g) = \int\limits_0^1 D\big(g'(t)\big)dt > D(\alpha) = \widehat{I}(f_\alpha).$$

Если $t^{1]} \in (0,1)$, то в силу того, что $\alpha \in (\mathcal{R})$, имеем $t_\alpha = 1$ (см. доказательство п. (i) теоремы 3.5.3),

$$\widehat{I}(g) = \int_0^{t^{1]}} D\big(g'(t)\big)dt + (1-t^{1]})\lambda_+ \geqslant$$

$$\geqslant t^{1]} D\left(\frac{\alpha}{t^{1]}}\right) + (1-t^{1]})\lambda_+ > \widehat{D}(\alpha) = D(\alpha).$$

Так как $\widehat{I}(f_\alpha) = D(\alpha)$ ($\alpha \neq 0$, поскольку $\alpha \in (\mathcal{R})$), то из полученных неравенств и из (4.7.1) следует первое утверждение теоремы.

(ii). Если $\alpha \in (\mathcal{R})\bigcap\mathcal{L}$, то найдутся точки $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\alpha_1 \neq 0$, из $(\mathcal{R})\bigcap\mathcal{L}$ такие, что при $p := \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ для функции

$$g(t) = \begin{cases} \alpha_2 t & \text{при} \quad t \leqslant p, \\ \alpha - \alpha_1(1-t) & \text{при} \quad t \in [p,1] \end{cases}$$

будем иметь

$$\widehat{I}(g) = \int_0^1 D\big(g'(t)\big)dt = pD(\alpha_2) + (1-p)D(\alpha_1) = D(\alpha) = \widehat{I}(f_\alpha).$$

Отсюда следует утверждение (ii).

(iii). Докажем сначала первое утверждение раздела (iii).

Если $\lambda_+ < D(0)$, $\alpha \notin \mathcal{R}$, $t_\alpha \in (0,1)$, то

$$\widehat{D}(\alpha) = \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) - (1-t_\alpha)\lambda_+ < D(\alpha).$$

Точка t_α характеризуется тем, что

$$\mathbf{D}'_{(1)}(t_\alpha, \alpha) = \lambda_+, \qquad \mathbf{D}'_{(1)}(t, \alpha) \lesseqgtr \lambda_+ \quad \textit{при} \quad t \lesseqgtr t_\alpha$$

и в соответствии с (3.5.54) (см. теорему 3.5.3)

$$\frac{\alpha}{t_\alpha} = \beta_\pm \lesseqgtr 0 \quad \text{при} \quad \alpha \lesseqgtr 0.$$

Поэтому при $v \leqslant t_\alpha$ выполняется

$$\frac{\alpha}{v} \in \mathcal{R} = \mathbb{R} \setminus (\beta_-, \beta_+).$$

Первое утверждение раздела (iii) доказано.

Далее, рассмотрим траекторию

$$g(t) = g_v(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha t}{v} & \text{при} \quad t \leqslant v, \\ \alpha & \text{при} \quad t \in [v, 1]. \end{cases} \tag{4.7.4}$$

Для нее $t^{1]} = v$,

$$\widehat{I}(g_v) = vD\left(\frac{\alpha}{v}\right) + (1-v)\lambda_+ = \mathbf{D}(v, \alpha) + (1-v)\lambda_+.$$

Поэтому при $v = t_\alpha$

$$\widehat{I}(g_{t_\alpha}) = \mathbf{D}(t_\alpha, \alpha) + (1-t_\alpha)\lambda_+ = \widehat{D}(\alpha) < D(\alpha) = \widehat{I}(f_\alpha).$$

При $v \neq t_\alpha$

$$\widehat{I}(g_v) > \widehat{D}(\alpha).$$

Таким образом, кратчайший путь имеет на $[t_\alpha, 1]$ прямолинейный горизонтальный участок на уровне α.

Если $\frac{\alpha}{t_\alpha} \notin \mathcal{L}$, то так же как и в разделе (i) доказательства убеждаемся, что кратчайший путь, соединяющий точки $(0,0)$ и (t_α, α), прямолинеен и единственен (напомним, что $\frac{\alpha}{t_\alpha} \in \mathcal{R}$).

(iv). Если $\frac{\alpha}{t_\alpha} \in \mathcal{L}$, то так же как и в разделе (ii) доказательства убеждаемся, что кратчайший путь $g_{t_\alpha}(t)$ не единственен.

(v). Если $\alpha = 0$, то в случае $\lambda_+ < D(0)$ выполняется $t^{1]} = 0$ и $I_P(f_0) = \lambda_+ = \widehat{D}(0)$. В случае $\lambda_+ \geqslant D(0)$

$$I_P(f_0) = D(0) = \widehat{D}(0).$$

Таким образом, f_0 является кратчайшей траекторией. Так как $0 \notin \mathcal{L}$, то для любой функции $f \neq f_0$ будем иметь $I_P(f) > I_P(f_0)$ и кратчайшая траектория f_0 единственна.

Доказательство теоремы в случае (4.7.2) отличается от приведенных выше рассуждений лишь упрощениями. Например, $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ при $\lambda_+ \geqslant D(0)$ и возможность $\alpha \notin \mathcal{R}$ исключена ($\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при всех α).

Теорема доказана.

4.7.2 Вторая граничная задача

В этом разделе мы найдем асимптотику

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_- g_+})$$

при $T \to \infty$, где множество $B_{g_-g_+}$ определено в (4.6.3). Верхнюю границу $g_+(t)$ мы будем считать непрерывной снизу, а нижнюю $g_-(t)$ — непрерывной сверху. Условия, накладываемые на распределение ОПВ $Z(t)$ в этом разделе, будут более ограничительными, чем в § 4.6, и будут влечь за собой выполнение $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.

Рассмотрим множество $B_{g_-g_+}$ и найдем в нем наиболее вероятную траекторию, т.е. функцию $f_{g_-g_+}(t)$ такую, что $\inf\limits_{f\in B_{g_-g_+}} I(f)$ (см. (4.7.1), (4.7.2)) достигается при $f = f_{g_-g_+}$. Эту функцию можно построить в два этапа, исходя из следующих свойств функции $D(\alpha)$, вытекающих из ее выпуклости:

(a) Для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$, проходящей через точки (t_1, α_1), (t_2, α_2), $t_2 > t_1$, выполняется

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} D\big(f'(t)\big)\,dt \geqslant (t_2 - t_1)\,D\bigg(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}\bigg), \tag{4.7.5}$$

т. е. при выполнении условий теоремы 4.1.2 из всех траекторий, соединяющих точки (t_1, α_1), (t_2, α_2), наиболее вероятной («кратчайшей») является прямолинейная траектория.

(b) Из всех траекторий, соединяющих точки (t_1, α_1), (t_2, α), где α варьируется, наиболее вероятной является прямая, соединяющая точки (t_1, α_1), $(t_2, \alpha_1 + a(t_2 - t_1))$.

Первый этап построения траектории $f_{g_-g_+}$ состоит в следующем. Фиксируем некоторую точку $\alpha \in \big[g_-(1), g_+(1)\big]$ и рассмотрим «натянутую нить» $g_\alpha(t)$, соединяющую точки $(0,0)$ и $(1,\alpha)$ и не пересекающую границы $g_\pm(t)$.

Второй этап состоит в минимизации по α значения $I(g_\alpha)$ (описывающем асимптотику $-\ln \mathbf{P}(z_T \in (g_\alpha)_\varepsilon)$ при $T \to \infty$, $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$), т.е. в отыскании значения α_1, для которого $I(g_{\alpha_1}) = \min_\alpha I(g_\alpha)$, так что $f_{g_-g_+} = g_{\alpha_1}$. Ясно, что если $\alpha_1 \in \big(g_-(1),\ g_+(1)\big)$, то $g'_{\alpha_1}(1-0) = a$,

$$I(g_{\alpha_1}) = I(B_{g_-g_+}) = \int\limits_0^{t_1} D\big(g'_{\alpha_1}(t)\big)\,dt,$$

где $t_1 = \max\big\{t:\ g_{\alpha_1}(t) = g_-(t)\ \textit{или}\ g_{\alpha_1}(t) = g_+(t)\big\} < 1$.

Ясно, что любое отклонение от функции $f_{g_-g_+}$, лежащее в области $B_{g_-g_+}$ (ее искривление в этой области), приведет к увеличению значений функционала $I(f)$ по сравнению с величиной $I(f_{g_-g_+})$.

Теорема 4.7.2. *Пусть $B_{g_-g_+}$ — множество, определенное в* (4.6.3), *функции $g_\pm \in \mathbb{D}$ имеют не более чем конечное число точек разрыва, g_- — непрерывна сверху, g_+ — непрерывна снизу.*

Пусть, далее, выполнены условия $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1]$, $\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant D(0)$ и хотя бы одно из условий (условия теоремы 4.1.2)

1) $\xi_\infty \Subset [\mathbf{C}]$, $\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_\infty]$;

2) *условия* (4.1.10), (4.1.11) (условия леммы 4.1.2)*;*

3) τ *и* ζ *независимы,* $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$

4) $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$.

Тогда существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) = -I(B_{g_-g_+}) = -I(f_{g_-g_+}). \tag{4.7.6}$$

Если функция $f(t) \equiv 0$ не принадлежит $B_{g_-g_+}$, то условие $\lambda_+^{(\tau_1)} \geqslant D(0)$, по-видимому, излишне.

Как уже отмечалось выше, каждое из условий 1)–4) теоремы 4.7.2 влечет за собой выполнение $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

(i). Пусть сначала функции $g_\pm$ непрерывны.

Оценка сверху. При целом K рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[0,1]$ на K интервалов (t_{j-1}, t_j), $t_j = j/K$, $j = 1, \ldots, K$. Пусть

$$B_K := \Big\{ f \in \mathbb{D} :\ f(t_j) \in \big[g_-(t_j), g_+(t_j)\big] \quad \textit{при всех} \quad j = 1, \ldots, K \Big\}.$$

По теореме 4.1.2

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_K) = -I(B_K L_K). \tag{4.7.7}$$

где L_K — множество непрерывных ломаных с узлами в точках t_j, $j = 0, \ldots, K$.

Так как $B_{g_-g_+} \subset B_K$, то

$$\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \leqslant \mathbf{P}(z_T \in B_K) \tag{4.7.8}$$

при любом K и в силу (4.7.7)

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \leqslant -I(B_K L_K). \tag{4.7.9}$$

Нижняя граница $g_-^{(K)}$ множества $B_K L_K$ есть непрерывная ломаная, соединяющая точки $\big(t_j,\, g_-(t_j)\big)$, $j = 0, \ldots, K$. Ясно, что $g_-^{(K)} \to g_-$ в равномерной метрике при $K \to \infty$. Аналогичное соотношение справедливо для верхней границы: $g_+^{(K)} \to g_+$ при $K \to \infty$. Поэтому, если обозначить через f^K наиболее вероятную траекторию в множестве $B_K L_K$, то $f^K \to f_{g_- g_+}$ в равномерной метрике при $K \to \infty$. Кроме того, натянутые нити f^K, $f_{g_- g_+}$ суть функции из $\mathbb{C}_a$ и их производные сходятся. Поэтому в силу свойств функционала I

$$I(B_K L_K) = I(f^K) \to I(f_{g_- g_+}) = I(B_{g_- g_+}) \tag{4.7.10}$$

при $K \to \infty$ (см. также [12, § 4.2]). Из (4.7.10), (4.7.8) получаем

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_- g_+}) \leqslant -I(B_{g_- g_+}). \tag{4.7.11}$$

Оценка снизу. Пусть $\delta > 0$ — малое число. Рассмотрим функции

$$g_-^\delta(t) := g_-(t) + \delta, \qquad g_+^\delta(t) := g_+(t) - \delta$$

и замкнутое множество

$$B_{g_- g_+}^\delta \subset B_{g_- g_+}$$

функций из $\mathbb{D}$, расположенных между границами $g_\pm^\delta$ (касание границ допускается). Пусть f_K^δ — наиболее вероятная траектория в $B_{g_- g_+}^\delta L_K$. Тогда $(f_K^\delta)_\delta \subset B_{g_- g_+}$. Поэтому

$$\begin{gathered} \{z_T \in (f_K^\delta)_\delta\} \subset \{z_T \in B_{g_- g_+}\}, \\ \mathbf{P}(z_T \in B_{g_- g_+}) \geqslant \mathbf{P}\big(z_T \in (f_K^\delta)_\delta\big) \geqslant \mathbf{P}\big(z_T \in (f_K^\delta)_\varepsilon\big), \end{gathered} \tag{4.7.12}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$. Если $\varepsilon_T \to 0$ достаточно медленно, то по теореме 4.1.2 в силу (4.7.12)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_- g_+}) \geqslant \\ \geqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbf{P}\big(z_T \in (f_K^\delta)_\varepsilon\big) = -I(f_K^\delta). \end{aligned} \tag{4.7.13}$$

Как и прежде устанавливаем, что $f_K^\delta \to f_{g_- g_+}$ в равномерной метрике при $\delta \to 0$, $K \to \infty$ и, стало быть,

$$I(f_K^\delta) \to I(f_{g_- g_+}) = I(B_{g_- g_+}).$$

Так как δ и K произвольны и левая часть (4.7.13) от δ и K не зависит, то мы получаем

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_- g_+}) \geqslant -I(B_{g_- g_+}).$$

Это соотношение вместе с (4.7.11) доказывает (4.7.6).

(ii). Пусть теперь функция g_+ имеет единственный конечный разрыв в точке $u \in (0,1)$ и для определенности

$$g_+(u) = g_+(u-0) < g_+(u+0) < \infty.$$

Рассмотрим новые верхние границы

$$g_+^{-\delta}(t) := \begin{cases} g_+(t) \quad \text{при} \quad t \notin [u-\delta, u], \\ g_+(u-\delta) + (t-u+\delta)\dfrac{(g_+(u+0) - g_+(u-\delta))}{\delta} \\ \qquad\qquad \text{при} \quad t \in [u-\delta, u]; \end{cases}$$

и

$$g_+^{+\delta}(t) := \begin{cases} g_+(t) \quad \text{при} \quad t \notin [u, u+\delta], \\ g_+(u) + (t-u)\dfrac{(g_+(u+\delta) - g_+(u))}{\delta} \quad \text{при} \quad t \in [u, u+\delta]. \end{cases}$$

Ясно, что $g_+^{-\delta}(t) \geqslant g_+(t) \geqslant g_+^{+\delta}(t)$ при всех t и что новые границы непрерывны. Поэтому в силу раздела (i)

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g}) = -I(f_{g_-g}) \text{ при } g = g_+^{-\delta}; \\ &\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g}) = -I(f_{g_-g}) \text{ при } g = g_+^{+\delta}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$f_{g_-g} \to f_{g_-g_+} \quad \text{при } g = g_+^{\pm\delta} \quad \text{и } \delta \to 0$$

в равномерной метрике, так что

$$I(f_{g_-g}) \to I(f_{g_-g_+}).$$

Отсюда вытекает (4.7.6).

(iii). Рассмотрим далее случай, когда разрыв в точке u бесконечен: $g_+(u+0) = \infty$. При любом (большом) N положим

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \begin{cases} \inf\big\{\Delta > 0 : \, g_+(u+\Delta) < N\big\}, & \textit{если } g_+(1) < \infty, \\ 1-u, \quad \textit{если} \quad g_+(v) = \infty & \textit{при всех } v \in (u,1]; \end{cases} \\ \overline{z}(N) &= \max_{0\leqslant v\leqslant \Delta_N} z_T(u+v). \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) = \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+},\, \overline{z}(N) \leqslant N) + \\ + \mathbf{P}\big(z_T \in B_{g_-g_+},\, \overline{z}(N) > N\big). \qquad (4.7.14)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (4.7.14). Очевидно, что оно не превосходит

$$\mathbf{P}(\overline{z}(N) \geqslant N) \leqslant \mathbf{P}\big(\overline{Z}_0(\Delta_N T) \geqslant (N - g_+(u))T\big),$$

где Z_0 — однородный ОПВ. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = 0$. Тогда согласно теореме 4.6.1 при достаточно больших N и $T \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}\big(\overline{z}(N) \geqslant N\big) \leqslant -\Delta_N T D\bigg(\frac{N}{2\Delta_N}\bigg) + o(T), \qquad (4.7.15)$$

где по теореме 3.5.2 (см. (3.5.21)) при $\mu^+ < \infty$ и достаточно большом N

$$\Delta_N D\bigg(\frac{N}{2\Delta_N}\bigg) \geqslant \frac{\mu^+ N}{3}.$$

Стало быть, левая часть в (4.7.15) выбором N может быть сделана меньше, чем $-TI(g_{g_-g_+})$. Это тем более так при $\mu^+ = \infty$.

Первое слагаемое в правой части (4.7.14) есть снова вероятность вида $\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+^N})$, но при новой верхней функции

$$g_+^N(t) = \min\big(g_+(t), N\big),$$

которая имеет ограниченный разрыв в точке u. Ясно, что при достаточно большом N функции $f_{g_-g_+^N}$ и $f_{g_-g_+}$ совпадают. Поэтому в силу раздела (ii) и (4.7.14), где, как было показано, второе слагаемое в правой части есть $o\Big(\exp\big\{-TD(f_{g_-g_+})\big\}\Big)$, мы получаем (4.7.6).

(iv). Аналогично рассматриваются случаи, когда граница g_+ имеет несколько скачков и когда скачки имеет нижняя граница g_-.

Теорема 4.7.2 доказана.

Если выполнены условия $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta_1 \in [\mathbf{C}_\infty]$, то утверждение (4.7.6) можно получить также как следствие теоремы 4.5.1 (см. (4.5.1), (4.5.2)).

§ 4.8 Принципы умеренно больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления

4.8.1 Формулировка основных результатов

Рассмотрим однородные «асимптотически центрированные» процессы

$$Y(t) - at = Z_{\eta(t)} - aT_{\eta(t)} + a\chi(t),$$
$$Z(t) - at = Z_{\nu(t)} - aT_{\nu(t)} - a\gamma(t).$$

В терминах случайных величин

$$\xi = \zeta - a\tau, \qquad \xi_i = \zeta_i - a\tau_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = Z_n - aT_n$$

эти процессы можно записать в виде

$$Y(t) - at = S_{\eta(t)} + a\chi(t), \qquad Z(t) - at = S_{\nu(t)} - a\gamma(t). \tag{4.8.1}$$

Пусть, как и прежде,

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{E}\xi^2, \qquad \sigma^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{a_\tau}.$$

В этом разделе, как и в § 1.6, изучаются предельные законы для нормированных процессов

$$y_T(u) := \frac{Y(uT) - auT}{\sigma\sqrt{T}}, \quad z_T(u) := \frac{Z(uT) - auT}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad u \in [0,1] \text{ при } \quad T \to \infty, \tag{4.8.2}$$

но теперь в области умеренно больших уклонений. Будет установлен принцип умеренно больших уклонений (ПУБУ) при выполнении одного из следующих двух моментных условий:

либо условие $[\mathbf{C}]$,

либо более широкое моментное условие $[\mathbf{C}^V]$, описывающее распределения с более «толстыми хвостами». Для определения условия $[\mathbf{C}^V]$ введем в рассмотрение класс $\mathcal{L}_\beta$, $\beta \in (0,1)$, функций $V(t)$, которые обладают следующими свойствами:

1. $V(t) = t^\beta l(t)$ *есть правильно меняющаяся функция* ($l(t)$ *есть медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при* $t \to \infty$);

2. $V(t)$ *удовлетворяет при* $t \to \infty$, $v = o(t)$ *соотношению*

$$V(t+v) - V(t) = \beta v \frac{V(t)}{t}\bigl(1 + o(1)\bigr) + o(1).$$

Названное выше более широкое, чем [**C**], условие имеет вид:

$$[\mathbf{C}^V] \qquad \mathbf{P}(\tau \geqslant t) \leqslant e^{-V(t)}, \qquad \mathbf{P}\bigl(|\xi| \geqslant t\bigr) \leqslant e^{-V(t)} \quad \textit{при} \quad t > 0,$$

где $V(t) \in \mathcal{L}_\beta$, $\beta \in (0,1)$.

Класс распределений $\mathcal{S}e$, для которых $\mathbf{P}(\xi \geqslant t) = e^{-V(t)}$, $V \in \mathcal{L}_\beta$, называется *семиэкспоненциальным* (см., например, [26], гл.5). Для этого класса детально изучены вероятности больших уклонений сумм S_n (см., например, [26, гл. 5], [12, гл. 5] и [30]). Существует ряд других классов распределений, близких к $\mathcal{S}e$, для которых также изучались вероятности больших уклонений S_n (см., например, [73], [71], [77], [68], [94], [58], [66]).

Если условие [**C**] выполнено, то мы будем рассматривать уклонения $x = x(T)$ для процессов (4.8.2), определяемые соотношениями

$$x \to \infty, \qquad x = o\bigl(\sqrt{T}\bigr) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.8.3}$$

Если условие [**C**] не выполнено, но выполнено условие $[\mathbf{C}^V]$ то будем рассматривать более узкий класс умеренно больших уклонений $x = x(T)$, обладающих свойством

$$x \to \infty, \qquad x = o\bigl(\widehat{x}(T)\bigr) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{4.8.4}$$

где правильно меняющаяся последовательность $\widehat{x}(T)$ растет при $T \to \infty$ медленнее, чем $\sqrt{T}$. Она задается следующим образом. Для функции $V \in \mathcal{L}_\beta$ из условия $[\mathbf{C}^V]$ рассмотрим функцию

$$v(t) := V(t)t^{-2} = t^{\beta-2} l(t) \tag{4.8.5}$$

и определим $\widehat{x}(T)$ как значение

$$\widehat{x}(T) = v^{(-1)}(1/T)T^{-1/2}, \tag{4.8.6}$$

где $v^{(-1)}(u)$ есть обобщенная обратная к $v(t)$ функция

$$v^{(-1)}(u) := \sup\bigl\{t \geqslant 0 : \ v(t) \geqslant u\bigr\}. \tag{4.8.7}$$

Известно (см., например, [26], теорема 1.1.3), что функция $v^{(-1)}(1/T)$ имеет вид

$$v^{(-1)}\left(\frac{1}{T}\right) = T^{1/(2-\beta)} l_1(T) = o(T),$$

так что

$$\widehat{x}(T) = T^{\beta/2(2-\beta)} l_1(T),$$

где $l_1(T)$ — м.м.ф. при $T \to \infty$. В частном случае, когда м.м.ф. $l(t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$l(tl^{1/(2-\beta)}(t)) \sim l(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

м.м.ф. $l_1(t)$ имеет вид

$$l_1(t) \sim l^{1/(2-\beta)}(t^{1/(2-\beta)}) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

так что в этом случае

$$\widehat{x}(T) = T^{\frac{\beta}{2(2-\beta)}}\, l^{\frac{1}{2-\beta}}(T^{\frac{1}{2-\beta}}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.8.8}$$

Итак, мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

выполнено либо условие $[\mathbf{C}]$, *либо условие* $[\mathbf{C}^V]$, *а уклонения* $x = x(T)$ *таковы, что при* $T \to \infty$

$$x \to \infty, \quad x(T) = \begin{cases} o\big(\sqrt{T}\big), & \textit{при выполнении условия } [\mathbf{C}]; \\ o\big(\widehat{x}(T)\big), & \textit{при выполнении условия } [\mathbf{C}^V]. \end{cases} \tag{4.8.9}$$

Рассмотрим измеримое пространство $\big(\mathbb{D}, \mathfrak{B}(\mathbb{D}, \rho)\big)$ функций без разрывов второго рода с равномерной метрикой ρ и борелевской σ-алгеброй.

Положим

$$I_0(f) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt, & \text{если} \quad f(0) = 0, \quad f \in \mathbb{C}_a; \\ \infty, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}$ есть пространство абсолютно непрерывных функций. Функционал $I_0(f)$ обладает следующими свойствами: он является *выпуклым*, *полунепрерывным снизу* и *для любого* $v \geqslant 0$ *множества* $\big\{f: \ I(f) \leqslant v\big\}$ *компактны в* $(\mathbb{D}, \rho)$ (подробнее см., например, раздел 4.2 в [12]). Пусть $(f)_\varepsilon$ есть ε-окрестность $f \in \mathbb{D}$ в равномерной метрике.

Теорема 4.8.1 (локальный ПУБУ для траекторий y_T, z_T). *Пусть τ и ξ удовлетворяют условию* $[\mathbf{C}]$ *или условию* $[\mathbf{C}^V]$. *Тогда в зоне уклонений* (4.8.9) *для любой функции $f \in \mathbb{D}$, $f(0) = 0$, существует последовательность $\varepsilon = \varepsilon_T$, сходящаяся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$, такая, что*

$$\lim_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}\big(y_T \in x(f)_\varepsilon\big) = -I_0(f). \tag{4.8.10}$$

Такое же утверждение справедливо для процессов z_T.

Обратимся теперь к «интегральному» ПУБУ для y_T, z_T. Для множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}, \rho)$ через $[B]$, (B) обозначим, соответственно, замыкание и внутренность этого множества относительно равномерной метрики. Положим

$$I_0(B) := \inf_{f\in B} I_0(f).$$

Теорема 4.8.2 (ПУБУ для траекторий y_T, z_T). *Пусть τ и ξ удовлетворяют условию* $[\mathbf{C}]$ *или условию* $[\mathbf{C}^V]$. *Тогда в зоне уклонений* (4.8.9) *для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}, \rho)$*

$$\varliminf_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}(y_T \in xB) \geqslant -I_0\big((B)\big). \tag{4.8.11}$$

$$\varlimsup_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant -I_0\big([B]\big). \tag{4.8.12}$$

Такие же утверждения справедливы для процессов z_T.

Нетрудно видеть, что из теоремы 4.8.2 вытекает локальный ПУБУ в фазовом пространстве для процессов y_T, z_T.

Следствие 4.8.1. *Пусть τ и ξ удовлетворяют условию* $[\mathbf{C}]$ *или* $[\mathbf{C}^V]$. *Тогда при любом $r \in \mathbb{R}$ существует $\varepsilon = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$ такое, что в зоне уклонений* (4.8.9)

$$\lim_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}\big(y_T(1) \in x(r)_\varepsilon\big) = -\frac{r^2}{2}. \tag{4.8.13}$$

Такое же утверждение справедливо для процессов z_T.

Доказательство. При $r > 0$ для множества

$$B_r := \big\{f \in \mathbb{D} :\ f(1) \geqslant r, f(0) = 0\big\}$$

и функции

$$f_r(t) = rt \quad \text{при} \quad t \in [0,1]$$

имеем

$$I_0\big((B_r)\big) = I_0\big([B_r]\big) = I_0(f_r) = \frac{r^2}{2},$$

и в силу теоремы 4.8.2

$$\lim_{T\to\infty} x^{-2}\ln \mathbf{P}\big(y(1)\geqslant zx\big) = -\frac{r^2}{2}.$$

Поэтому при $x\to\infty$ и любом $\varepsilon\in(0,1)$ выполняется

$$\mathbf{P}\big(y_T(1)\in x(r)_\varepsilon\big) = \mathbf{P}\big(y_T(1) > x(r-\varepsilon)\big) - \mathbf{P}\big(y_T(1)\geqslant x(r+\varepsilon)\big) = \\ = \exp\left\{-\frac{x^2(r-\varepsilon)^2}{2} + o(x^2)\right\}.$$

Эти соотношения сохранятся и при $\varepsilon=\varepsilon_T\to 0$ достаточно медленно при $T\to\infty$. Это означает, что для таких ε выполняется (4.8.13).

Аналогичным образом убеждаемся, что равенство (4.8.13) справедливо и при $r<0$, $r=0$. Следствие 4.8.1 доказано.

Из него вытекает и «обычный» (интегральный) ПУБУ.

4.8.2 Доказательства

Докажем теоремы 4.8.1, 4.8.2 для процессов y_T. Замечание о распространении этих результатов на процессы z_T см. в конце этого раздела.

Положим

$$S_t = S_{[t]},\qquad s_T(u) = \frac{S_{uT}}{\sigma_\xi\sqrt{T}},$$
$$\theta_T(u) = \frac{\eta(uT)}{T},\qquad \vec{s}_T(u) = s_T\big(\theta_T(u)\big),\quad u\geqslant 0,$$

и будем считать, не ограничивая общности, что

$$a_\tau = 1,\quad \text{так что}\quad \sigma=\sigma_\xi.$$

Тогда (см. (4.8.1))

$$y_T(u) = \frac{S_{\eta(uT)}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{a\chi(uT)}{\sigma\sqrt{T}} = \vec{s}_T(u) + \frac{a\chi(uT)}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{4.8.14}$$

ПУБУ для $s_T(u)$ известен (см. ниже). Поэтому мы установим ПУБУ для y_T, если установим нужную близость процессов $\vec{s}_T(u)$ и $s_T(u)$ и оценим последнее слагаемое в правой части (4.8.14).

В основе последующих рассмотрений лежат следующие три утверждения о ПУБУ для случайных блужданий $s_T=s_T(u)$. Они вытекают из теорем 5.2.1, 5.2.2 и следствия 5.2.1 в монографии [12].

Теорема 4.8.3 (локальный ПУБУ для траекторий s_T). *Пусть ξ удовлетворяет условию* [**C**] *или условию* [$\mathbf{C}^V$]. *Тогда для любой функции $f \in \mathbb{D}$, $f(0) = 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$ такое, что в зоне уклонений* (4.8.9)

$$\lim_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}\big(s_T \in x(f)_\varepsilon\big) = -I_0(f). \tag{4.8.15}$$

(Отметим, что в [12] изучались вероятности вида $\mathbf{P}\big(\frac{S_{uT}}{\sigma_\xi x} \in B\big)$ при $x \gg \sqrt{T}$ для процессов $\frac{S_{uT}}{\sigma_\xi x}$, которые отличаются от процессов $s_T(u)$ нормировкой. Поэтому формулировки в [12] имеют несколько иной вид.)

Теорема 4.8.4 (ПУБУ для траекторий s_T). *Пусть ξ удовлетворяет условию* [**C**] *или условию* [$\mathbf{C}^V$]. *Тогда в области уклонений* (4.8.9) *для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}, \rho)$*

$$\varlimsup_{T\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}(s_T \in xB) \leqslant -I_0\big([B]\big), \tag{4.8.16}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x^{-2} \ln \mathbf{P}(s_T \in xB) \geqslant -I_0((B)). \tag{4.8.17}$$

Теорема 4.8.5. *Если $s_T^*(u)$ суть случайные процессы в $(\mathbb{D}, \rho)$, которые при любом $h > 0$ удовлетворяют в зоне уклонений* (4.8.9) *условию*

$$x^{-2} \ln \mathbf{P}\big(\rho(s_T, s_T^*) > xh\big) \to -\infty \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{4.8.18}$$

то утверждения (4.8.15)–(4.8.17) *теорем* 4.8.3, 4.8.4 *сохраняют свою силу и для процессов s_T^*.*

В силу теорем 4.8.3–4.8.5 для доказательства теорем 4.8.1, 4.8.2 нам достаточно убедиться, что (при $s_T^* = y_T$)

$$x^{-2} \ln \mathbf{P}\big(\rho(y_T, s_T) > xh\big) \to -\infty \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.8.19}$$

Имеем

$$\rho(y_T, s_T) \leqslant \rho(y_T, \bar{s}_T) + \rho(\bar{s}_T, s_T). \tag{4.8.20}$$

Для оценки слагаемых в правой части (4.8.20) нам понадобятся вспомогательные утверждения. При $b > 0$, $\delta > 0$ обозначим через $A_{T,b,\delta}$ событие

$$A_{T,b,\delta} := \Big\{ \sup_{t \leqslant (1+b)T} \big|\eta(t) - t\big| < \delta T \Big\} = \Big\{ \sup_{u \leqslant 1+b} \big|\theta_T(u) - u\big| < \delta \Big\}.$$

Лемма 4.8.1. *Пусть τ удовлетворяет условию* [**C**] *или* [$\mathbf{C}^V$]. *Тогда при всех достаточно больших T*

$$\ln \mathbf{P}(\overline{A}_{T,b,\delta}) \leqslant \begin{cases} -c\delta^2 T \quad \text{при выполнении} \quad [\mathbf{C}], \\ -\delta^{\beta'} V(T) \ \ \text{при выполнении} \ [\mathbf{C}^V] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{и любом } \beta' > \beta, \end{cases} \tag{4.8.21}$$

где $c \geqslant 1/3\sigma_\tau^2$ *при достаточно малых b и δ.*

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{T,b,\delta}) \leqslant P_1 + P_2,$$

где

$$P_1 := \mathbf{P}\Big(\max_{t \leqslant (1+b)T} \big(\eta(t) - t\big) > \delta T\Big), \ \ P_2 := \mathbf{P}\Big(\min_{t \leqslant (1+b)T} \big(\eta(t) - t\big) < -\delta T\Big).$$

Нетрудно видеть, что

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\big(\min_{k \leqslant T(1+b+\delta)} (T_k - k) < -\delta T\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\max_{k \leqslant T(1+b+\delta)} (k - T_k) > \delta T\big). \tag{4.8.22}$$

Так как случайная величина $1 - \tau$ ограничена сверху, то при $v > 0$ определена функция уклонений $\Lambda^{(1-\tau)}(v)$ и

$$\Lambda^{(1-\tau)}(v) \sim \frac{v^2}{2\sigma_\tau^2} \quad \text{при} \quad v \to 0.$$

Поэтому

$$P_1 \leqslant \exp\bigg\{-T(1+b+\delta)\Lambda^{(1-\tau)}\bigg(\frac{\delta}{1+b+\delta}\bigg)\bigg\} \leqslant \exp\{-c_1\delta^2 T\},$$

где постоянная c_1 при малых δ близка к $1/2(1+b+\delta)\sigma_\tau^2$ и, следовательно, при достаточно малых b и δ превосходит $1/3\sigma_\tau^2$.

Если выполнено условие [**C**], то аналогично оценивается и

$$P_2 \leqslant \mathbf{P}\Big(\max_{k \leqslant T(1+b+\delta)} (T_k - k) > \delta T\Big).$$

Пусть теперь τ удовлетворяет условию [$\mathbf{C}^V$]. Тогда согласно следствию 5.2.1 (i) в [26] и свойствам медленно меняющихся функций (см., например, § 1.1 в [26] или [85]),

$$P_2 \leqslant c_2 T(1+b+\delta)\exp\big\{-V(\delta T)\big\},$$
$$\ln P_2 \leqslant -(\delta T)^\beta l(\delta T) + \ln T + O(1) \leqslant -\delta^{\beta'} V(T)$$

при любом $\beta' > \beta$ и всех достаточно больших T. Лемма 4.8.1 доказана.

Лемма 4.8.2. *Пусть τ удовлетворяет условию* [**C**] *или условию* [$\mathbf{C}^V$]. *Тогда в зоне уклонений* (4.8.9) *при всех достаточно больших T*

$$\ln \mathbf{P}\big(\sup_{t\leqslant T}\chi(t)>hx\sqrt{T}; A_{T,0,\delta}\big)\leqslant \begin{cases} -chx\sqrt{T} \ \textit{при выполнении } [\mathbf{C}],\\ c=\mathrm{const},\\ -h^{\beta'}V(x\sqrt{T}) \ \textit{при выполнении } [\mathbf{C}^V]\\ \textit{и любом } \beta'>\beta. \end{cases}$$

Доказательство. Положим

$$G_h := \big\{\sup_{t\leqslant T}\chi(t) > hx\sqrt{T}\big\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(G_h A_{T,0,\delta}) \leqslant \mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant T(1+\delta)}\tau_k > hx\sqrt{T}\,\big) \leqslant$$

$$\leqslant T(1+\delta)\mathbf{P}(\tau > hx\sqrt{T}) \leqslant \begin{cases} T(1+\delta)\exp\big\{-\Lambda^{(\tau)}(hx\sqrt{T})\big\},\\ \text{если выполнено } [\mathbf{C}];\\ T(1+\delta)\exp\big\{-V(hx\sqrt{T})\big\},\\ \text{если выполнено } [\mathbf{C}^V]. \end{cases}$$

При выполнении [**C**] имеем

$$\Lambda^{(\tau)}(v) \geqslant c_3 v - c_4 \quad \text{при некоторых } c_3>0,\ c_4>0 \text{ и всех } v.$$

Поэтому при достаточно больших T

$$\ln \mathbf{P}(G_h A_{T,0,\delta}) \leqslant -c_5 hx\sqrt{T}, \qquad c_5 = \mathrm{const} > 0.$$

Если выполнено [$\mathbf{C}^V$], то при $h<1$, любом $\beta'>\beta$ и всех достаточно больших T

$$\ln \mathbf{P}(G_h A_{T,0,\delta}) \leqslant -h^{\beta'}V(x\sqrt{T}).$$

Лемма 4.8.2 доказана.

Вернемся непосредственно к доказательству теорем 4.8.1, 4.8.2. Как уже отмечалось, по теореме 4.8.5, в которой мы положим $s_T^* = y_T$, нам для доказательства теорем 4.8.1, 4.8.2 достаточно убедиться, что при любом $h>0$ выполнено (4.8.19). В силу неравенства (4.8.20) для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что

$$x^{-2}\ln \mathbf{P}\big(\rho(y_T, \bar{s}_T) > xh\big) \to -\infty, \tag{4.8.23}$$

$$x^{-2}\ln \mathbf{P}\big(\rho(\bar{s}_T, s_T) > xh\big) \to -\infty \quad \text{при } T\to\infty. \tag{4.8.24}$$

1) Докажем первое из этих соотношений. Так как

$$\rho(y_T, \vec{s_T}) = \sup_{t \leqslant T} \frac{|a|\chi(t)}{\sigma\sqrt{T}},$$

то при $a = 0$ выполнение (4.8.23) очевидно. Если $a \neq 0$, то

$$\mathbf{P}\big(\rho(y_T, \vec{s_T}) > xh\big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(\overline{A}_{T,0,\delta}) + \mathbf{P}\Big(\sup_{t \leqslant T} \chi(t) > h_1 x\sqrt{T}, A_{T,0,\delta}\Big), \tag{4.8.25}$$

где $h_1 = \frac{h\sigma}{|a|}$.

Если выполнено условие [**C**], то в (4.8.25) в силу леммы 4.8.1 при любом $\delta > 0$ имеем

$$x^{-2} \ln \mathbf{P}(\overline{A}_{T,0,\delta}) \leqslant -c\delta^2 T x^{-2} \to -\infty \quad \text{при } T \to \infty \tag{4.8.26}$$

так как $x = o(\sqrt{T})$. Логарифм второго слагаемого в (4.8.25), умноженный на x^{-2}, в силу леммы 4.8.2 не превосходит

$$-ch\frac{\sqrt{T}}{x} \to -\infty \quad \text{при } T \to \infty$$

Это доказывает (4.8.23) при выполнении [**C**] и при каждом фиксированном $\delta > 0$. Это, в свою очередь, означает, что соотношение (4.8.23) сохранится и при $\delta = \delta_T$, сходящихся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$ (например, при $\delta_T = \left(\frac{x^2}{T}\right)^{1/3}$; см. (4.8.26)).

Пусть теперь выполнено условие [$\mathbf{C}^V$]. Тогда в (4.8.25) согласно лемме 4.8.1

$$x^{-2} \ln \mathbf{P}(\overline{A}_{T,0,\delta}) \leqslant -\delta^{\beta'} x^{-2} V(T), \tag{4.8.27}$$

где степенная часть множителя $x^{-2}V(T)$ в правой части (4.8.27) при $x < \widehat{x}(T)$ в силу (4.8.8) превосходит

$$T^{\beta - \frac{2}{2-\beta} + 1} = T^{\frac{\beta(1-\beta)}{2-\beta}} \to \infty \quad \text{при } T \to \infty.$$

Отсюда следует, что левая часть (4.8.27) сходится к $-\infty$ при $T \to \infty$ для любого фиксированного $\delta > 0$ и для $\delta = \delta_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$.

Для второго слагаемого в (4.8.25) по лемме 4.8.2 имеем при $T \to \infty$ (см. (4.8.6))

$$x^{-2} \ln \mathbf{P}(G_h A_{T,0,\delta}) \leqslant -x^{-2} h^{\beta'} V(x\sqrt{T}\,) = -Th^{\beta'} v\big(x\sqrt{T}\big) \ll \\ \ll -Th^{\beta'} v\big(\widehat{x}(T)\sqrt{T}\big) = -Th^{\beta'} v\big(v^{(-1)}(1/T)\big) = -h^{\beta'}. \tag{4.8.28}$$

Это означает, что левая часть в (4.8.28) сходится к $-\infty$ при $T \to \infty$. Соотношение (4.8.23) доказано.

2). Докажем теперь (4.8.24). Траектории $s_T(u)$ и $\bar{s_T}(u) = s_T\big(\theta_T(u)\big)$ на множестве $A_{T,b,\delta}$ различаются лишь сдвигом аргумента на величину не большую чем δ. Поэтому

$$\rho(s_T, \bar{s_T}) \leqslant \omega_\delta(s_T), \tag{4.8.29}$$

где $\omega_\delta(f)$ — модуль непрерывной функции f:

$$\omega_\delta(f) = \sup\Big\{\big|f(t) - f(t')\big| : |t - t'| \leqslant \delta;\ t, t' \in [0,1]\Big\};$$

$$\mathbf{P}\big(\rho(\bar{s_T}, s_T) > xh\big) \leqslant \mathbf{P}(\overline{A}_{T,b,\delta}) + \mathbf{P}\big(\omega_\delta(s_T) > hx\big). \tag{4.8.30}$$

Здесь $x^{-2}\ln \mathbf{P}(\overline{A}_{T,b,\delta})$, как и прежде, оценивается с помощью соотношений (4.8.26), (4.8.27). Рассмотрим теперь второе слагаемое в (4.8.30). Нетрудно видеть, что при целом $1/\delta$

$$\big\{\omega_\delta(f) > r\big\} \subset \Big\{\max_{k\leqslant 1/\delta}\sup_{u\leqslant\delta}\big|f(k\delta + u) - f(k\delta)\big| > \frac{r}{2}\Big\}.$$

Поэтому (считая для простоты, что T и δT — целые числа) находим

$$\mathbf{P}\big(\omega_\delta(s_T) > hx\big) \leqslant \frac{1}{\delta}\,\mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant\delta T}|S_k| > h'x\sqrt{T}\big) \tag{4.8.31}$$

при $h' = \frac{h\sigma}{2}$.

Если выполнено условие [**C**], то при $x = o\big(\sqrt{T}\,\big)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant\delta T} S_k > h'x\sqrt{T}\big) &\leqslant \exp\Big\{-\delta T\Lambda^{(\xi)}\Big(\frac{h'x\sqrt{T}}{\delta T}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \exp\Big\{-\delta T\frac{h'x^2}{2\sigma_\xi^2\delta^2 T}\,\big(1 + o(1)\big)\Big\} \leqslant \exp\Big\{-\frac{h''x^2}{\delta}\Big\},\end{aligned} \tag{4.8.32}$$

где $h'' = \frac{h'}{3\sigma_\xi^2}$. Аналогично оценивается $\mathbf{P}\big(\min_{k\leqslant\delta T} S_k < -h'x\sqrt{T}\,\big)$. Поэтому в силу (4.8.29)–(4.8.32)

$$x^{-2}\ln \mathbf{P}\big(\rho(\bar{s_T}, s_T) > xh\big) \leqslant \ln 2 - \ln\delta - \frac{h''}{\delta}. \tag{4.8.33}$$

Выберем теперь $\delta = \delta_T \to 0$ так, что $\delta_T T \to \infty$ и выполнено (4.8.26). Тогда правая часть в (4.8.33) сходится к $-\infty$ при $T \to \infty$ и будут выполнены соотношения (4.8.26), (4.8.24).

Пусть теперь выполнено условие $[\mathbf{C}^V]$. Воспользуемся неравенством (4.8.31). Тогда в силу следствия 5.2.1 в [26]

$$\mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant\delta T} S_k > h'x\sqrt{T}\,\big) \leqslant c\delta T \exp\big\{-V(h'x\sqrt{T})\big\};$$

$$x^{-2}\ln\mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant\delta T} S_k > h'x\sqrt{T}\,\big) \leqslant$$
$$\leqslant x^{-2}\ln c\delta T - c_1 T(x\sqrt{T})^{-2}V\big(x\sqrt{T}\,\big), \qquad (4.8.34)$$

где

$$(x\sqrt{T})^{-2}V\big(x\sqrt{T}\,\big) = v\big(x\sqrt{T}\big) \qquad (4.8.35)$$

(см. (4.8.5)). Первое слагаемое в правой части (4.8.34) есть $o(\ln\delta T)$. Второе слагаемое при $x\to\infty$, $x\leqslant\ln T$ превосходит по абсолютной величине

$$c_1 T v\big(\sqrt{T}\ln T\big) = c_1\frac{V\big(\sqrt{T}\ln T\big)}{(\ln T)^2} \gg \ln\delta T$$

при $T\to\infty$. Поэтому для $x\leqslant\ln T$ и $\delta=\overline{o}(1)$, $\delta T\to\infty$ правая часть (4.8.34) сходится к $-\infty$ при $T\to\infty$.

Пусть теперь $x>\ln T$, $x=o\big(\widehat{x}(T)\big)$. Тогда первое слагаемое в правой части (4.8.34) сходится к 0 при $T\to\infty$, а для второго слагаемого имеем (см. (4.8.6), (4.8.35))

$$v\big(x\sqrt{T}\,\big) \gg v\big(\widehat{x}(T)\big) = v\left(v^{(-1)}\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}$$

(функцию $v(z)$, не ограничивая общности, можно считать монотонной и непрерывной). Поэтому в силу (4.8.34) получаем

$$x^{-2}\ln\mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant\delta T} S_k > h'x\sqrt{T}\,\big) \to -\infty \quad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Аналогично оценивается $\mathbf{P}\big(\min_{k\leqslant\delta T} S_k < -h'x\sqrt{T}\,\big)$. Это доказывает (4.8.24). Теоремы 4.8.1, 4.8.2 для процессов y_T доказаны.

Для доказательства теорем 4.8.1, 4.8.2 для процессов z_T следует воспользоваться представлением (4.8.2) и повторить все приведенные выше рассмотрения, заменив в них $\eta(t)$ на $\nu(t)$, а $\chi(t)$ на $\gamma(t)$. Все утверждения при этом сохранятся. Теоремы 4.8.1, 4.8.2 доказаны.

Теоремы 4.8.1–4.8.4 показывают, что ПУБУ для случайных блужданий и для ОПВ имеют по существу один и тот же вид, чего нельзя сказать о ПБУ в области «собственно» больших уклонений.

4.8.3 Грубый (логарифмический) принцип инвариантности для ОПВ в области умеренно больших уклонений

Пусть $w(u)$ — стандартный винеровский процесс на $[0,1]$ и $\mathcal{W}$ — мера в $\mathfrak{B}(\mathbb{D},\rho_{\mathbb{C}})$, соответствующая этому процессу (она сосредоточена на пространстве $\mathbb{C}$).

Теорема 4.8.6. *Пусть множество $B\subset\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}(\mathbb{D},\rho)$ таково, что*

$$I_0\big((B)\big)=I_0\big([B]\big)>0,$$
$$\mathcal{W}\big((vB)\big)=\mathcal{W}\big([vB]\big)>0 \quad \textit{при любом фиксированном } v.$$

Тогда при $T\to\infty$ и всех

$$x\geqslant x_0>0,\quad x=\begin{cases} o(\sqrt{T}) & \textit{при выполнении } [\mathbf{C}],\\ o\big(\widehat{x}(T)\big) & \textit{при выполнении } [\mathbf{C}^V]\end{cases}$$

имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\ln\mathbf{P}\big(y_T(\cdot)\in xB\big)=\ln\mathcal{W}(xB)\big(1+o(1)\big).$$

В области умеренно больших уклонений (при $x\to\infty$) это утверждение является следствием теоремы 5.4.1 в [12] (об асимптотике $\mathcal{W}(xB)$) и теорем 4.8.1, 4.8.2. В области нормальных уклонений оно вытекает из принципа инвариантности для процессов $y_T(u)$, который был установлен в § 1.5.

Распространение утверждений теорем 4.8.1, 4.8.2 на неоднородный случай можно производить с помощью той же схемы рассуждений, которая была использована в разделе 1.5.3. Нетрудно убедиться, что условия $\boldsymbol{\xi}_1\Subset[\mathbf{C}]$ и $\boldsymbol{\xi}_1\Subset[\mathbf{C}^V]$, соответственно для уклонений $x=o\big(\sqrt{T}\big)$ и $x=o\big(\widehat{x}(1)\big)$ достаточны для того, чтобы теоремы 4.8.1, 4.8.2 оставались справедливыми и в неоднородном случае.

Глава 5

Интегро-локальные предельные теоремы при выполнении моментного условия Крамера

§ 5.1 Введение

В этой главе мы продолжим изучение интегро-локальных вероятностей

$$\mathbf{P}\big(Z(t) \in \Delta[x)\big), \qquad \mathbf{P}\big(Y(t) \in \Delta[x)\big), \tag{5.1.1}$$

которое было начато в гл. 2 и относилось к области нормальных уклонений. Теперь мы будем предполагать, что для вектора (τ, ζ) выполнено моментное условие Крамера [**C**], и изучать интегро-локальные вероятности в более широкой области, которую по аналогии со случайными блужданиями можно назвать крамеровской зоной уклонений. Она включает в себя зоны нормальных, умеренно больших и «обычных» больших уклонений. При этом мы будем пользоваться обозначениями, введенными в гл. 3.

Итак, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

[**C**]. $\mathbf{E}e^{v|\boldsymbol{\xi}_1|} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{v|\boldsymbol{\xi}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ является *нерешетчатым. Эти два условия во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.*

Локальные теоремы в арифметическом случае отличаются лишь упрощениями в формулировках и доказательствах и содержатся в [57].

Основным объектом изучения будет точная асимптотика интегро-локальных вероятностей (5.1.1), где $\Delta[x)$ есть полуинтервал $[x,\ x+\Delta)$,

$\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ (т.е. сходится к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$); $\alpha = \frac{x}{T}$ принадлежит некоторому компактному множеству (отрезку) K, которое будет определено ниже.

Нетрудно видеть (это будет проиллюстрировано в следствии 5.3.1 и комментариях к нему), что знание асимптотики (5.1.1) позволяет без труда получить и интегральные предельные теоремы для ОПВ.

Асимптотика вероятностей (5.1.1) есть весьма непростой объект; он требует привлечения для его исследования интегро-локальных теорем для меры восстановления, соответствующей последовательности $\{\tau_j, \zeta_j\}$. Это позволяет получить весьма полные результаты, а подход, связанный с использованием асимптотики меры восстановления, является по-видимому, единственно возможным. Иных подходов к получению предельных теорем для ОПВ в области больших уклонений (в том числе интегральных теорем) в настоящее время не видно.

Основные результаты этой главы установлены в [35]. В [56] они перенесены на многомерный случай.

§ 5.2 Формулировки основных утверждений

5.2.1 Интегро-локальная теорема для процесса $Z(t)$

Наряду с уже названными моментными и структурными условиями мы будем предполагать, что нормированное уклонение $\alpha = \frac{x}{T}$ в зависимости от рассматриваемой задачи принадлежит компакту одного из двух видов:

$$\begin{aligned} &\text{либо отрезку} \quad K^{<} \subset (\alpha_-, \alpha_+), \\ &\text{либо отрезку} \quad K^{>} \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+] \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

($\alpha_\pm$ определены в теореме 3.5.2, $\beta_\pm$ — в лемме 3.5.3), под которыми будем понимать отрезки, содержащие окрестность точки $\alpha = a$. Через $\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}}$ обозначим аналитический отрезок кривой $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ в $\mathbb{R}^2$ вида $\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}} := \Big\{\big(\lambda(\alpha'), \mu(\alpha')\big) \colon \ \alpha' \in K^{\lessgtr}\Big\}$, содержащий, очевидно, пересечение окрестности точки $(0,0)$ с $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$. Положим далее

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2), \qquad B({}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w}) := \big\{\gamma(T) \lessgtr u, \ \chi(T) \geqslant v, \ \zeta(T) \in \mathbf{w}\big\}$$

(обозначения $\chi(t)$, $\gamma(t)$, $\zeta(t)$ введены в § 1.1).

В последующих утверждениях будут выделены два наиболее важных специальных случая: когда процессы Z, Y либо однородны, либо являются процессами со стационарными приращениями. Последние мы будем обозначать $Z^{(st)}$, $Y^{(st)}$. Как уже отмечалось (см. раздел 1.1.2), если (τ_1, ζ_1) имеет преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda, \mu) = \psi^{(st)}(\lambda, \mu) &:= \frac{\psi(\lambda, \mu) - \psi(0, \mu)}{a_\tau \lambda}, \\ \psi(\lambda, \mu) &= \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

то процесс $Z(t)$ будет ОПВ *со стационарными приращениями.* Для него распределение $\big(\chi(t), \zeta(t)\big)$ от t не зависит (как и распределения приращений $Z(t+u) - Z(t)$),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(st)} &:= \big\{(\lambda, \mu) : \ \psi^{(st)}(\lambda, \mu) < \infty\big\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{(\zeta)} \subset \mathcal{A}, \\ \mathcal{A}^{(\zeta)} &:= \big\{\mu : \ \psi^{(\zeta)}(\mu) < \infty\big\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} I_Z(\alpha, {}^{<}u, v, \mathbf{w}) &= \int_0^u e^{\lambda(\alpha) y} \mathbf{P}(\tau > y + v, \ \zeta \in \mathbf{w}) dy, \\ I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w}) &= \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha) y} \mathbf{P}(\tau > y + v, \ \zeta \in \mathbf{w}) dy. \end{aligned}$$

Теорема 5.2.1. *Пусть $\alpha = \frac{x}{T} \in K^{\lessgtr}$, $\Delta = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$ и выполнено условие «допустимой неоднородности»:*

$$\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}} \subset (\mathcal{A}_1). \tag{5.2.3}$$

Тогда

(i). *При некотором $\varepsilon > 0$ и $T \to \infty$*

$$\begin{aligned} P_{T,\alpha}^{\lessgtr} := \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x]; \ B({}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})\big) &= \\ = \mathbf{I}_{\{x \in (-\Delta, 0]\}} \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T + v, \zeta_1 \in \mathbf{w}) &+ \\ + \frac{\Delta}{\sqrt{T}} \psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha, {}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})\big(1 + o(1)\big) &+ \\ + O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}), & \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

где $\psi_1 = \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$, $C(\alpha) := C(1, \alpha)$, $C(\theta, \alpha)$ есть положительная непрерывная в конусе $\mathcal{D} = \big\{(\theta, \alpha) : \alpha/\theta \in [\alpha_-, \alpha_+)\big\}$ функция, определенная в (5.3.9).

Для вероятностей $\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x), B({}^{<}u, v, \mathbf{w})\big)$ остаточные члены $o(1)$ и $O(\cdot)$ равномерны по $\alpha \in K^{<}$, $u \leqslant u_0$ при любом фиксированном $u_0 > 0$ и всем $v \geqslant 0$, $\mathbf{w}$.

Для вероятностей $\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x), B(^{>}u, v, \mathbf{w})\big)$ *равномерность имеет место при* $\alpha \in K^{>}$ *и тех же условиях на остальные параметры.*

(ii). *Если* $Z(t)$ *— однородный ОПВ, то первое слагаемое в правой части* (5.2.4) *может быть убрано* (оно входит в остаточные члены).

(iii). *Пусть* $Z(t) = Z^{(st)}(t)$ *есть процесс со стационарными приращениями и выполнено условие*

$$\mathcal{M}_{K^{\lessgtr}} := \big\{\mu(\alpha') : \ \alpha' \in K^{\lessgtr}\big\} \subset (\mu_{-}^{(\zeta)}, \mu_{+}^{(\zeta)}). \tag{5.2.5}$$

Тогда выполнено условие допустимой неоднородности (5.2.3) *для* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{(st)}$ *и первое слагаемое в правой части* (5.2.4) *может быть убрано.*

Условие (5.2.5) *всегда выполнено, если область* $(\mathcal{A})$ *прямоугольна:*

$$(\mathcal{A}) = (\lambda < \lambda_{+}) \times (\mu_{-}^{(\zeta)} < \mu < \mu_{+}^{(\zeta)}) \tag{5.2.6}$$

(как в случае независимых τ и ζ).

В силу интегро-локальной теоремы 2.3.1 в области нормальных уклонений (см. (2.3.3))

$$\mathbf{P}\big(Z(T) - aT \in \Delta[x)\big) = \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{x^2}{2T\sigma^2}} + O(T^{-\beta})$$

при $\beta > 1/2$ равномерно по x. Кроме того, для α в окрестности точки a (см. (3.5.22) в теореме 3.5.2)

$$D(\alpha) = \frac{(\alpha - a)^2 D''(a)}{2} + O\big(|\alpha - a|^3\big) = \frac{(\alpha - a)^2}{2\sigma^2} + O\big(|\alpha - a|^3\big).$$

Сравнивая это с (5.2.4), получим, что для α в малой окрестности точки a

$$\psi_1 C(\alpha) I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

где $\psi_1 = \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) \to \psi_1(0,0) = 1$, $I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) \to a_\tau$, так что $C(\alpha) \to \frac{1}{a_\tau \sigma\sqrt{2\pi}}$ при $\alpha \to a$.

Замечание 5.2.1. Раздельное рассмотрение интегралов

$$I_Z(\alpha, {}^{<}u, v, \mathbf{w}) \quad \text{и} \quad I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w})$$

связано с тем, что интеграл $I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w})$ при $\alpha \in [\beta_{-}, \beta_{+}]$ (в случае $\lambda_{+} < D(0)$) расходится, так как для таких α выполняется $\lambda_{+} < \lambda(\alpha)$. В то же время интеграл $I_Z(\alpha, {}^{<}u, v, \mathbf{w})$ всегда сходится. Поэтому при $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ выполняется $P^{>}_{T,\alpha} \gg P^{<}_{T,\alpha}$ при $T \to \infty$. Это соответствует тому, что для $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ функция уклонений в локальном ПБУ для $Z(T)$ равна $\widehat{D}(\alpha) < D(\alpha)$, и основной вклад в интегро-локальные вероятности вносят траектории со значением $\gamma(T)$, сравнимым с T; см. § 3.4.

Отметим также, что компакт $K^{>}$ может быть определен с помощью базовой функции $\widehat{A}(\mu)$. Обозначим $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ максимальную область аналитичности функции $\widehat{A}(\mu)$, содержащую в себе точку $\mu = 0$, и положим

$$\widehat{\alpha}_- = A'(\widehat{\mu}_- + 0), \qquad \widehat{\alpha}_+ = A'(\widehat{\mu}_+ - 0).$$

Тогда интервал $(\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$ будет областью аналитичности функции $\widehat{D}(\alpha)$, содержащей в себе точку $\alpha = a$, а $K^{>}$ может быть определен как любой отрезок в $(\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$, содержащий в себе точку $\alpha = a$.

Если $\lambda_+ > D(0)$, то $\widehat{\mu}_\pm = \mu_\pm$, $\widehat{\alpha}_\pm = \alpha_\pm$ и компакты $K^{<}$ и $K^{>}$ неразличимы по своему определению (запретное множество $[\beta_-, \beta_+]$ пусто).

Условие $\lambda_+ > D(0)$, очевидно, выполнено, если $\lambda_+ = \infty$ или $a = 0$ (тогда $D(0) = 0$). Как показано в теореме 3.3.1, оно выполнено также, если граница $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ в $\mathbb{R}^2$ вложена в открытую полуплоскость $\{\lambda < \lambda^+\}$ (это всегда так, если $\mathbf{A}(\lambda_+, \mu) > 0$ при всех μ); см. теорему 3.3.2, (iv).

Замечание 5.2.2. Ясно, что если при любых $v, \mathbf{w}$

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T + v,\ \zeta_1 \in \mathbf{w}) = o\biggl(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{-TD(0)} I_Z(0, 0, v, \mathbf{w})\biggr) \tag{5.2.7}$$

при $T \to \infty$, то первое слагаемое в правой части (5.2.4) можно убрать. Если

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T) = o\biggl(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{-TD(0)}\biggr) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{5.2.8}$$

то условие (5.2.7) выполнено при $v = 0$, $\mathbf{w} = \mathbb{R}$. Для выполнения (5.2.8) достаточно, чтобы

$$\lambda_+^{(\tau_1)} > D(0). \tag{5.2.9}$$

В случае (5.2.9) первое слагаемое в правой части (5.2.4) может быть включено в остаточный член $O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)})$.

Замечание 5.2.3. Интегрируя $I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R})$ по частям, получаем

$$I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) = \frac{\psi^{(\tau)}(\lambda(\alpha)) - 1}{\lambda(\alpha)}, \quad \text{где} \quad \psi^{(\tau)}(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau}. \tag{5.2.10}$$

Из (5.2.10), (5.2.2) следует, что

$$I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) = a_\tau \psi^{(st)}\bigl(\lambda(\alpha), 0\bigr). \tag{5.2.11}$$

Если $Z(t)$ есть ОПВ со стационарными приращениями ($\psi_1(\lambda,\mu) = \psi^{(st)}(\lambda,\mu)$), а область $(\mathcal{A})$ прямоугольна (см. (5.2.6)), то для множества $\mathcal{A}^{(st)}$ имеем

$$(\mathcal{A}^{(st)}) = \{\lambda < \lambda_+\} \times \{\mu_-^{(\zeta)} < \mu < \mu_+^{(\zeta)}\} = (\mathcal{A}).$$

Так как $\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}} \subset (\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{(st)})$, то условие допустимой неоднородности (5.2.3) в этом случае всегда выполнено.

Замечание 5.2.4. Существенность присутствия запретного множества $[\beta_-,\beta_+]$ в условиях теоремы 5.2.1 пояснялось выше. Существенность условия допустимой неоднородности (5.2.3) поясняется присутствием в правой части (5.2.4) множителя $\psi_1\big(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\big)$.

Наконец, на примере интегро-локальных теорем для случайных блужданий (см., например, [10], гл.9) видно, что вне крамеровской области (α_-,α_+) асимптотика $\mathbf{P}\big(Z(T)\in\Delta[x)\big)$ будет иной. Сказанное означает, что условия теоремы 5.2.1 близки к минимальным.

Замечание 5.2.5. Везде в дальнейшем мы будем иметь в виду, что компакты $K^{\lessgtr} \subset \mathbb{R}$ выбираются по возможности широкими, но так, чтобы выполнялось условие допустимой неоднородности (5.2.3) (если $(\mathcal{A}) \subset (\mathcal{A}_1)$, то условие (5.2.3) перестает быть ограничительным).

Замечание 5.2.6. Допустим, что в случае $\lambda_+ > D(0)$ наряду с утверждением (3.7.1) теоремы 3.7.1, в окрестности точки $\mu=\mu(\alpha)$, $\alpha\in K^{<}$, справедливо и более точное представление

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = c(\mu)e^{TA(\mu)}\big(1+o(1)\big) \tag{5.2.12}$$

при $T\to\infty$ и некоторой гладкой функции $c(\mu)$. Тогда, если воспользоваться формулой обращения для отыскания асимптотики $\mathbf{P}\big(Z(T)\in\Delta[x)\big)$, то с помощью преобразования Крамера в точке $\mu(\alpha)$ и стандартных приемов (см. доказательство теоремы 9.3.1 в [10]) мы получим значение

$$\frac{c(\mu(\alpha))\Delta e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{2\pi T}A''(\mu(\alpha))}\big(1+o(1)\big),$$

которое совпадает с асимптотикой в правой части (5.2.4) (при $u=v=0$, $\mathbf{w}=\mathbb{R}$), если подходящим образом выбрать функцию $c(\mu)$. Сказанное подтверждает предположение (5.2.12), которое будет доказано в § 5.6.

Замечание 5.2.7. Просматривая доказательство теоремы 5.2.1, нетрудно убедиться, что равномерность по u в утверждении теоремы сохранится и в более широкой, чем $[0,u_0]$ области $[0,\delta T]$ при достаточно малом $\delta>0$.

Следствие 5.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2.1. *Если* $\Delta > 0$ *фиксировано, то при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x);\ B(^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})\big) = \\ = \frac{1 - e^{-\mu(\alpha)\Delta}}{\mu(\alpha)\sqrt{T}} \psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha, {}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})(1 + o(1)) + \\ + O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}), \quad (5.2.13)$$

где остаточные члены равномерны по $\alpha \in K^{\lessgtr}$, $u \leqslant u_0$, v, $\mathbf{w}$.

Если при этом $\alpha \to a$, $\Delta \geqslant \Delta_0 > 0$ *таково, что* $|\alpha - a|\Delta \to 0$ *при* $T \to \infty$, *то множитель* $\frac{1-e^{-\mu(\alpha)\Delta}}{\mu(\alpha)}$ *можно заменить на* Δ.

Доказательство следствия 5.2.1. Пусть $\Delta > 0$ фиксировано, $N \to \infty$ (достаточно медленно при $T \to \infty$),

$$\Delta_N := \frac{\Delta}{N}, \quad x_k = x + k\Delta_N, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \\ \Delta_N[x_k) = [x_k, x_k + \Delta_N).$$

Тогда при $\alpha_k := \alpha + \frac{k\Delta_N}{T}$, $T \to \infty$ выполняется

$$TD(\alpha_k) = TD(\alpha) + k\Delta_N \mu(\alpha) + O\bigg(\frac{(k\Delta_N)^2}{T}\bigg).$$

Так как $\Delta[x) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \Delta_N[x_k)$, $\Delta_N \to 0$ и

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta_N e^{-TD(\alpha_k)} = e^{-TD(\alpha)} \int\limits_0^{\Delta} e^{-\mu(\alpha)y} dy\big(1 + o(1)\big) = \\ = e^{-TD(\alpha)}\, \frac{1 - e^{-\mu(\alpha)\Delta}}{\mu(\alpha)} \big(1 + o(1)\big),$$

то из теоремы 5.2.1 следует, что для левой части в (5.2.13), равной

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_N[x_k),\ B(^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})\big),$$

справедливо равенство (5.2.13).

Второе утверждение следствия очевидно, так как $\mu(\alpha)\Delta$ и $(\alpha - a)\Delta$ имеют один и тот же порядок малости при $\alpha \to a$. Следствие доказано.

Аналогичным образом из теоремы 5.2.1 и принципа больших уклонений для $Z(T)$ можно получить интегро-локальные предельные теоремы при любых Δ (и в том числе, интегральные теоремы). Например, при $\alpha \geqslant \alpha_0 > a$ выполняется $\mu(\alpha) \geqslant \mu_0 > 0$ и утверждение (5.2.13) остается справедливым при любом Δ (в частности, можно положить $\Delta = \infty$).

5.2.2 Интегро-локальная теорема для процесса $\boldsymbol{Y(t)}$

Аналог теоремы 5.2.1 для процесса $Y(t)$ имеет несколько иной вид. Положим

$$B(^{\lessgtr}u, v) := \{\gamma(T) \lessgtr u, \quad \chi(T) \geqslant v\} = B(^{\lessgtr}u, v, \mathbb{R}),$$

$$I_Y(\alpha, {}^{<}u, v) := \int_0^u e^{\lambda(a)y}\mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta};\ \tau \geqslant y + v)dy,$$

$$I_Y(\alpha, {}^{>}u, v) := \int_u^\infty e^{\lambda(a)y}\mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta};\ \tau \geqslant y + v)dy,$$

$$\mu_-^{(\zeta)} := \inf\{\mu :\ \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\}, \qquad \mu_+^{(\zeta)} := \sup\{\mu :\ \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\}.$$

Ниже в теореме 5.2.2, как и в теореме 5.2.1, рассматриваются нормированные уклонения $\alpha = \frac{x}{T} \in K^{\lessgtr}$, где компакты $K^{\lessgtr}$ определены в (5.2.1).

Теорема 5.2.2. *Пусть* $\alpha \in K^{>}$ *и выполнено условие* (5.2.5)*. Тогда* (i)*. Если* $\lambda(\alpha) \neq 0$*, то*

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \frac{1 - \psi^{(\zeta)}(\mu(\alpha))}{\lambda(\alpha)} < \infty, \tag{5.2.14}$$

где $\psi^{(\zeta)}(\mu) := \psi(0, \mu)$ (ср. с (5.2.10)).

Если $\lambda(\alpha) = 0$*, то*

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \psi'_{(1)}(0, \mu(\alpha)) < \infty \quad (= \mathbf{E}\tau, \quad \textit{если} \ \ \alpha = a). \tag{5.2.15}$$

(ii)*. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности* (5.2.3)*. Тогда при любом фиксированном* $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}(Y(T) \in \Delta[x];\ B(^{\lessgtr}u, v)) = P_1\big(v, \Delta[x]\big) + \\ + \frac{e^{\mu(\alpha)\Delta} - 1}{\mu(\alpha)\sqrt{T}}\psi_1 C(\alpha)e^{-TD(\alpha)}\big[I_Y(\alpha, {}^{\lessgtr}u, v) + o(1)\big] \tag{5.2.16}$$

при $T \to \infty$*, где*

$$P_1\big(v, \Delta[x]\big) := \mathbf{P}\big(\tau_1 > T + v,\ \zeta_1 \in \Delta[x]\big),$$

остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $\alpha \in K^{\lessgtr}$, $v \geqslant 0$, $u \leqslant u_0$.

(iii). *Если процесс* $Y(t)$ *является однородным, то справедливо* (5.2.16), *где слагаемое* $P_1\big(v, \Delta[x]\big)$ *в правой части* (5.2.16) *можно убрать.*

(iv). *Если* $Y(t) = Y^{(st)}(t)$ *есть процесс со стационарными приращениями, то выполнено условие допустимой неоднородности* $(\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}}) \subset (\mathcal{A}^{(st)})$ *и выполнено* (5.2.16), *где слагаемое* $P_1\big(v, \Delta[x]\big)$ *можно убрать.*

Ясно, что если $\Delta = \Delta_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$, то множитель $\frac{e^{\mu(\alpha)\Delta}-1}{\mu(\alpha)}$ в (5.2.16) можно заменить на Δ. Здесь полностью сохраняют свою силу замечания 5.2.4, 5.2.5 к теореме 5.2.1.

Замечание 5.2.8. Из (5.2.16) видно, что для того, чтобы в общем случае пренебречь слагаемым $P_1\big(v, \Delta[x]\big)$ в (5.2.16), нужно требовать выполнения соотношения

$$\mathbf{P}\big(\tau_1 > T,\ \zeta_1 \in \Delta[x]\big) = o\bigg(\frac{e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T}}\bigg) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{5.2.17}$$

Таким образом, для того, чтобы начальный скачок (τ_1, ζ_1) не влиял на асимптотику в интегро-локальных теоремах для ОПВ $Z(t)$ и $Y(t)$ нужно дополнительно к «основному» условию допустимой неоднородности (5.2.3) требовать также, чтобы в теоремах 5.2.1, 5.2.2 выполнялись, соответственно, условия (5.2.7), (5.2.17).

Для выполнения условия (5.2.17) достаточно, чтобы

$$\mathbf{\Lambda}_1(T, \alpha T) \geqslant \mathbf{\Lambda}(T, \alpha T) + o(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{5.2.18}$$

где $\mathbf{\Lambda}_1(T, \alpha T)$ — функция уклонений, соответствующая (τ_1, ζ_1) (в однородном случае это условие всегда выполнено).

Действительно, пусть для простоты прямоугольник $[T, \infty) \times \Delta[x)$ касается поверхности уровня функции уклонений $\mathbf{\Lambda}_1$ в точке (T, x). Тогда

$$\mathbf{P}\big(\tau_1 \geqslant T,\ \zeta_1 \in \Delta[x)\big) \leqslant e^{-\mathbf{\Lambda}_1(T, \alpha T)}. \tag{5.2.19}$$

Из леммы 5.3.2, доказанной ниже, следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\,\mathbf{\Lambda}(T, \alpha T) \geqslant \mathbf{D}(1, \alpha) + \varepsilon = D(\alpha) + \varepsilon$$

и, стало быть, в силу (5.2.18)

$$\mathbf{\Lambda}_1(T, \alpha T) \geqslant \mathbf{\Lambda}(T, \alpha T) + o(T) \geqslant TD(\alpha) + \varepsilon T + o(T) \geqslant TD(\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}\,T$$

при $T \to \infty$. Отсюда и из (5.2.19) вытекает (5.2.17).

Другое условие

$$\big(0, \mu(\alpha)\big) \in (\mathcal{A}_1) \quad \text{при всех} \quad \alpha \in K^{\lessgtr}, \tag{5.2.20}$$

достаточное для выполнения (5.2.17), приведено ниже, в лемме 5.5.1.

Как установлено в теореме 5.2.1, условие (5.2.5) всегда выполнено, если область $\mathcal{A}$ прямоугольна.

Замечание 5.2.9. Отметим, что аналогично (5.2.11)

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \frac{\psi(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) - \psi(0, \mu(\alpha))}{\lambda(\alpha)} = a_\tau \psi^{(st)}\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big).$$

Для ОПВ со стационарными приращениями и с прямоугольной областью $(\mathcal{A})$ условие допустимой неоднородности (5.2.3) всегда выполнено.

5.2.3 Интегро-локальная теорема для конечномерных распределений процесса $Z(t)$

Если выполнены условия

$$\lambda_+ > D(0), \qquad \mu_\pm = \mu^\pm, \qquad A'(\mu_\pm \mp 0) = \pm\infty, \tag{5.2.21}$$

то запретное множество $[\beta_1, \beta_+]$ пусто, $\alpha_\pm = \pm\infty$, и, стало быть, в качестве компактов $K^{\lessgtr}$ можно брать компакт $K = [-N, N]$ при любом $N > 0$; число N будем считать большим, так что $a \in K$, $(0,0) \in \mathcal{A}_K$. Как уже отмечалось, $\lambda(\alpha) \leqslant \lambda(0) = D(0)$ при $\alpha \in K$. Поэтому в силу (5.2.21) существует $\delta > 0$, такое, что

$$\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \delta \quad \text{при всех} \quad \alpha.$$

Нам понадобится следующее условие

$[\widehat{\mathbf{P}}_K]$. *Существуют распределение* $\widehat{P}$ *в* $\mathbb{R}^2$ *и постоянная* $c < \infty$ *такие, что при всех* $v > 0$, $\mathbf{w}$ *и всех достаточно больших* t

$$e^{-\delta t}\mathbf{P}\big(\tau > t + v,\ \zeta \in \mathbf{w}\big|\ \tau > t\big) \leqslant c\widehat{P}\big((v, \infty),\ \mathbf{w}\big); \tag{5.2.22}$$

при этом

$$\widehat{\psi}(\lambda, \mu) < \infty \quad \text{при} \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_K, \tag{5.2.23}$$

где $\widehat{\psi}$ *— преобразование Лапласа над* $\widehat{P}$.

Если τ и ζ независимы, то нетрудно проверить, что условие $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ всегда выполнено, если τ удовлетворяет принципу больших уклонений:

$$\ln \mathbf{P}(\tau > t) \geqslant -\Lambda^{(\tau)}(t) + o(t), \tag{5.2.24}$$

(или, что при $\lambda_+ < \infty$ то же,

$$\ln \mathbf{P}(\tau > t) \sim -\lambda_+ t \quad \text{при} \quad t \to \infty).$$

Действительно, при выполнении (5.2.24)

$$\frac{e^{-\delta t}\mathbf{P}(\tau > t+v)}{\mathbf{P}(\tau > t)} \leqslant \exp\big\{ -\delta t - \Lambda^{(\tau)}(t+v) + \Lambda^{(\tau)}(t) + o(t)\big\}. \quad (5.2.25)$$

Так как

$$\Lambda^{(\tau)}(t+v) - \Lambda^{(\tau)}(t) \geqslant \lambda^{(\tau)}(t)v, \quad \lambda^{(\tau)}(t) := (\Lambda^{(\tau)})'(t) \to \lambda_+ \text{ при } t \to \infty,$$

то при $\lambda_+ < \infty$, любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших t левая часть в (5.2.25) не превосходит

$$\exp\big\{ -(\lambda_+ - \varepsilon)v\big\}.$$

Поэтому, если положить $\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big) = e^{-(\lambda_+ - \varepsilon)v}\mathbf{P}(\zeta \in \mathbf{w})$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ компакт $\mathcal{A}_K$ будет вложен в область сходимости $\widehat{\psi}(\lambda,\mu)$ и (5.2.23) будет выполнено. При $\lambda_+ = \infty$ рассуждения лишь упрощаются.

Наряду с теоремой 5.2.1 справедлива следующая интегро-локальная теорема для конечномерных распределений процесса $Z(t)$. Пусть даны наборы чисел

$$0 = u_0 < u_1 < \dots < u_M = 1, \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_M, \quad \alpha_0 = 0.$$

Обозначим

$$\gamma_j := \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{u_j - u_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$J_Z(\gamma) := I_Z(\gamma, 0, 0, \mathbb{R}) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\gamma)y}\mathbf{P}(\tau > y)dy,$$

где функция $I_Z(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — из теоремы 5.2.1. Пусть, далее, $P_\gamma\big((v,\infty),\mathbf{w}\big)$ есть мера

$$P_\gamma\big((v,\infty),\mathbf{w}\big) := \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\gamma)y}\mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in \mathbf{w})dy,$$

$\psi^{(\gamma)}(\lambda,\mu)$ — преобразование Лапласа над P_γ:

$$\psi^{(\gamma)}(\lambda,\mu) := \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{\lambda v + \mu z} P_\gamma(dv, dz).$$

Значение γ_0 не определено, и нам будет удобно положить

$$\psi^{(\gamma_0)}(\lambda,\mu) := \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda v+\mu z}\mathbf{P}(\tau_1 \in dv,\ \zeta_1 \in dz).$$

Во введенных обозначениях справедлива

Теорема 5.2.3. *Пусть выполнены условия* (5.2.21), $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$, *условие допустимой неоднородности* $\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1)$ *и условие* (5.2.7), *если* $\alpha_1 = 0$. *Тогда при* $x_k = \alpha_k T$

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^M \big\{Z(u_kT) \in \Delta[x_k)\big\}\Big) = \\ = \frac{\Delta^M}{T^{M/2}}\, e^{-TI(f)} \prod_{j=1}^M \frac{\psi^{(\gamma_{j-1})}(\lambda(\gamma_j),\mu(\gamma_j))}{\sqrt{u_j-u_{j-1}}} \times \\ \times C(\gamma_j)J_Z(\gamma_j)\big(1+o(1)\big), \tag{5.2.26}$$

где $f = f(t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$— *непрерывная ломаная с узлами в точках* $(u_j,\alpha_j),\ \ 0 \leqslant j \leqslant M,$

$$I(f) := \int_0^1 D\big(f'(t)\big)dt,$$

$\Delta = \Delta_T \to 0$ *достаточно медленно при* $T \to \infty$. *Остаточный член* $o(1)$ *в* (5.2.26) *равномерен по* $(\gamma_1,\ldots,\gamma_M) \in K^M = \prod_{j=1}^M \big\{|\gamma_j| \leqslant N\big\}$ *при любом* $N > 0$.

Наряду с условием $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ можно указать еще одно условие (возможно, более простое и прозрачное), которое также обеспечивает выполнение интегро-локальной теоремы для конечномерных распределений процесса $Z(t)$. Оно имеет следующий вид

$[\mathbf{h}]$. *Существует функция* $h(v) = o(v)$ *при* $v \to \infty$ *такая, что при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda < \lambda_+ - \varepsilon$

$$\int_v^\infty e^{\lambda t}\mathbf{P}(\tau > t,\ \zeta \in \mathbf{w})dt \leqslant e^{\lambda v + h(v)}\mathbf{P}(\tau > v, \zeta \in \mathbf{w}).$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы существовали t_0 и $q < 1$ (зависящие от λ), такие, что мера

$$p(dt,\mathbf{w}) := e^{(\lambda_+ - \varepsilon)t}\mathbf{P}(\tau > t, \zeta \in \mathbf{w})dt$$

обладает свойством

$$p\big(d(t+t_0),\mathbf{w}\big) \leqslant qp(dt,\mathbf{w}),$$

при всех $\mathbf{w}$ и всех достаточно больших t. Тогда очевидно,

$$\int\limits_v^\infty e^{\lambda t}\mathbf{P}(\tau>t,\zeta\in\mathbf{w})dt \leqslant \frac{t_0}{1-q}\,e^{\lambda v}\mathbf{P}(\tau>v,\zeta\in\mathbf{w}).$$

Если τ и ζ независимы, то условие $[\mathbf{h}]$ выполнено, если оно выполнено при $\mathbf{w}=\mathbb{R}$.

Теорема 5.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2.3*, в которых условие* $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ *заменено на условие* $[\mathbf{h}]$*. Тогда утверждение* (5.2.26) *сохраняется.*

Соотношение (5.2.26) показывает, что даже в сделанных предположениях (5.2.21), $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$, $[\mathbf{h}]$ приращения процесса $Z(t)$ на больших интервалах не являются асимптотически независимыми в области больших уклонений в смысле интегро-локальных теорем (для случайных блужданий такая независимость имеет место). На это указывает присутствие множителей $\psi^{(\gamma_{j-1})}\big(\lambda(\gamma_j),\mu(\gamma_j)\big)$, зависящих от двух соседних нормированных приращений γ_{j-1}, γ_j. В области нормальных и умеренно больших уклонений такая зависимость исчезает.

5.2.4 Нормальные и умеренно большие уклонения

Если

$$\alpha=\frac{x}{T}\to a \quad \text{при} \quad T\to\infty,$$

то $(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))\to(0,0)$ при $T\to\infty$,

$$\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))\to 1, \tag{5.2.27}$$

$$I_Z(\alpha,{}^{>}u,v,\mathbf{w})\to\int_u^\infty \mathbf{P}(\tau\geqslant y+v,\ \zeta\in\mathbf{w})dy,$$

$$I_Y(\alpha,{}^{>}u,v)\to\int_u^\infty \mathbf{P}(\tau\geqslant y+v)dy=\mathbf{E}\tau\mathbf{P}(\chi\geqslant u+v), \tag{5.2.28}$$

где χ — величина перескока блуждания $\{T_n\}$ через бесконечно-удаленный барьер.

Далее, в силу аналитичности функции $D(\alpha)$ в интервале (α_-,α_+), содержащем точку $\alpha=a$, выполняется

$$e^{-TD(\alpha)}=e^{-\frac{(x-Ta)^2}{2\sigma^2T}(1+o(1))} \quad \text{при} \quad T\to\infty,$$

где
$$\sigma^2 = \big(D''(a)\big)^{-1} = a_\tau^{-1}\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2$$
(см. (3.5.22)). Наконец, в этом случае условия допустимой неоднородности в теоремах 5.2.1 и 5.2.2 выполнены. Все это позволяет сформулировать интегро-локальную теорему в области нормальных и умеренно больших уклонений в следующей форме.

Следствие 5.2.2. *Пусть* $\alpha = \frac{x}{T} \to a$ *при* $T \to \infty$. *Тогда*
$$C(\alpha) \sim C(a) = \frac{1}{\mathbf{E}\tau\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{5.2.29}$$
и для любого фиксированного $\Delta > 0$ *и некоторого* $\varepsilon > 0$ *имеют место соотношения:*

$$\text{I.} \qquad \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x);\quad B(^{>}u, v, \mathbb{R})) = \\ = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\, e^{-TD(\alpha)}\mathbf{P}(\chi \geqslant u + v)\big(1 + o(1)\big) + O(e^{-T\varepsilon}), \tag{5.2.30}$$

где остаточные члены $o(1)$, $O(e^{-T\varepsilon})$ *равномерны по* $u \leqslant u_0$, $v \geqslant 0$.

Если $y := x - aT = o(T^{\frac{2}{3}})$ *при* $T \to \infty$, *то множитель* $e^{-TD(\alpha)}$ *в правой части* (5.2.30) *можно заменить на* $e^{-\frac{y^2}{2T\sigma^2}}$.

II.
$$\mathbf{P}\big(Y(T) \in \Delta[x);\quad B(^{>}u, v, \mathbb{R})\big) = \\ = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\, e^{-TD(\alpha)}\big(\mathbf{P}(\chi \geqslant u + v) + o(1)\big), \tag{5.2.31}$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $u \leqslant u_0$, $v \geqslant 0$.

Доказательство следствия 5.2.2. I. Из теоремы 5.2.1 (с учетом следствия 5.2.1 и соотношений (5.2.27), (5.2.28)) следует, что для любого фиксированного $\Delta > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x);\quad B(^{>}u, v, \mathbb{R})\big) = \mathbf{I}_{\{x\in(-\Delta,0]\}}\mathbf{P}(\tau_1 > T + v) + \\ + \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)}C(a)\mathbf{E}\tau\mathbf{P}(\chi \geqslant u + v)\big(1 + o(1)\big) + O(e^{-T\varepsilon}), \tag{5.2.32}$$

где остаточные члены равномерны по $u \leqslant u_0$, $v \geqslant 0$. Так как $\mathbf{P}(\tau_1 > T+v) = o(e^{-T\varepsilon})$ при $T \to \infty$ и некотором $\varepsilon > 0$, то первое слагаемое в правой части (5.2.32) можно убрать. Чтобы установить (5.2.30) нам осталось доказать соотношение (5.2.29).

Из (5.2.32) вытекает, что «предплотности»

$$\frac{\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x)\big)}{\Delta}$$

для Δ, сходящегося к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$, сближаются (в смысле относительной сходимости) с функцией

$$\frac{C(\alpha)\mathbf{E}\tau}{\sqrt{T}}\, e^{-\frac{y^2}{2T\sigma^2}}. \tag{5.2.33}$$

С другой стороны, распределение $\frac{Z(T)-aT}{\sigma\sqrt{T}}$ сходится при $T \to \infty$ к стандартному нормальному распределению (см. теорему 1.3.2). Сравнивая значения $\mathbf{P}\big(Z(T) - aT \in [-b\sqrt{T},\ b\sqrt{T}]\big)$ при $b > 0$, полученные с помощью (5.2.33) и нормального приближения, мы получаем, что с необходимостью

$$C(a)\mathbf{E}\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Это доказывает (5.2.29).

II. Утверждение (5.2.31) доказывается совершенно аналогично с помощью теоремы 5.2.2. Следствие 5.2.2 доказано.

§ 5.3 Интегро-локальные теоремы для меры восстановления

Для доказательства утверждений, сформулированных в § 5.2, нам понадобятся интегро-локальные теоремы для меры восстановления, соответствующей вектору (τ, ζ).

Положим, как и прежде,

$$\psi(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}, \qquad \psi_1(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\mu\zeta_1},$$
$$\mathbf{A}(\lambda,\mu) := \ln\psi(\lambda,\mu), \quad \mathbf{A}_1(\lambda,\mu) := \ln\psi_1(\lambda,\mu), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2;$$
$$\mathcal{A} := \{(\lambda,\mu):\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty\}, \qquad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda,\mu):\ \mathbf{A}_1(\lambda,\mu) < \infty\}.$$

Ясно, что в соответствии с условием [**C**] внутренности $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ содержат точку $(\lambda,\mu) = (0,0)$ и являются областями аналитичности функций $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$, $\mathbf{A}_1(\lambda,\mu)$, соответственно.

Если дана функция $F(u,v)$ двух переменных u и v, то нижними индексами (1) и (2) мы будем отмечать производные по первому и второму аргументу, соответственно, например:

$$F'_{(1)}(u_1,v_1)=\frac{\partial}{\partial u}\,F(u,v_1)\Big|_{u=u_1},\ \ F''_{(1)}(u_1,v_1)=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\,F(u,v_1)\Big|_{u=u_1},$$

$$F''_{(2)}(u_1,v_1)=\frac{\partial^2}{\partial v^2}\,F(u_1,v)\Big|_{v=v_1},\ \ F''_{(2,1)}(u_1,v_1)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\,F(u,v)\Big|_{(u,v)=(u_1,v_1)}.$$

Через $\mathbf{F}'=\mathbf{F}'(u,v)$ и $\mathbf{F}''=\mathbf{F}''(u,v)$ мы будем обозначать, соответственно, вектор

$$\mathbf{F}'=\mathbf{F}'(u,v)=(F'_{(1)}(u,v),F'_{(2)}(u,v))$$

и матрицу

$$\mathbf{F}''=\mathbf{F}''(u,v)=\|F''_{(i,j)}(u,v)\|_{i,j=1,2}.$$

Через $|\mathbf{F}''|$ обозначим определитель матрицы $\mathbf{F}''$.

Напомним, что, как и прежде, векторы, если они обозначаются одним символом, мы выделяем полужирным шрифтом.

Мы будем использовать известные интегро-локальные теоремы для сумм

$$\mathbf{S}_n:=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\xi}_j=(T_n,\ Z_n)$$

(см., например, [12], § 2.9 или теорему 5.3.2 ниже). Важную роль при этом играет *функция уклонений*

$$\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha):=\sup_{(\lambda,\mu)}\big\{\lambda\theta+\mu\alpha-\mathbf{A}(\lambda,\mu)\big\},\tag{5.3.1}$$

соответствующая случайному вектору $\boldsymbol{\xi}=(\tau,\zeta)$. Это есть преобразование Лежандра над выпуклой, непрерывной снизу функцией $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$; поэтому функция $\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha)$ также выпукла и непрерывна снизу.

Наряду с множествами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}$ нам понадобится область $\mathcal{L}$ аналитичности функции $\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha)$. Эта область содержит те точки (θ,α), для которых система уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{A}'_{(1)}(\lambda,\mu)=\theta,\\ \mathbf{A}'_{(2)}(\lambda,\mu)=\alpha,\end{cases}\tag{5.3.2}$$

для точки (λ,μ), в которой достигается верхняя грань в (5.3.1), имеет решение $(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha))$, принадлежащее $(\mathcal{A})$, так что

$$\mathcal{L}=\big\{\mathbf{A}'(\lambda,\mu):\ (\lambda,\mu)\in(\mathcal{A})\big\}.$$

Так как функция $\mathbf{A}(\lambda,\mu)$ строго выпукла в $(\mathcal{A})$, то такое решение всегда единственно (см., например, [74], гл. 1). Сказанное означает, что условия

$$(\theta,\alpha)\in\mathcal{L} \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha))\in(\mathcal{A})$$

эквивалентны. Ясно, что точка $(\theta,\alpha)=(a_\tau,a_\zeta)$, где

$$a_\tau:=\mathbf{E}\tau, \qquad a_\zeta:=\mathbf{E}\zeta,$$

всегда принадлежит $\mathcal{L}$; для нее $\big(\boldsymbol{\lambda}(a_\tau,a_\zeta),\boldsymbol{\mu}(a_\tau,a_\zeta)\big)=(0,0)\in(\mathcal{A})$.

Лемма 5.3.1. *Пусть* $(\theta,\alpha)\in\mathcal{L}$. *Тогда*

$$\boldsymbol{\Lambda}'_{(1)}(\theta,\alpha)=\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha), \qquad \boldsymbol{\Lambda}'_{(2)}(\theta,\alpha)=\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha). \tag{5.3.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha)&=\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha)\theta+\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)\alpha-\mathbf{A}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)\big), \qquad (5.3.4)\\ \boldsymbol{\Lambda}'_{(1)}(\theta,\alpha)&=\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha)+\boldsymbol{\lambda}'_{(1)}(\theta,\alpha)\theta+\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta,\alpha)\alpha-\\ &\qquad -\mathbf{A}'_{(1)}(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha))\boldsymbol{\lambda}'_{(1)}(\theta,\alpha)-\\ &\qquad\qquad -\mathbf{A}'_{(2)}(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha))\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta,\alpha).\end{aligned}$$

В силу (5.3.2) отсюда получаем первое равенство в (5.3.3). Аналогично устанавливается второе равенство, так что

$$\boldsymbol{\Lambda}'(\theta,\alpha):=\big(\boldsymbol{\Lambda}'_{(1)}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\Lambda}'_{(2)}(\theta,\alpha)\big)=\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)\big). \tag{5.3.5}$$

Лемма доказана.

Если τ и ζ независимы, то

$$\mathbf{A}(\lambda,\mu)=A^{(\tau)}(\lambda)+A^{(\zeta)}(\mu),$$

где

$$A^{(\tau)}(\lambda):=\ln\mathbf{E}e^{\lambda\tau}, \qquad A^{(\zeta)}(\mu):=\ln\mathbf{E}e^{\mu\zeta}.$$

Поэтому $\mathbf{A}'_{(1)}(\lambda,\mu)$ не зависит от μ, $\mathbf{A}'_{(2)}(\lambda,\mu)$ не зависит от λ, области $(\mathcal{A})$ и $\mathcal{L}$ прямоугольны.

Пусть, как и прежде, $\mathcal{D}$ — открытый конус аналитичности функции $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ (см. (3.5.37)). При $(\theta,\alpha)\in\mathcal{D}$ положим для краткости (см. (3.5.39), (3.5.40))

$$\begin{aligned}&(\widehat{\lambda},\widehat{\mu}):=\left(\lambda\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big),\mu\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\right)=\mathbf{D}'(\theta,\alpha)=\Big(-A\Big(\mu\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\Big),\mu\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\Big),\\ &(\widehat{\theta},\widehat{\alpha}):=\mathbf{A}'(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

(функции $\mu(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ определены в (3.5.14), (3.5.38), соответственно), так что векторы $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$, $(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})$ суть функции от одной переменной $\frac{\alpha}{\theta}$. Заметим, что при $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ справедливо (см. (3.3.2), (3.5.38))

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}(\theta, \alpha) = \theta D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \theta\left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) + \frac{\alpha}{\theta}\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) = \theta\widehat{\lambda} + \alpha\widehat{\mu}, \\ &\mathbf{A}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = 0, \ (\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Ниже будет установлено (см. лемму 5.3.2), что для $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ минимум по $r \in (0, \infty)$ функции

$$L(r) = L_{\theta,\alpha}(r) := r\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) \tag{5.3.8}$$

достигается в единственной точке

$$r_{\theta,\alpha} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}} = \frac{\alpha}{\widehat{\alpha}}.$$

Обозначим

$$Q(\theta, \alpha) := (\theta, \alpha)\mathbf{\Lambda}''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})(\theta, \alpha)^*, \ \ C(\theta, \alpha) := \sqrt{\frac{r_{\theta,\alpha}}{2\pi}\frac{|\mathbf{\Lambda}''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})|}{Q(\theta, \alpha)}}, \tag{5.3.9}$$

где верхний индекс * означает транспонирование, так что

$$(\theta, \alpha)\mathbf{\Lambda}''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})(\theta, \alpha)^* := \theta^2\mathbf{\Lambda}''_{(1)}(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) + 2\theta\alpha\mathbf{\Lambda}''_{(1,2)}(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) + \alpha^2\mathbf{\Lambda}''_{(2)}(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}).$$

Как уже отмечалось, для того, чтобы доказать основные утверждения этой главы, нам понадобятся интегро-локальные теоремы для меры восстановления

$$H(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{S}_n \in B),$$

соответствующей случайному блужданию $\{\mathbf{S}_n\}$. Чтобы различать однородный и неоднородный ($\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{\neq} \boldsymbol{\xi}$) случаи, мы будем меру восстановления в неоднородном случае, как и прежде, обозначать через $\widetilde{H}(B)$. Обозначим

$$\delta[t) := [t, t+\delta), \qquad \Delta[x) := [x, x+\Delta)$$

полуинтервалы шириной δ и Δ, соответственно, и положим

$$B = B_{t,x} := \delta[t) \times \Delta[x). \tag{5.3.10}$$

Введем в рассмотрение параметр T, характеризующий вместе с точкой (θ,α) удаление параллелепипеда $B_{t,x}$ от начала координат: $(t,x)=(T\theta,T\alpha)$. Мы будем предполагать, что точка $(\theta,\alpha):=\frac{1}{T}(t,x)$ принадлежит некоторому компакту $\mathbf{K}_{\mathcal{D}}\subset\mathbb{R}^2$, отделенному от точки $(0,0)$ и вложенному в $\mathcal{D}$.

Теорема 5.3.1. *Пусть* $(\theta,\alpha)\in\mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ *и выполнены условия «допустимой неоднородности»:*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{K}}\subset\mathcal{A}_1,\ \textit{где}\ \mathcal{A}_{\mathbf{K}}:=\left\{\left(\lambda\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big),\mu\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\right):\,(\alpha,\theta)\in\mathbf{K}_{\mathcal{D}}\right\}. \qquad (5.3.11)$$

Тогда для $\delta=\delta_T\to0$, $\Delta=\Delta_T\to0$ *достаточно медленно при* $T\to\infty$ *имеет место соотношение*

$$\widetilde{H}(B_{t,x})=\frac{\delta\Delta}{\sqrt{T}}\,\psi_1(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})C(\theta,\alpha)e^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)}\big(1+o(1)\big), \qquad (5.3.12)$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $(\theta,\alpha)\in\mathbf{K}_{\mathcal{D}}$.

Теорема 5.3.1 во многом доказана в [27] (см. теорему 5). Мы приведем здесь несколько иную версию доказательства этой теоремы по следующим причинам:

1) В [27] использовалось условие Крамера на характеристическую функцию для случайного вектора (τ,ζ). Для доказательства (5.3.12) достаточно использовать теорему 5.3.2 (см. ниже), в которой упомянутое условие не привлекается.

2) В теореме 5 в [27] получены асимптотические разложения, которые здесь не нужны. Это упрощает доказательство.

3) В теореме 5 в [27] рассматривался лишь однородный случай.

Исходным утверждением для доказательства теоремы 5.3.1 является интегро-локальная теорема для сумм $\mathbf{S}_n$ при $n\to\infty$. Напомним, что наряду с функциями $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$ одной переменной α (см. (3.5.14), (3.5.38)), которые суть частные производные второй функции уклонений $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ в точке $\theta=1$ (см. (3.5.39), (3.5.40)); в (5.3.3) определены функции $\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha)$, $\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)$ двух переменных θ,α как частные производные функции уклонений $\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\alpha)$. Последние будут использоваться в следующей интегро-локальной теореме, вытекающей из теоремы 2.8.2 в [12].

Теорема 5.3.2. *Пусть фиксирован некоторый компакт* $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}}$ *из области аналитичности* $\mathcal{L}$ *функции* $\boldsymbol{\Lambda}(\gamma,\beta)$; *точки* t *и* x *таковы, что* $(\gamma,\beta):=(\frac{t}{n},\frac{x}{n})\in\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}}$, *и при этом* $\big(\boldsymbol{\lambda}(\gamma,\beta),\boldsymbol{\mu}(\gamma,\beta)\big)\in(\mathcal{A}_1)$. *Тогда для*

$\delta = \delta_n \to 0$, $\Delta = \Delta_n \to 0$ *достаточно медленно при* $n \to \infty$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x)\big) = \\ = \frac{\delta\Delta}{n}\frac{\psi_1}{\psi}\, C_1(\gamma,\beta)e^{-n\boldsymbol{\Lambda}(\gamma,\beta)}\big(1+o(1)\big), \qquad (5.3.13)$$

где ψ_1, ψ *суть, соответственно, значения функций* $\psi_1(\cdot,\cdot)$, $\psi(\cdot,\cdot)$ *в точке* $\big(\boldsymbol{\lambda}(\gamma,\beta), \boldsymbol{\mu}(\gamma,\beta)\big)$,

$$C_1(\gamma,\beta) := \frac{\sqrt{|\boldsymbol{\Lambda}''(\gamma,\beta)|}}{2\pi},$$

остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $(\gamma,\beta) \in \mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}}$.

Ниже с помощью представления (5.3.13) будет найдена асимптотика меры восстановления $\widetilde{H}(B_{t,x})$ для удаляющихся множеств $B_{t,x}$ (см. теорему 5.3.1), т.е. асимптотика суммы вероятностей (5.3.13). Для доказательства теоремы 5.3.1 нам понадобится

Лемма 5.3.2. *Пусть* $(\theta,\alpha) \in \mathcal{D}$, *векторы* $(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})$, $(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})$ *определены в* (5.3.6). *Тогда:*

I. *Минимум функции* $L(r) = r\boldsymbol{\Lambda}(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r})$ (см. (5.3.8)) *достигается в единственной точке*

$$r_{\theta,\alpha} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}} = \frac{\alpha}{\widehat{\alpha}}.$$

Для функций $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}$ *справедливо представление*

$$\widehat{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\Big(\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}}\Big), \qquad \widehat{\mu} = \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}}\Big), \qquad (5.3.14)$$

где функции $\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha)$, $\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)$ *являются решением системы* (5.3.2). *При этом*

$$L(r_{\theta,\alpha}) = \mathbf{D}(\theta,\alpha), \qquad L'(r)\Big|_{r=r_{\theta,\alpha}} = 0, \qquad (5.3.15)$$

$$L''(r)\Big|_{r=r_{\theta,\alpha}} = \frac{1}{r^3_{\theta,\alpha}}\, Q(\theta,\alpha) = \frac{1}{r_{\theta,\alpha}}\, Q(\widehat{\theta},\widehat{\alpha}) > 0. \qquad (5.3.16)$$

II. *Для заданного* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что*

$$\min_{|r-r_{\theta,\alpha}|\geqslant\varepsilon} L(r) \geqslant L(r_{\theta,\alpha}) + \varepsilon_1.$$

Доказательство леммы 5.3.2 разобьем на несколько этапов.

1. Функция уклонений $\mathbf{\Lambda}(\theta,\alpha)$ выпукла (см., например, [10], гл. 9): для любых $p>0$, $q>0$, $p+q=1$, (θ_1,α_1), $(\theta_2,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ выполняется

$$p\mathbf{\Lambda}(\theta_1,\alpha_1)+q\mathbf{\Lambda}(\theta_2,\alpha_2)\geqslant\mathbf{\Lambda}(p\theta_1+q\theta_2,p\alpha_1+q\alpha_2).$$

Отсюда вытекает выпуклость в области $(0,\infty)$ функции $L(r)$: для любых $r_1>0$, $r_2>0$, $p>0$, $q>0$, $p+q=1$, справедливо

$$pL(r_1)+qL(r_2)\geqslant L(pr_1+qr_2).$$

2. Полагая $(\theta_r,\alpha_r):=\frac{1}{r}(\theta,\alpha)$ и дифференцируя функцию $L(r)$, получаем

$$L'(r)=\mathbf{\Lambda}(\theta_r,\alpha_r)-\mathbf{\Lambda}'_{(1)}(\theta_r,\alpha_r)\theta_r-\mathbf{\Lambda}'_{(2)}(\theta_r,\alpha_r)\alpha_r.$$

Привлекая (5.3.5), (5.3.4), находим

$$\begin{aligned}L'(r)=\mathbf{\Lambda}(\theta_r,\alpha_r)-\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r)\theta_r-\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)\alpha_r=\\ -\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)).\end{aligned}\qquad(5.3.17)$$

3. Дифференцируя функцию $L'(r)$ в представлении (5.3.17), получаем

$$\begin{aligned}&L''(r)=\\ &=-\mathbf{A}'_{(1)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)\big)\Big[\boldsymbol{\lambda}'_{(1)}(\theta_r,\alpha_r)\Big(-\frac{\theta}{r^2}\Big)+\boldsymbol{\lambda}'_{(2)}(\theta_r,\alpha_r)\Big(-\frac{\alpha}{r^2}\Big)\Big]-\\ &-\mathbf{A}'_{(2)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)\big)\Big[\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta_r,\alpha_r)\Big(-\frac{\theta}{r^2}\Big)+\boldsymbol{\mu}'_{(2)}(\theta_r,\alpha_r)\Big(-\frac{\alpha}{r^2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Поскольку в силу (5.3.5)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}'_{(1)}(\theta_r,\alpha_r)=\mathbf{\Lambda}''_{(1)}(\theta_r,\alpha_r),\qquad \boldsymbol{\lambda}'_{(2)}(\theta_r,\alpha_r)=\mathbf{\Lambda}''_{(1,2)}(\theta_r,\alpha_r),\\ \boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta_r,\alpha_r)=\mathbf{\Lambda}''_{(2,1)}(\theta_r,\alpha_r),\quad \boldsymbol{\mu}'_{(2)}(\theta_r,\alpha_r)=\mathbf{\Lambda}''_{(2)}(\theta_r,\alpha_r),\end{aligned}$$

и, в силу (5.3.2),

$$\mathbf{A}'_{(1)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)\big)=\theta_r,\qquad \mathbf{A}'_{(2)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_r,\alpha_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\alpha_r)\big)=\alpha_r,$$

то

$$L''(r)=\frac{1}{r}\,(\theta_r,\alpha_r)\mathbf{\Lambda}''(\theta_r,\alpha_r)(\theta_r,\alpha_r)^*>0,\qquad(5.3.18)$$

где матрица $\mathbf{\Lambda}''(\theta_r,\alpha_r)$ положительно определена (см., например, [12], § 1.2).

4. Из утверждений 1–3 вытекает следующее: *если число* $\rho > 0$ *таково, что для вектора* $(\theta_\rho, \alpha_\rho) := \frac{1}{\rho}(\theta, \alpha)$ *выполняются два условия:*

$$\mathbf{A}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_\rho, \alpha_\rho), \boldsymbol{\mu}(\theta_\rho, \alpha_\rho)\big) = 0, \qquad (\theta_\rho, \alpha_\rho) \in \mathcal{L}, \tag{5.3.19}$$

то точка $r = \rho$ *является единственной на полуоси* $(0, \infty)$ *точкой, где достигается минимум функции* $L(r)$, *т.е.*

$$L(\rho) = \inf_{r>0} L(r), \qquad L(r) > L(\rho) \quad \text{при} \quad r > 0, \quad r \neq \rho.$$

5. Убедимся, что число

$$\rho := \frac{\theta}{\mathbf{A}'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})}, \tag{5.3.20}$$

где, как и прежде, $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = \big(\lambda(\frac{\alpha}{\theta}), \mu(\frac{\alpha}{\theta})\big)$ (см. (5.3.6)), удовлетворяет обоим условиям (5.3.19). Для этого, продифференцируем по $t \in (\alpha_-, \alpha_+)$ каждое из двух равенств (см. (3.5.38)):

$$\mathbf{A}\big(\lambda(t), \mu(t)\big) = 0, \qquad -A(\mu(t)) = \lambda(t).$$

Получим два равенства

$$\mathbf{A}'_{(1)}\big(\lambda(t), \mu(t)\big)\lambda'(t) + \mathbf{A}'_{(2)}\big(\lambda(t), \mu(t)\big)\mu'(t) = 0, \;\; -A'\big(\mu(t)\big)\mu'(t) = \lambda'(t).$$

Исключив (с помощью второго равенства) из первого равенства функцию $\lambda'(t)$, получим тождество

$$\mathbf{A}'_{(1)}\big(\lambda(t), \mu(t)\big)A'\big(\mu(t)\big) = \mathbf{A}'_{(2)}\big(\lambda(t), \mu(t)\big).$$

Подставляя в это тождество $t = \frac{\alpha}{\theta} \in (\alpha_-, \alpha_+)$, и используя обозначение $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = \big(\lambda\big(\frac{\alpha}{\theta}\big), \mu\big(\frac{\alpha}{\theta}\big)\big)$, находим

$$\mathbf{A}'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})A'(\widehat{\mu}) = \mathbf{A}'_{(2)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}).$$

Воспользовавшись далее равенством $A'(\widehat{\mu}) = \alpha/\theta$ (напомним, что $A'\big(\mu(\alpha)\big) \equiv \alpha$), получаем (с учетом (5.3.20))

$$\big(\mathbf{A}'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}), \mathbf{A}'_{(2)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})\big) = (\theta_\rho, \alpha_\rho). \tag{5.3.21}$$

Поскольку $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A})$ (см. (5.3.7)), то из (5.3.21) вытекает, что

$$(\theta_\rho, \alpha_\rho) \in \mathcal{L}. \tag{5.3.22}$$

Мы убедились, что для числа ρ, определенного формулой (5.3.20), второе условие в (5.3.19) выполнено.

Обращаясь к системе (5.3.2), находим при $(\theta,\alpha)=(\theta_\rho,\alpha_\rho)$

$$\Big(\mathbf{A}'_{(1)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_\rho,\alpha_\rho),\boldsymbol{\mu}(\theta_\rho,\alpha_\rho)\big),\mathbf{A}'_{(2)}\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_\rho,\alpha_\rho),\boldsymbol{\mu}(\theta_\rho,\alpha_\rho)\big)\Big)= \\ =(\theta_\rho,\alpha_\rho)\in\mathcal{L}. \qquad (5.3.23)$$

Как уже отмечалось, система (5.3.2) при $(\theta,\alpha)\in\mathcal{L}$ имеет единственное решение $\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha),\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)\big)$ (см., например, [74], гл. 1). Поэтому, сравнивая тождества (5.3.21), (5.3.23), приходим к выводу, что

$$(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})=\big(\boldsymbol{\lambda}(\theta_\rho,\alpha_\rho),\boldsymbol{\mu}(\theta_\rho,\alpha_\rho)\big). \qquad (5.3.24)$$

Поскольку

$$\mathbf{A}(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})=0$$

(см. (5.3.7)), то мы убедились, что для числа ρ, определенного формулой (5.3.20), первое условие в (5.3.19) тоже выполнено. Из (5.3.24)) вытекает равенство (5.3.14). Подставляя далее $r=r_{\theta,\alpha}$ в равенства (5.3.17) и (5.3.18), используя при этом (5.3.14) и утверждение шага 4 доказываемой леммы, получаем доказательства равенств (5.3.15) и (5.3.16). Утверждение I доказываемой леммы установлено.

6. Утверждение II вытекает из утверждения I. Лемма 5.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.3.1. Чтобы несколько упростить изложение, мы будем предполагать при доказательстве теоремы 5.3.1, не ограничивая по существу общность, что вместо условия $(\theta,\alpha)\in\mathbf{K}_\mathcal{D}$ (т.е. условия теоремы 5.3.1) имеет место сходимость

$$(\theta,\alpha):=\left(\frac{t}{T},\frac{x}{T}\right)\to(\theta^0,\alpha^0) \quad \text{при} \quad T\to\infty, \qquad (5.3.25)$$

где (θ^0,α^0) — любая фиксированная точка из $\mathbf{K}_\mathcal{D}$ или из $\mathcal{D}$=($\mathcal{D}$). При этом условие допустимой неоднородности (5.3.11) можно записать в форме

$$\left(\lambda\left(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\right),\mu\left(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\right)\right)\in(\mathcal{A}_1). \qquad (5.3.26)$$

Если мы докажем соотношение (5.3.12) для $(\theta,\alpha)\to(\theta^0,\alpha^0)\in\mathcal{D}$, то из него путем стандартных рассуждений (связанных с существованием в $\mathbf{K}_\mathcal{D}$‘ сходящихся подпоследовательностей) можно установить, что остаточный член $o(1)$ в (5.3.12) будет равномерным по $(\theta,\alpha)\in\mathbf{K}_\mathcal{D}$.

Доказательство проведем в два этапа. На этапе I докажем теорему 5.3.1 в однородном случае. На втором этапе осуществим переход к неоднородному случаю.

I. Напомним, что меру восстановления для однородного случая, когда $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \zeta_1) =_d (\tau, \zeta) = \boldsymbol{\xi}$, мы обозначаем через $H(B)$, так что

$$H(B_{t,x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x)) \tag{5.3.27}$$

при $\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{=} \boldsymbol{\xi}$; множество $B_{t,x}$, определенное в (5.3.10), отделено от точки $(0,0)$. Ряд в правой части (5.3.27) разобьем на три суммы

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_1}, \qquad \sum_{n\in\mathcal{N}_2}, \qquad \sum_{n\in\mathcal{N}_3},$$

соответственно, по областям

$$\mathcal{N}_1 := \{1 \leqslant n < c_1 T\}, \quad \mathcal{N}_2 := \{c_1 T \leqslant n \leqslant c_2 T\}, \quad \mathcal{N}_3 := \{n > c_2 T\},$$

где $c_1 := r_{\theta^0,\alpha^0} - b$, $c_2 := r_{\theta^0,\alpha^0} + b$.

Убедимся, что если разность $c_2 - c_1 = 2b$ достаточно мала, то найдется компакт $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}} \subset \mathcal{L}$ такой, что для всех достаточно больших T при $n \in \mathcal{N}_2$, $r := \frac{n}{T}$ выполняется

$$(\gamma, \beta) := \left(\frac{t}{n}, \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) \in \mathbf{K}_{\Lambda}. \tag{5.3.28}$$

Действительно, поскольку $(\theta^0, \alpha^0) \in \mathcal{D}$, то выполняется

$$(\gamma_0, \beta_0) := \left(\frac{\theta^0}{r_{\theta^0,\alpha^0}}, \frac{\alpha^0}{r_{\theta^0,\alpha^0}}\right) \in \mathcal{L}$$

(см. (5.3.22) в доказательстве леммы 5.3.2). Следовательно, найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что компакт

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}} := \big\{(u,v) :\ |(u,v) - (\gamma_0, \beta_0)| \leqslant \varepsilon_1\big\}$$

целиком лежит в области $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Lambda}} \subset \mathcal{L}.$$

Поскольку $(\theta, \alpha) \to (\theta^0, \alpha^0)$ при $T \to \infty$ (см. (5.3.25)), и функция $r_{\theta,\alpha}$ аналитична в некоторой окрестности точки (θ^0, α^0), то найдутся $T_0 < \infty$ и $b > 0$ такие, что при всех $T \geqslant T_0$ и $n \in \mathcal{N}_2$ выполняется

$$\big|(\gamma, \beta) - (\gamma_0, \beta_0)\big| \leqslant \varepsilon_1$$

(напомним, что константа $b > 0$ занята в определении $\mathcal{N}_2$). Следовательно, (5.3.28) имеет место.

Соотношение (5.3.28) позволяет воспользоваться теоремой 5.3.2. При $r := \frac{n}{T} \in [c_1, c_2]$ и $\psi_1 = \psi$ получаем

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \delta\Delta \sum_{n\in\mathcal{N}_2} \frac{C_1(\gamma,\beta)}{Tr} e^{-n\mathbf{\Lambda}(\gamma,\beta)}\big(1+o(1)\big) =$$

$$= \delta\Delta \sum_{n:\, r\in[c_1,c_2]} \frac{C_1(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r})}{Tr}\, e^{-Tr\mathbf{\Lambda}(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r})}\big(1+o(1)\big).$$

Так как изменение функции $r\mathbf{\Lambda}(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}) = L(r)$ в окрестности точки $r = r_{\theta,\alpha} \in [c_1, c_2]$ на интервале длины $\frac{1}{T}$ есть $o(\frac{1}{T})$, то

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \delta\Delta \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{1}{r}\, C_1\left(\frac{\theta}{r}\cdot\frac{\alpha}{r}\right) e^{-TL(r)} dr\big(1+o(1)\big). \qquad (5.3.29)$$

Воспользуемся равенством $L(r_{\theta,\alpha}) = \mathbf{D}(\theta,\alpha)$ (см. первую формулу в (5.3.15)) и известным методом Лапласа подсчета интегралов вида (5.3.29). Получим (при $(\widehat{\theta},\widehat{\alpha}) = (\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}})$) равенство

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \delta\Delta \frac{C_1(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})\sqrt{2\pi}}{\sqrt{TL''(r_{\theta,\alpha})}r_{\theta,\alpha}}\, e^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)}\big(1+o(1)\big).$$

В силу леммы 5.3.2 (см. (5.3.16)) правая часть этого равенства совпадает с правой частью (5.3.12) при $\psi_1 = \psi$.

Оценим теперь $\sum_{n\in\mathcal{N}_1}$ и $\sum_{n\in\mathcal{N}_3}$. В силу многомерного экспоненциального неравенства чебышевского типа (см. теорему 1.3.2 в [12])

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-T\inf\left\{r\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\theta'}{r},\frac{\alpha'}{r}\right) :\ r>0,\ \theta\leqslant\theta'\leqslant\theta+\frac{\delta}{T},\ \alpha\leqslant\alpha'\leqslant\alpha+\frac{\Delta}{T}\right\}\right\},$$
$$r = \frac{n}{T}.$$

В силу утверждения II леммы 5.3.2 найдутся $\varepsilon_2 > 0$ и $T_0 < \infty$ такие, что при всех $T \geqslant T_0$, $n \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3$ выполняется

$$\inf\left\{r\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\theta'}{r},\frac{\alpha'}{r}\right) :\ r>0,\ \theta\leqslant\theta'\leqslant\theta+\frac{\delta}{T},\ \alpha\leqslant\alpha'\leqslant\alpha+\frac{\Delta}{T}\right\} \geqslant \mathbf{D}(\theta,\alpha)+\varepsilon_2,$$

так что при $T \geqslant T_0$

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x)\big) \leqslant e^{-T(\mathbf{D}(\theta,\alpha)+\varepsilon_2)}. \qquad (5.3.30)$$

Поэтому в силу (5.3.30)

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_1} \leqslant c_1 T e^{-T(D(\theta,\alpha)+\varepsilon_2)} = o\bigg(\frac{\delta\Delta}{\sqrt{T}} e^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)}\bigg).$$

Для оценки суммы $\sum_{n\in\mathcal{N}_3}$ разобьем ее на две части: на сумму $\sum'$ по области $c_2T \leqslant n \leqslant T^2$ и на сумму $\sum''$ по области $n > T^2$. Сумма $\sum'$ оценивается точно так же, как сумма $\sum_{n\in\mathcal{N}_1}$. Для суммы $\sum''$ имеем

$$\sum\nolimits'' \leqslant \sum_{n>T^2} \mathbf{P}(T_n \leqslant 2t) \leqslant \sum_{n>T^2} e^{-n\Lambda^{(\tau)}(\frac{2t}{n})}, \qquad (5.3.31)$$

где при $n > T^2$, $\frac{2\theta}{T} \leqslant \mathbf{E}\tau$ (в силу убывания функции $\Lambda^{(\tau)}(t)$ при $t < \mathbf{E}\tau$)

$$\Lambda^{(\tau)}\bigg(\frac{2t}{n}\bigg) = \Lambda^{(\tau)}\bigg(\frac{2\theta T}{n}\bigg) \geqslant \Lambda^{(\tau)}\bigg(\frac{2\theta}{T}\bigg).$$

Поскольку $\Lambda^{(\tau)}(0) = \infty$, то $\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{T}) \to \infty$ при $T \to \infty$, так что

$$\sum\nolimits'' \leqslant \sum_{n\geqslant T^2} e^{-n\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{T})} \leqslant 2e^{-T^2\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{T})} = o\bigg(\frac{\delta\Delta}{\sqrt{T}} e^{-TD(\theta,\alpha)}\bigg). \qquad (5.3.32)$$

Это доказывает утверждение теоремы 5.3.1 в однородном случае.

II. Рассмотрим теперь неоднородный случай. Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 5.3.3. *Пусть выполнены условия* (5.3.25), (5.3.26). *Тогда при некоторых $c > 0$, $C < \infty$, $T_0 < \infty$ и при всех $T \geqslant T_0$ справедливо неравенство*

$$\Big|\widetilde{H}\big(\delta[t),\ \Delta[x)\big) - \mathbf{E}\Big(H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big);\ |\boldsymbol{\xi}_1| \leqslant \ln^2 T\Big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant Ce^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)-c\ln^2 T}. \qquad (5.3.33)$$

Доказательство леммы 5.3.3 будет приведено позже.

В силу этой леммы для доказательства утверждения (5.3.12) теоремы 5.3.1 в общем случае достаточно отыскать асимптотику

$$\mathbf{E}\Big(H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big);\ \ |\boldsymbol{\xi}_1| \leqslant \ln^2 T\Big).$$

Если воспользоваться (5.3.33) и результатами раздела I доказательства, то получим

$$\widetilde{H}\big(\delta[t),\ \Delta[x)\big) = \\ = \delta\Delta\frac{1}{\sqrt{T}}\mathbf{E}\bigg(C_1\Big(\theta-\frac{\tau_1}{T},\alpha-\frac{\zeta_1}{T}\Big)e^{-T\mathbf{D}(\theta-\frac{\tau_1}{T},\ \alpha-\frac{\zeta_1}{T})}\big(1+o(1)\big);\ |\boldsymbol{\xi}_1|\leqslant \ln^2 T\bigg)+ \\ + o\bigg(\frac{\delta\Delta}{\sqrt{T}}\,e^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)}\bigg). \qquad (5.3.34)$$

Напомним, что $\mathbf{D}'(\theta,\alpha)=(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})$ (см. (5.3.6)). В силу выпуклости функции $\mathbf{D}(\theta,\alpha)$ для любых (τ_1,ζ_1) имеем неравенство

$$-T\mathbf{D}\bigg(\theta-\frac{\tau_1}{T},\alpha-\frac{\zeta_1}{T}\bigg)\leqslant -T\mathbf{D}(\theta,\alpha)+\widehat{\lambda}\tau_1+\widehat{\mu}\zeta_1.$$

Поэтому, учитывая, что в области $|\boldsymbol{\xi}_1|\leqslant \ln^2 T$ при $T\to\infty$ выполняется

$$-T\mathbf{D}\bigg(\theta-\frac{\tau_1}{T},\alpha-\frac{\zeta_1}{T}\bigg)= -T\mathbf{D}(\theta,\alpha)+\widehat{\lambda}\tau_1+\widehat{\mu}\zeta_1+o(1),$$

получаем, что правая часть (5.3.34) совпадает с правой частью (5.3.12).

Таким образом, нам осталось провести

Доказательство леммы 5.3.3. Так как $(0,0)\notin B_{t,x}$, то

$$\mathbf{P}\big((T_0,Z_0)\in B_{t,x}\big)=0,$$

и для $B_{t,x}=\delta[t)\times\Delta[x)$ имеем

$$\widetilde{H}(B_{t,x})=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\big((T_n,Z_n)\in B_{t,x}\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\big((\tau_1+T'_n,\zeta_1+Z'_n)\in B_{t,x}\big),$$

где (T'_n,Z'_n), $n=0,1,\ldots$ — последовательность сумм однородных, независимых слагаемых, независимая от (τ_1,ζ_1). Поэтому меру восстановления множества $B_{t,x}$ в неоднородном случае можно представить в виде

$$\widetilde{H}(B_{t,x})=\widetilde{H}\big(\delta[t),\ \Delta[x)\big)=\mathbf{E}H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big). \qquad (5.3.35)$$

В силу представления (5.3.35) имеем

$$\widetilde{H}\big(\delta[t),\ \Delta[x)\big)=\mathbf{E}\Big(H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big);\ |\boldsymbol{\xi}_1|\leqslant\ln^2 T\Big)+ \\ +\mathbf{E}\Big(H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big);\ |\boldsymbol{\xi}_1|>\ln^2 T\Big).$$

Поэтому

$$\Big|\widetilde{H}\big(\delta[t],\ \Delta[x)\big) - \mathbf{E}\Big(H\big(\delta[t-\tau_1),\ \Delta[x-\zeta_1)\big);\ |\boldsymbol{\xi}_1| \leqslant \ln^2 T\Big)\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

где

$$P_n := \mathbf{P}\big(T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x),\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big),$$

и для доказательства леммы надо установить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leqslant Ce^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha) - c\ln^2 T}, \tag{5.3.36}$$

Для всех достаточно больших T выполняется $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A})$. Поэтому для таких T при любом $n \geqslant 1$ в силу (5.3.7) имеем

$$\begin{aligned}P_n = \mathbf{E}\big(e^{-\widehat{\lambda}T_n - \widehat{\mu}Z_n + \widehat{\lambda}T_n + \widehat{\mu}Z_n};\ T_n \in \delta[t),\ Z_n \in \Delta[x),\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big) \leqslant \\ \leqslant \exp\big\{-\widehat{\lambda}t - \widehat{\mu}x + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\mu}|\Delta\big\}\mathbf{E}\big(e^{\widehat{\lambda}T_n + \widehat{\mu}Z_n};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big) = \\ = \exp\big\{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha) + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\mu}|\Delta\big\}\mathbf{E}\big(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big)\prod_{k=2}^{n}\mathbf{E}e^{\widehat{\lambda}\tau_k + \widehat{\mu}\zeta_k} \leqslant \\ \leqslant \exp\big\{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha) + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\mu}|\Delta\big\}\mathbf{E}\big(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big).\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что вектор $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$ в силу (5.3.7) лежит на границе множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ и для него при $k \geqslant 2$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\widehat{\lambda}\tau_k + \widehat{\mu}\zeta_k} = 1.$$

Применяя далее неравенство Гельдера, получаем для $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$

$$\mathbf{E}\big(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big) \leqslant \Big(\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\widehat{\lambda}\tau_1 + \frac{1}{p}\widehat{\mu}\zeta_1}\Big)^p \mathbf{P}^q\big(|\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big).$$

Так как в силу (5.3.26) для всех достаточно больших T выполняется $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A}_1)$, то выбирая параметр $\frac{1}{p} > 1$ достаточно близким к 1, получаем

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\widehat{\lambda}\tau_1 + \frac{1}{p}\widehat{\mu}\zeta_1} \leqslant C_0 < \infty. \tag{5.3.37}$$

Для $q = 1 - p$ и некоторых $C_1 < \infty$, $c_1 > 0$ имеем (в силу условия [$\mathbf{C}$])

$$\mathbf{P}^q\big(|\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 T\big) \leqslant C_1 e^{-c_1 \ln^2 T}. \tag{5.3.38}$$

Поэтому для любых $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$P_n \leqslant C_0^p C_1 e^{-T\mathbf{D}(\theta,\alpha)-c_1 \ln^2 T+|\widehat{\lambda}|\delta+|\widehat{\mu}|\Delta}. \tag{5.3.39}$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leqslant T^2 \sup_{n\geqslant 1} P_n + \sum_{n\geqslant T^2} P_n, \tag{5.3.40}$$

где первое слагаемое в правой части оценивается с помощью (5.3.39), а второе — с помощью неравенств (5.3.30), (5.3.31), в силу которых

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \sum_{n\geqslant T^2} P_n \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \sum_{n\geqslant T^2} \mathbf{P}(T_n<t+\delta) = -\infty. \tag{5.3.41}$$

Из неравенств (5.3.39)–(5.3.41) вытекает, что для некоторых $c > 0$, $C < \infty$ справедливо (5.3.36), т.е. требуемое утверждение (5.3.33). Лемма 5.3.3, а вместе с ней и утверждение теоремы 5.3.1, доказаны.

Рассмотрим теперь случай, когда распределение $P_{1,T}$ начального вектора $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_{1,T}$ *зависит от* T. Такая ситуация возникает при изучении приращений $Z(U+t)-Z(U)$, $t>0$, где U зависит от T; см. ниже доказательства теорем 5.2.3, 5.2.4. При каких условиях в этом случае сохраниться утверждение теоремы 5.3.1?

Пусть $\psi_1(\lambda,\mu) = \psi_{1,T}(\lambda,\mu)$ — преобразование Лапласа над распределением $P_{1,T}$. Мы будем предполагать, что существует множество $\widehat{\mathcal{A}}_1$, содержащее окрестность точки $(0,0)$ и не зависящее от T такое, что при всех достаточно больших T

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\widehat{\mathcal{A}}_1} \psi_{1,T}(\lambda,\mu) < c_1 < \infty \tag{5.3.42}$$

(равномерная версия условия [**C**] для $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_{1,T}$).

Следствие 5.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.3.1*, в которых условие допустимой неоднородности* (5.3.26) *имеет прежний вид:*

$$\left(\lambda\Big(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\Big), \mu\Big(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\Big)\right) \in (\widehat{\mathcal{A}}_1), \tag{5.3.43}$$

но относится к множеству $\widehat{\mathcal{A}}_1$*, определенному в* (5.3.42)*. Тогда утверждение теоремы* 5.3.1 *сохранится и для начальных скачков* $\boldsymbol{\xi}_{1,T}$*, зависящих от* T *и удовлетворяющих* (5.3.42).

Доказательство теоремы 5.3.1 в неоднородном случае основано на лемме 5.3.3. Просматривая ее доказательство, мы видим, что основные оценочные неравенства (5.3.37), (5.3.38) будут при выполнении условий следствия 5.3.1 равномерными по T, т.е. постоянные c, C в неравенствах (5.3.33), (5.3.36) будут независимы от T. Это доказывает следствие 5.3.1.

§ 5.4 Доказательство теоремы 5.2.1 и ее обобщения

5.4.1 Доказательство теоремы 5.2.1

(i). Докажем интегро-локальное утверждение (5.2.4) для процесса $Z(t)$. Аналогично предыдущему, условие $\alpha \in K^{\lessgtr}$, не ограничивая общности, можно сузить до условия $\alpha \to \alpha^0 \in K^{\lessgtr}$, а условие допустимой неоднородности до условия $\big(\lambda(\alpha^0), \mu(\alpha^0)\big) \in (\mathcal{A}_1)$.

Чтобы упростить изложение, мы детально будем рассматривать лишь более сложную задачу об асимптотике $P^{>}_{T,\alpha}$ в (5.2.4), соответствующую событию $B({}^{>}u, v, \mathbf{w})$. Изменения, которые нужно внести в доказательство в более простой задаче об асимптотике $P^{<}_{T,\alpha}$, будут названы в конце доказательства.

Чтобы упростить обозначения при изучении асимптотики $P^{>}_{T,\alpha}$, мы опустим на время индексы $\lessgtr$ и будем писать K вместо $K^{>}$, $B(u, v, \mathbf{w})$ вместо $B({}^{>}u, v, \mathbf{w})$, $I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w})$ вместо $I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w})$ и т.д.

При $u < T$ имеем

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x),\ B(u, v, \mathbf{w})\big) = P_{Z,1} + P_{Z,2}, \tag{5.4.1}$$

где

$$\begin{aligned} P_{Z,1} &:= \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x),\ B(u, v, \mathbf{w}),\ \tau_1 > T) = \\ &= \mathbf{I}_{\{0\in\Delta[x)\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant T+v,\ \zeta_1 \in \mathbf{w}),\ \ \mathbf{I}_{\{0\in\Delta[x)\}} = \mathbf{I}_{\{x\in(-\Delta,0]\}}, \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

$$\begin{aligned} P_{Z,2} &:= \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x),\ B(u, v, \mathbf{w}),\ \tau_1 \leqslant T) = \\ &= \int\limits_0^{T-u} \widetilde{H}(dy, \Delta[x))\mathbf{P}(\tau > T - y + v,\ \zeta \in \mathbf{w}). \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Оценим сначала часть

$$J_1 := \int\limits_{T(1-p)}^{T-u} \widetilde{H}\big(dy, \Delta[x)\big)\mathbf{P}(\tau > T - y + v,\ \zeta \in \mathbf{w})$$

интеграла в правой части (5.4.3), взятую по области $(T(1-p), T-u)$ при фиксированном $p \in (0,1)$. Для удобства ссылок оценку сверху интеграла J_1 сформулируем в виде леммы.

Лемма 5.4.1. *При любых $\varepsilon > 0$, $u \leqslant u_0$ и $T \to \infty$ справедливо неравенство*

$$J_1 \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\,\psi_1 C(1,\alpha) e^{-TD(\alpha)}\bigl(1+o(1)\bigr)\times \\ \times \int_u^{\infty} e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y+v-\varepsilon,\ \zeta \in \mathbf{w}), \quad (5.4.4)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \leqslant u_0$, от v и $\mathbf{w}$ не зависит; $C(\theta,\alpha)$ определено в (5.3.9).

Доказательство леммы 5.4.1. Чтобы упростить выкладки докажем (5.4.4) сначала при $\mathbf{w} = \mathbb{R}$. Пусть $p > 0$ фиксировано и таково, что в точках (t', x), $t' \in \bigl(T(1-p), T\bigr)$ применима интегро-локальная теорема 5.3.1 для меры восстановления. Положив $y_k = k\delta$, $k = 0, 1, \ldots$, получим оценку сверху

$$J_1 \leqslant \sum_{u \leqslant y_k \leqslant pT} \widetilde{H}\bigl(\delta[T-y_k),\ \Delta[x)\bigr)\mathbf{P}(\tau > y_k + v - \delta). \quad (5.4.5)$$

По теореме 5.3.1

$$J_1 \leqslant \sum_{u \leqslant y_k \leqslant pT} \frac{\delta\Delta}{\sqrt{T}}\psi_1\bigl(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\bigr)C(1,\alpha)\times \\ \times \exp\Bigl\{-T\mathbf{D}\Bigl(1-\frac{y_k}{T},\alpha\Bigr)\Bigr\}\bigl(1+o(1)\bigr)\mathbf{P}(\tau > y_k + v - \delta), \quad (5.4.6)$$

где $o(1)$ равномерно по $u \leqslant u_0$ и от v не зависит. В силу выпуклости функции $\mathbf{D}(v,\alpha)$

$$\mathbf{D}\Bigl(1-\frac{y_k}{T},\alpha\Bigr) \geqslant \mathbf{D}(1,\alpha) - \frac{y_k}{T}\,\mathbf{D}'_{(1)}(1,\alpha). \quad (5.4.7)$$

По лемме 3.5.2 при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$ выполняется

$$\mathbf{D}'_{(1)}(1,\alpha) = \lambda(\alpha) < \lambda_+. \quad (5.4.8)$$

Так как точка α^0 отделена от запретного множества $[\beta_-, \beta_+]$ (см. лемму 3.5.3), то значение $\lambda(\alpha)$ отделено от λ_+:

$$\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \varepsilon \quad \text{при некотором} \quad \varepsilon > 0. \quad (5.4.9)$$

Поскольку случай $\lambda_+ = \infty$ является более простым с точки зрения последующих выкладок, то в (5.4.9) и в дальнейшем для определенности мы будем рассматривать лишь более сложный случай $\lambda_+ < \infty$ (рассмотрения в случае $\lambda_+ = \infty$ отличаются лишь упрощениями).

Из (5.4.6), (5.4.7), (5.4.9) вытекает, что

$$J_1 \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{T}} \psi_1 C(1,\alpha) e^{-TD(\alpha)} \times \\ \times \sum_{u \leqslant y_k \leqslant pT} \delta e^{\lambda(\alpha) y_k} \mathbf{P}(\tau > y_k + v - \delta)\big(1 + o(1)\big), \quad (5.4.10)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \leqslant u_0$ и от v не зависит. Далее, пусть для определенности $\lambda(\alpha) \geqslant 0$. Тогда

$$\delta e^{y_k \lambda(\alpha)} \mathbf{P}(\tau > y_k + v - \delta) \leqslant \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} e^{\lambda(\alpha) y} \mathbf{P}(\tau > y + v - 2\delta) dy$$

и из (5.4.10) находим

$$J_1 \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{T}} \psi_1 C(1,\alpha) e^{-TD(\alpha)} \times \\ \times \int\limits_{u}^{pT} e^{\lambda(\alpha) y} \mathbf{P}(\tau > y + v - 2\delta) dy \big(1 + o(1)\big), \quad (5.4.11)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \leqslant u_0$ и от v не зависит, а интеграл в правой части (5.4.11) сходится в силу (5.4.8).

Из (5.4.11) вытекает, что J_1 при всех достаточно больших T не превосходит правой части в (5.4.4) при $\mathbf{w} = \mathbb{R}$. Но если в неравенства (5.4.5), (5.4.6),(5.4.10),(5.4.11), под знаком вероятности добавить событие $\{\zeta \in \mathbf{w}\}$, то все утверждения в названных неравенствах о независимости от v перейдут очевидным образом в утверждения о независимости от v, $\mathbf{w}$. Таким образом, J_1 при всех достаточно больших T не превосходит правой части в (5.4.4) равномерно по $\alpha \in K$, $u \leqslant u_0$, v, $\mathbf{w}$. Лемма 5.4.1 доказана.

Аналогично получаем оценку снизу для J_1 того же вида. (В правой части (5.4.5) $\mathbf{P}(\tau > y_k + v - \delta)$ надо заменить на $\mathbf{P}(\tau > y_k + v + \delta)$, а вместо неравенства (5.4.7) использовать асимптотическое представление

$$\mathbf{D}\left(1 - \frac{y_k}{T}, \alpha\right) = \mathbf{D}(1,\alpha) - \frac{y_k}{T} \mathbf{D}'_{(1)}(1,\alpha) + O\left(\left(\frac{y_k}{T}\right)^2\right)$$

при малых $\frac{y_k}{T}$ (при малых p)).

В итоге из этих оценок мы получаем

$$J_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\psi_1 C(1,\alpha)e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big)\times \\ \times\int\limits_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y+v-\varepsilon,\ \zeta\in\mathbf{w}). \quad (5.4.12)$$

Оценим теперь сверху вторую часть J_2 интеграла в (5.4.3):

$$J_2 := \int\limits_0^{T(1-p)} \widetilde{H}(dy,\Delta[x])\mathbf{P}(\tau > T-y+v,\ \zeta\in\mathbf{w}) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^{T(1-p)} \widetilde{H}\big(dy,\Delta[x]\big)\mathbf{P}(\tau > T-y). \quad (5.4.13)$$

Для $y_k := \delta k,\ k=0,1,\ldots,\ v\geqslant 0$ имеем

$$J_2 \leqslant \sum_{k=0}^{[T(1-p)/\delta]} \widetilde{H}\big(\delta[y_k),\Delta[x)\big)\mathbf{P}(\tau > T-y_k) \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{[T(1-p)/\delta]} \widetilde{H}\big(\delta[y_k),\ \Delta[x)\big)\mathbf{P}(\tau > T-y_k). \quad (5.4.14)$$

Воспользуемся следующим утверждением (ср. с теоремой 5.3.1).

Лемма 5.4.2. *При некоторых $C<\infty$, $T_0<\infty$ и всех*

$$T\geqslant T_0,\quad 0\leqslant y\leqslant T(1-p),\quad 0<\delta\leqslant 1,\quad 0<\Delta\leqslant 1$$

справедливо неравенство

$$\widetilde{H}\big(\delta[y),\Delta[x)\big) \leqslant T^2 e^{-\lambda(\alpha)y-\mu(\alpha)x}. \quad (5.4.15)$$

Лемму 5.4.2 докажем ниже в настоящем разделе, а сейчас с помощью этой леммы продолжим оценивание сверху J_2.

Из экспоненциального неравенства Чебышева вытекает, что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\tau\geqslant T)\leqslant -\lambda_+. \quad (5.4.16)$$

Из соотношений (5.4.15), (5.4.16) следует оценка сверху для логарифма J_2:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln J_2 \leqslant - \min_{0\leqslant w\leqslant 1-p} \big\{\lambda(\alpha^0)w+\mu(\alpha^0)\alpha^0+(1-w)\lambda_+\big\}. \qquad (5.4.17)$$

Поскольку в силу условия $\alpha^0 \notin [\beta_-, \beta_+]$ выполняется $\lambda_+ - \lambda(\alpha^0) > 0$, то нижняя грань в правой части (5.4.17) достигается при $w = 1 - p$, так что правая часть в (5.4.17) равна

$$-\lambda(\alpha^0) - \mu(\alpha^0)\alpha^0 - p\big(\lambda_+ - \lambda(\alpha^0)\big) = -\mathbf{D}(1, \alpha^0) - p\big(\lambda_+ - \lambda(\alpha^0)\big).$$

Поэтому

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln J_2 \leqslant -\mathbf{D}(1, \alpha^0) - p\big(\lambda_+ - \lambda(\alpha^0)\big) \leqslant$$

$$\leqslant -D(\alpha) - \frac{p}{2}\big(\lambda_+ - \lambda(\alpha^0)\big). \qquad (5.4.18)$$

Из (5.4.18) вытекает, что при некотором $\varepsilon > 0$ и $T \to \infty$

$$J_2 = O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}) = o\bigg(\frac{\Delta}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)}\bigg). \qquad (5.4.19)$$

Таким образом, сумма $P_{Z,2} = J_1 + J_2$ равна правой части в (5.4.12). Вместе с (5.4.1)-(5.4.3) это доказывает требуемое утверждение (5.2.4). Следовательно, для доказательства (5.2.4) нам осталось выполнить

Доказательство леммы 5.4.2. Для любых $n \geqslant 1$, $\Delta \leqslant 1$, $\delta \leqslant 1$ имеем

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)\big) =$$

$$=\mathbf{E}\Big(\exp\big\{ - \lambda(\alpha)T_n - \mu(\alpha)Z_n + \lambda(\alpha)T_n + \mu(\alpha)Z_n\big\};\ T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\big\{ - \lambda(\alpha)y - \mu(\alpha)x\big\} e^{|\lambda(\alpha)|\delta + |\mu(\alpha)|\Delta} \mathbf{E} e^{\lambda(\alpha)T_n + \mu(\alpha)Z_n} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\big\{ - \lambda(\alpha)y - \mu(\alpha)x\big\} e^{|\lambda(\alpha)| + |\mu(\alpha)|} \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) \psi^{n-1}\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big).$$

Поскольку $\alpha \to \alpha^0$ при $T \to \infty$, то для всех достаточно больших T

$$\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) \in (\mathcal{A}), \qquad \psi\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) = 1,$$

и при этом в силу условия $\big(\lambda(\alpha^0), \mu(\alpha^0)\big) \in (\mathcal{A}_1)$ допустимой неоднородности

$$\limsup_{T\to\infty} \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) < \infty.$$

Поэтому для некоторых $T_0 < \infty$, $C_1 < \infty$ и при всех $T \geqslant T_0$, $n \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)) \leqslant C_1 e^{-l(\alpha)y - \mu(\alpha)x}.$$

Следовательно, при всех $T \geqslant T_0$

$$\widetilde{H}\big(\delta[y),\ \Delta[x)\big) \leqslant C_1 T^2 e^{-\lambda(\alpha)y-\mu(\alpha)x} + \\ + \sum_{n>T^2} \mathbf{P}\big(T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)\big). \qquad (5.4.20)$$

Далее, при $y+\delta \leqslant T(1-p)+\delta \leqslant T$ имеем

$$\mathbf{P}\big(T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)\big) \leqslant \mathbf{P}(T_n \leqslant T) \leqslant \mathbf{P}\Big(\sum_{k=2}^{n} \tau_k \leqslant T\Big),$$

и в силу экспоненциального неравенства Чебышева при $n \geqslant T^2+1$

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{k=2}^{n} \tau_k \leqslant T\Big) \leqslant e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}(\frac{T}{n-1})} \leqslant e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}(\frac{1}{T})},$$

где $\Lambda^{(\tau)}(\frac{1}{T}) \to \Lambda^{(\tau)}(0) = \infty$ при $T \to \infty$. Поэтому (ср. с (5.3.31), (5.3.32), где рассмотрен однородный случай) получаем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \sum_{n>T^2} \mathbf{P}\big(T_n \in \delta[y),\ Z_n \in \Delta[x)\big) = -\infty. \qquad (5.4.21)$$

Из соотношений (5.4.20), (5.4.21) вытекает (5.4.15). Лемма 5.4.2 и соотношение (5.2.4) доказаны.

(ii). Докажем утверждение (ii) теоремы 5.2.1 для однородных процессов $Z(t)$. Рассмотрим первое слагаемое в правой части (5.2.4). Либо $0 \notin K$, и тогда это слагаемое отсутствует (при достаточно малом Δ); либо $0 \in K$, и тогда $0 \notin [\beta_-, \beta_+]$ (см. лемму 3.5.3) и, стало быть, множество $[\beta_-, \beta_+]$ пусто, $\lambda_+^{(\tau_1)} = \lambda_+ > D(0)$. В этом случае выполнено достаточное условие (5.2.9) замечания 5.2.2, в силу которого рассматриваемое слагаемое есть $O(e^{-T(D(0)+\varepsilon)})$.

(iii). Пусть $Z(t) = Z^{(st)}(t)$. Если $\alpha \in K$, то для α' из окрестности точки α выполняется $\psi\big(\lambda(\alpha'), \mu(\alpha')\big) = 1$ и в силу (5.2.10)

$$\psi\big(0, \mu(\alpha')\big) < \infty, \qquad \psi^{(st)}\big(\lambda(\alpha'), \mu(\alpha')\big) < \infty$$

Это означает, что $(\mathcal{A}_K) \subset (\mathcal{A}^{(st)})$ и условие допустимой однородности для $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{(st)}$ выполнено. Последующие рассуждения, доказывающие пренебрежимость первого слагаемого в правой части (5.2.4) повторяют рассуждения раздела (ii), так как здесь снова, как в п. (ii), $\lambda_+^{(\tau_1)} = \lambda_+$.

Пусть область $\mathcal{A}$ прямоугольна. В этом случае соотношения

$$\mathcal{A}_K = \Big\{\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) :\ \alpha \in K\Big\} \subset (\mathcal{A}) = (-\infty, \lambda_+) \times (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)})$$

с необходимостью влекут за собой (5.2.5).

Доказательство утверждения (5.2.4) теоремы 5.2.1 для вероятности $P^{<}_{T,\alpha}$ отличается от изложенного выше значительными упрощениями. Интеграл в пределах от 0 до $T-u$ в (5.4.3) надо заменить интегралом в пределах от $T-u$ до T. Этому интегралу в (5.2.4) будет соответствовать интеграл

$$I_Z(\alpha, {}^{<}u, v, \mathbf{w}) = \int\limits_0^u e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y+v, \zeta \in \mathbf{w})dy,$$

который всегда конечен и нет необходимости обеспечивать с помощью условия $\alpha \notin [\beta_-, \beta_+]$ неравенство $\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \varepsilon$ и конечность интеграла $I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w})$, как это делалось при изучении вероятности $P^{>}_{T,\alpha}$. Изучение асимптотики интеграла в пределах от $T-u$ до T в (5.4.3), который мы получим после названной выше замены, также происходит значительно проще.

Теорема 5.2.1 доказана.

Совершенно аналогично, но со многими упрощениями можно рассматривать случай, когда случайная величина τ арифметична, ζ нерешетчата, а параметр $T = n$ является целочисленным. В результате получим, в частности, следующее утверждение.

Следствие 5.4.1. *Пусть случайная величина ζ нерешетчата. В однородном случае для $\alpha \in K^{<}$, любого фиксированного l и $\Delta = \overline{o}(1)$ при $n \to \infty$ выполняется*

$$\mathbf{P}\big(Z(n) \in \Delta[x),\ \gamma(n) = l\big) = \frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{n}}\, e^{-nD(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > l)\big(1 + o(1)\big).$$

5.4.2 Распространение результатов на случай, когда распределение $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ зависит от некоторого параметра

Рассмотрим теперь случай, когда распределение $P_1 = P_{1,U}$ начального вектора $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_{1,U}$ зависит от некоторого параметра U таким образом, что

$$P_{1,U} \Rightarrow P_1 \quad \text{при} \quad U \to \infty. \tag{5.4.22}$$

Пусть U зависит от T таким образом, что $U \to \infty$ при $T \to \infty$. Возникает вопрос при каких условиях на $P_{1,U}$ при $T \to \infty$ сохранится утверждение теоремы 5.2.1. Нам понадобится следующее условие

$[\widehat{\mathbf{P}}_1]$. *Существуют распределение $\widehat{P}_1$ в $\mathbb{R}^2$ и постоянная $c < \infty$ такие, что*

$$1. \qquad P_{1,U}\big((t,\infty)\times\Delta[x]\big)\leqslant c\widehat{P}_1\big((t,\infty)\times\Delta[x]\big) \tag{5.4.23}$$

при всех $t\geqslant 0$, x, *любом фиксированном* $\Delta>0$ *и всех достаточно больших* U *(или* T*).*

$$2. \qquad \widehat{\psi}_1(\lambda,\mu)<\infty \quad \textit{при} \quad (\lambda,\mu)\in\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}},$$

где $\widehat{\psi}_1(\lambda,\mu)$ *— преобразование Лапласа над распределением* $\widehat{P}_1$ *и, как и прежде,*

$$\mathcal{A}_K=\Big\{\big(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\big):\ \alpha\in K\Big\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.4.1. *Пусть* ψ_1, $\psi_{1,T}$ *— преобразования Лапласа над распределениями* P_1, $P_{1,T}$, *соответственно. Пусть выполнены условия теоремы* 5.2.1, *в которых условие допустимой неоднородности* (5.2.3) *заменено на условия* (5.4.22) *и* $[\widehat{\mathbf{P}}_1]$. *Тогда* $\psi_{1,U}(\lambda,\mu)\to\psi_1(\lambda,\mu)$ *при* $(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}_{K^{\lessgtr}}$, $T\to\infty$ *и*

$$\mathbf{P}\big(Z(T)\in\Delta[x],B(^{\lessgtr}u,v,\mathbf{w})\big)= \\ =\frac{\Delta}{\sqrt{T}}\,\psi_1C(\alpha)e^{-TD(\alpha)}I_Z(\alpha,{}^{\lessgtr}u,v,\mathbf{w})\big(1+o(1)\big) \tag{5.4.24}$$

при $\Delta=\overline{o}(1)$, $T\to\infty$ (ср. с теоремой 5.2.1).

Доказательство. Пусть K — одно из множеств $K^{\lessgtr}$. Из условия $[\widehat{\mathbf{P}}_1]$ вытекает, что

$$\psi_{1,U}(\lambda,\mu)\leqslant c\widehat{\psi}_1(\lambda,\mu) \tag{5.4.25}$$

при $(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}_K$ и всех достаточно больших U. Действительно, интегрируя два раза по частям, получаем

$$\psi_{1,U}(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{\lambda t+\mu x}P_{1,U}(dt,dx)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\Big[e^{\lambda t}P_{1,U}((0,\infty)\times dx)+\int\limits_0^{\infty}\lambda e^{\lambda t}P_{1,U}\big((t,\infty)\times dx\big)dt\Big]\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\Big[e^{\lambda t}\lambda t\widehat{P}_1\big((0,\infty)\times dx\big)+\int\limits_0^{\infty}\lambda e^{\lambda t}\widehat{P}_1\big((t,\infty)\times dx\big)dt\Big]=c\widehat{\psi}_1(\lambda,\mu).$$

Из (5.4.25) следует, что

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}_K} \psi_{1,U}(\lambda,\mu) \leqslant c_1 < \infty \tag{5.4.26}$$

при всех достаточно больших U. Так как $\mathcal{A}_K$ содержит окрестность точки $(0,0)$ (см. замечание 5.2.2), то в силу (5.4.26) выполнено условие (5.3.42) при $\widehat{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{A}_K$. Поскольку в условиях теоремы 5.3.1

$$\left(\lambda\Big(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\Big), \mu\Big(\frac{\alpha^0}{\theta^0}\Big)\right) \in (\mathcal{A}_K) = (\widehat{\mathcal{A}}_1),$$

то выполнено также и условие (5.3.43) следствия 5.3.1 при $\widehat{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{A}_K$. Кроме того, из (5.4.22) и (5.4.25) следует, что

$$\psi_{1,U}(\lambda,\mu) \to \psi_1(\lambda,\mu) \tag{5.4.27}$$

при $T\to\infty$ и $(\lambda,\mu)\in(\mathcal{A}_K)$. Из следствия 5.3.1 и (5.4.27) вытекает, что при выполнении (5.4.22) и $[\widehat{\mathbf{P}}_1]$ сохраняется утверждение теоремы 5.3.1 и, стало быть, все рассуждения в доказательстве теоремы 5.2.1. Теорема 5.4.1 доказана.

Воспользуемся теперь теоремой 5.4.1 для получения интегро-локальной теоремы для приращений

$$Z_U(t) = Z(U+t) - Z(U),$$

где $Z(t)$ — однородный ОПВ. В этом случае начальный скачок $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_{1,U}$ зависит от U и равен

$$\boldsymbol{\xi}_{1,U} = \big(\chi(U), \zeta(U)\big).$$

Пусть для определенности $\lambda_+ \geqslant D(0)$, $K = K^<$. Покажем, что распределение $P_{1,U}$ вектора $\boldsymbol{\xi}_{1,U}$ удовлетворяет условию $[\widehat{\mathbf{P}}_1]$, в котором в качестве распределения $\widehat{P}_1$ следует взять распределение $P^{(st)}$ вектора $\boldsymbol{\xi}^{(st)}$ с преобразованием Лапласа

$$\psi^{(st)}(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda a_\tau}\big(\psi(\lambda,\mu) - \psi(0,\mu)\big).$$

Действительно, из рассмотрений § 1.1 следует, что $P_{1,U} \Rightarrow P^{(st)}$ при $U\to\infty$, так что $P_1 = P^{(st)}$. Неравенство (5.4.23) при $\widehat{P}_1 = P_1$ нетрудно извлечь из доказательства леммы 1.1.1. Мы получим таким образом

Следствие 5.4.2. *Пусть $Z(t)$ однородный ОПВ, $\lambda_+ \geqslant D(0)$, $\alpha = x/T \in K$, $\Delta = \overline{o}(1)$ при $T\to\infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(Z(U+T) - Z(U) \in \Delta[x)\big) = \\ = \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\,\psi^{(st)} C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})\big(1+o(1)\big)$$

при $U\to\infty$, $T\to\infty$.

§ 5.5 Доказательство теорем 5.2.2–5.2.4

5.5.1 Доказательство теоремы 5.2.2

Ограничимся опять рассмотрением более сложного случая об изучении асимптотики $\mathbf{P}\big(Y(T) \in \Delta[x), B({}^{>}u, v)\big)$.

(i). При $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$ имеем

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}\mathbf{E}(e^{\mu\zeta};\ \tau > y)dy = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{\mu z}M(\lambda, dz),$$

где

$$M(\lambda, dz) := \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}\mathbf{P}(\zeta \in dz,\ \tau > y)dy.$$

При $\lambda \neq 0$ положим $U(y) := \mathbf{P}(\zeta \in dz,\ \tau > y)$, $V(y) := \frac{e^{\lambda y}}{\lambda}$. Тогда

$$M(\lambda, dz) = \int\limits_0^\infty U(y)dV(y) = U(y)V(y)\ \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}\mathbf{P}(\zeta \in dz,\ \tau \in dy),$$

где

$$U(y)V(y)\ \Big|_0^\infty = -\frac{1}{\lambda}\,\mathbf{P}(\zeta \in dz).$$

Поэтому в силу равенства $\psi(\lambda, \mu) = 1$ и условия (5.2.5) получаем $\mu \in (\mu_-^{(\zeta)},\ \mu_+^{(\zeta)})$,

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \frac{1 - \psi^{(\zeta)}(\mu)}{\lambda} < \infty$$

(если $\lambda = \lambda(\alpha) > 0$, то в силу неравенства $I_Y(\alpha, 0, 0) > 0$ выполняется $\psi^{(\zeta)}(\mu) < 1$ и условие (5.2.5) выполняется автоматически).

При $\lambda = 0$ положим $V(y) = y$. Тогда

$$M(0, dz) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(\zeta \in dz, \tau > y)dy = \int\limits_0^\infty y\mathbf{P}(\zeta \in dz, \tau \in dy),$$

$$I_Y(\alpha, {}^{>}0, 0) = \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_0^\infty e^{\mu z}y\mathbf{P}(\zeta \in dz, \tau \in dy) = \psi'_{(1)}(0, \mu).$$

Соотношения (5.2.14), (5.2.15) доказаны.

(ii). Доказательство второго утверждения основано на теореме 5.2.1. Обозначим для краткости через B_Y событие

$$B_Y = B_Y(x, \Delta, {}^{>}u, v) := \big\{Y(T) \in \Delta[x),\ B({}^{>}u, v)\big\}$$

и заметим, что

$$\mathbf{P}(B_Y) = \mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 > T) + \mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T), \tag{5.5.1}$$

где

$$\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 > T) = \mathbf{P}\big(\tau_1 > T + v,\ \zeta_1 \in \Delta[x)\big).$$

Второе слагаемое в (5.5.1) равно

$$\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\Big(Z(T) \in dz,\ B\big({}^{>}u, v, \Delta[x-z)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big). \tag{5.5.2}$$

Найдем приближение интеграла в правой части (5.5.2) с помощью ряда

$$\sum := \sum_k \mathbf{P}\Big(Z(T) \in \delta[z_k);\ B\big({}^{>}u, v, \Delta[x-z_k)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big), \tag{5.5.3}$$

где

$$z_k = x - s_k, \qquad s_k = k\delta, \qquad k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Пусть Δ фиксировано, а δ сходится к нулю при $T \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T) = \sum_k \int\limits_{\delta[z_k)} \mathbf{P}\Big(Z(T) \in dz,\ B\big({}^{>}u, v, \Delta[x-z)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big) \leqslant \\ \leqslant \sum_k \int\limits_{\delta[z_k)} \mathbf{P}\Big(Z(T) \in dz,\ B\big({}^{>}u, v, \Delta'[x'-z_k)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big), \tag{5.5.4}$$

где

$$x' = x - \delta, \qquad \Delta' = \Delta + \delta, \tag{5.5.5}$$

так что

$$\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T) \leqslant \sum_k \mathbf{P}\Big(Z(T) \in \delta[z_k),\ B\big({}^{>}u, v, \Delta'[x'-z_k)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big).$$

Совершенно аналогично получаем оценку снизу

$$\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T) \geqslant \sum_k \mathbf{P}\Big(Z(T) \in \delta[z_k),\ B\big({}^{>}u, v, \Delta''[x-z_k)\big),\ \tau_1 \leqslant T\Big),$$

где

$$\Delta'' = \Delta - \delta. \tag{5.5.6}$$

Найдем теперь асимптотику ряда $\sum$ в (5.5.3) и убедимся, что она нечувствительна к заменам (5.5.5), (5.5.6) при $\delta \to 0$.

Рассмотрим сначала подсумму $\sum_1$ ряда в (5.5.3), образованную слагаемыми, соответствующими s_k таким, что $|s_k| < \varepsilon\sqrt{T}$, где $\varepsilon \to 0$ при $T \to \infty$, $\varepsilon\sqrt{T} \to \infty$. Обозначим

$$\alpha_k := \frac{z_k}{T} = \alpha - \frac{s_k}{T}.$$

Тогда при $T \to \infty$

$$D(\alpha_k) = D(\alpha) - \frac{s_k}{T}\,\mu(\alpha) + O\biggl(\Bigl(\frac{s_k}{T}\Bigr)^2\biggr). \tag{5.5.7}$$

Функции $C(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, представленные в (5.2.4), непрерывны по α, так что

$$C(\alpha_k) \sim C(\alpha), \qquad \lambda(\alpha_k) \sim \lambda(\alpha) \quad \text{при} \quad |s_k| < \varepsilon\sqrt{T}, \quad T \to \infty.$$

Поэтому, если $\delta \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$, то по теореме 5.2.1 (см. также (5.4.3))

$$\sum\nolimits_1 \sim \frac{\delta}{\sqrt{T}}\,\psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} \sum_{k:\ |s_k|<\varepsilon\sqrt{T}} e^{\mu(\alpha)s_k} \times$$
$$\times \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}\bigl(\tau > y+v,\ \zeta \in \Delta[s_k)\bigr)dy, \tag{5.5.8}$$

где сумма в правой части, умноженная на δ, асимптотически эквивалентна

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(\alpha)s} \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in \Delta[s))dyds =$$
$$= \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \int_{s=-\infty}^{\infty} e^{\mu(\alpha)s} \int_{z=s}^{s+\Delta} \mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in dz)dsdy =$$
$$= \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \int_{z=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in dz) \int_{s=z}^{z+\Delta} e^{\mu(\alpha)s}dsdy =$$
$$= \frac{e^{\mu(\alpha)\Delta}-1}{\mu(\alpha)} \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{E}(e^{\zeta\mu(\alpha)};\ \tau > y+v)dy = \frac{e^{\mu(\alpha)\Delta}-1}{\mu(\alpha)} I_Y(\alpha,u,v).$$

Если мы теперь в полученном выражении x заменим на $x' = x - \delta$ (т.е. α на $\alpha' = \alpha - \frac{\delta}{T}$) и Δ на $\Delta' = \Delta + \delta$ или $\Delta'' = \Delta - \delta$, то, очевидно, оно будет асимптотически эквивалентно исходному. То же самое справедливо для множителя

$$\psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)}$$

в (5.5.8). Таким образом, исходное выражение для $\mathbf{P}(B_Y,\ \tau_1 \leqslant T)$ в (5.5.4) асимптотически эквивалентно

$$\frac{e^{\mu(\alpha)\Delta} - 1}{\mu(\alpha)\sqrt{T}}\, \psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Y(\alpha, u, v).$$

Нам остается провести оценку сверху подсумм ряда (5.5.3) по внешности области $s_k \in (-\varepsilon\sqrt{T},\ \varepsilon\sqrt{T})$. Опишем кратко ход оценивания. Рассмотрим сначала область $\varepsilon(-T, -\sqrt{T})$, где ε настолько мало, что $\frac{x}{T} - \varepsilon = \alpha - \varepsilon \in K$. Тогда оценка сверху подсуммы $\sum_2$ ряда (5.5.3) по области $-\varepsilon T < s_k \leqslant -\varepsilon\sqrt{T}$ происходит совершенно аналогично предыдущему, но вместо асимптотического представления (5.5.7) надо использовать неравенство

$$D(\alpha_k) \geqslant D(\alpha) - \frac{s_k}{T}\, \mu(\alpha), \tag{5.5.9}$$

вытекающее из выпуклости функции $D(\alpha)$ и равенства $D'(\alpha) = \mu(\alpha)$. Мы получим вместо (5.5.8) неравенство

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{T}}\, \psi_1 C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} \sum_{s_k < -\varepsilon\sqrt{T}} e^{\mu(\alpha)s_k} \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}\big(\tau > y,\ \zeta \in \Delta[s_k)\big)\, dy,$$

где сумма в правой части, умноженная на δ, асимптотически эквивалентна

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{T}} e^{\mu(\alpha)s} \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}\big(\tau > y,\ \zeta \in \Delta[s)\big)\, dy\, ds.$$

Интегрируя по частям, нетрудно убедиться, что этот интеграл имеет тот же порядок малости, что и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{T}} \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y + \mu(\alpha)s} \mathbf{P}(\tau \in dy,\ \ \zeta \in ds). \tag{5.5.10}$$

Но этот интеграл по области $s < -\varepsilon\sqrt{T}$ пренебрежимо мал по сравнению с полным интегралом, который равен $\mathbf{A}\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) = 1$. Таким образом,

$$\sum\nolimits_2 = o\bigg(\frac{\psi_1 C(\alpha)}{\sqrt{T}}\bigg)\, e^{-TD(\alpha)}. \tag{5.5.11}$$

Аналогичным образом оценивается подсумма $\sum_3$ ряда (5.5.3) по области $\varepsilon\sqrt{T} \leqslant s_k < \varepsilon T$.

Рассмотрим далее подсумму $\sum_4$ ряда (5.5.3) по области $s_k > \varepsilon T$. Здесь интегро-локальные теоремы для $\mathbf{P}\big(Z(T) \in \delta[z_k)\big)$ при $z_k < x - \varepsilon T$ (см. (5.5.3)), вообще говоря, уже не применимы. Но вероятности рассматриваемых здесь событий экспоненциально меньше главной части и нам будет достаточно воспользоваться локальным принципом больших уклонений для $Z(T)$ (см. теорему 3.4.1), в силу которого при $\alpha_k = \alpha - \frac{s_k}{T} < \alpha - \varepsilon$, $s_k > \varepsilon T$, $T \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in \delta[z_k)\big) = -T\widehat{D}(\alpha_k) + o(T),$$

где функция $\widehat{D}(\alpha)$ выпукла и совпадает с $D(\alpha)$ в области K (см. теорему 3.5.3), так что аналогично (5.5.9)

$$\widehat{D}(\alpha_k) \geqslant D(\alpha) - \frac{s_k}{T}\,\mu(\alpha).$$

Поэтому

$$\ln \mathbf{P}\big(Z(T) \in \delta[z_k)\big) \leqslant -TD(\alpha) + s_k\mu(\alpha) + o(T).$$

Так как аналог интеграла (5.5.10) по области $s > \varepsilon T$ допускает экспоненциально малую оценку, то отсюда следует, что $\sum_4$ также допускает оценку вида (5.5.11). Подсумма $\sum_5$ по области $s_k < -\varepsilon T$ рассматривается аналогично.

(iii). Утверждение о том, что в однородном случае слагаемым $P_1\big(v, \Delta[x)\big)$ в правой части (5.2.16) можно пренебречь, доказано в замечании 5.2.6 (см. (5.2.18)).

(iv). Выполнение условия допустимой неоднородности $(\mathcal{A}_K) \subset (\mathcal{A}^{(st)})$ доказано в п. (iii) теоремы 5.2.1. Малость слагаемого $P_1(v, \Delta[x))$ относительно главной части в правой части (5.2.16) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5.5.1. *Пусть* $\alpha = \alpha_T \to \alpha^0 \in K$ *при* $T \to \infty$,

$$\big(\lambda(\alpha^0), \mu(\alpha^0)\big) \in (\mathcal{A}_1), \qquad \big(0, \mu(\alpha^0)\big) \in (\mathcal{A}_1). \tag{5.5.12}$$

Тогда при некотором $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\big(\tau_1 > T,\ \zeta_1 \in \Delta[x)\big) = O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{5.5.13}$$

Условия (5.5.12) леммы 5.5.1 выполнены, поскольку

$$\bigl(0, \mu(\alpha)\bigr) \in (\mathcal{A}^{(st)}) \quad \text{при всех} \quad \alpha \in K.$$

Чтобы убедиться в этом, надо показать, что значение $\psi^{(st)}\bigl(0, \mu(\alpha)\bigr)$ конечно. Но функция

$$\psi^{(st)}\bigl(\lambda, \mu(\alpha)\bigr) = \frac{\psi(\lambda, \mu(\alpha)) - \psi(0, \mu(\alpha))}{a_\tau \lambda}$$

имеет в точке $\lambda = 0$ устранимую особенность и равна

$$\frac{1}{a_\tau} \frac{\partial \psi(\lambda, \mu(\alpha))}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

Это значение конечно, так как по условию (5.2.5) $\bigl(0, \mu(\alpha)\bigr) \in (\mathcal{A})$. Таким образом, для доказательства теоремы 5.2.2 нам остается провести

Доказательство леммы 5.5.1. Обозначим

$$P_1 := \mathbf{P}\bigl(\tau_1 > T,\ \zeta_1 \in \Delta[x)\bigr).$$

Для оценки сверху вероятности P_1 определим наряду с вектором (τ_1, ζ_1) случайный вектор $(\widehat{\tau}_1, \widehat{\zeta}_1)$, положив для любого $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}\bigl((\widehat{\tau}_1, \widehat{\zeta}_1) \in B\bigr) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))} \mathbf{E}\bigl(e^{\lambda(\alpha)\tau_1 + \mu(\alpha)\zeta_1};\ (\tau_1, \zeta_1) \in B\bigr)$$

(преобразование Крамера над (τ_1, ζ_1)). Имеем

$$\begin{aligned} &P_1 = \\ &= e^{-T(\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)\alpha)} \mathbf{E}\bigl(e^{\lambda(\alpha)\tau_1 + \mu(\alpha)\zeta_1 - \lambda(\alpha)(\tau_1 - T) - \mu(\alpha)(\zeta_1 - x)};\ \tau_1 \geqslant T,\ \zeta_1 \in \Delta[x)\bigr) = \\ &= e^{-TD(\alpha)} \psi_1\bigl(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\bigr) \mathbf{E}\bigl(e^{-\lambda(\alpha)(\widehat{\tau}_1 - T) - \mu(\alpha)(\widehat{\zeta}_1 - x)};\ \widehat{\tau}_1 \geqslant T,\ \widehat{\zeta}_1 \in \Delta[x)\bigr) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant e^{-TD(\alpha) + |\mu(\alpha)|\Delta} \psi_1\bigl(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\bigr) E(T), \end{aligned}$$

где

$$E(T) := \mathbf{E}(e^{-\lambda(\alpha)(\widehat{\tau}_1 - T)};\ \widehat{\tau}_1 \geqslant T).$$

Таким образом, при $T \to \infty$ имеем

$$P_1 = O\bigl(e^{-TD(\alpha)} E(T)\bigr). \tag{5.5.14}$$

Пусть $\lambda(\alpha^0) > 0$; тогда $\lambda(\alpha) > 0$ для всех достаточно больших T и

$$E(T) \leqslant \mathbf{P}(\widehat{\tau}_1 \geqslant T).$$

В силу первого условия в (5.5.12) вектор $\widehat{\tau}_1$ (распределение которого зависит от $\alpha = \alpha_T$) удовлетворяет равномерному по T условию $[\mathbf{C}]$:

$$\mathbf{E}e^{h|\widehat{\tau}_1|} \leqslant M \quad \text{при всех} \quad T \in [T_0, \infty)$$

и некоторых $h > 0$, $T_0 < \infty$, $M < \infty$. Поэтому для некоторого $\varepsilon > 0$

$$E(T) = O(e^{-\varepsilon T}) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Отсюда и из (5.5.14) получаем в случае $\lambda(\alpha^0) > 0$ соотношение (5.5.13).

Пусть теперь $\lambda(\alpha^0) \leqslant 0$. Тогда

$$P_1 = e^{-T(\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)\alpha)+T\lambda(\alpha)}\mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta_1-\mu(\alpha)(\zeta_1-x)};\ \tau_1 \geqslant T,\ \zeta_1 \in \Delta) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-TD(\alpha)+T\lambda(\alpha)+|\mu(\alpha)|\Delta}G(T), \qquad G(T) := \mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta_1};\ \tau_1 \geqslant T).$$

Применяя для оценивания сверху $G(T)$ неравенство Гельдера (см. аналогичное место в доказательстве леммы 5.3.3), получаем для любых $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$

$$G(T) \leqslant (\mathbf{E}(e^{\frac{1}{p}\mu(\alpha)\zeta_1})^p\mathbf{P}^q(\tau_1 \geqslant T).$$

В силу второго условия в (5.5.12) найдется $p_0 < 1$ такое, что

$$\varlimsup_{T\to\infty}(\mathbf{E}\Big(e^{\frac{1}{p_0}\mu(\alpha)\zeta_1}\Big)^{p_0} < \infty.$$

Поэтому по условию $[\mathbf{C}]$ для τ_1 получаем для некоторых $T_0 < \infty$, $c < \infty$, $v > 0$, что при $T \geqslant T_0$ выполняется

$$G(T) \leqslant ce^{-vT}, \qquad P_1 \leqslant ce^{-TD(\alpha)+T\lambda(\alpha)+|\mu(\alpha)|\Delta}e^{-vT} \leqslant ce^{-TD(\alpha)-\frac{v}{2}T}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что в случае $\lambda(\alpha^0) \leqslant 0$

$$e^{T\lambda(\alpha)+|\mu(\alpha)|\Delta} = e^{o(T)} \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Таким образом, и в случае $\lambda(\alpha^0) \leqslant 0$ соотношение (5.5.13) также установлено. Лемма 5.5.1 и теорема 5.2.2 доказаны.

5.5.2 Доказательство теоремы 5.2.3 о конечномерных распределениях

Доказательство основано на теоремах 5.2.1, 5.4.1. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Уточним сначала, пользуясь условием $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ (см. (5.2.22)), остаточный член $O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)})$ в (5.2.4). Для этого уточним оценку второй части

$$J_2 := \int\limits_{T(1-p)}^{T} \widetilde{H}((T-dy),\ \Delta[x])\mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in \mathbf{w}).$$

интеграла J в (5.4.3) (см. (5.4.13)). В силу условия $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ (см. (5.2.22), (5.2.23)) при всех достаточно больших T имеем

$$J_2 \leqslant \int\limits_{T(1-p)}^{T} \widetilde{H}\big(T-dy,\, \Delta[x]\big)\mathbf{P}(\tau{>}y)e^{\delta y}e^{-\delta y}\mathbf{P}(\tau{>}y+v,\, \zeta \in \mathbf{w}\ \big|\ \tau > y) \leqslant$$

$$\leqslant c\widehat{P}\big((v,\infty),\, \mathbf{w}\big) \int\limits_{T(1-p)}^{\infty} \widetilde{H}\big(T-dy,\ \Delta[x]\big)e^{\delta y}\mathbf{P}(\tau > y).$$

Здесь интеграл оценивается точно так же, как интеграл в (5.4.14), но с учетом того, что $\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \delta$, $\delta > 0$. В итоге мы получаем (см. (5.4.18), (5.4.19))

$$J_2 \leqslant c_1\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big)e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}, \qquad c_1 = \mathrm{const}. \tag{5.5.15}$$

2. В силу условия $[\widehat{\mathbf{P}}_K]$ (см. (5.2.22), (5.2.23))

$$I_Z(\alpha, {}^{>}0, v, \mathbf{w}) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y+v,\ \zeta \in \mathbf{w})dy \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{0}^{\infty} e^{(\lambda(\alpha)+\delta)y}\mathbf{P}(\tau > y)\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big) \leqslant c_2\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big),\ \ c_2 = \mathrm{const}.$$

Это вместе с (5.2.4) и (5.5.15) дает

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x];\ B({}^{>}0, v, \mathbf{w})\big) \leqslant \frac{c_3\Delta}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)}\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big) \tag{5.5.16}$$

при всех $v, \mathbf{w}$ и всех достаточно больших T.

3. Рассмотрим процесс

$$Z_T(t) := Z(T+t) - Z(T) \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Начальным вектором $\boldsymbol{\xi}_{1,T}$ для процесса $Z_T(t)$ является вектор

$$\boldsymbol{\xi}_{1,T} = \big(\chi(T), \zeta(T)\big). \tag{5.5.17}$$

Его распределение $P_{1,T,\alpha}$ при условии $\big\{Z(T)\in\Delta[x)\big\}$ зависит от T и $\alpha=\frac{x}{T}$ и в силу (5.2.4), (5.5.16) обладает при $\alpha\to\alpha^0$ свойством

$$P_{1,T,\alpha}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big)=\frac{\mathbf{P}(Z(T)\in\Delta[x),\,B(^{>}0,v,\mathbf{w}))}{\mathbf{P}(Z(T)\in\Delta[x))}\leqslant$$
$$\leqslant c_4\widehat{P}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big),\quad c_4=\mathrm{const},\qquad (5.5.18)$$

при всех достаточно больших T. Кроме того, при $T\to\infty$

$$P_{1,T,\alpha}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big)\to\frac{I_Z(\alpha^0,{}^{>}0,v,\mathbf{w})}{I_Z(\alpha^0,{}^{>}0,0,\mathbb{R})}=:P_{\alpha^0}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big).\qquad (5.5.19)$$

Поэтому для процесса $Z_T(t)$ на $[0,U]$ при $U\sim uT$, $u>0$, $T\to\infty$, мы можем воспользоваться теоремой 5.4.1, условие $[\widehat{\mathbf{P}}_1]$ которой (см. (5.4.23)) в силу (5.5.18), (5.5.19) выполнено. По этой теореме для условной вероятности

$$\mathbf{P}\big(Z_T(U)\in\Delta[x')\big|\ Z(T)\in\Delta[x)\big)$$

будет справедлива интегро-локальная теорема того же вида, что и теорема 5.2.1, но с правой частью, в которой T надо заменить на U, α — на $\alpha':=\frac{x'}{U}$, а множитель ψ_1 — на множитель $\psi_{(\alpha^0)}\big(\lambda(\alpha'),\mu(\alpha')\big)$, где $\psi_{(\alpha^0)}$ —преобразование Лапласа над распределением P_{α^0}, определенном в (5.5.19).

4. Из сказанного очевидным образом вытекает утверждение теоремы 5.2.3 при $N=2$, если T заменить на u_1T, U — на $(1-u_1)T$. При произвольном N следует использовать индукцию и те же рассуждения, которые использовались в п. 1–3. Теорема 5.2.3 доказана.

5.5.3 Доказательство теоремы 5.2.4

Доказательство теоремы 5.2.4 вполне аналогично предыдущему доказательству, но проще. Как уже отмечалось, $\lambda(\alpha)$ отделено от λ_+ при всех α и, следовательно, $\lambda(\alpha)<\lambda_+-\varepsilon$ при некотором $\varepsilon>0$. Поэтому в силу условия $[\mathbf{h}]$

$$I_Z(\alpha,{}^{>}0,v,\mathbf{w})=\int\limits_0^\infty e^{\lambda(\alpha)t}\mathbf{P}(\tau>t+v,\zeta\in\mathbf{w})dt=$$
$$=e^{-\lambda(\alpha)v}\int\limits_v^\infty e^{\lambda(\alpha)t}\mathbf{P}(\tau>t,\zeta\in\mathbf{w})dt\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda(\alpha)v}e^{\lambda(\alpha)v+h(v)}\mathbf{P}(\tau>v,\zeta\in\mathbf{w})=e^{h(v)}\mathbf{P}(\tau>v,\zeta\in\mathbf{w}).$$

Аналогичное неравенство справедливо для интеграла J_2 (ср. с (5.5.15)) с поправочным множителем $e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon)}$ (ср. с п.1 доказательства теоремы 5.2.3). Стало быть, для распределения $P_{1,T,\alpha}$ начального вектора (5.5.17) вместо (5.5.18) будем иметь

$$P_{1,T,\alpha}\big((v,\infty),\ \mathbf{w}\big) = \frac{\mathbf{P}(Z(T)\in\Delta[x),\ B(0,v,\mathbf{w}))}{\mathbf{P}(Z(T)\in\Delta[x))} \leqslant \\ \leqslant e^{h(v)}\mathbf{P}(\tau > v,\ \zeta\in\mathbf{w}) \qquad (5.5.20)$$

при всех достаточно больших T. Так как компакт $\mathcal{A}_K$ вложен в область сходимости интеграла

$$\int e^{\lambda v+\mu z+h(v)}\mathbf{P}(\tau > v, \zeta\in dz)dv,$$

то из (5.5.20) аналогично предыдущему следует выполнение условия допустимой неоднородности. Остальные рассуждения доказательства повторяют в упрощенном виде рассуждения п.п. 3,4 доказательства теоремы 5.2.3. Теорема 5.2.4 доказана.

§ 5.6 Точная асимптотика преобразования Лапласа над распределением обобщенного процесса восстановления и связанные с ней задачи

5.6.1 Основное утверждение

В § 3.7 на основе ПБУ для ОПВ была найдена грубая асимптотика названного преобразования, т.е. представление

$$\ln \mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = T\widehat{A}(\mu)\big(1+o(1)\big) \quad \text{при} \quad T\to\infty \qquad (5.6.1)$$

во всей области $\mu\in(\mu^-,\mu^+)$, в которой определена базовая функция $\widehat{A}(\mu)$. Теперь мы можем аналогичным образом на основе интегро-локальной теоремы 5.2.1 и доказательства теоремы 3.7.1 найти *точную* асимптотику $\mathbf{E}e^{\mu Z(T)}$ при $T\to\infty$, но теперь в более узкой области. Напомним, что в замечании 5.2.2 к интегро-локальной теореме 5.2.1 было отмечено, что компакт $K^{>}$, фигурирующий в теореме 5.2.1, может быть определен с помощью базовой функции $\widehat{A}(\mu)$. Обозначим $(\widehat{\mu}_-,\widehat{\mu}_+)$ максимальную область аналитичности функции $\widehat{A}(\mu)$, содержащую в себе точку $\mu=0$, и положим

$$\widehat{\alpha}_- = A'(\widehat{\mu}_- + 0), \qquad \widehat{\alpha}_+ = A'(\widehat{\mu}_+ - 0).$$

Тогда интервал $(\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha})$ будет областью аналитичности функции $\widehat{D}(\alpha)$, содержащей в себе точку $\alpha = a$.

Если $\lambda_+ > D(0)$, то $\widehat{\mu}_\pm = \mu_\pm$, $\widehat{\alpha}_\pm = \alpha_\pm$ и компакты $K^<$ и $K^>$ неразличимы по своему определению (запретное множество $[\beta_-, \beta_+]$ пусто).

Условие $\lambda_+ > D(0)$, очевидно, выполнено, если $\lambda_+ = \infty$ или $a = 0$ (тогда $D(0) = 0$). Как показано в теореме 3.3.2, (iv), оно выполнено также, если граница $\partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ в $\mathbb{R}^2$ вложена в открытую полуплоскость $\{\lambda < \lambda_+\}$ (это всегда так, если $\mathbf{A}(\lambda_+, \mu) > 0$ при всех μ).

Ниже мы будем применять интегро-локальную теорему 5.2.1. В ней используется компакт $K^>$, который мы заменим теперь эквивалентным образом на любой отрезок $\widehat{K} \subset (\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$, содержащий точку $\alpha = a$. Пусть

$$\widehat{\mathcal{A}} = \Big\{ \big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big),\ \alpha \in \widehat{K} \Big\}$$

— аналитический отрезок кривой $\partial\mathcal{A}^{\leqslant}$ в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $Q(\alpha)$ произведение

$$Q(\alpha) = \psi_1\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) C(\alpha) I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R})$$

в правой части (5.2.4) при $u = 0$, $v = 0$, $\mathbf{w} = \mathbb{R}$. При $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ введем в рассмотрение функцию $\alpha(\mu) := A'(\mu)$, которая является обратной функцией к $\mu(\alpha) = D'(\alpha)$, так что

$$A(\mu) = \sup_\alpha \big(\mu\alpha - D(\alpha)\big) = \mu\alpha(\mu) - D\big(\alpha(\mu)\big).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.6.1. *Пусть (τ, ζ) — нерешетчатый вектор и выполнены условия «допустимой неоднородности»*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} \subset [\mathcal{A}_1], \quad \widehat{\mathcal{A}} \subset (\mathcal{A}_1), \quad \mathbf{P}(\tau_1 > T) = \\ = o\bigg(\frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(0)}\bigg) \quad \text{при } T \to \infty. \tag{5.6.2}$$

Тогда для любого $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$

$$\mathbf{E} e^{\mu Z(T)} = \frac{\sqrt{2\pi} Q(\alpha(\mu)) e^{-TA(\mu)}}{\sqrt{D''(\alpha(\mu))}} \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{5.6.3}$$

Замечание 5.6.1. Аналогичное утверждение справедливо для арифметичных ζ. Если компонента τ арифметична, то интеграл $I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R})$ следует заменить на соответствующую сумму.

Если ОПВ $Z(t)$ однороден, то условия (5.6.2) излишни.

Теорема 5.6.1 показывает, что приближение (5.6.1) в области $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ является весьма точным: следующий член асимптотического разложения для $\ln \mathbf{E} e^{\mu Z(T)}$ оказывается «постоянным» (не зависимым от T).

Доказательство. Положим, как и в § 3.7,

$$E(B) = \mathbf{E}\big(e^{\mu Z(T)};\ Z(T)/T \in B\big)$$

и пусть $d_- < d_+$, как и прежде, — границы множества $\mathcal{D}_1^{<\infty} = \big\{\alpha : D(\alpha) < \infty\big\}$. Положим далее при больших N и малом $\varepsilon > 0$

$$N_- = \max(-N, d_- + \varepsilon), \qquad N_+ = \min(N, d_+ + \varepsilon), \qquad B_N = [N_-, N_+).$$

Из доказательства теоремы 3.7.1 следует (см. доказательства лемм 3.7.1, 3.7.2), что при достаточно большом N и достаточно малом ε найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при всех достаточно больших T

$$E(\overline{B}_N) \leqslant e^{-TA(\mu) - \varepsilon_1 T}. \tag{5.6.4}$$

Так как

$$\mathbf{E} e^{\mu Z(T)} = E(\mathbb{R}) = E(B_N) + E(\overline{B}_N), \tag{5.6.5}$$

то в силу (5.6.4) нам остается оценить $E(B_N)$. При некотором $h > 0$ разобьем область B_N на три части:

$$B_1 = [N_-, \alpha(\mu) - h), \quad B_2 = [\alpha(\mu) - h, \alpha(\mu) + h), \quad B_3 = [\alpha(\mu) + h, N_+).$$

Оценим сначала значение $E(B_2)$, которое определяет главную часть $E(B_N)$. Ясно, что при достаточно малом $h > 0$ можно так выбрать компакт $\widehat{K} \subset (\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+)$, что область B_2 будет целиком лежать в $\widehat{K}$.

Выберем малое $\Delta > 0$ и положим

$$x_k = T\alpha(\mu) + k\Delta, \qquad k = -M, -M+1, \ldots, M-1,$$

где для простоты считаем $M = \frac{hT}{\Delta}$ целым числом. Интеграл

$$E(B_2) = \int\limits_{T(\alpha(\mu)-h)}^{T(\alpha(\mu)+h)} e^{\mu x} \mathbf{P}\big(Z(T) \in dx\big)$$

представим в виде сумм

$$E(B_2) = \sum_{k=-M}^{M-1} \int\limits_{\Delta[x_k)} e^{\mu x} \mathbf{P}\big(Z(T) \in dx\big) =$$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1} e^{\mu x_k} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x_k)\big)\big(1 + o(1)\big)$$

при $\Delta \to 0$. Чтобы упростить изложение, предположим сначала, что $0 \notin B_2$. Тогда при

$$\alpha_k = \frac{x_k}{T}, \qquad k = -M, \dots, M-1$$

согласно теореме 5.2.1 (ее условия выполнены) при $T \to \infty$ и $\Delta = \overline{o}(1)$ получаем

$$E(B_2) = \sqrt{T} \sum_{k=-M}^{M-1} \frac{\Delta}{T} Q(\alpha_k) e^{T(\mu\alpha_k - D(\alpha_k))} \big(1 + o(1)\big). \tag{5.6.6}$$

Здесь функция $Q(\alpha)$ непрерывна, а аналитическая функция $\mu\alpha - D(\alpha)$ достигает своего максимума, равного $A(\mu)$, в точке $\alpha(\mu)$ и допускает при малых h, $|\alpha - \alpha(\mu)| \leqslant h$, разложение

$$\mu\alpha - D(\alpha) = A(\mu) - \frac{(\alpha - \alpha(\mu))^2 D''}{2} + O\big(|\alpha - \alpha(\mu)|^3\big), \tag{5.6.7}$$

где для краткости принято $D'' = D''\big(\alpha(\mu)\big)$. Так как $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\Delta}{T}$, то сумма в (5.6.6) является интегральной суммой для интеграла

$$Q\big(\alpha(\mu)\big) \int\limits_{\alpha(\mu)-h}^{\alpha(\mu)+h} e^{T(\mu\alpha - D(\alpha))} d\alpha \big(1 + o(1)\big),$$

который в силу (5.6.7) после замены $\sqrt{TD''}\big(\alpha - \alpha(\mu)\big) = u$ будет равен

$$\frac{Q(\alpha(\mu)) e^{TA(\mu)}}{\sqrt{TD''}} \int\limits_{-h\sqrt{TD''}}^{h\sqrt{TD''}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \big(1 + o(1)\big) = \\ = \frac{\sqrt{2\pi}\, Q(\alpha(\mu)) e^{TA(\mu)}}{\sqrt{TD''}} \big(1 + o(1)\big). \tag{5.6.8}$$

Если $0 \in B_2$, то в силу вложения $\{\tau_1 > T\} \subset \big\{Z(T) \in \Delta[0)\big\}$ в правой части (5.2.4) и в сумме (5.6.6) появится еще одно слагаемое $\mathbf{P}(\tau_1 > T)$. Но по третьему условию допустимой неоднородности в (5.6.2) оно никак не повлияет на окончательный результат в (5.6.8).

Итак, из (5.6.6) и проделанных вычислений получаем

$$E(B_2) = \frac{\sqrt{2\pi}\, Q(\alpha(\mu)) e^{TA(\mu)}}{\sqrt{D''}} \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{5.6.9}$$

Оценим теперь слагаемое $E(B_3)$. Выберем опять малое Δ и положим

$$\alpha_l = \alpha(\mu) + h + l\Delta, \qquad l = 0, \ldots, L-1,$$

считая для простоты, что $L = \frac{N_+ - \alpha(\mu) - h}{\Delta}$ — целое число. Пусть для определенности $\mu \geqslant 0$. Тогда при любом $l < L$ и $\Delta = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$ будем согласно локальному ПБУ для ОПВ $Z(T)$ иметь (в силу (5.6.2) условия теоремы 3.4.1 выполнены)

$$J_l := \int\limits_{T\Delta[\alpha_l)} e^{\mu x} \mathbf{P}\big(Z(T) \in dx\big) \leqslant$$

$$\leqslant e^{T(\alpha_l + \Delta)\mu} \mathbf{P}\big(Z(T) \in T\Delta[\alpha_l)\big) = e^{T(\mu\alpha_l - D(\alpha_l)) + o(T)}.$$

Так как $\mu\alpha - D(\alpha)$ вогнутая функция с максимумом в точке $\alpha = \alpha(\mu)$, равным $A(\mu)$; $D'' > 0$ при $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ и $\alpha_l \geqslant \alpha(\mu) + h$, то найдется $h_1 > 0$ такое, что при всех $l < L$ выполняется

$$\mu\alpha_l - D(\alpha_l) \leqslant A(\mu) - h_1.$$

Поэтому

$$J_l \leqslant e^{T(A(\mu) - h_1) + o(T)},$$
$$E(B_3) = \sum_{l=0}^{L-1} J_l \leqslant L e^{T(A(\mu) - h_1) + o(T)}. \tag{5.6.10}$$

Аналогичным образом оценивается $E(B_1)$. Сопоставляя (5.6.4), (5.6.5), (5.6.9), (5.6.10), мы получаем (5.6.3). Теорема 5.6.1 доказана.

5.6.2 Уточнение неравенств теоремы 4.6.1 для распределения $\overline{Z}(T)$

Если воспользоваться теоремой 5.6.1, то в ряде случаев можно получить уточнение теоремы 4.6.1 о неравенствах для $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big)$ (например, заменить $o(T)$ на $c(\alpha) + o(1)$ в неравенствах (4.6.15), (4.6.16) и др.). Если

$$A(\widehat{\mu}_+) > 0, \qquad \mu_0 = \sup\big\{\mu :\, A(\mu) \leqslant 0\big\},$$

то $\mu_0 = 0$, если $a \geqslant 0$, и $\mu_0 > 0$, $A(\mu_0) = 0$, если $a < 0$. Положим $\alpha_0 = A'(\mu_0)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.6.2. *Пусть $Z(t)$ — однородный ОПВ, (τ, ζ) — нерешетчатый вектор, $A(\widehat{\mu}_+) > 0$, $\alpha = x/T$. Тогда при $T \to \infty$*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \begin{cases} e^{-\mu_0 x}\big(1 + o(1)\big), & \text{если } a < 0,\ \alpha \in [0, \alpha_0]; \\ e^{-TD(\alpha)}\big(1 + o(1)\big), & \text{если } \alpha \in [\alpha_0, \widehat{\alpha}_+). \end{cases} \tag{5.6.11}$$

Неравенства (5.6.11) являются весьма точными. Из результатов гл. 6 будет вытекать, что первое неравенство в (5.6.11) (в области $\alpha \in [0, \alpha_0)$) является неулучшаемым с точностью до постоянного множителя; второе (в области $\alpha \in [\alpha_0, \widehat{\alpha}_+)$) — с точностью до множителя $\frac{C}{\sqrt{T}}$.

Если $Z(T)$ — случайное блуждание ($\tau \equiv 1$), то $\widehat{\mu}_+ = \mu^+$, неравенства (5.6.11) превращаются в точные (не асимптотические), т.е. они верны при всех T, $o(1)$ можно заменить на 0.

Доказательство теоремы 5.6.2 аналогично доказательству теоремы 4.6.1, но вместо теоремы 3.7.1 используется теорема 5.6.1. Согласно этой теореме для однородного ОПВ $Z(t)$ и $\mu \in (\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = ce^{TA(\mu)}\big(1 + \varepsilon_T\big), \tag{5.6.12}$$

где $\varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$, c зависит лишь от μ. Так как $\eta_Z(x) := \inf\big\{t : Z(t) \geqslant x\big\}$ есть марковский момент, то из (5.6.12) при $\mu \in [0, \widehat{\mu}_+)$, $t < T$, следует, что

$$\mathbf{E}(e^{\mu Z(T)} \,|\, \eta_Z(x) = t) \geqslant \mathbf{E}e^{\mu x + \mu Z(T-t)} = ce^{\mu x + (T-t)A(\mu)}(1 + \varepsilon_{T-t}).$$

Если воспользоваться неравенством (4.6.19), то получим наряду с (5.6.12), что при $\mu \in [0, \widehat{\mu}_+)$

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} \geqslant c\int_0^T e^{\mu x + (T-t)A(\mu)}(1 + \varepsilon_{T-t})\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$(1 + \varepsilon_T) \geqslant e^{\mu x}\int_0^T e^{-tA(\mu)}(1 + \varepsilon_t)\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt),$$

$$1 \geqslant e^{\mu x}\int_0^T e^{-tA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

При $A(\mu) \leqslant 0$ это дает

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) = \mathbf{P}(\eta_Z(x) \leqslant T) \leqslant \leqslant \int_0^T e^{-tA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt) \leqslant e^{-\mu x}\big(1 + o(1)\big). \tag{5.6.13}$$

Если $\alpha \in [0, \alpha_0]$, то $\mu(\alpha) \in [0, \mu_0]$. Полагая в (5.6.13) $\mu = \mu_0$, получаем первое неравенство в (5.6.11).

При $A(\mu) \geqslant 0$ имеем

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \geqslant x\big) \leqslant \int\limits_0^T e^{-tA(\mu)+TA(\mu)}\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\mu x+TA(\mu)}\big(1+o(1)\big). \qquad (5.6.14)$$

Если $\alpha = x/T \in [\alpha_0, \widehat{\alpha}_+)$, то $\mu(\alpha) \in [\mu_0, \widehat{\mu}_+)$, $A\big(\mu(\alpha)\big) \geqslant 0$, и полагая в (5.6.14) $\mu = \mu(\alpha)$, получим

$$-\mu x + TA(\mu) = -T\Big(\alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big)\Big) = -TD(\alpha).$$

Это доказывает второе неравенство в (5.6.11). Теорема 5.6.2 доказана.

Ясно, что в случае $A(\widehat{\mu}_+)>0$ при $\alpha=\alpha_0$ выполняется $\mu(\alpha)=\mu(\alpha_0)=\mu_0$, $A(\mu_0) = 0$, $D(\alpha_0) = \alpha_0\mu_0$ и правые части в (5.6.11) совпадают. В гл. 6 будет произведен более детальный анализ свойств распределения $\overline{Z}(T)$.

5.6.3 Точная асимптотика моментов ОПВ

Как и в предыдущем разделе, мы ограничимся для упрощения формулировок и доказательств рассмотрением однородных ОПВ. В тереме 1.2.1 было установлено, что при $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}|\tau\zeta| < \infty$ выполняется

$$\mathbf{E}Z(T) - aT = \frac{a_\zeta \mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau^2} - \frac{\mathbf{E}\tau\zeta}{a_\tau} + o(1) = O(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Если $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ и $\xi = \zeta - a\tau$, $\sigma_\xi = \mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то

$$\mathbf{D}Z(T) = \frac{\sigma_\xi^2 T}{a_\tau} + o(T). \qquad (5.6.15)$$

Если дополнительно $\mathbf{E}\tau^3 < \infty$, то остаточный член $o(T)$ в (5.6.15) можно заменить на $O\big(\sqrt{T}\,\big)$.

Оценки моментов величины $Z(T) - aT$ более высоких порядков наталкиваются на существенные технические трудности. Однако в случае, когда выполнено условие Крамера для (τ, ζ), мы можем аналогично тому, как это делалось в разделе 5.6.1, получить с помощью интегро-локальных теорем точную асимптотику для моментов $\mathbf{E}\big|Z(T) - aT\big|^k$ при любом $k > 0$ и оценки для моментов $\big(Z(T) - aT\big)$ целого нечетного порядка $k \geqslant 3$.

Теорема 5.6.3. *Пусть $Z(t)$ — однородный ОПВ, вектор (τ,ζ) нерешетчатый, w есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $(0,1)$. Тогда при любом $k>0$*

$$\mathbf{E}\big|Z(T)-aT\big|^k=\sigma^kT^{k/2}\,\mathbf{E}|w|^k\big(1+o(1)\big)\quad при\quad T\to\infty. \tag{5.6.16}$$

Если $k\geqslant 3$ целое и нечетное число, то

$$\mathbf{E}\big[Z(T)-aT\big]^k=o(T^{k/2})\quad при\quad T\to\infty.$$

Утверждение (5.6.16) остается верным и в случае, когда хотя бы одна из компонент τ или ζ арифметична. Появление условий на структуру распределения (τ,ζ) в теореме 5.6.3 связано с использованием в ее доказательстве интегро-локальной теоремы для $Z(T)$. Ясно, что с существом дела в этом разделе эти условия не связаны, но найти простой способ избавиться от них не удается.

Если τ и ζ независимы, то утверждение (5.6.16) нетрудно установить, если воспользоваться неравенством

$$\mathbf{P}\bigg(|z_T-w|>\frac{b\ln T}{\sqrt{T}}+\frac{y}{\sqrt{T}}\bigg)\leqslant ce^{-\lambda y}$$

при некоторых $b>0$, $c<\infty$, $\lambda>0$ и всех достаточно больших T, где $z_T=\frac{Z(T)-aT}{\sigma\sqrt{T}}$, а процессы $Z(tT)$ и $w(t)$ построены подходящим образом на одном вероятностном пространстве. Это неравенство вытекает из результатов работы [92] (см. также ниже § 7.1). Если положить $h_T=\frac{b\ln T}{\sqrt{T}}$ и воспользоваться представлением $z_T=w+r_T$, где $\mathbf{P}\Big(|r_T|>h_T+\frac{y}{\sqrt{T}}\Big)\leqslant ce^{-\lambda y}$, то нетрудно получить соотношение

$$\mathbf{E}|z_T|^k=\mathbf{E}|w+r_T|^k=\mathbf{E}|w|^k+O(h_T).$$

Доказательство теоремы 5.6.3. Представим разность $Z(T)-aT$ в виде

$$Z(T)-aT=Z_{\nu(T)}-aT_{\nu(T)}-a\gamma(T)=S_{\nu(T)}-a\gamma(T),$$

где, как и прежде, $S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k$, $\xi_k=\zeta_k-a\tau_k$, $\mathbf{E}\xi_k=0$. Процесс $S_{\nu(t)}$ есть ОПВ с нулевым средним. Величины $\gamma(T)$ при всех T имеют равномерно ограниченный экспоненциальный момент (см. § 1.1) и в силу теоремы 1.2.1 $\mathbf{E}S^2_{\nu(T)}\to\infty$ при $T\to\infty$, так что $\mathbf{E}|S_{\nu(T)}|^k\to\infty$ при $k\geqslant 2$ и $T\to\infty$. Отсюда нетрудно извлечь, что

$$\mathbf{E}\big|Z(T)-aT\big|^k=\mathbf{E}|S_{\nu(T)}|^k\big(1+o(1)\big)\quad \text{при}\quad T\to\infty.$$

Поэтому задача об асимптотике моментов $\mathbf{E}\big|Z(T)-aT\big|^k$ сводится к задаче об асимптотике моментов $\mathbf{E}\big|Z(T)\big|^k$ для ОПВ $Z(t)$ с нулевым средним.

Итак, пусть $a = 0$. Для доказательства (5.6.16) будем следовать схеме доказательства теоремы 5.6.1. Обозначим

$$E_k(\mu, B) = \mathbf{E}\left(\big|Z(T)\big|^k e^{\mu Z(T)};\quad \frac{Z(T)}{T} \in B\right), \quad E_k(B) = E_k(0, B).$$

Разобьем при некотором $h > 0$ вещественную прямую $\mathbb{R}$ на три части

$$B_1 = (-\infty, -h), \qquad B_2 = [-h, h), \qquad B_3 = [h, \infty),$$

так что

$$E_k(\mathbb{R}) = \sum_{j=1}^{3} E_k(B_j). \tag{5.6.17}$$

Далее, степенная функция x^k растет при $x \to \infty$ медленнее любой экспоненты:

$$x^k \leqslant c_{k,\mu} e^{\mu x} \quad \text{при} \quad x > 0, \mu > 0,$$

где $c_{k,\mu}$ зависит лишь от k и μ. Отсюда следует, что

$$E_k(B_3) \leqslant c_{k,\mu} E_0(\mu, B_3).$$

Из доказательства теоремы 5.6.1 следует, что так как окрестность точки $a = 0$ принадлежит компакту $\widehat{K}$, окрестность точки $\mu = 0$ принадлежит $(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$, то в силу (5.6.4), (5.6.10)

$$E_0(\mu, B_3) \leqslant e^{T(A(\mu)-\varepsilon)}$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших T. Так как $A(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, то μ можно выбрать так, что $A(\mu) = \varepsilon/2$. Мы получим тогда, что

$$E_k(B_3) \leqslant c_{k,\mu} e^{-T\varepsilon/2} \tag{5.6.18}$$

при всех достаточно больших T. Аналогично оценивается $E_k(B_1)$.

Для оценки

$$\mathbf{E}\big|Z(T)\big|^k = E_k(\mathbb{R})$$

нам остается найти асимптотику значения $E_k(B_2)$, которое дает главную часть асимптотики $E_k(\mathbb{R})$. Выберем $\Delta > 0$ и положим

$$x_j = j\Delta, \qquad j = -M, \ldots, M-1,$$

где для простоты считаем $M = \frac{hT}{\Delta}$ целым числом. Интеграл

$$E_k(B_2) = \int\limits_{-hT}^{hT} |x|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr)$$

представим в виде сумм

$$E_k(B_2) = \sum_{j=-M}^{M-1} \int\limits_{\Delta[x_j)} |x|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in dx\bigr) =$$

$$= \Bigl[\sum_{j=-M}^{M-1} |x_j|^k \mathbf{P}\bigl(Z(T) \in \Delta[x_j)\bigr)\Bigr]\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

при $\Delta \to 0$. Согласно теореме 5.2.1 ($\psi_1 = 1$ в однородном случае) и замечанию в ее конце о том, что для α в окрестности точки $a = 0$ выполняется

$$\psi_1 C(\alpha) I_Z(\alpha, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\sigma}} \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,$$

получаем при $T \to \infty$, $\Delta = \overline{o}(1)$, $\alpha_j = \frac{x_j}{T}$ соотношение

$$E_k(B_2) = \bigl(1 + o(1)\bigr) \sum_{j=-M}^{M} \frac{\Delta}{\sqrt{T}} |\alpha_j T|^k \psi_1 C(\alpha_j) I_Z(\alpha_j, {}^{>}0, 0, \mathbb{R}) e^{-TD(\alpha_j)} =$$

$$= \frac{\bigl(1 + o(1)\bigr)T^{k/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-M}^{M-1} \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}} |\alpha_j \sqrt{T}|^k e^{-TD(\alpha_j)}. \tag{5.6.19}$$

Так как

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2} + O(|\alpha_j|^3 T)$$

при $\alpha_j \to 0$, то

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2} + o(1) \quad \text{при} \quad \alpha_j = o(T^{-1/3})$$

и

$$TD(\alpha_j) = \frac{T\alpha_j^2}{2\sigma^2}\bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \text{при} \quad \alpha_j = o(1), \quad T \to \infty.$$

Сделав в (5.6.19) замену $y_j = \frac{\alpha_j\sqrt{T}}{\sigma}$, мы получим $y_{j+1} - y_j = \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}}$,

$$E_k(B_2) = \frac{(1 + o(1))\sigma^k T^{k/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-M}^{M-1} \Bigl(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}}\Bigr) |y_j|^k e^{-\frac{y_j^2}{2}}. \tag{5.6.20}$$

Так как сумма в правой части (5.6.20) является интегральной суммой для интеграла $\int\limits_{-h\sqrt{T}}^{h\sqrt{T}} |y|^k e^{-y^2/2} dy$, то мы находим

$$E_k(B_2) = \sigma^k T^{k/2} \mathbf{E}|w|^k \big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{5.6.21}$$

Сравнивая (5.6.21), (5.6.17), (5.6.18), получаем (5.6.16). Второе утверждение теоремы нетрудно извлечь из приведенных выше оценок и того, что $\mathbf{E}w^k = 0$ при целых нечетных k. Теорема 5.6.3 доказана.

Утверждение теоремы 5.6.3 без труда можно обобщить до следующего соотношения

$$\mathbf{E}f\left(\frac{Z(T) - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \to \mathbf{E}f(w) \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

для любой непрерывной функции $f(v) \geqslant 0$, растущей на бесконечности медленнее любой экспоненты $\big(\big(\ln f(v)\big)^+ = o\big(|v|\big)$ при $|v| \to \infty\big)$. Для знакопеременных функций f того же вида следует воспользоваться соотношением

$$\mathbf{E}f\left(\frac{Z(T) - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \to \mathbf{E}f^+(w) - \mathbf{E}f^-(w) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

где f^+, f^-, соответственно, положительная и отрицательная части f.

§ 5.7 Интегро-локальные теоремы для марковских аддитивных процессов при выполнении условий Крамера

Суммы

$$\mathrm{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\mathrm{x}_k)$$

случайных величин $\xi_k(\mathrm{x}_k)$, заданных на состояниях цепи Маркова $\{\mathrm{x}_k\}$, определены в §§ 1.8, 2.5 (там же см. основные обозначения) и имеют вид (см. (1.8.9) в § 1.8)

$$\mathrm{X}_n = Z(n) + \rho_n, \qquad \rho_n = \sum_{k=n-\gamma(n)+1} \xi_k(\mathrm{x}_k),$$

где $Z(n)$ — «вложенный» ОПВ, построенный по циклам по попаданию цепи в положительный атом e_0. Как и прежде, приращение сумм $\mathrm{X}(n)$

на одном цикле длиной τ обозначим через ζ, так что вектор (τ,ζ) будет «управляющим» для ОПВ $Z(n)$. Мы предполагаем, что вектор (τ,ζ) удовлетворяет условию Крамера. Как уже отмечалось, при каждом фиксированном $\gamma(n)=l$ случайная величина ρ_n условно не зависит от $Z(n)$, а распределение величины $\rho_n=\rho(l)$ не будет зависеть от n. Обозначим через $(\mu_-^{(\rho(l))},\mu_+^{(\rho(l))})$ область аналитичности функции $\mathbf{E}\big(e^{\mu\rho_n}\,|\,\gamma(n)=l\big)$.

Пусть $K^<$ — компакт, определенный в (5.2.1).

Теорема 5.7.1. *Пусть случайная величина ζ нерешетчата, $\alpha = x/n\in K^<\cap\big(A'(\mu_-^{(\rho(l))}),A'(\mu_+^{(\rho(l))})\big)$. Тогда для любого фиксированного l и $\Delta=\overline{o}(1)$ при $n\to\infty$*

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n\in\Delta[x),\gamma(n)=l\big)=\frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{n}}\,e^{-nD(\alpha)}\mathbf{P}(\tau>l)\mathbf{E}e^{\mu(\alpha)\rho(l)}\big(1+o(1)\big),$$

где $C(\alpha)$ определено в теореме 5.2.1.

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n\in\Delta[x),\gamma(n)=l\big)=\mathbf{P}\big(Z(n)+\rho_n\in\Delta[x),\gamma(n)=l\big)=$$
$$=\int\mathbf{P}\big(Z(n)\in\Delta[x-y),\gamma(n)=l\big)\mathbf{P}\big(\rho_n\in dy\,|\,\gamma(n)=l\big).$$

В силу следствия 5.4.1 получаем

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{X}_n\in\Delta[x),\gamma(n)=l\big)=$$
$$=\frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{n}}\,\mathbf{P}(\tau>l)\int e^{-nD(\alpha-y/n)}\mathbf{P}\big(\rho(l)\in dy\big)\big(1+o(1)\big). \tag{5.7.1}$$

Здесь при малых y/n

$$D(\alpha-y/n)=D(\alpha)-\frac{y}{n}\,\mu(\alpha)+o\bigg(\frac{y}{n}\bigg)$$

и при всех y

$$D(\alpha-y/n)\geqslant D(\alpha)-\frac{y}{n}\,\mu(\alpha).$$

Поэтому интеграл в (5.7.1) будет асимптотически эквивалентен

$$e^{-nD(\alpha)}\mathbf{E}e^{\mu(\alpha)\rho(l)}, \tag{5.7.2}$$

где преобразование Лапласа в правой части (5.7.2) конечно при $\mu(\alpha)\in(\mu_-^{(\rho(l))},\mu_+^{(\rho(l))})$ или, что то же, при

$$\alpha\in\big(A'(\mu_-^{(\rho(l))},A'(\mu_+^{(\rho(l))})\big).$$

Теорема 5.7.1 доказана.

В силу теоремы 5.7.1 естественно ожидать, что при α таком, что

$$\ln \mathbf{E} e^{\mu(\alpha)\rho(l)} < \lambda_+ l, \tag{5.7.3}$$

(напомним, что левая часть в (5.7.3), как и значения $\mu(\alpha)$, близки к нулю при малых значениях $|\alpha - a|$) будет справедливо представление

$$\mathbf{P}\bigl(\mathrm{X}_n \in \Delta[x)\bigr) = \frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{n}}\, e^{-nD(\alpha)} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau > l)\mathbf{E} e^{\mu(\alpha)\rho(l)}\bigl(1 + o(1)\bigr),$$

при $n \to \infty$, где ряд в правой части конечен.

Найдем условия, достаточные для выполнения (5.7.3) для конечной цепи Маркова с состояниями $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_N$. Рассмотрим случайную величину ξ^+ с распределением $\mathbf{P}(\xi^+ > t) = \max_j \mathbf{P}\bigl(\xi(\mathrm{e}_j) > t\bigr)$. Тогда, очевидно, $\xi(\mathrm{e}_j) \underset{p}{\leqslant} \xi^+$ и $\rho(l) \underset{p}{\leqslant} \sum_{k=1}^{l} \xi_k^+$, где ξ_k^+ — независимые копии ξ^+. Поэтому при $\mu(\alpha) \geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{E} e^{\mu(\alpha)\rho(l)} \leqslant \Bigl[\psi^{(\xi^+)}\bigl(\mu(\alpha)\bigr)\Bigr]^l, \qquad \psi^{(\xi^+)}(\mu) = \mathbf{E} e^{\mu\xi^+}, \tag{5.7.4}$$

и, стало быть, (5.7.3) выполнено, если

$$\ln \psi^{(\xi^+)}\bigl(\mu(\alpha)\bigr) < \lambda_+.$$

Аналогичное условие имеет место для $\mu(\alpha) \leqslant 0$ в терминах случайной величины ξ^- с распределением $\mathbf{P}(\xi^- > t) = \min_j \mathbf{P}\bigl(\xi(\mathrm{e}_j) > t\bigr)$.

Если $\mu^{(+)}$ — положительное решение уравнения $\ln \psi^{(\xi^+)}(\mu) = \lambda_+$ (если таковое существует), то (5.7.4) будет выполнено при $\mu(\alpha) \in [0, \mu^{(+)})$ или, что то же, при $\alpha \in \bigl[a, A'(\mu^{(+)})\bigr)$. Аналогичным образом описывается область значений $\alpha \leqslant a$, при которых выполнено (5.7.3).

Глава 6

Точная асимптотика в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления

§ 6.1 Асимптотика распределений максимального значения обобщенного процесса восстановления с линейным сносом. Время первого прохождения высокого уровня

Пусть, как и прежде,

$$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt.$$

В этом разделе при широких условиях найдена асимптотика распределений величины $\overline{Z}^{(q)} := \sup_{t\geqslant 0} Z^{(q)}(t)$ и времени $\eta_{Z^{(q)}}(x) = \min\{t : Z^{(q)}(t) > x\}$ для *однородных* ОПВ $Z(t)$. О распространении ряда результатов на неоднородный случай см. замечание 6.1.2.

6.1.1 Предварительные сведения

Задача об асимптотике распределения $\overline{Z}^{(q)}$ во многом сводится к задаче об асимптотике распределения максимума последовательных сумм случайных величин. Поэтому, прежде чем переходить к формулировкам и доказательствам основных утверждений, целесообразно привести основные результаты, касающиеся распределения максимального значения случайного блуждания. Нам будет удобно изложить эти результаты в терминах случайных блужданий

$$Z_k^{(q)} := Z_k + qT_k = \sum_{j=1}^{k} \zeta_j^{(q)}, \qquad \zeta_j^{(q)} \underset{d}{=} \zeta^{(q)} = \zeta + q\tau,$$

допустив, что

$$a_{\zeta^{(q)}} := \mathbf{E}\zeta^{(q)} = a_\zeta + qa_\tau < 0 \qquad (q < -a),$$

так что

$$\overline{Z}_\infty^{(q)} := \sup_{k \geqslant 0} Z_k^{(q)} < \infty$$

с вероятностью 1.

Далее, следуя [6], введем понятие надстепенной функции.

Определение 6.1.1. *Конечную функцию G мы назовем надстепенной, если она обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t+b)}{G(t)} = 1 \tag{6.1.1}$$

при каждом b (longtailed function) *и при любом $0 < h \leqslant 1$ удовлетворяет неравенству*

$$0 < \frac{G(hx)}{G(x)} \leqslant c(h) < \infty, \qquad x \geqslant 1,$$

где функция $c(h)$ ограничена на любом отрезке $[h_1, 1]$, при некотором $h_1 > 0$.

Нетрудно видеть, что, например, любая функция в (6.1.1), удовлетворяющая при некоторых $0 < c_1 < c_2 < \infty$ и m неравенству

$$c_1 x^m l(x) \leqslant G(x) \leqslant c_2 x^m l(x),$$

где $l(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, является надстепенной.

Нетрудно видеть также, что надстепенная функция всегда мажорирует некоторую *степенную*, так как при $x = 2^N$

$$G(x) \geqslant c^{-1}(1/2)G(x/2) \geqslant c^{-N}(1/2)G(x/2^N) = G(1)x^{-\gamma},$$
$$\gamma = \log_2 c(1/2).$$

Это объясняет выбор термина «надстепенная функция».

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 6.1.1. (i). *При всех* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \leqslant e^{-\mu_0 x}, \tag{6.1.2}$$

где

$$\mu_0 := \sup\big\{\mu : \psi_q(\mu) \leqslant 1\big\}, \qquad \psi_q(\mu) := \mathbf{E}e^{\mu\zeta^{(q)}}$$

(лемма 2.1.1 в [26]).

(ii). *Если* $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$, $\psi_q'(\mu_0) < \infty$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) = ce^{-\mu_0 x}\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad c = \text{const} \tag{6.1.3}$$

(классическая теорема Крамера–Лундберга, см., например, [90], [79], [80, XIII, 5]).

Пусть $\widetilde{\chi}$ *есть величина перескока через бесконечно удаленный барьер случайным блужданием со скачками, имеющими распределение случайной величины* $\widetilde{\zeta}^{(q)}$*:*

$$\mathbf{P}(\widetilde{\zeta}^{(q)} \in dt) = e^{\mu_0 t}\mathbf{P}(\zeta^{(q)} \in dt) \tag{6.1.4}$$

(преобразование Крамера над $\zeta^{(q)}$), $\mathbf{E}\widetilde{\zeta}^{(q)} = \psi_q'(\mu_0) < \infty$. *Тогда* $c = \mathbf{E}e^{-\mu_0\widetilde{\chi}} < 1$. (Существуют и другие интерпретации постоянной c, см., например, § 21 в [6].)

Если распределение $\zeta^{(q)}$ *содержит абсолютно непрерывную компоненту или арифметично, то* $o(1)$ *в* (6.1.3) *можно заменить на* $O(e^{-hx})$ *при некотором* $h > 0$ (теорема 21.11 в [6]).

(iii). *Пусть* $\psi_q(\mu_0) < 1$ *или* $\mu_0 = 0$, *а функция*

$$F^I(x) := \int\limits_x^\infty F(t)dt, \quad \text{где} \quad F(x) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x),$$

(*«интегрированный хвост» распределения* $\zeta^{(q)}$) *такова, что функция*

$$e^{\mu_0 x}F^I(x)$$

является надстепенной. Тогда

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \sim \frac{F^I(x)}{B(\mu_0)C(\mu_0)} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{6.1.5}$$

где

$$\begin{aligned} B(\mu) &= \frac{1 - \psi_q(\mu)}{\mu}, \\ C(\mu) &= \frac{1 - \mathbf{E}(e^{\mu\chi(+0)}; \eta(+0) < \infty)}{1 - \mathbf{P}(\eta(+0) < \infty)} = \big[\mathbf{E}e^{\mu\overline{Z}_\infty^{(q)}}\big]^{-1}, \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

$\chi(t)$, $\eta(t)$ *имеют прежний смысл* (см. § 1.1), *но относятся к блужданию* $\{Z_k^{(q)}\}$, *так что при* $\mu_0 = 0$

$$B(0) = -a^{(q)} = -a_\zeta - qa_\tau > 0, \qquad C(0) = 1.$$

Если случайная величина $\zeta^{(q)}$ *арифметична, то* x *в* (6.1.3), (6.1.5) *следует выбирать целочисленным* (теоремы 21.11, 21.12 в [6]).

(iv). *Если* $\mu_0 = 0$, *функция* $F^I(x)$ *субэкспоненциальна,* $a_{\zeta^{(q)}} < 0$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \sim \frac{1}{|a_{\zeta^{(q)}}|} F^I(x) \quad \text{\textit{при}} \quad x \to \infty \tag{6.1.7}$$

(см., например, теорему 12.7.3 в [10]).

Отметим, что утверждения (iii), (iv) допускают соотношение $\mu_0 = 0$, означающее невыполнение условие Крамера [**C**].

Близкий к (6.1.5) результат

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \sim \frac{MF(x)}{1 - \psi_q(\mu_0)}, \tag{6.1.8}$$

где

$$M = \mathbf{E}e^{\mu_0 \overline{Z}_\infty^{(q)}},$$

получен в [45] в случае, когда

$$\mu_0 > 0 \qquad (\mathbf{E}\zeta^{(q)} < 0), \quad \psi_q := \psi_q(\mu_0) < 1, \tag{6.1.9}$$

а свертка $F^{*2}(x) := F * F(x)$ распределений $F(x)$ обладает свойством

$$F^{*2}(x) \sim 2\psi_q F(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{6.1.10}$$

В [47] изучен промежуточный случай, когда $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$, $\psi_q'(\mu_0) = \infty$ (ср. с п. (ii) теоремы 6.1.1).

6.1.2 Распределение максимального значения ОПВ со сносом

Вернемся к исходным ОПВ. Обозначим

$$\overline{Z}^{(q)} = \sup_{t \geqslant 0} Z^{(q)}(t)$$

и пусть, как и прежде, $\zeta^{(q)} = \zeta + q\tau$, $\psi_q(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\zeta^{(q)}}$. Если уравнение

$$\psi_q(\mu) = 1 \tag{6.1.11}$$

имеет положительное решение μ_0 (это возможно лишь в случае $\mathbf{E}\zeta^{(q)}< 0$), то через $\widetilde{\zeta}^{(q)}$ обозначим, как и прежде, преобразование Крамера в точке μ_0 над случайной величиной $\zeta^{(q)}$, т.е. случайную величину с распределением (6.1.4), а через $\widetilde{\chi}$ — величину перескока через бесконечно удаленный барьер случайным блужданием, порожденным суммами независимых случайных величин, распределенных как $\widetilde{\zeta}^{(q)}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1.2. *Пусть существует решение $\mu_0 > 0$ уравнения* (6.1.11), $\psi_q'(\mu_0) < \infty$. *Тогда, если $q \leqslant 0$, то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = ce^{-\mu_0 x}\big(1 + o(1)\big) \quad \textit{при} \quad x \to \infty, \tag{6.1.12}$$

где $c = \mathbf{E}e^{-\mu_0\widetilde{\chi}} < 1$.

Если $q > 0$, τ и ζ независимы, то

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = c\psi^{(\tau)}(q\mu_0)e^{-\mu_0 x}\big(1 + o(1)\big) \quad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{6.1.13}$$

Если распределение $\zeta^{(q)}$ содержит абсолютно непрерывную компоненту или арифметично, то $o(1)$ в (6.1.12), (6.1.13) *можно заменить на $O(e^{-hx})$ при некотором $h > 0$.*

Если случайная величина $\zeta^{(q)}$ арифметична, то x в (6.1.12), (6.1.13) *следует выбирать целочисленным.*

Доказательство. Пусть, как и прежде,

$$Z_k^{(q)} := \sum_{j=1}^{k} \zeta_j^{(q)},$$

где $\zeta_j^{(q)}$ суть независимые копии $\zeta^{(q)}$, $\overline{Z}_\infty^{(q)} := \sup_{k\geqslant 0} Z_k^{(q)}$. Если $q \leqslant 0$, то значение $\sup_{t\geqslant 0} Z^{(q)}(t)$ может достигаться только в точках T_k, $k = 0, 1, \ldots$ Поэтому

$$\overline{Z}^{(q)} = \sup_{k\geqslant 0}(Z_k + qT_k) = \sup_{k\geqslant 0} Z_k^{(q)} = \overline{Z}_\infty^{(q)}.$$

Остается воспользоваться утверждением (ii) теоремы 6.1.1, в силу которого справедливо (6.1.12).

Если $q > 0$, то в случае, когда τ и ζ независимы, имеем

$$\overline{Z}^{(q)} = q\tau_1 + \sup_{k\geqslant 1}\big\{Z_k + q(T_{k+1} - \tau_1)\big\} \underset{d}{=} q\tau + \overline{Z}_\infty^{(q)},$$

где τ и $\overline{Z}^{(q)}_{\infty}$ независимы. Поэтому при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{P}(\tau \in dt)\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)}_{\infty} > x - qt) \sim$$

$$\sim ce^{-\mu_0 x} \int\limits_0^{\infty} \mathbf{P}(\tau \in dt) e^{\mu_0 qt} = c\psi^{(\tau)}(q\mu_0)e^{-\mu_0 x}. \quad (6.1.14)$$

Законность предельного перехода в (6.1.14) вытекает из теоремы о мажорируемой сходимости и неравенства $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)}_{\infty} \geqslant x) \leqslant e^{-\mu_0 x}$ в (6.1.2). Конечность $\psi^{(\tau)}(q\mu_0)$ вытекает из соотношения

$$1 = \psi_q(\mu_0) = \psi^{(\zeta)}(\mu_0)\psi^{(\tau)}(q\mu_0)$$

и того, что $\zeta = \zeta^{(q)} - q\tau < \zeta^{(q)}$. Теорема 6.1.2 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда решение μ_0 уравнения (6.1.11) не существует. Под μ_0 мы будем понимать теперь характеристику более общего вида:

$$\mu_0 = \sup\{\mu : \ \psi_q(\mu) \leqslant 1\}$$

(случай $\mu_0 = 0$, означающий невыполнение условия Крамера [**C**], не исключается) и обозначим, как и прежде,

$$F(x) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x), \qquad F^I(x) = \int\limits_x^{\infty} F(t)dt$$

Теорема 6.1.3. *Пусть* $\psi_q = \psi_q(\mu_0) < 1$ *или* $\mu_0 = 0$, *функция* $e^{\mu_0 x}F^I(x)$ *является надстепенной. Тогда в случае* $q \leqslant 0$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) \sim \frac{F^I(x)}{B(\mu_0)C(\mu_0)} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad (6.1.15)$$

где $B(\mu)$, $C(\mu)$ *определены в* (6.1.6), *так что при* $\mu_0 = 0$

$$B(0) = -a_{\zeta^{(q)}} = -a_\zeta - qa_\tau, \qquad C(0) = 1. \quad (6.1.16)$$

Если распределение $F(x)$ *удовлетворяет условиям* $\mu_0 > 0$, (6.1.10), *то утверждение* (6.1.15) *сохранится и его можно записать в виде*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) \sim \frac{\mu_0 M F^I(x)}{1 - \psi_q}. \quad (6.1.17)$$

Если случайная величина $\zeta^{(q)}$ *арифметична, то значения* x *в* (6.1.15) *следует выбирать целочисленными.*

Если $q \leqslant 0$, $\mu_0 = 0$, $a_{\zeta^{(q)}} < 0$, *функция* $F^I(x)$ *субэкспоненциальна, то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) \sim \frac{F^I(x)}{|a_{\zeta^{(q)}}|} \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{6.1.18}$$

В случае $q > 0$, *когда* τ *и* ζ *независимы,* $\mu_0 > 0$, *соотношение* (6.1.15) *сохранится, если в его правой части добавить множитель* $\psi^{(q)}(q\mu_0)$.

Если $q > 0$, $\mu_0 = 0$, *то предположим дополнительно, что функция* F^I *является правильно меняющейся и при любом фиксированном* $h > 0$

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant hx) = o\big(F^I(x)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{6.1.19}$$

Тогда справедливо (6.1.18).

Замечание 6.1.1. Условие (6.1.19), по-видимому, всегда выполнено, но его доказательство весьма громоздко, так как требует перебора разных соотношений между распределениями τ и ζ. Оно выполнено, например, если τ и ζ независимы и при любом $h > 0$

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant hx) = o\Big(\int_x^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant t)dt\Big). \tag{6.1.20}$$

Действительно, считая для простоты, что $p := \mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) > 0$, и полагая, не ограничивая общности, $q = 1$, получим в силу (6.1.20)

$$F^I(x) = \int_x^\infty \mathbf{P}(\tau + \zeta \geqslant t)dt \geqslant p\int_x^\infty \mathbf{P}(\tau \geqslant t)dt \gg \mathbf{P}(\tau \geqslant hx)$$

при $x \to \infty$, что доказывает (6.1.19).

Отсутствие соотношения (6.1.20) означает, грубо говоря, что распределение τ либо имеет большие лакуны, либо удовлетворяет условию Крамера. Если $\mathbf{P}(\tau \geqslant x)$ убывает экспоненциальным образом или быстрее, то тогда $\mathbf{P}(\tau \geqslant hx) = o\big(\mathbf{P}(\zeta \geqslant x)\big)$, так как функция $F^I(x)$ является правильно меняющейся, и соотношение (6.1.19) вновь будет выполнено.

Доказательство теоремы 6.1.3 совершенно аналогично доказательству теоремы 6.1.2 и опирается на утверждения (i), (iii) теоремы 6.1.1 и результаты [45] (см. (6.1.8)). Пояснений требует лишь случай $q > 0$, $\mu_0 = 0$. В этом случае оценим $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} \geqslant x)$ снизу и сверху. Имеем в силу

(6.1.5), (6.1.16)

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \mathbf{P}(q\tau + \overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \geqslant \mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} > x) \sim \frac{F^I(x)}{|a_\zeta + qa_\tau|}.$$

С другой стороны, в силу условия (6.1.19) при $h \in (0,1)$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) \leqslant \mathbf{P}(q\tau \geqslant hx) + \mathbf{P}(\overline{Z}_\infty^{(q)} \geqslant (1-h)x) =$$
$$= \mathbf{P}(q\tau \geqslant hx) + \frac{F^I\big((1-h)x\big)}{|a_\zeta + qa_\tau|}\big(1+o(1)\big) = \frac{F^I\big((1-h)x\big)}{|a_\zeta + qa_\tau|}\big(1+o(1)\big)$$

при $x \to \infty$. Это неравенство верно при любом $h > 0$. Так как левая часть этого неравенства от h не зависит и $F^I\big((1-h)x\big)/F^I(x) \to 1$ при $x \to \infty$, $h \to 0$, то оно верно и при $h = 0$. Это доказывает (6.1.18). Теорема 6.1.3 доказана.

Замечание 6.1.2. Распространение утверждений теорем 6.1.2, 6.1.3 на неоднородный случай при $q \leqslant 0$ проще всего осуществить с помощью формулы полной вероятности по первому (неоднородному) скачку (τ_1, ζ_1). Положим

$$\zeta_1^{(q)} = \zeta_1 + q\tau_1, \qquad \psi_{q,1}(\mu) = \mathbf{E}\exp\mu\zeta_1^{(q)}.$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_1^{(q)} > x) = \mathbf{P}(\zeta_1^{(q)} > x) + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathbf{P}(\zeta_1^{(q)} \in dv)\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x - v), \quad (6.1.21)$$

где $\overline{Z}_1^{(q)}$ соответствует неоднородному ОПВ.

Пусть выполнены условия теоремы 6.1.2. Тогда, если $\psi_{q,1}(\mu_0) < \infty$, то в силу (6.1.12)

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_1^{(q)} > x) = \mathbf{P}(\zeta_1^{(q)} > x) + c\psi_{q,1}(\mu_0)e^{-\mu_0 x}\big(1+o(1)\big) =$$
$$= c\psi_{q,1}(\mu_0)e^{-\mu_0 x}\big(1+o(1)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Если выполнены условия теоремы 6.1.3, то из (6.1.21) и (6.1.17) получаем

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_1^{(q)} > x) = \mathbf{P}(\zeta_1^{(q)} > x) + \frac{\psi_{q,1}(\mu_0)MF^I(x)}{1-\psi_q}\big(1+o(1)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Здесь при $\mu_0 > 0$ конечность $\psi_{q,1}(\mu_0)$ не влечет за собой пренебрежимость слагаемого $\mathbf{P}(\zeta_1^{(q)} > x)$.

6.1.3 Распределение времени первого прохождения высокого уровня

Обозначим через
$$Z^{[q]}(t) = Z^{(q)}_{\nu(t)} = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \zeta_k^{(q)}$$
«обычный» ОПВ (без линейного сноса), такой что
$$Z^{[q]}(T_k) = Z^{(q)}(T_k).$$

С помощью ОПВ $Z^{[q]}(t)$ задачи, связанные с изучением граничных функционалов $\overline{Z}^{(q)}(T)$, $\eta_{Z^{(q)}}(x) = \inf\{t;\, Z^{(q)}(t) > x\}$ для процессов со сносом qt, сводятся при $q \leqslant 0$ к аналогичным задачам для «обычных» ОПВ, так как
$$\begin{gathered} \mathbf{P}\big(\overline{Z}^{(q)}(t) > x\big) = \mathbf{P}\big(\overline{Z}^{[q]}(t) > x\big), \\ \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) < t\big) = \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{[q]}}(x) < t\big). \end{gathered} \tag{6.1.22}$$

Обозначим
$$\eta_{Z^{(q)}_\wedge}(x) = \min\{k:\, Z_k^{(q)} > x\}.$$
В случае $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$ из теоремы 3.4.3 в [12] вытекает следующее утверждение о предельном распределении $\eta_{Z^{(q)}_\wedge}(x)$ при условии $\overline{Z}^{(q)}_\infty > x$ и $x \to \infty$. Обозначим
$$\sigma_1^2 = \big(\ln \psi_q(\mu_0)\big)''.$$

Теорема 6.1.4. *Пусть $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$, $\sigma_1 < \infty$, $q \leqslant 0$. Тогда при $x \to \infty$*
$$\mathbf{P}\left(\eta_{Z^{(q)}_\wedge}(x) < \frac{x}{\psi_q'(\mu_0)} + \frac{z\sigma_1\sqrt{x}}{(\psi_q'(\mu_0))^{3/2}} \;\Big|\; \overline{Z}^{(q)}_\infty > x\right) = \Phi(z) + o(1),$$
где $\Phi(z)$ — функция распределения нормального закона.

Ниже, в § 6.4 с помощью (6.1.22) будет установлено утверждение, аналогичное теореме 6.1.4, для времени первого прохождения $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ высокого уровня x процессом $Z^{(q)}(t)$ (см. следствие 6.4.2).

Значительным контрастом к этому утверждению является поведение условного распределения $\eta_{Z^{(q)}_\wedge}(x)$ в случае, когда $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) < 1$ и выполнены условия теоремы 6.1.3. Мы проиллюстрируем это на примере, когда при $t > 0$
$$F(t) := \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > t) = V_q(t)e^{-\mu_0 t}, \qquad \mu_0 > 0, \tag{6.1.23}$$

где $V_q(t)$ — правильно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда нетрудно видеть, что если

$$I_1 := \int_0^\infty V_q(t)dt < \infty,$$

то распределение $\zeta^{(q)}$ можно выбрать таким образом, что $\psi_q < 1$ и, стало быть, будут выполнены условия теоремы 6.1.3, равно как и условия (6.1.9), (6.1.10), так что справедливо соотношение (6.1.17). В этом случае будет существовать собственное предельное распределение $\eta_{Z_\wedge^{(q)}}$ при условии $\overline{Z}_\infty^{(q)} > x$.

Теорема 6.1.5. *Пусть выполнены соотношения* (6.1.23), $I_1 < \infty$, $\psi_q < 1$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = 1\big) = F(x), \\ &\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k\big) \sim c_k F(x), \qquad k \geqslant 2, \end{aligned} \tag{6.1.24}$$

где c_k *при* $k \geqslant 1$ *удовлетворяют рекуррентным уравнениям*

$$\begin{aligned} c_1 = 1, \qquad c_{k+1} = c_k\psi_q + \mu_0 I_k, \\ I_k := \int_0^\infty \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(u) = k\big)e^{\mu_0 u}du < \infty. \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

Существует собственное предельное условное распределение

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k \,\big|\, \overline{Z}_\infty^{(q)} > x\big) = \frac{c_k(1-\psi_q)}{M}, \quad M = \mathbf{E}e^{\mu_0 \overline{Z}_\infty^{(q)}}. \tag{6.1.26}$$

Доказательство. Первое соотношение в (6.1.24) очевидно.

Далее, допустим, что при $k \geqslant 1$ и $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k\big) \sim c_k F(x) \tag{6.1.27}$$

($c_1 = 1$). Воспользуемся индукцией и покажем, что соотношение вида (6.1.27) справедливо и при $k+1$. Действительно, так как

$$dF(t) = dV_q(t)e^{-\mu_0 t} - \mu_0 V_q(t)e^{-\mu_0 t}dt, \tag{6.1.28}$$

то для правильно меняющихся функций $V_q(t)$ интегрирование по второму слагаемому в (6.1.28) по области $t \in (x/2, x)$, в которой $V_q(t) \to 0$

при $x \to \infty$, дает основной вклад и в силу (6.1.27)

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k+1\big) = -\int_{-\infty}^{x} dF(t)\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x-t) = k\big) \sim$$

$$\sim -c_k \int_{-\infty}^{x/2} dF(t)F(x-t) + \mu_0 \int_{0}^{x/2} \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(u) = k\big)F(x-u)du.$$

Здесь при $t \in (-\infty, x/2)$ выполняется $V_q(x-t) < cV_q(x)$ и $V_q(x-t) \sim V_q(x)$ при каждом фиксированном t и $x \to \infty$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{x/2} dF(t)F(x-t) \sim V_q(x)e^{-\mu_0 x} \int_{-\infty}^{x/2} dF(t)e^{-\mu_0 t} \sim F(x)\psi_q.$$

Далее, при $u \in (0, x/2)$ имеем $V_q(x-u) < cV_q(x)$ и $V_q(x-u) \sim V_q(x)$ при каждом фиксированном u. Поэтому

$$\int_{0}^{x/2} \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(u) = k\big)F(x-u)du \sim V_q(x)e^{-\mu_0 x} \int_{0}^{\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(u) = k\big)e^{\mu_0 u}du.$$

В итоге получаем

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k+1\big) = c_k\psi_q F(x) + \mu_0 F(x) \int_{0}^{\infty} \mathbf{P}\big(\eta_Z(u) = k\big)e^{\mu_0 u}du.$$

Это доказывает (6.1.25).

Далее,

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) = k\big) \leqslant F^{*k}(x) \sim k\psi_q^{k-1}F(x),$$

так что

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) > k \,|\, \overline{Z}_\infty^{(q)} > x\big) \leqslant ck\psi_q^k \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad c = \mathrm{const},$$

и условное распределение $\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x)$ мажорируется экспоненциально убывающей функцией. Это вместе с (6.1.27) доказывает (6.1.26) и тот факт, что сумма правых частей в (6.1.26) равна 1. Теорема 6.1.5 доказана.

По поводу распределения $\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x)$ см. также [98].

Замечание 6.1.3. Утверждение, аналогичное теореме 6.1.5, может быть установлено и в случае, когда $V_q(t)$ в (6.1.23) является интегрируемой семиэкспоненциальной функцией. Однако в этом случае выкладки доказательства будут более громоздкими.

Условное распределение времени $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ для ОПВ $Z^{(q)}(t)$ при условии $\overline{Z}^{(q)} > x$ имеет более сложную природу. При весьма широких условиях удается доказать лишь равномерную ограниченность по вероятности случайной величины $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ при всех x на множестве

$$\{\overline{Z}^{(q)} > x\} = \{\eta_{Z^{(q)}}(x) < \infty\}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\eta_{Z^{(q)}}(x) = T_\eta, \quad \text{где} \quad \eta = \eta_{Z^{(q)}_{\wedge}}(x),$$

и ограничимся рассмотрением случая, когда τ и ζ независимы или линейно зависимы.

Теорема 6.1.6. *Пусть $\zeta = h\tau + \omega$, где τ и ω независимы, $q \leqslant 0$, $h + q \leqslant 0$, $\psi_q < 1$,*

$$F^{(\omega)}(t) = \mathbf{P}(\omega > t) = V_0(t)e^{-\mu_0 t}, \tag{6.1.29}$$

где $V_0(t)$ правильно меняющаяся на бесконечности функция такая, что $\int_0^\infty V_0(t)dt < \infty$.

Тогда выполнено условие (6.1.23),

$$F(t) \sim c_q F^{(\omega)}(t) \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \tag{6.1.30}$$

где $c_q = \mathbf{E}e^{\mu_0(q+h)\tau} \leqslant 1$,

$$\limsup_{x\to\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) > v \,|\, \overline{Z}^{(q)} > x\big) \to 0 \quad \textit{при} \quad v \to \infty. \tag{6.1.31}$$

По-видимому, утверждение теоремы 6.1.6 сохранится и в случае, когда $V_q(t)$ в (6.1.23) есть интегрируемая семиэкспоненциальная функция (ср. с замечанием 6.1.3).

Доказательство теоремы 6.1.6. Так как $\zeta^{(q)}=\zeta+q\tau=\omega+(q+h)\tau$, то мы можем, не ограничивая общности, рассматривать лишь случай независимых τ и ζ, положив $\zeta = \omega$ и заменив параметр линейного сноса на $q + h \leqslant 0$.

Докажем сначала, что из (6.1.29) вытекает выполнение условия (6.1.23) и что выполнено (6.1.30), т.е. при принятом соглашении

$$F(t) \sim c_q F^{(\zeta)}(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{6.1.32}$$

где $q \leqslant 0$, $c_q = \mathbf{E}e^{\mu_0 q\tau} \leqslant 1$ (ср. с (6.1.30)).

Если $q = 0$, то соотношение (6.1.32) превращается в тождество. Если $q < 0$, то положим для простоты $q = -1$. Тогда для независимых τ и

ζ (т.е. при $\zeta = \omega$) условие (6.1.29) превращается в условие $F^{(\zeta)}(t) = V_0(t)e^{-\mu_0 t}$ и, стало быть,

$$F(t) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > t) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau \in du) F^{(\zeta)}(t+u) =$$

$$= V_0(t)e^{-\mu_0 t} \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau \in du) e^{-\mu_0 u} V_0(t+u)/V_0(t). \qquad (6.1.33)$$

Так как $V_0(t)$ — правильно меняющаяся интегрируемая функция, то при всех достаточно больших t найдется постоянная $c_0 < \infty$ такая, что

$$\sup_{u \geqslant 0} \big[V_0(t+u)/V_0(t)\big] \leqslant c_0.$$

Поэтому по теореме о мажорируемой сходимости интеграл в (6.1.33) сходится при $t \to \infty$ к $c_q = \mathbf{E}e^{-\mu_0 \tau}$ и выполнены соотношения (6.1.32), (6.1.30), (6.1.23).

Для доказательства основного утверждения (6.1.31) нам понадобится

Лемма 6.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1.6. *Тогда для любого фиксированного $N > 0$ выполняется*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(x) \leqslant N\big) \sim b_N F^{(\zeta)}(x) \quad \textit{при} \quad x \to \infty, \quad b_N = \mathrm{const}.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения в доказательстве утверждения (6.1.24), (6.1.25) в теореме 6.1.5 применительно к последовательности $Z_k^{(0)} = Z_k$, получим, что

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(x) = 1\big) = F^{(\zeta)}(x),$$
$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(x) = k\big) \sim C_k F^{(\zeta)}(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

где C_k при $k \geqslant 1$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям: $C_1 = 1$,

$$C_{k+1} = C_k \psi(\mu_0) + \mu_0 I_{k,0},$$
$$I_{k,0} = \int_0^\infty \mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(u) = k\big) e^{\mu_0 u} du$$

(заметим, что здесь $\psi(\mu_0) \geqslant 1$ при $\mathbf{E}\zeta \geqslant 0$). Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(x) \leqslant N\big) \sim b_N F^{(\zeta)}(x), \quad \text{где} \quad b_N = \sum_{j=1}^N C_j.$$

Лемма 6.1.1 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 6.1.6. При $\eta = \eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x)$ имеем

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) > v \,|\, \overline{Z}^{(q)} > x\big) = \mathbf{P}\big(T_\eta > v \,|\, \overline{Z}^{(q)} > x\big) = \\ = \frac{\mathbf{P}\big(T_\eta > v;\, \{\eta \leqslant N\} \cup \{N < \eta < \infty\}\big)}{\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\mathbf{P}(T_N > v,\, \eta \leqslant N)}{\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)} + \varepsilon_N(x), \qquad (6.1.34)$$

где

$$\varepsilon_N(x) \leqslant \mathbf{P}\big(\eta > N \,|\, \eta < \infty\big),$$

и согласно теореме 6.1.5

$$\limsup_{x\to\infty} \varepsilon_N(x) \leqslant \varepsilon_N \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Далее, $Z_k^{(q)} \leqslant Z_k^{(0)} = Z_k$ при $q \leqslant 0$ и, стало быть, $\eta_{Z_\wedge^{(q)}}(x) \geqslant \eta_{Z_\wedge}(x)$, и по лемме 6.1.1

$$\mathbf{P}(T_N > v,\ \eta \leqslant N) \leqslant \mathbf{P}(T_N > v, \eta_{Z_\wedge}(x) \leqslant N) = \\ = \mathbf{P}(T_N > v)\mathbf{P}\big(\eta_{Z_\wedge}(x) \leqslant N\big) \sim \mathbf{P}(T_N > v) b_N F^{(\zeta)}(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Отсюда и из (6.1.34) по теореме 6.1.3 находим

$$\limsup_{x\to\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) > v \,|\, \overline{Z}^{(q)} > x\big) \leqslant c b_N \mathbf{P}(T_N > v) + \varepsilon_n, \quad c = \text{const}.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, чтобы выполнялось $\varepsilon_N < \varepsilon/2$, а затем выбрать v так, чтобы выполнялось $c b_N \mathbf{P}(T_N > v) < \varepsilon/2$. При таком v левая часть в (6.1.31) будет меньше ε. Это доказывает (6.1.31). Теорема 6.1.6 доказана.

По-видимому, наряду с (6.1.31) при широких условиях будет иметь место также *сходимость* условного распределения $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ при $x \to \infty$ к собственному распределению.

Замечание 6.1.4. Если τ и ζ линейно зависимы: $\zeta = h\tau + \omega$ и $q + h > 0$, то утверждение (6.1.31) теоремы 6.1.6 может быть неверным. Большие скачки $\zeta^{(q)} = \omega + (q+h)\tau$, обеспечивающие достижение уровня x, могут быть порождены большими скачками τ, и время $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ будет сравнимо с x.

В дополнение к теоремам 6.1.4–6.1.6 нам осталось рассмотреть случай $\mu_0 = 0$, т.е. случай так называемых тяжелых хвостов распределения

$\zeta^{(q)}$ на полуоси $t > 0$ или, что при $q \leqslant 0$ то же — тяжелых хвостов распределения ζ. Рассмотрим правильно меняющиеся распределения $\zeta^{(q)}$:

$$F(t) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > t) = t^{-\alpha} l(t), \tag{6.1.35}$$

где $\alpha > 1$, $l(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Теорема 6.1.7. *Пусть выполнено* (6.1.35) *и одно из следующих двух условий:*

либо $\alpha \in (1,2)$, $\mathbf{P}(\zeta^{(q)} < -t) < cF(t)$, $TF(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$;

либо $\alpha > 2$, $d = \mathbf{D}\zeta^{(q)} < \infty$, $x \gg \sqrt{(\alpha-2)da_\tau^{-1} T \ln T}$.

Тогда, если $a + q < 0$, $q \leqslant 0$, *то*

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_{Z^{(q)}}(x) < T\bigr) = \bigl(1 + o(1)\bigr) \int_0^T F\bigl(x - (a+q)t\bigr) dH(t) \tag{6.1.36}$$

при $T \to \infty$, *где* $H(t) = \mathbf{E}\nu(t)$;

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_{Z^{(q)}}(x) < vx\bigr) = \frac{xF(x)[1-(1-(a+q)v)^{1-\alpha}]}{(\alpha-1)|a+q|a_\tau} \bigl(1 + o(1)\bigr), \tag{6.1.37}$$

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_{Z^{(q)}}(x) > vx \mid \overline{Z}^{(q)} > x\bigr) \sim \bigl[1 + |a+q|v\bigr]^{1-\alpha} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{6.1.38}$$

Доказательство. Основное утверждение (6.1.36) вытекает из теоремы 16.4.1 в [26] (см. также теорему 16.5.1 в [26]). Утверждение (6.1.37) следует из (6.1.36). Далее, в силу теоремы 6.1.3 (см., например, (6.1.18)) и того, что $|a+q|a_\tau = |a_\zeta + qa_\tau| = |a_{\zeta^{(q)}}|$, получаем

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{x^{1-\alpha} l(x)}{(\alpha-1)|a_{\zeta^{(q)}}|} \bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Отсюда и из (6.1.3) следует (6.1.38). Теорема 6.1.7 доказана.

С помощью соотношений (6.1.22) и результатов работы [105] утверждение (6.1.36) можно распространить на субэкспоненциальные распределения F.

В последующих разделах мы, как правило, будем предполагать выполнение условие Крамера.

§ 6.2 Предельные теоремы для условного распределения скачков при фиксированном конце траектории и выполнении условия Крамера

Содержание этого раздела аналогично содержанию § 3.1 в [12].

6.2.1 Предельное условное распределение скачков

Как и в § 5.2 мы будем предполагать, что нормированное уклонение $\alpha = x/T$ принадлежит некоторому компакту

$$K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$$

($\alpha_\pm$ определены в теореме 3.5.2, $\beta_\pm$ — в лемме 3.5.3), под которым будем понимать отрезок, содержащий окрестность точки $\alpha = a$. Чтобы упростить изложение, ограничимся рассмотрением *однородного случая* $\boldsymbol{\xi}_1 \underset{d}{=} \boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$. Обозначим через ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$ преобразование Крамера над $\boldsymbol{\xi}$ в точке $\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big)$, т.е. случайный вектор с распределением

$$\mathbf{P}({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi} \in d\boldsymbol{v}) = e^{\lambda(\alpha)v_{(1)}+\mu(\alpha)v_{(2)}}\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in d\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} = (v_{(1)}, v_{(2)}),$$

так что существует плотность распределения ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$ относительно распределения $\boldsymbol{\xi}$:

$${}^{\alpha}p(\boldsymbol{v}) := \frac{\mathbf{P}({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi} \in d\boldsymbol{v})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in d\boldsymbol{v})} = e^{\lambda(\alpha)v_{(1)}+\mu(\alpha)v_{(2)}} \tag{6.2.1}$$

(напомним, что $\psi\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) = 1$). При произвольном фиксированном целом $m \geqslant 1$ обозначим через $K_{\boldsymbol{\xi}}$ произвольный компакт из $\mathbb{R}^{2m}$. Пусть далее $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^2$ и $1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots < k_m$ — произвольный набор индексов.

Теорема 6.2.1. *Пусть ζ — нерешетчатая случайная величина, выполнено условие* [**C**], $\alpha = x/n$. *Тогда плотность*

$$p_{T,x}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \frac{\mathbf{P}\big(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\vec{\boldsymbol{v}} |\, Z(T) \in \Delta[x)\big)}{\mathbf{P}({}^{\alpha}\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\vec{\boldsymbol{v}})} \tag{6.2.2}$$

условного распределения $\vec{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{k_m})$ при условии $\big\{Z(T) \in \Delta[x)\big\}$ относительно распределения ${}^{\alpha}\vec{\boldsymbol{\xi}} = \big({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, {}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_m\big)$, где ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_j$ — независимые копии ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$, сходится при $T \to \infty$ к 1 равномерно по $\alpha \in K$, $\vec{v} \in K_\xi \subset \mathbb{R}^{2m}$, $\Delta \in [\Delta_T, \Delta_0]$. Здесь $\Delta_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$, $\Delta_0 > 0$ — любое фиксированное число.

Такое же утверждение справедливо и для вектора $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ со случайными индексами $\nu(T) - k_1, \ldots, \nu(T) - k_m$ при $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_m$.

Из доказательства теоремы будет видно, что можно брать конечные наборы и других индексов, расположенных между 1 и $\nu(T)$.

Теорема 6.2.1 означает сходимость по вариации условных распределений $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ при условии $\big\{Z(T) \in \Delta[x)\big\}$ к распределению ${}^{\alpha}\vec{\boldsymbol{\xi}}$. Из нее вытекает, в частности,

Следствие 6.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2.1. *Тогда для любых борелевских множеств* $B_1, \ldots, B_m$ *из* $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}\big(\boldsymbol{\xi}_1 \in B_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m \in B_m \mid Z(T) \in \Delta[x)\big) = \prod_{i=1}^{m} \mathbf{P}({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_i \in B_i) + \varepsilon_T, \qquad (6.2.3)$$

где $\varepsilon_T \to 0$ *при* $T \to \infty$ *равномерно по* $\alpha \in K$, $\Delta \in [\Delta_T, \Delta_0]$.

В дальнейшем главную часть в правой части (6.2.3) мы будем называть «предельным распределением» при $T \to \infty$, хотя это не совсем корректно, так как значение $\alpha \in K$ может зависеть от T. Такого же соглашения мы будем придерживаться и в ряде других аналогичных случаях. Формально термин «предельное распределение» в (6.2.3) оправдан лишь в тех случаях, когда $\alpha \to \alpha_0 \in K$ при $T \to \infty$ и α в правой части (6.2.3) заменено на α_0.

Более корректно было бы в соотношениях (6.2.3) говорить о «близких распределениях». Эта более точная терминология была введена и использовалась в § 3.3 в [12] при изучении аналогичных задач для случайных блужданий. Однако, чтобы сделать изложение более кратким, ниже мы будем следовать (не совсем корректно) названному выше соглашению о понимании слов «предельное распределение».

Доказательство теоремы 6.2.1. Обозначим

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}_i = (t, z).$$

Тогда

$$p^0_{T,x}(\vec{v}) := \frac{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{v} \mid Z(T) \in \Delta[x))}{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{v})} = \frac{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{v}, Z(T) \in \Delta[x))}{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{v})\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x))} = \\ = \frac{\mathbf{P}(Z(T-t) \in \Delta[x-z))}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x))}. \qquad (6.2.4)$$

В силу теоремы 5.2.1

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x)\big) = \frac{\Delta}{\sqrt{T}} C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})\big(1 + o(1)\big), \qquad (6.2.5)$$

где $\alpha = x/T$, $C(\alpha)$ — положительная непрерывная функция на K,

$$I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R}) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(\alpha) y} \mathbf{P}(\tau > y) dy,$$

$\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K$.

Положим

$$\alpha_m := \frac{x-z}{T-t} = \alpha - \frac{z}{T} + \frac{\alpha t}{T} + O(T^{-2})$$

Так как $\alpha_m = \alpha + o(1)$ при $T \to \infty$ и функция $C(\alpha)$ в теореме 5.2.1 есть положительная непрерывная функция от α, то применяя эту теорему к числителю и знаменателю в (6.2.4), получим

$$p^0_{T,x}(\vec{v}) = \frac{I_Z(\alpha_m, 0, 0, \mathbb{R})}{I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})} \exp\big\{ - (T-t)D(\alpha_m) + TD(\alpha)\big\}\times \\ \times \big(1 + o(1)\big). \quad (6.2.6)$$

Здесь

$$D(\alpha_m) = D\bigg(\alpha - \frac{z}{T} + \frac{\alpha t}{T} + O(T^{-2})\bigg) = D(\alpha) + \mu(\alpha)\bigg(\frac{\alpha t}{T} - \frac{z}{T}\bigg) + O(T^{-2});$$

поэтому

$$p^0_{T,x} = \exp\big\{tD(\alpha) - \mu(\alpha)(\alpha t - z)\big\}\big(1 + o(1)\big). \qquad (6.2.7)$$

Так как $D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A\big(\mu(\alpha)\big)$, то в (6.2.7) выражение в фигурных скобках равно

$$z\mu(\alpha) + t\big(D(\alpha) - \alpha\mu(\alpha)\big) = z\mu(\alpha) - tA\big(\mu(\alpha)\big) = z\mu(\alpha) + t\lambda(\alpha).$$

Кроме того,

$$\frac{I_Z(\alpha_m, 0, 0, \mathbb{R})}{I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})} \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \qquad (6.2.8)$$

Поэтому в силу (6.2.1), (6.2.6)

$$p^0_{T,x}(\boldsymbol{\vec{v}}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathbf{P}({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_i \in d\boldsymbol{v}_i)}{\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i \in d\boldsymbol{v}_i)} \big(1 + o(1)\big) = \frac{\mathbf{P}({}^{\alpha}\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{\vec{v}})}{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{\vec{v}})} \big(1 + o(1)\big),$$

$$p_{T,x}(\boldsymbol{\vec{v}}) = p^0_{T,x}(\boldsymbol{\vec{v}}) \frac{\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{\vec{v}})}{\mathbf{P}({}^{\alpha}\vec{\boldsymbol{\xi}} \in d\boldsymbol{\vec{v}})} = 1 + o(1),$$

где остаточный член равномерен по $\alpha \in K$, $\boldsymbol{\vec{v}} \in K_\xi$.

Доказательство второго утверждения теоремы повторяет приведенные выше рассуждения. Теорема 6.2.1 доказана.

Замечание 6.2.1. В соответствии с теоремой 5.2.1 предельное условное распределение $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ при условии $\big\{Z(T) \in \Delta[x), B(u, v, \mathbf{w})\big\}$ останется таким же, как в теореме 6.2.1. Действительно, вместо множителя

$I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})$ в (6.2.5) теперь появится множитель $I_Z(\alpha,u,v,\mathbf{w})$. Если он не равен нулю, то отношение множителей этого вида

$$\frac{I_Z(\alpha_m,u,v,\mathbf{w})}{I_Z(\alpha,u,v,\mathbf{w})}$$

(это аналог соотношения (6.2.6)) сходится как и в (6.2.8) к 1 при $T\to\infty$ и все проведенные в доказательстве теоремы 6.2.1 выкладки сохранятся.

Очевидно, что «предельное» условное распределение $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ будет таким же и в том случае, если событие $B(u,v,\mathbf{w})$ (см. теорему 5.2.1) заменить на событие о принадлежности вектора $\big(\gamma(T),\chi(T),\zeta(T)\big)$ произвольному параллелепипеду положительной меры, порожденной распределением

$$\frac{I_Z(\alpha,u,v,\mathbf{w})}{I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})}.$$

Все сказанное, конечно же, распространяется и на векторы $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ со случайными индексами, названными во втором утверждении теоремы 6.2.1.

6.2.2 О распределении вектора ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$

Преобразование Лапласа над распределением ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$ имеет вид

$${}^{\alpha}\mathbf{A}(\lambda,\mu):=\mathbf{E}e^{\langle {}^{\alpha}\boldsymbol{\xi},\,(\lambda,\mu)\rangle}=\mathbf{A}\big(\lambda+\lambda(\alpha),\mu+\mu(\alpha)\big).$$

Базовая функция ${}^{\alpha}A(\mu)$, соответствующая скачкам ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$ в окрестности точки $(0,0)$, есть решение (со знаком «-») уравнения $\mathbf{A}\big(\lambda+\lambda(\alpha),\mu+\mu(\alpha)\big)=0$, т.е.

$${}^{\alpha}A(\mu)=\lambda(\alpha)+A\big(\mu+\mu(\alpha)\big),$$

так что ${}^{\alpha}A(0)=0$. Среднее значение процесса ${}^{\alpha}Z(t)$ со скачками ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$ на единицу времени асимптотически эквивалентно (см. § 1.1) значению

$${}^{\alpha}a:={}^{\alpha}A'(0)=A'\big(\mu(\alpha)\big)=\alpha \qquad (6.2.9)$$

(напомним, что $\mu(\alpha)$ есть функция, обратная к $A'(\mu)$). Дисперсия ${}^{\alpha}Z(t)$ на единицу времени асимптотически эквивалентна

$${}^{\alpha}\sigma^2=A''\big(\mu(\alpha)\big).$$

§ 6.3 Интегро-локальные теоремы для времени первого прохождения траекторией обобщенного процесса восстановления высокого уровня

Обозначим

$$\eta_Z(x) := \inf\{t:\ Z(t) > x\}, \qquad \chi_Z(x) = Z(\eta_Z(x)) - x.$$

Предметом изучения в этом разделе будет асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in \delta[T),\ \chi_Z(x) \in \Delta[v)\big) \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{x}{T} > a + \varepsilon$$

и некотором $\varepsilon > 0$. Чтобы сформулировать основное утверждение, введем в рассмотрение ОПВ ${}^{\alpha}Y(t)$, как ОПВ $Y(t)$, определенный в § 1.1, но со скачками $({}^{\alpha}\tau, -{}^{\alpha}\zeta)$, где, как и прежде, $({}^{\alpha}\tau, {}^{\alpha}\zeta) = {}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}$:

$${}^{\alpha}Y(t) = -{}^{\alpha}Z_{\eta(t)}, \qquad {}^{\alpha}Z_n = \sum_{j=1}^{n} {}^{\alpha}\zeta_j,$$

${}^{\alpha}\zeta_j$ — независимые копии ${}^{\alpha}\zeta$. В силу (6.2.9)

$$\mathbf{E}\,{}^{\alpha}Y(t) \sim -{}^{\alpha}a t = -\alpha t \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поэтому для ${}^{\alpha}\overline{Y} = \sup\limits_{t \geqslant 0} {}^{\alpha}Y(t)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ имеем

$$\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v) > 0$$

при $v > 0$ таких, что $\mathbf{P}(\zeta_1 < -v) > 0$ (напомним, что ${}^{\alpha}Y(0) = -{}^{\alpha}\zeta_1$).

Теорема 6.3.1. *Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ — нерешетчатый вектор, $\alpha = x/T > a + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in \delta[T),\ \chi_Z(x) \in \Delta[v)\big) &= \\ = \mathbf{P}\big(Z(T+\delta) \in \Delta[x+v),\ \gamma(T+\delta) < \delta\big)&\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v)\big(1 + o(1)\big) = \\ &= \frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)}\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v)\big(1 + o(1)\big),\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где $C(\alpha)$ — положительная непрерывная функция, определенная в теореме 5.2.1, $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K \cap \{\alpha \geqslant \alpha_0 > 0\}$.

Доказательство. Положим

$$B_{Z,T} = \big\{\eta_Z(x) \in \delta[T),\ \chi_Z(x) \in \Delta[v)\big\}$$

Оценим $\mathbf{P}(B_{Z,T})$ *снизу.* Имеем

$$B_{Z,T,\gamma} := \Big\{\overline{Z}\big(T{+}\delta{-}\gamma(T{+}\delta){-}0\big){\leqslant}x,\ Z(T{+}\delta){\in}x{+}\Delta[v),\ \gamma(T{+}\delta){<}\delta\Big\}{\subset}B_{Z,T}. \quad (6.3.2)$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(B_{Z,T}) \geqslant \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}). \quad (6.3.3)$$

Оценка сверху. Событие

$$B_{Z,T} = \big\{Y(T) \in x + \Delta(v),\ \chi(T) < \delta,\ \overline{Z}(T + \chi(T) - 0) < x\big\} \quad (6.3.4)$$

принадлежит σ-алгебре, порожденной процессом $Y(T)$ до марковского момента $\eta(T)$ включительно, так что события $B_{Z,T}$ и случайная величина $\tau_{\eta(T)+1}$ независимы. С другой стороны, в силу (6.3.4)

$$\begin{aligned} &B_{Z,T} \bigcap \{\tau_{\eta(T)+1} \geqslant \delta\} \subset \\ &\quad\subset \big\{Z(T{+}\delta){\in}x{+}\Delta[v), \gamma(T{+}\delta){<}\delta, \overline{Z}(T{+}\delta{-}\chi(T{+}\delta){-}0) < x\big\}{=}B_{Z,T,\gamma}; \\ &\qquad \mathbf{P}(B_{Z,T})\mathbf{P}(\tau \geqslant \delta) \leqslant \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Так как в дальнейшем в качестве δ мы будем рассматривать последовательность $\delta = \delta_T \to 0$ (достаточно медленно при $T \to \infty$), то $\mathbf{P}(\tau \geqslant \delta) = 1 + o(1)$ при $T \to \infty$ и в силу (6.3.3), (6.3.5)

$$\mathbf{P}(B_{Z,T}) = \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma})\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \quad (6.3.6)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}) = \mathbf{P}\big(Z(T + \delta) \in \Delta[x + v), \gamma(T + \delta) < \delta\big)\times \\ \times\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T{+}\delta{-}\gamma(T{+}\delta){-}0){\leqslant}x \,|\, Z(T{+}\delta){\in}\Delta[x{+}v), \gamma(T{+}\delta){<}\delta\big). \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Так как

$$I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, \delta, 0, \mathbb{R}) = \int\limits_0^\delta e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y)dy \sim \delta$$

при $\delta \to 0$ и
$$TD\left(\frac{x+v}{T}\right) = TD(\alpha) + \mu(\alpha)v + o(1)$$
при $T \to \infty$, то асимптотика первого сомножителя в правой части (6.3.7) в силу теоремы 5.2.1 совпадает с асимптотикой произведения
$$\frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)-v\mu(\alpha)}$$
(ср. с (6.3.1)).

Покажем теперь, что второй сомножитель в правой части (6.3.7) асимптотически эквивалентен $\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v)$. При этом наше изложение доказательства будет отчасти схематичным, поскольку (a) оно весьма прозрачно и следует той же схеме, которая использовалась в § 3.3 [12] при доказательстве аналогичного факта для случайных блужданий, (b) переход к более детальному изложению существенных трудностей не вызывает.

В силу теоремы 6.2.1 и замечания 6.2.1 условное распределение скачков $\boldsymbol{\xi}_{\nu(T+\delta)}, \boldsymbol{\xi}_{\nu(T+\delta)-1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\nu(T+\delta)-m-1}$ при условии
$$\bigl\{Z(T+\delta) \in \Delta[x+v), \gamma(T+\delta) < \delta\bigr\}$$
будут иметь «предельное» условное распределение, совпадающее с распределением $({}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, {}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_m)$, где ${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}_j$ независимы. Если рассматривать процесс $Z(t)$ в обратном направлении от точки $T+\delta-\gamma(T+\delta)$, т.е. процесс $Z(T+\delta-\gamma(T+\delta)-u)$, $u>0$, то на событии $\{{}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v\}$ он будет начинаться с отрицательного скачка $-{}^{\alpha}\zeta_1 \leqslant -v$. На первых m «шагах» предельный процесс в обратном направлении ${}^{\alpha}Y(u)$ будет иметь вид процесса $Y(u)$, но со скачками $({}^{\alpha}\tau_1, -{}^{\alpha}\zeta_1), \ldots, ({}^{\alpha}\tau_m, -{}^{\alpha}\zeta_m)$. Выбором большого m вероятность $\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Z}_m \leqslant -v)$, где
$${}^{\alpha}\overline{Z}_m = \max_{k\leqslant m} \sum_{j=1}^{k} (-{}^{\alpha}\zeta_j),$$
может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v)$, ${}^{\alpha}\overline{Y} = \sup\limits_{u\geqslant 0} {}^{\alpha}Y(u)$. Другими словами, выбором N вероятность $\mathbf{P}\bigl({}^{\alpha}\overline{Y}(N) \leqslant -v\bigr)$, где ${}^{\alpha}\overline{Y}(N) = \max\limits_{u\leqslant N} {}^{\alpha}Y(u)$, может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant -v)$.

Нам остается установить, что условная вероятность пересечь процессу $Z(t)$ границу x на интервале времени $(0, T+\delta-M)$ при условии $\bigl\{Z(T+\delta) \in \Delta[x+v), \gamma(T+\delta) < \delta\bigr\}$ пренебрежимо мала при больших M.

Точнее, нам достаточно установить пренебрежимую малость при больших T, M и $T-M$ условной вероятности

$$P^{cond} := \mathbf{P}\big(\eta_Z(x) < T-M \mid Z(T) \in \Delta[x+v), \gamma(T) < \delta\big) = \\ = \frac{\mathbf{P}(\eta_Z(x) < T-M, Z(T) \in \Delta[x+v), \gamma(T) < \delta)}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x+v), \gamma(T) < \delta)}. \qquad (6.3.8)$$

Положим $t_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, N$; $h[t) := [t, t+h)$, считая $N = \frac{T-M}{h}$ целым числом. Так как $\eta_Z(x)$ — марковский момент, числитель в правой части (6.3.8) равен

$$\Sigma := \sum_{k=0}^{N} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in dt\big)\mathbf{P}\big(Z^*(T-t) \in \Delta[x+v), \gamma(T-t) < \delta\big), \quad (6.3.9)$$

где процесс Z^* устроен так же как Z и не зависит от Z. В силу теоремы 5.2.1 второй множитель в (6.3.9) можно заменить на

$$\mathbf{P}\big(Z(T-t_k) \in \Delta[x+v), \gamma(T-t_k) < \delta\big)(1+\varepsilon_h),$$

где $\varepsilon_h \to 0$ при $h \to 0$, так что полученное выражение отличается от $\mathbf{P}\big(Z(T-t_k) \in \Delta[x+v)\big)$ множителем $\delta\big(1+o(1)\big)$ при малых δ. Последнее высказывание относится и к знаменателю в (6.3.8). В итоге мы получаем, что при малых h, δ

$$P^{cond} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in h[t_k))\mathbf{P}(Z(T-t_k) \in \Delta[x+v))(1+o(1))}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x+v))}. \qquad (6.3.10)$$

Числители в (6.3.8), (6.3.10) означают вероятность пучка «искривленных» траекторий (проходящих выше точки $(T-M, x)$), соединяющих точку $(0,0)$ с окрестностью точки $(T, x+v)$. Знаменатель в этих соотношениях равен вероятности всех траекторий, соединяющих названные области, в том числе «прямолинейные», наиболее вероятные (см. п. 4.7.1) траектории. Это означает, что числитель в (6.3.8), (6.3.10) в силу строгой выпуклости функции D экспоненциально (по M) меньше знаменателя, так что вероятность P^{cond} мала при больших M. Чтобы получить явную оценку для P^{cond} заметим, что так как $\eta_Z(x)$ — марковский момент, то следующий за ним горизонтальный скачок τ^* не зависит от предыстории и распределен как τ. Поэтому

$$\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in h[t_k), \tau^* > h\big) = \mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in h[t_k)\big)\mathbf{P}(\tau > h).$$

С другой стороны,

$$\big\{\eta_Z(x) \in h[t_k), \tau^* > h\big\} \subset \big\{Z(t_{k+1}) > x\big\}$$

и, стало быть, для h таких, что $\mathbf{P}(\tau > h) > 1/2$, получаем

$$\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in h[t_k)\big) \leqslant \frac{\mathbf{P}(Z(t_{k+1}) > x)}{\mathbf{P}(\tau > h)} \leqslant 2\mathbf{P}\big(Z(t_{k+1}) > x\big).$$

Поэтому в силу (6.3.10)

$$P^{cond} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{2\mathbf{P}(Z(t_{k+1}) > x)\mathbf{P}(Z(T - t_k) \in \Delta[x+v))}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x+v))} \times \\ \times \big(1 + o(1)\big). \quad (6.3.11)$$

Остается воспользоваться асимптотическими представлениями для всех элементов правой части в (6.3.11), которые содержатся в теореме 5.2.1. Мы предоставляем это читателю.

Выкладки, доказывающие малость P^{cond}, содержатся также в доказательстве теоремы 6.4.1, приведенном ниже (см. оценки сумм $\sum_{T,x}$ и $R_{T,x}$ в (6.4.10), (6.4.11)). Теорема 6.3.1 доказана.

Обозначим

$$P_\alpha(v) = \mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant v), \qquad J_\alpha(v) = \int_0^v e^{-u\mu(\alpha)} P_\alpha(-u)du. \qquad (6.3.12)$$

Положим в теореме 6.3.1 $v = v_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \ldots$, и просуммируем полученные соотношения по k от 0 до $N = v/\Delta$ (считаем N целым). В левой части получим вероятность $\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in \delta[T), \chi_Z(x) < v\big)$, а в правой значение

$$\frac{\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} \sum_{k=0}^{N} \Delta e^{-v_k\mu(\alpha)} P_\alpha(-v_k)\big(1 + o(1)\big),$$

где интегральная сумма соответствует интервалу $J_\alpha(v)$. Мы получили

Следствие 6.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.3.1. *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) \in \delta[T),\ \chi_Z(x) < v\big) = \frac{\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} J_\alpha(v)\big(1 + o(1)\big),$$

где $\delta = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$, *остаточный член равномерен по* $\alpha \in K \cap \{\alpha \geqslant \alpha_0 > 0\}$.

В связи со следствием 6.3.1 представляет интерес

Лемма 6.3.1. *Интеграл* $J_\alpha(\infty)$ *сходится при всех* $\alpha \in K$.

Доказательство. Заметим, что

$$P_\alpha(u) < \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \geqslant u).$$

Поэтому

$$J_\alpha(\infty) < \int\limits_0^\infty e^{-u\mu(\alpha)} \int\limits_u^\infty \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt)du =$$

$$= \int\limits_{t=0}^\infty \int\limits_{u=0}^t e^{-u\mu(\alpha)} du \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt) = \int\limits_0^\infty \frac{(1 - e^{-t\mu(\alpha)})}{\mu(\alpha)} \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt) =$$

$$= \frac{1}{\mu(\alpha)} \big(\mathbf{P}({}^\alpha\zeta > 0) - \mathbf{E}(e^{-\mu(\alpha)^\alpha\zeta};\, {}^\alpha\zeta \geqslant 0\big), \tag{6.3.13}$$

где

$$\mathbf{E}(e^{-\mu(\alpha)^\alpha\zeta}; \zeta \geqslant 0) \leqslant \mathbf{E}e^{-\mu(\alpha)^\alpha\zeta} = \mathbf{A}\big(\lambda(\alpha), 0\big) < \infty$$

так как $\alpha \in K$ (т.е. $\alpha \notin [\beta_-, \beta_+]$) и, стало быть, $\lambda(\alpha) < \lambda_+$.

Если α отделено от a и, стало быть, $\big|\mu(\alpha)\big| > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то, очевидно, $J_\alpha(\infty) < \infty$. Если $\alpha \to a$ при $T \to \infty$, то $\mu(\alpha) \to 0$ и

$$J_\alpha(\infty) \to \mathbf{E}({}^\alpha\zeta; {}^\alpha\zeta \geqslant 0) < \infty,$$

так как ${}^\alpha\zeta$ удовлетворяет условию Крамера. Лемма 6.3.1 доказана.

§ 6.4 Интегральные теоремы для распределения $\overline{Z}(T) = \max\limits_{t \leqslant T} Z(t)$

Предварительно отметим, что в случае, когда τ и ζ независимы, асимптотика распределений

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x,\ \chi_Z(x) > u\big), \quad \mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) < x,\ Z(T) < x - y\big)$$

и ряда других весьма полно исследована в [37] с помощью *аналитических* методов и аппарата факторизации. Постоянные множители в асимптотике изучаемых вероятностей в [37] сформулированы в терминах компонент факторизации функции $1 - z\psi^{(\zeta)}(\mu)$. Они нуждаются в пояснениях, которые требуют дополнительных сведений, уводящих в сторону от основного русла изложения. Поэтому останавливаться здесь на результатах [37] мы не будем и уделим основное внимание изучению общего случая с помощью *вероятностных* подходов.

6.4.1 Случай $a < 0$, $\alpha > 0$

Положим
$$K_\varepsilon := \{\beta_+^* + \varepsilon, \alpha_+ - \varepsilon\} =: [\alpha_{(\varepsilon)}, \alpha^{(\varepsilon)}],$$
где
$$\beta_+^* = \begin{cases} \beta_+, & \text{если} \quad \lambda_+ < D(0), \\ 0, & \text{если} \quad \lambda_+ \geqslant D(0) \end{cases}$$
и, как и прежде,
$$\alpha_+ = A'(\mu_+ - 0), \qquad \beta_+ = A'(m_+),$$
μ_+ определено в (3.5.8), m_+ — максимальное решение уравнения $A(\mu) = -\lambda_+$ (оно существует, если $\lambda_+ < D(0)$). В случае $a < 0$, $A(\mu_+) > 0$ определены максимальный ноль $\mu_0 > 0$ функции $A(\mu)$: $A(\mu_0) = 0$, и значение
$$\alpha_0 = A'(\mu_0).$$
Обозначим через $A_{T,x,v}$ событие
$$A_{T,x,v} := \bigl\{\overline{Z}(T) > x,\ \chi_Z(x) \in \Delta[v)\bigr\}.$$

Теорема 6.4.1. *Пусть* $\boldsymbol{\xi}$ *— нерешетчатый вектор,* $a<0$, $A(\mu_+)>0$, $\alpha = \frac{x}{T}$, $c(\alpha, v) = C(\alpha)P_\alpha(-v)$, *где* $C(\alpha)$ *и* $P_\alpha(v)$ *определены в теореме* 5.2.1 *и в* (6.3.12) *соответственно. Тогда при* $\Delta = \overline{o}(1)$, $T \to \infty$

(i) *если* $\alpha > \alpha_0$, $\alpha - \alpha_0$ *отделено от* 0, *то*
$$\mathbf{P}(A_{T,x,v}) = \frac{\Delta}{\sqrt{T}}\,\frac{c(\alpha, v)}{\alpha L'(\alpha)}\, e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)}\bigl(1 + o(1)\bigr), \tag{6.4.1}$$
где
$$L(\alpha) = \frac{D(\alpha)}{\alpha};$$

(ii) *если* $\alpha = \alpha_0 + \rho$, *где* $\rho = o(1)$ *при* $T \to \infty$, *то*
$$\mathbf{P}(A_{T,x,v}) = \frac{\Delta\sqrt{2\pi}\, c(\alpha_0, v)}{\alpha_0\sqrt{D''}}\, e^{-x\mu_0 - v\mu(\alpha_0)}\Phi(\rho\sqrt{xL''})\bigl(1 + o(1)\bigr) \tag{6.4.2}$$
при $T \to \infty$, *где* $\Phi(z)$ *— функция распределения стандартного нормального закона,* $L'' = L''(\alpha_0)$, $D'' = D''(\alpha_0) = \alpha_0 L''(\alpha_0)$;

(iii) *если* $\alpha < \alpha_0$, $\alpha_0 - \alpha$ *отделено от* 0, *то*
$$\mathbf{P}(A_{T,x,v}) = \frac{\Delta\sqrt{2\pi}c(\alpha_0, v)}{\alpha_0\sqrt{D''}}\, e^{-x\mu_0 - v\mu(\alpha_0)}\bigl(1 + o(1)\bigr) \tag{6.4.3}$$
при $T \to \infty$.

В разделах (i), (iii) остаточный член $o(1)$ равномерен по α из пересечений указанных в этих разделах областей α с компактом $K_{2\varepsilon}$.

Суммируя (6.4.2), (6.4.3) по $v = v_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \ldots$, и приближая затем сумму интегралом, получим

Следствие 6.4.1. *При $\alpha = \alpha_0 - \rho$, $\rho\sqrt{x} \to \infty$ при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) = \mathbf{P}(\overline{Z} > x)\big(1 + o(1)\big) = \\ = \frac{\sqrt{2\pi}C(\alpha_0)P_{\alpha_0}}{\alpha_0\sqrt{D''}}\, e^{-x\mu_0}\big(1 + o(1)\big), \qquad (6.4.4)$$

где

$$P_{\alpha_0} = \int\limits_0^\infty P_{\alpha_0}(-v)e^{-v\mu(\alpha_0)}dv.$$

Условное предельное распределение величины $\chi_Z(x)$ при условии $\overline{Z} > x$ имеет плотность, равную

$$\frac{P_{\alpha_0}(-v)e^{-v\mu(\alpha_0)}}{P_{\alpha_0}}.$$

Так как $\overline{Z} = \sup_{k\geqslant o} Z_k$, то второе равенство в (6.4.4) есть одна из форм записи известного результата Крамера–Лундберга о распределении $\overline{Z}$. Так как $A^{(\zeta)}(\mu_0) = \mathbf{A}(0, \mu_0) = \mathbf{A}\big(-A(\mu_0), \mu_0\big) = 0$, то $\mu_0 = \mu_0^{(\zeta)} = \max\big\{\mu : A^{(\zeta)}(\mu) = 0\big\}$. Поэтому утверждение (iii) теоремы можно было бы и не доказывать, так как асимптотика правой части (6.4.2) при $\rho \to \infty$ совпадает с точностью до постоянного множителя (весьма сложной природы) с асимптотикой $\mathbf{P}(\overline{Z} > x)$ в теореме 6.1.2. Отсюда с необходимостью вытекает совпадение постоянных множителей в (6.1.12) и (6.4.4).

Следствие 6.4.2. *Условное распределение величины $\eta_Z(x) = \inf\big\{t : Z(t) > x\big\}$ при условии $\{\overline{Z} > x\}$ обладает свойством*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_Z(x) - x/\alpha_0}{\sigma_{\eta_Z}\sqrt{x}} < z \,|\, \overline{Z} > x\right) \Rightarrow \Phi(z) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \qquad (6.4.5)$$

где

$$\sigma_{\eta_Z}^{-1} = \alpha_0^2\sqrt{L''} = \alpha_0^{3/2}\sqrt{D''}.$$

Доказательство следствия 6.4.2 приведено ниже.

Как уже отмечалось, весьма полное исследование распределения максимума $\overline{Z}_n$ в области больших уклонений для случайных блужданий проведено в [2] (см. также [12, § 3.9]) аналитическими методами с использование факторизации. Значительная часть полученных в [2] результатов была перенесена в [37] в случае независимых τ и ζ на ОПВ и распределение $\overline{Z}(T)$. Техника, использованная в названных работах, является весьма сложной и выходит за рамки настоящей монографии. Более прозрачный вероятностный подход к изучению распределения $\overline{Z}_n$ для случайных блужданий был предложен в [29]. Теорема 6.3.1 использует тот же подход. Он в случае ОПВ основан на существовании предельных условных (при фиксированном конце траектории) распределений для скачков τ и ζ, установленном в теореме 6.1.1. Существенным недостатком этого подхода является то обстоятельство, что он предполагает отделенность нормированного уклонения $\alpha = \frac{x}{T}$ от нуля. В этом случае существуют условные предельные распределения τ и ζ, описанные в теореме 6.1.1. В случае, когда $\alpha \to 0$ при $T \to \infty$, приходится обращаться к результатам [37].

Другой подход, применимый в случае $\alpha = o(T^{-1/3})$, состоит в распространении принципа инвариантности на область больших уклонений. Он изложен в гл. 7.

Сходимость условного распределения времени первого прохождения высокого уровня к нормальному закону для случайных блужданий с отрицательным сносом (ср. теорему 6.4.1 со следствием 6.4.2) была установлена в [2]. Аналогичная сходимость для ОПВ в случае, когда τ и ζ независимы, была установлена в [37]. Как уже отмечалось, в обеих работах использовалась аналитическая техника, основанная на факторизации.

Доказательство следствия 6.4.2. Имеем

$$\mathbf{P}\big(\eta_Z(x) < x/\alpha_0 + y\sqrt{x} \,|\, \overline{Z} > x\big) = \mathbf{P}\big(\overline{Z}(x/\alpha_0 + y\sqrt{x}) > x \,|\, \overline{Z} > x\big) = \\ = \frac{\mathbf{P}\big(\overline{Z}(x/\alpha_0 + y\sqrt{x}) > x\big)}{\mathbf{P}(\overline{Z} > x)}. \qquad (6.4.6)$$

Здесь при $T = x/\alpha_0 + y\sqrt{x}$ значение α равно

$$\alpha = \frac{x}{x/\alpha_0 + y\sqrt{x}} = \alpha_0\left(1 - \frac{y\alpha_0}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{y^2}{x}\right)\right) = \alpha_0 - \rho,$$

где $\rho = \frac{y\alpha_0^2}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{y^2}{x}\right)$. Поэтому мы можем в силу теоремы 6.4.1 закончить равенство (6.4.6) значением

$$\Phi\left(\frac{y\alpha_0^2\sqrt{xL''}}{\sqrt{x}}\right)\big(1 + o(1)\big).$$

Полагая $z = y\alpha_0^2\sqrt{L''}$, мы получим (6.4.5). Следствие 6.4.2 доказано.

Для доказательства теоремы 6.4.1 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 6.4.1. *Пусть* $A(\mu^+) > 0$ $(\mu^+ = \sup\{\mu:\ A(\mu) < \infty\})$. *Тогда*
(i) *Определено максимальное решение уравнения* $A(\mu) = 0$:

$$\mu_0 = \max\{\mu:\ A(\mu) = 0\} \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad a < 0. \\ = 0 & \text{при} \quad a \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $A(\mu_+) > 0$, *то функция* $A(\mu)$ *аналитична в точке* μ_0.

(ii) *Функция*

$$L(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\, D(\alpha)$$

выпукла на полуоси $(0, \infty)$. *В случае* $A(\mu_+) > 0$ *она достигает своего наименьшего значения в точке*

$$\alpha_0 := A'(\mu_0), \qquad L(\alpha_0) = \mu_0, \quad \alpha_0 \in K_\varepsilon$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$,

$$L''(\alpha_0) = \frac{\mu'(\alpha_0)}{\alpha_0} = \frac{D''(\alpha_0)}{\alpha_0} > 0.$$

(В случае $a \geqslant 0$ *выполняется* $\alpha_0 = a$ *и* $L(\alpha)$ *достигает своего минимума на* $[a, \infty)$ *в точке* $\alpha_0 = a$, $L(\alpha_0) = \mu_0 = 0$.*)*

Доказательство. (i) Первое утверждение леммы очевидно в силу выпуклости функции $A(\mu)$ и того, что $A'(0) < 0$. Если $A(\mu_+) > 0$, то $[0, \mu_0] \subset [0, \mu_+)$ принадлежит области аналитичности функции $A(\mu)$.

(ii) Функция $L(\alpha)$, как и $D(\alpha)$, п.в. дифференцируема,

$$L'(\alpha) = -\alpha^{-2} D(\alpha) + \alpha^{-1}\mu(\alpha) = -\alpha^{-2}\big(D(\alpha) - \alpha\mu(\alpha)\big) = \\ = \alpha^{-2} A\big(\mu(\alpha)\big) = -\alpha^{-2}\lambda(\alpha). \qquad (6.4.7)$$

В лемме 3.5.3 было установлено, что $\lambda(\alpha)$ убывает на $(0, \infty)$. Стало быть, функция $\alpha^{-2}\lambda(\alpha)$ также убывает, а $L'(\alpha)$ возрастает. Это доказывает выпуклость $L(\alpha)$.

Уравнение $L'(\alpha) = 0$ для точки минимума функции $L(\alpha)$ в силу (6.4.7) эквивалентно уравнению

$$A\big(\mu(\alpha)\big) = 0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно уравнению $\mu(\alpha) = \mu_0$, или, что то же,

$$\alpha_0 = A'(\mu_0)$$

(функция $\mu(\cdot)$ является обратной к $A'(\cdot)$).

Далее,

$$L(\alpha_0)=\frac{1}{\alpha_0}\,D(\alpha_0)=\frac{1}{\alpha_0}\big(\alpha_0\mu(\alpha_0)-A\big(\mu(\alpha_0)\big)\big)=\mu(\alpha_0)=\mu_0.$$

Так как в случае $\lambda_+<D(0)$ выполняется $\beta_+<\mu_0$, то $\mu_0>\beta_+^*$, $\mu_0\in(\beta_+^*,\alpha_+)$, $\mu_0\in K_\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon>0$.

Дифференцируя равенство (6.4.7), получим

$$L''(\alpha)=-2\alpha^{-3}A\big(\mu(\alpha)\big)+\alpha^{-2}A'\big(\mu(\alpha)\big)\mu'(\alpha),$$
$$L''(\alpha_0)=\alpha_0^{-1}\mu'(\alpha_0)=\alpha_0^{-1}D''(\alpha_0)>0.$$

Лемма 6.4.1 доказана.

Доказательство теоремы 6.4.1. Пусть, как и прежде,

$$B_{Z,T}=\big\{\eta_Z(x)\in\delta[T],\ \chi_Z(x)\in\Delta[v]\big\}.$$

Воспользуемся теоремой 6.3.1, в силу которой

$$\mathbf{P}(B_{Z,T})=\frac{\Delta\delta C(\alpha)P_\alpha(-v)}{\sqrt{T}}\,e^{-TD(\alpha)-v\mu(\alpha)}\big(1+o(1)\big), \tag{6.4.8}$$

где

$$P_\alpha(-v):=\mathbf{P}({}^\alpha\overline{Y}\leqslant -v),$$

$C(\alpha)$ определено в теоремах 5.2.1, 6.3.1, $\Delta=\Delta_T=\overline{o}(1)$, $\delta=\delta_T=\overline{o}(1)$ при $T\to\infty$, остаточный член равномерен по $\alpha\in K_\varepsilon\subset K\bigcap\{\alpha\geqslant\alpha_0>0\}$.

Пусть для определенности $N=\frac{T}{\delta}$ — целое число. Тогда при $\alpha\in K_{2\varepsilon}$, $t_k=k\delta$, $\theta_k=\frac{t_k}{T}$, $k=0,1,\ldots,N-1$ имеем

$$\mathbf{P}(A_{T,x,v})=\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)>x,\chi_Z(x)\in\Delta[v]\big)=\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{P}(B_{Z,t_k})=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{P}\big(\eta_Z(x)=\delta[t_k),\chi_Z(x)\in\Delta[v]\big)=\Sigma_{T,x}+R_{T,x}, \tag{6.4.9}$$

где

$$\Sigma_{T,x}:=\sum_{\theta_k\in\left[\frac{\alpha}{\alpha(\varepsilon)},1\right)}\frac{\Delta\delta c(\alpha/\theta_k,v)}{\sqrt{T\theta_k}}\,e^{-T\theta_kD(\alpha/\theta_k)-v\mu(\alpha/\theta_k)}\big(1+o(1)\big), \tag{6.4.10}$$

$c(\alpha, v) = C(\alpha)P_\alpha(-v)$, и в силу (6.3.6)

$$R_{T,x} := \sum_{\theta_k < \frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}} \mathbf{P}(B_{Z,t_k}) = \sum_{\theta_k < \frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}} \mathbf{P}(B_{Z,t_k,\gamma})\big(1+o(1)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\theta_k < \frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}} \mathbf{P}\big(Z(t_k+\delta) \in \Delta[x+v)\big)\big(1+o(1)\big). \qquad (6.4.11)$$

Здесь $\frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}} \leqslant \frac{\alpha^{(\varepsilon)}-\varepsilon}{\alpha^{(\varepsilon)}} < 1$ при $\alpha \in K_{2\varepsilon}$.

Вернемся к сумме (6.4.10). Так как $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\delta}{T}$, то сумма $\Sigma_{T,x}$ может быть приближена интегралом:

$$\Sigma_{T,x} = J_{T,x}\big(1+o(1)\big),$$

где

$$J_{T,x} := \Delta\sqrt{T} \int\limits_{\alpha/\alpha^{(\varepsilon)}}^{1} c\Big(\frac{\alpha}{\theta}, v\Big)\theta^{-1/2} e^{-T\theta D(\alpha/\theta) - v\mu(\alpha/\theta)} d\theta, \qquad (6.4.12)$$

остаточный член по-прежнему равномерен, но теперь по $\frac{\alpha}{\theta} \in K_\varepsilon$.

Главная, экспоненциальная часть функции под знаком интеграла в (6.4.12) имеет логарифм, равный

$$-T\theta D\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big) = -xL\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big), \qquad (6.4.13)$$

где $L(\alpha) = \frac{1}{\alpha}D(\alpha)$, $\frac{\alpha}{\theta} \in [\alpha, \alpha^{(\varepsilon)})$. В силу леммы 6.4.1 $\alpha_0 = A'(\mu_0) \in K_\varepsilon$, при этом $L(\alpha_0) = \mu_0$, $L''(\alpha_0) = \mu'(\alpha_0)\alpha_0^{-1} > 0$.

Рассмотрим следующие основные случаи.

(i) $\alpha > \alpha_0$, $\alpha - \alpha_0$ отделено от 0. Сделаем в (6.4.12) замену переменных $\theta = \frac{1}{1+t}$, $t = \frac{1}{\theta} - 1$. Тогда $\frac{\alpha}{\theta} = \alpha + \alpha t$, $d\theta = -\frac{dt}{(1+t)^2}$

$$L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big) = L(\alpha) + \alpha t L'(\alpha) + O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0, \quad xL(\alpha) = TD(\alpha),$$

$$\int\limits_{\alpha/\alpha^{(\varepsilon)}}^{1} e^{-T\theta D(\alpha/\theta)} d\theta = e^{-TD(\alpha)} \int\limits_{0}^{\alpha^{(\varepsilon)}/\alpha - 1} \frac{1}{(1+t)^2}\, e^{-\alpha t T L'(\alpha) + O(t^2 T)} dt =$$

$$= e^{-TD(\alpha)} \frac{1}{T\alpha L'(\alpha)}\,\big(1+o(1)\big).$$

Из сказанного видно, что главную часть интеграла (6.4.10) определяет интеграл по окрестности точки $t = 0$ $(\theta = 1)$ и, стало быть, (см. (6.4.12))

$$J_{T,x} = \frac{\Delta c(\alpha, v)}{\sqrt{T}\alpha L'(\alpha)}\, e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)}\big(1+o(1)\big).$$

Рассмотрим теперь остаток $R_{T,x}$ в (6.4.9), (6.4.11).

Так как функция $L(s)$ выпукла, то $L(s) > L(\alpha)$ при $s > \alpha > \alpha_0$, и согласно локальному принципу больших уклонений при $\theta_k < \frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}$ и $T \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}\big(Z(t_k+\delta) \in \Delta[x+v)\big) \sim -TD\Big(\frac{x}{t_k}\Big) = -xL\Big(\frac{\alpha}{\theta_k}\Big) < \\ < -xL(\alpha^{(\varepsilon)}) < -x\big(L(\alpha)+\varepsilon_1\big) = -TD(\alpha) - x\varepsilon_1, \quad (6.4.14)$$

$$R_{T,x} = O(e^{-TD(\alpha)-T\varepsilon_2})$$

при некоторых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Поэтому, возвращаясь к (6.4.9), находим

$$\mathbf{P}(A_{T,x,v}) = -\frac{\Delta}{\sqrt{T}}\,\frac{c(\alpha,v)}{\alpha L'(\alpha)}\,e^{-TD(\alpha)-v\mu(\alpha)}\big(1+o(1)\big),$$

где остаточный член равномерен по $\alpha \in K_{2\varepsilon}$. Это доказывает (6.4.1).

(ii) $\alpha = \alpha_0 - \rho$, где $\rho = o(1)$ при $T \to \infty$. В этом случае

$$\frac{\alpha}{\theta} = (1+t)(\alpha_0-\rho) = \alpha_0 - \rho + t(\alpha_0-\rho),$$
$$L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big) = L(\alpha_0) + \frac{1}{2}\big(\rho - t(\alpha_0-\rho)\big)^2 L''(\alpha_0) + O\big(|\rho|+t\big)^3.$$

Сделав замену переменных

$$u = \big[t(\alpha_0-\rho)-\rho\big]\sqrt{xL''},$$

где для краткости принято $L'' = L''(\alpha_0)$, получим

$$xL\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big) = xL(\alpha_0) + \frac{xu^2}{2}\,L'' + O\Big(|\rho| + \frac{|u|}{\sqrt{x}}\Big)^3.$$

Возвращаясь к (6.4.12), (6.4.13) и учитывая, что вновь главная часть интеграла $J_{T,x}$ определяется интегралом по окрестности точки $t=0$, $d\theta = -\frac{du}{\alpha_0\sqrt{xL''}}\big(1+o(1)\big)$ при $T \to \infty$, $\rho \to 0$, находим

$$J_{T,x} = \frac{\Delta\sqrt{T}\,c(\alpha,v)}{\alpha_0\sqrt{xL''}}\,e^{-x\mu_0-v\mu(\alpha)}\int\limits_{-\rho\sqrt{xL''}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\big(1+o(1)\big) = \\ = \frac{\Delta\sqrt{2\pi}\,c(\alpha_0,v)}{\alpha_0^{3/2}\sqrt{L''}}\,e^{-x\mu_0-v\mu(\alpha_0)}\Phi(\rho\sqrt{xL''})\big(1+o(1)\big), \qquad (6.4.15)$$

так как $\alpha \to \alpha_0$ при $T \to \infty$.

Оценка остаточного члена $R_{T,x}$ происходит аналогично предыдущему. Сказанное доказывает (6.4.2).

(iii) $\alpha < \alpha_0$, $\alpha_0 - \alpha$ отделено от 0. При этих условиях максимум подинтегральной функции в (6.4.12) достигается внутри интервала интегрирования в точке $\theta = \frac{\alpha}{\alpha_0} < 1$ (при этом $\frac{\alpha}{\theta} = \alpha_0$), где

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} > \frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}, \quad \text{так как} \quad \alpha_0 < \alpha^{(\varepsilon)},$$

так что $\theta \in \left(\frac{\alpha}{\alpha^{(\varepsilon)}}, 1\right)$. В этом случае основной вклад в асимптотику $J_{T,x}$ вносит интеграл по окрестности точки $\theta = \alpha/\alpha_0$ и следует применять стандартный метод Лапласа для интегралов вида (6.4.12). Надо воспользоваться разложением $L\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)$ около точки $\frac{\alpha}{\theta} = \alpha_0$:

$$L\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = L(\alpha_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\theta} - \alpha_0\right)^2 L'' + O\left(\left|\frac{\alpha}{\theta} - \alpha_0\right|^3\right)$$

и сделать замену переменных

$$u = \sqrt{xL''}\left(\frac{\alpha}{\theta} - \alpha_0\right), \quad \theta = \alpha\left(\frac{u}{\sqrt{xL''}} + \alpha_0\right)^{-1}, \quad d\theta \sim -\frac{\alpha du}{\alpha_0^2\sqrt{xL''}}$$

при $u \to 0$. Получим

$$\begin{aligned} J_{T,x} = \Delta\sqrt{T}c(\alpha_0, v)\sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha}}\, e^{-x\mu_0 - v\mu(\alpha_0)}\,\frac{\alpha\sqrt{2\pi}}{\alpha_0^2\sqrt{xL''}}\bigl(1 + o(1)\bigr) = \\ = \frac{\Delta c(\alpha_0, v)\sqrt{2\pi}}{\alpha_1^{3/2}\sqrt{L''}}\, e^{-x\mu_0 - v\mu(\alpha_0)}\bigl(1 + o(1)\bigr). \end{aligned} \qquad (6.4.16)$$

Оценка остаточного члена $R_{T,x}$ происходит аналогично (6.4.14). Сказанное доказывает (6.4.3).

Остается заметить, что в (6.4.15), (6.4.16)

$$L'' = L''(\alpha_0) = \alpha_0^{-1}D''(\alpha_0),$$

так что

$$\alpha_0^{3/2}\sqrt{L''} = \alpha_0 D''(\alpha_0) = \alpha_0 D''.$$

Теорема 6.4.1 доказана.

6.4.2 Случай $\alpha > a \geqslant 0$

Так как по лемме 6.4.1 $L'(\alpha) = -\alpha^{-2}\lambda(\alpha) > 0$ при $\alpha > a$, то функция $L(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\, D(\alpha)$ возрастает при $\alpha > a$, а функция $L\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)$ достигает своего минимума по $\theta \in [0,1]$ в точке $\theta = 1$. Поэтому здесь не возникает трех возможностей, рассмотренных в теореме 6.4.1 и остается лишь аналог случая (i). Мы будем использовать обозначения теоремы 6.4.1, но под компактом K_ε будем понимать отрезок $K_\varepsilon = [a+\varepsilon, \alpha_+ - \varepsilon]$.

Теорема 6.4.2. *Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — нерешетчатый вектор, $0 \leqslant a < \alpha = \frac{x}{T} \in K_\varepsilon$. Тогда асимптотика вероятности $\mathbf{P}(A_{T,x,v})$ определяется соотношением* (6.4.1),

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) = \frac{C(\alpha)P_\alpha}{\sqrt{T}\alpha L'(\alpha)}\, e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big), \tag{6.4.17}$$

где

$$P_\alpha = \int\limits_0^\infty P_\alpha(-v)e^{-v\mu(\alpha)}dv,$$

остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K_\varepsilon$.

Доказательство теоремы 6.4.2 повторяет доказательство п. (i) теоремы 6.4.1. Здесь, как и в п. (i) теоремы 6.4.1, условное распределение $\eta_Z(x)$ при условии $\overline{Z}(T) > x$ сосредоточено в окрестности точки T и имеет показательное распределение.

Следствие 6.4.3. *Пусть либо $a < 0$, $\alpha > \alpha_1$, $\alpha - \alpha_1$ отделено от нуля, либо $\alpha > a \geqslant 0$, $\alpha - a$ отделено от нуля. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(T - \eta_Z(x) > t \,|\, \overline{Z}(T) > x\big) = e^{-tb}\big(1+o(1)\big), \tag{6.4.18}$$

где $b = \alpha^2 L'(\alpha) > 0$, остаточный член равномерен по $\alpha \in K_\varepsilon$.

Доказательство. Имеем

$$TD\Big(\frac{x}{T}\Big) - (T-t)D\Big(\frac{x}{T-t}\Big) = x\Big[L(\alpha) - L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\Big] \tag{6.4.19}$$

при

$$\theta = \frac{T-t}{T} = 1 - \frac{t}{T}, \qquad \frac{1}{\theta} = 1 + \frac{t}{T} + O(T^{-2}), \qquad T \to \infty.$$

Поэтому в силу (6.4.1), (6.4.17), (6.4.19)

$$\mathbf{P}\big(T-\eta_Z(x)>t\,|\,\overline{Z}(T)>x\big)=\frac{\mathbf{P}(\overline{Z}(T-t)>x)}{\mathbf{P}(\overline{Z}(T)>x)}=$$
$$=\exp\Big\{x\Big[L(\alpha)-L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\Big]\Big\}\big(1+o(1)\big)\quad(6.4.20)$$

Далее,

$$L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)=L(\alpha)+\alpha\Big(\frac{1}{\theta}-1\Big)L'(\alpha)+O(T^{-2}),$$
$$x\Big[L(\alpha)-L\Big(\frac{\alpha}{\theta}\Big)\Big]=-x\Big[\frac{\alpha t}{T}\,L'(\alpha)+O(T^{-2})\Big]=-\alpha^2L'(\alpha)t+O(T^{-1}).$$

Таким образом, правая часть в (6.4.20) равна $\exp\big\{-\alpha^2L'(\alpha)t\big\}\big(1+o(1)\big)$. Это доказывает (6.4.18). Следствие 6.4.3 доказано.

Утверждению (6.4.18) соответствует тот факт, что в условиях следствия 6.4.3 асимптотики вероятностей $\mathbf{P}\big(Z(T)>x\big)$ и $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)>x\big)$ совпадают с точностью до постоянного (при фиксированном α) множителя. Действительно, из формулы (5.2.13) при больших Δ нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}\big(Z(T)>x\big)=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{T}\mu(\alpha)}\,I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big).$$

Поэтому в силу (6.4.17)

$$\frac{\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)>x\big)}{\mathbf{P}\big(Z(T)>x\big)}=\frac{P_\alpha\mu(\alpha)I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})}{\alpha L'(\alpha)}\,\big(1+o(1)\big).$$

6.4.3 Случай $a>0$, $\alpha\sim a$ при $T\to\infty$

В этом случае предельные теоремы для $\overline{Z}(T)$ и $Z(T)$ в широкой области уклонений x будут одни и те же.

Пусть процесс $Y^*(t)$ определен так же как процесс $Y(t)$, но имеет скачки $(\tau_j,-\zeta_j)$, $j=1,2,\ldots$ Так как $\mathbf{E}Y^*(t)\sim-at$ при $t\to\infty$, то определена собственная случайная величина $\overline{Y}^*=\sup_{t>0}Y^*(t)$. Из результатов § 6.1 следует, что

$$\mathbf{P}(\overline{Y}^*>y)<e^{-cy}$$

при некотором $c>0$ и $y\to\infty$.

Теорема 6.4.3. *Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — нерешетчатый вектор, $a>0$, $\alpha-a=o(1)$ при $T\to\infty$. Тогда* (i). *Справедливо представление*

$$\overline{Z}(T) = Z(T) + Y_T^*, \tag{6.4.21}$$

где распределение Y_T^* *сходится при* $T \to \infty$ *к распределению* $\overline{Y}^*$ *и* $\mathbf{P}(Y_T^* > y) < \mathbf{P}(\overline{Y}^* > y)$ *при всех* y.

(ii). *Если* $x - aT = o(T^{2/3})$, *то при* $T \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) = \mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)\big(1 + o(1)\big) = \\ = \left[1 - \Phi\left(\frac{x - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\big(1 + o(1)\big) \tag{6.4.22}$$

при $T \to \infty$, *где* Φ *— функция распределения нормального закона.*

Доказательство. (i). Ясно, что соотношение (6.4.21) выполнено при

$$Y_T^* = \sup_{u>0}\big(Z(T-u) - Z(T)\big)$$

и что распределение $Y_T^* \underset{p}{\leqslant} \overline{Y}^*$ сходится при $T \to \infty$ к распределению $\overline{Y}^*$.

(ii). Положим

$$A_y = \{\overline{Y}^* < y\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) \geqslant \mathbf{P}\big(Z(T) > x\big),\\ &\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x, A_y\big) + O(e^{-cy}) \leqslant \\ &\qquad\qquad\qquad \leqslant \mathbf{P}\big(Z(T) > x - y\big) + O(e^{-cy}). \end{aligned} \tag{6.4.23}$$

Оценим вероятности $\mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)$, $\mathbf{P}\big(Z(T) > x - y\big)$ с помощью сумм интегро-локальных вероятностей. Положим

$$v_k = k\Delta, \qquad k \leqslant N, \qquad N\Delta = o(T^{2/3}).$$

Тогда при $x - aT = o(T^{2/3})$, $x_k = x + v_k$, выполняется

$$x_k - aT = x - aT + v_k = o(T^{2/3}), \tag{6.4.24}$$

и при $\alpha_k = x_k/T$ согласно теореме 5.2.1

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x_k)\big) = T^{-1/2}\Delta C(\alpha_k) I_Z(\alpha_k, 0, 0, \mathbb{R}) e^{-TD(\alpha_k)}, \tag{6.4.25}$$

где функции $C(\alpha)$, $I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})$ непрерывны, так что $C(\alpha_k) \sim C(a)$, $I_Z(\alpha_k, 0, 0, \mathbb{R}) \sim I_Z(a, 0, 0, \mathbb{R})$ при всех $k \leqslant N$. В силу интегро-локальных теорем при $\Delta_T = \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{T}}$, $x = aT$ имеем

$$\mathbf{P}\big(Z(T) - aT \in \Delta[0)\big) = \mathbf{P}\left(\frac{Z(T) - aT}{\sigma\sqrt{T}} \in \Delta_T[0)\right) \sim \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2\pi}\,T}.$$

Поэтому
$$C(a)I_Z(a,0,0,\mathbb{R}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$
Кроме того, при $x_k - aT = o(T^{2/3})$
$$TD(\alpha_k) = TD''(a)\,\frac{(\alpha_k - a)^2}{2} + o(1) = \frac{1}{2\sigma^2}\,\frac{(x_k - aT)^2}{T} + o(1). \tag{6.4.26}$$

Аналогично при $y = T^{1/3}$
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x_k - y)\big) &\sim \frac{T^{-1/2}\Delta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-TD(\alpha_k - y/T)},\\ TD\left(\alpha_k - \frac{y}{T}\right) &= \frac{(x_k - aT - y)^2}{2\sigma^2 T} + o(1) =\\ &= \frac{(x_k - aT)^2}{2\sigma^2 T} - \frac{(x_k - aT)y}{\sigma^2 T} + o(1) =\\ &= \frac{(x_k - aT)^2}{2\sigma^2 T} + o(1) = TD(\alpha_k) + o(1). \end{aligned} \tag{6.4.27}$$
Последнее соотношение вытекает из того, что при $x_k - aT = o(T^{2/3})$, $y = T^{1/3}$
$$\frac{(x_k - aT)y}{T} = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$
Далее, в силу (6.4.25), (6.4.26) главная часть асимптотики $\mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)$ определяется соотношением
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(Z(T) > x\big) \sim \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x_k)\big) &\sim\\ \sim \frac{C(\alpha)I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N} \Delta e^{-TD(\alpha_k)}&. \end{aligned} \tag{6.4.28}$$
Здесь сумму можно естественным образом приблизить интегралом. Предоставляем это читателю.

Аналогично, в силу (6.4.27) вероятность $\mathbf{P}\big(Z(T) > x - y\big)$ также асимптотически эквивалентна правой части в (6.4.28). Поэтому, возвращаясь к (6.4.23), находим
$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) > x\big) \leqslant \mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)\big(1 + o(1)\big) + O(e^{-cy}), \tag{6.4.29}$$
где $cy = cT^{1/3}$, и в силу (6.4.24)
$$TD(\alpha_k) \sim \frac{1}{2\sigma^2}\,\frac{(x_k - aT)^2}{T} = o(T^{1/3}).$$

Это означает, что остаточный член в правой части (6.4.29) пренебрежимо мал по сравнению с $\mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)$. Это доказывает (6.4.22).

Асимптотика $\mathbf{P}\big(Z(T) > x\big)$ может быть найдена с помощью интеграла, приближающего сумму (6.4.28). Это дает

$$\mathbf{P}\big(Z(T) > x\big) = \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)-aT}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{x-aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \sim 1-\Phi\left(\frac{x-aT}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

при $T\to\infty$. Теорема 6.4.3 доказана.

6.4.4 Асимптотика вероятности невыхода траектории ОПВ за высокий уровень x при $\alpha = \frac{x}{T} < a$

В этом разделе мы будем рассматривать «граничную задачу второго типа» относительно траекторий $Z(t)$, $t\leqslant T$, с горизонтальной границей, т.е. изучать асимптотику вероятности $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)\leqslant x\big)$ (дополнительную к вероятностям из раздела 6.4.2) в случае $\alpha<a$, когда эта вероятность сходится к 0. В основе будут лежать те же подходы, которые были использованы в разделах 6.4.1, 6.4.2. Пусть

$$P_\alpha(v)=\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y}\leqslant v), \qquad Q_\alpha=\int_0^\infty e^{\mu(\alpha)u}P_\alpha(u)du.$$

Теорема 6.4.4. *Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — нерешетчатый вектор, $a>0$, $\alpha<a$, $\alpha=\frac{x}{T}\in K_\varepsilon$. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)<x, Z(T)\in x-\Delta[v)\big) = \\ = \frac{\Delta C(\alpha)P_\alpha(v)I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})}{\sqrt{T}}\,e^{-TD(\alpha)+v\mu(\alpha)}\big(1+o(1)\big), \quad (6.4.30)$$

где $\Delta=\overline{o}(1)$ при $T\to\infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha\in K_\varepsilon$, $\lambda(\alpha)<0$, функция $C(\alpha)$ определена в теореме 5.2.1,

$$I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})=\int_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau>y)dy.$$

Полагая $v=v_k=k\Delta$, $k=0,1,\dots$ и суммируя вероятности в левой части (6.4.30) при $v=v_k$ по k, получим

Следствие 6.4.4. *При условиях теоремы* 6.4.4 *выполняется* $\mu(\alpha)<0$,

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T)\leqslant x\big)=\frac{C(\alpha)Q_\alpha I_Z(\alpha,0,0,\mathbb{R})}{\sqrt{T}}\,e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big), \qquad (6.4.31)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha\in K_\varepsilon$.

Аналогично предыдущему здесь асимптотика $\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \leqslant x\big)$ совпадает с точностью до постоянного (при фиксированном α) множителя с асимптотикой $\mathbf{P}\big(Z(T) \leqslant x\big)$.

Доказательство теоремы 6.4.4. Рассмотрим вероятности

$$p(u) := \mathbf{P}\Big(Z(T) \in x - \Delta[v], \gamma(T) \in \delta[u], \overline{Z}\big(T - \gamma(T) - 0 \leqslant x\big)\Big).$$

Совершенно аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 6.3.1, находим

$$p(u) = \mathbf{P}\big(Z(T) \in x - \Delta[v], \gamma(T) \in \delta[u]\big)\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant v)\big(1 + o(1)\big). \tag{6.4.32}$$

Так как

$$I_Z(\alpha, u, 0, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, u + \delta, 0, \mathbb{R}) = \int\limits_u^{u+\delta} e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y)dy \sim$$
$$\sim \delta e^{\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}(\tau > y) \quad \text{при} \quad \delta = \bar{o}(1), \quad T \to \infty$$

(пусть для простоты функция $\mathbf{P}(\tau > y)$ непрерывна), то асимптотика первого сомножителя в правой части (6.4.32) в силу теоремы 5.2.1 совпадает с асимптотикой произведения

$$\frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)+v\mu(\alpha)+u\lambda(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > u)$$

(см. (6.3.1)). Так как второй множитель в правой части (6.4.32) от u не зависит, то, полагая $u = u_k\delta$, $k = 0, 1, \ldots$, и суммируя $p(u_k)$ по k, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(u_k) = \frac{\Delta C(\alpha)P_\alpha(v)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)+v\mu(\alpha)}I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})\big(1 + o(1)\big).$$

Это доказывает (6.4.30). Равномерность $o(1)$ устанавливается аналогично предыдущему. Теорема 6.4.4 доказана.

Замечание 6.4.1. В исследовании граничных задач в §§ 6.3–6.4 осталась не изученной асимптотика рассматриваемых распределений в случае $\alpha = o(1)$ при $T \to \infty$, когда вероятностные подходы, связанные с преобразованием Крамера над скачками и рассмотрением «обратных траекторий», не работают. В этом случае значения $P_\alpha(-v)$, присутствующие при описании исследуемых асимптотик, сходятся к 0 при $\alpha \to 0$, что означает, по-видимому, смену при $\alpha \to 0$ характера этих асимптотик. Как уже отмечалось, для независимых τ и ζ весьма полный асимптотический анализ граничных задач с прямолинейными границами в области больших и нормальных уклонений содержится в работе [37], где применялся факторизационный метод для отыскания двойных интегральных преобразований над исследуемыми распределениями с последующим обращением этих преобразований. Изложение в [37] по своей технической трудности выходит за рамки настоящей монографии, но оно «покрывает» случай $\alpha = o(1)$, $x \to \infty$ при $T \to \infty$. Из результатов [37] вытекает, например, следующее утверждение.

Теорема 6.4.5. *Пусть τ и ζ независимы, τ нерешетчата, распределение ζ имеет абсолютно непрерывную компоненту, $x \to \infty$, $x = o(T)$ при $T \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \leqslant x, Z(T) > x - v\big) = \frac{\alpha c(v) e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T}}\big(1 + o(1)\big) \quad (6.4.33)$$

при $T \to \infty$, где постоянный множитель $c(v)$ зависит от v и распределения (τ, ζ).

Сравнивая это утверждение со следствием 6.4.4, мы видим, что при $\alpha \to 0$ в асимптотике левых частей в (6.4.33), (6.4.32) появляется сходящийся к 0 множитель α.

§ 6.5 Интегро-локальные теоремы в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления

6.5.1 Интегро-локальные теоремы в первой граничной задаче

Из доказательства теоремы 6.3.1 видно, что ее утверждение может быть обобщено на время

$$\eta_{Z,g} = \min\big\{t : Z(t) > g_T(t)\big\}, \quad (6.5.1)$$

первого прохождения траекторией ОПВ произвольной удаленной границы, где $g_T(t)$ — функция, зависящая от растущего параметра T, такая, что $x := g_T(T) \to \infty$ при $T \to \infty$. Например, функция

$$g_T(t) = Tg(t/T), \quad (6.5.2)$$

где $g(u)$ — фиксированная функция такая, что $g(1) > 0$, обладает этим свойством.

Не ограничивая общности, мы будем изучать асимптотику того, что пересечение границы g_T произойдет в окрестности точки $t = T$, при этом будем предполагать, что функции $g_T(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

(a) Функция $g_T(t)$ асимптотически линейна в окрестности точки $t = T$, т.е. для любого фиксированного $N > 0$, некоторого $g' < \alpha$ и $T \to \infty$ выполняется

$$g_T(t) = x + (t-T)g' + o(1) \quad \text{при} \quad |t-T| \leqslant N, \quad \alpha = \frac{x}{T} \in K. \qquad (6.5.3)$$

Если, например, функция $g_T(t)$ имеет вид (6.5.2) и $g(t)$ дифференцируема в точке $t = 1$, то $g' = g'(1)$.

(b) В области $t \leqslant T - N$ при некотором $r < g'$ выполняется

$$g_T(t) \geqslant x + r(t-T) > 0. \qquad (6.5.4)$$

Отметим, что если в этих условиях $g' < 0$, то возникает качественно новая возможность, состоящая в том, что процесс $Z(t)$ может пересечь границу $g_T(t)$ не только вертикальным, но и горизонтальным скачком.

Обозначим через $A^{\uparrow}$ ($A^{\rightarrow}$) событие, состоящее в том, что пересечение границы $g_T(t)$ процессом $Z(T)$ произошло вертикальным (горизонтальным) скачком. Мы найдем асимптотику вероятностей

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^{\uparrow}\big) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^{\rightarrow}\big) \qquad (6.5.5)$$

(и тем самым асимптотику вероятностей

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \Delta[T]\big) = \mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^{\uparrow}\big) + \mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^{\rightarrow}\big)$$

при $T \to \infty$. На самом деле будут изучены вероятности более информативных событий, чем в (6.5.5).)

1) *Начнем с вероятностей пересечения границы вертикальным скачком.*

Положим

$$\chi_{Z,g} := Z(\eta_{Z,g}) - g_T(\eta_{Z,g}).$$

Теорема 6.5.1. *Пусть* $\boldsymbol{\xi}$ *— нерешетчатый вектор,* $\alpha = \frac{x}{T} > a + \varepsilon$ *и выполнены условия* (a), (b) *при любом* $g' < \alpha - \varepsilon$ *и некотором* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T],\ A^{\uparrow},\ \chi_{Z,g} \in \Delta[v]\big) = \\
&\quad = \mathbf{P}\big(Z(T+\delta) \in \Delta[x+v),\ \gamma(T+\delta) < \delta\big) P_{\alpha,g'}(-v)\big(1+o(1)\big) = \\
&\qquad = \frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)-v\mu(\alpha)} P_{\alpha,g'}(-v)\big(1+o(1)\big),
\end{aligned} \qquad (6.5.6)$$

где

$$P_{\alpha,g'}(-v) := \mathbf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\big({}^{\alpha}Y(t)+g't\big)\leqslant -v\Big), \tag{6.5.7}$$

$\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \overline{o}(1)$ *при* $T\to\infty$, *остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $\alpha\in K\bigcap\{\alpha\geqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$.

Если $g'\geqslant 0$, то $\mathbf{P}\big(A^{\uparrow}\,|\,\eta_{Z,g}\in\Delta[T)\big)=1$ и событие $A^{\uparrow}$ под знаком вероятности в (6.5.6) можно убрать. Полагая $v=v_k=k\Delta$ и суммируя вероятности (6.5.6) по полуинтервалам $\Delta[v_k)$ при $k=0,1,\ldots$, получим

Следствие 6.5.1. *При выполнении условий теоремы* 6.5.1

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g}\in\delta[T)\big)=\frac{\delta C(\alpha)P_{\alpha,g'}}{\sqrt{T}}\,e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big),$$

где

$$P_{\alpha,g'}=\int\limits_0^\infty e^{-v\mu(\alpha)}P_{\alpha,g'}(-v)dv. \tag{6.5.8}$$

Доказательство теоремы 6.5.1. Условия теоремы 6.5.1 таковы, что они позволяют получить нужное утверждение путем незначительной модификации рассуждений в доказательстве теоремы 6.3.1. Мы предоставляем это читателю. В ряде соотношений доказательства теоремы 6.3.1 процесс $Z(t)$ надо заменить на процесс $Z(t)+g't$ со сносом $g't$. Например, в определении события $B_{Z,T,\gamma}$ в (6.3.2) событие

$$\big\{\overline{Z}(T+\delta-\gamma(T+\delta)-0)\leqslant x\big\}$$

следует заменить на событие

$$\Big\{\sup_{t<T+\delta-\gamma(T+\delta)}\big(Z(t)+g't\big)\leqslant x\Big\}.$$

Доказательство малости условной вероятности

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g}<T-M\,|\,Z(T)\in\Delta[x+v)\big)$$

при больших M (ср. с (6.3.8), (6.3.10)) вытекает из условия (b) и вложения

$$\{\eta_{Z,g}<T-M\}\in\big\{\eta_Z^{(r)}(x-rT)<T-M\big\},$$

где $\eta_Z^{(r)}(x-rT)$ есть время первого прохождения процессом $Z(t)-rt$ границы $x-rT$. Дальнейшие оценки следуют рассуждениям (6.3.8)–(6.3.10), но для процесса $Z(t)-rt$ и границы $x-rT$.

2) *Пересечение границы горизонтальным скачком.* Перейдем теперь к случаю $g'<0$, когда возможно пересечение границы $g_x(t)$ горизонтальным скачком.

Теорема 6.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.5.1, $g' < 0$, $\lambda_+ > D(0)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T],\ A^{\to},\ \chi(T) > v\big) = \\ = \frac{\delta|g'|}{\sqrt{T}}\, C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} \int_0^\infty e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u+v) P_{\alpha,g'}(-g'u)du\big(1+o(1)\big), \quad (6.5.9)$$

где $\delta = \delta_T = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$, *остаточный член равномерен по* $\alpha \in K \cap \{\alpha \geqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, *вероятность* $P_{\alpha,g'}(-v)$ *определена в* (6.5.7).

Условие $\lambda_+ > D(0)$ введено для упрощения доказательства. Оно не является ограничительным.

Доказательство теоремы 6.5.2. При $g' < 0$ имеем

$$g_T(T) - g_T(T+\delta) \sim -\delta g' > 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \qquad (6.5.10)$$

Обозначим

$$\Delta_g(x] = \big(g_T(T+\delta), g_T(T) = x\big].$$

Тогда

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T],\ A^{\to},\ \chi(T) > v\big) = \\ = \int_0^T \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\, \gamma(T) \in du,\, \chi(T) > v,\, B_T(u)\big) + P_{\delta[T)}, \quad (6.5.11)$$

где

$$B_T(u) = \Big\{ \sup_{t \leqslant T-u} \big(Z(t) - g_T(t)\big) \leqslant 0 \Big\},$$
$$P_{\delta[T)} \leqslant \mathbf{P}\big(Z(T+\delta) \in \Delta_g[x),\ \gamma(T+\delta) < \delta\big).$$

При $v > 0$, $\delta < v$ слагаемое $P_{\delta[T)}$ в правой части (6.5.11) исчезает, так как событие $\big\{\chi(T) > \delta, \gamma(T+\delta) < \delta\big\}$ пусто при $\delta < v$.

Оценку первого слагаемого в правой части (6.5.11) разобьем на несколько этапов.

I. Аналогично предыдущему находим, что условная вероятность события $B_T(u)$ при условии $\big\{Z(T)\in\Delta_g(x],\ \gamma(T)\in du,\ \chi(T)>v\big\}$ при каждых фиксированных u и v асимптотически эквивалентна при $T\to\infty$ вероятности события $P_{\alpha,g'}(-g'u)$ $\ (g_T(T-u)-x-g'u\sim -g'u$ при небольших u).

Поэтому при фиксированном M

$$J_0^M := \int_0^M \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in du,\ \chi(T) > v,\ B_T(u)\big) \sim$$
$$\sim \int_0^M \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du, \chi(T) > v\big) P_{\alpha,g'}(-g'u). \quad (6.5.12)$$

Далее, так как функция $P_{\alpha,g'}(-g'u)$ возрастает по u, то мы можем оценивать интеграл снизу суммами

$$\sum_{u_k \leqslant M} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in \delta[u_k), \chi(T) > v\big) P_{\alpha,g'}(-g'u_k), \quad (6.5.13)$$

где $u_k = k\delta$, $k = 0, \ldots,\ N = T/\delta$ (считаем, что N — целое число). В силу теоремы 5.2.1 и (6.5.10) при $u_k < M$ и большом фиксированном M

$$\mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in \delta[u_k),\ \chi(T) > v\big) =$$
$$= \frac{\delta|g'|C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} \big[I_Z(\alpha, u, v, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, u+\delta, v, \mathbb{R})\big]\big(1 + o(1)\big),$$

где

$$I_Z(\alpha, u, v, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, u+\delta, v, \mathbb{R}) \sim \delta e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u + v)$$

при $\delta \to 0$ (пусть для простоты функция $\mathbf{P}(\tau > u)$ непрерывна).

Возвращаясь к (6.5.12), (6.5.13), находим

$$J_0^M \geqslant \frac{\delta|g'|C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} \int_0^M e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u + v) \times$$
$$\times P_{\alpha,g'}(-g'u)du\big(1 + o(1)\big). \quad (6.5.14)$$

Если в (6.5.13) заменить $P_{\alpha,g'}(-g'u_k)$ на $P_{\alpha,g'}(-g'u_{k+1})$, то мы получим оценку сверху для J_0^M, которая приводит к оценке с той же правой частью, что и в (6.5.14). Ясно также, что выбором M интеграл в правой части (6.5.14) может быть сделан сколь угодно близким к интегралу от 0 до ∞, так что при больших M правая часть в (6.5.14) асимптотически эквивалентна правой части в (6.5.9).

II. Оценим теперь сверху (см. (6.5.11)) интеграл

$$\int_M^{T^*} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in du,\ \chi(T) > v,\ B_T(u)\big),$$

где T^* таково, что значение $\alpha^* := \frac{x}{T^*} \sim c^*\alpha$, $c^* > 1$, $\alpha^* \in K$, по-прежнему удовлетворяет всем условиям теоремы 5.2.1 для α. Этот интеграл не превосходит интеграл

$$J_M^{T^*} := \int\limits_M^{T^*} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in du,\ \chi(T) > v\big), \qquad (6.5.15)$$

который мы, аналогично предыдущему, будем приближать суммами

$$\sum_{u_k \in [M,T^*]} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in \delta[u_k),\ \chi(T) > v\big), \qquad (6.5.16)$$

где для k-го слагаемого P_k имеем

$$P_k := \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in \delta[u_k),\ \chi(T) > v\big) =$$
$$= \mathbf{P}\big(Z(T-u_k) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T-u_k) < \delta,\ \chi(T-u_k) > u_k + v\big).$$

Обозначим

$$A_{T,k} = \big\{Z(T-u_k) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T-u_k) < \delta\big\}. \qquad (6.5.17)$$

Тогда

$$P_k = \mathbf{P}(A_{T,k})\mathbf{P}\big(\chi(T-u_k) > u_k + v \,|\, A_{T,k}\big),$$

где второй множитель в правой части равен

$$\mathbf{P}\big(\chi(T-u_k) > u_k + v \,|\, \gamma(T-u_k) < \delta\big) \leqslant \mathbf{P}(\tau > u_k + v). \qquad (6.5.18)$$

Поэтому по теореме 5.2.1 при $\alpha_k = \frac{x}{T-u_k}$

$$P_k \leqslant \frac{|g'|\delta^2 C(\alpha_k)}{\sqrt{T-u_k}}\, e^{-(T-u_k)D(\alpha_k)}\mathbf{P}(\tau > u_k + v)\big(1 + o(1)\big).$$

Здесь

$$(T-u_k)D(\alpha_k) = T\mathbf{D}(1-\rho_k, \alpha) \quad \text{при} \quad \rho_k = \frac{u_k}{T}.$$

В силу выпуклости функции $\mathbf{D}(t,\alpha)$ (см. лемму 3.5.2)

$$\mathbf{D}(1-\rho_k, \alpha) \geqslant D(\alpha) - \rho_k\lambda(\alpha) \qquad (6.5.19)$$

и, стало быть, при всех k

$$(T-u_k)D(\alpha_k) \geqslant TD(\alpha) - u_k\lambda(\alpha),$$

$$\sum_{u_k \in [M,T^*]} P_k < \frac{|g'|\delta e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T-T^*}} \sum_{u_k \in [M,T^*]} \delta C(\alpha_k) e^{u_k\lambda(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > u_k + v)\big(1 + o(1)\big) =$$

$$= \frac{c|g'|\delta e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T-T^*}} \int\limits_M^{\infty} e^{u\lambda(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > u + v)du\big(1 + o(1)\big) \qquad (6.5.20)$$

при некотором c. Так как $\lambda_+ > D(0)$, то $\lambda(\alpha) < \lambda_+$ и интеграл в (6.5.20) сходится к 0 при $M \to \infty$. Отсюда следует, что

$$J_M^{T^*} = o(J_0^M) \quad \text{при} \quad M \to \infty,\ T \to \infty.$$

III. Оценим далее

$$J_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} = \int\limits_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T) \in du,\ \chi(T) > v\big)$$

при малом фиксированном $\varepsilon > 0$. Как и в разделе II доказательства воспользуемся приближением интеграла суммами и неравенством (6.5.18), в силу которого (см. (6.5.17), (6.5.18))

$$P_k \leqslant \mathbf{P}(A_{T,k})\mathbf{P}(\tau > u_k + v).$$

Для получения требуемой оценки сверху для

$$\sum_{u_k \in [(1-\varepsilon)T, T^*]} P_k$$

воспользуемся более грубыми, чем в разделе II, подходами. В силу ПБУ для ОПВ имеем при $T \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}(A_{T,k}) \leqslant \ln \mathbf{P}\big(Z(T-u_k) \in \Delta_g(x]\big) \leqslant -(T-u_k)\widehat{D}\left(\frac{x}{T-u_k}\right)\big(1+o(1)\big).$$

Так как $\lambda_+ > D(0)$, то $\widehat{D}(\cdot) = D(\cdot)$ и в силу (6.5.19) имеем аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}(A_{T.k}) \leqslant -T(1-\rho_k)D\left(\frac{\alpha}{1-\rho_k}\right) = \\ = -T\mathbf{D}(1-\rho_k, \alpha) \leqslant -TD(\alpha) + u_k\lambda(\alpha), \end{aligned}$$

$$\sum P_k \leqslant \frac{c}{\delta}\, e^{-TD(\alpha)} \int\limits_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} e^{u\lambda(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > u+v)du$$

при некотором $c < \infty$. Так как $\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то

$$\sum P_k \leqslant \frac{ce^{-TD(\alpha)}}{\delta}\, e^{-\varepsilon_1 T}$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, значение интеграла $J_{T^*}^{(1-\varepsilon)T}$ пренебрежимо мало по сравнению с J_0^M.

IV. Оценим

$$J^T_{(1-\varepsilon)T} = \int\limits_{(1-\varepsilon)T}^{T} \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du\big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\big(\overline{Z}(\varepsilon T) > x\big)\mathbf{P}\big(\tau > (1-\varepsilon)T\big). \tag{6.5.21}$$

В силу леммы 4.6.1 (см. (4.6.8)) $\frac{\mathfrak{l}_\alpha(t)}{t} \to \infty$ при $t \to 0$. Поэтому $\mathfrak{l}'_\alpha(\varepsilon) > 0$ при всех $\alpha > 0$ и достаточно малом ε, и в силу теоремы 4.6.2 выполняется

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(\varepsilon T) > x\big) \leqslant \exp\left\{-\varepsilon T D\left(\frac{x}{\varepsilon T}\right) + o(1)\right\}$$

при $T \to \infty$, где в силу (6.5.19)

$$\varepsilon T D\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) = T\mathbf{D}(\varepsilon, \alpha) \geqslant TD(\alpha) - T\lambda(\alpha)(1-\varepsilon).$$

Вместе с (6.5.21) это дает

$$J^T_{(1-\varepsilon)T} \leqslant e^{-TD(\alpha)+\lambda(\alpha)(1-\varepsilon)T+o(T)}\mathbf{P}\big(\tau > (1-\varepsilon)T\big) \leqslant e^{-TD(\alpha)-\varepsilon_1 T}$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Это вновь доказывает пренебрежимую малость значения рассматриваемого интеграла по сравнению с J^M_0.

V. Остается оценить (см. (6.5.11)

$$P_{\delta[T)} \leqslant \mathbf{P}\big(Z(T+\delta) \in \Delta_g(x],\ \gamma(T+\delta) < \delta\big).$$

В силу теоремы 5.2.1

$$P_{\delta[T)} \leqslant \frac{c\delta^2}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} = o(J^M_0)$$

при $\delta \to 0$ и некотором $c < \infty$.

Полученные оценки доказывают (6.5.9). Теорема 6.5.2 доказана.

6.5.2 Интегро-локальные теоремы в задаче о вероятности разорения

В примере, приведенном во Введении, было пояснено, что в страховой компании с начальным капиталом z, размерами страховых выплат $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ и «средней скоростью» q поступления страховых взносов вероятность разорения за время T равна

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{u \leqslant T}\big(Z(t) - qt\big) > z\Big)$$

Это соответствует вероятности пересечения ОПВ $Z(t)$ границы

$$g_T(t) = z + qt = x + q(t - T) \quad \text{при} \quad x = z + qT. \tag{6.5.22}$$

Ясно, что такая граница удовлетворяет условиям (a), (b) при

$$g' = q > 0, \qquad \alpha = \frac{x}{T} = \alpha_z + q > q, \qquad \alpha_z = \frac{z}{T},$$

что исключает пересечение границы горизонтальным скачком. Это есть классическая задача о разорении. Ей посвящено значительное количество работ, включая монографии, см., например, [78, 80, 83, 96].

В этом разделе мы получим интегро-локальное утверждение для времени $\eta_{Z,g}$ первого прохождения границы (6.5.22). Чтобы получить содержательное утверждение мы будем предполагать, что $\alpha_z = z/T$ и $\alpha - a$ отделены от 0. (В дальнейшем при получении интегральных теорем в случае $T \gg z$ для вероятности $\mathbf{P}\eta_{Z,g} > T$) будет найдена подходящая оценка.)

Из теорем 6.3.1, 6.5.1 вытекает

Следствие 6.5.2. *Пусть* $\boldsymbol{\xi}$ *— нерешетчатый вектор,* $q > a$, $\alpha_z = z/T > \varepsilon$ *при некотором* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T),\ \chi_{Z,g} \in \Delta[v)\big) = \frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)} P_{\alpha,q}(-v)\big(1 + o(1)\big),$$

где $\Delta = \Delta_T = \overline{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \overline{o}(1)$ *при* $T \to \infty$, *остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $\alpha \in K \bigcap \{\alpha \geqslant \varepsilon\}$.

Следствие 6.5.3. *При выполнении условий следствия* 6.5.2

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T)\big) = \frac{\delta C(\alpha) P_{\alpha,q}}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)}\big(1 + o(1)\big),$$

где множитель $P_{\alpha,q}$ *определен в* (6.5.8).

§ 6.6 Интегральные теоремы в граничных задачах

6.6.1 Интегральные теоремы в первой граничной задаче

Теоремы 6.5.1, 6.5.2 позволяют найти асимптотику «интегральной» вероятности $\mathbf{P}(\eta_{Z,g} < T)$ в общей граничной задаче первого типа для границы вида

$$g_T(t) = Tg(t/T),$$

где $g(u)$, $u \in [0,1]$, есть функция, не зависящая от T (см. § 4.6). Для решения этой задачи следует аналогично тому, как это делалось в [12, § 3.7] для случайных блужданий, рассмотреть семейство линий уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ (см. § 4.6) и фиксировать значение $\alpha = \alpha^g$, при котором происходит первое (с ростом α) касание линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ кривой $g(t)$, а также точку t^g, в которой происходит это касание (пусть это будет единственная точка касания). Здесь следует предположить, что касание в точке t^g является гладким (существуют не совпадающие вторые производные у функций $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ и $g(t)$ в точке t^g; первые производные совпадают).

Для упрощения изложения мы подробно рассмотрим лишь случай, когда $t^g \in (0,1)$, а пересечение границы $g_T(t)$ возможно лишь вертикальным скачком ($\mathfrak{l}'_{\alpha^g}(t^g) > 0$; это всегда выполнено, если $a \geqslant 0$). Другие «правильные» виды касания $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t)$ и $g_T(t)$ рассмотрены кратко.

Положим $\rho_g = g(t^g)/t^g$.

Теорема 6.6.1. *Пусть* $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$ *— нерешетчатый вектор,* $\alpha^g \in K \cap \{\alpha \geqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $t^g \in (0,1)$, *функция* $g(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* t^g *и отделена от функции* $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t)$ *вне этой окрестности,* $q := g'(t^g) = \mathfrak{l}'_{\alpha^g}(t^g) > 0$, $b := g''(t^g) - \mathfrak{l}''_{\alpha^g}(t^g) > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g} < T) = \frac{C(\rho_g) P_{\rho_g,q} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{b\mu(\rho_g) t^g}}\, e^{-TD(\alpha^g)}\big(1 + o(1)\big) \tag{6.6.1}$$

при $T \to \infty$, *где функция* $P_{\alpha,q}$ *определена в* (6.5.7), (6.5.8) (*при замене* g' *на* q).

Доказательство. Найдем сначала асимптотику вероятности

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in (Tt^g)_{\varepsilon T}\big)$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Воспользуемся интегро-локальной теоремой 6.5.1 и следствием 6.5.1 и рассмотрим разбиение окрестности точки t^g на малые полуинтервалы $\delta[t_k)$, $t_k = t^g \pm \frac{k\delta}{T}$, $k = 0, 1, \ldots$ Искомая вероятность $\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in (Tt^g)_{\varepsilon T}\big)$ будет суммой по $t_k \in (t^g)_\varepsilon$ интегро-локальных вероятностей $\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[Tt_k)\big)$, найденных с помощью теоремы 6.5.1, условия которой будут выполнены (тут требуются небольшие дополнительные оговорки, связанные с выбором малого $\varepsilon > 0$ и переходом от момента времени T (в теореме 6.5.1) к моменту Tt_k).

Итак, рассмотрим сумму

$$\Sigma_{Z,g} = \sum_{k=-N}^{N} \mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[Tt_k)\big), \tag{6.6.2}$$

где $N = \frac{T\varepsilon}{\delta}$ предполагается целым. Положим

$$T_{(k)} = Tt_k, \quad \alpha_k = \frac{Tg(t_k)}{T_{(k)}} \to \frac{g(t^g)}{t^g} = \rho_g \tag{6.6.3}$$

при каждом k и $T \to \infty$, так что $g'(t_k) \to q$. Тогда по теореме 6.5.1 и следствию 6.5.1 можно записать

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T_{(k)})\big) = \frac{\delta C(\alpha_k) P_{\alpha_k,q}}{\sqrt{T}}\, e^{-T_{(k)}D(\alpha_k)}\big(1 + o(1)\big) \tag{6.6.4}$$

при $T \to \infty$, где функция $P_{\alpha,q}$ определена в (6.5.8), $P_{\alpha_k,q} \to P_{\rho_g,q}$, $C(\alpha_k) \to C(\rho_g)$, $T_{(k)} \sim t^g T$ при $T \to \infty$.

В представлении (6.6.4)

$$T_{(k)}D(\alpha_k) = T\left(t^g + \frac{k\delta}{T}\right) D\left(\frac{g(t^g + \frac{k\delta}{T})}{t^g + \frac{k\delta}{T}}\right), \tag{6.6.5}$$

$$g\left(t^g + \frac{k\delta}{T}\right) = g(t^g) + g'(t^g)\frac{k\delta}{T} + \frac{g''(t^g)}{2}\left(\frac{k\delta}{T}\right)^2\big(1 + o(1)\big), \tag{6.6.6}$$

$$\left(t^g + \frac{k\delta}{T}\right)^{-1} = (t^g)^{-1} - \frac{k\delta}{Tt^g} + \left(\frac{k\delta}{Tt^g}\right)^2\big(1 + o(1)\big) \tag{6.6.7}$$

при $T \to \infty$. Отсюда нетрудно получить асимптотическое разложение для $t_k D(\alpha_k)$ с главным членом $t^g D\left(\frac{g(t^g)}{t^g}\right) = t^g D\left(\frac{\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t^g)}{t^g}\right) = D(\alpha^g)$. Заметим далее, что если в (6.6.5) и далее везде вместо $g(t)$ подставить функцию $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t)$, то получим аналогичное асимптотическое разложение. Так как $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t^g) = g(t^g)$, $\mathfrak{l}'_{\alpha^g}(t^g) = g'(t^g)$, то первые три члена разложения будут отличаться только тем, что в нем вместо $D'(\rho_g)g''(t^g) = \mu(\rho_g)g''(t^g)$ будет стоять $\mu(\rho_g)\mathfrak{l}''_{\alpha^g}(t^g)$. Кроме того, по определению линии уровня, при $\beta_k = \frac{\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t_k)}{t_k}$ будет выполняться равенство

$$t_k D(\beta_k) = D(\alpha^g).$$

Поэтому

$$t_k D(\alpha_k) = t_k D(\alpha_k) \pm t_k D(\beta_k) =$$
$$= D(\alpha^g) + \frac{\mu(\rho_g)}{2}\left(g''(t^g) - \mathfrak{l}''_{\alpha^g}(t^g)\right)\left(\frac{k\delta}{T}\right)^2\big(1 + o(1)\big)$$

и в силу (6.6.4)

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} \in \delta[T_k)\big) = \frac{\delta C(\rho_g) P_{\rho_g,q}}{\sqrt{Tt^g}}\, e^{-TD(\alpha^g) - \frac{b\mu(\rho_g)}{2}\,\frac{(k\delta)^2}{T}}\big(1 + o(1)\big).$$

Используя (6.6.4)), (6.6.2), мы получим для суммы $\Sigma_{Z,g}$ интегральную сумму с интервалом разбиения длиной $\frac{\delta}{\sqrt{T}}$, соответствующую интегралу

$$\frac{C(\alpha^{(g)})P_{\rho_g,q}}{\sqrt{t^g}}\,e^{-TD(\alpha^g)}\int\limits_{-\sqrt{T}\varepsilon}^{\sqrt{T}\varepsilon} e^{-\frac{b\mu(\rho_g)z^2}{2}}dz\big(1+o(1)\big) \tag{6.6.8}$$

при $T\to\infty$. Это доказывает (6.6.1).

Далее, при любом $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)=\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g}\in(Tt^g)_{\varepsilon T}\big)+\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g}\in[0,T]\setminus(Tt^g)_{\varepsilon T}\big), \tag{6.6.9}$$

где согласно теореме 4.6.1 второе слагаемое в правой части (6.6.9) есть $O(e^{-T(D(\alpha)+\varepsilon_1)})$ при некотором $\varepsilon_1>0$. Стало быть, представление (6.6.8) остается справедливым и для вероятности $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)$. Теорема 6.6.1 доказана.

В случае

$$t_g=1,\qquad g'(1)=\mathfrak{l}'_{\alpha^g}(1),\qquad b=g''(1)-\mathfrak{l}''_{\alpha^g}(1)>0 \tag{6.6.10}$$

следует повторить выкладки в доказательстве теоремы 6.6.1, но в (6.6.2) сумму $\Sigma_{Z,g}$ следует определить как сумму лишь по отрицательным значениям k. В результате мы получим, что $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)$ равна половине правой части в (6.6.1) при $t^g=1$, $\alpha^g=g(1)$.

Рассмотрим теперь кратко случай

$$t_g=1\quad(\alpha^g=g(1)),\qquad g'(1)<l'_{\alpha^g}(1)=-\frac{\lambda(\alpha^g)}{\mu(\alpha^g)}$$

(см. лемму 4.5.1). В этом случае асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)$ будет иметь вид

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)=\frac{c}{\sqrt{T}}\,e^{-TD(\alpha)}\big(1+o(1)\big),$$

где постоянная c получается суммированием постоянных в правых частях (6.5.6) по $v=v_k=k\Delta$ и $T=T_{(k)}=T-k\delta$, $k=0,1,\ldots$ Это главную часть асимптотики в (6.5.6) не изменит.

С помощью теоремы 6.5.1 нетрудно получить и асимптотику вероятности $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T,\ \chi_{Z,g}<v)$.

«Переходная область» с участием нормального распределения, аналогичная той, что возникает для распределения $Z(T)$ в п. (ii) теоремы 6.4.1, появится и в рассматриваемой задаче, если мы будем в случае (6.6.10) рассматривать не $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)$, а $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T-v\sqrt{T})$. Нормальное распределение возникнет и в том случае, если мы будем изучать $\mathbf{P}(\eta_{Z,g}<T)$, например, в случае, когда α^g не есть фиксированное значение, удовлетворяющее (6.6.10), а лишь сходится к нему со скоростью $c/\sqrt{T}$.

6.6.2 О второй граничной задаче

Напомним, что вторая граничная задача для ОПВ состоит в изучении вероятности того, что траектория $Z(t)$ на отрезке $[0,T]$ не пересечет границу $g_T(t)$, в то время как прямая $z = at$ пересекает эту границу на $[0,T]$ (мы рассматриваем задачу с одной границей). В этом разделе мы будем предполагать, что граница $g_T(t)$ удовлетворяет условиям (a), (b) предыдущего раздела (см. (6.5.3), (6.5.4)) и условию

(c) $a > \alpha + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Более общий случай, когда условие (b) не выполнено, является весьма сложным и его асимптотический анализ вряд ли возможен в рамках настоящей монографии (ср. с исследованием второй граничной задачи для случайных блужданий в [12]).

В названных условиях справедливо следующее утверждение. Обозначим, как и прежде,

$$P_{\alpha,g'}(v) = \mathbf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\big({}^{\alpha}Y(t) + g't\big) \leqslant v\Big).$$

Теорема 6.6.2. *Пусть выполнены условия* (a), (b) *раздела* 6.5.1 *и* $g' \leqslant 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} > T,\ Z(T) \in \Delta[x-v)\big) = \\ = \frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)+\mu(\alpha)v} P_{\alpha,g'}(v) \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}(\tau > u)du \tag{6.6.11}$$

равномерно по $\alpha \in K \cap (\varepsilon, a-\varepsilon)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Если $g' > 0$, *то*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} > T,\ Z(T) \in \Delta[x-v)\big) = \\ = \frac{\Delta C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)+\mu(\alpha)v} \int\limits_0^{v/g'} e^{\lambda(\alpha)u} \times \\ \times \mathbf{P}(\tau > u)P_{\alpha,g'}(v-ug')du\big(1+o(1)\big) \tag{6.6.12}$$

равномерно по значениям α *из той же области.*

Интеграл в (6.6.11) сходится, так как $\lambda(\alpha) < \lambda_+$ при $\alpha \in K$.

Доказательство. Если $g' \leqslant 0$, то отыскание асимптотики главных частей рассматриваемых вероятностей в (6.6.11) происходит так же (с незначительными изменениями), как в доказательстве теоремы 6.5.2, в котором (следуя рассмотрениям в доказательстве теоремы 6.5.2) вероятность $\mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant v)$ надо заменить на $\mathbf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\big({}^{\alpha}Y(t)+g't\big)\leqslant v\Big)$.

Оценка вероятностей пересечь границу $g_T(t)$ на интервале времени $(0, T-M)$ при больших M происходит так же, как в теоремах 6.3.1, 6.5.1.

Если $g' > 0$, то отыскание главной части асимптотики будет несколько иным. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} > T,\ Z(T)\in\Delta[x-v)\big) = \\
&\quad = \int\limits_0^{v/g'} \mathbf{P}\Big(Z(T)\in\Delta[x-v),\ \gamma(T)\in du,\ \max_{t\leqslant T-u}\big(Z(t)-g_T(t)\big)\leqslant 0\Big) = \\
&\qquad\qquad = \int\limits_0^{v/g'} \mathbf{P}\Big(Z(T)\in\Delta[x-v), \gamma(T)\in du\Big)\times \\
&\quad \times \mathbf{P}\Big(\max_{t\leqslant T-u}\big(Z(t)-g_T(t)\big)\leqslant 0 \,\big|\, Z(T)\in\Delta[x-v),\ \gamma(T)\in du\Big). \qquad (6.6.13)
\end{aligned}$$

Аналогично тому, как это делалось в доказательствах теорем 6.3.1, 6.5.1, находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\max_{t\leqslant T-u}\big(Z(t)-g_T(t)\big)\leqslant 0 \,\big|\, Z(T)\in\Delta[x-v), \gamma(T)\in du\Big) \sim \\
&\qquad\qquad \sim \mathbf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\big({}^{\alpha}Y(t)-g't\big)\leqslant v-ug'\Big) = P_{\alpha,g'}(v-ug').
\end{aligned}$$

Приближая интеграл в (6.6.13) суммами вероятностей по событиям $\gamma(T)\in\delta[u_k)$, $u_k = k\delta$, по k от 0 до $N = \frac{v}{g'\delta}$ (N предполагается целым), получим значение

$$\sum_{k=0}^{N}\mathbf{P}\big(Z(T)\in\Delta[x-v), \gamma\in\delta[u_k)\big)P_{\alpha,g'}(v-u_k g')\big(1+o(1)\big).$$

Отсюда, используя теорему 5.2.1, нетрудно получить (6.6.12). Теорема 6.6.2 доказана.

Аналогично предыдущему из теоремы 6.6.2 получаем

Следствие 6.6.1. *Если* $g' \leqslant 0$, *то*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} > T,\ Z(T) \geqslant x - v\big) = \\ = \frac{C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} \int\limits_0^v e^{\mu(\alpha)t} P_{\alpha,g'}(t)dt \times \\ \times \int\limits_o^\infty e^{\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}(\tau > u)du\big(1 + o(1)\big). \quad (6.6.14)$$

Если $g' > 0$, *то*

$$\mathbf{P}\big(\eta_{Z,g} > T, Z(T) \geqslant x - v\big) = \\ = \frac{C(\alpha)}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha)} \int\limits_0^v \int\limits_0^{t/g'} e^{\lambda(\alpha)u+\mu(\alpha)t}\mathbf{P}(\tau > u) \times \\ \times P_{\alpha,g'}(t - ug')du\, dt\big(1 + o(1)\big) \quad (6.6.15)$$

равномерно по α *в тех же областях, что и в теореме* 6.6.2.

Интеграл в (6.6.14) при $v = \infty$ сходится, так как $\mu(\alpha) < 0$ при $\alpha < a$ и $\lambda(\alpha) < \lambda_+$ при $\alpha \in K$.

§ 6.7 Приложения к задаче о разорении страховой компании

Во Введении была описана классическая задача о вероятности разорения страховой компании. Она состоит в следующем. Пусть $T_1 = \tau_1$, $T_2 = \tau_1 + \tau_2, \ldots$ — моменты наступления крупных выплат по страховым случаям, а $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — соответственно, размеры этих выплат. Пусть далее r — средняя «скорость» поступлений страховых взносов (суммы, поступающие в компанию от страхователей за единицу времени). Тогда, если x — начальный капитал компании, то ее капитал в момент t будет примерно равен $x + rt - Z(t)$. Это значит, что если $\inf_{t\leqslant T}\big(x+rt-Z(t)\big) < 0$, то компания к моменту T разорится. Другими словами, вероятность разорения за время T равна

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\leqslant T}\big(Z(t) - rt\big) > x\Big) = \mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)}(T) > x) \ \text{ при } \ q = -r < 0, \qquad (6.7.1)$$

где, как и прежде,

$$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt, \qquad \overline{Z}^{(q)}(T) = \max_{t\leqslant T} Z^{(q)}(t).$$

Задаче об отыскании аппроксимаций для вероятностей (6.7.1) посвящено значительное количество работ, включая монографии, см., например, [83], [78], [96], [80].

Вероятность разорения должна быть малой, поэтому начальный капитал x должен быть большим. Найти приближенное значение вероятности разорения можно, если знать асимптотику вероятности (6.7.1) при $x \to \infty$. Представляет интерес также распределение времени $\eta_{Z^{(q)}}(x)$, прошедшее до момента разорения.

Процесс $Z^{(q)}(t)$ в (6.7.1) есть ОПВ с *линейным сносом*. Существуют два подхода, позволяющие свести интересующие нас задачи о распределении $Z^{(q)}(T)$ и $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ к соответствующим задачам для «обычных» ОПВ (без сноса).

Первый подход. Введем в рассмотрение ОПВ $Z^{[q]}(t)$ как «обычный» ОПВ, управляемый вектором $(\tau, \zeta^{(q)})$, $\zeta^{(q)} = \zeta + q\tau$, так что значения процессов $Z^{(q)}$ и $Z^{[q]}$ в момент времени T_k совпадают: $Z^{(q)}(T_k) = Z^{[q]}(T_k)$, $k = 0, 1, \dots$ Нетрудно видеть, что при $q \leqslant 0$

$$\overline{Z}^{(q)}(T) = \overline{Z}^{[q]}(T) = \max_{t \leqslant T} Z^{[q]}(t), \quad \eta_{Z^{(q)}}(x) = \eta_{Z^{[q]}}(x),$$

при этом $\overline{Z}^{(q)} = \overline{Z}^{[q]} = \sup_{k \geqslant 0} Z_k^{(q)}$, $Z_k^{(q)} = Z_k + qT_k$. Остается применить утверждения, полученные в § 6.1, 6.4, к процессам $Z^{[q]}$. Но для этого надо знать характеристики процесса $Z^{[q]}$; мы снабдим их верхним индексом (q). Основной их них является базовая функция $A^{(q)}(\mu)$, которая в области аналитичности является решением относительно λ уравнения

$$\mathbf{A}^{(q)}(-\lambda, \mu) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta^{(q)}} = 0.$$

Так как $\mathbf{A}^{(q)}(-\lambda, \mu) = \mathbf{A}(-\lambda + q\mu, \mu)$, то нетрудно убедиться, что

$$A^{(q)}(\mu) = q\mu + A(\mu),$$

поскольку $\mathbf{A}^{(q)}\big(-A^{(q)}(\mu), \mu\big) = \mathbf{A}\big(-q\mu - A(\mu) + q\mu, \mu\big) = 0.$

Для функции уклонений $D^{(q)}(\alpha)$ процессов $Z^{(q)}$ и $Z^{[q]}$ аналогично находим $D^{(q)}(\alpha) = D(\alpha - q)$ (это следует и из результатов гл. 3 о ПБУ для ОПВ). Аналогичным образом определяются и другие характеристики ОПВ $Z^{[q]}$.

Второй подход состоит в том, чтобы рассматривать задачу о вычислении вероятностей (6.7.1) как первую граничную задачу о пересечении исходным процессом $Z(t)$ при $q = -r$ границы $g_T(t) = x + rt = Tg(t/T)$, где $g(u) = \alpha + ru$, $u \in [0, 1]$, $\alpha = x/T$. Эта задача изучалась в §§ 6.5, 6.6. Здесь характеристики ОПВ остаются неизменными, а определяющую роль играют параметры $\alpha = \alpha^g$, при котором происходит касание линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ кривой $g(t) = \alpha + rt$, и точка t^g, в которой происходит это касание.

Мы будем использовать в основном первый подход. Пусть, как и прежде, $\psi_q(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\zeta^{(q)}}$. Обозначим

$$\mu_0^{(q)} = \sup\left\{\mu:\ \psi_q(\mu) \leqslant 1\right\} \tag{6.7.2}$$

и в этом разделе для упрощения обозначений положим $\mu_0^{(q)}=\mu_0$. Из (6.7.2) следует, что при $\mathbf{E}\zeta^{(q)} < 0$

$$\mu_0 = \sup\left\{\mu:\ A^{(q)}(\mu) \leqslant 0\right\} \tag{6.7.3}$$

Действительно, $A^{(q)}(\mu)$ является выпуклой функцией, $(A^{(q)})'(0) = \frac{\mathbf{E}\zeta^{(q)}}{a_\tau} < 0$, $\mathbf{A}^{(q)}(0,\mu_0) = \ln\psi_q(\mu_0) = 0$. Из последнего соотношения с необходимостью вытекает $A^{(q)}(\mu_0)=0$ (напомним, что $\mathbf{A}^{(q)}\big(-A^{(q)}(\mu_0),\mu\big)=0$). Это доказывает (6.7.3).

На основании результатов §§ 6.1, 6.4, 6.6 можно выделить следующие три класса задач, которые представляют основной интерес и определяются свойствами управляющего вектора (τ,ζ) и значением $q=-r$. Им соответствуют три различных типа предельных законов для граничных функционалов $\overline{Z}^{(q)}(T)$, $\overline{Z}^{(q)} = \overline{Z}^{(q)}(\infty)$ и $\eta_{Z^{(q)}}(x)$.

Класс (A) $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$, $\psi_q'(\mu_0) < \infty$ (последнее условие всегда выполнено, если $\psi_q(\mu_0+0) < \infty$).

Класс (B) $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) < 1$.

Класс (C) $\mu_0 = 0$ (условие Крамера [**C**] не выполнено).

В случаях (B), (C) приходится предполагать дополнительно те или иные условия правильного изменения функции $F(x) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x)$ на бесконечности. Например, в случае (C) функция $F(x)$ должна быть правильно меняющейся или более общо — субэкспоненциальной функцией.

Воспроизведем кратко результаты асимптотического анализа в классах (A)–(C), описанные в §§ 6.1, 6.4, 6.6 и касающиеся граничных функционалов $\overline{Z}^{(q)}(T)$, $\overline{Z}^{(q)}$ и $\eta_{Z^{(q)}}(x)$. Как уже отмечалось, каждому из этих классов отвечает свой тип предельных законов.

Класс (A). *Положим* $\alpha_0 = (A^{(q)})'(\mu_0) = q + A'(\mu_0)$. *Тогда при* $q \leqslant 0$, $T > \frac{x}{\alpha_0} + \rho$, *где* $\rho \gg \sqrt{x}$,

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}^{(q)}(T) > x\big) = \mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)\big(1+o(1)\big) = ce^{-\mu_0 x}\big(1+o(1)\big)$$

при $x \to \infty$, $c < 1$ (см. следствие 6.4.1). *Если* $T < \frac{x}{\alpha_0} - \rho$, $\rho \gg \sqrt{x}$, $x \to \infty$, *то*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}^{(q)}(T) > x\big) = \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) \leqslant T\big) \sim \frac{c}{\sqrt{T}}\, e^{-TD(\alpha-q)}, \quad c = \mathrm{const}.$$

Условное распределение момента разорения $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ *при условии* $\overline{Z}^{(q)}>x$ *асимптотически нормально с параметрами* $(\frac{x}{\alpha_0}, \sigma_{\eta_{Z[q]}}\sqrt{x})$, *где* $\sigma_{\eta_{Z[q]}}$ *определено в разделе* 6.4.1 (см. следствие 6.4.2).

Таким образом, если разорение произошло, то это случилось в момент времени, близкий к x/α_0 (с точностью до величины порядка $\sqrt{x}$). В § 6.4 и разделе 6.6.2 получены также весьма полные результаты относительно распределений $\eta_{Z[q]}(x)$ во всем крамеровском спектре уклонений, а также относительно объема образовавшегося после разорения долга (величины $\chi_{Z[q]}(x)$).

Класс (B). Здесь установлены следующие результаты.

(a) *Положим* $F(x) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x)$, $F^I(x) = \int_x^\infty F(t)dt$. *Тогда если* $q \leqslant 0$, $\psi_q := \psi_q(\mu_0) < 1$, *функция* $e^{\mu_0 x}F^I(x)$ *является надстепенной, то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{\mu_0 M F^I(x)}{1-\psi_q}\big(1+o(1)\big), \quad \textit{при} \quad x \to \infty, \tag{6.7.4}$$
$$M = \mathbf{E}^{\mu_0 \overline{Z}^{(q)}}, \quad q = -r < 0.$$

(b) *Если функция* $F(x)e^{\mu_0 x}$ *является субэкспоненциальной или, что то же, функция* $F(x)$ *обладает свойством* $F{*}F(x) \sim 2\psi_q F(x)$ *при* $x \to \infty$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{MF(x)}{1-\psi_q}\big(1+o(1)\big), \quad \textit{при} \quad x \to \infty \tag{6.7.5}$$

(см. теорему 6.1.1 и [45]).

Если в утверждении (a) потребовать дополнительно, чтобы

$$\frac{F(x+v)}{F(x)} \to e^{-\mu_0 v} \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{и любом фиксированном } v,$$

то

$$\mu_0 F^I(x) = \mu_0 \int\limits_0^\infty F(x+v)\,dv \sim \mu_0 F(x) \int\limits_0^\infty e^{-\mu_0 v} dv = F(x)$$

и правые части в (6.7.4) и (6.7.5) совпадают.

Моменты разорения $\eta_{Z^{(q)}}(x)$ на множестве $Z^{(q)} > x$ оказываются при некоторых дополнительных, весьма широких условиях ограниченными по вероятности:

$$\limsup_{x\to\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) > v \,|\, Z^{(q)} > x\big) \to 0 \quad \textit{при} \quad v \to \infty$$

(это верно, например, для независимых или линейно зависимых τ и ζ при $h + q \leqslant 0$; см. теорему 6.1.6).

Это значит, что если разорение произошло, то это случилось «почти сразу» после начала работы ($\eta_{Z^{(q)}}(x)/x \underset{p}{\to} 0$ при $x \to \infty$ и условии $\overline{Z}^{(q)} > x$).

«Промежуточный» между (A) и (B) случай, когда $\mu_0 > 0$, $\psi_q(\mu_0) = 1$, $\psi_q'(\mu_0) = \infty$, изучался в [47]; см. также [6, § 21, п. 5].

Класс (C). *Пусть функция $F^I(x) = \int_x^\infty F(t)dt$ является надстепенной. Тогда, если $a + q = a - r < 0$, то*

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{F^I(x)}{|a+q|a_\tau}\big(1 + o(1)\big) \quad \textit{при } x \to \infty,\\ |a+q|\,a_\tau = |a_\zeta - ra_\tau|.\end{gathered} \tag{6.7.6}$$

Если $F(x) = \mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x) = t^{-\alpha} l(x)$, где $\alpha > 1$, $l(x)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$\mathbf{P}(\eta_{Z^{(q)}}(x) < T) = \big(1 + o(1)\big) a_\tau^{-1} \int_0^T F\big(x - (a+q)t\big)dt, \tag{6.7.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\big(\eta_{Z^{(q)}}(x) > vx \,|\, \overline{Z}^{(q)} > x\big) = \big[1 + |a+q|v\big]^{1-\alpha}$$

(теорема 6.1.7). *Условное время разорения $\eta_{Z^{(q)}}(x)$, деленное на x, сходится не к постоянному значению, как в случаях* (A), (B), *а сходится по распределению к собственной случайной величине θ со степенным распределением.*

В [105] утверждение (6.7.7) распространено на случай, когда $F(x)$ и $F^I(x)$ являются субэкспоненциальными функциями.

Сказанное выше означает, что в случаях (A)–(C) траектории процессов $z(v)$, $v > 0$, предельных при $x \to \infty$ для процессов

$$z_x(v) = \frac{Z^{(q)}(vx)}{x}, \qquad v > 0,$$

имеет при условиях $\overline{Z}^{(q)} > x$, $a + q < 0$ следующий вид

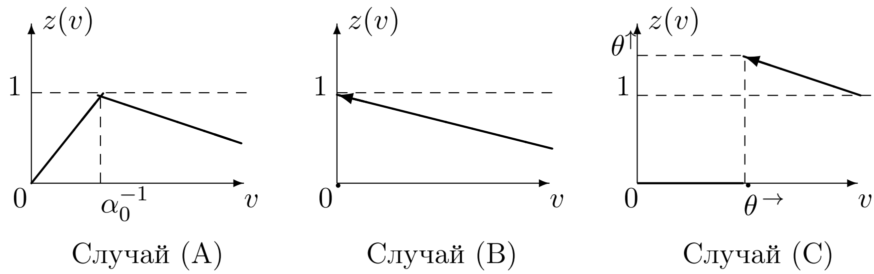

Рис. 1. *Предельные траектории процессов $z(v)$ при условии $\overline{Z}^{(q)} > x$ и некоторых дополнительных условиях в случаях* (B), (C).

Здесь

$$\mathbf{P}(\theta^{\rightarrow} > v) = \bigl(1 + |a+q|v\bigr)^{1-\alpha}, \qquad \mathbf{P}(\theta^{\uparrow} > 1+v) = (1+v)^{-\alpha}, \quad v > 0.$$

Предельное поведение последовательности $\{Z_k\}$ при условии $\overline{Z}_\infty > x$ и $\mathbf{E}\zeta < 0$ изучалось в [98].

Отметим, что в случае (C) точность аппроксимации (6.7.6) по мнению специалистов в условиях реальных приложений не всегда оказывается удовлетворительной. В связи с этим в теореме 7.5.3 в [26] и в [9] найдена значительно более точная асимптотика второго порядка для распределения $\overline{Z}^{(q)}$: *если $F(x)$ на $(0,\infty)$ является правильно меняющейся или субэкспоненциальной функцией, случайная величина $\zeta^{(q)}$ нерешетчата, $a_{\zeta^{(q)}} = \mathbf{E}\zeta^{(q)} < 0$, $b := \mathbf{E}(\zeta^{(q)})^2 < \infty$, то*

$$\mathbf{P}(Z^{(q)} > x) = \frac{F^I(x)}{|a_{\zeta^{(q)}}|} + cF(x)\bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \textit{при} \quad x \to \infty,$$

где

$$c = \frac{b}{2(a_{\zeta^{(q)}})^2} + \frac{\mathbf{E}\overline{Z}^{(q)}}{a_{\zeta^{(q)}}}.$$

Это утверждение сохранится и в арифметическом случае при несколько ином значении c.

В [13], [18, § 2] для $\mathbf{P}(Z^{(q)} > x)$ найдена аппроксимация второго порядка в случае $b = \infty$.

Если $a_{\zeta^{(q)}} < 0$ и мало́, $b < \infty$, то для x, сравнимых с $|a_{\zeta^{(q)}}|^{-1}$, во всех трех классах (A)–(C) вероятность $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)$ будет близка к некоторому собственному значению (так называемые переходные явления):

$$\lim_{a_{\zeta^{(q)}} \to 0} \mathbf{P}\left(\overline{Z}^{(q)} > \frac{v}{|a_{\zeta^{(q)}}|}\right) = e^{-\frac{2v}{b}} \qquad (6.7.8)$$

(см. [103], [62], [6, § 24]; там же см. точную постановку задачи). Если дополнительно $\mathbf{E}|\zeta^{(q)}|^3 < \infty$, то в [17], [18, § 1] для (6.7.8) найдена аппроксимация второго порядка.

Отметим также, что можно рассматривать более общую постановку задачи, когда капитал $x = x(t)$ и снос $q = q(t)$ не являются постоянными, а зависят от времени t (у страховой компании могут быть иные источники доходов и расходов, а интенсивность страхования $r = r(t)$ может меняться со временем). В этом случае мы получим первую граничную задачу о вероятности пересечения траекторией $Z(t)$ границы $x(t) + R(t)$, $R(t) = \int_0^t r(u)du$. Если считать, что эта граница на отрезке $[0, T]$ имеет вид $Tg(t/T)$, где $g(u) > 0$ от x и T не зависит, $g(0) = \alpha = x(0)/T$, то мы получим в случае (A) граничную задачу, изученную в § 6.6 (см. теорему 6.6.1). В случае (C) получим граничную задачу, решение которой описано в теореме 16.4.1 в [26].

Глава 7

Распространение принципа инвариантности на области умеренно больших и малых уклонений

Результаты этой главы (см. §§ 7.2–7.5) являются новыми и для случайных блужданий, как частного случая ОПВ.

§ 7.1 Сильная аппроксимация ОПВ винеровским процессом

Сильной аппроксимацией изучаемой последовательности процессов называют задание траекторий этих процессов и траектории аппроксимирующего («предельного») процесса на одном вероятностном пространстве с исходными процессами таким образом, что удается оценить близость этих процессов с помощью какой-нибудь метрики. Иногда удается найти такое задание, что полученная аппроксимация оказывается весьма точной.

Известное неравенство Комлоша–Ма́йора–Тушнади ([104]) устанавливает сильную аппроксимацию для траекторий случайных блужданий с помощью траектории винеровского процесса. В работе Чёрге, Дехювельса и Хорвата [92] с помощью этой аппроксимации и результатов работы [91] построена аналогичная аппроксимация для траекторий ОПВ в случае, когда τ и ζ независимы.

Основное утверждение о сильной аппроксимации для нормированных процессов восстановления

$$y_T(t) = \frac{Y(tT) - atT}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

при выполнении условия Крамера имеет следующий вид.

Как и в § 2.1 мы будем говорить, что ζ и τ линейно зависимы, если

$$\zeta = h\tau + \omega, \qquad h = \text{const} \neq 0,$$

где τ и ω независимы.

Теорема 7.1.1. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы и удовлетворяют условию Крамера* [**C**]. *Тогда процессы $y_T(t)$ и стандартный винеровский процесс $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, можно так задать на одном вероятностном пространстве, что при некоторых положительных постоянных b, c, λ, λ_1 и всех $y > 0$ для всех достаточно больших T выполняется*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \bigl|y_T(t) - w(t)\bigr| > \frac{b\ln T}{\sqrt{T}} + \frac{y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-\lambda y} + e^{-\lambda_1 T} \qquad (7.1.1)$$

($\lambda_1 = \infty$, *если τ и ζ независимы). Кроме того,*

$$\rho(y_T, w) = O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right) \quad \text{п.н. при} \quad T \to \infty, \qquad (7.1.2)$$

где ρ — равномерная метрика.

Вопрос о том, останется ли это утверждение справедливым для произвольного невырожденного распределения вектора (τ, ζ) при выполнении условия[**C**], остается открытым.

Доказательство. Теорема 7.1.1 для независимых ζ и τ установлена в [92]. Докажем (7.1.1) для линейно зависимых ζ и τ. Положим

$$\Omega_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k, \quad \omega_T(t) := \frac{\Omega_{\eta(tT)} - (a_\omega tT)/a_\tau}{\sigma\sqrt{T}}, \quad t \in [0,1],$$

где ω_k — независимые копии ω. В силу равенства

$$Z_{\eta(t)} = hT_{\eta(t)} + \Omega_{\eta(t)}$$

имеем

$$Z_{\eta(t)} - at = hT_{\eta(t)} + \Omega_{\eta(t)} - at = \Omega_{\eta(t)} - (a-h)t + h\chi(t), \qquad (7.1.3)$$

где $\chi(t) = T_{\eta(t)} - t$,

$$a_\zeta = h a_\tau + a_\omega, \quad h = \frac{a_\zeta - a_\omega}{a_\tau}, \quad a - h = \frac{a_\zeta}{a_\tau} - \frac{a_\zeta - a_\omega}{a_\tau} = \frac{a_\omega}{a_\tau}.$$

Если положить, не ограничивая общности, $a_\tau = 1$, то получим в силу (7.1.3)

$$y_T(t) = \frac{Z_{\eta(tT)} - atT}{\sigma\sqrt{T}} = \omega_T(t) + \frac{h\chi(tT)}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{7.1.4}$$

В силу уже доказанной в [92] части теоремы 7.1.1 (τ и ω независимы) существует винеровский процесс $w(t)$ такой, что

$$\mathbf{P}\left(\rho(\omega_T, w) \geqslant \frac{b\ln T + y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-\lambda y}, \tag{7.1.5}$$

где ρ — равномерная метрика. Далее,

$$\rho(y_T, w) \leqslant \rho(y_T, \omega_T) + \rho(\omega_T, w), \quad \rho(y_T, \omega_T) = h \max_{t\leqslant T} \frac{\chi(t)}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{7.1.6}$$

Поэтому для доказательства (7.1.1) нам в силу (7.1.5) достаточно убедиться, что при некоторых c_1, λ_1, λ^* выполняется

$$\mathbf{P}\left(\rho(y_T, \omega_T) \geqslant \frac{b\ln T + y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant c_1 e^{-\lambda^* y} + e^{-\lambda_1 T}. \tag{7.1.7}$$

Левая часть этого неравенства в силу (7.1.6) не превосходит

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(\eta(T) > 2T\big) + \mathbf{P}\big(\max_{k\leqslant 2T} \tau_k > \sigma(b\ln T + y)/h\big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(T_{[2T]} < T) + 2T\mathbf{P}\big(\tau > \sigma(b\ln T + y)/h\big), \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

где при некоторых $\lambda_1 > 0$, $\mu > 0$

$$\mathbf{P}(T_{[2T]} < T) \leqslant e^{-\lambda_1 T}, \quad \mathbf{P}\left(\tau > \frac{\sigma(b\ln T + y)}{h}\right) \leqslant me^{-\mu\sigma(b\ln T + y)/h},$$
$$m = \mathbf{E}e^{\mu\tau} < \infty.$$

Если выбрать b так, что $\mu\sigma b/h > 1$, то второе слагаемое в правой части (7.1.8) при достаточно больших T не будет превосходить $e^{-y\mu\sigma/h}$. Соотношение (7.1.7), а вместе с ним и утверждение (7.1.1) доказаны.

Утверждение (7.1.2) вытекает из (7.1.4), утверждения (7.1.2) для независимых τ и ζ и того, что

$$\sup_{t\leqslant T} \frac{\chi(t)}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Теорема 7.1.1 доказана.

Отметим, что утверждение (7.1.2) содержится в [115].

Для нормированных процессов

$$z_T(t) = \frac{Z(tT) - atT}{\sigma\sqrt{T}}$$

справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 7.1.2. *При выполнении условий теоремы* 7.1.1 *найдутся положительные постоянные* b, c, λ, λ_1 *такие, что при всех* y *и достаточно больших* T

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \bigl|z_T(t) - w(t)\bigr| > \frac{b\ln T}{\sqrt{T}} + \frac{y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-\lambda y} + e^{-\lambda_1 T} \qquad (7.1.9)$$

(постоянные b, c, λ могут быть иными, чем в теореме 7.1.1).

Кроме того,

$$\rho(z_T, w) = O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right) \quad \text{п.н. при } T \to \infty.$$

Доказательство. Так как

$$\rho(z_T, w) \leqslant \rho(z_T, y_T) + \rho(y_T, w), \qquad (7.1.10)$$

то в силу теоремы 7.1.1 нам достаточно убедиться, что при некоторых b, c, λ, λ_1 и всех достаточно больших T

$$\mathbf{P}\left(\rho(z_T, y_T) > \frac{b\ln T + y}{\sqrt{T}}\right) \leqslant ce^{-y} + e^{-\lambda_1 T}. \qquad (7.1.11)$$

Из определения процессов Y и Z следует, что

$$\rho(z_T, y_T) \leqslant \frac{\max_{t\leqslant T} |\zeta_{\eta(t)}|}{\sigma\sqrt{T}}. \qquad (7.1.12)$$

Поэтому доказательство (7.1.9) происходит так же, как в (7.1.8), где τ_k под знаком max надо заменить на $|\zeta_k|$. Теорема 7.1.2 доказана.

Если условие Крамера не выполнено, то сильная аппроксимация для ОПВ имеет следующий вид.

Теорема 7.1.3. *Пусть* τ *и* ζ *независимы или линейно зависимы,* $\mathbf{E}\tau^r < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta|^r < \infty$ *при некотором* $r > 2$. *Тогда процессы* y_T *и* w

можно так построить на одном вероятностном пространстве, что справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|y_T(t)-w(t)\big|>\frac{y}{\sqrt{T}}\Big)\leqslant\delta_T T y^{-r}\qquad(7.1.13)$$

при всех y *из интервала* $(c_1T^{1/r}, c_2\sqrt{T\ln T})$, $\delta_T=o(1)$ *при* $T\to\infty$ *и некоторых положительных постоянных* c_1, c_2.

Кроме того,

$$\rho(y_T,w)=o(T^{1/r})\quad \textit{п.н. при } T\to\infty.$$

Доказательство теоремы 7.1.3. Для независимых ζ и τ теорема 7.1.3 доказана в [92]. Распространение ее утверждения на случай линейно зависимых ζ и τ происходит аналогично предыдущему (см. доказательство теоремы 7.1.1) с использованием представления

$$Y(t)-at=\Omega_{\eta(t)}-\frac{a_\omega t}{a_\tau}+h\chi(t)$$

и оценок для $\chi(t)$. Так как τ и ω независимы, то нам достаточно убедиться, что

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\leqslant\eta(T)}\chi(t)>y\Big)=o(Ty^{-r}).\qquad(7.1.14)$$

Действительно, в силу (7.1.8) при $a_\tau=1$

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t\leqslant\eta(T)}\chi(t)>y\Big)\leqslant\mathbf{P}(T_{[2T]}<T)+\mathbf{P}\Big(\max_{j\leqslant 2T}\tau_j>y\Big)\leqslant e^{-\lambda_1T}+2To(y^{-r}).$$

Это доказывает (7.1.14). Так как, кроме того, справедливо (7.1.6), то теорема 7.1.3 доказана.

Для процессов z_T из теоремы 7.1.3 вытекает

Теорема 7.1.4. *Найдутся постоянная* $\lambda_1>0$ *и* $\delta_T=o(1)$ *при* $T\to\infty$ *такие, что при тех же* y*, что в теореме* 7.1.3

$$\mathbf{P}\left(\rho(z_T,w)>\frac{y}{\sqrt{T}}\right)\leqslant e^{-\lambda_1T}+\delta_T T y^{-r}.$$

Доказательство. Схема доказательства здесь та же, что в теореме 7.1.2. Положим, не ограничивая общности, $a_\tau=1$ и воспользуемся неравенствами (7.1.10), (7.1.12) и теоремой 7.1.3. Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\rho(z_T,w)>\frac{y}{\sqrt{T}}\Big)\leqslant e^{-\lambda_1T}+\mathbf{P}\Big(\max_{k\leqslant 2T}|\zeta_k|>\sigma y\Big),$$

где второе слагаемое в правой части в силу неравенства Чебышева не превосходит

$$2To(y^{-r}).$$

Теорема 7.1.4 доказана.

§ 7.2 Распространение принципа инвариантности на область умеренно больших уклонений

Принцип инвариантности для ОПВ в области нормальных уклонений был установлен в [91, 114]; см. также § 1.5.

Пусть выполнено условие [**C**]. В разделе 4.8.3 было показано, что если множество $B \subset \mathfrak{B}(\mathbb{D}, \rho)$ (ρ равномерная метрика) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_0\big((B)\big) = \mathrm{I}_0\big([B]\big) > 0, \\ &\mathfrak{W}\big((vB)\big) = \mathfrak{W}\big([vB]\big) > 0 \quad \text{при любом фиксированном } v > 0, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{W}(\cdot)$ есть мера, соответствующая винеровскому процессу $w(t)$, $t \in [0,1]$, то при $T \to \infty$ и всех

$$x \geqslant x_0 > 0, \qquad x = o\big(\sqrt{T}\big) \tag{7.2.1}$$

имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\ln \mathbf{P}(y_T \in xB) \sim \ln \mathfrak{W}(xB) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Это есть распространение «грубого» (логарифмического) принципа инвариантности на область уклонений (7.2.1), включающую в себя нормальные и умеренно большие уклонения $x \to \infty$, $x = o\big(\sqrt{T}\big)$ при $T \to \infty$.

Найдем теперь условия на множество B и уклонения x, при которых имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \sim \mathbf{P}(w \in xB) = \mathfrak{W}(xB) \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{7.2.2}$$

для *точной*, а не «грубой» асимптотики; и такая же эквивалентность для процесса $z_T(t)$.

Теорема 7.2.1. *Пусть ζ и τ независимы или линейно зависимы,*

$$0 < x_0 \leqslant x = o(T^{1/6}) \quad \textit{при} \quad T \to \infty$$

и множество $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}, \rho)$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{I}_0(B) := \inf_{g \in B} \int_0^1 (g'(t))^2 dt < \infty,$$

$$[\mathbf{B}_\infty] \ \ \mathfrak{W}\big((x\partial B)_\varepsilon\big) = o\big(\mathfrak{W}(xB)\big) \ \ \textit{при } \varepsilon = o(1/x) \textit{ и } T \to \infty. \tag{7.2.3}$$

Тогда выполнено (7.2.2).

Такое же утверждение справедливо для процессов z_T.

Доказательство. Если $x > 0$ фиксировано, то условие $[\mathbf{B}_\infty]$ означает, что при $\varepsilon \to 0$
$$\mathfrak{W}\big((x\partial B)_\varepsilon\big) = o(1).$$
Это эквивалентно тому, что $\mathfrak{W}(x\partial B) = 0$ и (7.2.2) вытекает из принципа инвариантности для ОПВ.

Пусть теперь $x \to \infty$ при $T \to \infty$. Из теоремы 7.1.1 видно, что для любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T \gg \frac{\ln T}{\sqrt{T}}$ при $T \to \infty$ для некоторого $\lambda > 0$ выполняется
$$\mathbf{P}\big(\rho(y_T, w) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} \tag{7.2.4}$$
(надо в (7.1.1) положить $\frac{y}{\sqrt{T}} = \varepsilon$ при $y \gg \ln T$ и немного уменьшить λ).

Это позволяет получить *оценку сверху* для $\mathbf{P}(y_T \in xB)$. Действительно, в силу (7.2.4) и условия $[\mathbf{B}_\infty]$ имеем
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant \mathbf{P}\big(y_T \in xB,\ \rho(y_T, w) < \varepsilon\big) + \mathbf{P}\big(\rho(y_T, w) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\big(w \in (xB)_\varepsilon\big) + e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big) + e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} \quad \text{при} \quad T \to \infty.\end{aligned} \tag{7.2.5}$$
Положим
$$x = \delta T^{1/6}, \quad \varepsilon = \delta/x \quad \text{при} \quad \delta = \delta_T \to 0, \quad T \to \infty$$
(так чтобы выполнялось $\varepsilon \gg \frac{\ln T}{\sqrt{T}}$). Тогда в силу (7.2.3) и принципа умеренно больших уклонений для процесса w при $c = \frac{I_0(B)}{2} < \infty$ получаем
$$\ln \mathbf{P}(w \in xB) \sim -\frac{x^2}{2}\, I_0(B) = -c\delta^2 T^{1/3}. \tag{7.2.6}$$
С другой стороны, в (7.2.5)
$$\lambda\varepsilon\sqrt{T} = \frac{\lambda\delta\sqrt{T}}{x} = \lambda T^{1/3} \gg \delta^2 T^{1/3} \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{7.2.7}$$
Поэтому в силу (7.2.5), (7.2.6)
$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big). \tag{7.2.8}$$

Получим теперь *оценку снизу*. Положим $(B)_{-\varepsilon} = B \setminus (\partial B)_\varepsilon$. Тогда при условии $[\mathbf{B}_\infty]$
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(y_T \in xB) \geqslant \mathbf{P}\big(y_T \in xB,\ \rho(y_T, w) < \varepsilon\big) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}\big(w \in (xB)_{-\varepsilon}\big) - \mathbf{P}\big(\rho(y_T, w) \geqslant \varepsilon\big) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big) - e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}}.\end{aligned} \tag{7.2.9}$$

Отсюда аналогично предыдущему (см. (7.2.6), (7.2.7)) получаем

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \geqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big).$$

Вместе с (7.2.8) это приводит к (7.2.2).

Для процессов z_T следует повторить проведенные рассуждения с использованием теоремы 7.1.2. Теорема 7.2.1 доказана.

Вопрос о том, можно ли в утверждении теоремы 7.1.3 условие $[\mathbf{C}]$ ослабить до условия $[\mathbf{C}_V]$, остается открытым (для ответа на него надо установить аналог теоремы 7.1.1 при условии $[\mathbf{C}_V]$.

Если $\tau \equiv 1$, то соотношение (7.2.2) расширяет принцип инвариантности для случайных блужданий $\{Z_k\}_{k=1}^n$ на область умеренно больших уклонений $x \to \infty$, $x = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$. Верхняя граница $o(n^{1/6})$ является, вообще говоря, неулучшаемой. На это указывает пример распределения $z_n(1) = \frac{Z_n - a_\zeta n}{\sigma_\zeta \sqrt{n}}$ в случае, когда $m_3 := \mathbf{E}(\zeta - a_\zeta)^3 \neq 0$. В этом случае

$$\mathbf{P}\big(z_n(1) > n^{1/6}\big) \sim \big[1 - \Phi(n^{1/6})\big] \exp\left\{-\frac{m_3}{6\sigma_\zeta^4}\right\} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

(см. формулы (9.1.3), (9.3.7), (9.3.12), (9.3.13) в [10]).

§ 7.3 Первая граничная задача в области умеренно больших уклонений

Напомним, что в первой граничной задаче для функции $g(t) \in \mathbb{D}(0,1)$, $g(t) > 0$, изучается асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(y_T \in xB_g)$, $\mathbf{P}(z_T \in xB_g)$ при $x \to \infty$, где

$$xB_g = \Big\{f \in \mathbb{D}(0,1) : \sup_{t \leqslant 1}\big(f(t) - xg(t)\big) > 0\Big\}.$$

В гл. 6 асимптотика вероятностей такого рода исследовалась в области «собственно больших» уклонений, когда $x \sim c\sqrt{T}$ при $T \to \infty$. Теперь мы будем рассматривать умеренно большие уклонения $x = o(T^{1/6})$.

Для использования в этих целях теоремы 7.2.1 нам надо убедиться, что множества xB_g удовлетворяют условию $[\mathbf{B}_\infty]$. Как и в § 4.6, нам понадобятся линии уровня $\mathfrak{l}_x(t)$, но теперь лишь для винеровского процесса:

$$\mathfrak{l}_x(t) = x\sqrt{t}, \qquad t > 0$$

($\ln \mathbf{P}\big(w(t) > \mathfrak{l}_x(t)\big) \sim -\frac{(\mathfrak{l}_x(t))^2}{2t} = -\frac{x^2}{2}$ от t не зависит). Пусть v_g — значение v, при котором функции $v\sqrt{t}$ при возрастании v впервые касаются кривой $g(t)$:

$$v_g := \sup\Big\{v : \sup_{t\leqslant 1}\big(g(t) - v\sqrt{t}\,\big) > 0\Big\}.$$

Теорема 7.3.1. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, $0 < x_0 < x = o(T^{1/6})$ при $T \to \infty$, и выполнено хотя бы одно из следующих (взаимосвязанных) условий:*

(a). *Функция $g(t)$ касается кривой $v_g\sqrt{t}$ в единственной точке, лежащей внутри интервала $(0,1)$. В Δ-окрестности $(t_g)_\Delta$ точки t_g касания этих кривых функция $g(t)$ при достаточно малом Δ удовлетворяет условию Липшица. При этом $g(t) > v_g\sqrt{t} + \delta$, $\delta = \delta(\Delta) > 0$ для $t \notin (t_g)_\Delta$ при достаточно малом Δ.*

(b).

$$\mathbf{P}(w \in xB_g) \sim V(x)\mathrm{e}^{-\frac{x_g^2}{2}} \quad \textit{при} \quad x_g = v_g x, \quad x \to \infty, \tag{7.3.1}$$

где $V(x)$ — правильно меняющаяся функция (например, степенная).

Тогда множество xB_g удовлетворяет условию $[\mathbf{B}_\infty]$ теоремы 7.2.1 *и*

$$\mathbf{P}(y_T \in xB_g) \sim \mathbf{P}(w \in xB_g) \sim \mathbf{P}(z_T \in xB_g) \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Замечание 7.3.1. Из доказательства теоремы будет видно, что условие (a) можно расширить на случай, когда точек касания несколько, а интервал $(0,1)$ можно разбить на конечное число интервалов или полуинтервалов, на каждом из которых имеется одна точка касания и на нем выполнено условие (a).

Достаточным для выполнения условия (b) является существование второй производной $g''(t)$ в окрестности точки касания. Действительно, воспользуемся тем, что задача об асимптотике $\mathbf{P}(w \in xB_g)$ может быть «редуцирована» к такой же задаче для случайного блуждания $w_n(t) = w\left[\frac{[nt]}{n}\right]$ с нормально распределенными скачками. Именно,

$$\mathbf{P}\big(\rho(w, w_n) > \varepsilon\big) \leqslant 2n\mathbf{P}\big(w(1) > \varepsilon\sqrt{n}\big) \leqslant 2ne^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}. \tag{7.3.2}$$

Далее, из результатов работы [3] следует, что при $x_g = v_g x$, $x = o(n)$

$$\mathbf{P}(w_n \in xB_g) \sim V(x)e^{\frac{x_g^2}{2}} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{7.3.3}$$

где функция $V(x)$ является степенной, показатель степени зависит от числа одинаковых производных функций $g(t)$ и $v_g\sqrt{t}$ в точке t_g. Поэтому, если ε и n выбрать так, чтобы выполнялось

$$\varepsilon = o\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad \varepsilon^2 n \gg x^2 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{7.3.4}$$

то из (7.3.3), (7.3.2) получаем

$$\mathbf{P}(w \in xB_g) \leqslant \mathbf{P}\big(w \in xB_g,\ \rho(w, w_n) < \varepsilon\big) + r_{x,n} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\big(w_n \in (xB_g)_\varepsilon\big) + r_{x,n},$$

где

$$r_{x,n} \ll V(x)e^{-\frac{x_g^2}{2}}.$$

Далее, так как $xg(t) - \varepsilon \geqslant (x - \varepsilon/\underline{g})g(t)$, где $\underline{g} = \min\limits_{t\in[0,1]} g(t)$, то для $\varepsilon = o(1/x)$ из (7.3.3) находим

$$\mathbf{P}\big(w_n \in (xB_g)_\varepsilon\big) \leqslant V\left(x - \frac{\varepsilon}{\underline{g}}\right) \exp\left\{-\frac{(x_g - \varepsilon/\underline{g})^2}{2}\right\} \sim V(x)e^{-\frac{x_g^2}{2}}$$

при $x \to \infty$. Аналогично устанавливается оценка снизу. Это доказывает (7.3.1).

Доказательство теоремы 7.3.1. Пусть выполнено условие (a). Обозначим

$$\eta_{xg} = \inf\big\{t :\ w(t) > xg(t)\big\}$$

и покажем, что

$$\mathbf{P}\big(\eta_{xg} \notin (t_g)_\Delta,\ \eta_{xg} \leqslant 1\big) = o\Big(\mathbf{P}\big(\eta_{xg} \in (t_g)_\Delta\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{7.3.5}$$

Положим

$$l(t) = v_g\sqrt{t} + \delta, \qquad A = [0,1] \setminus (t_g)_\Delta.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\big(\eta_{xg} \notin (t_g)_\Delta,\ \eta_{xg} \leqslant 1\big) = \mathbf{P}(\eta_{xg} \in A) \leqslant \mathbf{P}(\eta_{xl} \in A) \leqslant \mathbf{P}(\eta_{xl} \leqslant 1).$$

В силу ПБУ для процессов с независимыми приращениями (см. [12, § 5.3])

$$\ln \mathbf{P}(\eta_{xl} \leqslant 1) \sim -\frac{x^2(v_g + \delta)^2}{2},$$
$$\ln \mathbf{P}(\eta_{xg} \leqslant 1) \sim -\frac{x^2 v_g^2}{2} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Это доказывает (7.3.5). Докажем теперь выполнение условия $[\mathbf{B}_\infty]$. Имеем

$$\mathbf{P}\big(w \in (xB_g)_{-\varepsilon}\big) = \\ = \int\limits_{t_g-\Delta}^{t_g+\Delta} \mathbf{P}(\eta_{xg} \in dt)\mathbf{P}\Big(\sup_{u\leqslant 1-t} \big(w(t+u) - xg(t+u)\big) > \varepsilon\Big) + r_x,$$

$$r_x \leqslant \mathbf{P}(\eta_{xg} \in A). \tag{7.3.6}$$

Убедимся, что второй множитель под знаком интеграла в (7.3.6) сходится к 1 при $x \to \infty$. Для этого нам понадобится следующее утверждение, которое мы докажем чуть позже.

Лемма 7.3.1. *При* $b > 0$

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{u \geqslant 0} \big(w(u) - bu\big) > \varepsilon\Big) = e^{-2b\varepsilon}.$$

При $t \in (t_g)_\Delta$, $|u| < \Delta$ и достаточно малом Δ будет выполняться условие Липшица

$$\big|g(t+u) - g(t)\big| \leqslant qu, \qquad q < \infty.$$

Кроме того, при $\eta_{xg} \in dt$ выполняется $w(t+u) \underset{p}{=} xg(t) + w(u)$. Поэтому в силу леммы 7.3.1 для выбранных t и u

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\sup_{u \leqslant 1-t} \big(w(t+u) - xg(t+u)\big) > \varepsilon\Big) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{u \leqslant \Delta} \big\{w(u) - x\big[g(t+u) - g(t)\big]\big\} > \varepsilon\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{u \leqslant \Delta} \big(w(u) - xqu\big) > \varepsilon\Big) = \\ = e^{-2\varepsilon xq} - \mathbf{P}\Big(\sup_{u \geqslant \Delta} \big(w(u) - xqu\big) > \varepsilon\Big). \qquad (7.3.7)\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon = o(1/x)$, то первое слагаемое в правой части (7.3.7) сходится к 1 при $x \to \infty$. Второе слагаемое, очевидно, сходится к 0 при любом фиксированном $\Delta > 0$ и $x \to \infty$ (например, по ПБУ).

Таким образом, в силу (7.3.5), (7.3.6) мы получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(w \in (xB_g)_{-\varepsilon}\big) &= \mathbf{P}\big(\eta_{xg} \in (t_g)_\Delta\big)\big(1 + o(1)\big) = \\ &= \mathbf{P}(w \in xB_g)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \\ \mathbf{P}\big(w \in xB_g\big) &= \mathbf{P}\big(w \in (xB_g)_\varepsilon\big)\big(1 + o(1)\big).\end{aligned}$$

Это доказывает выполнение условия $[\mathbf{B}_\infty]$ и теорему 7.3.1 при выполнении условия (a).

Утверждение теоремы при условии (b) очевидно, так как

$$\mathbf{P}\big(w \in (xB_g)_\varepsilon\big) \leqslant V(x - \varepsilon\overline{g})e^{-\frac{(x-\varepsilon\overline{g})^2 v_g^2}{2}}, \quad \text{где} \quad \overline{g} = \max_{t \in [0,1]} g(t),$$

$$\mathbf{P}(w \in xB_g) \sim V(x)e^{-\frac{x_g^2}{2}} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Отсюда следует, что выполнено условие $[\mathbf{B}_\infty]$, так как

$$\mathbf{P}\big(w \in (\partial xB_g)_\varepsilon\big) = o\big(\mathbf{P}(w \in xB_g)\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon = o(1/x), \quad x \to \infty.$$

Теорема 7.3.1 доказана.

Нам осталось выполнить

Доказательство леммы 7.3.1. Так как процесс $w(t)-bu$ непрерывен сверху, то при $b>0$

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\big(w(t)-bu\big)>\varepsilon\Big)=e^{-\lambda(b)\varepsilon}$$

при некотором $\lambda(b)>0$. Преобразование Лапласа над этим распределением равно

$$\lambda(b)\int\limits_0^\infty e^{\lambda v-\lambda(b)v}dv=\frac{\lambda(b)}{\lambda(b)-\lambda}.$$

Согласно факторизационным тождествам, установленным в [64], полюс $\lambda=\lambda(b)$ этого преобразования совпадает с правым полюсом $\lambda=2b$ функции $\frac{1}{\psi(\lambda)-1}$, где

$$\psi(\lambda)=\mathbf{E}e^{\lambda(w(1)-b)}=\exp\bigg\{\frac{\lambda^2}{2}-b\lambda\bigg\}.$$

Поэтому $\lambda(b)=2b$. Лемма 7.3.1 доказана.

§ 7.4 Распространение принципа инвариантности для липшицевых функционалов на область умеренно больших уклонений

Рассмотрим класс $\mathcal{F}$ функционалов $F(f)$, $f\in\mathbb{D}(0,1)$, измеримых относительно $\mathfrak{B}(\mathbb{D},\rho)$ и удовлетворяющих следующим условиям

(a) $\big|F(f)-F(g)\big|<c\rho(f,g)$ (условие Липшица);

(b) $P(x):=\mathbf{P}\big(F(w)>x\big)\geqslant e^{-cx^2}$ при некотором $c>0$, $x\to\infty$;

(c) $P\big(x+o(1/x)\big)\sim P(x)$ при $x\to\infty$.

Классу $\mathcal{F}$ принадлежат, например, функционалы

$$\max_{t\in[0,1]}L\big(f(t)\big),\quad \max_{t\in[0,1]}\frac{f(t)}{\max(1,L(f(t)))},\quad \int\limits_0^1 L\big(f(t)\big)dG(t)\ \text{ и др.,}\qquad (7.4.1)$$

где G — функция ограниченной вариации, функция L удовлетворяет условию Липшица, $L(v)\sim bv$, $b>0$ при $v\to\infty$.

Теорема 7.4.1. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, выполнено условие* [**C**], $F \in \mathcal{F}$. *Тогда при* $x \geqslant x_0 > 0$, $x = o(T^{1/6})$, $T \to \infty$
$$\mathbf{P}\big(F(y_T) > x\big) \sim \mathbf{P}\big(F(w) > x\big). \tag{7.4.2}$$

Доказательство. *Оценка сверху.* Согласно теореме 7.1.1
$$\mathbf{P}\big(F(y_T) > x\big) \leqslant \mathbf{P}\big(F(y_T) > x,\ \rho(y_T, w) < \varepsilon\big) + \mathbf{P}\big(\rho(y_T, w) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\big(F(w) > x - c\varepsilon\big) + O(e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}}). \tag{7.4.3}$$

Здесь в силу условий (b), (c) первое слагаемое в правой части (7.4.3) асимптотически эквивалентно
$$P(x) \geqslant e^{-cx^2}.$$

С другой стороны, для выбранной соответствующим образом (см. доказательство теоремы 7.2.1) последовательности $\varepsilon = o(T^{1/6})$, $x \gg \frac{\ln T}{T}$, выполняется
$$e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} \ll e^{-cx^2}. \tag{7.4.4}$$

Отсюда следует, что
$$\mathbf{P}\big(F(y_T) > x\big) \leqslant P(x)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Оценка снизу. Аналогичным образом находим
$$\mathbf{P}\big(F(y_T) > x\big) \geqslant \mathbf{P}\big(F(y_T) > x,\ \rho(y_T, w) < \varepsilon\big) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}\big(F(y_T) > x + c\varepsilon\big) + O(e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}}).$$

Повторяя приведенные выше рассуждения и пользуясь (7.4.4), получим (7.4.2). Теорема 7.4.1 доказана.

Если в (7.4.1) функция $L(v)$ растет медленнее, чем bv при $v \to \infty$, то порядок малости ε должен быть изменен, а вместе с ним и область допустимых уклонений x.

§ 7.5 Распространение принципа инвариантности на область умеренно малых уклонений

Рассмотрим теперь задачу об асимптотике вероятностей *малых* уклонений, т.е. вероятностей
$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

В этом направлении пока отсутствуют общие результаты типа ПБУ. Известны лишь отдельные результаты, которые показывают, что изучаемая асимптотика может быть различной в зависимости от вида множеств B. Имея в виду прежде всего граничные задачи второго типа, мы выделим здесь два типа множеств.

I. Для первого типа множеств

$$\ln \mathbf{P}(w \in xB) > -\frac{c}{x^2} \quad \text{при некотором } c > 0 \quad \text{и } x \to 0. \tag{7.5.1}$$

Как показано в [50], [51], к этому типу относятся множества B в граничных задачах, имеющие вид

$$B = \big\{ f \in \mathbb{D}(0,1) : \, g_1(t) < f(t) < g_1(t) \big\}, \qquad t \in [0,1],$$

где $g_i \in \mathbb{C}(0,1)$, $g_2(0) < 0 < g_1(0)$. В этом случае в (7.5.1)

$$c = \frac{\pi^2}{2} \int\limits_0^1 \big(g_1(t) - g_2(t)\big)^{-2}.$$

II. Второй тип множеств описывает «односторонные малые» уклонения, к ним относятся «односторонние» множества в граничных задачах, например, множества

$$B = \Big\{ f \in \mathbb{D}[0,1) : \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) - g(t)\big) < 0 \Big\},$$
$$g \in \mathbb{C}(0,1), \quad g(t) > 0 \text{ при } t \leqslant t_0 > 0$$

(здесь присутствуют ограничения только на положительные значения $f(t)$). Для них при $x < x_0 = \text{const}$

$$\mathbf{P}(w \in xB) > cx, \qquad c = \text{const}. \tag{7.5.2}$$

Например, для $B = \Big\{ f : \sup\limits_{t\in[0,1]} f(t) < 1 \Big\}$ имеем

$$\mathbf{P}(w \in xB) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{7.5.3}$$

7.5.1 Распространение принципа инвариантности для множеств первого типа

Теорема 7.5.1. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, выполнено условие* $[\mathbf{C}]$, *соотношение* (7.5.1) *и при некотором* $x_0 > 0$

$$x_0 > x \gg T^{-1/6} \quad \textit{при} \quad T \to \infty.$$

Тогда, если множество B удовлетворяет условию

$$[\mathbf{B}_0] \qquad \mathfrak{W}\big((x\partial B)_\varepsilon\big) = o\big(\mathfrak{W}(xB)\big) \quad \textit{при} \quad \frac{\varepsilon}{x} \to 0, \tag{7.5.4}$$

то

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \sim \mathfrak{W}(xB) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{7.5.5}$$

Такое же утверждение справедливо для процессов z_T.

Нетрудно заметить, что утверждение теоремы 7.5.1 обладает некоторой «обратной симметрией» по отношению к теореме 7.2.1 ($T^{1/6}$ заменено на $T^{-1/6}$, $\varepsilon = o(1/x)$ заменено на $\varepsilon = o(x)$. Кроме того, асимптотика e^{-cx^2} в (7.3.1) заменяется на асимптотику $e^{-cx^{-2}}$ в (7.5.1).

Доказательство теоремы 7.5.1. Если x фиксировано, то требуемое утверждение доказано в теореме 7.2.1. Пусть $x \to 0$.

I. *Оценка сверху.* При $x \to 0$, $\varepsilon \gg \frac{\ln T}{\sqrt{T}}$ выполнено соотношение (7.2.5), в котором предполагается теперь, что $\varepsilon = o(x)$ (для использования условия $[\mathbf{B}_0]$). Положим

$$x = NT^{-1/6}, \qquad N \to \infty.$$

Тогда в соотношении (7.2.5) в силу (7.5.1) выполняется

$$\mathbf{P}(w \in xB) > \exp\{-cx^{-2}\} = \exp\left\{-\frac{cT^{1/3}}{N^2}\right\}. \tag{7.5.6}$$

С другой стороны, при $\varepsilon = T^{-1/6} = o(x)$ в силу (7.5.6)

$$e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} = e^{-\lambda T^{1/3}} \ll \mathbf{P}(w \in xB) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{7.5.7}$$

Это означает в силу (7.2.5), что

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{7.5.8}$$

Оценка снизу, как и оценка сверху, аналогична оценке в теореме 7.2.1. По условию $[\mathbf{B}_0]$ выполнено (7.2.9) при $\varepsilon = o(x)$. Из (7.2.9) в силу (7.5.6), (7.5.7) получаем

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \geqslant \mathbf{P}(w \in xB)\big(1 + o(1)\big).$$

Для перенесения утверждения теоремы на процессы z_T следует воспользоваться теоремой 7.1.2. Теорема 7.5.1 доказана.

7.5.2 Распространение принципа инвариантности на область малых уклонений для множеств второго типа

Теорема 7.5.2. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, а множество B второго типа* (см. (7.5.2)) *удовлетворяет условию* $[\mathbf{B}_0]$. *Тогда*

I. *Если выполнено условие Крамера* $[\mathbf{C}]$, *то для $x \leqslant x_0 > 0$, $x \gg \frac{\ln T}{\sqrt{T}}$ при $T \to \infty$ выполняется*

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \sim \mathfrak{W}(xB). \tag{7.5.9}$$

II. *Если при некотором $r > 2$*

$$\mathbf{E}\tau^r < \infty, \qquad \mathbf{E}|\zeta|^r < \infty, \tag{7.5.10}$$

то существует последовательность $\gamma = \gamma_T \to 0$ при $T \to \infty$ такая, что при

$$x_0 \geqslant x > \gamma T^{\frac{2-r}{2(r+1)}}$$

выполнено соотношение (7.5.9).

Утверждения I, II *справедливы и для процессов z_T.*

Например, при $r = 3$ и $x_0 \geqslant x \geqslant T^{-1/8}$ соотношение (7.5.9) всегда выполнено. При $r = 4$ оно выполнено при $x \geqslant T^{-1/5}$ и т.д.

Доказательство. I. *Оценка сверху* при выполнении условия $[\mathbf{C}]$. Положим

$$x \leqslant x_0, \qquad x = \frac{N\ln T}{\sqrt{T}}, \quad N \to \infty \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Тогда при

$$\varepsilon = \sqrt{N}\,\frac{\ln T}{\sqrt{T}} = o(x)$$

в силу (7.2.5) имеем

$$\mathbf{P}(w \in xB) > cx, \tag{7.5.11}$$

$$e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{T}} = e^{-\lambda\sqrt{N}\ln T} = T^{-\lambda\sqrt{N}} \ll \frac{N\ln T}{\sqrt{T}} = x. \tag{7.5.12}$$

Поэтому справедливо (7.5.8).

Оценка снизу вытекает из (7.2.9) и (7.5.11), (7.5.12). Утверждение (7.5.9) доказано.

II. *Оценка сверху* при выполнении (7.5.10). Воспользуемся теоремой 7.1.3 и положим в (7.1.13) $\varepsilon = \frac{y}{\sqrt{T}}$. Тогда

$$\mathbf{P}\bigl(\rho(y_T, w) > \varepsilon\bigr) \leqslant \delta_T T^{1-r/2}\varepsilon^{-r} \tag{7.5.13}$$

при

$$\varepsilon \in (c_1 T^{\frac{2-r}{2r}}, c_2\sqrt{\ln T}). \tag{7.5.14}$$

Далее, аналогично (7.2.9) имеем в силу условия $[\mathbf{B}_0]$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant \mathbf{P}\bigl(y_T \in xB,\ \rho(y_T, w) < \varepsilon\bigr) + \mathbf{P}\bigl(\rho(y_T, w) \geqslant \varepsilon\bigr) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\bigl(w \in (xB)_\varepsilon\bigr) + \delta_T T^{1-r/2}\varepsilon^{-r} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(w \in xB)\bigl(1 + o(1)\bigr) + \delta_T T^{1-r/2}\varepsilon^{-r}.\end{aligned} \tag{7.5.15}$$

Положим

$$\varepsilon = \delta_T^{\frac{1}{2r}} x = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{7.5.16}$$

Тогда правая часть в (7.5.13) при

$$x_0 \geqslant x \geqslant \gamma T^{\frac{2-r}{2(r+1)}}, \qquad \gamma = \delta_T^{\frac{1}{2(r+2)}} \tag{7.5.17}$$

равна

$$\sqrt{\delta_T} T^{1-r/2} x^{-r} \leqslant \sqrt{\delta_T}\gamma^{-r} T^{\frac{2-r}{2(r+1)}} \ll x \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{7.5.18}$$

и в силу (7.5.15)

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \leqslant \mathbf{P}(w \in xB)\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Очевидно, что выбранное значение x не противоречит (7.5.16) и (7.5.14).

Оценка *снизу* при выполнении (7.5.10). Аналогично (7.2.9) имеем

$$\mathbf{P}(y_T \in xB) \geqslant \mathbf{P}(w \in xB)\bigl(1 + o(1)\bigr) - \delta_T T^{1-r/2}\varepsilon^{-r}. \tag{7.5.19}$$

Требуемая оценка снизу при выбранных выше значениях ε и x (см. (7.5.16), (7.5.17)) вытекает из (7.5.19) и (7.5.18).

Для перенесения утверждений на процесс z_T следует воспользоваться теоремами 7.1.2, 7.1.4. Теорема 7.5.2 доказана.

7.5.3 Вторая граничная задача в области малых уклонений

Во второй граничной задаче *с двумя границами* в области малых уклонений для процесса y_T изучается асимптотика $\mathbf{P}(y_T \in xB_{g_1 g_2})$, где

$$xB_{g_1 g_2} = \bigl\{f \in \mathbb{D}(0,1) : xg_1(t) < f(t) < xg_2(t) \ \textit{при всех}\ t \in [0,1]\bigr\}$$

при $x \to 0$. Положим

$$g(t) = g_2(t) - g_1(t).$$

Теорема 7.5.3. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, функции ограниченной вариации $g_2(t) > g_1(t)$ на $[0,1]$ удовлетворяют условиям*

1). $g_2(0) > 0 > g_1(0)$, $\inf\limits_{t\in[0,1]} g(t) > 0$.

2). *Для некоторой функции $\delta(\Delta)\downarrow 0$ при $\Delta\downarrow 0$ модули непрерывности $\omega_1(\Delta)$, $\omega_2(\Delta)$ функций g_1, g_2 соответственно, удовлетворяют неравенству*

$$\omega_k(\Delta) \leqslant \delta(\Delta)\sqrt{\Delta}, \qquad k=1,2. \tag{7.5.20}$$

Тогда при $x \leqslant x_0$ при некотором $x_0 > 0$, $x \gg T^{-1/6}$ при $T\to\infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(y_T \in xB_{g_1g_2}) \sim \mathbf{P}(w \in xB_{g_1g_2}), \tag{7.5.21}$$

где при $x \to 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(w\in xB_{g_1g_2}) \sim c\exp\left\{-\frac{\pi^2}{2x^2}\int\limits_0^1 g^{-2}(u)du\right\},\\ c=\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{g(1)}{g(0)}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{(g_1(0)+g_2(0))}{g(0)}\right).\end{gathered} \tag{7.5.22}$$

Такое же утверждение справедливо для процессов z_T.

Доказательство. Утверждение (7.5.22) при условиях 1), 2) установлено в [50]. Утверждение (7.5.21) вытекает из того, что

$$P(x) := \mathbf{P}(w\in xB_{g_1g_2}) \sim ce^{-bx^{-2}}, \qquad b=\mathrm{const},$$

при $x\to 0$, $\varepsilon = o(x)$ (множество $B_{g_1g_2}$ является множеством первого типа, см. (7.5.1)) и выполнено условие $[\mathbf{B}_0]$. Действительно,

$$(x+\varepsilon)^{-2} = x^{-2}\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-2} = x^{-2} - \frac{2\varepsilon}{x} + o\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) = x^{-2} + o(1)$$

при $x\to 0$, $\varepsilon = o(x)$. Это означает, что $P(x+\varepsilon)\sim P(x)$. Стало быть, выполнено условие $[\mathbf{B}_0]$ теоремы 7.5.1 и, следовательно, выполнено (7.5.21). Теорема 7.5.3 доказана.

Рассмотрим теперь вторую граничную задачу с *одной* границей об асимптотике $\mathbf{P}(y_T \in xB_g)$, где

$$xB_g = \Big\{f\in\mathbb{D}(0,1) : \sup_{t\in[0,1]}\big(f(t)-xg(t)\big) < 0\Big\}, \qquad g(0) > 0.$$

Эти множества являются множествами второго типа: для них $\mathbf{P}(w\in xB_g) > cx$ при $x\to 0$ (см. (7.5.2)).

Теорема 7.5.4. *Пусть τ и ζ независимы или линейно зависимы, функция $g > 0$ удовлетворяет условию Липшица, $g(0) > 0$,*

$$P(x) := \mathbf{P}(w \in xB_g) \sim cx \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{7.5.23}$$

Тогда

I. *Если выполнено условие Крамера* $[\mathbf{C}]$, *то*

$$\mathbf{P}(y_T \in xB_g) \sim \mathbf{P}(w \in xB_g) \quad \text{при} \quad x \gg \frac{\ln T}{\sqrt{T}}, \quad T \to \infty. \tag{7.5.24}$$

II. *Если выполнено условие $\mathbf{E}\tau^r < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta|^r < \infty$, $r > 2$, то существует последовательность $\gamma = o(1)$ при $x \to 0$, для которой соотношение* (7.5.24) *верно при $x \gg \gamma T^{\frac{2-r}{2(r+1)}}$ при $T \to \infty$.*

Доказательство. I. Первое утверждение теоремы вытекает из теоремы 7.5.2, I. Условие $[\mathbf{B}_0]$ (см. (7.5.4)) выполнено, так как $xg(t) + \varepsilon \leqslant (x + \varepsilon/\underline{g})g(t)$, где $\underline{g} = \min_{t\in[0,1]} g(t)$ и, стало быть, при $\varepsilon = o(x)$ в силу (7.5.23)

$$\mathbf{P}\big(w \in (xB_g)_\varepsilon\big) \leqslant P(x + \varepsilon/\underline{g}) \sim P(x),$$
$$\mathbf{P}\big(w \in (\partial xB_g)_\varepsilon\big) \leqslant P(x + \varepsilon/\underline{g}) - P(x) = o\big(P(x)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

II. Второе утверждение аналогичным образом вытекает из утверждения II теоремы 7.5.2. Теорема 7.5.4 доказана.

Как уже отмечалось, условие (7.5.23) выполнено для функции $g(t) = g = \mathrm{const}$ (см. (7.5.3)). Несомненно, что условие (7.5.23) будет выполнено и для гладких границ $g(t)$ (при $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 g(t)dt$), однако соответствующие результаты нам не известны.

Глава 8

Дополнения. О граничных задачах для обобщенных процессов восстановления при невыполнении условия Крамера

В главах 3–6 была построена теория больших уклонений ОПВ, распределение скачков которых удовлетворяет моментному условию Крамера. Если условие Крамера не выполнено, то природа вероятностей больших уклонений ОПВ становится совершенно иной — это хорошо известно на примере случайных блужданий. В этом случае на распределение скачков приходится накладывать некоторые условия правильного поведения на бесконечности. Вероятности больших уклонений для ОПВ в таких условиях изучались в гл. 16 монографии [26], там же см. весьма полную библиографию.

В этой главе везде будет предполагаться, что рассматриваемые ОПВ однородны. Отыскание условий допустимой неоднородности существенных трудностей не представляет.

В § 8.1 приведены результаты об асимптотике вероятностей больших уклонений $\overline{Z}^{(q)} = \sup\limits_{t \geqslant 0} Z^{(q)}(t)$, $Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt$. Они без труда получаются из утверждений в [26] об асимптотике распределения максимального значения *случайного блуждания* при аналогичных условиях. В случае, когда распределения скачков правильно меняются на бесконечности, в § 8.2 изучена асимптотика распределений $Z(T)$ и $\overline{Z}^{0}(T) = \max_{t \leqslant T} \big(Z(t) - at\big)$, а в § 8.3 — асимптотика вероятностей больших уклонений в первой граничной задаче.

Многие результаты §§ 8.1–8.3 приведены без доказательств, так как они либо опубликованы в монографии [26], либо опубликованы в статьях, но их доказательство выходит за рамки основного русла изложения в этой книге.

§ 8.1 Распределение максимального значения на всей полуоси обобщенного процесса восстановления со сносом

8.1.1 Распределение максимального значения ОПВ при невыполнении условия Крамера

В этом разделе, как и в § 6.1, мы рассмотрим асимптотику распределения величины $\overline{Z}^{(q)} = \sup_{t\geqslant 0} Z^{(q)}(t)$. Из теоремы 6.1.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 8.1.1. *Пусть функция*

$$Q^{(q)}(x) = \int\limits_x^\infty \mathbf{P}(\zeta + q\tau \geqslant t)dt \tag{8.1.1}$$

является надстепенной (см. определение 6.1.1), $a_\zeta + qa_\tau < 0$. *В случае* $q > 0$ *предполагается дополнительно, что*

$$\mathbf{P}(\tau > x) = o\big(Q^{(q)}(x)\big) \quad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{8.1.2}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) \sim \frac{Q^{(q)}(x)}{|a_\zeta + qa_\tau|} \quad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{8.1.3}$$

По поводу условия (8.1.2) см. замечание 6.1.1.

Можно назвать более широкий класс распределений величины $\zeta + q\tau$, для которых справедливо (8.1.3).

Определение 8.1.1. Распределение $F^{(\gamma)}(t) = \mathbf{P}(\gamma \geqslant t)$ величины $\gamma \geqslant 0$ называется субэкспоненциальным, если свертка

$$F^{(\gamma)*}(x) = -\int\limits_0^x dF^{(\gamma)}(t)F^{(\gamma)}(x-t)$$

обладает свойством

$$F^{(\gamma)*}(x) \sim 2F^{(\gamma)}(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Распределение случайной величины γ на $(-\infty, \infty)$ называется субэкспоненциальным, если субэкспоненциальным является распределение величины $\max(0, \gamma)$. Любая невозрастающая функция $G(t)$ на $[0, \infty]$ называется субэкспоненциальной, если $G(t) \sim cF(t)$ при $t \to \infty$ и какомнибудь $c < \infty$, где $F(t)$ — субэкспоненциальное распределение.

Можно показать, что семиэкспоненциальные и надстепенные распределения (как и правильно меняющиеся) являются субэкспоненциальными. Подробнее о свойствах субэкспоненциальных распределений см., например, [85], [26].

Теорема 8.1.1. *Пусть функция*

$$Q^{(q)}(x) = \int\limits_x^\infty \mathbf{P}(\zeta + q\tau \geqslant t)dt, \qquad x > 0,$$

является субэкспоненциальной, $a_\zeta + qa_\tau < 0$. *В случае* $q > 0$ *предполагается дополнительно, что выполнено* (8.1.2). *Тогда справедливо* (8.1.3).

Доказательство. Как и в теоремах 6.1.2, 6.1.3, в основе доказательства лежат результаты, относящиеся к распределению максимального значения случайного блуждания. Возьмем для примера случайное блуждание $\{Z_k\}$ и обозначим

$$\overline{Z}_\infty = \sup_{k \geqslant 1} Z_k, \qquad Q^{(0)}(x) = \int\limits_x^\infty \mathbf{P}(\zeta \geqslant t)dt.$$

Тогда справедливо следующее утверждение (см., например, теорему 17.7.3 в [10]).

Теорема 8.1.2. *Пусть функция* $Q^{(0)}(x)$ *является субэкспоненциальной,* $a_\zeta < 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_\infty \geqslant x) \sim \frac{Q^{(0)}(x)}{|a_\zeta|} \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Вернемся к доказательству теоремы 8.1.1. Рассмотрим сначала случай $q \leqslant 0$. Как уже отмечалось в § 6.1, в этом случае

$$\overline{Z}^{(q)} \underset{d}{=} \overline{Z}^{(q)}_\infty = \sup_{k \geqslant 0}(Z_k + qT_k)$$

и для получения (8.1.3) остается воспользоваться теоремой 8.1.2 с заменой ζ на $\zeta + q\tau$.

Если $q > 0$, то

$$\overline{Z}^{(q)} \underset{d}{=} \tau + \overline{Z}^{(q)}_{\infty},$$

и утверждение (8.1.3) также сохранится, если выполнено (8.1.2) (см. доказательство теоремы 6.1.3).

8.1.2 Аппроксимация второго порядка для распределения максимального значения ОПВ $Z^{(q)}(t)$

В теории страхования, теории риска с помощью величины $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} \geqslant x)$ можно описывать (при соответствующем задании управляющей последовательности $\{\tau_j, \zeta_j\}$ и значений q, x) вероятность разорения страховой компании (см. § 6.7), вероятность переполнения блока памяти в системе спутниковой связи и др. Специалисты, работающие в этой области, не раз отмечали, что аппроксимация $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)$ с помощью приближения (8.1.3) не всегда бывает удовлетворительной и, как правило, занижена. В связи с этим возникает задача об отыскании более точных приближений для рассматриваемых вероятностей, т.е. об отыскании асимптотики второго порядка для $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x)$ или оценки поправочного члена.

Если выполнено условие Крамера, то, как отмечено в теореме 6.1.2, при некоторых дополнительных условиях поправочный множитель $\big(1 + o(1)\big)$ при $x \to \infty$ в правых частях (6.1.5), (6.1.6) можно заменить на $\big(1+O(e^{-hx})\big)$. Это означает весьма высокую точность аппроксимации $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} \geqslant x)$.

Пусть теперь условие Крамера не выполнено. Положим

$$\zeta^{(q)} := \zeta + q\tau.$$

Из теоремы 7.5.3 в [26] (см. также [91]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.1.3. *Пусть распределение $\zeta^{(q)}$ является нерешетчатым и либо правильно меняющимся, либо семиэкспоненциальным. Если $a_{\zeta^{(q)}} := \mathbf{E}\zeta^{(q)} < 0$, $q \leqslant 0$, $\mathbf{E}(\zeta^{(q)})^2 < \infty$, то при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{Q^{(q)}(x)}{|a_{\zeta^{(q)}}|} + c\mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x)\big(1 + o(1)\big),$$

где

$$c = \frac{\mathbf{E}(\zeta + q\tau)^2}{2(a_{\zeta^{(q)}})^2} - \frac{\mathbf{E}\overline{Z}^{(q)}}{a_{\zeta^{(q)}}},$$

функция $Q^{(q)}(x)$ определена в (8.1.1).

Так как $c > 0$, то предположения о заниженности аппроксимации первого порядка (8.1.3) подтверждаются.

Если $\mathbf{E}(\zeta^{(q)})^2 = \infty$, то природа поправочного слагаемого становится значительно более сложной. Она весьма полно изучена в [13]. Мы остановимся здесь лишь на наиболее простом случае, когда $\mathbf{E}(\zeta_-^{(q)})^2 < \infty$, где $\zeta_-^{(q)} = \min(0, \zeta^{(q)})$. Будем писать $\zeta^{(q)} \Subset [\mathbf{R}_\alpha]$, если $\mathbf{P}(\zeta^{(q)} > x)$ есть правильно меняющаяся на бесконечности функция с параметром $-\alpha$.

Теорема 8.1.4. *Пусть* $\mathbf{E}\zeta^{(q)} < 0$, $q \leqslant 0$, $\zeta^{(q)} \Subset \mathbf{R}_\alpha$, $\alpha \in (1,2)$, $\mathbf{E}(\zeta_-^{(q)})^2 < \infty$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} > x) = \frac{Q^{(q)}(x)}{|a_{\zeta^{(q)}}|} + \frac{2(\alpha-1)I(\alpha)(Q^{(q)}(x))^2}{(a_{\zeta^{(q)}})^2}\big(1+o(1)\big),$$

где $I(\alpha) = \int\limits_0^{1/2} s^{1-\alpha}(1-s)^{-\alpha}ds < \infty$ *при* $\alpha \in (1,2)$.

Асимптотику второго порядка для $\mathbf{P}(\overline{Z}^{(q)} \geqslant x)$ в случае $\mathbf{E}(\zeta_-^{(q)})^2 = \infty$ можно получить с помощью теоремы 1.2 в [13].

8.1.3 Переходные явления для ОПВ. Асимптотика первого и второго порядка

В теории очередей при исследовании работы систем обслуживания в нагруженном состоянии возникает задача об аппроксимации распределения длины очереди или времени ожидания, когда нагрузка системы близка критической. Это соответствует задаче о распределении $\overline{Z}^{(q)}$ в случае, когда значение $a_\zeta + qa_\tau$ отрицательно, но мало. Значение $\overline{Z}^{(q)}$ неограниченно возрастает по вероятности с уменьшением $|a_\zeta + qa_\tau|$ и возникает вопрос о предельном распределении $\overline{Z}^{(q)}$ в этих условиях.

Рассмотрим более точную постановку задачи.

Пусть случайная величина $\zeta^{(q)} = \zeta + q\tau$ зависит от параметра ε (в этом случае мы будем писать $\zeta^{(q)} = {}^{(\varepsilon)}\zeta$) и при этом

$$^{(\varepsilon)}a := \mathbf{E}^{(\varepsilon)}\zeta \to 0, \qquad ^{(\varepsilon)}a < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{8.1.4}$$

Процессы $Z(t)$, соответствующие вектору (τ, ζ, q), обозначим в этом случае через ${}^{(\varepsilon)}Z(t)$. Положим

$$^{(\varepsilon)}\overline{Z} = \sup_{t\geqslant 0} {}^{(\varepsilon)}Z(t), \qquad ^{(\varepsilon)}Z_k = \sum_{j=1}^k {}^{(\varepsilon)}\zeta_j, \quad ^{(\varepsilon)}\overline{Z}_\infty = \sup_{k\geqslant 0} {}^{(\varepsilon)}Z_k,$$

где ${}^{(\varepsilon)}\zeta_j$ — независимые копии ${}^{(\varepsilon)}\zeta$. Задача в случае переходных явлений состоит в изучении предельного распределения ${}^{(\varepsilon)}\overline{Z}$ при $\varepsilon \to 0$. Как мы видели,

$$ {}^{(\varepsilon)}\overline{Z} \stackrel{d}{=} \begin{cases} {}^{(\varepsilon)}\overline{Z}_\infty & \text{при} \quad q \leqslant 0, \\ q\tau + {}^{(\varepsilon)}\overline{Z}_\infty & \text{при} \quad q > 0, \end{cases} $$

где второе равенство справедливо, если τ и ζ независимы.

В [103], [62], [6, теорема 4.18] получено следующее утверждение.

Теорема 8.1.5. *Пусть* ${}^{(\varepsilon)}a \to 0$, $\mathbf{D}{}^{(\varepsilon)}\zeta \to \sigma^2 > 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *и выполнено следующее условие равномерной сходимости*

$$ \int\limits_{|t|>N} t^2 \mathbf{P}({}^{(\varepsilon)}\zeta \in dt) \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to \infty \ \textit{равномерно по}\ \varepsilon; \tag{8.1.5} $$

(*сходимость* ${}^{(\varepsilon)}\zeta \Rightarrow \zeta^{(q)}$ *не предполагается*). *Тогда при каждом фиксированном* $v \geqslant 0$

$$ \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left({}^{(\varepsilon)}\overline{Z}_\infty > \frac{v}{|{}^{(\varepsilon)}a|} \right) = e^{-2v/\sigma^2}. $$

Условие (8.1.5) выполнено, если $\mathbf{E}|{}^{(\varepsilon)}\zeta|^{2+\delta} < c$ при некоторых $c < \infty$ и $\delta > 0$.

В частном случае, когда

$$ {}^{(\varepsilon)}\zeta = \zeta^{(q)} - \varepsilon, \qquad \mathbf{E}\zeta^{(q)} = 0, $$

распределение ζ имеет абсолютно непрерывную компоненту и

$$ \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty \tag{8.1.6} $$

при достаточно малом $|\mu|$, в [6] получено также *полное асимптотическое разложение* для $\mathbf{P}({}^{(\varepsilon)}\overline{Z}_\infty \geqslant v/\varepsilon)$ по степеням $\varepsilon = -{}^{(\varepsilon)}a$ (см. теорему 4.19 в [6]).

Из теоремы 8.1.5 вытекает следующий аналог теоремы Кингмана–Прохорова. Для простоты отождествим параметр ε со значением $-{}^{(\varepsilon)}a$.

Теорема 8.1.6. *Пусть выполнены условия* (8.1.4), (8.1.5),

$$ \mathbf{D}{}^{(\varepsilon)}\zeta \to \sigma^2 > 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. $$

Если $q \leqslant 0$ *или*

$$ q > 0, \quad \tau\ \textit{и}\ \zeta\ \textit{независимы}, \quad \varepsilon q\tau \underset{p}{\to} 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0 $$

(q *и* τ *могут зависеть от* ε), *то*

$$ \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left({}^{(\varepsilon)}\overline{Z} > \frac{v}{\varepsilon} \right) = e^{-2v/\sigma^2}. \tag{8.1.7} $$

В приложениях наибольший интерес представляет случай $q \leqslant 0$. Поэтому, а также для упрощения изложения, мы при рассмотрении аппроксимации 2-го порядка для распределения ${}^{(\varepsilon)}\overline{Z}$ ограничимся рассмотрением лишь этого случая $q \leqslant 0$. Тогда из теоремы 3.2 в [17] вытекает

Теорема 8.1.7. *Пусть выполнены условия* (8.1.4), ${}^{(\varepsilon)}\zeta \Rightarrow {}^{(0)}\zeta$,

$$\mathbf{E}|{}^{(\varepsilon)}\zeta|^3 \to \mathbf{E}|{}^{(0)}\zeta|^3, \qquad \mathbf{E}({}^{(\varepsilon)}\zeta)^2 = \mathbf{E}{}^{(0)}\zeta^2 + o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть кроме того распределения ${}^{(\varepsilon)}\zeta$, ${}^{(0)}\zeta$ *имеют плотность с равномерно по* ε *ограниченной вариацией. Тогда*

$$\mathbf{P}(\varepsilon^{(\varepsilon)}\overline{Z} > v) = \exp\left\{-\frac{2v}{\sigma^2} + \frac{4v\varepsilon m_3}{3\sigma^6}\right\}\left[1 + \frac{2\varepsilon m_-}{\sigma^2} + \frac{2\varepsilon m_3}{3\sigma^4} + o(\varepsilon)\right],$$

где

$$m_3 = \mathbf{E}{}^{(0)}\zeta^3, \qquad m_- = \mathbf{E}\chi_-,$$

χ_- *есть величина перескока через бесконечно удаленный отрицательный барьер случайным блужданием* $\{{}^{(0)}Z_k\}$ *со скачками, распределенными как величина* ${}^{(0)}\zeta$.

§ 8.2 Асимптотика распределений $Z^0(T) = \big(Z(T) - aT\big)$ и $\overline{Z}^0(T) = \max\limits_{t \leqslant T} Z^0(t)$ при правильном изменении распределения скачков

Мы будем использовать обозначения

$$F^{(\zeta)}(t) = \mathbf{P}(\zeta \geqslant t), \qquad F_-^{(\zeta)}(t) = \mathbf{P}(\zeta < -t), \qquad F^{(\tau)}(t) = \mathbf{P}(\tau \geqslant t)$$

при $t > 0$ и следующие условия:

$[\mathbf{R}_\alpha]$. Мы будем писать $F \Subset [\mathbf{R}_\alpha]$, если $F = F(t)$ есть правильно меняющаяся функция на $[0, \infty)$ с показателем $-\alpha$, т.е. $F(t) = t^{-\alpha} l(t)$, где $\alpha > 1$, $l(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.).

Введем далее в рассмотрение два условия, которые будем использовать в последующих утверждениях.

$[\mathbf{Q}_T]$ *Выполнено* $F^{(\zeta)} \Subset [\mathbf{R}_\alpha]$ *при* $\alpha \in (1, 2)$ *и хотя бы одно из следующих двух условий: либо*

(i) $F_-^{(\zeta)}(t) \leqslant cF^{(\zeta)}(t)$, $t > 0$ *и* $TF^{(\zeta)}(x) \to 0$, *либо*

(ii) $F_{-}^{(\zeta)}(t) \leqslant W(t) \Subset [\mathbf{R}_\gamma]$ *при некотором* $\gamma > 1$ *и*

$$T[F^{(\zeta)}(x/\ln x) + W(x/\ln x)] < c$$

при $x \to \infty$.

$[\mathbf{\Phi}_T]$ *Выполнено* $F^{(\zeta)} \Subset [\mathbf{R}_\alpha]$ *при* $\alpha > 2$, $\sigma_\zeta^2 := \mathbf{D}\xi < \infty$ *и* $x \to \infty$ *так что при некотором* $c > 1$ *выполняется*

$$x > c\sigma_\zeta \sqrt{(\alpha - 2)a_\tau^{-1} T \ln T}.$$

Обозначим $H(t) = \mathbf{E}\nu(t)$.

Теорема 8.2.1 (теорема 16.2.1 в [26]). *Пусть* τ *и* ζ *независимы, выполнено либо условие* $[\mathbf{Q}_T]$, *либо условие* $[\mathbf{\Phi}_T]$, *и* $\delta > 0$ *— произвольное фиксированное число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Случай* $a \geqslant 0$.

(i) *При* $x \to \infty$ *равномерно по* T *таким, что* $x \geqslant \delta T$, *выполняется*

$$\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big) \sim H(T)F^{(\zeta)}(x). \tag{8.2.1}$$

Если $T \to \infty$, *то* $H(T)$ *в правой части можно заменить на* T/a_τ.

(ii) *Если* $F^{(\tau)} \leqslant W_\tau \Subset [\mathbf{R}_\gamma]$ *при* $\gamma \in (1, 2)$, *то соотношение* (8.2.1) *выполняется при* $x \to \infty$ *равномерно в диапазоне значений* T, *удовлетворяющих наряду с* $[\mathbf{Q}_T]$ *или* $[\mathbf{\Phi}_T]$ *условию* $x \geqslant T^{1/\gamma} l(T)$ *при подходящей м.м.ф.* l.

(iii) *Если* $\alpha \in (1, 2)$ *и* $F^{(\tau)}(t) = o(F^{(\zeta)}(t))$ *при* $t \to \infty$, *или если* $\alpha > 2$ *и* $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, *то* (8.2.1) *выполняется без каких-либо дополнительных условий на* x *и* T (помимо содержащихся в $[\mathbf{Q}_T]$ и $[\mathbf{\Phi}_T]$).

II. *Случай* $a < 0$.

(i) *Соотношение* (8.2.1) *выполняется при* $x \to \infty$ *равномерно по* T *из диапазона значений, задаваемого неравенством*

$$x_* := x + aT \geqslant \delta T.$$

(ii) *Пусть выполнено условие* $F^{(\tau)} \Subset [\mathbf{R}_\gamma]$. *Если*

$$T \to \infty, \quad x_* \to \infty \quad и \quad x_* = o(T),$$

то при $\alpha \in (1, 2)$

$$\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big) \sim \frac{T}{a_\tau} F^{(\zeta)}(x),$$

а при $\alpha > 2$

$$\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big) \sim \frac{T}{a_\tau} F^{(\zeta)}(x) + \frac{x_*^2 F^{(\zeta)}(x_*) F^{(\tau)}(T)}{a^2 a_\tau^2 (\alpha - 1)(\alpha - 2)}.$$

(iii) *Если $F^{(\tau)}(t) = o\big(F^{(\zeta)}(t)\big)$ при $t \to \infty$, то утверждения подпунктов* I(i), I(ii) *выполняются без каких-либо дополнительных условий на x и T* (помимо содержащихся в $[\mathbf{Q}_T]$ и $[\mathbf{\Phi}_T]$ и в упомянутых подпунктах).

(iv) *Пусть выполнено условие $F_\tau \in [\mathbf{R}_\gamma]$ при $\gamma \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ и*

$$x_* = x + aT \to -\infty, \qquad x \geqslant T^{1/\gamma} l(T)$$

при подходящий м.м.ф. l (способ ее выбора указан в [26, лемма 16.2.3]; при $\gamma > 2$ последнее неравенство всегда выполнено в силу условий $[\mathbf{Q}_T]$ или $[\mathbf{\Phi}_T]$). *Тогда*

$$\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big) \sim \frac{1}{a_\tau} \big[T F^{(\zeta)}(x) + (T + x/a) F^{(\tau)}(x/q)\big] \quad \text{при} \;\; T \to \infty.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу второй части теоремы 8.2.1. Как уже отмечалось, случай II (присутствие положительного линейного сноса $-at$) является более сложным по сравнению со случаем I. В подпункте II(i) уровень x *значительно выше* точки $-aT$, в окрестности которой мы можем оказаться в момент времени T за счет линейного сноса благодаря очень длинному интервалу восстановления. В этой ситуации асимптотика вероятности $\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big)$ остается такой же, как и в части I теоремы: грубо говоря, условием пересечения уровня x по-прежнему является наличие большого скачка ζ_j на интервале времени $[0, T]$.

В случае II(ii) уровень x все еще выше $-aT$, но разница между этими значениями относительно мала: $x_* = x + aT = o(T)$. В этой переходной ситуации вид асимптотики вероятности $\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big)$ определяется «толщиной» правого хвоста распределения скачков ζ_j. В случае «толстого» хвоста (когда $\alpha \in (1, 2)$) асимптотика остается прежней и не зависит от распределения длин интервалов восстановления (от которого мы требуем, чтобы $F^{(\tau)} \in [\mathbf{R}_\gamma]$). Когда же хвост распределения случайных величин ζ_j более «тонкий» ($\alpha > 2$), в асимптотике появляется добавочный член (который может быть как доминирующим, так и пренебрежимо малым), уже зависящий от распределения случайной величины τ. Его присутствие обусловлено наличием следующей возможности: один из начинающихся в самом начале временного отрезка $[0, T]$ интервалов восстановления оказывается очень длинным (и покрывает точку $t = T$), причем «накопленная» на начальном (до этого интервала восстановления) отрезке времени сумма скачков ζ_j оказывается достаточно большой, чтобы процесс перескочил «зазор» между $-aT$ и x. Последнее, в свою очередь, тоже представляет собой «большое уклонение» и происходит за счет одного «умеренно большого» скачка ζ_j, превышающего величину x_* (отсюда сомножитель $F^{(\zeta)}(x_*)$). Присутствие сомножителя x_*^2 объясняется, грубо говоря, тем, что число таких скачков, на которые должны прийтись эти самые большие значения τ_k и ζ_j в начале траектории процесса, имеет порядок x_*, причем мы имеем дело с независимыми последовательностями случайных величин $\{\tau_k\}$ и $\{\zeta_j\}$. Поэтому вероятность нужной комбинации событий будет иметь порядок величины $x_* F^{(\zeta)}(x_*) \times x_* F^{(\tau)}(T)$.

В случае II (iv) уровень x уже заметно ниже, чем $-aT$ (выполняется условие $x + aT \to -\infty$), и поэтому вероятность его превышения увеличивается за счет вклада, соответствующего наличию одного очень большого τ_k на начальной части интервала $[0, T]$. Вид этого дополнительного члена можно объяснить следующим образом. Грубо говоря, в отсутствие больших уклонений в блуждании $\{Z_n\}$, для нахождения выше уровня x в момент времени T достаточно, чтобы один из первых (примерно $(T + x/a)/a_\tau$) интервалов восстановления был велик ($> -x/a$). В этом случае траектория $Z(t)$ будет осциллировать около нуля до начала этого длинного интервала восстановления, а затем будет двигаться вдоль прямой с коэффициентом наклона $-a > 0$ в течение этого интервала (что и выведет ее на уровень выше x), после чего (если все еще $t < T$) она вновь будет осциллировать на примерно постоянном уровне (и, стало быть, все еще будет выше уровня x к моменту времени T).

Очень узкий переходной случай $x_* = O(1)$ (значения $-aT$ и x почти совпадают) оказывается весьма сложным для анализа. Он не рассматривается в настоящем изложении и теоремой 8.2.1 не покрывается.

Перейдем теперь к распределению $\overline{Z}^0(t)$.

Как и для обычных случайных блужданий, асимптотика первого порядка для вероятностей $\mathbf{P}\big(\overline{Z}^0(T) \geqslant x\big)$ больших уклонений максимума процесса оказывается такой же, как и у $\mathbf{P}\big(Z^0(T) \geqslant x\big)$. Причина та же: если процесс $\{Z^0(t)\}$ переходит через высокий уровень x где-то внутри интервала $[0, T]$ (скажем, за счет скачка ζ_j), то он и останется с большой вероятностью в «окрестности» точки $Z^0(T_j)$ до конца интервала $[0, T]$ (напомним, что рассматриваемый процесс имеет нулевой средний снос). Поэтому события $\big\{Z^0(T) \geqslant x\big\}$ и $\big\{\overline{Z}^0(T) \geqslant x\big\}$ оказываются «почти эквивалентными». Пересечение уровня x может произойти и на участке линейного роста, но и в этом случае сказанное остается верным.

Теорема 8.2.2 (теорема 16.2.2 в [26]). *Все утверждения теоремы* 8.2.1 *остаются справедливыми в соответствующих предположениях и для вероятности* $\mathbf{P}\big(\overline{Z}^0(T) \geqslant x\big)$.

§ 8.3 Первая граничная задача при правильном изменении распределений скачков

В этом разделе мы рассмотрим задачу пересечения траекторией процесса $\big\{Z^0(t)\big\}$ произвольной границы $\big\{g_T(t);\, t \in [0,T]\big\}$, когда $\inf\limits_{t\leqslant T} g(t) \to \infty$ достаточно быстро, так что событие

$$B_{T,g} := \Big\{ \sup_{t\leqslant T} \big(Z^0(t) - g_T(t)\big) \geqslant 0 \Big\}$$

относится к интересующей нас области больших уклонений. Отметим, что предположение о том, что рассматриваемый процесс $Z^{(q)}$ имеет нулевой средний снос ($q = -a$), не ограничивает общности.

Одним из важных факторов в последующих рассмотрениях является возможность осуществления интересующего нас события $B_{T,g}$ за счет очень большого интервала восстановления. Чтобы избежать громоздких выкладок, можно исключить такую возможность. При $q \leqslant 0$ ее просто нет. При $q > 0$ можно предполагать, что выполнено условие

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T} \big(g_T(t) - qt\big) > \delta T \tag{8.3.1}$$

при некотором фиксированном $\delta > 0$. В этом случае пересечь границу $g_T(t)$ за счет одного большого скачка τ невозможно (с некоторым запасом). А наличие двух больших скачков τ_j и ζ_j очень маловероятно.

Поэтому пересечение высокой границы может реально осуществиться, как и для случайного блуждания, только за счет одного большого скачка ζ_j, причем вместо самой границы $g_T(t)$ в момент скачка достаточно, грубо говоря, превысить уровень

$$f_T(t) := \inf_{t\leqslant s\leqslant T} g_T(s),$$

поскольку после этого траектория процесса $\big\{Z^{(q)}(t)\big\}$ при $q = -a$ вновь «пойдет» вдоль (горизонтальной) линии среднего сноса и в какой-то момент окажется уже выше «опустившейся» к тому времени до уровня $f_T(t)$ границы.

Сформулируем теперь основной результат этого раздела. Обозначим через $\mathcal{G}_{(x,N)}$ класс всех измеримых границ $g_T(t)$ таких, что

$$x \leqslant \inf_{0\leqslant t\leqslant T} g_T(t) \leqslant Nx, \quad x>0, \quad N\in(1,\infty).$$

Теорема 8.3.1 (теорема 16.4.1 в [26]). *Пусть для распределения скачков ζ_j выполнено либо условие $[\mathbf{Q}_T]$, либо условие $[\mathbf{\Phi}_T]$, и пусть $\delta>0$, $K>1$ — произвольные фиксированные числа.*

I. *Случай $a\geqslant 0$. Равномерно по $g_T\in\mathcal{G}_{(x,N)}$ при $x\geqslant\delta T$ выполняется соотношение*

$$\mathbf{P}(B_{T,g}) = \bigl(1+o(1)\bigr)\int\limits_0^T F^{(\zeta)}\bigl(f_T(t)\bigr)\,dH(t), \quad x\to\infty. \tag{8.3.2}$$

Если, кроме того, для распределения случайной величины τ выполнено условие $F^{(\tau)}(t)\leqslant W_\tau(t)\Subset[\mathbf{R}_\gamma]$ при $\gamma\in(1,2)$, то соотношение (8.3.2) *выполняется при $x\to\infty$ равномерно в диапазоне значений T, удовлетворяющих* (наряду с $[\mathbf{Q}_T]$ или $\mathbf{\Phi}_T]$) *условию $x\geqslant T^{1/\gamma}l(T)$ при подходящей м.м.ф. l* (способ выбора $l(t)$ указан в [26, лемма 16.2.3]).

II. *Случай $a<0$.*

(i) *Если выполнено* (8.3.1), *то соотношение* (8.3.2) *выполняется равномерно по $g_T\in\mathcal{G}_{(x,N)}$.*

(ii) *Если $F^{(\tau)}(t)=o\bigl(F^{(\zeta)}(t)\bigr)$ при $t\to\infty$, то все сформулированные в части* I *теоремы утверждения остаются справедливыми.*

Нетрудно видеть, что при $T\to\infty$ равномерно по функциям $g\in\mathcal{G}_{(x,N)}$ выполняется

$$\int\limits_0^T F^{(\zeta)}\bigl(f_T(t)\bigr)\,dH(t) \sim \frac{1}{a_\tau}\int\limits_0^T F^{(\zeta)}\bigl(f_T(t)\bigr)\,dt, \tag{8.3.3}$$

так что в этом случае интеграл в правой части (8.3.2) можно заменить на выражение в правой части (8.3.3).

Из теоремы 8.3.1 и определения правильно меняющейся функции немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 8.3.1. *Пусть $g(s)$, $s\in[0,1]$, — заданная измеримая функция со значениями в интервале $[c_1,c_2]\subset(0,\infty)$. Тогда для границы*

$$g_T(t) := xg(t/T), \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

при выполнении в случае $a \geqslant 0$ *соответствующих условий на* x *из теоремы* 8.3.1, *а в случае* $a < 0$ — *условия*

$$\inf_{0 \leqslant s \leqslant 1} \bigl(xf(s) + asT\bigr) \geqslant \delta T,$$

справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(B_{T,g}) \sim \frac{TF^{(\zeta)}(x)}{a_\tau} \int\limits_0^1 f^{-\alpha}(s)\, ds \quad \textit{при} \ \ T \to \infty,$$

где $f(s) := \inf_{s \leqslant u \leqslant 1} g(u)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Действительно, надо лишь заметить, что

$$F^{(\zeta)}\bigl(f_T(t)\bigr) = \frac{F^{(\zeta)}(xf(t/T))}{F^{(\zeta)}(x)} F^{(\zeta)}(x) = f^{-\alpha}(t/T)\frac{l(xf(t/T))}{l(x)} F^{(\zeta)}(x) = \\ = \bigl(1 + o(1)\bigr) f^{-\alpha}(t/T) F^{(\zeta)}(x)$$

равномерно на $[0, T]$ в силу теоремы 1.1.1 в [26] о равномерной сходимости м.м.ф. в последней формуле к 1.

В гл. 16 в [26] содержится более детальное рассмотрение случая линейных границ вида $g_T(t) = x + ct$, $c = \mathrm{const}$.

Список основных обозначений[1]

Случайные величины и процессы

$\boldsymbol{\xi} = (\tau, \zeta)$, $\boldsymbol{\xi}_j = (\tau_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ — вектор, управляющий ОПВ, и его независимые копии

$\boldsymbol{\xi}^*$ — вектор столбец

$T_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \tau_j, \quad T_0 = 0$

$Z_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \zeta_j, \quad Z_0 = 0$

$\mathbf{S}_n = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{\xi}_j, \quad \mathbf{S}_0 = (0, 0)$

$\xi = \zeta - a\tau, \quad \xi_j$ — независимые копии ξ

$S_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j, \quad S_0 = 0$

$\eta(t) = \min\{k : T_k > t\}$ — простой процесс восстановления

$\nu(t) = \eta(t) - 1 = \max\{k : T_k \leqslant t\}$ — простой процесс восстановления

$Z(t) = Z_{\nu(t)}$ — обобщенный процесс восстановления (ОПВ)

$Y(t) = Y_{\eta(t)}$ — обобщенный процесс восстановления (ОПВ)

$\chi(t) = T_{\eta(t)} - t$ — величина «перескока»

---

[1] Порядок следования обозначений в списке не всегда соответствует порядку их появления в книге

$\overline{\chi}(t) = \max\limits_{k \leqslant t} \chi(k)$

$\gamma(t) = t - T_{\nu(t)}$ — величина «недоскока»

$\zeta(t) = \zeta_{\eta(t)}$

$\overline{\zeta}(t) = \max\limits_{u \leqslant t} \zeta(u)$

$\tau(t) = \tau_{\eta(t)}$

$\overline{\tau}(t) = \max\limits_{u \leqslant t} \tau(u)$

$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt$ — ОПВ с линейным сносом

$Z^{[q]}(t)$ — ОПВ со скачками $(\tau, \zeta + q\tau)$

$Z^{(st)}(t)$ — ОПВ со стационарными приращениями

$(\tau^{(st)}, \zeta^{(st)})$ — начальный скачок $Z^{(st)}(t)$

$\overline{Z}(t) = \max\limits_{u \leqslant t} Z(u)$

$\overline{Z}^{(q)}(t) = \max\limits_{u \leqslant t} Z^{(q)}(u)$

$\overline{Z}^{[q]}(t) = \max\limits_{u \leqslant t} Z^{[q]}(u)$

$\overline{Z} = \overline{Z}(\infty)$

$\overline{Z}^{(q)} = \overline{Z}^{(q)}(\infty)$

$\overline{Z}^{[q]} = \overline{Z}^{[q]}(\infty)$

$\overline{Z}_n = \max\limits_{k \leqslant n} Z_k$

$\zeta^{(q)} = \zeta + q\tau$

$Z_n^{(q)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j^{(q)} = Z_n + qT_n$

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{Y(t) - at}{\sigma\sqrt{t}} & \text{при} \quad \sigma < \infty, \\[2ex] \dfrac{Y(t) - at}{\sigma(t)} & \text{при выполнении условия} \quad [\mathbf{R}_{\alpha,\beta}] \end{cases}$$

$$z(t)=\begin{cases}\dfrac{Z(t)-at}{\sigma\sqrt{t}} & \text{при}\quad \sigma<\infty,\\[2mm] \dfrac{Z(t)-at}{\sigma(t)} & \text{при выполнении условия}\quad [\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]\end{cases}$$

ω — случайная величина, не зависящая от τ, в представлении $\zeta = h\tau+\omega$ для линейно зависимых τ и ζ

$\Omega_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j,\quad \Omega_0=0$

$$y_T(t)=\begin{cases}\dfrac{Y(tT)}{x}, & t\in[0,1];\ x\sim T \text{ при } T\to\infty;\ (\text{в гл. } 3)\\[2mm] \dfrac{Y(tT)-atT}{\sigma\sqrt{T}}, & t\in[0,1];\quad (\text{в гл. } 7).\end{cases}$$

$$z_T(t)=\begin{cases}\dfrac{Z(tT)}{x}, & t\in[0,1];\ x\sim T\ \text{ при }\ T\to\infty;\ (\text{в гл. } 3,\,4)\\[2mm] \dfrac{Z(tT)-atT}{\sigma\sqrt{T}}, & t\in[0,1];\quad (\text{в гл. } 7).\end{cases}$$

$\eta_g=\inf\big\{t:\ z_T(t)\geqslant g(t)\quad$ (в гл. 4)

$w(t)$, $t\in[0,1]$ — стандартный винеровский процесс

$w_{\alpha,\beta}(t)$, $t\in[0,1]$ — устойчивый процесс с параметрами (α,β)

$\eta_Z(x)=\inf\big\{t:\ Z(t)>x\big\}$

$\chi_Z(x)=Z\big(\eta_Z(x)\big)-x$

$\eta_{Z,g}=\inf\big\{t:\ Z(t)>g_T(t)\big\}\quad$ (в гл. 6)

${}^{\alpha}\boldsymbol{\xi}=({}^{\alpha}\tau,\,{}^{\alpha}\zeta)$ — преобразование Крамера (по распределению) над случайным вектором $\boldsymbol{\xi}$ в точке $\big(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)\big)$ (п. 6.2.1)

${}^{\alpha}Y(t)$ — ОПВ, построенный по управляющему вектору $({}^{\alpha}\tau,-{}^{\alpha}\zeta)$

${}^{\alpha}\overline{Y}=\sup\limits_{t>0}{}^{\alpha}Y(t)$

Параметры

$a_\tau=\mathbf{E}\tau$

$a_\zeta=\mathbf{E}\zeta$

$a = a_\zeta / a_\tau$

$\sigma_\xi^2 = \mathbf{E}\xi^2$

$\sigma^2 = \dfrac{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}{a_\tau} = \dfrac{\mathbf{E}\xi^2}{a_\tau}$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{E}\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\xi}$

$\lambda_+ = \sup\{\lambda :\ \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}$

Функции

$F_-(t) = \mathbf{P}(\xi \leqslant -t)$

$F_+(t) = \mathbf{P}(\xi \geqslant t)$

$F(t) = F_-(t) + F_+(t) = \mathbf{P}\big(|\xi| \geqslant t\big)$

$F^{(-1)}(u) = \inf\big\{t :\ F(u) < u\big\}$ — функция, обратная к F

$\left.\begin{array}{l} \sigma_\xi(n) = F^{(-1)}(1/n) \\ \sigma(t) = \sigma_\xi(t) a_\tau^{-1/\alpha} \end{array}\right\}$ если $F(t) = t^{-\alpha} l(t)$, $\quad l(t)$ — м.м.ф.

$\Phi(t)$ — функция распределения нормального закона

$\phi(t)$ — плотность распределения нормального закона

$\Phi_{\alpha,\beta}(t)$ — функция распределения устойчивого закона с параметрами (α, β)

$\psi(\lambda, \mu) = \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}$

$\psi^{(\tau)}(\lambda) = \psi(\lambda, 0) = \mathbf{E}e^{\lambda\tau}$

$\psi^{(\zeta)}(\mu) = \psi(0, \mu) = \mathbf{E}e^{\mu\zeta}$

$\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \ln\psi(\lambda, \mu)$

$A^{(\tau)}(\lambda) = \ln\psi^{(\tau)}(\lambda)$

$A^{(\zeta)}(\mu) = \ln\psi^{(\zeta)}(\mu)$

$A(\mu) = -\sup\big\{\lambda :\ \mathbf{A}(\lambda, \mu) \leqslant 0\big\}$ — базовая функция при широком условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$

$\mathbf{A}_1(\lambda, \mu) = \ln\mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1}$

$\mathbf{A}^{(st)}(\lambda,\mu) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau^{(st)}+\mu\zeta^{(st)}}$

$\boldsymbol{\Lambda}(t,\alpha) = \sup\limits_{(\lambda,\mu)} \big(\lambda t + \mu\alpha - \mathbf{A}(\lambda,\mu)\big)$ — функция уклонений $\{T_n, Z_n\}$

$H(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_n \leqslant t)$ (в гл. 1)

$H_1(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_n \leqslant t)$ (в гл. 1)

$H(B) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{S}_n \in B)$ (в гл. 3)

$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Lambda}}(t,\alpha) = \inf\limits_{v>0} v\boldsymbol{\Lambda}\big(\frac{t}{v}, \frac{\alpha}{v}\big)$

$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Lambda}}(B) = \inf\limits_{(t,\alpha)\in B} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\Lambda}}(t,\alpha)$

$\mathbf{D}(t,\alpha) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\Lambda}}\big((t,\alpha)_\varepsilon\big)$

$D(\alpha) = \mathbf{D}(1,\alpha) = \sup\limits_{\mu} \big(\mu\alpha - A(\mu)\big)$ — функция уклонений $Z(t)$ при широком условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$

$$\widehat{D}(\alpha) = \begin{cases} \inf \big[\mathbf{D}(t,\alpha) - (1-t)\lambda_+\big] & \text{при} \quad \lambda_+ < \infty, \\ D(\alpha) & \text{при} \quad \lambda_+ = \infty \end{cases}$$

— функция уклонений $Z(t)$ в общем случае

$\widehat{A}(\mu) = \max\big(A(\mu), -\lambda_+\big) = \sup\limits_{\alpha} \big(\alpha\mu - \widehat{D}(\alpha)\big)$

$\mu(\alpha) = D'(\alpha)$ — точка, в которой достигается $\sup\limits_{\mu} \big(\mu\alpha - A(\mu)\big)$

$\lambda(\alpha) = -A\big(\mu(\alpha)\big)$

$\boldsymbol{\mu}(\theta,\alpha)$, $\boldsymbol{\lambda}(\theta,\alpha)$ определены в (5.3.2)

$L(t) = \sigma\sqrt{2t\ln\ln t}$ (в гл.1)

$L(r) = r\boldsymbol{\Lambda}\big(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\big)$ (в гл. 3)

$L(\alpha) = D(\alpha)/\alpha$ (в гл. 6)

$I_Z(\alpha, {}^{<}u, v, \mathbf{w}) = \int\limits_0^u e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}(\tau > y + v, \zeta \in \mathbf{w})\,dy$

$$I_Z(\alpha, {}^{>}u, v, \mathbf{w}) = \int\limits_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y + v, \zeta \in \mathbf{w})dy$$

$$P_{T,\alpha}^{\lessgtr} = \mathbf{P}\big(Z(T) \in \Delta[x);\ B({}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w})\big), \text{ где } \ \alpha = x/T$$

$$P_\alpha(v) = \mathbf{P}({}^{\alpha}\overline{Y} \leqslant v)$$

$$J_\alpha(v) = \int\limits_0^v e^{-u\mu(\alpha)}P_\alpha(-u)du$$

$$I(f) = \begin{cases} \int\limits_0^1 D\big(f'(t)\big)dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{C}_a, \quad f(0) = 0 \\ \infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$I_0(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{C}_a, \quad f(0) = 0 \\ \infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Области, события

$\mathbb{C} = \mathbb{C}(0,1)$ — пространство непрерывных функций на $[0,1]$

$\mathbb{C}_a = \mathbb{C}_a(0,1)$ — пространство абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$

$\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ — пространство функций на $[0,1]$ без разрывов второго рода

$\Delta[x) = [x, x + \Delta)$

$B_t(u,v) = \big\{\gamma(t) \geqslant u,\ \chi(t) \geqslant v\big\}$ (в гл. 2)

$B({}^{\lessgtr}u, v, \mathbf{w}) = \big\{\gamma(T) \lessgtr u,\ \chi(T) \geqslant v,\ \zeta(T) \in \mathbf{w}\big\}$ (в гл. 5)

$$B_g = \Big\{f \in \mathbb{D} :\ \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) - g(t)\big) > 0\Big\}$$

$B_{g_1 g_2} = \big\{f \in \mathbb{D} :\ g_1(t) \leqslant f(t) \leqslant g_2(t) \quad \text{при всех} \quad t \in [0,1]\big\}$

$\mathcal{A} = \big\{(\lambda,\mu) :\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) < \infty\big\}$

$\mathcal{A}_1 = \big\{(\lambda,\mu) :\ \mathbf{A}_1(\lambda,\mu) < \infty\big\}$

$\mathcal{A}^{\leqslant 0} = \big\{(\lambda,\mu) :\ \mathbf{A}(\lambda,\mu) \leqslant 0\big\}$

$\mathcal{A}^{(st)} = \big\{(\lambda,\mu) :\ \mathbf{A}^{(st)}(\lambda,\mu) < \infty\big\}$

(μ^-, μ^+) — область конечности базовой функции $A(\mu)$

(μ_-, μ_+) — область аналитичности базовой функции $A(\mu)$, содержащая точку $\mu = 0$

$(\widehat{\mu}_-, \widehat{\mu}_+)$ — область аналитичности функции $\widehat{A}(\mu)$, содержащая точку $\mu = 0$

$(\alpha_-, \alpha_+) = \big(A'(\mu_- + 0), A'(\mu_+ - 0)\big)$ — область аналитичности функции уклонений $D(\alpha)$, содержащая точку $\alpha = a$

$(\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+) = \big(\widehat{A}'(\widehat{\mu}_- + 0), \widehat{A}'(\widehat{\mu}_+ - 0)\big)$ — область аналитичности функции уклонений $\widehat{D}(\alpha)$, содержащая точку $\alpha = a$

(β_-, β_+) — интервал, в котором $\lambda(\alpha) > \lambda_+$

$\mathcal{R} = \mathbb{R} \setminus (\beta_-, \beta_+)$

$K^<$ — компакт в (α_-, α_+), содержащий точку $\alpha = a$

$K^>$ — компакт в $(\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$, содержащий точку $\alpha = a$

$\mathcal{A}_K^{\lessgtr} = \Big\{\big(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)\big) : \alpha \in K^{\lessgtr}\Big\}$

$\mathcal{L}$ — область аналитичности $\mathbf{\Lambda}(\theta, \alpha)$ (в гл. 5)

$\mathcal{D}$ — открытый конус аналитичности функции $\mathbf{D}(\theta, \alpha)$

$\mathbf{K}_{\mathbf{\Lambda}}$ — компакт, вложенный в $\mathcal{L}$

$\mathbf{K}_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^2$ — компакт, вложенный в $\mathcal{D}$ и отделенный от точки $(0, 0)$

$\mathcal{A}_{\mathbf{K}} = \Big\{\big(\lambda\big(\frac{\alpha}{\theta}\big), \mu\big(\frac{\alpha}{\theta}\big)\big) : (\theta, \alpha) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}\Big\}$

Условия

$[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ — условие притяжения к устойчивому закону с параметрами (α, β) (см. § 1.6)

$[\mathbf{C}]$ — моментное условие Крамера: $\zeta \Subset [\mathbf{C}]$, если $\mathbf{E}e^{\lambda\zeta} < \infty$ в окрестности точки $\lambda = 0$

$[\mathbf{C}_\infty]$ — усиленное моментное условие Крамера: $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, если $\mathbf{E}e^{\lambda\zeta} < \infty$

$[\mathbf{C}_\varphi]$ — условие Крамера на характеристическую функцию

$[\mathbf{C}^V]$ — условие, определенное в п. 4.5.1

$[\boldsymbol{\lambda}_+]$ — условие $\lambda_+ \geqslant D(0)$

$[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ — условие $\lambda_+ < D(0)$, $\ln \mathbf{P}(\tau > y) \sim -\lambda_+ t$ при $t \to \infty$

$[\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{K}}]$ — условие, определенное в п. 5.2.3

$[\mathbf{h}]$ — условие, определенное в п. 5.2.3

Символы

$\overline{o}(1)$ — соотношение $\Delta = \overline{o}(1)$ при $T \to \infty$ означает, что $\Delta = \Delta_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$

$o_p(1)$ — соотношение $\gamma = \gamma_T = o_p(1)$ при $T \to \infty$ означает, что $\gamma_T \underset{p}{\to} 0$ при $T \to \infty$

$\rho_{\mathbb{C}}$ — равномерная метрика

ρ_S — метрика Скорохода

$\rho_{\mathbb{D}}$ — метрика, определенная в § 1.6

$\Rightarrow$ — знак слабой сходимости по распределению

$\underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow}$ — знак $\mathbb{C}$-сходимости, определенной в п. 1.5.2

$\underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow}$ — знак $\mathbb{D}$-сходимости, определенной в п. 1.6.3

$\underset{S}{\Rightarrow}$ — знак сходимости в метрике Скорохода, (п. 1.6.1)

$\Subset\!\!\Rightarrow$ — запись $\xi_n \Subset\!\!\Rightarrow \mathbf{F}$ означает слабую сходимость по распределению ξ_n к распределению $\mathbf{F}$ при $n \to \infty$

$\Subset$ — запись $\xi \Subset [\mathbf{C}_\infty]$ означает, что распределение ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$

$(v)_\varepsilon$ — ε-окрестность точки v

$(f)_\varepsilon$ — ε-окрестность функции f (как правило, в равномерной метрике)

$\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\xi}$

Список литературы

[1] *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

[2] *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.

[3] *Боровков А. А.* Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, №2. С. 253–289; Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, №4. С. 750–767.

[4] *Боровков А.А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.

[5] *Боровков А.А.* Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, № 1. С. 3–41.

[6] *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

[7] *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1980. 381 с.

[8] *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: URSS, 1998.

[9] *Боровков А. А.* О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм // Сиб. математический журнал. 2002. Т. 43, № 6. С. 1235–1264.

[10] *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 5-е изд., существенно перераб. и доп. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.

[11] *Боровков А. А.* Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий // Теория вероятностей и ее применения. 2009. Т. 54, вып. 4. С. 417–436.

[12] *Боровков А.А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2013.

[13] *Боровков А. А.* Аппроксимация второго порядка для распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом и бесконечной дисперсией // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59, № 1. С. 5–27.

[14] *Боровков А.А.* Интегральные теоремы для времени первого прохождения произвольной границы обобщенным процессом восстановления // Сибирский матем. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 961–981.

[15] *Боровков А.А.* Принципы больших уклонений в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 3. С. 562–595.

[16] *Боровков А. А.* О распределении времени первого прохождения случайным блужданием произвольной удаленной границы // Теория вероятностей и ее применения. 2016. Т. 61, вып. 2. С. 1–24.

[17] *Боровков А.А.* Теоремы непрерывности и асимптотика второго порядка в переходных явлениях для граничных функционалов от случайных блужданий // Математические труды. 2016. Т. 19, вып. 1. С. 46–69.

[18] *Боровков А.А.* Некоторые граничные задачи теории вероятностей, Saarbrucken: Palmarium academic publishing, 2016.

[19] *Боровков А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 2017. Т. 62, вып. 2. С. 217–240.

[20] *Боровков А.А.* Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 1. С. 37–54.

[21] *Боровков А.А.* Принципы умеренно больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64, вып. 2. С. 399–411.

[22] *Боровков А.А.* Распространение принципа инвариантности для обобщенных процессов восстановления на область умеренно больших и малых уклонений // ТВП (в печати).

[23] *Боровков А.А.* О принципах больших уклонений для обобщенных процессов восстановления // Математические заметки. 2019. Т. 106, вып. 6. С. 811–820.

[24] *Боровков А.А.* Интегро-локальные теоремы в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 64, вып. 6. С. 1229–1246.

[25] *Боровков А.А.* Граничные задачи для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 65, вып. 1. С. 29–59.

[26] *Боровков А.А., Боровков К.А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Том 1: Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит АНО. 2008. 652 с.

[27] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. матем. журнал. 1996. Т 37, № 4. С. 745–782.

[28] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I, II //Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, вып. 1. С .3–17; 2000. Т. 45, вып. 1. С. 5–19.

[29] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 289–317.

[30] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. матем. журнал. 2006. Т. 47, № 6. С. 1218–1257.

[31] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II, III // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, вып. 4. С. 627–655; 2012. Т. 57, вып. 1. С. 3–34; 2013. Т. 58, вып. 1. С. 37–52.

[32] *Боровков А.А., Могульский А.А.* О принципах больших уклонений для сумм случайных векторов и соответствующих функций восстановления в неоднородном случае // Математические труды. 2014. Т. 17, № 2. С. 84–101.

[33] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления // Сибирский матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 36–64.

[34] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60, вып. 2. С. 227–247; вып. 3. С. 417–438.

[35] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обощенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I, II // Сиб. мат. журнал. 2018. Т. 59, № 3. С. 491–513; 2018. Т. 59, № 4. С. 736–758.

[36] *Боровков А. А., Могульский А. А., Прокопенко Е. И.* Свойства функции уклонений обобщенного процесса восстановления и асимптотика преобразования Лапласа над его распределением // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64, вып. 4. С. 625–641.

[37] *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. IX, No. 3. С. 401–430.

[38] *Боровков К. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности для обобщенных процессов восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. С. 461–471.

[39] *Волков И.С.* О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний // Теория вероятностей и ее применения. 1958. Т. 3, № 4. С. 413–439.

[40] *Волков И.С.* Анализ некоторых предельных теорем для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6, № 3. С. 327–329.

[41] *Гамкрелидзе Н. Г.* О локальной предельной теореме для целочисленных случайных векторов // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59, вып. 3. С. 579–585.

[42] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. I. М.: Наука, 1971.

[43] *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949.

[44] *Гнеденко Б.В., Шериф А.* Предельные теоремы для крайних членов вариационного ряда // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 270, №. 3. С. 523–525.

[45] *Захари С., Фосс С. Г.* О точной асимптотике максимума случайного блуждания с приращениями из одного класса распределений с тонкими хвостами // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47, № 6. С. 1265—1274.

[46] *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.

[47] *Коршунов Д.А.* Критический случай теоремы Крамера–Лундеберга об асимптотике распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, вып.6. С. 1335–1340.

[48] *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Иностранная литература, 1962.

[49] *Миталаускас А.* О многомерной предельной теореме для решетчатых распределений // Тр. Лит. ССР, Сер. Б. 1960. Т. 2, № 22. С. 3–14.

[50] *Могульский А.А.* Малые уклонения в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 4. С. 755–765.

[51] *Могульский А.А.* Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сибирский математический журнал. 1982. Т. 22, № 3. С. 161–174.

[52] *Могульский А.А.* Принцип больших уклонений для обобщенного пуассоновского процесса // Математические труды. 2016. Т. 19, № 2. С. 119–157.

[53] *Могульский А.А.* Об одном свойстве преобразования Лежандра // Математические труды. 2017. Т. 20, № 1. С. 145–157.

[54] *Могульский А.А.* Расширенный принцип больших уклонений для процесса с независимыми приращениями // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 3. С. 660–672.

[55] *Могульский А. А.* Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 21–41.

[56] *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обощенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I, II, III // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 475–502; С. 503–527; С. 528–553.

[57] *Могульский А. А., Прокопенко Е. И.* Локальные теоремы для многомерных арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Математические труды. 2019. Т. 22, № 2. С. 106–133.

[58] *Нагаев А.В.* Крамеровские большие уклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 2. С. 456–475.

[59] *Нумеллин Э.* Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.

[60] *Пресман Е.Л.* Методы факторизации и граничные задачи для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 4. С. 861–899.

[61] *Прохоров Ю. В.* О локальной предельной теореме для решетчатых распределений // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 535–538.

[62] *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Лит. матем. сб. 1963. Т. 3, № 1. С. 199–206.

[63] *Рауделюнас А. О.* О многомерной локальной предельной теореме // Лит. мат. сб. 1964. Т. 4, вып. 1. С. 141–145.

[64] *Рогозин Б. А.* Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 6. С. 1334–1363.

[65] *Розанов Ю. А.* О локальной предельной теореме теории вероятностей для решетчатых распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2, вып. 2. С. 275–280.

[66] *Розовский Л.В.* Оценки снизу вероятностей больших уклонений суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями // Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 260. С. 218–239.

[67] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1967.

[68] *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших уклонениях, Вильнюс: Мокслас, 1989.

[69] *Скороход А.В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, вып. 3. С. 289–319.

[70] *Смирнов Н.В.* Предельные законы распределения для членов вариационного ряда // Труды МИАН СССР. 1949. Т. 25. С. 3–60.

[71] *Ткачук С.Г.* Локальные предельные теоремы, допускающие большие уклонения, в случае устойчивых предельных законов // Изв. АН УзССР, Сер. физ.-мат. наук. 1973. Т. 17, № 2. С. 30–33.

[72] *Фролов А. Н.* Предельные теоремы для приращений обобщенных процессов восстановления // Записки научных семинаров ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 259–283.

[73] *Хинчин, А.Я.* Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями // Матем. сборник. 1938. Т. 3(45). С. 577–583.

[74] *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. Локальная теория. М.: Мир, 1968.

[75] *Aleskjavicene A.* Large deviations for homogeneous Markov chains // Litovsk. Math. Sb. 1965. V. 5. P.199–209.

[76] *Anscombe C. J.* Large sample theory of sequentional estimation // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1952. Vol. 48. P. 600–607.

[77] *Araujo A., Giné, E.* The central limit theorem for real and Banach valued random variables. New York: Wiley, 1980.

[78] *Asmussen S.* Approximations for the probability of ruin within finite time // Scandinavian Actuarial Journal. 1984. V. 1984. P. 31–57.

[79] *Asmussen S.* Applied Probability and Queues (Stochastic Modelling and Applied Probability), second ed., in: Applications of Mathematics (New York), vol.51, New York: Springer–Verlag, 2003.

[80] *Asmussen S. and Albrecher H.* Ruin probabilities. 2nd ed. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability 14. Hackensack, NJ: World Scientific, 2010.

[81] *Athreya K. B., Ney P. E.* A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 245. P. 493–501.

[82] *Azencott R.* Grandes deviations et applications // Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour VIII, 1978. Lecture Notes in Math. 1980. V. 774. P. 1–176. Springer, Berlin.

[83] *B. von Bahr.* Ruin probabilities expressed in tirms of ladder height distributions // Scandinavian Actuarial Journal. 1974. V. 1974. P. 190–204.

[84] *Billingsly P.* Convergence of probability measures. Second edition, New York,: John Wiley & Sons, 1999.

[85] *Bingham N. H., Goldie C. H., Teugels J. L.* Regular Variations. Cambrige: Cambrige University Press, 1987.

[86] *Borovkov A.A.* Asymptotic analysis of random walks. Light tailed jump distributions. Cambridge: Cambridge University Press.

[87] *Chung K. L.* A course in Probability Theory, 2-nd ed., New York: Academic Press, 1974.

[88] *Cinclar E.* Markov additive processes. I // Z. Warsch. verw. Gebiete. 1972. V. 24. P. 84–94.

[89] *Cinclar E.* Markov additive processes. II // Z. Warsch. verw. Gebiete. 1972. V. 24. P. 94–121.

[90] *Cramer H.* Collective risk theory, Stockholm: Erselte, 1955.

[91] *Csörgo M., Hervatt L., Steinebach J.* Invariance principles for renewal processes // Ann. Probability. 1987. Vol. 15. P. 1441–1460.

[92] *Csörgo M., Deheuvels P. and Hervatt L.* An approximation of stopped sums with applications in queueing theory // Adv. Appl. Probability. 1987. Vol. 19. P. 674–690.

[93] *Dembo A., Zeitouni O.* Large deviations techniques and applications. 2-nd ed. New York: Springer, 1998.

[94] *Doney R.A.* A large deviation local limit theorem // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1989. V. 105. P. 575–577.

[95] *Donsker M.D. and Varadhan S.R.S.* Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I, II, III, IV // Comm. Pure Math. 1975. V. 28. P. 1–47; 1975. V. 28. P. 279–301; 1976. V. 29. P. 389–461; 1983. V. 36. P. 183–212.

[96] *Drekic S. and Willmot G.E.* On the density and moments of the time of ruin with exponential claims // ASTIN Bull. 2003. V. 33, no. 1. P. 11–21.

[97] *J. Feng, T. G. Kurtz.* Large Deviations for Stochastic Processes. Mathematical Survays and Monographs, v. 131, AMS, 2006.

[98] *Foss S. G., Puhalskii A. A.* On the limit law of a random walk conditined to reach a high level // Stoch. Proc. and Appl. 2011. Vol. 121. P. 288–313.

[99] *Gudinas P.P.* Large deviations for sums of random variables connected in a Markov chain // Litovsk. Math. Sb. 1986. V. 26, no. 2. P.246–258.

[100] *Allan Gut.* Stopped Random Walks. Limit Theorem and Applications. 2-nd ed. New York: Springer, 2009.

[101] *Keilson J., Wishart D.* Addenda to processes defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. V. 63, no. 1. P.187–195.

[102] *Keilson J., Wishart D.* A central limit theorem for processes defined on a Markov chain // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. V. 60. P.547–567.

[103] *Kingman F. G.* On queues in heavy traffic // J.R. Statist. Soc., Ser.B. 1962. V. 24, no. 2. P. 383–392.

[104] *Komlós J., Major P. and Tusnády.* An approximation of partial sums of independent r.v.'s and the sample d.f. I // Z. Wahsch. Verw. Geb. 1975. V. 32. P. 111–131; 1976. V. 34. P. 33–58.

[105] *Korshunov D.* On subexponential tails for the maxima of negatively driven compound renewal and Lévy processes // Stochastic Processes and their Applications. 2018. V. 128, issue 4. P. 1316–1332.

[106] *Macci C.* Large deviations for compound Markov renewal processes with dependent jumps sizes and jumps waiting times // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2007, v. 14, p. 213–228.

[107] *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov chains and stochastic stability. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[108] *Miller H. D.* A convexity property in the theory of random variables defined on a finite Markov chain // Annals Math. Statist. 1961. V. 32. P. 1260–1270.

[109] *Ney P., Nummelin T.* Markov additive processes. I. Eigenvalue properties and limit theorems // Annals of Probability. 1987. V. 15, no. 2. P.561–592.

[110] *Ney P., Nummelin T.* Markov additive processes. II. Large deviations // Annals of Probability. 1987. V. 15, no. 2. P.593–609.

[111] *Renyi A.* On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 193–199.

[112] *Rvacheva E. L.* On domain of attraction of multidimensional distributions // Select Transl/ Math.Statist. and Probability. 1962. Vol. 2. P. 183–205.

[113] *Shepp L.A.* A local limit theorem // Ann. Math statistics. 1964. Vol. 35. P. 419–423.

[114] *Steinebach J.* Invariance principles for renewel processes when only moments of low order exist // Journal of Multivariate Analysis. 1988. Vol. 26. P. 166–183.

[115] *Steinebach J.* On the optimality of strong approximation rates for compound renewal processes // Statistics and Probability Letters. 1988. Vol. 6. P. 263–267.

[116] *Stone C.* A local limit theorems for nonlattice multidimensional distribution functions // Ann. Math. Statistics. 1965. Vol. 36. P. 546–551.

[117] *Stone C.* On local and ratio limit theorems // Proceedings of thr Fifth Berkeley Symposium of Math Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles, University of California. 1966. Bol. II, part II. P. 217–224.

[118] *Torrang I.* The law of the iterated logarithm–claster points of determinisyic and random subsequences // Probab. Math. Statist. 1987. Vol. VIII. P. 133–141.

[119] *Varadhan S.R.S.* Asymptotic probabilities and differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 261–286.

БОРОВКОВ Александр Алексеевич

Обобщенные процессы восстановления

Подписано в печать 06.07.2020
Формат 70x90
Гарнитура Times
Усл.-п. л. 33,13. Уч.-изд. л. 29,5
Тираж 250 экз.

Издатель — Российская академия наук

Публикуется в авторской редакции

Верстка и печать — ИМ СО РАН
Отпечатано в экспериментальной цифровой типографии РАН

Издается по решению научно-издательского совета
Российской академии наук (НИСО РАН)
и распространяется бесплатно