

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 65, номер 9, 2020

---

---

## ОБЗОР

Цилиндрические волноведущие структуры сложного сечения в СВЧ-узлах современных инфокоммуникационных систем

*Д. В. Лонкина, Д. С. Губский, В. В. Земляков*

835

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Волны в ЕВГ-волноводах, ориентированных вдоль главных оптических осей электромагнитного кристалла

*С. Е. Банков, В. И. Калинин, Е. В. Фролова*

852

Применение метода продолженных граничных условий к решению задачи дифракции волн на магнитоэлектрических рассеивателях сложной геометрии

*Д. В. Крысанов, А. Г. Кюркчан, С. А. Маненков*

864

---

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Аберрации эйконала в градиентных цилиндрических линзах

*А. С. Венецкий, В. А. Калошин*

872

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Оконные функции с квазипрямоугольным спектром

*З. Д. Лернер*

881

Импульсные сигналы с нулевой зоной автокорреляции для радиолокаторов с синтезированной апертурой

*Р. Н. Ипанов*

894

---

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

Повышение дальности действия сверхширокополосных прямохаотических средств связи

*А. С. Дмитриев, М. Г. Попов, А. И. Рыжов*

902

---

## ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

Резонансное ближнепольное СВЧ-зондирование ожоговых ран

*А. Г. Галка, А. К. Мартусевич, Д. В. Янин, А. В. Костров*

911

---

## НАНОЭЛЕКТРОНИКА

Инжекционная неравновесная спиновая поляризация в магнитном переходе  
с учетом спиновой подвижности электронов

*Е. А. Вилков, С. А. Никитов, О. А. Бышевский-Конопко, А. Р. Сафин,  
Л. А. Фомин, С. Г. Чигарев*

919

---

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Исследование контроллеров заряда солнечной панели

*Н. П. Гребенчиков, Д. О. Варламов, С. М. Зуев, Р. А. Малеев,  
А. А. Скворцов, А. П. Гребенчиков*

927

---

---

УДК 621.372.8

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЕДУЩИЕ СТРУКТУРЫ СЛОЖНОГО СЕЧЕНИЯ В СВЧ-УЗЛАХ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. Д. В. Лонкина<sup>а</sup>, Д. С. Губский<sup>а</sup>, В. В. Земляков<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>Южный федеральный университет,  
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону, 344090 Российская Федерация

\*E-mail: vvezemlyakov@sfnu.ru

Поступила в редакцию 13.04.2020 г.

После доработки 13.04.2020 г.

Принята к публикации 20.04.2020 г.

Представлен обзор цилиндрических волноведущих структур со сложной формой поперечного сечения и их использования в современных инфокоммуникационных системах. Рассмотрена история и перспективы развития данного типа СВЧ-элементов, проанализированы методы их электродинамического анализа. Представлены примеры использования сложных цилиндрических волноводных и коаксиальных структур как базовых элементов систем генерации сигналов, радиосвязи, радиолокации и зондирования.

DOI: 10.31857/S0033849420090053

### ВВЕДЕНИЕ

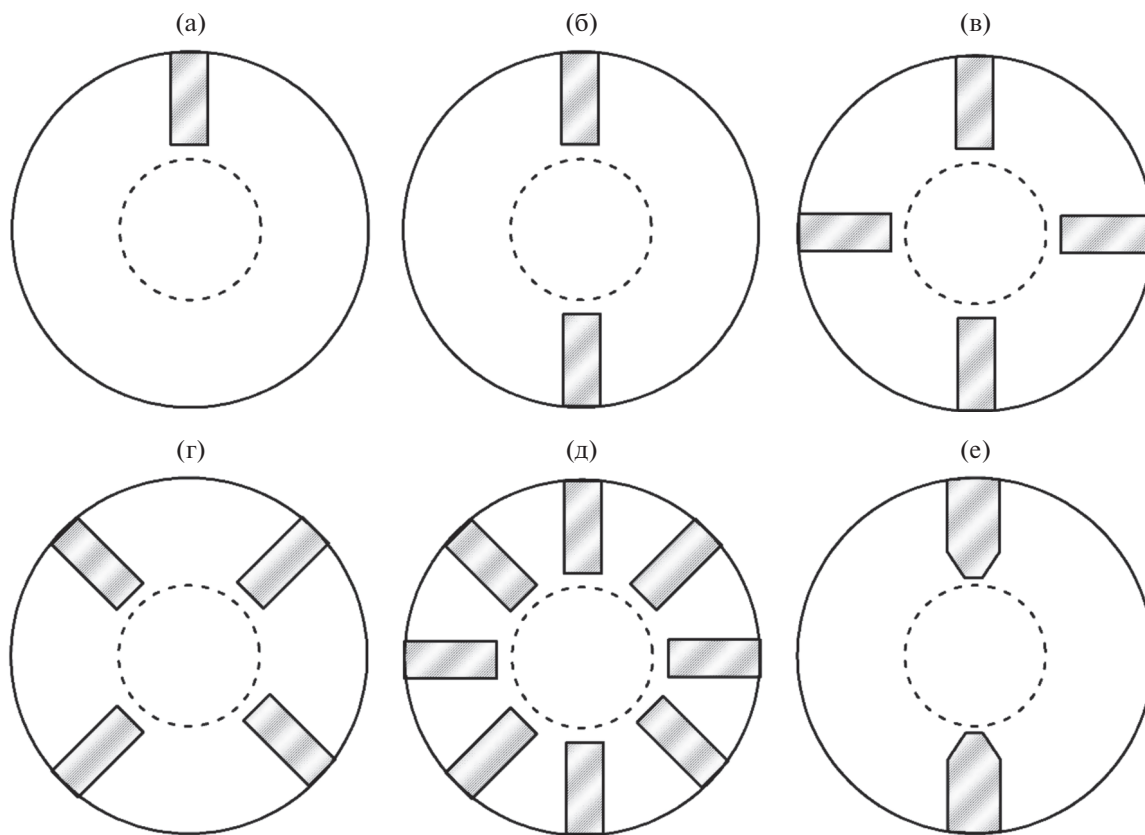
Развитие инфокоммуникационных систем требует постоянного совершенствования характеристик основных элементов и устройств приемопередающих узлов, таких как излучающие элементы, фильтры, направленные ответвители, мультиплексоры, фазовращатели. Хорошо известно, что применение волноводной техники позволяет заметно увеличить передаваемую мощность, уменьшить потери, повысить добротности частотно-селективных элементов, а также позволяет эффективно работать на более высоких, чем микроволновые и коаксиальные линии, частотах вплоть до терагерцового диапазона. Для обеспечения большей компактности и широкополосности волноводным элементам требуется переход от волноводов с простым сечением к волноводам с поперечным сечением сложной формы, а включение диэлектрических элементов позволяет дополнительно получить уникальные частотно-селективные и поляризационные свойства. Так, наибольшую популярность как в отечественной, так и в зарубежной СВЧ-технике, приобрели прямоугольные и круглые волноводы с металлическими гребнями и кусочно-слоистым диэлектрическим заполнением. Однако несмотря на ряд значительных преимуществ, элементная база на круглых волноводах с металлическими гребнями не получила столь широкого распространения, как на прямоугольных волноводах. Несмотря на значительное количество публикаций

о различных круглых волноводах, методах их расчета и возможности применения, имеющиеся данные носят несистематический характер и в полной мере не позволяют судить о развитии данных структур, алгоритмах, используемых для их анализа и новых областях применения.

В работе приведена информация о различных типах круглых волноводов, проанализированы методы для расчета электродинамических параметров и показаны области применения данных структур.

### 1. ТИПЫ КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ

В самом простом случае круглый волновод представляет собой металлическую трубу с внутренним воздушным заполнением. Электродинамические свойства таких волноводов широко известны и подробно описаны во многих работах, например, [1, 2]. Однако развитие прикладной электродинамики, освоение новых диапазонов электромагнитных волн и развитие СВЧ-техники приводит к тому, что элементная база СВЧ-устройств усложняется. Поэтому наибольший интерес для изучения с точки зрения практического применения представляют круглые регулярные волноводы сложного поперечного сечения, круглые волноводы с неоднородным диэлектрическим заполнением, а также сложные металлодиэлектрические неоднородности в круглом волноводе.



**Рис. 1.** Поперечные сечения круглого волновода с различным количеством гребней: с одним (а), с двумя (б), с четырьмя (в), с четырьмя гребнями и с повернутой плоскостью симметрии (г); с восемью гребнями (д), с двумя гребнями с угловым срезом (е).

Прежде всего рассмотрим круглые волноводы сложного поперечного сечения [3–13]. Данный вид волноводов хорошо известен благодаря расширению полосы одномодового режима работы. В качестве неоднородностей могут выступать регулярный продольный металлический гребень или несколько металлических гребней различной формы поперечного сечения, расположенные в круглом волноводе с определенным периодом или в определенном порядке по поперечному сечению.

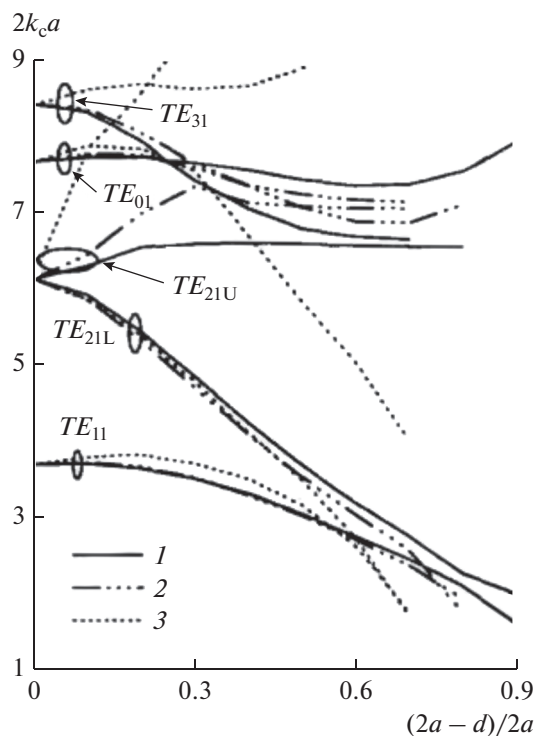
В литературе встречается описание круглых волноводов с различной формой и конфигурацией продольных регулярных металлических гребней. Известны круглые волноводы с одним прямоугольным гребнем, с двумя, с четырьмя, с восемью и с гребнями с угловым срезом (рис. 1а–1е).

Исследования круглых волноводов со сложным поперечным сечением начались со структуры, изображенной на рис. 1а [3], так как данная структура обладала интересными свойствами, а именно низкими значениями критической частоты основной моды и низким волновым сопротивлением.

В структуре, приведенной на рис. 1б, было введен еще один дополнительный гребень, расположенный

симметрично, относительно центра. Подобное симметричное расположение удобно использовать при расчетах и анализе, так как это позволяет рассматривать не всю структуру волновода, а только ее часть.

Авторы некоторых работ подробно изучали свойства четырехгребневого круглого волновода (см. рис. 1в), применяя различные методы для расчета характеристик [4–6]. В отличие от одно- или двухгребневого волновода основная мода в волноводе с четырьмя гребнями имеет критическую частоту, очень близкую к критической частоте второй моды. Таким образом, ширина полосы одномодового режима работы оказывается очень мала. Однако, когда удастся подавить или не возбудить вторую моду, величина одномодового режима может быть очень широкой (рис. 2). Благодаря этому уникальному свойству, а также возможности двойной поляризации и низкого сопротивления волноводы с четырьмя гребнями широко используются в антеннах и СВЧ-устройствах [4]. Сравнение четырехгребневого круглого волновода с аналогичным волноводом прямоугольного сечения показывает, что такие его характеристики, как затухание и допустимая мощность, значительно лучше [5].



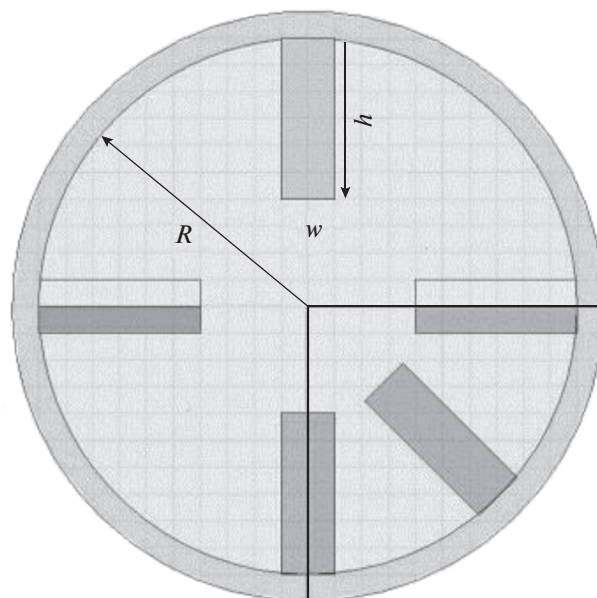
**Рис. 2.** Зависимость нормированных критических волновых чисел от геометрии гребня  $TE_{11}$ -,  $TE_{21L}$ -,  $TE_{01}$ -,  $TE_{21U}$ - и  $TE_{31}$ -мод в круглом четырехгребневом волноводе для  $s/2a = 0.06$  (1), 0.12 (2) и 0.30 (3) [4, рис. 1с].

Также в данной работе [5] отмечается, что за счет изменения геометрических параметров гребней, таких как ширина и высота, можно добиться наиболее широкой полосы одномодового режима. Как видно из рис. 1в, четырехгребневый волновод имеет две плоскости симметрии, поэтому для его анализа можно рассматривать 1/4 часть поперечного сечения.

Кроме того, поворачивая плоскость симметрии на  $45^\circ$ , четырехгребневый волновод может выглядеть как показано на рис. 1г, и в этом случае его можно рассматривать как щелевой круглый волновод [6].

Интересный подход к рассмотрению гребневого волновода описан в работе [7], где проведено исследование и сравнение двух-, четырех- и восьмигребневых волнопроводов (рис. 1д). При этом отмечено, что восьмигребневый волновод может быть представлен как два четырехгребневых волновода в одной структуре.

Проведенные исследования зависимости критических волновых чисел от геометрических параметров гребней и визуализации электромагнитного поля показали, что в восьмигребневых волноводах невозможно глубокое расположение гребней, так как при определенных соотношении



**Рис. 3.** Четырехгребневый волновод с параметрами  $R$ ,  $h$ ,  $w$ , где  $R$  – радиус волновода,  $h$  – высота гребня,  $w$  – ширина гребня [7].

ях высоты гребня и радиуса структуры возникают ограничения в оптимизации ширины одномодового режима работы. Фактически оптимальная ширина одномодового режима работы достигается при соотношении  $h/R = 0.21$ , где  $h$  – высота гребня, а  $R$  – радиус волновода (рис. 3).

Как видно, описанные выше работы по исследованиям гребневых волнопроводов фокусировались на структурах с гребнями одной и той же геометрической формы, изменялось лишь количество гребней и период их расположения.

Следующим этапом развития круглых волнопроводов с гребнями стало изменение самой формы гребня. В результате появились гребни Т-образной формы [8, 9], гребни с угловым срезом [10, 11], радиальные гребни [12] и радиальные гребни со сложной формой [13].

Впервые Т-образные гребни (рис. 4) были изучены в структурах волнопроводов с прямоугольной формой поперечного сечения [14–16]. Данные структуры показали, что благодаря наличию гребней Т-образной формы происходит значительное увеличение полосы одномодового режима работы по сравнению с волноводами с прямоугольными гребнями.

Аналогичным образом для улучшения ширины полосы одномодового режима был исследован круглый волновод с двумя Т-образными гребнями [8, 9]. В работах проведены исследования распределения электрического поля первых четырех Н-мод, рассчитаны нормированные значения

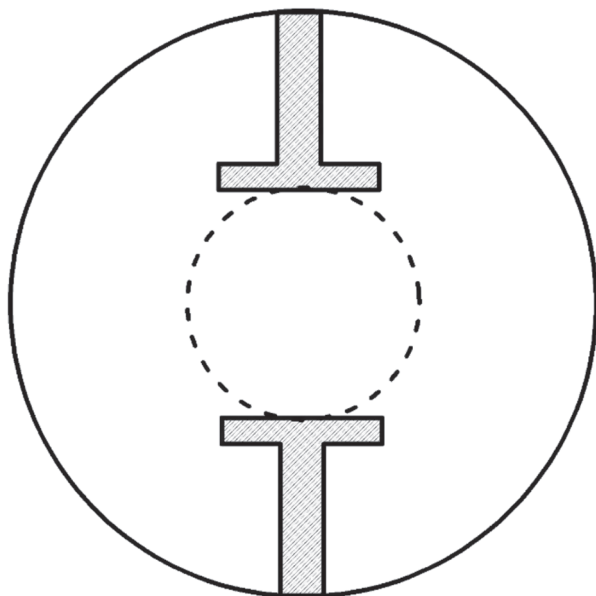


Рис. 4. Круглый волновод с Т-образными гребнями.

критических волновых чисел и проведено сравнение с круглым двухгребневым волноводом.

Ряд авторов предложили использовать ребра не прямоугольного поперечного сечения, а с заострением конца ребра. Благодаря гребням с угловым срезом (рис. 1е) удастся достичь не только более широкой полосы одномодового режима, но и увеличить допустимую мощность устройства.

Впервые данное свойство экспериментально было показано в работе [10]. Позже круглый волновод с четырьмя подобными гребнями был исследован в [11].

Для круглого волновода с гребнями с угловым срезом толщина гребня  $W$  не обязательно должна быть меньше зазора между гребнями (рис. 5), что является обязательным условием в четырехгребневом круглом волноводе с гребнями прямоугольной формы. Отсутствие такого ограничения позволяет варьировать эти параметры для еще большего увеличения полосы одномодового режима.

В работе [12] исследована структура, изображенная на рис. 6а. Визуализация электромагнитного поля позволяет увидеть области с более плотным расположением силовых линий для  $H$ - и  $E$ -волн, что может быть важным при проектировании частотно-селективных устройств.

Следует отметить, что чем более точно задана геометрия гребня в поперечном сечении круглого волновода, тем более успешно будет осуществлен процесс создания устройств на основе данных структур. В указанных выше работах был рассмотрен круглый волновод с гребнями, описанными в прямоугольной системе координат. Одна-

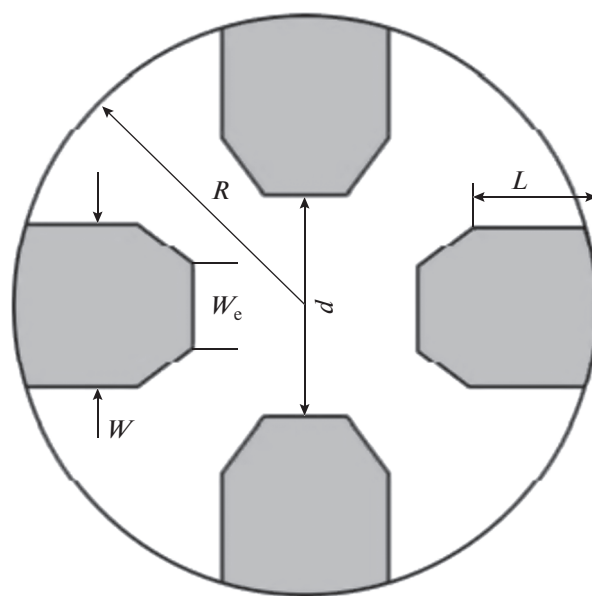


Рис. 5. Поперечное сечение четырехгребневого круглого волновода с ребрами с угловым срезом [11].

ко если гребням соответствует цилиндрическая система координат, это позволяет избежать в рамках строгого анализа смешанных систем координат, которые возникают при использовании прямоугольных выступов в цилиндрическом волноводе. К тому же гребни конической формы более просты в практической реализации, нежели прямоугольные.

Подобные радиальные гребни (рис. 6б) рассмотрены в работе [13], в которой проведены исследования зависимости критических волновых чисел от геометрических параметров гребня, например от угла раскрыва гребня. Данное исследование показало, что при увеличении раскрыва гребня ширина одномодового режима увеличивается.

Структуры с одним, двумя, тремя и четырьмя радиальными гребнями проанализированы в работе [17]. В ней приведены зависимости критических волновых чисел для разных параметров гребней, а именно для разной ширины гребня и разной глубины.

Круглые коаксиальные волноводы были исследованы в работе [18]. Рассматривались две волноводные структуры: в первой из них центральный проводник имеет остроконечную винтовую форму, во второй — внешний проводник лопастной формы (рис. 7). Для данных структур приведено подробное описание метода и рассчитаны критические волновые числа для разных геометрических параметров.

Кроме волноводов с металлическими гребнями особый интерес представляют волноводы с диэлектрическим заполнением. Одним из основных пре-

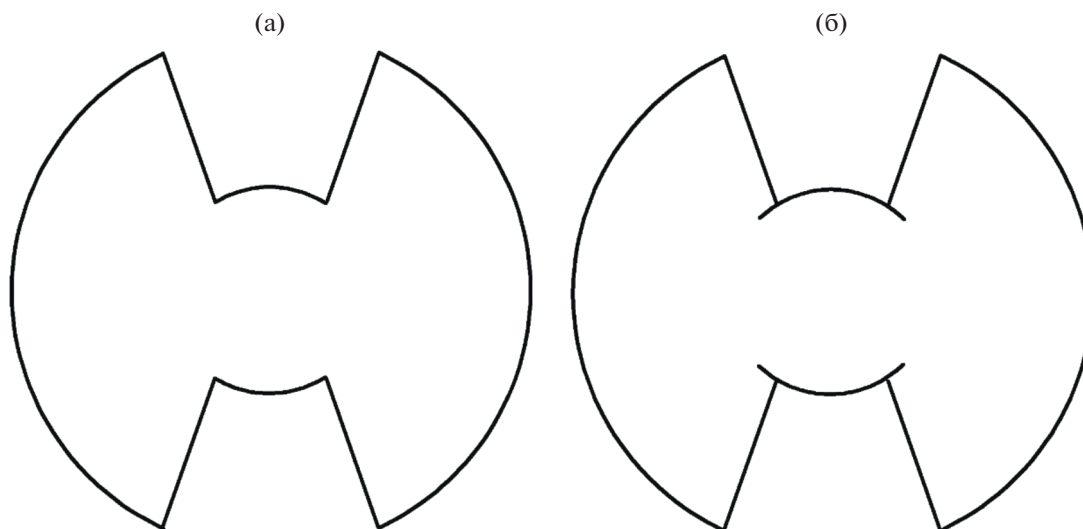


Рис. 6. Поперечное сечение круглого волновода с гребнями конечной толщины (а) и со сложными радиальными гребнями конечной толщины (б).

имуществом диэлектрически заполненного волновода является уменьшение его размеров, что может быть очень полезно в практических применениях [19].

Как видно, существует огромное количество разнообразных структур, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки. При этом в настоящее время данные структуры активно исследуются и создаются новые. Однако надо отметить, что исследования связаны не только с усложнением или изменением самих структур, но и с созданием новых методов или усовершенствованием существующих для расчета характеристик и электродинамического анализа волноводных цилиндрических структур со сложной формой поперечного сечения. При этом необходимо отметить, что количество методов, применяемых для исследования характеристик и параметров, огромно, так как каждая структура имеет свои особенности, накладывающие определенные условия и ограничения при проведении расчетов.

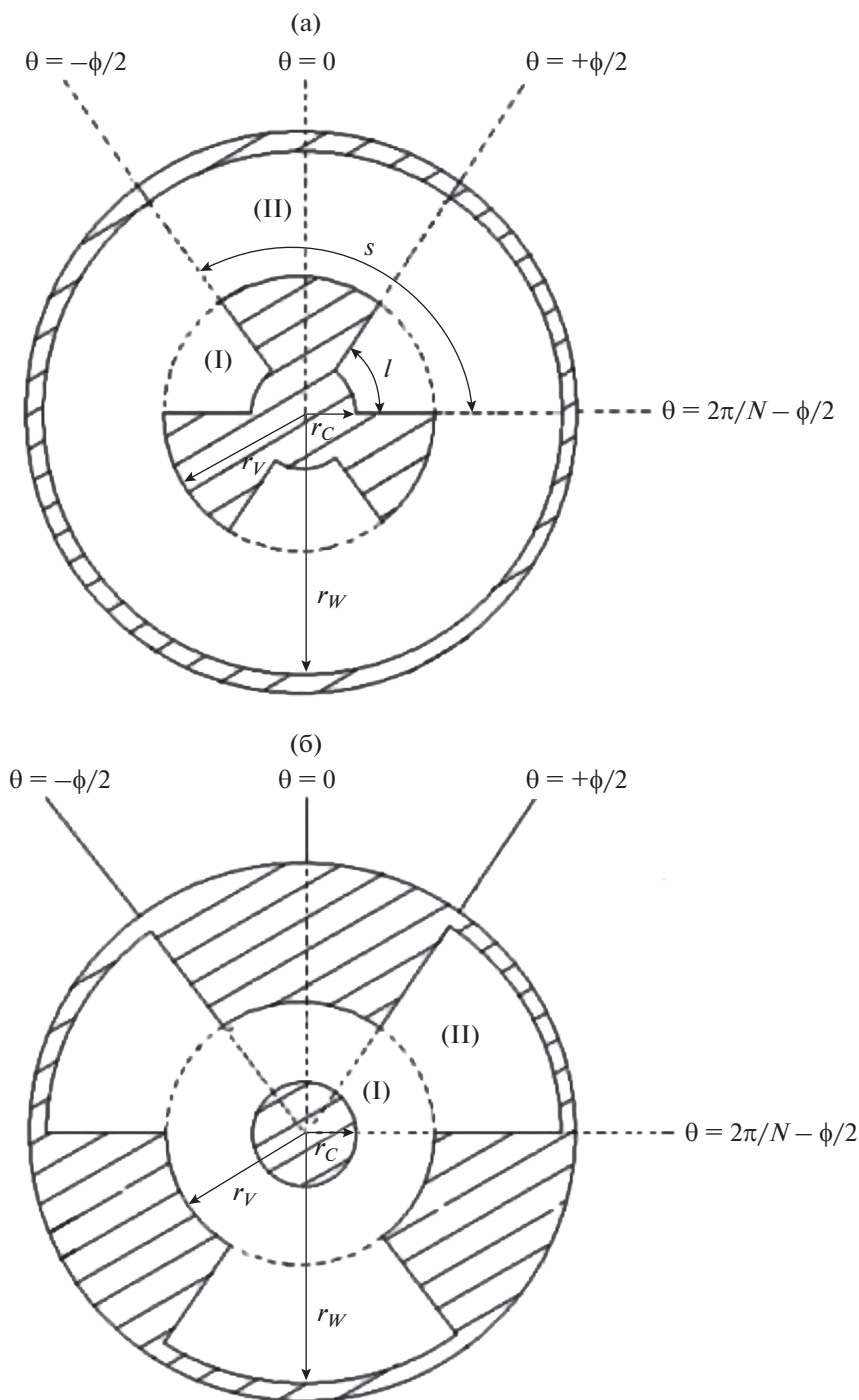
## 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Методы, используемые для расчета электродинамических параметров волноводных структур, можно разделить на три группы: аналитические, численные и численно-аналитические. Аналитические методы позволяют решить краевую задачу в явном виде. Однако их применение ограничено простейшими конфигурациями, и они практически не используются для решения современных задач компьютерного моделирования. При использовании численных методов решение задачи получают в виде числовых значений в конечном наборе пространственных точек. К численным методам относятся метод конечных элементов, метод конечных

разностей, метод граничного элемента. В случае численно-аналитических методов решение задачи выражается с помощью некоторых функций, а удовлетворение граничным условиям производится численно. К численно-аналитическим методам относятся метод конечных элементов с масштабированными границами, метод частичных областей. Широкое распространение получили также метод согласования мод, метод связанных интегральных уравнений и метод R-функций.

Среди этих методов метод конечных элементов является одним из наиболее широко распространенных [20]. Данный метод основан на представлении и приближенном решении краевых задач с помощью решения дифференциальных уравнений в частных производных. При использовании данного метода поперечное сечение круглого волновода разбивается на несколько областей (рис. 8), в каждой из которых выбирается функция, значение которой на границах областей является решением заданной задачи.

Долгое время данный метод применялся для анализа структур только в прямоугольной системе координат [21]. Однако для цилиндрических волноводов невозможно с помощью декартового элемента полностью заполнить их поперечное сечение. В декартовой геометрии конечный элемент разбиваемой области представляет собой треугольник. В круговой полярной геометрии новый конечный элемент снова является треугольником, контуры которого, как правило, представляют собой круговые спирали. В таком случае данный метод может быть применен для анализа круглых, эллиптических волноводов, а также неоднородностей, имеющих конусообразную форму. Преимуществом данного метода является его универсальность при



**Рис. 7.** Поперечное сечение коаксиального волновода с гребневым центральным проводником (а) и с проводником винтовой формы (б).

решении задач с различной геометрией, различными материалами и различными граничными условиями [22]. Однако при наличии открытой области, возникновении особенности электромагнитного поля на острых углах в исследуемой области, состоящей из нескольких материалов, данный метод имеет недостатки. При наличии

бесконечной области можно предположить, что на достаточно далекой границе характеристика будет равна нулю. Но при таком подходе ухудшается точность расчетов и в вычислительном отношении для моделирования распространения волн данный метод оказывается невыгодным [23, 24]. Для второй проблемы, связанной с наличием



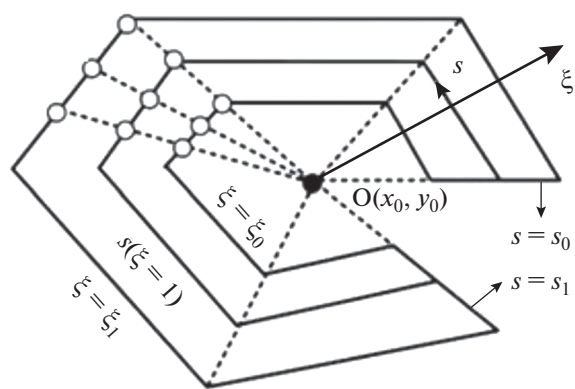


Рис. 8. Координатное представление метода конечных элементов с масштабированными границами [20].

сингулярности в краевой задаче, возникает ухудшение характеристик численного решения. Это связано с тем, что вблизи сингулярной точки с особенностью электромагнитного поля получаемые решения являются большими или неограниченными, поэтому оно не может быть точно аппроксимировано локально кусочно-полиномиальной функцией на нормальной сетке. В результате было предложено несколько специальных методов конечных элементов, которые подходят для конкретного вида особенности электромагнитного поля. Эти методы обычно основаны на некотором знании формы сингулярности и могут быть классифицированы следующим образом.

Первый метод — это добавление сингулярной функции в пространство конечных элементов, что позволяет ей приближаться к решению вблизи сингулярности.

Второй метод — специальные сингулярные элементы используются для аппроксимации сингулярного решения.

Третий метод — это локальное уточнение сетки, благодаря чему контролируется распределение вычислительной ошибки.

Метод конечных элементов дает точные результаты, однако требует большого времени вычисления. Недавно созданный гибридный метод, состоящий из мультимодального вариационного метода и метода конечных элементов, успешно применяется для анализа неоднородностей в различных структурах, улучшая время вычисления и использование оперативной памяти компьютера [25].

По сравнению с другими модальными методами, такими как метод согласования мод и анализ обобщенной матрицы рассеяния, мультимодальный вариационный метод использует матрицу рассеяния с меньшим размером, что сводит к минимуму использование необходимых вычислительных ресурсов и время расчета [26].

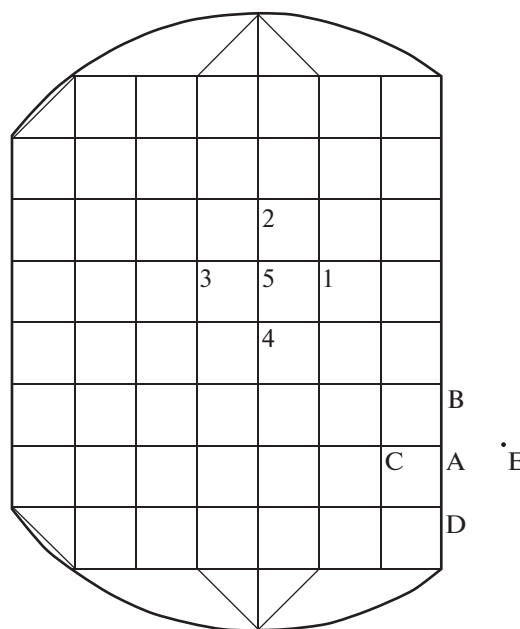


Рис. 9. Стандартное наложение сетки на волноводную структуру [27].

Одним из первых методов для решения краевых задач был метод конечных разностей. Данный метод основан на решении дифференциальных уравнений, сводящихся к разностным схемам.

При использовании данного метода на поперечное сечение волновода накладывается квадратная или прямоугольная сетка, разбивающая сечение волновода на квадратные или прямоугольные области соответственно [27, 28] (рис. 9). В узлах, образовавшихся областей, в соответствии дифференциальным уравнениям ставятся разностные схемы. И далее, задавая граничные условия, можно найти решения задачи в узлах области.

Однако с помощью данного метода можно рассчитать электродинамические параметры не только для основной моды круглого волновода, но и для мод высшего порядка (рис. 10) [29]. Разновидностью метода конечных разностей является метод конечных разностей во временной и частотной областях, отличие которых состоит в представлении уравнений Максвелла соответственно во временной области и в частотной областях [30].

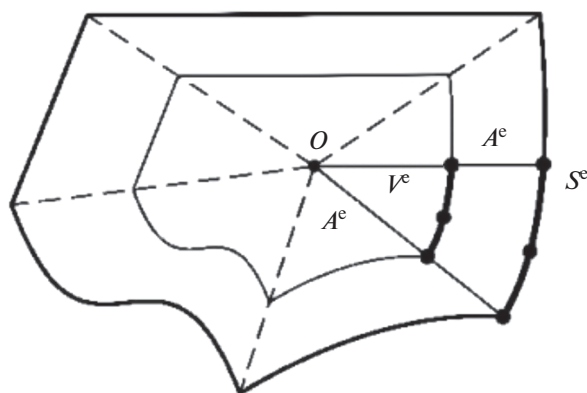
Метод граничного элемента является альтернативой методу конечных элементов. Он основан на решении интегральных уравнений. В отличие от метода конечных элементов производится разбиение не всей области, а только границ областей, так как имеющиеся дифференциальные уравнения в области сводятся к интегральным уравнениям на границе с помощью функции Грина. Это значительно упрощает процесс вычисления характеристик. Кроме того, данный метод можно

Размер сетки	$TM_{01}$	$TM_{11}$	$TM_{31}$	$TE_{11}$	$TE_{21}$	$TE_{01}$
$h$	2.3439	3.6935	5.9385	1.7460	3.0582	3.7727
$h/2$	2.3898	3.7971	6.2685	1.7933	3.0354	3.8685
$h/4$	2.4013	3.8322	6.3670	1.8337	3.0116	3.8530
$h/8$	2.4050	3.8351	6.3809	1.8383	3.0027	3.8416
$h/16$	2.4079	3.8378	6.3870			
Точное значение	2.4048	3.8317	6.3801	1.8411	3.0500	3.8320

**Рис. 10.** Критические нормированные числа различных мод и при разных размерах сетки для круглого волновода с параметрами  $h = 0.6$ ,  $a = 3.0$  [29].

применять к задачам с бесконечными границами. Но и он имеет определенные недостатки: метод применяется только для границ, не имеющих углов, так как в данных местах отсутствует решение интегрального уравнения и к тому же матрицы, получаемые для расчета неизвестных параметров, являются полными, что требует большой вычислительной мощности. Метод граничного элемента использовался для анализа круглого волновода с одним гребнем в работе [31]. Точность нахождения критических волновых чисел варьировалась с помощью количества членов в ряду функции Грина.

Одной из разновидностей метода конечных элементов является метод конечных элементов с масштабированными границами. Данный метод — это сочетание метода конечных элементов и метода граничного элемента. Его универсальность, точность и эффективность не только равны, но и потенциально лучше, чем метод конечных элементов и метод граничных элементов для определенных задач. Впервые данный метод был предложен в работе [32]. Для того чтобы удобно задать граничные



**Рис. 11.** Секция с масштабированными границами [32].

условия, вводятся масштабированные граничные координаты, которые состоят из так называемой радиальной координаты и двух окружных координат, определяемых конечной дискретизацией граничного элемента (рис. 11). Тогда радиальная координата постоянна на границе.

Применение метода конечных элементов с масштабированными границами в двух окружных направлениях, параллельных границе, дает линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с радиальной координатой в качестве независимой переменной. Таким образом, сила метода конечных элементов с масштабированной границей состоит в преобразовании дифференциальных уравнений в частных производных в обычные дифференциальные уравнения, которые могут быть решены аналитически. В этом случае только граница дискретизируется конечными элементами с криволинейной поверхностью. Данный метод применялся в работе [33] для расчета характеристик четырехгребневого круглого волновода со срезанными углами.

Для решения краевых задач можно использовать метод R-функций. [34]. Теория R-функций позволяет рассматривать различные области сложной формы, используя булеву алгебру и аналитическую геометрию. В данном методе уравнения границ области выражаются в неявном виде, подбирается такая функция, у которой ее значение во внутренней области является положительным, а за пределами области — отрицательным. Далее подбираются такие аналитические функции, которые удовлетворяют граничным условиям.

Широкое распространение при расчете электродинамических характеристик волноводных структур получил метод частичных областей. Данный метод предполагает разбиение поперечного сечения волновода на несколько областей с определенными граничными условиями. Далее в каждой частичной области задаются компоненты полей, а

на границе раздела происходит их сшивание. Авторы разработанного метода отмечают, что при наличии острых углов, которые характерны для волноводов со сложной формой поперечного сечения, сходимость данного метода ухудшается [35]. Однако вводя дополнительные функции на границе сшивания, учитывающие данные особенности, можно значительно улучшить сходимость. Такой метод получил название метод частичных областей с учетом особенности электромагнитного поля на ребре и активно использовался авторами данного обзора для решения многих электродинамических задач [36–39]. Так, в работе [39] критические волновые числа и их зависимость от параметров гребней приведены для случаев круглого волновода с тонкими металлическими гребнями, рассмотрен случай дифракции волн при их падении на протяженную неоднородность.

В случае многослойного диэлектрического заполнения волновода при использовании метода частичных областей количество линейных алгебраических уравнений увеличивается, что значительно затрудняет процесс расчета характеристик. Авторы работы [40] предлагают использовать функции Грина и теорию длинных линий для анализа многослойных структур. С помощью данного метода рассчитан круглый волновод с многослойным заполнением.

Для расчета дисперсионных характеристик и затухания диэлектрически заполненных волноводов существуют общепринятые методы: энергетический метод, метод возмущений и метод комплексных параметров. Однако они являются приближенными. А метод расчета, при котором функции действительного аргумента продолжают на комплексную плоскость, является строгим [41]. Однако при использовании данного метода необходимо добавлять дополнительные частичные области, что значительно усложняет задачу. К тому же диэлектрическая проницаемость в этом случае является постоянной величиной.

Если диэлектрическая проницаемость меняется ступенчато, то можно воспользоваться модификацией метода Галеркина для расчета двухслойного экранированного волновода и волновода с градиентным заполнением [42]. Сравнение с результатами, получаемыми из расчета с помощью метода частичных областей, доказало эффективность и корректность предложенного метода. К тому же он обладает более высокой скоростью расчета.

Также в случае неоднородно заполненного диэлектрического волновода (рис. 12) для расчета постоянных распространения можно воспользоваться методом задачи Коши [43].

Предложенная методика расчета приближенного собственного значения оказывается работоспособной в случае дискретных собственных значений. К тому же расчеты, производимые по данной разрабо-

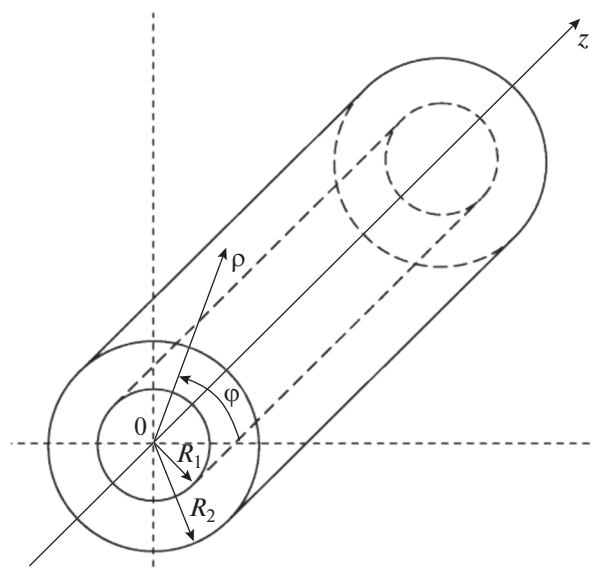


Рис. 12. Исследуемая структура по методу задач Коши [43].

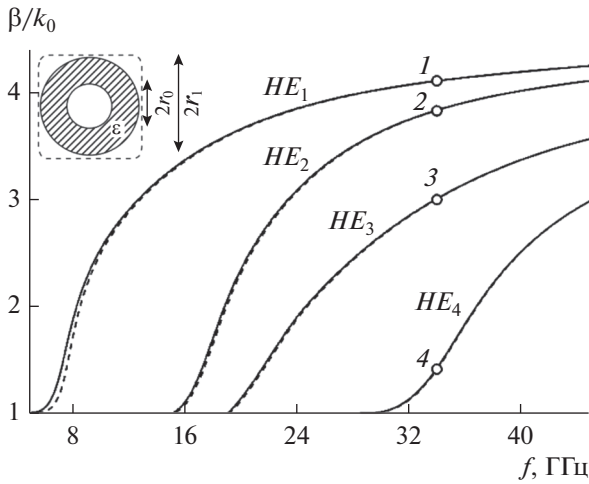
танной методике, производятся значительно быстрее, нежели с помощью интегральных дисперсионных уравнений, а также с любой задаваемой точностью.

Актуальным исследованием является также изучение открытых диэлектрических волноводов с различным поперечным сечением.

При решении данной задачи существует несколько особенностей и сложностей методов, применяемых для расчетов. В первую очередь одной из особенностей является слабонаправляемость структуры. Чтобы решить данную проблему, в работе [44] применен гибридный метод на основе метода интеграла Фурье и модифицированного метода Галеркина. С помощью данного подхода были рассчитаны диэлектрические круглые волноводы разного сечения, а именно: круглый волновод простого сечения, открытый трубчатый диэлектрический волновод (рис. 13), открытый трубчатый диэлектрический волновод с крестообразным сечением и открытый трубчатый диэлектрический волновод со звездообразным поперечным сечением.

Также для открытых круглых волноводов может быть применим модифицированный метод дискретных источников [45]. Однако из-за специфики данного метода, при расчете постоянных распространения могут возникнуть дополнительные корни, не имеющие физического смысла. Чтобы избежать этого, авторами работы предложено решать дополнительную задачу дифракции.

Очень часто для расчета круглых открытых диэлектрических волноводов используют спектральный метод, предложенный в работе [46]. В-первых, он обладает универсальностью, так как с

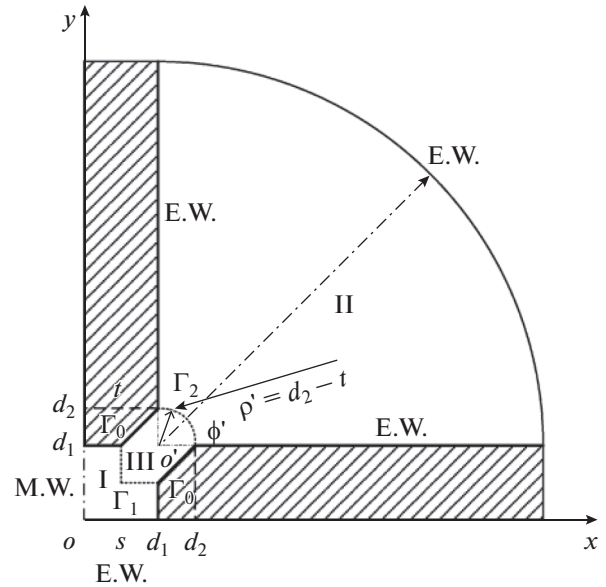


**Рис. 13.** Дисперсионные характеристики первых четырех (1–4) несимметричных волн трубчатого диэлектрического волновода:  $r_0 = 1.7$  мм,  $\epsilon = 20$  [44], на вставке – конфигурация трубчатого диэлектрического волновода.

его помощью можно рассчитывать открытые диэлектрические волноводы с любой геометрической формой поперечного сечения и высокими значениями диэлектрической проницаемости. А во-вторых, он позволяет найти весь спектр волн для заданного частотного диапазона для открытых диэлектрических волноводов с произвольным поперечным сечением.

Метод согласования мод [47] является одним из наиболее эффективных и точных методов моделирования волноводных структур. Ключевая идея этого метода состоит в разделении анализируемой структуры на отдельные волноводные подобласти. Электромагнитное поле в каждой из этих областей может быть выражено как суперпозиция волноводных мод. Конкретная амплитуда каждой моды учитывает граничные условия между соседними областями, а также возбуждение и нагрузку всей структуры. Метод наиболее эффективен, когда моды каждой подобласти известны аналитически. Метод согласования мод был использован в работе [48] для вычисления матрицы рассеяния на стыке простого круглого волновода и двух- или четырехгребневого волновода. Полученный алгоритм обладал хорошей точностью и использовался для проектирования и оптимизации пятизвенного фильтра на основе двухгребневого круглого волновода и четырехгребневого волноводного трансформатора.

В работе [49] для расчета критических волновых чисел четырехгребневого круглого волновода с гребнями с угловым срезом использовался гибридный метод: сочетание метода согласования мод и метода граничного элемента. Как известно, метод граничного элемента использовался для

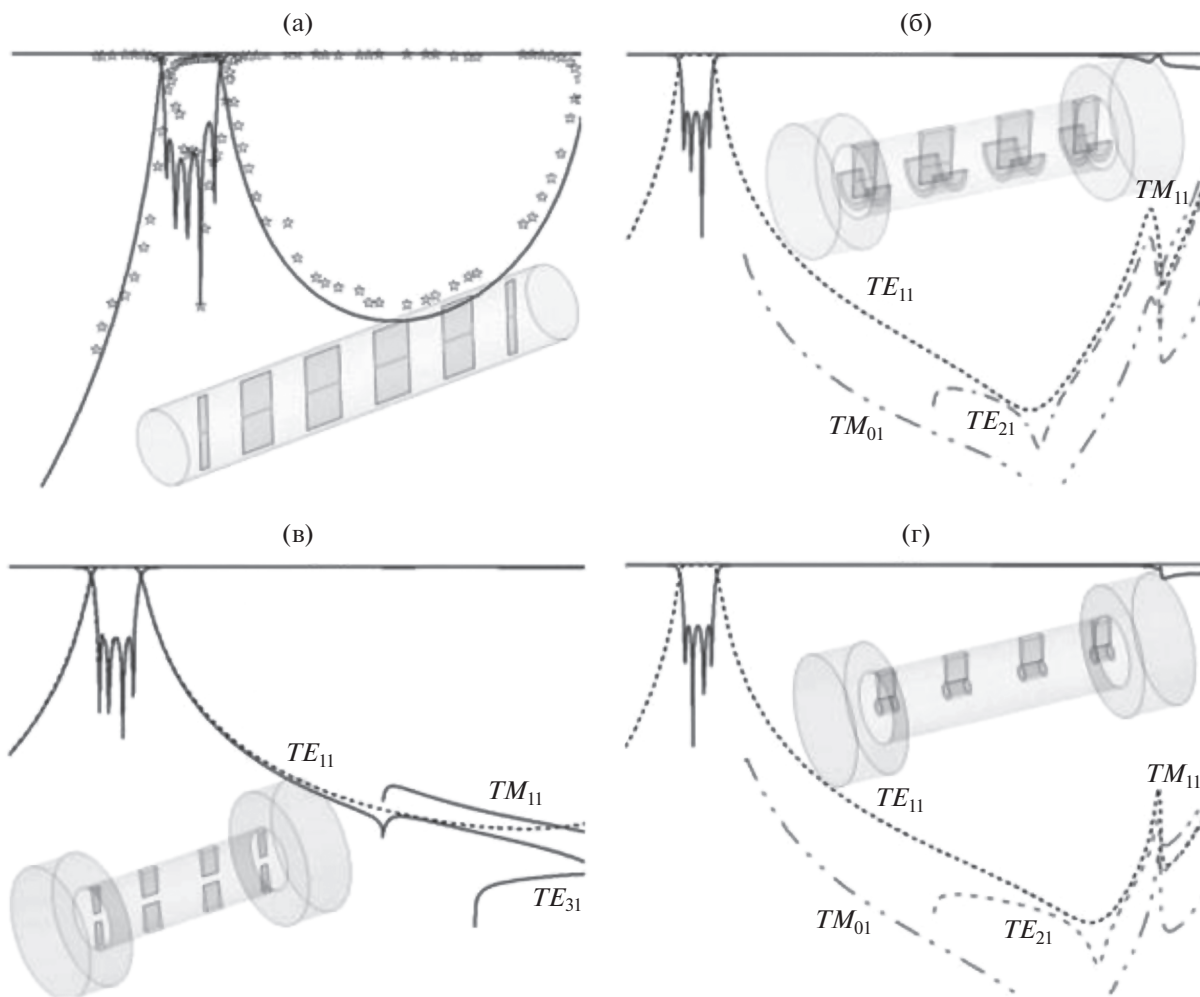


**Рис. 14.** Одна четвертая область поперечного сечения волновода: I, II, III – частичные области, E.W. – граничное условие типа электрической стенки, M.W. – граничное условие типа магнитной стенки [49].

анализа круглого волновода с одним гребнем. Теоретически, используя данный метод, можно рассчитать характеристики для любого поперечного сечения волновода. Однако в случае четырехгребневого круглого волновода с гребнями с угловым срезом контур поперечного сечения оказывается очень сложным для расчета. Поэтому, используя симметрию структуры, сечение волновода разделили на четыре идентичные области (рис. 14). Затем одна из этих областей была поделена еще на три подобласти: I, II области с простой геометрией рассчитываются методом согласования мод, III область со сложной геометрией сечения рассчитывается методом граничного элемента.

Подробное описание метода связанных интегральных уравнений дано в работе [50]. Данный метод применен для анализа гребневого круглого волновода. С помощью него можно задать условия для ребер, улучшить сходимость и рассчитать как симметричные, так и асимметричные структуры.

Многообразие методов, используемых для расчета и анализа электродинамических параметров круглых волноводов со сложной формой поперечного сечения и неоднородным диэлектрическим заполнением, обусловлено не только огромным разнообразием самих структур, но также и широкой областью их применения. Следует отметить, что большинство существующих методов не являются универсальными, так как с их помощью можно рассчитать ограниченное количество структур по



**Рис. 15.** Амплитудно-частотные характеристики полосно-пропускающих фильтров на круглых волноводах с металлическими гребнями различной конфигурации [51]: кривые – результаты моделирования, звездочки (а) и пунктир (б) – эксперимент.

форме. Поэтому задача о разработке высокоскоростных универсальных методов и алгоритмов расчета остается актуальной.

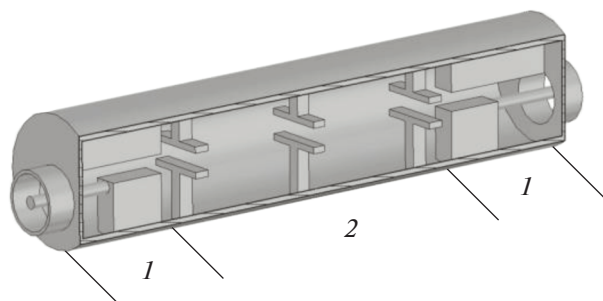
### 3. ПРИМЕНЕНИЯ ДАННЫХ СТРУКТУР

Волноводы со сложной геометрической формой поперечного сечения находят широкое применение в современных устройствах [51–69]. Они используются в приемных и передающих антеннах, в устройствах, предназначенных для получения круговой поляризации, в делителях мощности. Кроме того, такие волноводные структуры обладают частотно-селективными свойствами, поэтому применяются для построения различных типов фильтров: полосно-пропускающих, полосно-запирающих, нижних и верхних частот.

Как известно, фильтры, построенные на запредельных волноводах, имеют меньшие размеры и лучшее затухание в полосе заграждения [51]. Для та-

ких фильтров используются круглые волноводы с произвольно расположенными гребнями. В работе [51] в качестве примеров рассмотрены четыре конструкции фильтров: на двухгребневом круглом волноводе, на круглом волноводе с одним Т-образным гребнем, на круглом волноводе с гребнями в виде “ключа” и на круглом волноводе с двумя Т-образными гребнями (рис. 15). Расчеты проводились с помощью комбинации двух методов: метода сшивания мод и спектрального анализа мод собственных значений. Для каждой из структур полученные результаты сравнивались с характеристиками из CST Microwave Studio.

Используя подобный подход, были также проанализированы фильтры на круглом волноводе с диафрагмами, на круглом двухгребневом волноводе, на круглом трехгребневом волноводе, на круглом четырехгребневом волноводе, на круглом волноводе с радиальным Т-образным гребнем [9, 52].



**Рис. 16.** Конструкция фильтра на круглом волноводе с Т-образными гребнями: 1 – коаксиально-волноводный переход, 2 – прототип фильтра [9].

Аналогичная структура (рис. 16) была использована в работе [9] для проектирования полосно-пропускающего фильтра на запердельных волноводах. Авторам удалось показать, что данный круглый волновод со сложной формой поперечного сечения можно использовать не только как линию передачи или излучающий элемент, но и в качестве базовой структуры для создания различных частотно-селективных устройств.

Для равномерного распределения электромагнитной волны в мобильной связи в условиях ограниченной среды, например железная дорога, метро или тоннели, использовался негерметичный коаксиальный кабель. Однако потери в таком кабеле сильно возрастают с увеличением рабочей частоты. Поэтому вместо такого кабеля используется круглый волновод, но у данной волноводной структуры существует вращение плоскости поляризации доминирующей моды. Чтобы нарушить симметрию плоскости поляризации, необходимо использовать круглые волноводы с различными металлическими гребнями и вставками для работы с более высокими частотами [53]. Изменяя параметры гребней и вставок, можно добиться разного уровня потерь.

Круглые волноводы применяются и в качестве многолучевых облучателей, когда необходимо сформировать многолучевую характеристику направленности, в которой лучи отстоят друг от друга на минимальное угловое расстояние [54]. Данное свойство используется в случае космической связи для покрытия территории сложной конфигурации, так как при этом требуется формирование многолучевой диаграммы направленности.

В последнее время появились работы, в которых круглые волноводы используются для бесконтактного зондирования и для получения изображений внутреннего строения объектов. Прямоугольные волноводы широко используются в качестве зондирующих антенн в системах ближнего поля во многих промышленных приложениях. Это связано с тем, что они просты в изготовлении и относительно недороги. Известно,

что сужение прямоугольного волновода существенно улучшает пространственное разрешение полученных изображений, в отличие от стандартных волноводов, работающих на той же частоте. Особое внимание к использованию конических прямоугольных волноводов для изображений в ближней зоне уделено в работе [55]. Эффективность конического зонда была продемонстрирована путем количественного сравнения как распределения реальной мощности, так и теоретических изображений, полученных с использованием конических и стандартных зондов. Было показано, что конический волновод способен значительно увеличить разрешение без изменения частоты работы.

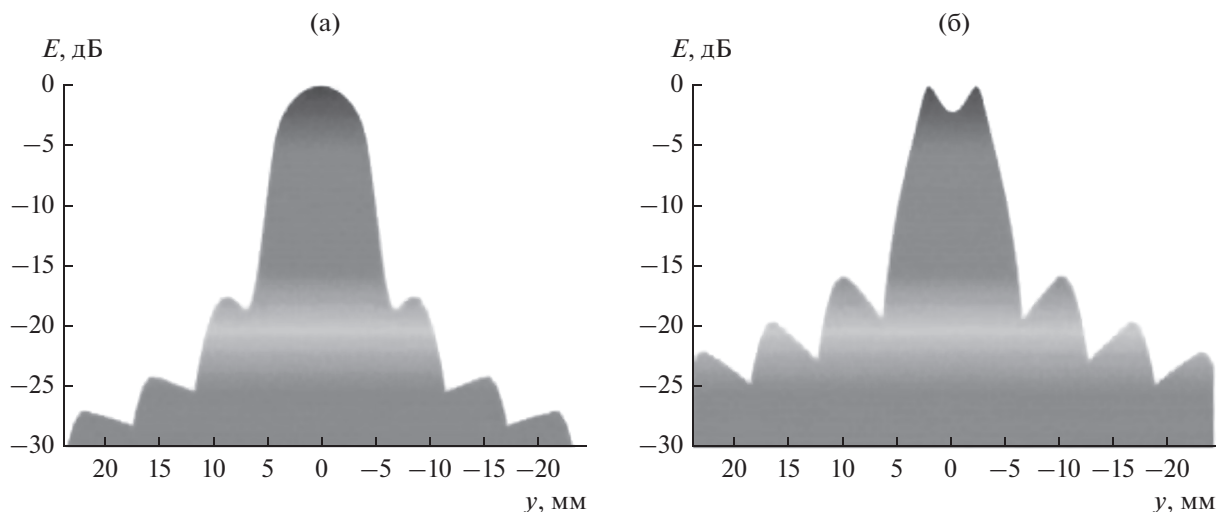
Как правило, стандартные прямоугольные волноводы использовались в качестве зондов для формирования изображений внутренних дефектов в различных диэлектрических средах. В работе [56] авторы предлагают использовать конические волноводы для достижения более высокого разрешения при сохранении приемлемой чувствительности. Данное исследование было весьма актуальным, так как методы визуализации и контроля с использованием СВЧ не носили разрушающего характера для исследуемого объекта, что позволяло использовать их в промышленных и медицинских целях [56].

Было установлено, что в ближнем поле боковое разрешение, достигаемое с помощью таких зондов, обратно пропорционально площади апертуры волновода [57]. К тому же при уменьшении размера диафрагмы область зондирования зонда уменьшается и, следовательно, возможность распознать мелкие включения и дефекты в изображении значительно возрастает.

Безапертурные зонды и зонды с резонансной диафрагмой находят свое применение в рефлектометрии для оценки и характеристики искусственных и естественных материалов, например, диэлектрических и металлических структур биологических образцов и критических частей зданий и сооружений [58]. Преимуществом микроволновой рефлектометрии является возможность бесконтактной работы в реальном времени при малых мощностях в условиях сохранения высокой разрешающей способности получаемого изображения.

Сравнение излучения из круглого волновода с излучением из волновода прямоугольной формы показало, что наиболее эффективными являются первые [59, 60]. Основное преимущество заключается в том, что боковые лепестки круглого волновода имеют более низкий уровень (рис. 17).

К тому же круглые волноводы обладают лучшей чувствительностью и более высоким разрешением (рис. 18). Данные преимущества могут быть использованы в промышленности для контроля многокомпонентных материалов, оценки коррозии, контроля толщины краски и характеристик материала, для обнаружения трещин в ме-



**Рис. 17.** Излучение в ближнем поле (нормированная напряженность) вдоль оси  $y$  на расстоянии 1 мм от отверстия для  $TE_{11}$  в круглом зонде (а) и  $TE_{10}$  в прямоугольном зонде (б) [59].

талле, а также в системах наблюдения и проверки в аэропортах.

Характеристики круглых и прямоугольных волноводов сравнивали с помощью численного моделирования, а также экспериментальным путем, используя образцы с коррозией. Процесс формирования изображения основан на взаимодействии между мишенью и электромагнитным полем. С точки зрения моделирования цель может быть представлена в виде геометрического/материального пространственного распределения. Электрическое поле, излучаемое зондом, также является функцией пространственных переменных (оно имеет определенное пространственное распределение).

Существует много методов, таких как рентгенография, компьютерная томография, двухфотонная рентгеновская абсорбциометрия, магнитно-резонансная томография, которые применяют для неинвазивного наблюдения при детском краниосиностозе. Однако такие методы, основанные на радиации, вредны для младенцев и не являются целесообразными с медицинской точки зрения [61]. Из-за этого интервал проведения процедур составляет целый год, но в течение года необходимо профилактическое наблюдение развития черепа младенца для выявления возможности рецидива или нормализации состояния.

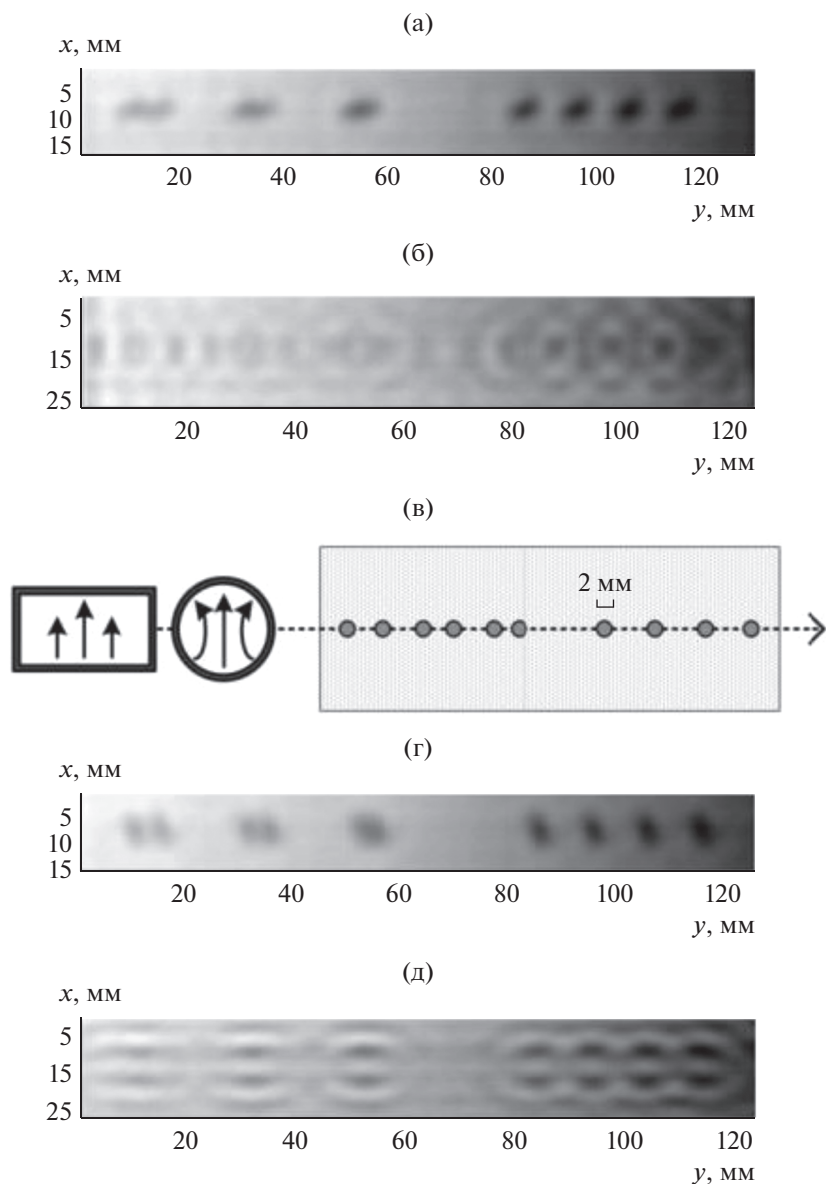
Альтернативным методом оценки костной ткани являются микрохирургия и неинвазивные методы на основе ультразвука. Ультразвук использует неионизирующее излучение, что позволяет производить частые измерения.

Последние исследования показали, что использование излучения круглых волноводов для наблюдения пациентов после черепной операции является самым оптимальным вариантом в силу

их свойств. Так, в работе [62] рассматривается вопрос о возможности использования круглого волновода для наблюдения процесса заживления костей путем моделирования и создания диэлектрической заполненной волноводной системы с открытым контуром в полосе частот 1...3 ГГц, способным определять одну из трех стадий развития болезни.

Известно, что объемные резонаторы широко используются в устройствах электронного парамагнитного резонанса. При этом одним из ключевых свойств таких устройств является обеспечение однородного поля вдоль осей резонатора. Так, в работе [63] предложено использовать круглый волновод с прямоугольными металлическими гребнями для решения данной задачи. Показано, что использование четырехгребневого круглого волновода, зажимающего диэлектрический образец в пространстве между гребнями, позволяет существенно улучшить характеристики конечного устройства.

Цилиндрические структуры могут быть использованы как проходные резонаторы при конструировании фильтров [64]. Как известно, нули функции передачи обычно используются, чтобы увеличить селективные возможности полосовых фильтров. В настоящее время существуют два способа практической реализации нулей передаточной функции. Первый из них через многолучевое распространение, которое создается в самой структуре фильтра, что в свою очередь создает ослабляющую интерференцию на некоторых нужных частотах, называемых нулевыми частотами передачи. Обычно это достигается с помощью перекрестной связи между несмежными узлами или резонаторами в структуре фильтра. Второй способ предполагает создание элементов, генери-



**Рис. 18.** Y-скан рентгеновского изображения с кругового зонда (а), Y-скан рентгеновского изображения с прямоугольного зонда (б), настройка рентгеновского сканирования (в), X-скан круглого зондового изображения (г) и X-скан прямоугольного зондового изображения (д) [59].

рующих нуль передачи, которые затем включаются последовательно в цепи более высокого порядка или соединяются с другими элементами.

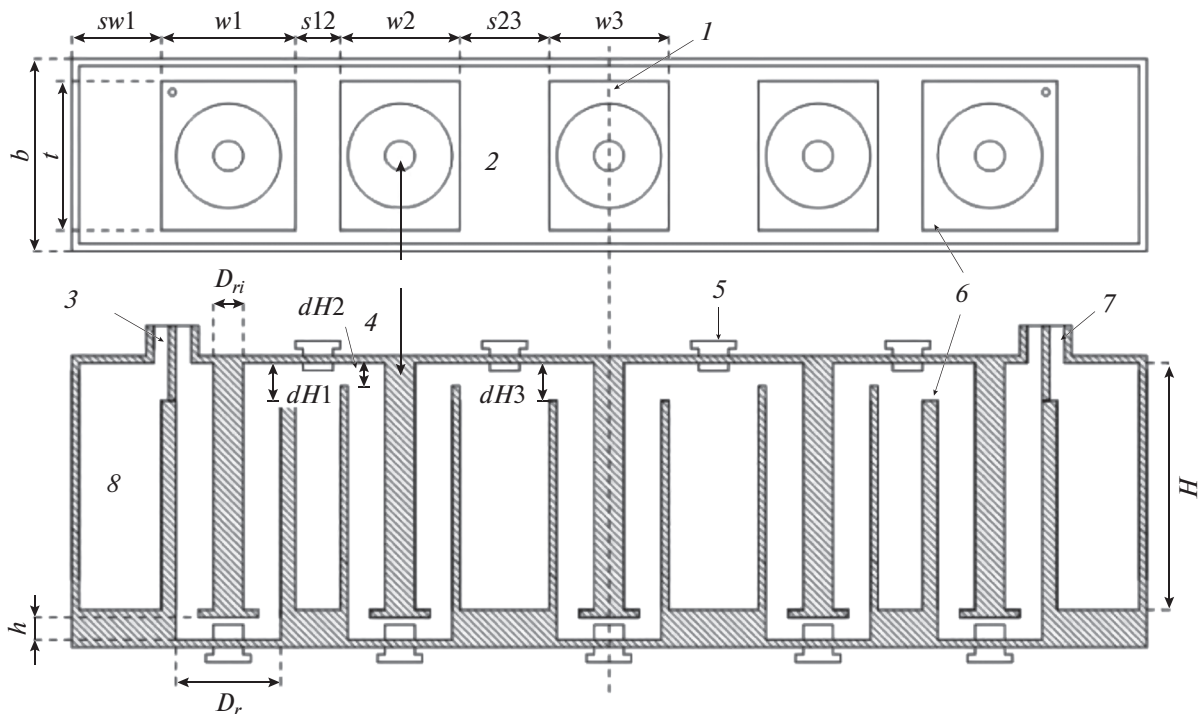
Однако эти методы часто приводят к громоздким фильтрам из-за большого числа требуемых элементов и иногда из-за неудобных топологий. Чтобы создать полосовой резонанс с определенными конечными частотными нулями передачи использованы входные резонаторы, на основе цилиндрических структур. Общее представление такой входной линии было впервые введено Кохом при проектировании ответвителей, и позднее подобные конфигурации применяли при созда-

нии полосно-пропускающих и полосно-запирающих фильтров.

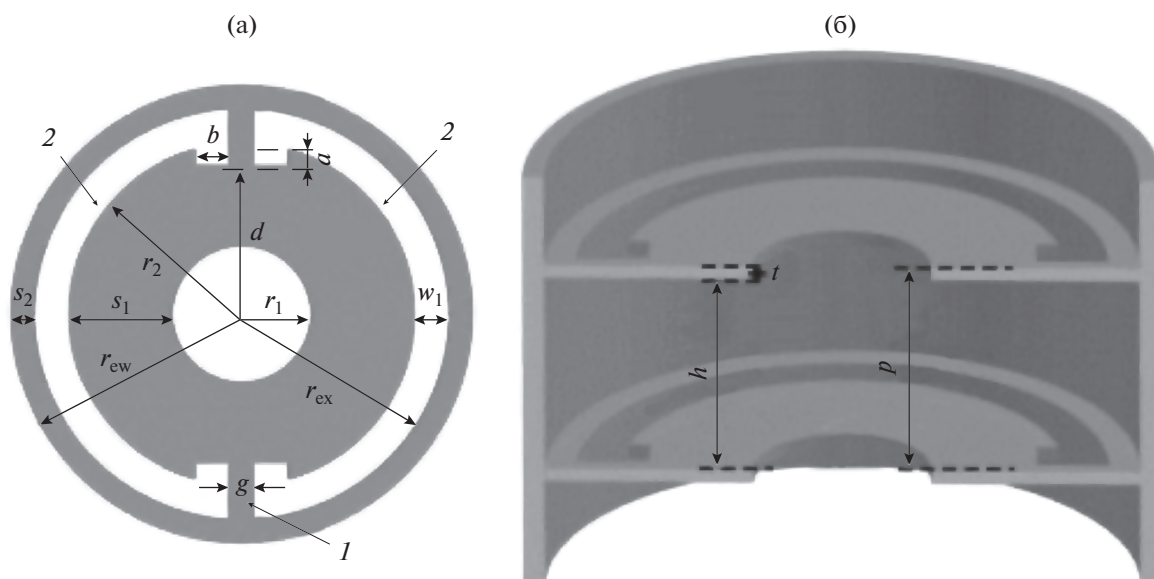
Исследуемая конструкция (рис. 19) предлагает простую и легкую реализацию псевдоэллиптических фильтров, в которых требуется более высокий уровень затухания в верхней части полосы пропускания, чем тот уровень, который обеспечивают коаксиальные фильтры. Этот тип фильтров полезен для подавления помех в сотовых базовых станциях.

В последние годы метаматериалы и их потенциальные применения, такие как антенны [65] и поглощающие материалы [66], широко изучаются. Метаматериалы, состоящие из металлического





**Рис. 19.** Схема расположения повторяющихся резонаторов (вид сверху и поперечное сечение вида сбоку) [64]: 1 – линия симметрии; 2, 8 – воздушное заполнение; 3 – вход; 4 – внутренний проводник; 5 – подстрочные винты; 6 – средний проводник; 7 – выход.



**Рис. 20.** Вид элементарной ячейки метаматериала, состоящей из кольцевых резонаторов (а), и замедляющая структура метаматериала (б) [68]: 1 – металл; 2 – вакуум.

кольцевого резонатора, нанесенного на поверхность диэлектрической пластины, были детально изучены, чтобы получить их дисперсионные характеристики внутри круглого волновода.

Кроме того, наблюдалось интересное явление распространения обратной волны ниже критиче-

ской частоты волновода, заполненного элементарными ячейками метаматериала [67]. Поэтому замедляющая волновая структура метаматериала, состоящая из волновода с периодическими кольцевыми диафрагмами (рис. 20) имеет определенные преимущества перед стандартными замедляющими структурами, в частности по габаритным

размерам. Подобные структуры могут быть использованы при создании частотно-селективных СВЧ-устройств [68].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкое разнообразие структур и их различное применение требует разработки численно-аналитических методов и алгоритмов электродинамического анализа и синтеза. Несмотря на то что уже существует много методов расчета характеристик, эти методы не являются универсальными. Таким образом, для эффективного проектирования устройств на основе круглых волноводов сложного сечения необходимо создание и постоянное совершенствование алгоритмов, так как перспектива использования круглых волноводов как элементной базы огромна.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-37-90013).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев И.В.* Техника и приборы СВЧ. Т. 1. Техника сверхвысоких частот. М.: Высшая школа, 1970.
2. *Pierre J., Beneat J.* Advanced Design Techniques and Realizations of Microwave and RF Filters Hoboken. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
3. *George C.* // Techn. J. 1950. V. 29. № 3. P. 295.
4. *Sun W., Balanis C.A.* // IEEE Trans. 1994. V. MTT-42. № 12. P. 2201.
5. *Rong Yu., Zaki K.A.* // IEEE Trans. 2000. V. MTT-48. № 2. P. 258.
6. *Balaji Uma.* Field theory analysis and design of circular waveguide components. Ph.D. dissertation. University of Victoria, 1997.
7. *Sangster A.J., Grant J.* // PIER Lett. 2009. V. 9. P. 75.
8. *Dai Qiu, Klymyshyn D.M., Pramanick P.* // Intern. J. RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2002. V. 12. № 2. P. 190.
9. *Губский Д.С., Земляков В.В., Лонкина Д.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 22.
10. *Skinner S.J., James G.L.* // IEEE Trans. 1991. V. MTT-39. № 2. P. 294.
11. *Liu J., Lin G.* // PIER M. 2011. V. 17. P. 113.
12. *Gubsky D.S., Lonkina D.V., Zemlyakov V.V., Zemlyakov V.L.* // Proc. Conf. Int. Conf. on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE-2018). Saratov. 27–28 September 2018. P. 255.
13. *Gubsky D.S., Lonkina D.V., Zemlyakov V.V., Zemlyakov V.L.* // Proc. Conf. XIV Int. Sci.-Techn. Conf. on Actual Problems of Electron. Instrument Engineering (APEIE–2018). Novosibirsk. 2–6 October 2018. P. 92.
14. *Elliott R.S.* // IEEE Trans. 1968. V. AP-16. № 5. P. 282.
15. *Лерер А.М.* // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1974. Т. 17. № 9. С. 90.
16. *Mazumder G.G., Saha P.K.* // IEEE Trans. 1987. V. MTT-35. № 2. P. 201.
17. *Balaji U., Vahldieck* // IEEE Trans. 1996. V. MTT-44. № 7. P. 1183.
18. *Singh K., Jain P. K., Basu B. N.* // PIER. 2004. V. 47. P. 297.
19. *Guojian Li, Yinqin Cheng, Aning Ma* // Proc. Conf. Progress in Electromagnetic Research Symp. (PIERS-2016). Shanghai. 8–11 August 2016. P. 1170.
20. *Jun Liu, Gao Lin* // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36. № 12. P. 1721.
21. *Daly P.* // IEEE Trans. 1974. V. MTT-22. № 3. P. 202.
22. *Jian-Ming Jin.* The Finite Element Method in Electromagnetics. Hoboken: John Wiley & Sons Limited, 2015.
23. *Aryan P., Kotousov A., Ng C.T., Cazzolato B.* // Structural Control Health Monitoring. 2017. V. 24. № 3. P. e1884.
24. *Soleimanpour R., Ng C.T.* // Structural Control Health Monitoring. 2017. V. 16. № 4. P. 400.
25. *Mohamed Yahia I, Jun W. Tao, Hedi Sakli* // PIER Lett. 2015. V. 51. P. 101.
26. *Peng Li, Jun Liu, Gao Lin et al.* // Intern. J. Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. 2016. V. 203. № 2. P. E2182.
27. *Davies J.B., Muilwyk C.A.* // Proc. Institution of Electrical Engineers. 1966. V. 113. P. 277.
28. *Feng Xu, Yulin Zhang, Wei Hong et al.* // IEEE Trans. 2003. V. MTT-5. № 11. P. 2221.
29. *Beaubien M.J., Wexler A.* // IEEE Trans. 1968. V. MTT-16. № 2. P. 1007.
30. *Fanti A., Montisci G., Mazzarella G., Casula G.A.* // Appl. Comp. Electromagn. Soc. J. 2013. V. 28. № 11. P. 1100.
31. *Fontgalland G., Najid A., Guglielmi M.* // Proc. Conf. 1997 SBMO/IEEE MTT-S Int. Microwave and Optoelectronics Conf. 'Linking to the Next Century'. Natal. 11–14 August 1997. P. 170.
32. *Chongmin Song, Wolf J.P.* // Int. J. Numerical Methods in Engineering. 1999. V. 45. № 2. P. 1403.
33. *Liu J., Lin G.* // PIER M. 2011. V. 17. P. 113.
34. *Кравченко В.Ф., Басараб М.А.* Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. М.: Физматлит, 2004.
35. *Заргано Г.Ф., Лерер А.М., Ляпин В.П., Синяевский Г.П.,* Линии передачи сложных сечений. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983.
36. *Губский Д.С., Земляков В.В., Лонкина Д.В.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 29. № 4. С. 11.
37. *Губский Д.С., Земляков В.В., Лонкина Д.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61. № 5. С. 408.
38. *Лонкина Д.В., Земляков В.В., Губский Д.С.* // Информацион. и радиоэлектрон. технологии. 2019. Т. 2. № 2. С. 154.
39. *Губский Д.С., Синяевский Г.П.* // Физические основы приборостроения. 2012. Т. 1. № 1. С. 51.
40. *Малов Э.Э., Мительман Ю.Е.* // Тез. докл. 2-й Межд. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Информационные технологии, телекоммуника-

- ции и системы управления". Екатеринбург. 14–15 декабря 2015. С. 200.
41. *Бирюков В.В.* // Антенны. 2016. № 4. С. 62.
  42. *Новоселова Н.А., Раевский С.Б., Титаренко А.А.* // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2010. № 2. С. 30.
  43. *Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 8. С. 759.
  44. *Раевский С.Б., Титаренко А.А.* // РЭ. 2013. Т. 54. № 11. С. 1285.
  45. *Маненков С.А.* // Т-сomm: телекоммуникации и транспорт. 2017. Т. 11. № 5. С. 45.
  46. *Малышев Г.С., Раевский С.Б., Седаков А.Ю., Титаренко А.А.* // Антенны. 2017. № 1. С. 61.
  47. *Wexler A.* // IEEE Trans. 1967. V. MTT-15. № 9. P. 508.
  48. *Balaji U., Vahldieck R.* // IEEE Trans. 1998. V. MTT-46. № 2. P. 191.
  49. *Yun Tao, Zhongxiang Shen, Gang Liu* // IEEE Trans. 2009. V. M-45. № 3. P. 1076.
  50. *Amari S., Catreux S., Vahldieck R., Bornemann J.* // IEEE Trans. 1998. V. MTT-46. № 5. P. 479.
  51. *Seng Yong Yu, Bornemann J.* // Proc. Conf. IEEE Pacific Rim Conf. on Communications, Computers and Signal Processing. Victoria, 23–26 August 2011. N.Y.: IEEE, 2011. P. 504.
  52. *Seng Yong Yu, Bornemann J.* // Proc. Conf. German Microwave Conf. Munich. 16–18 March 2009. P. 4815880.
  53. *Chong Zhang, Junhong Wang, Meie Chen, Zhan Zhang* // Proc. Conf. Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conf. Harbin. 27–30 July 2011. P. 479.
  54. *Хандамиров В.Л., Сергеев Д.А.* // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 5. С. 66.
  55. *Qaddoumi N.N., Abou-Khousa M., Saleh W.M.* Near-field microwave imaging utilizing tapered rectangular waveguides // IEEE Trans. 2006. V. IAM-55. № 5. P. 1752.
  56. *Zoughi R.* Microwave Non-Destructive Testing and Evaluation. Dordrecht: Chapman and Hall, 2000.
  57. *Qaddoumi N.* Microwave detection and characterization of subsurface defect properties in composites using open ended rectangular waveguide. Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Comput. Eng. Colorado State Univ. Fort Collins. 1998.
  58. *Malyuskin O., Fusco V.F.* // IEEE Trans. 2016. V. IAM-65. № 1. P. 189.
  59. *Ramzi M.R., Abou-Khousa M., Prayudi I.* // IEEE Sensors J. 2017. V. 17. № 8. P. 2359.
  60. *Abou-Khousa M.A., Rahman M.S.U., Xingyu X.* // IEEE Sensors J. 2019. V. 19. № 5. P. 1767.
  61. *Kim H.J., Roh H.G., Lee W.* // J. Korean Neurosurgical Soc. 2016. V. 59. № 3. P. 219.
  62. *Mathur P., Kurup D.G., Augustine R.* // Proc. Conf. First IEEE MTT-S Intern. Microwave Bio Conf. (IMBIOC-2017). Gothenburg. 15–17 May 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 1.
  63. *Hyde J.S., Sidabras J.W., Mett R.R.* // Cell Biochem. Biophys. 2019. V. 77. № 1. P. 3.
  64. *Musonda E., Hunter I.C.* // IEEE Trans. 2015. V. MTT-63. № 3. P. 954.
  65. *Saurav K., Sarkar D., Srivastava K.V.* // IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett. 2014. V. 13. P. 852.
  66. *Bhattacharyya S., Ghosh S., Srivastava K.V.* // Microwave and Optical Technologies Lett. 2013. V. 55. № 9. P. 2131.
  67. *Zhaoyun Duan, Chen Guo, Min Chen* // Opt. Express. 2011. V. 19. № 15. P. 13825.
  68. *Xin Wang, Zhaoyun Duan, Xirui Zhan et al.* // IEEE Trans. 2019. V. MTT-67. № 6. P. 2238.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

ВОЛНЫ В EBG-ВОЛНОВОДАХ, ОРИЕНТИРОВАННЫХ  
ВДОЛЬ ГЛАВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ОСЕЙ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КРИСТАЛЛА

© 2020 г. С. Е. Банков<sup>а, \*</sup>, В. И. Калинин<sup>а</sup>, Е. В. Фролова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: sbankov@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.08.2019 г.

После доработки 22.08.2019 г.

Принята к публикации 10.09.2019 г.

Исследованы собственные волны волноводов в электромагнитных кристаллах с квадратной сеткой. Кристалл образован металлическими цилиндрами, расположенными между двумя параллельными экранами. Волноводы ориентированы вдоль главных оптических осей кристалла. Рассмотрены одно-, двух- и трехрядные волноводы, образованные соответственно удалением из кристалла одного, двух и трех рядов цилиндров. Исследование проведено путем электродинамического моделирования в системе HFSS в режиме собственных волн. Получены зависимости постоянных распространения собственных волн от частоты и параметров структуры. Для всех волноводов определены минимальная и максимальная частоты рабочего диапазона и его ширина и даны рекомендации по оптимальному выбору параметров волноводов.

DOI: 10.31857/S003384942008001X

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Электромагнитные кристаллы (ЭМК) привлекают внимание исследователей и разработчиков СВЧ-устройств в качестве среды, на основе которой можно создавать разнообразные волноводные устройства СВЧ- и миллиметрового диапазона. Известны разные виды ЭМК [1]. Среди них нужно выделить кристаллы, образованные решетками металлических цилиндров, которые расположены внутри плоского волновода (ПВ) в виде двух параллельных проводящих экранов. Такие структуры имеют широкие функциональные возможности. В частности, они могут быть изготовлены в рамках технологии печатных схем СВЧ. В этом случае цилиндры выполняются в виде металлизированных отверстий в печатной плате [2]. Возможность использования печатной технологии выглядит весьма привлекательной, поскольку она обеспечивает относительно низкую стоимость и технологичность разрабатываемых устройств.

Устройства в виде системы металлизированных отверстий в печатной плате в настоящее время активно используются в технике СВЧ- и миллиметрового диапазонов. Их можно разделить на два класса: с произвольным и регулярным расположением цилиндров. Им соответствуют два класса волноводов. Волноводы первого типа получили

название substrate integrated waveguides (SIW) [3], а волноводы второго типа electromagnetic bandgap (EBG) волноводы [4]. Несмотря на похожую структуру, они существенно отличаются друг от друга.

Волноводы, интегрированные в подложку, или SIW-волноводы по принципу своего функционирования наиболее близки к классическим металлическим волноводам. Металлические цилиндры, расположенные на достаточно малом расстоянии, формируют структуру, близкую по своим параметрам к сплошной металлической стенке. При помощи таких стенок в SIW-схемах происходит формирование областей, выполняющих функции СВЧ-устройств различного вида и назначения.

В EBG-волноводах и в EBG-схемах в целом цилиндры располагаются в узлах сетки ЭМК. Формирование волноведущих каналов и функциональных областей осуществляется путем внесения дефектов в кристаллическую решетку. Наиболее распространенным и наиболее простым видом дефекта является удаленный из решетки цилиндр. Нетрудно увидеть, что в EBG-волноводах концентрация поля в канале происходит за счет отражения не от стенки, как в SIW-волноводах, а от ЭМК, а в идеальном случае – от полубесконечного ЭМК. Поскольку по определению в EBG

ЭМК отсутствуют распространяющиеся волны, то отражение от его границы является полным.

На первый взгляд, SIW-схемы имеют преимущества по сравнению с EBG-схемами, так как в них используется более гибкий способ формообразования. Данное утверждение справедливо для устройств с фиксированной структурой и функциональным назначением, которые в рамках SIW-технологии могут быть реализованы с лучшими характеристиками. Однако в последние годы активно развиваются так называемые реконфигурируемые СВЧ-устройства [5, 6]. Их отличительной чертой является возможность изменения под воздействием внешних управляющих факторов не только параметров устройства, но и его структуры и функционального назначения.

С точки зрения создания реконфигурируемых устройств EBG-схемы имеют хорошие перспективы [7]. В настоящее время круг такого типа структур преимущественно ограничен антеннами. Использование ЭМК позволяет существенно его расширить за счет создания сложных разветвленных схем с управляемой структурой. Поскольку топология функциональных областей реконфигурируемой схемы заранее не определена, то основное преимущество SIW-устройств становится несущественным, а фиксированное расположение элементов ЭМК в узлах кристаллической решетки, наоборот, становится преимуществом.

Отметим, что достижение управляемости требует значительной модификации ЭМК. Он должен состоять из элементов, свойства которых зависят от внешних воздействий. Такими элементами могут быть металлические цилиндры с зазорами, в которые включены полупроводниковые диоды, металлические цилиндры с управляемой глубиной погружения и т.д. Видно, что ЭМК на основе ПВ с решеткой цилиндров достаточно просто интегрируется с элементами управления и может служить основой для построения реконфигурируемых схем.

Сверхвысокочастотные ЭМК, предназначенные для построения реконфигурируемых устройств, были исследованы в работах [7, 8]. Следующий этап исследования состоит в изучении регулярных волноводов и их собственных волн. EBG-волноводы рассматривались во многих работах в качестве объекта численного моделирования (см., например, [9, 10]). Примеры исследования их собственных волн приведены в [11–13].

В работе [11] исследуется основная собственная волна однорядного EBG волновода в ЭМК из сплошных металлических цилиндров. В работе [11] рассмотрена основная волна волновода в ЭМК из коаксиальных цилиндров, а в работе [12] — из цилиндров с сосредоточенными элементами.

Отметим, что EBG-волноводы различаются по числу рядов, удаление которых из кристалла об-

разует волновод, а также их ориентацией относительно осей кристалла. В отмеченных выше работах были исследованы однорядные волноводы, которые образованы удалением одного слоя элементов кристалла. Рассматривались волноводы, ориентированные вдоль основных оптических осей ЭМК. Анализ собственных волн проводился методом компенсирующих источников [13].

Данная работа является продолжением исследований, представленных в [7, 8, 11–13]. Ее цель — изучение собственных волн одно-, двух- и трехрядных волноводов, ориентированных вдоль главных оптических осей ЭМК из сплошных металлических цилиндров. Основным методом исследования является электродинамическое моделирование в системе HFSS.

Изучение собственных волн ориентировано не только на расширение базы знаний о новых волноведущих структурах, но и на решение задач, имеющих практическое значение. К таким задачам относится определение факторов, влияющих на предельные рабочие частоты волновода, и определение его рабочего диапазона. Также целью нашей работы является оптимальный выбор параметров EBG-волноводов.

## 2. ОБЪЕКТ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуем волноводы в двумерном ЭМК. Пример однорядного волновода показан на рис. 1а. Кристалл состоит из решетки идеально проводящих цилиндров диаметром  $D$ , расположенных с одинаковым периодом  $P$  вдоль обеих осей  $Ox$  и  $Oy$ . Цилиндры полностью погружены в область между двумя идеально проводящими экранами, расстояние между которыми обозначим через  $h$ . Рассмотрим случай, когда ось волновода направлена вдоль одной из главных осей кристалла (случай волновода с осью, направленной вдоль диагонали решетки, составляет предмет дальнейшего исследования).

Определим ширину волновода  $W$  как расстояние между центрами цилиндров, образующих противоположные боковые стенки волноводного канала. Для упрощения численных расчетов в принятой здесь модели волновода его боковые стенки были составлены из двух рядов цилиндров, и эту волноводную структуру ограничили идеально-проводящими боковыми стенками, которые с каждой стороны отстоят от крайних рядов цилиндров на полпериода (рис. 1б). Отметим, что учета двух рядов цилиндров в большинстве случаев вполне достаточно для получения решения, весьма близкого к решению для волновода, образованного двумя полубесконечными ЭМК.

Для решения поставленных задач используем стандартную систему электродинамического моделирования HFSS в режиме расчета собственных

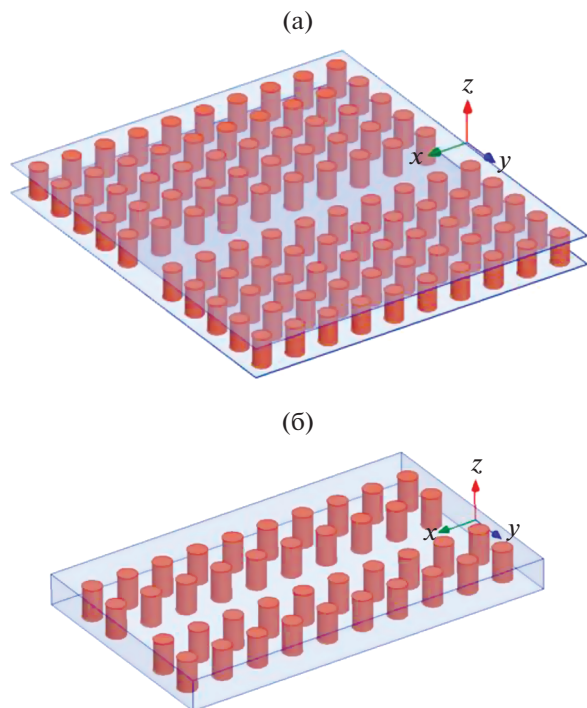


Рис. 1. Волноводный канал в двумерно-периодической решетке цилиндров (а) и в ограниченной по ширине периодической структуре (б).

волн (PCB). В системе HFSS он получил название *eigenmode*. Кратко опишем методику расчета на примере однорядного волновода. Отметим, что под собственной волной EBG-волновода мы понимаем решение граничной задачи, удовлетворяющее условиям периодичности:

$$\vec{E}(x + nP) = \vec{E}(x) \exp(-i\beta nP), \quad (1)$$

где  $\beta$  – постоянная распространения волны,  $\vec{E}(x)$  – вектор ее электрического поля. В соответствии с

рис. 1 направление распространения волны совпадает с осью  $0x$ . Соотношение (1) позволяет нам рассматривать один период структуры, которая строго обладает периодичностью только вдоль оси  $0x$ .

Выделим в системе HFSS один период (рис. 2) и используем периодические граничные условия на двух гранях перпендикулярных оси  $0x$ . На остальных поверхностях установим граничные условия идеальной проводимости. Задавая в периодических условиях различные сдвиги фазы  $\Delta\phi$  на длине периода, можем рассчитать при помощи HFSS соответствующие им резонансные частоты эквивалентного резонатора, образованного объемом ячейки [14]. В принятой модели идеально проводящих цилиндров и стенок бокса распространяющимся волнам соответствуют действительные частоты. Из соотношения (1) следует связь сдвига фазы с постоянной распространения волны:

$$\Delta\phi = -\beta P. \quad (2)$$

Отметим, что соотношение (2) выполняется только на резонансной частоте резонатора  $f_r$ , которая определяется в режиме PCB. Таким образом, меняя параметр  $\Delta\phi$ , мы получаем набор соответствующих частот  $f_r$ , который позволяет нам рассчитать интересующую нас зависимость постоянной распространения волны от частоты.

Важным обстоятельством является то, что одному значению фазового сдвига  $\Delta\phi$  могут соответствовать несколько резонансных частот. Эти частоты соответствуют разным типам волн EBG-волновода. Говоря о типах волн, необходимо отметить следующее. В EBG-волноводе из сплошных металлических цилиндров можно выделить особую серию волн, не имеющих вариаций поля по координате  $z$ . Эти волны имеют три компоненты поля  $E_z, H_x, H_y$ , аналогичные  $H_{0n}$ -волнам ( $n = 1, 2, \dots$ ) прямоугольного металлического вол-

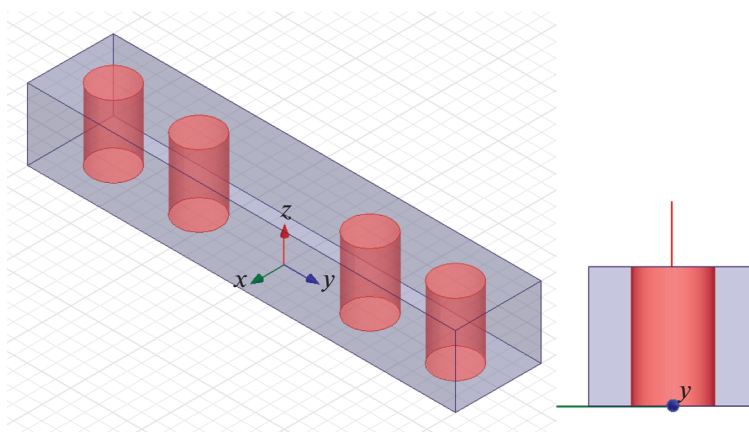


Рис. 2. Модель ячейки однорядного периодического волновода; распространение вдоль оси  $0x$ .

новода, поэтому целесообразно сохранить для них это обозначение. Отметим, что к их числу относится основная волна волновода, являющаяся  $H_{01}$ -волной. Также важно отметить, что постоянные распространения и структуры полей  $H_{0n}$ -волн не зависят от высоты волновода  $h$ . Этот параметр оказывает влияние только на постоянные затухания  $H_{0n}$ -волн, которые монотонно уменьшаются при увеличении величины  $h$ . Здесь мы также имеем полную аналогию с волнами прямоугольного металлического волновода.

Волны ЕВГ-волновода, имеющие вариации поля по оси  $Oz$ , существенно отличаются от волн металлического волновода. Они могут иметь все шесть компонент поля и не относиться ни к  $TE$ -, ни к  $TM$ -волнам. Важно отметить, что такие волны начинают распространяться только при нарушении неравенства

$$h < \lambda/2, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина волны в среде, заполняющей ПВ. Неравенство (3) является одним из факторов, ограничивающих рабочий диапазон ЕВГ-волновода со стороны высоких частот, определяя частоту  $f_{\max}$ :

$$f_{\max} = c/2h, \quad (4)$$

где  $c$  — скорость света в среде, заполняющей ПВ.

Для определенности далее считаем, что ПВ имеет воздушное заполнение. Переход к волноводу с диэлектрическим заполнением осуществляется элементарно путем масштабирования частотной шкалы, что возможно вследствие однородности среды внутри ЕВГ-волновода. Другие факторы и соответствующие им частоты  $f_{\max i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , связанные со свойствами  $H_{0n}$ -волн, будут рассмотрены ниже. Сейчас важно отметить, что выбором высоты  $h$  мы всегда можем выполнить неравенство

$$f_{\max} \geq f_{\max i}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что частота  $f_{\max}$ , связанная с обсуждаемыми высшими типами волн ЕВГ-волновода, не влияет на определение верхней границы рабочего диапазона частот волновода  $F_{\max}$ , которая задается следующим соотношением:

$$F_{\max} = \min(f_{\max i}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Из сказанного можно сделать вывод, что с практической точки зрения интерес представляют  $H_{0n}$ -волны, которые будут исследованы в данной работе. Более того, из всего спектра собственных волн нас интересуют те, которые соответствуют основному и ближайшему высшему типам волн, определяющим полосу его одномодового режима.

Следует отметить, что соотношения (4), (6) задают алгоритм оптимального выбора высоты волновода:

$$h_{\text{опт}} = c/2F_{\max}. \quad (7)$$

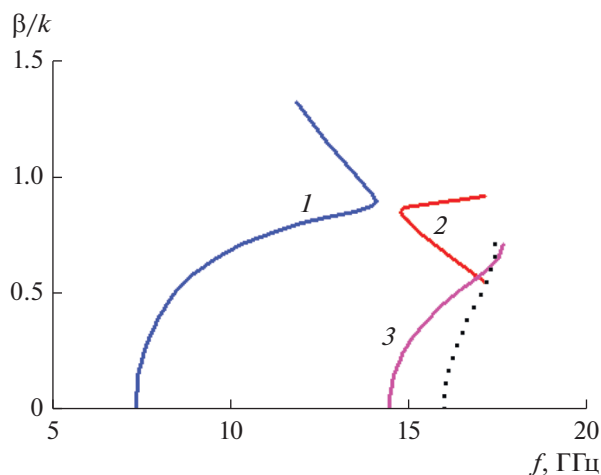
Выбирая ее в соответствии с равенством (7), получаем максимально возможное значение высоты и, следовательно, минимально возможное затухание основной волны при максимально возможной верхней границе рабочего диапазона частот.

Для определенности построения модели для численного исследования зададим ширину волновода  $W = 24$ , высоту  $h = 10$ , предполагая, что для возбуждения данного волновода может использоваться стандартный волновод  $X$ -диапазона сечением  $23 \times 10$ . Здесь и далее все размеры в миллиметрах. Очевидно, что волноводный канал шириной  $W = 24$  может быть образован не единственным способом. В данной работе рассмотрим три способа и, соответственно, три вида образуемого волновода. Первый способ состоит в удалении из кристалла одного ряда цилиндров с периодом  $P = 12$ . Назовем такой волновод однорядным. Второй — в удалении из кристалла двух рядов цилиндров с периодом  $P = 8$ . По аналогии будем называть такой волновод двухрядным. В третьем способе аналогично, волновод, образуемый путем удаления из кристалла трех рядов цилиндров с периодом  $P = 6$ , назовем трехрядным. Нетрудно видеть, что во всех трех вариантах определенная выше ширина волноводного канала равна  $W = 24$  независимо от диаметра цилиндров. Отметим, что выбор геометрических размеров волновода и ЭМК не имеет принципиального значения, так как окончательные результаты, представленные в нормированном виде, могут быть использованы для определения характеристик волноводов с произвольными геометрическими параметрами.

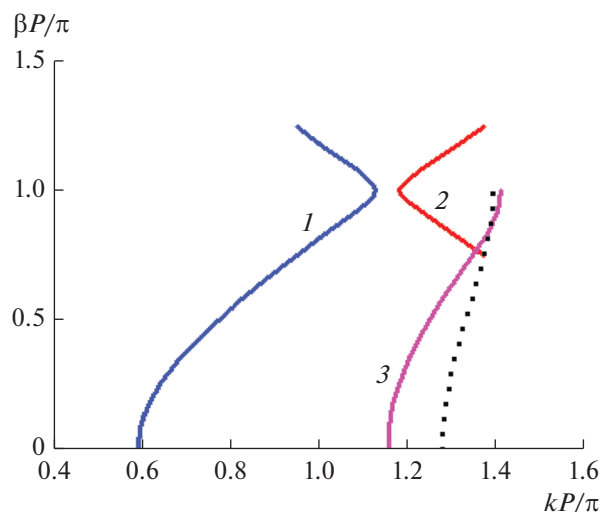
### 3. ОДНОРЯДНЫЙ ВОЛНОВОД

На рис. 3 представлены результаты расчета в полосе частот относительной фазовой постоянной распространения  $\beta/k$  ( $k$  — волновое число свободного пространства) для основного (кривые 1, 2) и высшего по ширине (кривая 3) типов волн однорядного волновода с параметрами  $P = 12$ ,  $D = 6$  ( $D/P = 0.5$ ). В принятой выше классификации это волны  $H_{01}$  и  $H_{02}$ . Пунктирная кривая показывает частотную дисперсию волн двумерно-периодической решетки с теми же параметрами  $P$  и  $D$  в полосе ее прозрачности.

Дисперсионная диаграмма для основного типа волны в исследованном диапазоне частот состоит из двух ветвей. Первая ветвь на более низких частотах (кривая 1) соответствует режиму прямой волны, для которой фазовая и групповая скорости параллельны, вторая ветвь на более высоких



**Рис. 3.** Дисперсионные диаграммы  $H_{01}$  (кривые 1, 2) и  $H_{02}$  (кривая 3) волн однорядного волновода с  $P = 12$ ,  $D = 6$  и дисперсионная диаграмма волны в однородной решетке в полосе ее прозрачности (пунктирная кривая); кривые 1 и 2 – режим прямой и обратной волн соответственно.



**Рис. 4.** Дисперсионные диаграммы для однорядного волновода с параметрами  $P = 12$ ,  $D = 6$  в координатах  $\beta P - kP$ ; кривые 1 и 2 – режим прямой и обратной волн соответственно, 3 – высший тип волны, пунктир – основная волна решетки.

частотах (кривая 2) соответствует режиму обратной волны, для которой фазовая и групповая скорости антипараллельны. Участки обеих ветвей с разным наклоном относятся к встречно распространяющимся волнам (в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ ). Ветви разделены полосой частот (в данном случае шириной  $\approx 0.67$  ГГц), в которой распространение основной волны отсутствует. На частотах, соответствующих краям этой полосы, групповая скорость волны равна нулю. На рис. 4 дисперсионные диаграммы представлены в координатах  $\beta P - kP$ .

Приведенные на рис. 3, 4 результаты позволяют качественно оценить характеристики собственных волн ЭВГ-волновода и сформулировать факторы, определяющие границы его рабочего диапазона частот. Отметим, что выводы, сделанные для однорядного волновода, остаются справедливыми при увеличении числа рядов. Видно, что со стороны нижних частот рабочий диапазон волновода ограничен критической частотой основной  $H_{01}$ -волны  $f_{c01}$ . Таким образом, имеется равенство

$$F_{\min} = f_{c01}, \quad (8)$$

где  $F_{\min}$  – нижняя граница рабочего диапазона частот.

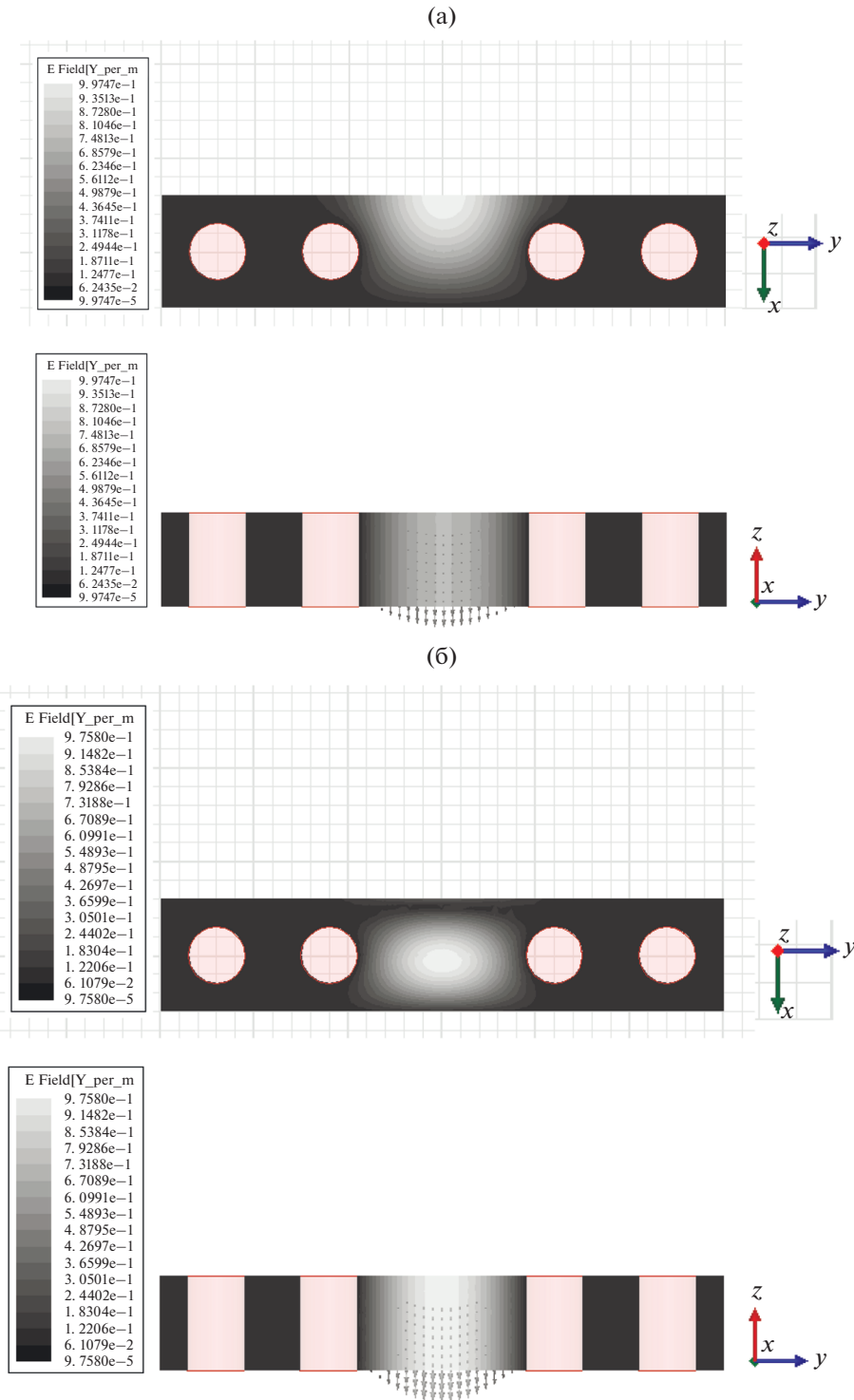
На высоких частотах наблюдаются три фактора, ограничивающие рабочий диапазон частот. К ним относятся: возникновение полосы запирающей основной волны, появление распространяющейся волны высшего типа и появление распространяющейся волны однородного ЭМК. Пусть им соответствуют частоты  $f_{\max 1-3}$ . В соответствии

с формулой (6) для определения верхней границы рабочего диапазона  $F_{\max}$  из них надо выбрать минимальную частоту. Фактором, определяющим параметр  $F_{\max}$  в рассмотренном выше примере (см. рис. 3, 4), является возникновение полосы запирающей основной волны.

Рассмотрим далее распределение полей волн основного и высшего типов. На рис. 5а, 5б показаны рассчитанные распределения амплитуды электрического поля в двух сечениях в пределах одного периода волновода для основного типа волны на двух частотах, соответствующих режиму прямой и обратной волны соответственно. Как и следовало ожидать, для основного типа волны максимум поля в обоих режимах имеет место в центральной области волновода. На рис. 6 представлено распределение амплитуды электрического поля ближайшего высшего (нечетного по ширине) типа волны. Характерным является отсутствие поля в продольной плоскости симметрии волновода.

Представляет интерес исследовать зависимость диапазонных свойств волноводного канала от диаметра цилиндров, образующих его боковые стенки. На рис. 7 представлены зависимости критической частоты основного типа волны  $f_{c01}$  (кривая 1) и высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$  (кривая 2) волновода от относительного диаметра  $D/P$  и там же – зависимость от  $D/P$  верхней частоты  $f_{s01}$ , на которой основной тип волны перестает распространяться (кривая 3). Эта частота соответствует нижнему краю полосы частот, разделяющей режимы прямой и обратной волн (см. рис. 3, 4). Штриховая линия показывает зависимость ниж-





**Рис. 5.** Распределения амплитуды электрического поля основного типа волны в двух сечениях: а – в режиме прямой волны на частоте 9.62 ГГц, б – в режиме обратной волны на частоте 15.39 ГГц.

ней частоты полосы прозрачности однородной двумерно-периодической решетки  $f_{ca}$  с периодом  $P = 12$  от относительного диаметра образующих ее цилиндров. Приведенные участки кривых 2 и 3

лежат ниже штриховой линии, т.е. в области не-прозрачности решетки.

Результаты, представленные на рис. 7, позволяют рассчитать относительную полосу одномо-

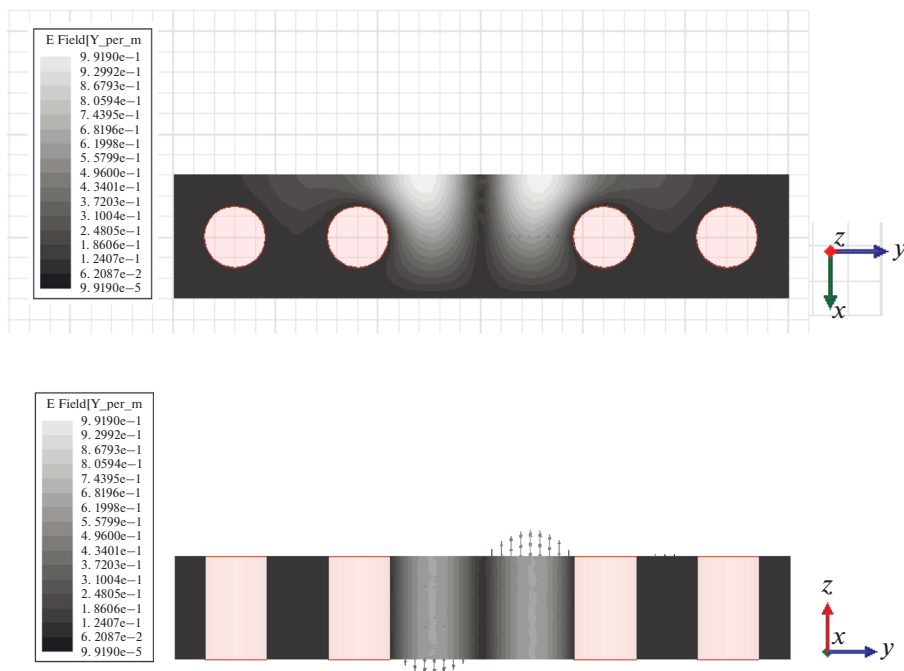


Рис. 6. Распределения амплитуды электрического поля высшего типа волны в двух сечениях на частоте 15.62 ГГц.

вого режима волновода. Определим ее как отношение частот  $F_{\max}/F_{\min}$ , где минимальная частота рассчитывается по выражению (8), а максимальная частота равна минимуму из частот  $f_{c02}$ ,  $f_{s01}$  и  $f_{ca}$ . Это отношение приведено на рис. 8, и, как видим, при определенном значении  $D/P$  достигается максимум полосы одномодовости. Из рис. 7 следует, что для значений  $D/P < 0.35$  верхняя частота  $F_{\max}$  определяется нижней частотой зоны прозрачности кристалла  $f_{ca}$  (штриховая линия), для  $0.35 \leq D/P \leq 0.46$  – крити-

ческой частотой высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$ , для  $D/P > 0.46$  – частотой  $f_{s01}$ , на которой основной тип волны перестает распространяться (групповая скорость равна нулю).

#### 4. ДВУХРЯДНЫЙ ВОЛНОВОД

Модель ячейки двухрядного волновода с той же шириной  $W = 24$  в решетке цилиндров с периодом  $P = 8$ , показана на рис. 9. Для расчета его

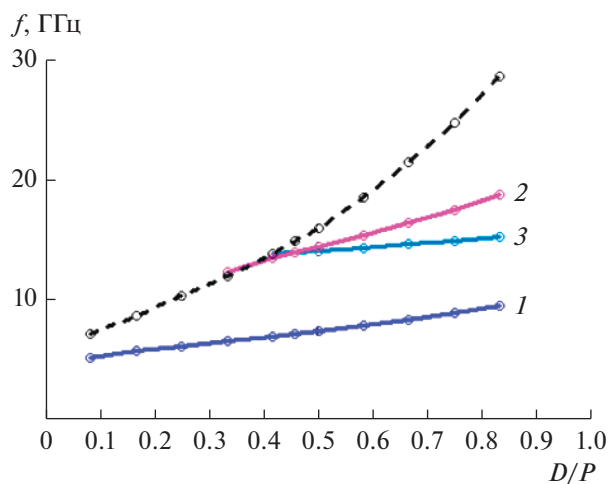


Рис. 7. Критические частоты  $f_{c01}$  (кривая 1),  $f_{c02}$  (кривая 2),  $f_{s01}$  (кривая 3) однорядного волновода и  $f_{ca}$  (штриховая линия) волны однородной двумерно-периодической решетки с периодом  $P = 12$  в зависимости от относительного диаметра цилиндров.

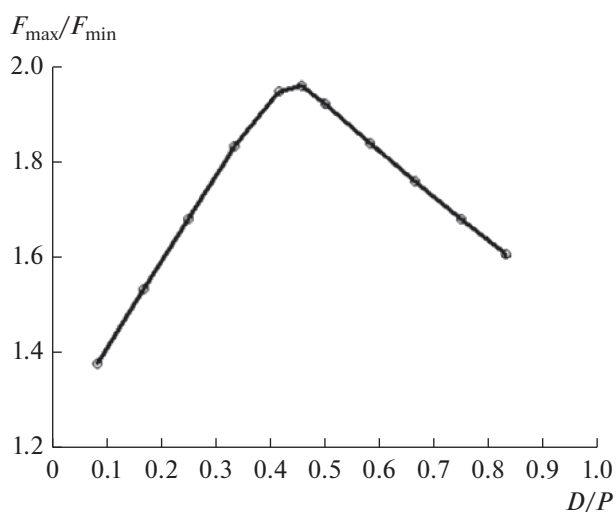


Рис. 8. Зависимость рабочего диапазона однорядного волновода от относительного диаметра цилиндров.

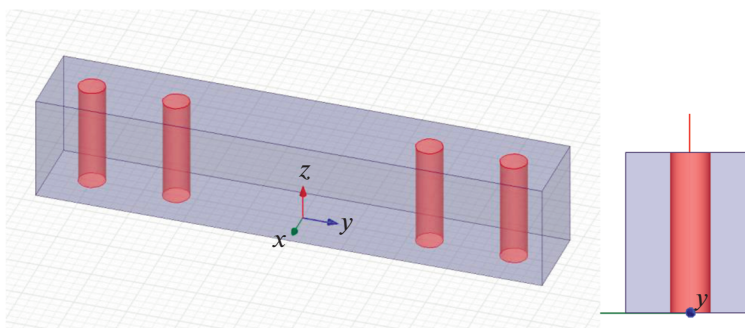


Рис. 9. Модель единичной ячейки двухрядного периодического волновода; распространение вдоль оси  $0x$ .

дисперсионных характеристик используем тот же метод, что и выше для однорядного волновода. По аналогии с рис. 3, 4 на рис. 10, 11 представлены результаты расчета в полосе частот дисперсионных диаграмм для основной  $H_{01}$  (кривые 1, 2) и высшей по ширине (кривая 3)  $H_{02}$  волн двухрядного волновода с параметрами  $P = 8$ ,  $D = 2.5$ . Пунктирная кривая показывает частотную дисперсию волн двумерно-периодической решетки с теми же параметрами  $P$  и  $D$  в полосе ее прозрачности. Физическая трактовка двух ветвей для основного типа волны та же, что и выше для однорядного волновода. Полоса непрозрачности для основного типа волны в этом случае сужается по сравнению с однорядным волноводом и равна  $\approx 0.36$  ГГц. Распределения амплитуды полей ос-

новного и высшего типов волн в этом случае аналогичны по структуре распределениям на рис. 5, 6 для однорядного волновода и здесь не приведены.

На рис. 12 показаны зависимости от  $D/P$  нижней критической частоты основного типа волны  $f_{c01}$  (кривая 1), высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$  (кривая 2) и верхней частоты  $f_{s01}$ , на которой основной тип волны перестает распространяться (кривая 3). Расчеты показывают, что в отличие от однорядного волновода верхние частоты  $f_{s01}$  значительно превышают частоты высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$  во всем рассмотренном диапазоне  $D/P$ . Штриховая линия показывает зависимость нижней частоты полосы прозрачности однородной двумерно-периодической решетки  $f_{ca}$  с периодом  $P = 8$  от относительного диаметра образующих ее цилиндров.

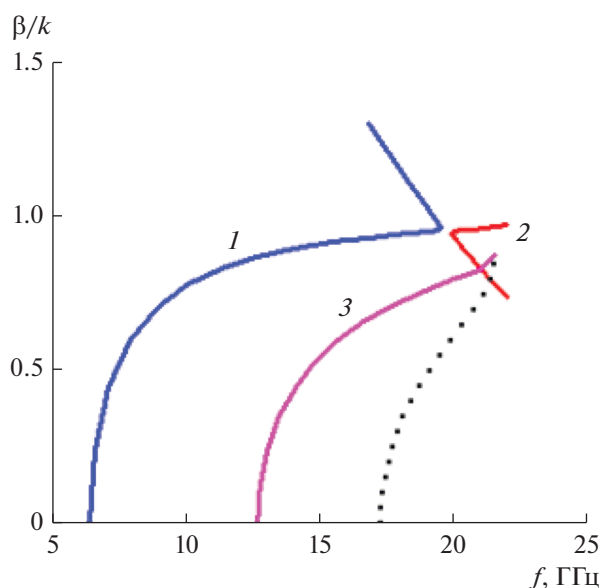


Рис. 10. Дисперсионные диаграммы основного (кривые 1, 2) и ближайшего высшего (кривая 3) типов волн двухрядного волновода с параметрами  $P = 8$ ,  $D = 2.5$ , а также дисперсия волны в однородной решетке в полосе ее прозрачности (пунктир); кривые 1 и 2 – режим прямой и обратной волн соответственно.

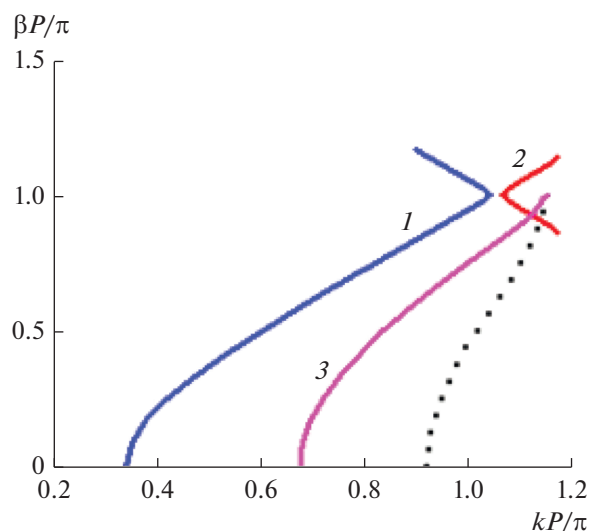
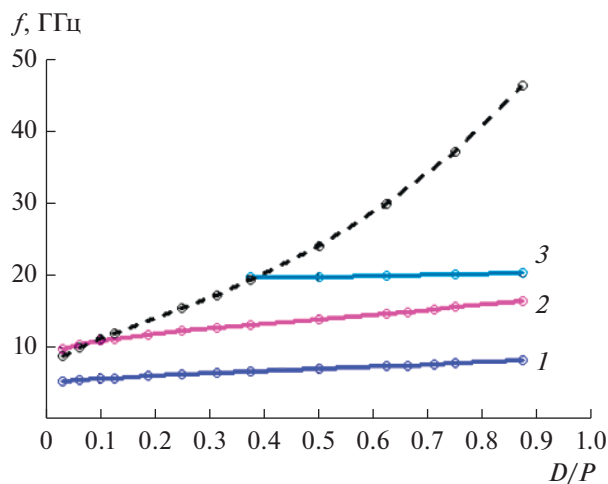
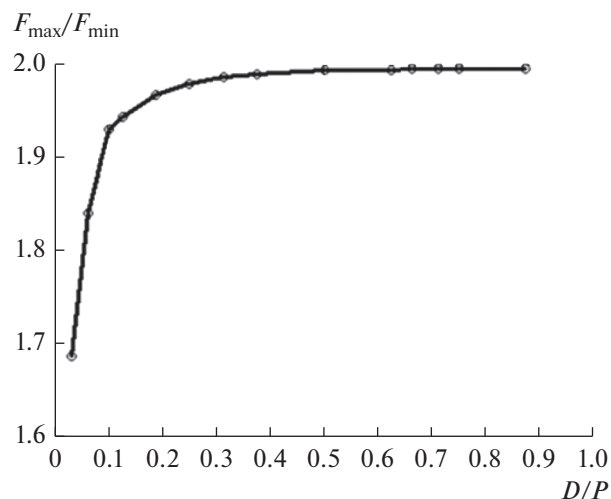


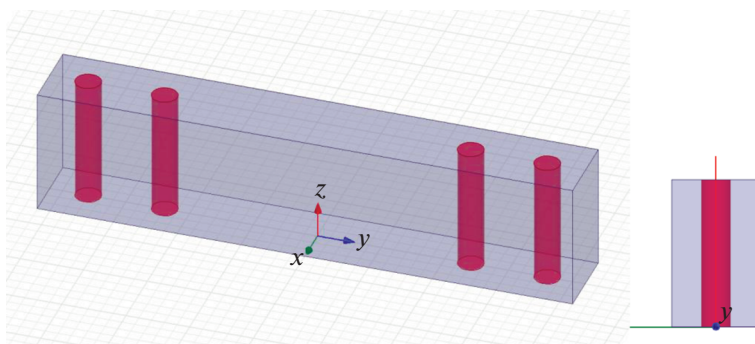
Рис. 11. Дисперсионные диаграммы для двухрядного волновода с параметрами  $P = 8$ ,  $D = 2.5$  в координатах  $\beta P - k P$ : кривые 1 и 2 – режим прямой и обратной волн соответственно, 3 – высший тип волны, пунктир – основная волна решетки.



**Рис. 12.** Критические частоты  $f_{c01}$  (кривая 1),  $f_{c02}$  (кривая 2),  $f_{s01}$  (кривая 3) двухрядного волновода и  $f_{ca}$  (штриховая линия) волны однородной двумерно-периодической решетки с периодом  $P = 8$  в зависимости от относительного диаметра цилиндров.



**Рис. 13.** Зависимость рабочего диапазона двухрядного волновода от относительного диаметра цилиндров.



**Рис. 14.** Модель единичной ячейки трехрядного периодического волновода; распространение вдоль оси  $0x$ .

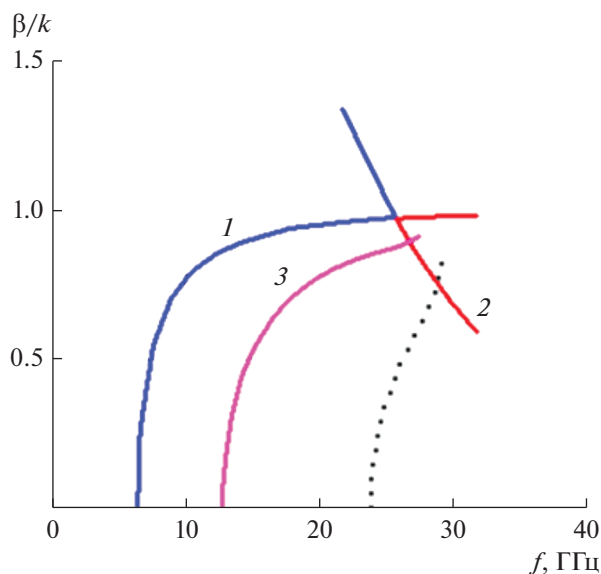
На основании этих данных была рассчитана относительная полоса одномодового режима двухрядного волновода в зависимости от относительного диаметра цилиндров (рис. 13). Как видим, в случае двухрядного волновода прозрачность решетки ограничивает верхнюю рабочую частоту волновода только для очень тонких цилиндров с  $D/P < 0.1$ . Для больших диаметров в исследованном диапазоне размеров верхняя рабочая частота  $F_{\max}$  определяется высшим по ширине типом волны волновода.

## 5. ТРЕХРЯДНЫЙ ВОЛНОВОД

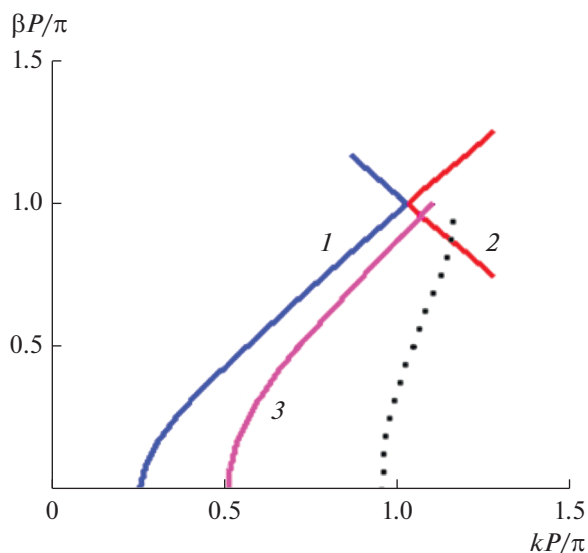
Случай трехрядного волновода аналогичен двум рассмотренным выше. Модель ячейки трехрядного волновода в решетке цилиндров с периодом  $P = 6$  представлена на рис. 14, рассчитанные

дисперсионные диаграммы – на рис. 15, 16. По виду и физическому содержанию они аналогичны рассмотренным выше характеристикам для однорядного и двухрядного волноводов. Полоса непрозрачности для основного типа волны сужается по сравнению с однорядным и двухрядным волноводами и составляет примерно 0.19 ГГц.

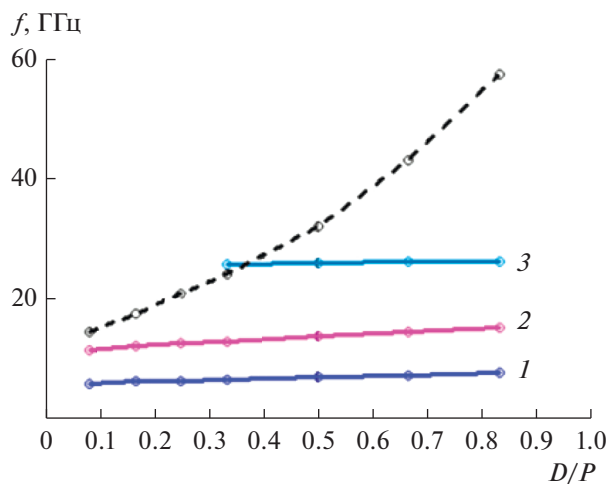
На рис. 17 показаны зависимости от  $D/P$  нижней критической частоты основного типа волны  $f_{c01}$  (кривая 1), высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$  (кривая 2) и верхней частоты  $f_{s01}$ , на которой основной тип волны перестает распространяться (кривая 3). Там же представлена зависимость нижней частоты полосы прозрачности однородной двумерно-периодической решетки  $f_{ca}$  с периодом  $P = 6$  от относительного диаметра образующих ее цилиндров (штриховая линия). Расчеты показывают, что в данном случае, как и в случае двухрядного



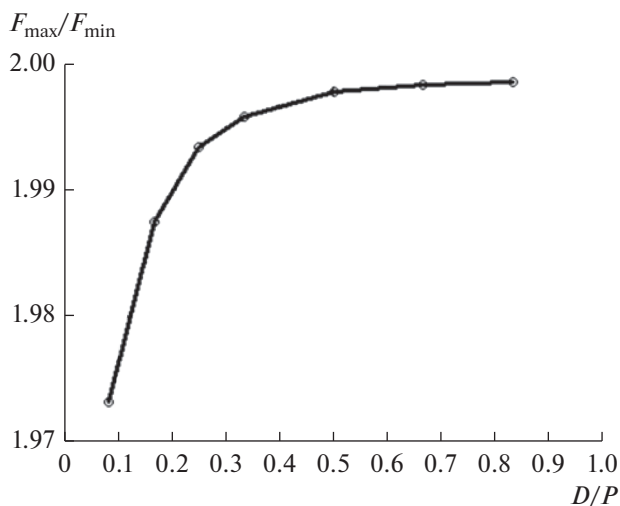
**Рис. 15.** Дисперсионные диаграммы основного (кривые 1, 2) и ближайшего высшего (кривая 3) типов волн трехрядного волновода с параметрами  $P = 6$ ,  $D = 2$ , а также дисперсия волны в однородной решетке в полосе ее прозрачности (пунктир); кривые 1, 2 – режимы прямой и обратной волн соответственно.



**Рис. 16.** Дисперсионные диаграммы трехрядного волновода с параметрами  $P = 6$ ,  $D = 2$  в координатах  $\beta P - k P$ : кривые 1 и 2 – режим прямой и обратной волн соответственно, 3 – высший тип волны, пунктир – основная волна решетки.



**Рис. 17.** Критические частоты  $f_{c01}$  (кривая 1),  $f_{c02}$  (кривая 2),  $f_{s01}$  (кривая 3) трехрядного волновода и  $f_{ca}$  (штриховая линия) волны однородной двумерно-периодической решетки с периодом  $P = 6$  в зависимости от относительного диаметра цилиндров.



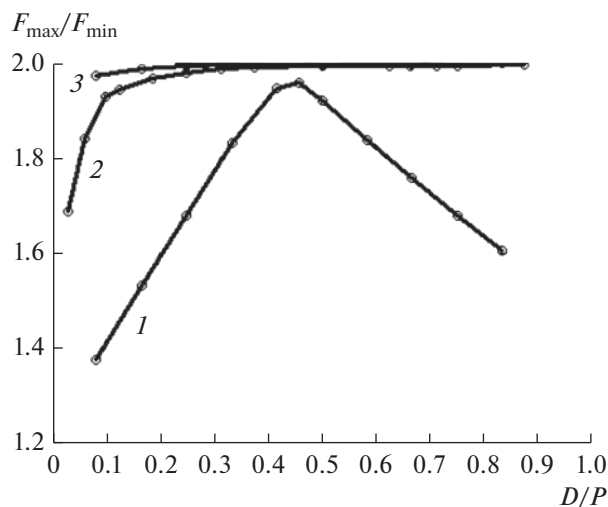
**Рис. 18.** Зависимость рабочего диапазона трехрядного волновода от относительного диаметра цилиндров.

волновода, верхние частоты  $f_{s01}$  значительно превышают частоты высшего по ширине типа волны  $f_{c02}$  во всем рассмотренном диапазоне  $D/P$ .

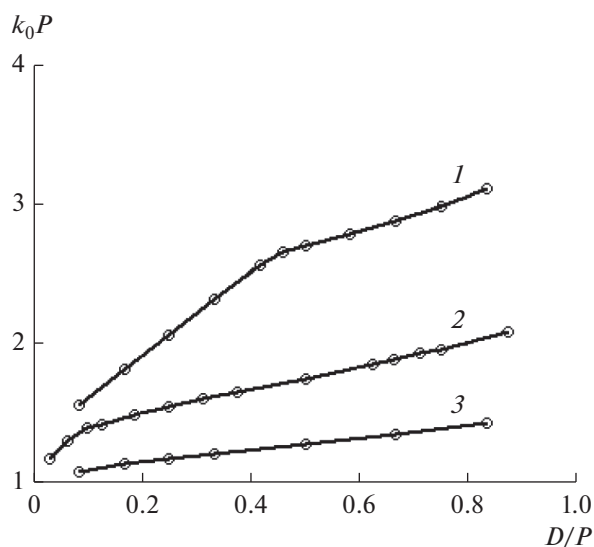
Рабочий диапазон волновода в зависимости от относительного диаметра цилиндров приведен на рис. 18. В этом случае верхняя частота  $F_{max}$  в рассмотренном диапазоне  $D/P$  определяется только высшим по ширине типом волны волновода.

## 6. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВОДОВ

Полосы одномодового режима для трех рассмотренных выше волноводов представлены на рис. 19. Видно, что при условии постоянной ширины волноводов относительная полоса для двухрядного волновода заметно шире, чем для однорядного. В то же время она лишь сравнительно слабо возрастает для трехрядного волновода по сравнению с двухрядным.



**Рис. 19.** Сравнение относительных полос одномодового режима для трех типов волноводов с одинаковой шириной: 1 – однорядный волновод, 2 – двухрядный волновод, 3 – трехрядный волновод.



**Рис. 20.** Нормированные центральные частоты рабочего диапазона для трех типов волноводов с одинаковой шириной: 1 – однорядный волновод, 2 – двухрядный волновод, 3 – трехрядный волновод.

Дополнительно на рис. 20 показаны зависимости параметра  $k_0P$ , имеющего смысл нормированной центральной частоты рабочего диапазона рассмотренных волноводов, от параметра  $D/P$ . Под  $k_0$  мы понимаем волновое число свободного пространства на частоте  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{F_{\min} + F_{\max}}{2}. \quad (9)$$

Отметим, что кривые, приведенные на рис. 19, 20, полностью решают задачу выбора параметров

волновода. Так, например, из рис. 19 следует, что для однорядного волновода оптимальное отношение диаметра цилиндра к периоду решетки, реализующее максимальную полосу его одномодового режима, равно 0.45. Кроме того, при заданной центральной частоте рабочего диапазона из рис. 20 можем найти период, который обеспечивает эту максимальную полосу. Предположим, что центральная частота рабочего диапазона задана равной  $f_0 = 10$  ГГц. Тогда из рис. 20 следует, что при  $D/P = 0.45$  величина нормированного периода для однорядного волновода  $k_0P = 2.64$ , т.е. период  $P = 12.6$ . При этом его максимальная полоса одномодовости достигается при диаметре цилиндров  $D = 0.45$  и  $P = 5.7$ . Для двухрядного волновода на той же центральной частоте  $f_0 = 10$  ГГц и при том же относительном диаметре  $D/P = 0.45$  из рис. 20 получаем  $k_0P = 1.70$ ,  $P = 8.1$  и  $D = 3.6$ . Аналогично, для трехрядного волновода на центральной частоте  $f_0 = 10$  ГГц и том же относительном диаметре  $D/P = 0.45$  имеем  $k_0P = 1.25$ ,  $P = 6.0$  и  $D = 2.7$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные типы волноводов относятся к бесконечно-протяженным периодическим структурам. Характерным для их основной моды является наличие полосы непрозрачности, положение и ширина которой определяются типом волновода (однорядный, двухрядный или трехрядный). Нижняя граница этой полосы может ограничивать верхнюю рабочую частоту волновода, как в случае однорядного волновода. Другим ограничивающим полосу волновода фактором является ближайший высший по ширине тип волны, который проявляется для всех рассмотренных волноводов, хотя степень его проявления разная для разных волноводов. Кроме того, полосу одномодового режима волноводов может ограничивать прозрачность решетки, когда в ней начинает распространяться волна, уносящая энергию из волновода. Этот фактор также проявляется по-разному для разных типов волноводов. Следует отметить, что относительная полоса одномодового режима для рассмотренных волноводов не превышает значения 2, которое характеризует полосу одномодового режима классического прямоугольного металлического волновода.

В дальнейшем представляет интерес рассмотреть, в частности, волноводы в ЭМК с регулируемой глубиной погружения стержней, образующих стенки волновода. Такая регулировка степени прозрачности волноводных стенок может позволить создавать определенный класс реконфигурируемых устройств. В этом случае важным является вопрос выбора высоты волновода (расстояния между экранами), так как в структуре с частично погруженными стержнями могут возбуждаться высшие

вдоль вертикальной оси типы волн ПВ, приводящие к ограничению полосы одномодовости волновода. При анализе таких волноводов эти высшие по высоте типы волн следует учитывать наряду с другими факторами, которые были рассмотрены в данной статье.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
2. *Simpson J.J., Taflove A., Mix J.A., Heck H.* // IEEE Microwave and Wireless Comp. Lett. 2004. V. 14. № 7. P. 356.
3. *Xu F., Wu K.* // IEEE Trans. 2005. V. MTT-53. № 1. P. 66.
4. *Банков С.Е.* Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит, 2010.
5. *Bernhard J.T.* Reconfigurable Antennas. San Rafael: Morgan & Claypool Publ., 2007.
6. *Yang F., Rahmat-Samii Y.* // IEEE Microwave and Wireless Comp. Lett. 2002. V. 12. № 3. P. 96.
7. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 855.
8. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 6. С. 523.
9. *Mosallaei H., Rahmat-Samii Y.* // IEEE Trans. 2003. V. AP-51. № 3. P. 549.
10. *Mekis A., Chen J.C., Kurland I., Fan S. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 18. P. 3787.
11. *Банков С.Е., Пангонис Л.И.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 295.
12. *Банков С.Е.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 6. С. 671.
13. *Банков С.Е.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 2. С. 133.
14. *Xu F., Patrovsky A., Wu K.* // Microwave Opt. Technol. Lett. 2007. V. 49. № 9. P. 2180.L

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371.333;537.874.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН  
НА МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАССЕЙВАТЕЛЯХ  
СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2020 г. Д. В. Крысанов<sup>a, \*</sup>, А. Г. Кюркчан<sup>a, b, c</sup>, С. А. Маненков<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Московский технический университет связи и информатики,  
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация

<sup>b</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>c</sup>Центральный научно-исследовательский институт связи,  
1-й проезд Перова поля, Москва, 111141 Российская Федерация

\*E-mail: dimok1993@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.

После доработки 31.10.2019 г.

Принята к публикации 27.11.2019 г.

На основе метода продолженных граничных условий предложена методика, позволяющая моделировать характеристики рассеяния, в том числе усредненные по углам ориентации, для тел произвольной геометрии. Рассмотрена двумерная задача дифракции плоской волны на диэлектрических телах со сложной геометрией сечения, в частности – на фракталоподобных телах. Проведено сравнение численных алгоритмов решения задачи дифракции на основе систем интегральных уравнений 1-го и 2-го рода. Корректность метода подтверждена при помощи проверки выполнения оптической теоремы для различных тел и путем сравнения с результатами расчетов, полученных модифицированным методом дискретных источников.

DOI: 10.31857/S003384942008015X

ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции волн на диэлектрическом теле сложной геометрии является весьма актуальной и остается сравнительно мало исследованной ввиду сложности ее решения. Результаты моделирования характеристик рассеяния волн диэлектрическими телами представляют большой интерес в таких, например, областях, как оптика неоднородных сред, лазерная дефектоскопия, проектирование поглощающих покрытий и др. [1–3]. Несмотря на то что на данный момент разработан ряд аналитических и численных методов решения этих задач (наиболее распространенными из которых являются метод  $T$ -матриц [4] и метод дискретных источников [5]), потребности в моделировании дифракционных процессов возрастают довольно быстро, в связи с чем вопрос разработки более универсальных методов решения задач дифракции все еще остается актуальным. Широкая популярность метода  $T$ -матриц объясняется во многом тем, что с использованием этого метода можно сравнительно легко выполнять такую важную, например в астрофизике, процедуру, как усреднение характеристик рассеяния тела по углам его ориентации относительно падающей плоской волны. Однако традици-

онный (классический) вариант метода  $T$ -матриц [4], как и некоторые его недавно разработанные модифицированные варианты [5, 6], применимы к решению задач дифракции лишь на рассеивателях с аналитической границей.

В работах [7, 8] было предложено обобщение метода  $T$ -матриц на основе метода продолженных граничных условий (МПГУ) для решения задачи дифракции с условием Дирихле на границе в двумерном и трехмерном случаях. Двумерный случай был также рассмотрен для импедансного краевого условия [9]. Идея МПГУ заключается в переносе граничного условия с поверхности  $S$  рассеивателя на некоторую вспомогательную поверхность  $S_\delta$ , которая располагается вне рассеивателя на некотором достаточно малом расстоянии  $\delta$  от его границы. К главным достоинствам МПГУ можно отнести отсутствие ограничений на геометрию рассеивателя (в том числе он применим и для рассеивателей, имеющих изломы границы, и для тонких экранов). Кроме того, МПГУ предлагает единый подход к решению краевых задач, не зависящий от их типа, размерности, геометрии поверхности рассеивателя и характера рассеиваемого поля. Отметим также, что



в рамках МПГУ задача дифракции может быть сведена к решению системы интегральных уравнений 1-го или 2-го рода, что невозможно, например, при решении задачи методом поверхностных интегральных уравнений.

В данной статье предлагается обобщение описанной выше методики для решения двумерной задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле. Рассмотрены примеры моделирования характеристик рассеяния волн телами с поперечным сечением сложной геометрии и фракталоподобными телами. Рассчитаны такие характеристики, как диаграмма рассеяния и усредненная по углам ориентации диаграмма.

### 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть на бесконечно длинный магнитодиэлектрический цилиндр с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и с направляющей  $S$  падает первичное электромагнитное поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ . Геометрия задачи изображена на рис. 1. Рассмотрим случай  $E$ -поляризации, когда вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  имеет только одну составляющую  $E_z$  (далее  $-U_-$  или  $U_+$ ), параллельную образующей цилиндрического тела. Тогда на границе рассеивателя будут иметь место следующие условия сопряжения:

$$U_+|_S = U_-|_S, \quad \frac{\partial U_+}{\partial n}|_S = \kappa \frac{\partial U_-}{\partial n}|_S, \quad (1)$$

где  $U_+$  – поле внутри цилиндра,  $U_- = U^0 + U^1$  – полное поле вне тела, причем  $U^0$  – падающее, а  $U^1$  – рассеянное (вторичное) поле,  $\partial/\partial n$  – дифференцирование по направлению внешней к  $S$  нормали,  $\kappa = \mu_i/\mu_e$ ,  $\mu_i$  и  $\mu_e$  – абсолютные магнитные проницаемости сред внутри и вне тела соответственно. Внешняя среда ( $D_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ,  $\bar{D} = D \cup S$ ,  $D$  – область, ограниченная кривой  $S$ ) и среда внутри цилиндра полагаются однородными, линейными и изотропными. На бесконечности предполагаются выполненными стандартные условия излучения для рассеянного поля.

Воспользуемся следующими представлениями для решения уравнения Гельмгольца в областях  $D$  и  $D_e$  соответственно [5]:

$$U_-(\vec{r}) = U^0(\vec{r}) + \int_S \left\{ U_-(\vec{r}') \frac{\partial G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U_-(\vec{r}')}{\partial n'} G_-(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds', \quad (2)$$

$$U_+(\vec{r}) = - \int_S \left\{ U_+(\vec{r}') \frac{\partial G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U_+(\vec{r}')}{\partial n'} G_+(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds',$$

в которых  $G_{\pm}(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k_{\pm}|\vec{r} - \vec{r}'|)$  – это фундаментальные решения скалярного уравнения

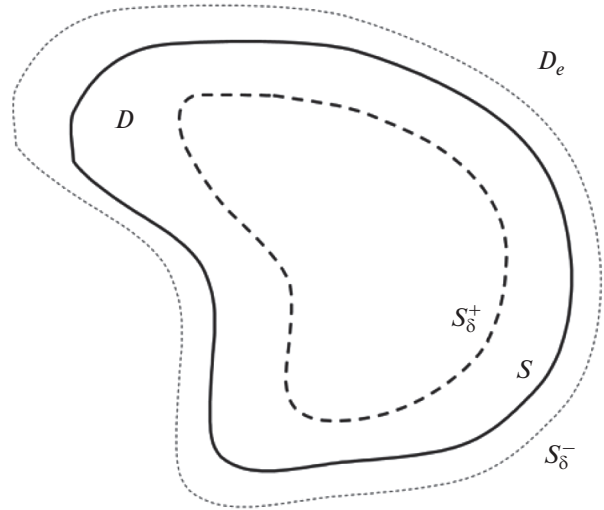


Рис. 1. Геометрия задачи.

Гельмгольца в  $\mathbb{R}^2$  с материальными параметрами сред  $D_e$  и  $D$  соответственно, причем  $k_+$  и  $k_-$  – волновые числа среды внутри и вне рассеивателя. Потребовав в соответствии с МПГУ выполнения условий (1) на контуре  $S_0^-$ , расположенном в  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ , и на контуре  $S_0^+$ , расположенном в области  $D$  (см. рис. 1) с использованием соотношений (2) получим следующие системы интегральных уравнений (СИУ) Фредгольма 1-го или 2-го рода соответственно:

$$\int_S \left\{ U(\vec{r}') \left( \frac{\partial G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right) - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} (G_-(\vec{r}, \vec{r}') + \kappa G_+(\vec{r}, \vec{r}')) \right\} ds' = -U^0(\vec{r}), \quad (3)$$

$$\int_S \left\{ U(\vec{r}') \left( \frac{\partial^2 G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'} \right) - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} \left( \frac{\partial G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} + \frac{\partial G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right) \right\} ds' = -\frac{\partial U^0(\vec{r})}{\partial n},$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} U^0(\vec{r}_-) + \frac{1}{2} \int_S \left\{ U(\vec{r}') \left( \frac{\partial G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right) - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} (G_-(\vec{r}, \vec{r}') - \kappa G_+(\vec{r}, \vec{r}')) \right\} ds', \quad (4)$$

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial n} = \frac{1}{\partial n} \frac{\partial U^0(\vec{r}_-)}{\partial n} + \frac{1}{1 + \kappa} \times \int_S \left\{ U(\vec{r}') \left( \frac{\partial^2 G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial^2 G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n \partial n'} \right) - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} \times \left( \frac{\partial G_-(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - \kappa \frac{\partial G_+(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right) \right\} ds',$$

где точки наблюдения  $M(\bar{r}_\pm)$  принадлежат контурам  $S_\delta^\pm$ , а точка  $M(\bar{r}) \in S$  и обозначено  $U = U_-$ . Отметим, что чаще всего в качестве  $S_\delta^\pm$  [5, 10] выбирают контуры, отстоящие от  $S$  на некоторое достаточно малое расстояние  $\delta$ , т.е. рассматривают эквидистантные контуры. Пусть уравнение границы  $S$  задается в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x'(t), \\ y = y'(t), \quad t \in [0, t_{\max}]. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда уравнения смещенных контуров  $S_\delta^\mp$  записываются следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) \pm n_x(t)\delta, \\ y(t) = y'(t) \pm n_y(t)\delta, \end{cases} \quad (6)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  – координаты нормали к границе тела  $S$ . Для решения систем (3) и (4) используем метод Крылова–Боголюбова. Для этого запишем системы уравнений (3) и (4) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} (K_{11}(t, t')I_1(t') + K_{12}(t, t')I_2(t')) dt' &= b_1(t), \\ \int_0^{t_{\max}} (K_{21}(t, t')I_1(t') + K_{22}(t, t')I_2(t')) dt' &= b_2(t), \\ I_1(t) + \int_0^{t_{\max}} (\tilde{K}_{11}(t, t')I_1(t') + \tilde{K}_{12}(t, t')I_2(t')) dt' &= \tilde{b}_1(t), \\ I_2(t) + \int_0^{t_{\max}} (\tilde{K}_{21}(t, t')I_1(t') + \tilde{K}_{22}(t, t')I_2(t')) dt' &= \tilde{b}_2(t), \end{aligned} \quad (7)$$

в которых введены обозначения:

$$\begin{aligned} I_1(t') &= U(\bar{r}'(t')), \quad I_2(t') = \frac{\partial U(\bar{r}'(t'))}{\partial n'}, \\ \xi(t') &= \sqrt{\dot{x}'(t')^2 + \dot{y}'(t')^2}, \\ K_{11} &= \left( \frac{\partial G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n'} \right) \xi(t'), \\ K_{12} &= -(G_-(\bar{r}_-, \bar{r}') + \kappa G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')) \xi(t'), \\ K_{21} &= \left( \frac{\partial^2 G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n \partial n'} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \xi(t'), \\ K_{22} &= - \left( \frac{\partial G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n} + \frac{\partial G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n} \right) \xi(t'), \\ b_1(t) &= -U^0(\bar{r}_-(t)), \quad b_2(t) = -\frac{\partial U^0(\bar{r}_-(t))}{\partial n}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n'} \right) \xi(t'), \\ \tilde{K}_{12} &= \frac{1}{2} (G_-(\bar{r}_-, \bar{r}') - \kappa G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')) \xi(t'), \\ \tilde{K}_{21} &= -\frac{1}{1 + \kappa} \left( \frac{\partial^2 G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial^2 G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \xi(t'), \\ \tilde{K}_{22} &= \frac{1}{1 + \kappa} \left( \frac{\partial G_-(\bar{r}_-, \bar{r}')}{\partial n} - \kappa \frac{\partial G_+(\bar{r}_+, \bar{r}')}{\partial n} \right) \xi(t'), \\ \tilde{b}_1(t) &= \frac{1}{2} U^0(\bar{r}_-(t)), \quad \tilde{b}_2(t) = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{\partial U^0(\bar{r}_-(t))}{\partial n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Точка в (9) означает производную по  $t$ . Представим далее неизвестные функции  $I_{1,2}(t')$  в виде сумм

$$I_q(t') \cong \sum_{n=1}^N c_n^q \Phi_n(t'), \quad q = 1, 2, \quad (11)$$

где  $\Phi_n(t')$  – импульсные функции:

$$\Phi_n(t') = \begin{cases} 1, & t \in [t_n - \Delta/2, t_n + \Delta/2], \\ 0, & t \notin [t_n - \Delta/2, t_n + \Delta/2]. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $t_n = \frac{t_{\max}}{N} \left( n - \frac{1}{2} \right)$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $\Delta = t_{\max}/N$  – шаг сетки ( $N$  – число базисных функций). Далее, подставив (11) в системы интегральных уравнений (7) и (8) и приравняв левую и правую части в выбранных на кривых  $S_\delta^\pm$  точках коллокации с координатами  $(x(t_n), y(t_n))$ , получим следующие системы алгебраических уравнений относительно величин  $c_n^q$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (K_{mn}^{11} c_n^1 + K_{mn}^{12} c_n^2) &= b_m^1, \\ \sum_{n=1}^N (K_{mn}^{21} c_n^1 + K_{mn}^{22} c_n^2) &= b_m^2, \quad m = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} c_m^1 + \sum_{n=1}^N (\tilde{K}_{mn}^{11} c_n^1 + \tilde{K}_{mn}^{12} c_n^2) &= \tilde{b}_m^1, \\ c_m^2 + \sum_{n=1}^N (\tilde{K}_{mn}^{21} c_n^1 + \tilde{K}_{mn}^{22} c_n^2) &= \tilde{b}_m^2, \quad m = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (14)$$

где матричные элементы и правые части вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} K_{mn}^{pq} &= \int_{t_n - \Delta/2}^{t_n + \Delta/2} K_{pq}(t_m, t) dt, \quad b_m^p = b_p(t_m), \\ \tilde{K}_{mn}^{pq} &= \int_{t_n - \Delta/2}^{t_n + \Delta/2} \tilde{K}_{pq}(t_m, t) dt, \quad \tilde{b}_m^p = \tilde{b}_p(t_m), \quad p, q = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя к асимптотике рассеянного волнового поля при  $r \rightarrow \infty$  с учетом формул (2), (5), (11) и (12) получим следующее выражение для диаграммы рассеяния:

$$g(\varphi) = \frac{i\Delta}{4} \times \sum_{n=1}^N \left( c_n^2 - c_n^1 k_- (n'_x(t_n) \cos \varphi + n'_y(t_n) \sin \varphi) \right) \times \xi(t_n) \exp(ik_- [x'(t_n) \cos \varphi + y'(t_n) \sin \varphi]). \quad (17)$$

Формулы (13)–(17) дают два численных алгоритма (основанных на системах уравнений 1-го и 2-го рода) для решения сформулированной задачи дифракции.

Пусть тело облучается плоской волной

$$U^0(\vec{r}) = \exp(-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (18)$$

где  $\varphi_0$  – угол падения,  $k \equiv k_-$ . Тогда для усредненной диаграммы, в случае если ориентация частицы по отношению к углам облучения  $\varphi_0$  равновероятна, получим (при фиксированных углах падения и наблюдения плоской волны)

$$\langle |g(\alpha)| \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\alpha + \varphi_0, \varphi_0)| d\varphi_0. \quad (19)$$

Одним из критериев правильности полученных результатов является оптическая теорема, которая записывается в виде [11]

$$\sigma = -\text{Re}(g(\varphi = \varphi_0)), \quad (20)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (21)$$

В качестве оценки точности выполнения оптической теоремы будем рассчитывать величину, которая представляет собой относительную разность левой и правой частей в формуле (20):

$$\Delta_{\text{отн}} \equiv \frac{|\sigma + \text{Re}(g(\varphi_0))|}{\sigma}. \quad (22)$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим результаты численного моделирования. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что тело облучается плоской волной (18). В качестве примера рассмотрим сначала задачу дифракции на эллиптическом цилиндре, цилиндре с сечением в виде четыреххлистика и цилиндре с прямоугольным сечением. Уравнение контура тела с сечением в виде четыреххлистика имеет вид (в полярных координатах)

$$r = a(1 + \tau \cos 4\varphi), \quad 0 < \tau < 1. \quad (23)$$

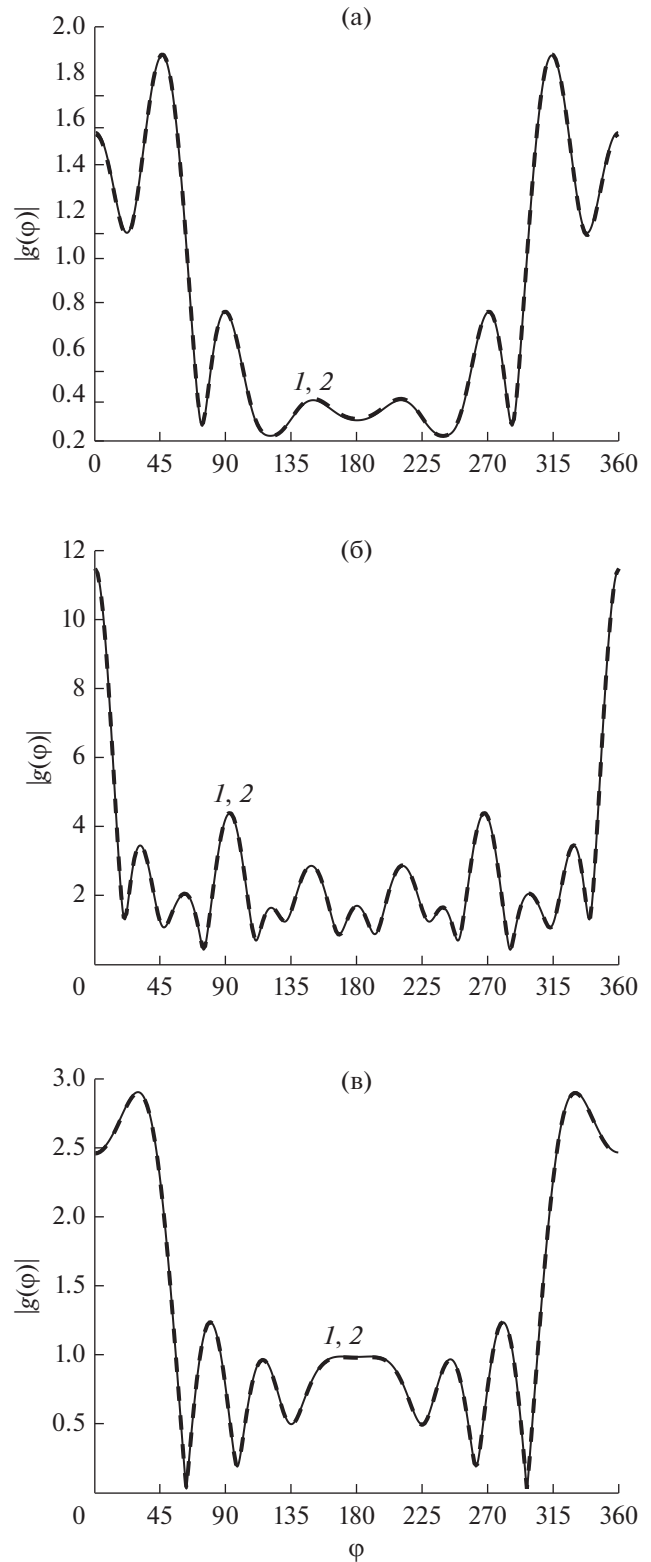


Рис. 2. Угловые зависимости диаграмм рассеяния эллиптического цилиндра (а), тела с сечением в виде четыреххлистика (б) и тела с прямоугольным сечением (в), рассчитанные методами ММДИ (кривые 1) и МПГУ (кривые 2).

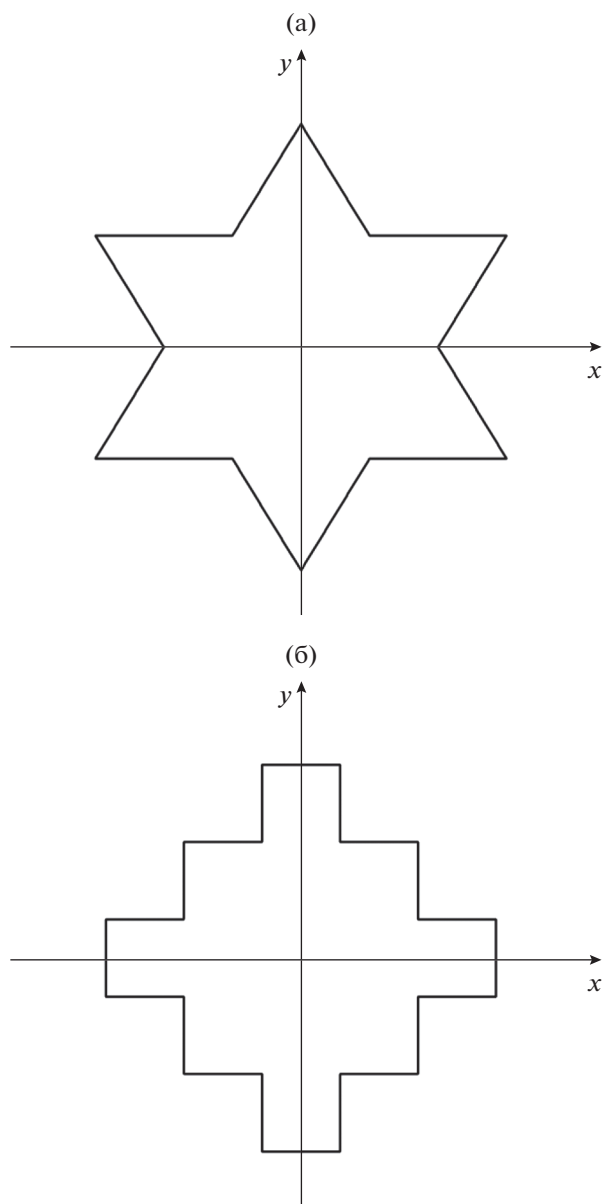


Рис. 3. Геометрия тела с сечением в виде снежинки Коха (а) и кривой Серпинского (б).

На рис. 2а–2в приведены угловые зависимости диаграммы рассеяния для соответствующих геометрий, полученные для следующих значений параметров задачи:  $k\delta = 10^{-4}$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\mu_i = 1$ ,  $\varepsilon_i = 4$  (материальные параметры внешней среды всюду  $\mu_e = 1$ ,  $\varepsilon_e = 1$ ). Размеры тел имели следующие значения: полуоси эллипса или половины длин сторон прямоугольника  $ka = 5$ ,  $kb = 1$ , параметры  $ka = 5$  и  $\tau = 0.5$  для тела с сечением в виде четырехлистника. Результаты сравнивались с диаграммами, построенными при помощи модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) [5, 12]. Отметим, что ММДИ не может быть непосредственно применен к задаче дифракции на телах,

имеющих изломы границы, поэтому для решения задачи при помощи ММДИ проводилась аппроксимация контура осевого сечения тела гладким контуром [12]. Отметим также, что ММДИ обеспечивает высокую точность расчета для тел с гладкой границей, таких как эллипс, многолистник и т.д.

В табл. 1 приведены разности модуля диаграммы рассеяния для указанных геометрий, полученные двумя методами: ММДИ и МПГУ. Как видно из табл. 1, разность результатов при увеличении числа используемых базисных функций уменьшается. Из приведенных данных также следует, что для тел с гладкой границей использование уравнений 1-го рода является более предпочтительным, в силу более быстрой сходимости. В случае тела с прямоугольным сечением использование уравнений 2-го рода дает лучшие результаты.

На рис. 3 приведены геометрии фракталоподобных цилиндров с сечением в виде снежинки Коха и кривой Серпинского (первая итерация) [13]. Рисунки 4а и 4б иллюстрируют угловые зависимости диаграммы рассеяния для указанных цилиндров для следующих параметров задачи:  $k\delta = 10^{-4}$ ,  $\mu_i = 1$ ,  $\varepsilon_i = 4$ . Максимальный поперечный размер тела с сечением в виде снежинки Коха и тела с сечением в виде кривой Серпинского по оси  $x$  составлял  $kd = 10$ . Рассматривалось два различных угла падения  $\varphi_0 = 0$  и  $45^\circ$ . Как следует из рисунков, для исследуемых геометрий точки максимума угловых зависимостей диаграммы рассеяния примерно совпадают с углами падения плоской волны. Видно также, что зависимость диаграммы как для тела с сечением в виде снежинки Коха, так и для тела с сечением в виде кривой Серпинского имеет достаточно большие боковые лепестки.

Была также проведена проверка точности выполнения оптической теоремы для рассмотренных выше геометрий рассеивателей. Во всех случаях мы выбирали число базисных функций так, что число точек коллокации на одной длине волны составляло  $N_\lambda = 25$ . При этом относительная диэлектрическая проницаемость среды тела  $\varepsilon_i$  варьировалась в пределах  $4 \dots 10^3$ , а относительная магнитная проницаемость выбиралась равной единице. В результате расчетов получили, что относительная разность правой и левой частей равенства (20) – величина  $\Delta_{\text{отн}}$  – не превосходит  $5 \times 10^{-3}$ , т.е. мала.

Для рассмотренных тел была также проверена точность выполнения теоремы Уфимцева [14], согласно которой интегральный поперечник рассеяния черного тела ровно в два раза меньше интегрального поперечника рассеяния идеально

**Таблица 1.** Абсолютная и относительная погрешности вычисления диаграммы рассеяния, полученной при помощи ММДИ и МПГУ

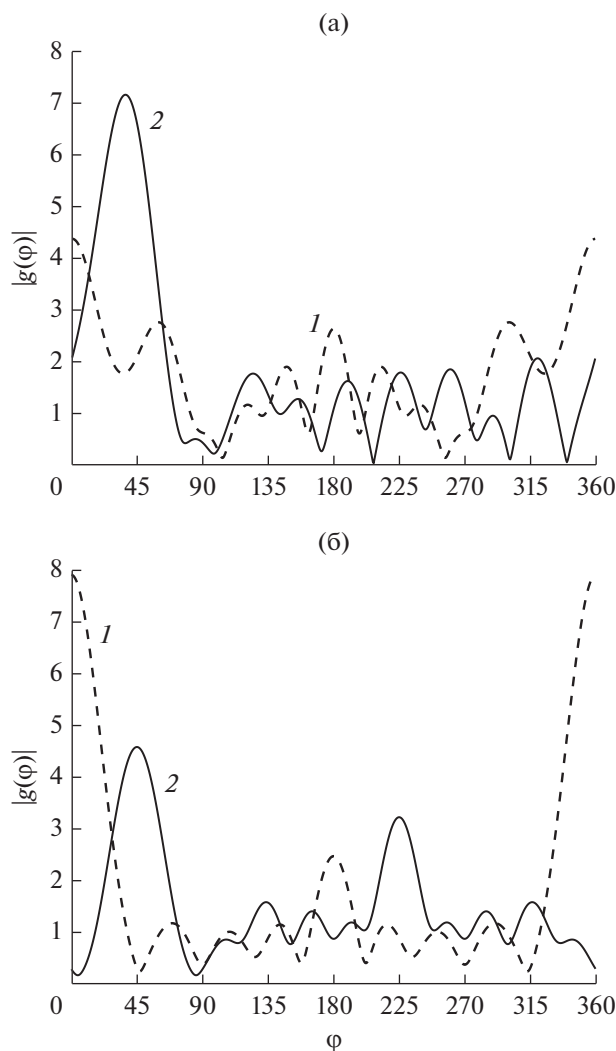
N	СИУ 1-го рода		СИУ 2-го рода	
	абсолютная погрешность	относительная погрешность, %	абсолютная погрешность	относительная погрешность, %
Дифракция на эллиптическом цилиндре				
48	$1.295 \times 10^{-2}$	2.038	$1.453 \times 10^{-1}$	24.297
96	$1.904 \times 10^{-3}$	0.230	$4.183 \times 10^{-2}$	7.238
192	$6.096 \times 10^{-4}$	0.067	$1.144 \times 10^{-2}$	2.003
288	$5.834 \times 10^{-4}$	0.075	$5.539 \times 10^{-3}$	0.977
384	$5.607 \times 10^{-4}$	0.075	$3.450 \times 10^{-3}$	0.612
Дифракция на теле с сечением в виде четырехлистника				
48	$1.643 \times 10^{-1}$	10.411	$3.836 \times 10^{-1}$	21.169
96	$2.499 \times 10^{-2}$	1.442	$9.462 \times 10^{-2}$	5.125
192	$5.802 \times 10^{-3}$	0.325	$2.534 \times 10^{-2}$	1.370
288	$2.984 \times 10^{-3}$	0.166	$1.143 \times 10^{-2}$	0.619
384	$2.176 \times 10^{-3}$	0.121	$6.474 \times 10^{-3}$	0.351
Дифракция на теле с прямоугольным сечением				
48	$3.498 \times 10^{-2}$	4.781	$5.035 \times 10^{-2}$	6.795
96	$1.466 \times 10^{-2}$	1.956	$1.417 \times 10^{-2}$	1.715
192	$7.358 \times 10^{-3}$	0.879	$4.773 \times 10^{-3}$	0.466
288	$5.229 \times 10^{-3}$	0.561	$3.122 \times 10^{-3}$	0.248
384	$4.219 \times 10^{-3}$	0.429	$2.641 \times 10^{-3}$	0.208

**Таблица 2.** Результат проверки теоремы Уфимцева

Геометрия рассеивателя	Интегральный поперечник рассеяния идеально проводящего тела	Интегральный поперечник рассеяния черного тела	Отношение поперечников
Эллипс	2.406448	1.088509	2.210774
Четырехлистник	7.876322	3.651952	2.156743
Четырехугольник	2.716768	1.251197	2.171335
Шестиугольник	5.928531	2.934776	2.020096
Первая итерация снежинки Коха	5.398117	2.612487	2.066275
Первая итерация кривой Серпинского	5.402070	2.498518	2.162109

проводящего тела, имеющего тот же теневой контур (т.е. границу между освещенной и теневой частями поверхности тела). Это утверждение справедливо для всех выпуклых тел, линейные размеры и минимальный радиус кривизны которых много больше длины волны. Отметим, что в работах [15, 16] была рассчитана точность выполнения теоремы Уфимцева в зависимости от размеров рассеивателя. Были рассмотрены тела следующих

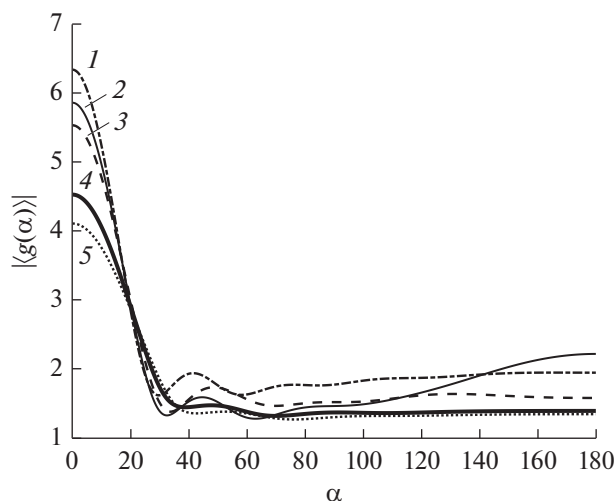
геометрий: сфероид, круговой цилиндр, конус-сфера (конус с основанием в виде полусферы). Установлено, что при радиусе основания рассмотренных тел вращения  $ka > 4$  (для сфероида  $ka$  — это волновой размер малой полуоси) точность выполнения теоремы достаточно высокая. Представляет интерес выяснить, с какой точностью выполняется эта теорема для тел сложной геометрии. В табл. 2 приведены результаты про-



**Рис. 4.** Угловые зависимости диаграмм рассеяния тела с сечением в виде снежинки Коха (а) и кривой Серпинского (б) при двух углах:  $\varphi_0 = 0$  (кривые 1) и  $45^\circ$  (кривые 2).

верки теоремы Уфимцева для рассмотренных выше геометрий рассеивателей. Как видно из таблицы, теорема Уфимцева приближенно выполняется только для тел с сечением в виде снежинки Коха и шестиугольника.

На рис. 5 приведены усредненные по углам ориентации диаграммы рассеяния для рассмотренных выше геометрий тела. Из рисунка видно, что максимумы всех зависимостей соответствуют углу  $\alpha$ , равному нулю. Видно также, что в случае тела с сечением в форме кривой Серпинского, шестиугольника и снежинки Коха, усредненные диаграммы имеют большие значения для углов  $\alpha$ , больших  $90^\circ$ , чем соответствующие диаграммы для эллиптического и прямоугольного цилиндров.



**Рис. 5.** Усредненная по углам ориентации диаграмма рассеяния в зависимости от угла  $\alpha$ : кривая 1 – тело с сечением в виде правильного шестиугольника, кривая 2 – тело с сечением в виде снежинки Коха, кривая 3 – тело с сечением в виде кривой Серпинского, кривая 4 – цилиндр с прямоугольным сечением, кривая 5 – эллиптический цилиндр.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При помощи МПГУ разработаны два численных алгоритма на основе СИУ 1-го и 2-го рода, позволяющие рассчитывать характеристики рассеяния магнитодиэлектрических тел произвольной геометрии. Получены результаты расчета диаграммы рассеяния для большого набора тел разной геометрии, в том числе фракталоподобных рассеивателей. Проведено сравнение методов на основе МПГУ с результатами, полученными при помощи ММДИ. Показано, что МПГУ позволяет получать результаты расчета диаграммы рассеяния с достаточно высокой точностью. Проиллюстрировано, что в случае гладкой границы тела метод на основе уравнений 1-го рода позволяет получать результаты с большей точностью. Проведена проверка точности выполнения оптической теоремы для рассматриваемых геометрий. Показано, что точность выполнения оптической теоремы составляет  $5 \times 10^{-3}$ . Получены угловые зависимости усредненной диаграммы рассеяния для различных геометрий рассеивателей.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-02-00961, 19-02-00654).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.

2. *Захарьев Л.Н., Леманский А.А.* Рассеяние волн “черными” телами. М.: Сов. радио, 1972.
3. *Mishchenko M.I., Zakharova N.T., Khlebtsov N.G. et al.* // J. Quant. Spectr. Rad. Trans. 2017. V. 202. P. 240.
4. *Waterman P.C.* // Proc. IEEE. 1965. V. 53. P. 805.
5. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ИД Медиа Паблшер, 2014.
6. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И., Чиркова А.П.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 247.
7. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 476.
8. *Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Смирнова Н.И.* // Оптика и спектроскопия. 2019. Т. 126. № 5. С. 547.
9. *Крысанов Д.В., Кюркчан А.Г.* // Т-Comm. Телекоммуникации и транспорт. 2017. Т. 11. № 7. С. 17.
10. *Кюркчан А.Г., Анютин А.П.* // ДАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309.
11. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
12. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2012. V. 113. P. 2368.
13. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
14. *Уфимцев П.Я.* Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2007.
15. *Кюркчан А.Г., Демин Д.Б.* // Журн. техн. физики. 2004. Т. 74. № 2. С. 24.
16. *Кюркчан А.Г., Демин Д.Б.* // РЭ. 2004. Т. 49. № 11. С. 1218.

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67.01

### АБЕРРАЦИИ ЭЙКОНАЛА В ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗАХ

© 2020 г. А. С. Венецкий<sup>а</sup>, \*, В. А. Калошин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: Avenetsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.10.2019 г.

После доработки 15.11.2019 г.

Принята к публикации 25.11.2019 г.

Получены приближенные формулы для эйконала на выходной поверхности цилиндрической диэлектрической линзы с градиентом показателя преломления вдоль декартовой координаты при смещении источника из фокуса, расположенного на оси симметрии линзы. Одна из них получена в парааксиальной области и имеет вид разложения по степеням величин продольного и поперечного смещения источника, включая члены первого и второго порядка малости, а другая – в виде интеграла, не имеет ограничения по числовой апертуре. С использованием первой формулы найдено уравнение фокальной кривой. Проведено исследование погрешности различных формул при вычислении эйконала и его aberrаций на выходной поверхности линзы. С помощью второй формулы найдены оптимальные параметры линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости, обеспечивающие минимальные aberrации.

DOI: 10.31857/S0033849420080136

#### ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические линзы из плавно неоднородного (градиентного) диэлектрика используются как в оптическом, так и в радиодиапазоне электромагнитных волн. Впервые цилиндрические линзы такого типа с плоскими поверхностями и квадратичным законом изменения коэффициента преломления вдоль декартовой координаты были изготовлены из желатина и исследованы в оптическом диапазоне [1]. В работах по оптике их часто называют линзами Вуда [2]. Точное решение задачи геометрооптического синтеза частного случая градиентной линзы – плоской линзы с первым фокусом на поверхности линзы, а вторым на бесконечности – было получено в работе [3] в виде зависимости коэффициента преломления от декартовой координаты в декартовой системе координат или радиальной координаты в цилиндрической системе координат. Эта линза получила название линза Микаэляна [4]. В работе [5] решение [3] было обобщено на случай линзы из анизотропного диэлектрика.

Теория геометрооптического синтеза градиентных линз с плоскими входной и выходной поверхностями и внешним фокусом, использующая классическую оптическую теорию aberrаций, описана в работе [2]. Теория синтеза, использующая разложение коэффициента преломления по

четным степеням расстояния от оси линзы, разработана в работе [6], а с криволинейными поверхностями – в работах [7, 8]. Рекуррентный метод синтеза таких линз, основанный на использовании модели слоистой линзы с постоянными коэффициентами преломления внутри слоев, развит в работе [9].

Исследование эйконала (оптического пути) и его aberrаций в градиентных линзах при смещении источника из фокуса усложняется из-за криволинейной формы лучей. Классическая оптическая теория aberrаций таких линз описывает лучевую aberrацию в виде двумерного ряда (разложения по степеням угла зрения и апертуры линзы) [2]. В работах [10–12] разработана новая теория aberrаций для однородных диэлектрических линз с использованием разложения эйконала по одному параметру – величине смещения источника. В работе [13] теория обобщается для описания эйконала и его aberrации на выходной поверхности двумерной линзы с градиентом диэлектрической проницаемости вдоль декартовой координаты. Однако формула для эйконала, полученная в работе [13], неудобна для использования вблизи оси симметрии линзы, поскольку имеет на оси особенность.

Цель данной работы – получить формулу для эйконала, справедливую в парааксиальной области, а также формулу, в которой используется приближение прямых лучей.



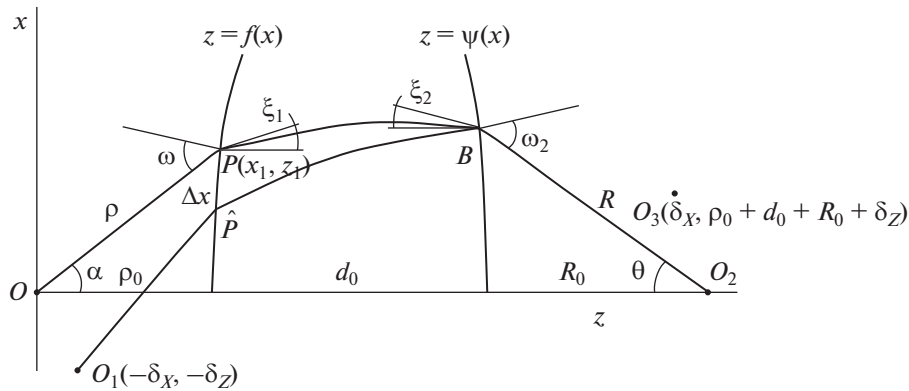


Рис. 1. Геометрия лучей в линзе и смещение источника.

1. ЭЙКОНАЛ  
НА ВЫХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ  
В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ  
ПРИ СМЕЩЕННОМ ИЗ ФОКУСА  
ИСТОЧНИКЕ

Рассмотрим цилиндрическую градиентную линзу, преобразующую цилиндрический фронт в цилиндрический (или плоский) с показателем преломления  $n$ , зависящим от декартовой координаты  $x$  (рис. 1). Пусть источник смещается из фокуса в точку  $O$  в точку  $O_1$  с координатами  $(-\delta_x, -\delta_z)$ . Эйконал луча, выходящего из  $O_1$ , в произвольной точке  $B(x_2, z_2)$  на выходной апертуре линзы имеет вид [13]

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_x + \cos \alpha \delta_z + A_2(\delta_x, \delta_z) - \frac{\tilde{Q}_1^2}{4\tilde{Q}_2} \quad (1)$$

Здесь  $J$  – оптический путь невозмущенного луча от точки  $P$  до точки  $B$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \frac{\cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_x \cos \varphi - \frac{\cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_z, \\ \tilde{Q}_2 &= -\frac{k^2}{2} I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{2\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} - \\ &\quad - kf'(x_1) - \frac{a}{2} f''(x_1) + Q_2, \\ A_2(\delta_x, \delta_z) &= \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho} \delta_x^2 + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \alpha}{2\rho} \delta_z^2 - \frac{\sin 2\alpha}{2\rho} \cos \varphi \delta_x \delta_z, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\cos \alpha}{2} f''(x_1) + \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho \cos^2(\omega - \alpha)}, \\ I_4 &= [-f'(x_1) + \text{ctg} \xi_1 + \lambda(-\text{ctg} \xi_2 + \psi'(x_2))]/a', \\ k &= \frac{\text{ctg} \xi_1 - f'(x_1)}{I_4} \end{aligned}$$

$a = n(x_1) \cos \xi_1$  – лучевой параметр невозмущенного луча,

$$a' = \left. \frac{da}{dx} \right|_{x=x_1} = n'(x_1) \cos \xi_1 - n(x_1) \sin(\xi_1) \Omega \Theta,$$

$$\Theta = \frac{1}{G} \left[ 1 + B(1 - G) - \frac{\rho}{\cos \omega} \text{tg} \omega \frac{n'(x_1)}{n(x_1)} \right],$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{K_P \rho}{\cos \omega}, \quad G = \frac{\sqrt{n^2(x_1) - \sin^2 \omega}}{\cos \omega} = \\ &= \frac{n_1(n_1 - \cos(\alpha - \xi_1))}{n_1 \cos(\alpha - \xi_1) - 1}, \quad n_1 = n(x_1), \end{aligned}$$

$K_P = \frac{f''(x_1)}{(1 + (f'(x_1))^2)^{3/2}}$  – кривизна поверхности линзы в точке  $P$ .

Кроме того,  $\varphi = 0$  при  $x_2 > 0$ ,  $\varphi = \pi$  при  $x_2 < 0$ ,  $J = \rho_0 + n_0 d_0 + R_0 - \rho - R$ ,  $\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_2} \frac{d\theta}{d\alpha}$ ,  $\theta = \theta(\alpha)$  – функция отображения при фокусировке на конечном расстоянии,  $J = n_0 d_0 - d_0 - \rho + Z_B$ ,  $\lambda = \Omega \frac{dx_2}{d\alpha}$ ,  $x_2 = x_2(\alpha)$  – функция отображения при фокусировке на бесконечности (при формировании плоского фронта),  $\Omega = \frac{\cos \omega}{\rho \cos(\omega - \alpha)}$ ,  $\Omega_2 = \frac{\cos \omega_2}{R \cos(\omega_2 - \theta)}$ .

Величина эйконала (1) зависит от первых производных функций, описывающих левую и правую поверхности линзы, от кривизны левой поверхности, углов входа и выхода невозмущенного луча, производной функции отображения, значения коэффициента преломления в точке входа и выхода невозмущенного луча, производной коэффициента преломления в точке входа невозмущенного луча. При этом выражение (1) справедливо как для монотонных лучей, так и немонотонных.

Формула (1) справедлива для любой точки  $B$  на правой поверхности линзы, кроме точки на оси  $z$ ,

потому что при  $x = 0$  в формуле имеется особенность в выражении  $\tilde{Q}_2$ . Раскроем эту особенность. Из закона преломления в точках  $P$  и  $B$  следует, что

$$\xi_1 = \arcsin\left(\frac{\sin \omega}{n(x_1)}\right) - \omega + \alpha,$$

$$\xi_2 = -\arcsin\left(\frac{\sin \omega_2}{n(x_2)}\right) + \omega_2 - \theta$$

(углы  $\xi_1, \xi_2, \omega, \omega_2$  показаны на рис. 1). Раскладывая эти выражения в ряды по  $x_1$  и  $x_2$  и оставляя члены не выше первого порядка, получаем

$$\xi_1 = -\frac{g_1}{n_0} x_1, \quad \xi_2 = -\frac{h_1}{n_0} x_2,$$

$$a' = -\frac{(c_2 + g_2)}{n_0} x_1, \quad k = \frac{h_1(c_2 + g_2)}{n_0(g_1 - h_1)} x_1,$$

где  $g_1 = 2f_2(n_0 - 1) - \frac{1}{\rho_0}$ ,  $h_1 = 2\psi_2(n_0 - 1) + \frac{1}{R_0}$ ,  $g_2 = g_1^2 f_2$  и  $\psi_2$  – коэффициенты разложения уравнения поверхностей ( $z = \rho_0 + f_2 x^2 + \dots$  и  $z = \rho_0 + d_0 + \psi_2 x^2 + \dots$ ).

Разложим закон отображения для фокусировки на конечном расстоянии в ряд Тэйлора по нечетным степеням  $\alpha$ :  $\theta = m_1 \alpha + m_3 \alpha^3 + \dots$ . Пусть при фокусировке в плоскую волну аналогичный ряд имеет вид  $x_2 = f_e \alpha + f_3 \alpha^3 + \dots$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  и фокусировке на конечном расстоянии имеем

$$\lambda \rightarrow \left. \frac{\Omega}{\Omega_2} \frac{d\theta}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{R_0}{\rho_0} m_1,$$

а при фокусировке в плоскую волну –

$$\lambda \rightarrow \left. \Omega \frac{dx_2}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{f_e}{\rho_0}.$$

При этом из соотношений  $x_1 = \alpha \rho_0$ ,  $x_2 = R_0 \theta$  следует:

$$x_2 = m_1 \frac{R_0}{\rho_0} x_1, \quad \lambda = \frac{R_0}{\rho_0} m_1,$$

$$k^2 I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} =$$

$$= -\frac{c_k^2}{c_{\xi_1}} \left( \frac{1}{c_{\xi_1}} - \frac{\lambda}{c_{\xi_2}} \right) + \frac{2c_k n_0 + c_2}{n_0 c_{\xi_1}},$$

$$c_k = \frac{h_1(c_2 + g_2)}{n_0(g_1 - h_1)}, \quad c_{\xi_1} = -\frac{g_1}{n_0},$$

$$c_{\xi_2} = -m_1 \frac{h_1 R_0}{n_0 \rho_0}, \quad c_{\lambda'} = -\frac{(c_2 + g_2)}{n_0},$$

где  $c_2$  – коэффициент разложения  $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$ .

С учетом найденных соотношений получаем

$$\tilde{Q}_{20} = \tilde{Q}_2(0) = -\frac{(c_2 + g_2)}{2(g_1 - h_1)},$$

тогда выражение для эйконала луча из смещенного фокуса можно представить в виде

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_x +$$

$$+ \cos \alpha \delta_z + A_2(\delta_x, \delta_z) - \frac{\tilde{Q}_1^2}{4\tilde{Q}_{20}} \quad (2)$$

(выражение для величины  $\tilde{Q}_1$  было приведено выше).

Формула (2) определяет эйконал луча из смещенного источника в паракиальной области.

## 2. ФОРМУЛА ДЛЯ ЭЙКОНАЛА НА ВЫХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПРЯМЫХ ЛУЧЕЙ

Формула (1) описывает эйконал в точке  $B$  с погрешностью порядка  $\delta_x^3$ . Как показано в работе [12], для линзы из однородного диэлектрика можно получить приближенную формулу для эйконала путем прямого суммирования двух оптических путей:

$$L(O_1 B) = L(O_1 \hat{P}) + L(\hat{P} B), \quad (3)$$

где точка  $\hat{P}$  имеет координаты  $(x + \Delta x \cos \varphi, f(x + \Delta x \cos \varphi))$ ,  $\Delta x$  вычисляется по формуле

$$\Delta x = -\tilde{Q}_1 / (2\tilde{Q}_2). \quad (4)$$

В паракиальной области формула (4) переходит в формулу

$$\Delta x = -\tilde{Q}_1 / (2\tilde{Q}_{20}).$$

При этом ошибка формулы (3), зависящая от смещения, пропорциональна  $\delta_x^4$ . Первый член формулы (3) есть длина отрезка  $O_1 \hat{P}$ , второй член представляется криволинейным интегралом по траектории луча, соединяющего точки  $\hat{P}$  и  $B$ :

$$L(\hat{P} B) = \int n ds.$$

Вычислим эйконал луча в среде с показателем преломления, меняющимся по закону  $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$ . Уравнение монотонного луча в такой среде имеет вид

$$z = \int_0^x \frac{adx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{c_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{c_2}} \arcsin \frac{x}{p}.$$

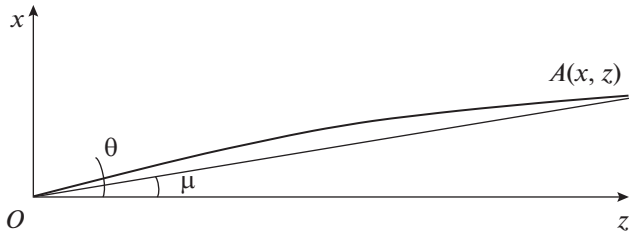


Рис. 2. Приближенное вычисление эйконала.

Здесь  $a = n_0 \cos \theta$ ,  $p^2 = \frac{n_0^2 - a^2}{c_2} = \frac{n_0^2 \sin^2 \theta}{c_2}$ ,  $\theta$  – угол касательной к лучу в точке  $O$  (рис. 2).

Эйконал луча в точке  $A$  представим в виде

$$L = \int_0^x \sqrt{n^2(x) - a^2} dx + az = \sqrt{c_2} \frac{x}{2} \sqrt{p^2 - x^2} + \left( \frac{\sqrt{c_2} p^2}{2} + \frac{a^2}{\sqrt{c_2}} \right) \arcsin \frac{x}{p}.$$

Разлагая этот эйконал в ряд по степеням  $x$  и оставляя члены не выше второго порядка, получаем

$$L = n_0 z + \frac{\sqrt{c_2}}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{z \sqrt{c_2}}{n_0} \right) x^2 + \underline{Q}(x^4) = n_0 z + L_2 x^2 + \underline{Q}(x^4).$$

Легко показать, что полученное выражение для эйконала справедливо и для немонотонного луча, т.е. имеющего экстремум внутри линзы. Вычислим эйконал на прямом отрезке, соединяющем точки  $O$  и  $A$  (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \int n ds = \int_0^x \left( n_0 - \frac{c_2}{2n_0} x^2 \right) \frac{dx}{\sin \mu} = \\ &= n_0 z + \left( \frac{n_0}{2z} - \frac{zc_2}{6n_0} \right) x^2 + \underline{Q}(x^4) = \\ &= n_0 z + \bar{L}_2 x^2 + \underline{Q}(x^4), \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{x}{z}, \\ \bar{L}_2 &= \frac{n_0}{2z} - \frac{zc_2}{6n_0}, \quad L_2 = \frac{\sqrt{c_2}}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{z \sqrt{c_2}}{n_0} \right), \end{aligned}$$

где  $L_2$  и  $\bar{L}_2$  – значение коэффициента разложения точного и приближенного эйконала соответственно. Этот отрезок тем ближе к истинному лучу в линзе, чем меньше величина градиента показателя преломления среды и тоньше линза. Численное сравнение коэффициентов  $L_2$  и  $\bar{L}_2$  показывает, что при  $n_0 = 1.6$ ,  $c_2 = 1$  и  $z = 0.5$  получаем  $|L_2 - \bar{L}_2| = 3.4 \times 10^{-4}$ , а при  $n_0 = 1.6$ ,  $c_2 = 3$  и  $z = 1$  имеем  $|L_2 - \bar{L}_2| = 2.75 \times 10^{-2}$ . Если при указанных параметрах заменить эйконал реального луча на

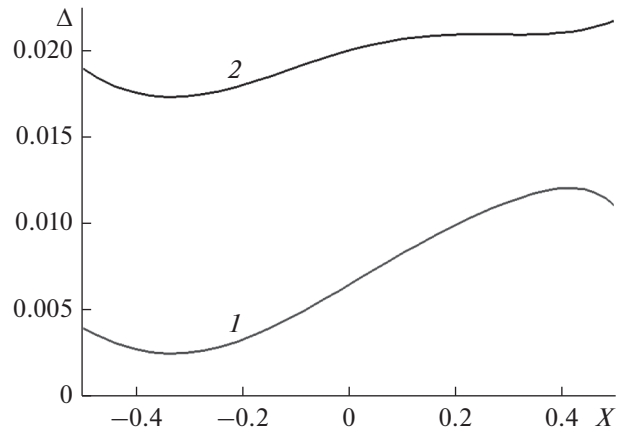


Рис. 3. Погрешности вычисления эйконала по формулам (1) и (5).

эйконал спрямленного луча, то ошибка будет порядка  $\underline{O}(x^4)$ .

С учетом полученных результатов эйконал в точке  $B$  на выходной поверхности можно записать в виде

$$L(O_1, B) = |O_1 P_1| + \int_{P_1 B} n ds + \Delta_E, \quad (5)$$

где  $\Delta_E = \int_{P_1 B} n ds - \int_{P_1 B} n ds$  – разность криволинейного и прямолинейного интегралов для невозмущенного луча. Интегрирование в формуле (5) проводится по прямой, соединяющей точки  $P_1$  и  $B$ , а точка  $P_1$  имеет координаты  $x_1 = x + \Delta x \cos \varphi$ ,  $z_1 = f(x_1)$ , где  $x$  – координата невозмущенной точки  $P$ , а  $\Delta x$  выражается формулой (4).

На рис. 3 приведены зависимости от координаты вдоль апертуры ошибки вычисления эйконала апланатической градиентной линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости и параметрами  $\rho_0 = 1$ ,  $d_0 = 0.5$ ,  $n_0 = 1.6$ ,  $f_e = 1.35$ ,  $c_2 = 1.5$ . Величины смещения источника  $\delta_x = 0.39904$ ,  $\delta_z = -0.25024$  соответствуют отклонению луча на 20 град. Величины  $\delta_x$ ,  $\delta_z$ ,  $\rho_0$ ,  $d_0$ ,  $R_0$ ,  $f_e$  здесь и далее нормированы на величину апертуры линзы. Кривой 2 представлена разность точного эйконала и эйконала, вычисленного по формуле (1), а кривой 1 – разность точного эйконала и вычисленного по формуле (5). Как видно из рисунка, при данном наборе параметров точность формулы (5) выше, чем формулы (1).

### 3. ФОКАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

При выводе уравнения фокальной кривой, на которой эйконал имеет минимальную абберацию

(отклонение от эйконала центрального луча), рассмотрим три случая – один общий и два частных:

1) оба фокуса находятся на конечном расстоянии от линзы,

2) два фокальных расстояния равны,

3) второй фокус находится на бесконечности.

Начнем с частного случая 3. Найдем эйконал в точке  $B$  с координатами  $(X, Z)$ , лежащей на краю апертуры линзы, и добавим оптический путь до плоскости наклонного фронта. Для вывода уравнения используем формулы (1), (2) для эйконала на выходной поверхности линзы. Обозначим полученный в результате эйконал  $\Phi(X)$ :

$$\Phi(X) = L(O_1, B) - X \sin \theta - (Z - \rho_0 - d_0) \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между лучом на выходе линзы и осью  $Z$ ,  $Z = \psi(X)$ , а величина  $L(O_1, B)$  определяется формулой (1) или (на оси) формулой (2).

Эйконал  $\Phi(X)$  можно представить в виде суммы  $\Phi(X) = \Phi_1(X) + \Phi_2(X)$ , где  $\Phi_2(X)$  – четная, а  $\Phi_1(X)$  – нечетная функции.

Используя соотношения  $\sin \theta = \delta_x / f_e$ ,  $\cos \theta = 1 - \delta_x^2 / (2f_e^2)$  и введя обозначения  $q_2 = -1 / (4\tilde{Q}_2)$ ,  $q_{20} = -1 / (4\tilde{Q}_{20})$ , можно получить

$$\begin{aligned} \Phi_2(X) &= L_0 + (Z - \rho_0 - d_0) \frac{\delta_x^2}{2f_e^2} + \cos \alpha \delta_z + \\ &+ \left( \frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right) (\delta_x^2 \cos^2 \alpha + \delta_z^2 \sin^2 \alpha), \\ \Phi_2(0) &= L_0 + \delta_z + \delta_x^2 \left( \frac{1}{2\rho_0} + \frac{q_{20}}{\rho_0^2} \right), \end{aligned}$$

где  $L_0 = \rho_0 + n_0 d_0$ .

Приравнявая  $\Phi_2(X) = \Phi_2(0)$ , получаем уравнение фокальной кривой, определяющую зависимость  $\delta_z(\delta_x)$ :

$$\begin{aligned} \delta_x^2 \left\{ \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2f_e^2} (Z - \rho_0 - d_0) \right\} - \frac{1}{2\rho_0} - \frac{q_{20}}{\rho_0^2} \Bigg\} = \\ = \delta_z (1 - \cos \alpha) - \delta_z^2 \sin^2 \alpha \left( \frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь выведем уравнение фокальной кривой для частного случая 2, когда фокальные расстояния равны, т.е.  $\rho_0 = R_0$ . В этом случае линза имеет две плоскости симметрии и  $\alpha = \theta$  для любого луча. Найдем эйконал в точке  $B$ , лежащей на оси, т.е. при  $X = 0$  и  $\alpha = 0$ . Из симметрии линзы можно получить, что  $h_1 = -g_1$ , и из формулы (2) следует:

$$L(O_1, 0) = \rho_0 + n_0 d_0 + \delta_z + \left( \frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2.$$

Прибавляя к полученному значению эйконала в точке  $B$  расстояние от  $B$  до  $O_3$ :  $|BO_3| = \sqrt{\delta_x^2 + (\rho_0 + \delta_z)^2} = \rho_0 + \delta_z + \frac{\delta_x^2}{2\rho_0}$ ,

получим эйконал от точки  $O_1$  до  $O_3$ :

$$\begin{aligned} L(O_1, O_3) &= 2\rho_0 + n_0 d_0 + 2\delta_z + \\ &+ \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю сумму членов с  $\delta_x$  и  $\delta_z$ , получаем уравнение фокальной кривой слева от линзы:

$$\delta_z = - \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \frac{\delta_x^2}{2}. \quad (7)$$

В силу симметрии линзы фокальная кривая справа от линзы симметрична кривой (7) относительно оси  $X$ .

И наконец, найдем уравнение фокальной кривой в общем случае 1, когда фокусные расстояния разные и конечные. При этом одна из фокальных кривых (например, правая) может быть задана в виде

$$\Delta_z = \Psi(\Delta_x), \quad (8)$$

где  $(\Delta_x, \Delta_z)$  – координаты смещенного фокуса  $O_3$ . Ограничимся случаем апланатической линзы. По формуле (1) найдем эйконал в произвольной точке  $B(X, Z)$  на правой поверхности и прибавим к нему расстояние  $|BO_3|$ :

$$\begin{aligned} |BO_3| &= [(R \sin \theta \cos \varphi - \Delta_x)^2 + \\ &+ (\Delta_z - R \cos \theta)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ограничиваясь линейными членами по  $\delta_x$ ,  $\Delta_x$ , можно записать

$$\begin{aligned} L(O_1, B) + |BO_3| &= \rho + J + R + \\ &+ \sin \alpha \cos \varphi \delta_x - \sin \theta \cos \varphi \Delta_x + \dots \end{aligned}$$

Приведенная сумма в силу фокусировки есть константа, поэтому можно записать

$$\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \delta_x = \frac{1}{m} \delta_x, \quad (9)$$

где  $m = \sin \theta / \sin \alpha$  – константа (параметр апланатизма).

По формуле (2) найдем эйконал в точке  $B$ , лежащей на оси, т.е. при  $X = 0$  и  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} L(O_1, 0) &= \rho_0 + n_0 d_0 + \delta_z + \\ &+ \left( \frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2. \end{aligned}$$

Прибавляя к полученному значению эйконала в точке  $B$  расстояние от  $B$  до  $O_3$ :

$$\begin{aligned} |BO_3| &= \sqrt{\Delta_X^2 + (R_0 + \Delta_Z)^2} = \\ &= R_0 + \Delta_Z + \frac{\Delta_X^2}{2R_0}, \end{aligned}$$

получим эйконал по лучу от точки  $O_1$  до  $O_3$ :

$$\begin{aligned} L(O_1, O_3) &= L_0 + \delta_Z + \left( \frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_X^2 + \\ &+ \Delta_Z + \frac{\Delta_X^2}{2R_0}, \end{aligned}$$

где  $L_0 = \rho_0 + n_0 d_0 + R_0$  – эйконал центрального луча. Выражая  $\Delta_X$  через  $\delta_X$  по формуле (9), а  $\Delta_Z$  через  $\delta_X$  по формуле (8) и требуя выполнения равенства  $L(O_1, O_3) = L_0$ , получаем уравнение фокальной кривой:

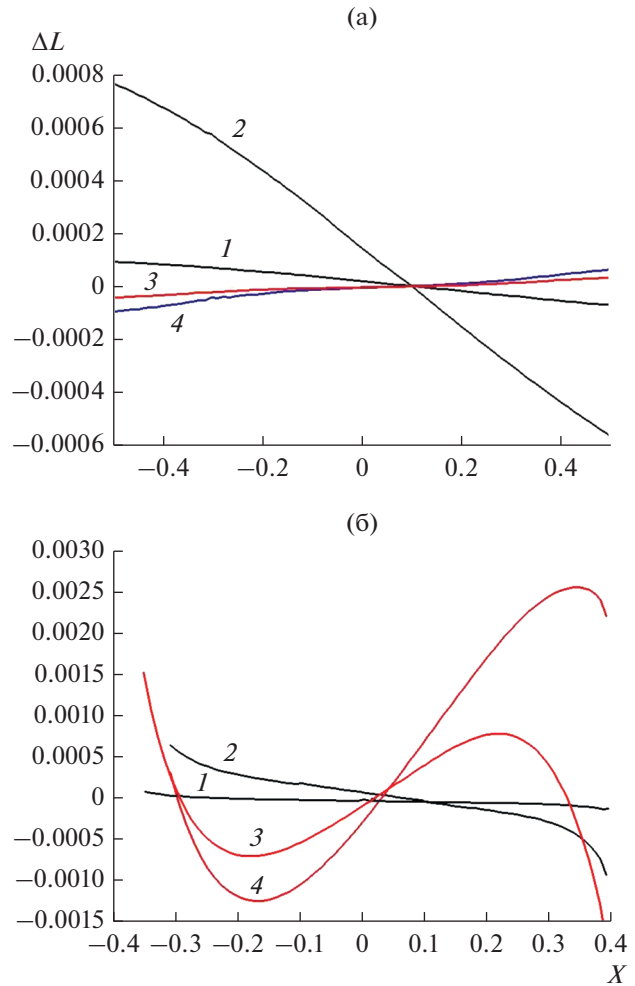
$$\delta_Z + \left( \frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_X^2 + \Psi \left( \frac{\delta_X}{m} \right) + \frac{\delta_X^2}{2R_0 m^2} = 0.$$

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ ЭЙКОНАЛА И ЕГО АБЕРРАЦИЙ

Была найдена разность эйконалов, вычисленных методом геометрической оптики и с помощью формул (1), (2) и (5) на выходной поверхности линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости. Полученные данные приведены на рис. 4. На рис. 4а представлено распределение погрешности формул для эйконала на выходной поверхности линзы, которая преобразует цилиндрический фронт источника в плоский, а на рис. 4б – распределение погрешности для симметричной линзы. Кривые 1, 2 рассчитаны с использованием формулы (1), кривые 3, 4 – с использованием формулы (5). Из данных, представленных на рис. 4а, видно, что формула (5) почти на порядок точнее формулы (1), а из данных на рис. 4б – наоборот, на порядок хуже. Также видно, что погрешность формулы (1) обусловлена главным образом линейной составляющей, которая сдвигает точку фокусировки вдоль фокальной кривой и не влияет на величину aberrации, а зависимость на рис. 4б, определенная формулой (5), содержит существенную нелинейную погрешность.

Для этой же линзы была определена разность эйконалов, вычисленных методом геометрической оптики и с помощью формул (1) или (2). На рис. 5 приведены полученные результаты, и видно, что в области  $|X| \leq 0.25$  погрешности формул примерно равны.

Далее была исследована погрешность формулы (1) при вычислении aberrации в линзе с двумя плоскостями симметрии и параметрами  $\rho_0 = 1$ ,



**Рис. 4.** Ошибка вычисления эйконала для линз с параметрами: а)  $\rho_0 = 1, d_0 = 0.5, n_0 = 1.6, c_2 = 1, R_0 = \infty$ ; б)  $\rho_0 = R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$ ; кривые 1, 3 –  $\delta_X = -0.1, \delta_Z = -0.01$ , кривые 2, 4 –  $\delta_X = -0.2, \delta_Z = -0.02$ .

$R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$ . Добавим к величине эйконала в точке  $B$  выходной апертуры линзы для луча из источника, расположенного в точке  $O_1(-\delta_X, -\delta_Z)$ , расстояние до симметричной ей точки  $O_3(\delta_X, \rho_0 + d_0 + R_0 + \delta_Z)$  и вычтем константу и линейную составляющую. В результате получаем

$$A(X) = \Phi(X) + |BO_3| - \Phi_0 - kX,$$

где  $\Phi_0$  – эйконал центрального луча несмещенного источника.

Эйконал  $\Phi(X)$  будем вычислять двумя способами: по формуле (1) и методом геометрической оптики с использованием формулы

$$\Phi(X) = |O_1 P_1| + \int_{PB} nds,$$

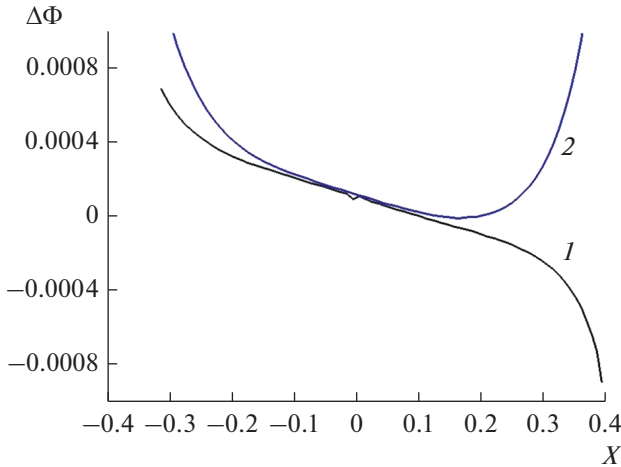


Рис. 5. Погрешности формул (1) (кривая 1) и (2) (кривая 2); параметры линзы:  $\rho_0 = R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$ .

пределы интегрирования в которой находятся из уравнения луча для среды с квадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости [4] для двух случаев:

1) если луч монотонный –

$$Z = Z_R + \int_{X_1}^{X_2} \frac{adx}{\sqrt{n_0^2 - c_2x^2 - a^2}} = Z_R + \frac{a}{\sqrt{c_2}} \left( \arcsin \frac{X_2}{p} - \arcsin \frac{X_1}{p} \right),$$

2) если луч имеет максимум –

$$Z = Z_R + \frac{a}{\sqrt{c_2}} \left( \pi - \arcsin \frac{X_2}{p} - \arcsin \frac{X_1}{p} \right).$$

Координаты точки пересечения луча ( $Z_2, X_2$ ) с поверхностью находятся из системы двух уравнений, одно из которых – приведенное уравнение луча, а второе – уравнение образующей поверхности линзы  $Z = \Psi(X)$ .

Координата  $z$  для смещенного на  $\delta_x = 0.2$  источника на фокальной кривой, вычисленная по формуле (7), равна  $\delta_z = 0.01486$ , а на оптимальной фокальной кривой, найденной путем минимизации aberrации –  $\delta_z = 0.02686$ . Зависимости величины aberrации эйконала от координаты точки на выходной поверхности линзы приведены на рис. 6а для фокальной кривой (7) и на рис. 6б для оптимальной фокальной кривой.

Следует отметить, что кривые на рис. 6а имеют значительные квадратичные составляющие. Это объясняется приближенным характером фокальной кривой, определенной формулой (7). Как видно из рис. 6б, оставшиеся квадратичные составляющие сопоставимы с составляющими более высоких

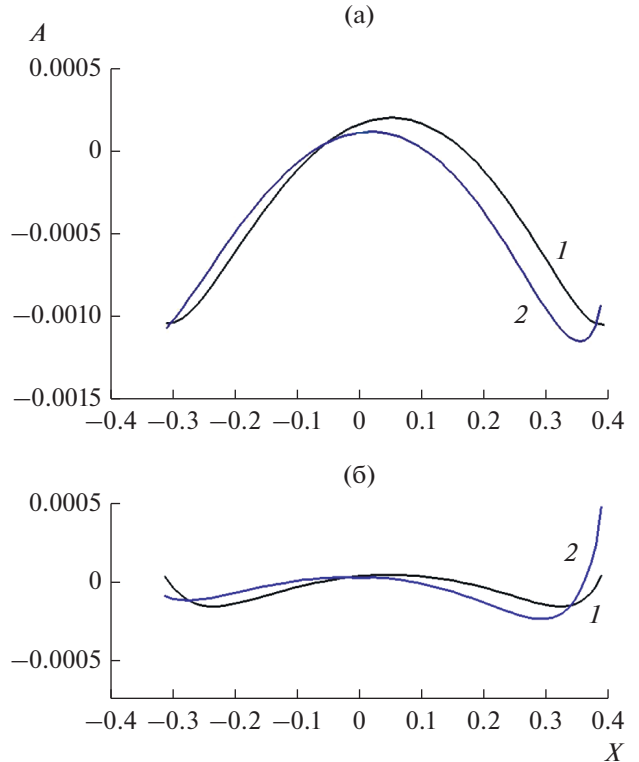


Рис. 6. Aberrации эйконала для приближенной (а) и оптимальной (б) фокальных кривых: 1 – точный расчет, 2 – расчет по формуле (1).

четных степеней. Нечетные степени практически отсутствуют из-за апланатизма системы.

Введем величину среднеквадратической aberrации (СА) по формуле

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(X_i) + |BO_3| - \Phi_0)^2},$$

где  $N = 100$  – число лучей, прошедших через апертуру линзы от источника на фокальной кривой. Когда эйконал  $\Phi(X)$  вычисляется по формуле (1), то  $S_A = 0.9 \times 10^{-4}$ , а когда эйконал  $\Phi(X)$  вычисляется методом геометрической оптики, то  $S_A = 0.87 \times 10^{-4}$ . Разность этих значений составляет  $3 \times 10^{-6}$  и определяет в данном случае погрешность вычисления СА эйконала с использованием формулы (1). Сравнивая эту разность с погрешностью вычисления эйконала (см. рис. 4б, кривая 2), можно убедиться, что последняя из них почти на три порядка больше.

Используя результаты работы [8], можно найти разложения поверхностей апланатической линзы с квадратичным законом изменения диэлектрической проницаемости  $n^2(x) = n_0^2 - c_2x^2$ :

$$f(x) = f_0 + f_2x^2 + f_4x^4, \tag{10}$$

$$\Psi(x) = f_0 + d_0 + \psi_2x^2 + \psi_4x^4, \tag{11}$$

где  $f_0 = \rho_0$ ,

$$f_2 = \frac{1}{2(n_0 - 1)} \left( \frac{1}{f_0} - \frac{c}{\sin J} (\beta - \cos J) \right),$$

$$f_4 = \frac{B_{R1}}{4(n_0 - 1)T_q c A_1^2 g_1} - \frac{(4f_0 f_2 + 1)}{8(n_0 - 1)f_0^3},$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2(n_0 - 1)} \sqrt{(c_2 + g_2)/\beta_2 - c_2},$$

$$\Psi_4 = \frac{B_{R2}}{16\Phi_2(n_0 - 1)^2}, \quad \beta = \frac{f_e}{f_0}, \quad \beta_2 = \beta^2,$$

$$c = \sqrt{c_2}, \quad B_{R1} = Dc_4 - \frac{c}{2n_0^2} S_1 + \frac{d_0 c}{2n_0^3} +$$

$$+ \frac{J'}{2n_0} - \frac{c\beta_4 A_1 \beta}{2S_q}, \quad J' = -\frac{1}{2} c g_2' A_1 T_q,$$

$$S_1 = 2A_1 n_0 (f_2 - \beta_2 \Phi_2), \quad g_1 = 2f_2(n_0 - 1) - \frac{1}{f_0},$$

$$g_2 = g_1^2, \quad c_4 = 0, \quad J = \frac{d_0 c}{n_0},$$

$$g_2' = 8f_2^2(n_0 - 1) - 4f_2/f_0,$$

$$\beta_4 = f_e^2(1 + 2f_0 f_2)/f_0^4,$$

$$S_q = \sqrt{g_2 + c_2(1 - \beta_2)}, \quad T_q = \frac{\beta}{S_q} - \frac{1}{|g_1|},$$

$$A_1 = \frac{1}{c_2 + g_2}, \quad A_2 = \beta_2 A_1,$$

$$D = \frac{3J}{4c_2^2} - \frac{1}{4c_2} (K_2 - K_1) + \frac{1}{2} c T_q \left( A_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \right),$$

$$K_i = \sqrt{A_i(c_2^{-1} - A_i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$g_3 = 4f_4(n_0 - 1) + \frac{1}{2f_0^3} (4f_0 f_2 + 1),$$

$$g_4 = 2g_1 g_3, \quad B_1 = -\frac{(c_4 + g_4)}{(c_2 + g_2)^3},$$

$$B_2 = \beta_2 B_1 - \beta_4 A_1^2, \quad h_1 = 2\Psi_2(n_0 - 1),$$

$$h_2 = h_1^2, \quad h_2' = 8\Psi_2^2(n_0 - 1),$$

$$E_2 = \frac{1}{c_2 + h_2}, \quad E_2' = -E_2^2 h_2',$$

$$A_2' = -\beta_2 A_1^2 g_2' = -\beta_2 A_1^2 g_2',$$

$$B_{R2} = \frac{A_2' - E_2' - 2n_0 B_2}{2n_0 E_2^3} - c_4.$$

Линза преобразует сферический фронт во фронт, близкий к плоскому, и при этом приближенно выполняется условие апланатизма:  $X = f_e \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол выхода луча из источника, а  $X$  – коор-

дината точки выхода луча из линзы. Для более точного синтеза поверхностей линзы используем следующий алгоритм. Представим первую поверхность полиномом 8-й степени:

$$f(x) = f_0 + f_2 x^2 + f_4 x^4 + f_6 x^6 + f_8 x^8, \quad (12)$$

где  $f_6 = f_8 = 0$  ( $f_2, f_4$  определены выше). На первом этапе алгоритма рассмотрим лучи, падающие на левую поверхность, заданную формулой (12). Из закона преломления можно найти угол преломленного луча:

$$\xi = \arcsin \left( \frac{\sin \omega}{n(x_p)} \right) - \omega + \alpha,$$

где  $\omega$  – угол между лучом и нормалью в точке  $x_p$  определяется соотношением  $\omega = \arctg[f'(x_p)] + \alpha$ . Траектория преломленного луча  $x(z)$  в среде описывается уравнением Эйлера [14]:

$$\frac{x''}{1 + x'^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} x' - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

В силу того, что  $n$  не зависит от  $z$ , т.е.  $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$ , это уравнение упрощается:

$$\frac{x''}{1 + x'^2} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

Запишем начальные условия для интегрирования дифференциального уравнения второго порядка:  $x(z_p) = x_p$ ,  $x'(z_p) = \text{tg} \xi$ . Уравнение (13) решается методом Рунге–Кутты до точки  $B(X, Z)$ , на которой выполняется условие равенства эйконала луча эйконалу центрального луча:

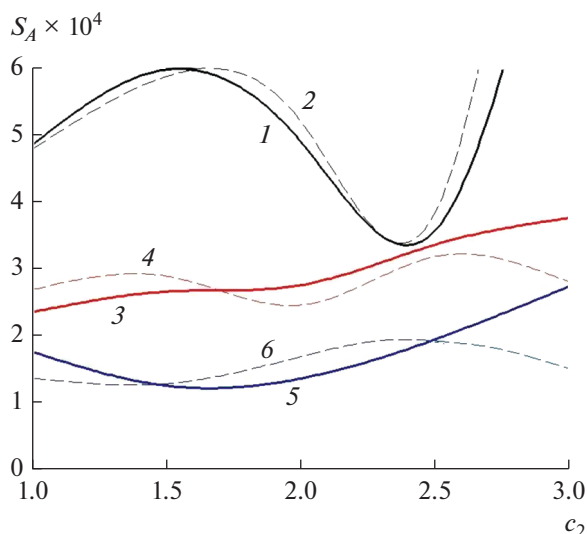
$$|OP| + \int_{PB} n ds + f_0 + d_0 - Z = f_0 + n_0 d_0,$$

где интеграл вычисляется вдоль траектории луча. То есть для каждой точки  $P$  на левой поверхности по приведенному алгоритму находится точка  $B$  на правой поверхности, которая обеспечивает идеальную фокусировку. Таким образом, массиву точек на левой поверхности соответствует массив точек правой поверхности. Для интерполяции поверхности между точками массива используется кубический сплайн.

Приведенная процедура исправляет ошибку фокусировки. Для уточнения условия апланатизма при нахождении точек на правой поверхности введем сумму:

$$\sigma = \frac{1}{N_p} \sum_P |X - f_e \sin \alpha|, \quad (14)$$

где  $\alpha$  – угол выхода луча из источника,  $X$  – координата точки выхода луча из линзы, суммирование идет по всем  $N_p$  точкам. Далее минимизируем



**Рис. 7.** Точные и приближенные среднеквадратические aberrации эйконала при  $f_e = 1.1$  (1, 2),  $f_e = 1.2$  (3, 4),  $f_e = 1.35$  (5, 6), рассчитанные по формуле (5) (кривые 1, 3, 5) и с использованием геометрической оптики (2, 4, 6).

величину  $\sigma$ , варьируя коэффициенты  $f_2, f_4, f_6, f_8$ . В результате проведенной процедуры было получено значение  $\sigma = 2 \times 10^{-4}$ .

При смещении источника из фокуса градиентной линзовой антенны происходят искажения эйконала, которые можно охарактеризовать введенной выше величиной СА. В случае бесконечно удаленного фокуса эта величина описывает отклонение фронта от плоского и выражается формулой

$$S_A(\theta) = \min_{\delta_x, \delta_z} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(X_i) - \Phi_0 - X_i \sin \theta - Z_i \cos \theta)^2},$$

где  $X_i, Z_i$  – координаты точки луча на выходной апертуре линзы,  $\Phi(X_i)$  – величина эйконала в этих точках,  $N = 100$  – число рассмотренных лучей.

Для линз с параметрами  $f_0 = 1, d_0 = 0.5, n_0 = 1.6$  была найдена зависимость СА от  $c_2$  (коэффициенты разложения  $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$ ) при переменной  $f_e$  (фокальный параметр) и угле наклона луча 15 град. Результаты приведены на рис. 7: кривые 1, 2 соответствуют линзе с фокальным радиусом  $f_e = 1.1$ , кривые 3, 4 соответствуют линзе с  $f_e = 1.2$ , кривые 5, 6 – с  $f_e = 1.35$ . Штриховые кривые соответствуют СА, рассчитанным с использованием геометрической оптики, сплошные кривые – с использованием приближенной формулы (5). Как показали расчеты, значения

фокального радиуса больше чем 1.35, не приводят к уменьшению СА. Видно, что для фиксированного фокального радиуса и значений  $c_2 < 2.5$  разность СА, вычисленной по формуле (5) и точной СА, не превосходит  $0.3 \times 10^{-4}$ , а при  $2.5 < c_2 < 3$  эта разность возрастает до  $10^{-4}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- полученная приближенная формула для эйконала (13) не требует вычисления траекторий лучей в градиентной среде и определяется степенным рядом 2-й степени по смещению источника  $\delta_x$ ;
- на основе полученной формулы выведены приближенные уравнения фокальных кривых;
- показана возможность использования приближенной формулы для вычисления aberrаций в градиентных цилиндрических линзах и оптимизации их параметров.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вуд Р. Физическая оптика / Пер. с англ. под ред. Д.С. Рождественского. Л.; М.: ОНТИ, 1936.
2. Marchand E.W. Gradient Index Optics. N.-Y.; San Francisco; London: Acad. Press, Inc., 1978.
3. Микаэлян А.Л. // ДАН СССР. 1951. Т. 81. № 4. С. 569.
4. Зелкин Е.Г., Петрова Р.А. Линзовые антенны. М.: Сов. радио, 1974.
5. Калошин В.А. // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 153.
6. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 12. С. 2301.
7. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 39.
8. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 1997. Т. 42. № 12. С. 1452.
9. Венецкий А.С., Калошин В.А. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 7. С. 74.
10. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2015. Т. 463. № 5. С. 533.
11. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 533.
12. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2018. Т. 63. № 2. С. 144.
13. Венецкий А.С. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug18/7/text.pdf>.
14. Микаэлян А.Л. Оптические методы в информатике. М.: Наука, 1990.



---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391.1

**ОКОННЫЕ ФУНКЦИИ С КВАЗИПРЯМОУГОЛЬНЫМ СПЕКТРОМ**

© 2020 г. З. Д. Лернер\*

Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: lerner269@gmail.com

Поступила в редакцию 19.08.2019 г.

После доработки 19.02.2020 г.

Принята к публикации 23.03.2020 г.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) осуществляется на ограниченном интервале времени, что равноценно умножению анализируемого сигнала на прямоугольное окно, спектр которого имеет наибольшие (среди прочих окон) боковые лепестки. В результате возникает эффект, называемый растеканием спектра сигнала. Умножение сигнала на сглаживающее окно уменьшает размывание спектральных компонент. Известно несколько десятков разновидностей оконных функций, поскольку ДПФ используется в разнообразных задачах. Особое место среди окон занимает уникальное окно с “плоской вершиной”, используемое в широкополосных приложениях. Предлагается новое регулируемое окно с квазипрямоугольным спектром, а также способ, позволяющий уменьшить уровень боковых лепестков спектра.

DOI: 10.31857/S0033849420080070

**ВВЕДЕНИЕ**

Для синтеза окон будем рассматривать, как это принято [1], четные действительные функции  $g(t)$ . Их спектры  $G(\omega)$  также являются четными действительными функциями частоты.

Согласно ГОСТ 24375-80 коэффициент прямоугольности  $K_{\Pi} = (\Delta f)_1 / (\Delta f)_2$  амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) – это отношение ширины полосы пропускания фильтра по уровню  $a_1 = 1/\sqrt{2}$  к ширине полосы пропускания по уровню  $a_2 = 0.1$ . У физически нереализуемого идеального фильтра с прямоугольной АЧХ  $K_{\Pi} = 1$ . Распространим понятие коэффициента прямоугольности на спектры оконных функций. Рассмотрим в качестве примера гауссов импульс

$$g_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

спектр которого равен

$$\begin{aligned} G_{\Gamma}(\omega) &= G_{\Gamma}(j\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Gamma}(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-\omega^2/4). \end{aligned} \quad (2)$$

Решая алгебраические уравнения

$$G_{\Gamma}(\omega_1) = a_1 = 1/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad G_{\Gamma}(\omega_2) = a_2 = 0.1,$$

получим

$$K_{\Pi} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.3880.$$

Как видим, коэффициент прямоугольности далек от единицы (как и форма спектра импульса – от прямоугольной).

У окна с плоской вершиной ([1], 2.4.3) спектр равен

$$\begin{aligned} F(f) &= \text{sinc}(\pi f) + \\ &+ 0.5 \sum_{k=1}^4 d_k [\text{sinc}(\pi(f+k)) + \text{sinc}(\pi(f-k))], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi}; \quad d_1 = 1.932; \quad d_2 = 1.29; \\ d_3 &= 0.388; \quad d_4 = 0.03. \end{aligned} \quad (4)$$

Форма спектра окна ближе к прямоугольной, однако коэффициент прямоугольности равен всего лишь  $K_{\Pi} = 0.56$ .

Синтезируем регулируемое окно с более высокими значениями  $K_{\Pi}$ .

Все вычисления в данной работе производились с помощью систем Matlab 6.5 и Wolfram Alpha.

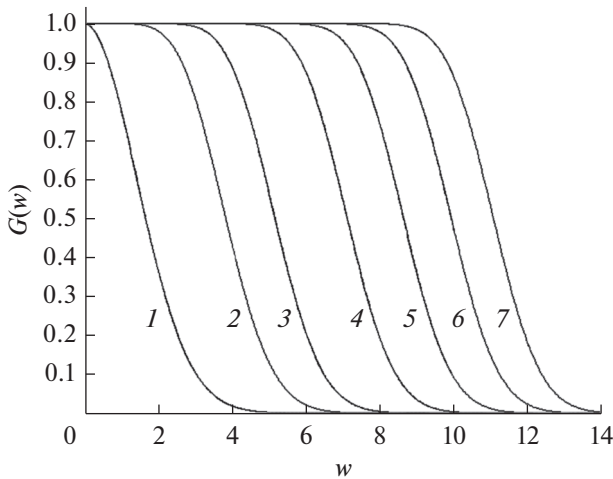


Рис. 1. Графики спектра (5) при  $N = 0$  (1), 3 (2), 6 (3), 12 (4), 18 (5), 24 (6) и 30 (7) для положительных частот.

### 1. ПРЕДПОСЫЛКИ ДЛЯ СИНТЕЗА ОКНА ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Новое окно, назовем его окном Гаусса–Тейлора (ГТ)  $N$ -го порядка, зададим спектром

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{\omega^2}{4}\right)^k}{k!} \exp(-\omega^2/4) = \text{taylor} \left[ \exp(\omega^2/4), 2N+1 \right] \exp(-\omega^2/4). \quad (5)$$

Здесь  $\text{taylor} \left[ \exp(\omega^2/4), 2N+1 \right]$  – многочлен степени  $2N$ , полученный усечением ряда Тейлора (Маклорена) для экспоненты  $\exp(\omega^2/4)$ . Это значит, что,  $\text{taylor}(\dots, 2N+1)$  представляет собой оператор, воздействуя которым на функцию, получаем первые члены ряда Тейлора (если он существует) до степени  $2N$  включительно.

На рис. 1 представлены графики спектра (5) при различных  $N = 0, 3, 6, 12, 18, 24$  и 30 для положительных частот. Следует заметить, что в случае  $N = 0$  окно Гаусса–Тейлора вырождается в известное окно Гаусса.

С ростом параметра  $N$  увеличиваются ширина спектра и коэффициент прямоугольности:

$$\begin{aligned} N = 3, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.6394; \\ N = 6, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.7137; \\ N = 12, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.7804. \end{aligned} \quad (6)$$

Как видим, коэффициенты прямоугольности спектра (5) в этих случаях заметно выше, чем у известных окон.

Спектру (5) соответствует оригинал

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega t) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{\omega^2}{4}\right)^k}{k!} \exp(-\omega^2/4 + j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k D_{2k}(t\sqrt{2})}{2^k k!} = \\ &= \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k H_{2k}(t)}{2^{2k} k!} = \\ &= (-1)^N \frac{2^{-2N-1} \exp(-t^2) H_{2N+1}(t)}{\sqrt{\pi} N!}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) L_N^{(1/2)}(t^2), \quad -\infty < t < \infty. \quad (8)$$

Интеграл вычислен по таблицам [2, формула 3.462(3)]. В выражениях (7), (8)  $D_n(z)$  – функция параболического цилиндра,  $H_n(z)$  – полином Эрмита [2, ф-ла (9.253)],  $L_N^{(1/2)}(z)$  – обобщенный полином Лагерра. Об идентичности правых частей равенств (7) и (8) см. в монографии [3, с. 693].

### 2. ОКНО ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Исследуем свойства четной действительной функции (8). Благодаря экспоненциальному сомножителю функция довольно быстро затухает при

$|t| \rightarrow \infty$ . Благодаря сомножителю  $L_N^{(1/2)}(t^2)$  функция имеет  $N$  симметричных пар действительных корней (см. далее Приложение 1). Логично предположить, что функция (8) имеет главный лепесток и по  $N-1$  затухающих боковых лепестков слева и справа от него, при этом главный лепесток располагается между парой наименьших по абсолютной величине корней. Эксперименты подтверждают это предположение. Например, на рис. 2, где представлен график логарифма модуля нормированной функции (8) при  $N = 9$ , мы видим восемь пар боковых лепестков. Последняя пара имеет уровень порядка  $10^{-6}$ .

Чтобы на основе выражения (8) синтезировать оконную функцию, необходимо прежде всего выбрать конечную область определения функции

$$-r \leq t \leq r. \quad (9)$$

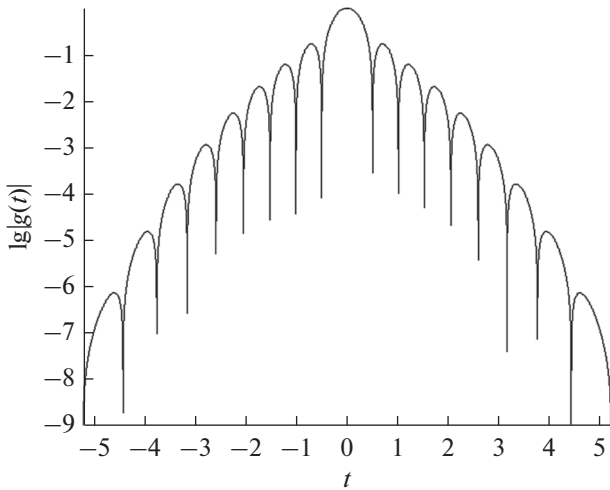


Рис. 2. График логарифма модуля нормированной функции (8)  $\lg |g(t)/g(0)|$  при  $N = 9$ .

С одной стороны, чем больше  $r$ , тем меньше уровень боковых лепестков спектра. В предельном случае ( $r \rightarrow \infty$ ) боковые лепестки спектра вообще отсутствуют, так как спектр (5) монотонно уменьшается при  $\omega \rightarrow \infty$ . В этом можно убедиться, перейдя на графике рис. 1 к логарифмической шкале по оси ординат.

С другой стороны, чем больше  $r$ , тем меньше относительная длина главного лепестка оригинала  $g(t)$  и тем больше относительная суммарная длина малых по абсолютной величине боковых лепестков, и тем больше теряется информации об анализируемом сигнале при умножении сигнала на оконную функцию.

Кроме того, при выборе интервала (9) учтем, что боковые лепестки спектра тем больше, чем больше разрывы оконной функции и ее производных в точках  $t = -r$  и  $t = r$ . Поэтому имеет смысл выбрать в качестве границ интервала (9) одну из симметричных пар корней полинома.

Для подтверждения всех перечисленных выше соображений, рассмотрим четыре графика спектра функции (8) при  $N = 5$  (рис. 3), построенные для случаев  $r = r_2$ ,  $r = r_3$ ,  $r = r_4$  и  $r = r_5$ , где  $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$  – положительные корни полинома  $L_5^{(1/2)}(t^2)$ . С увеличением длины окна  $2r$  уровень боковых лепестков спектра уменьшается.

Оконную функцию Гаусса–Тейлора  $u(x)$  получим из оригинала (8), введя относительное время

$$x = t/(2r) \tag{10}$$

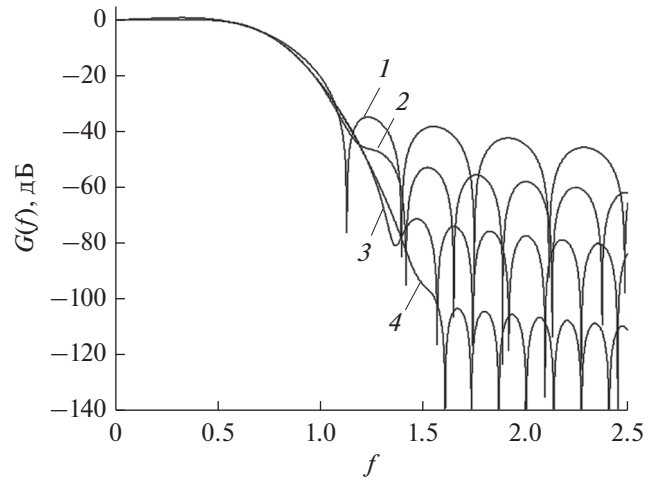


Рис. 3. Графики спектра функции (8) при  $N = 5$ , построенные для случаев  $r = r_2$  (кривая 1),  $r = r_3$  (кривая 2),  $r = r_4$  (кривая 3),  $r = r_5$  (кривая 4).

и выполнив нормировку [1]:

$$u(x) = \exp(-4r^2x^2) L_N^{(1/2)}(4r^2x^2) / L_N^{(1/2)}(0), \tag{11}$$

$$|x| \leq 0.5; \quad u(x) = 0, \quad |x| > 0.5.$$

На рис. 4 представлены графики оконной функции Гаусса–Тейлора  $u(x)$  для случаев  $N = 3, r = 2.6519$ ;  $N = 6, r = 2.51974$  и  $N = 12, r = 2.70532$ .

Следует отметить, что при переходе от времени  $t$  к относительному времени  $x$  происходит изменение масштаба. Чтобы оконные функции (или их спектры) для разных значений  $N$  можно было сравнивать друг с другом, необходимо, чтобы масштабы времени (или частоты) у них были

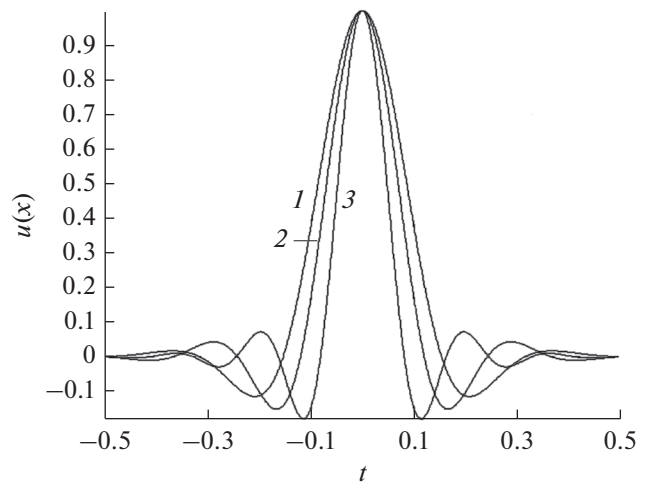


Рис. 4. Оконные функции ГТ при  $N = 3$  (1), 6 (2) и 12 (3).

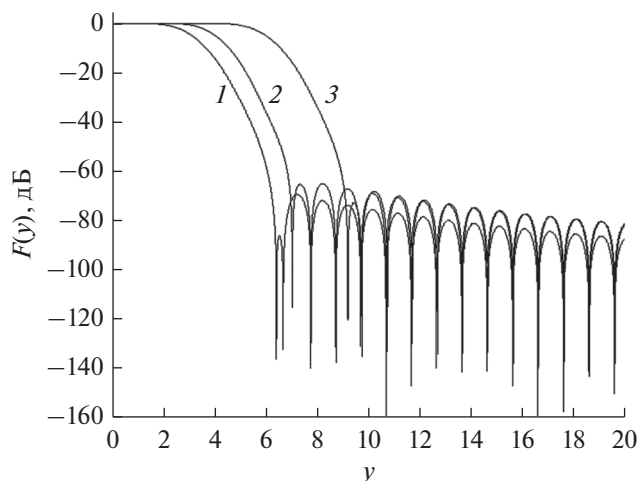


Рис. 5. Спектры оконных функций GT при  $N = 3$  (1), 6 (2) и 12 (3).

одинаковы (или хотя бы близки, как для графиков на рис. 4).

Нормированные спектры  $F(y)$  [1] окна Гаусса–Тейлора, заданного выражением (11), определим с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ):

$$F(y) = \text{fft}(u). \quad (12)$$

Графики спектров окна GT для случаев  $N = 3$ ,  $r = 2.6519$ ;  $N = 6$ ,  $r = 2.51974$  и  $N = 12$ ,  $r = 2.70532$  представлены на рис. 5. При одинаковых (или близких) значениях параметра  $r$  увеличение параметра  $N$  приводит к сужению графиков оконных функций и к расширению графиков нормированных спектров.

### 3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ОКНО ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Как видно из графиков рис. 5, уровень боковых лепестков спектра окна GT велик по сравнению с таковыми для известного окна с “плоской вершиной” (“Flat top window”, FT) [1].

Синтезируем модифицированное окно Гаусса–Тейлора (GTM) с меньшим уровнем боковых лепестков спектра. Для этого необходимо устранить (или хотя бы уменьшить) разрывы оконной функции и ее производных на границах интервала  $-0.5 \leq x \leq 0.5$ .

Начнем с того, что определим корни окна (11). Нетрудно видеть, что они совпадают с корнями полинома  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2x^2)$ , а те, в свою очередь, как следует из равенства (10), равны корням полинома  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(t^2)$ , поделенным на  $2r$ :  $\pm r_1/2r$ ,  $\pm r_2/2r$ , ...

Например, полиному  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2x^2)$  (см. Приложение 1) при  $r = 2.51974$  соответствуют корни:  $\pm 0.120239$ ,  $\pm 0.242171$ ,  $\pm 0.367826$ ,  $\pm 0.5$ ,  $\pm 0.644424$ ,  $\pm 0.814081$ . Из шести положительных корней полинома  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2x^2)$  нас интересуют два: корень  $R_2 = 0.5$  и предшествующий ему корень, например,  $R_1 = 0.367826$ .

Заменим относительное время  $x$  нелинейным (замедляющимся относительно времени  $x$ ) временем

$$v = x \exp(-ax^2 - bx^4), \quad (13)$$

производная которого равна

$$v' = \frac{dv}{dx} = (1 - 2ax^2 - 4bx^4) \exp(-ax^2 - bx^4). \quad (14)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – константы, которые удовлетворяют уравнениям

$$v(R_2) = v(0.5) = 0.5 \exp(-a/4 - b/16) = R_1, \quad (15)$$

$$v'(R_2) = (1 - 2a/4 - 4b/16) \times \exp(-a/4 - b/16) = 0. \quad (16)$$

Из системы уравнений (15)–(16) следует:

$$a = -2 - 8 \ln(2R_1), \quad (17)$$

$$b = 8 + 16 \ln(2R_1). \quad (18)$$

Уравнение (15) означает, что при подстановке  $v$  вместо  $x$  в полином  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2x^2)$  получим функцию  $L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2v^2)$ , равную нулю, в граничных точках интервала  $-0.5 \leq x \leq 0.5$ . Уравнение (16) означает, что на границах интервала первая производная полинома также равна нулю:

$$\begin{aligned} \left( L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2v^2) \right)' &= \frac{d}{dx} L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2v^2) = \\ &= \frac{d}{dv} L_{\frac{1}{2}}^{(1)}(4r^2v^2) \frac{dv}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Эксперименты показали, что подстановка нелинейного времени  $v$  вместо  $x$  в обобщенный полином Лагерра уменьшает боковые лепестки спектра, но этого не происходит при подстановке времени  $v$  вместо  $x$  в экспоненту. Поэтому следует либо записывать экспоненту в виде  $\exp(-4r^2x^2)$ , либо попытаться подобрать другое время  $\tau$ , с которым боковые лепестки спектра меньше, чем при времени  $x$ . Экспериментально удалось подобрать для неко-

**Таблица 1.** Коэффициенты окна GTM и время  $\tau$  при различных значениях  $N$

$N$	$r$	$a$	$b$	$\tau$
3	2.65195	0.84147	0.3170639	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
4	2.26658	0.736	0.52805	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
5	2.78329	0.2703885	1.459223	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
6	2.51975	0.229167	1.541665	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
7	2.32575	0.206886	1.586228	$x(1 - 0.41377x^2 + 4x^4)$
9	2.04925	0.1840505	1.6318985	$x(1 - 0.368x^2 + 4.5x^4)$
12	2.7053	0.678897	0.6422055	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$

**Таблица 2.** Параметры окна GTM при различных значениях  $N$  и окна FT

Оконные функции	$N$	$K_{\Pi}$	$W_{\max}$ , дБ	$\Delta W$ , дБ на октаву	CG	$\Delta F_{\text{ш}}$	SL, дБ	MPL, дБ
GTM	3	0.639	-143	-12	0.153	5.59	0.0158	7.49
	4	0.671	-119	-12	0.160	5.44	0.0446	7.40
	5	0.695	-130	-12	0.118	7.53	-0.00857	8.76
	6	0.713	-117	-12	0.120	7.47	-0.0180	8.73
	7	0.729	-115	-12	0.121	7.46	-0.0294	8.70
	9	0.754	-111	-12	0.122	7.50	-0.0549	8.70
	12	0.780	-143	-12	0.081	11.35	-0.00742	10.54
FT	—	0.56	-82.6	-6	0.22	3.77	0.01	5.78

Примечание:  $K_{\Pi}$  – коэффициент прямоугольности;  $W_{\max}$  – максимальный уровень боковых лепестков относительно главного лепестка;  $\Delta W$  – скорость спада боковых лепестков, CG – когерентное усиление;  $\Delta F_{\text{ш}}$  – эквивалентная шумовая полоса; SL – паразитная амплитудная модуляция; MPL – максимальные потери преобразования.

торых значений параметра  $N$  (а именно для  $N = 3, 4, 5, 6$  и  $12$ ) нелинейное время

$$\tau = x(1 + 2x^4 + 1.5x^6), \tag{20}$$

которое приводит к положительному эффекту при подстановке в экспоненту вместо  $x$ . Для  $N = 7$  и  $9$  подобраны другие выражения для  $\tau$ , уменьшающие боковые лепестки спектра.

С учетом сказанного выше из выражений (11) и (13) получаем модифицированное окно Гаусса–Тейлора:

$$u(x) = \exp(-4r^2\tau^2) \times L_N^{(1)} \left[ 4r^2x^2 \exp(-2ax^2 - 2bx^4) \right] / L_N^{(1)}(0), \tag{21}$$

$|x| \leq 0.5; \quad u(x) = 0, \quad |x| \geq 0.5,$

при этом  $a$  и  $b$  определяются равенствами (17) и (18).

На основании теоретических результатов были выполнены расчеты и построены графики для конкретных случаев окна Гаусса–Тейлора и модифицированного окна Гаусса–Тейлора и их спектров, которые могут быть использованы на практике.

Коэффициенты  $r, a, b$  и экспериментально подобранная формула для нелинейного времени  $\tau$  представлены в табл. 1.

В табл. 2 сравниваются параметры предложенного в статье окна GTM с параметрами известного окна FT [1].

Часть экспериментального материала представлена на рис. 6, 7. Это окна GTM и GT для случаев  $N = 3$  (рис. 6а), 5 (рис. 6б), 7 (рис. 6в) и 12 (рис. 6г) и их спектры (рис. 7а, 7б, 7в и 7г соответственно).

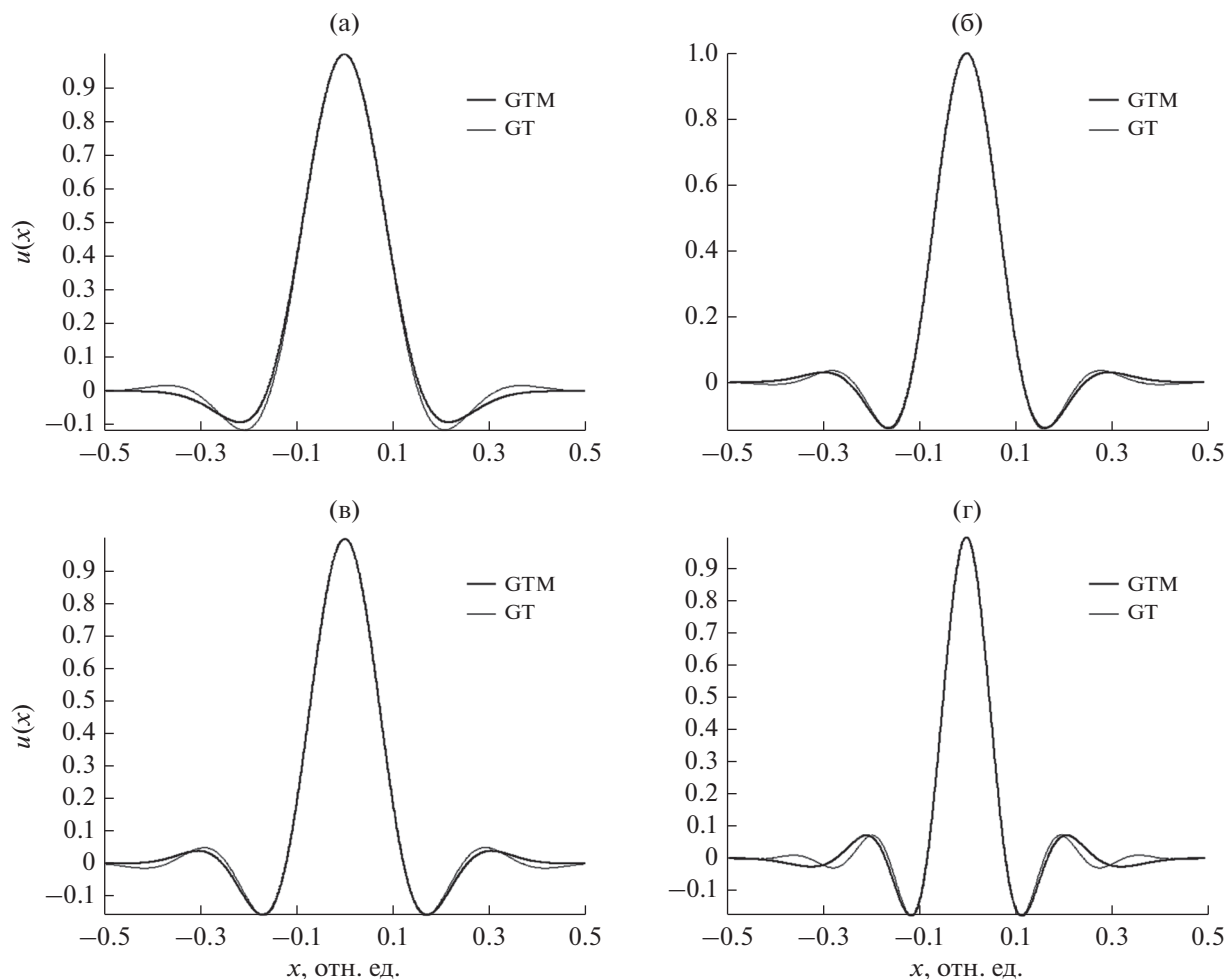


Рис. 6. Сравнение окон GTM и GT для  $N = 3$  (а), 5 (б), 7 (в) и 12 (г).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из равенств (6) следует, что окно Гаусса–Тейлора при  $N \geq 3$  превосходит известное окно с плоской вершиной GT по коэффициенту прямоугольности  $K_{\Pi}$ . Из рис. 7а–7г видно, что участки спектров от  $F(y) = 0$  до  $F(y) = -20$  дБ модифицированного окна Гаусса–Тейлора и окна Гаусса–Тейлора при одинаковых значениях параметра  $N$  практически совпадают. Таким образом, значения коэффициента  $K_{\Pi}$  при заданном значении параметра  $N$  у этих окон одинаковы.

Отличительной особенностью окон GT и GTM является наличие боковых лепестков не только у спектров, но и у собственно окон. В разд. 2 отмечалось, что график функции (8) имеет  $N - 1$  пар боковых лепестков. Однако количество пар боковых лепестков на рис. 6а–6г меньше. Это обусловлено, во-первых, ограничением окон GT и GTM по времени интервалом (9) и, во-вторых,

использованием нелинейного времени для окна GTM.

Достоинства окна GTM (табл. 2): высокий коэффициент прямоугольности и малый уровень боковых лепестков спектра. Недостатки, обусловленные широкополосностью окна, – большая эквивалентная шумовая полоса, малое когерентное усиление и большие потери преобразования.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено модифицированное окно Гаусса–Тейлора, которое превосходит известное окно с плоской вершиной и по коэффициенту прямоугольности, и по уровню боковых лепестков спектра. Предложен способ, позволяющий уменьшить уровень боковых лепестков спектра. Материал статьи может быть использован в таких радиотехнических дисциплинах, как синтез сигналов и синтез фильтров.

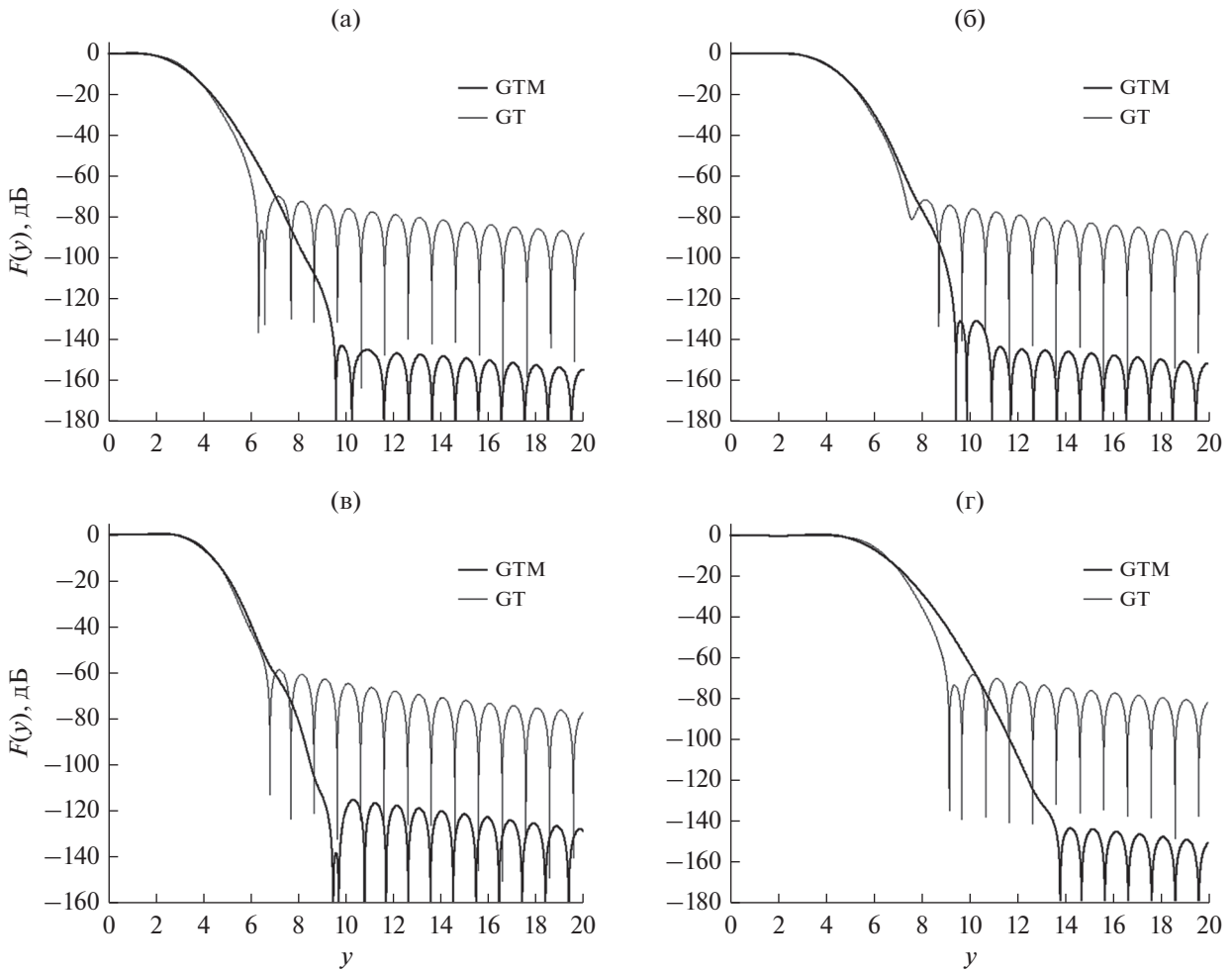


Рис. 7. Сравнение спектров окон GTM и GT для  $N = 3$  (а), 5 (б), 7 (в) и 12 (г).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1<sup>1</sup>

Корни обобщенного полинома Лаггера  $L_N^{(\frac{1}{2})}(t^2)$

$$\text{laguerreL}(3,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(3,0.5,0) = -0.0761905t^6 + 0.8t^4 - 2t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.816288, \quad r_{3,4} = \pm 1.67355, \quad r_{5,6} = \pm 2.65196$$

$$\text{laguerreL}(4,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(4,0.5,0) = 1/945(16t^8 - 288t^6 + 1512t^4 - 2520t^2 + 945)$$

$$r_{1,2} = \pm 0.723551, \quad r_{3,4} = \pm 1.46855, \quad r_{5,6} = \pm 2.26658, \quad r_{7,8} = \pm 3.19099$$

$$\text{laguerreL}(5,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(5,0.5,0) = -0.0030784t^{10} + 0.0846561t^8 - 0.761905t^6 + 2.66667t^4 - 3.33333t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.65681, \quad r_{3,4} = \pm 1.32656, \quad r_{5,6} = \pm 2.02595, \quad r_{7,8} = \pm 2.78329, \quad r_{9,10} = \pm 3.66847$$

$$\text{laguerreL}(6,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(6,0.5,0) = 0.0004736t^{12} - 0.0184704t^{10} + 0.253968t^8 - 1.52381t^6 + 4t^4 - 4t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.605764, \quad r_{3,4} = \pm 1.22006, \quad r_{5,6} = \pm 1.85311, \quad r_{7,8} = \pm 2.51974,$$

$$r_{9,10} = \pm 3.24661, \quad r_{11,12} = \pm 4.10134$$

$$\text{laguerreL}(7,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(7,0.5,0) = -0.0000631467t^{14} + 0.0033152t^{12} - 0.0646465t^{10} + 0.592593t^8 - 2.66667t^6 + 5.6t^4 - 4.66667t^2 + 1$$

<sup>1</sup> Далее везде сохранен формат машинной распечатки программ.

$$r_{1,2} = \pm 0.56507, \quad r_{3,4} = \pm 1.13612, \quad r_{5,6} = \pm 1.71999, \quad r_{7,8} = \pm 2.32573,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.96717, \quad r_{11,12} = \pm 3.66995, \quad r_{13,14} = \pm 4.49999$$

$$\text{laguerreL}(8,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(8,0.5,0) = 1/135 (0.00100292 t^{16} - 0.0681985 t^{14} + 1.79021 t^{12} - 23.2727 t^{10} + 160. t^8 - 576. t^6 + 1008. t^4 - 720. t^2 + 135)$$

$$r_{1,2} = \pm 0.531633, \quad r_{3,4} = \pm 1.06765, \quad r_{5,6} = \pm 1.61292, \quad r_{7,8} = \pm 2.1735,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.75776, \quad r_{11,12} = \pm 3.37893, \quad r_{13,14} = \pm 4.06195, \quad r_{15,16} = \pm 4.87135$$

$$\text{laguerreL}(9,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(9,0.5,0) = -7.82003 \times 10^{-7} t^{18} + 0.0000668612 t^{16} - 0.00227328 t^{14} + 0.0397824 t^{12} - 0.387879 t^{10} + 2.13333 t^8 - 6.4 t^6 + 9.6 t^4 - 6. t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.50352, \quad r_{3,4} = \pm 1.01037, \quad r_{5,6} = \pm 1.52417, \quad r_{7,8} = \pm 2.04923,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.59113, \quad r_{11,12} = \pm 3.15785, \quad r_{13,14} = \pm 3.76219, \quad r_{15,16} = \pm 4.42853,$$

$$r_{17,18} = \pm 5.22027$$

$$\text{laguerreL}(10,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(10,0.5,0) = (0.000258061 t^{20} - 0.0270964 t^{18} + 1.15837 t^{16} - 26.2564 t^{14} + 344.615 t^{12} - 2688. t^{10} + 12320. t^8 - 31680. t^6 + 41580. t^4 - 23100. t^2 + 3465)/3465$$

$$r_{1,2} = \pm 0.479451, \quad r_{3,4} = \pm 0.9615, \quad r_{5,6} = \pm 1.44893, \quad r_{7,8} = \pm 1.94496,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.45355, \quad r_{11,12} = \pm 2.97999, \quad r_{13,14} = \pm 3.53197, \quad r_{15,16} = \pm 4.122,$$

$$r_{17,18} = \pm 4.77399, \quad r_{19,20} = \pm 5.55035$$

$$\text{laguerreL}(11,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(11,0.5,0) = -6.47621 \times 10^{-9} t^{22} + 8.19241 \times 10^{-7} t^{20} - 0.0000430102 t^{18} + 0.00122579 t^{16} - 0.0208384 t^{14} + 0.218803 t^{12} - 1.42222 t^{10} + 5.5873 t^8 - 12.5714 t^6 + 14.6667 t^4 - 7.33333 t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.458538, \quad r_{3,4} = \pm 0.919151, \quad r_{5,6} = \pm 1.38404, \quad r_{7,8} = \pm 1.85568,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.33702, \quad r_{11,12} = \pm 2.8318, \quad r_{13,14} = \pm 3.34513, \quad r_{15,16} = \pm 3.88447,$$

$$r_{17,18} = \pm 4.46209, \quad r_{19,20} = \pm 5.10153, \quad r_{21,22} = \pm 5.86431$$

$$\text{laguerreL}(12,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(12,0.5,0) = (2.12161 \times 10^{-6} t^{24} - 0.000318241 t^{22} + 0.0201288 t^{20} - 0.704506 t^{18} + 15.0588 t^{16} - 204.8 t^{14} + 1792. t^{12} - 9984. t^{10} + 34320. t^8 - 68640. t^6 + 72072. t^4 - 32760. t^2 + 4095)/4095$$

$$r_{1,2} = \pm 0.440147, \quad r_{3,4} = \pm 0.881983, \quad r_{5,6} = \pm 1.32728, \quad r_{7,8} = \pm 1.778,$$

$$r_{9,10} = \pm 2.23642, \quad r_{11,12} = \pm 2.70532, \quad r_{13,14} = \pm 3.18829, \quad r_{15,16} = \pm 3.69028,$$

$$r_{17,18} = \pm 4.21861, \quad r_{19,20} = \pm 4.78532, \quad r_{21,22} = \pm 5.41364, \quad r_{23,24} = \pm 6.16427$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Программы (Matlab 6.5)

#### 1. Спектры $G(w)$ (см. рис. 1)

```
syms w G;
```

```
figure(1)
```

```
hold on
```

```
for k = 1:6
```

```
G(k,:) = taylor(exp(w.^2/4),12*(k-1)+1)*exp(-w.^2/4);
```

```
ezplot(G(k,:),0,14)
```

```
end
```

```
grid on
```

```
w = 0:0.01:14;
```

```
G = (1 + 1/4*w.^2 + 1/32*w.^4 + 1/384*w.^6).*exp(-w.^2/4);
```

```
plot(w,G)
```

```
grid on
```

```
xlabel('w')
```

```
ylabel('G ( w )')
```

```
title('Windows G (N = 0) and GT (N = 3, 6, 12, 18, 24, 30)')
```



2. Расчет  $w_1$  при  $a_1 = 1/\sqrt{2}$

```
syms w G;
```

```
G = taylor(exp(w^2/4),13)*exp(-w^2/4);
```

```
solve(G-1/(2^0.5),w)
```

solve – оператор решения алгебраического уравнения ( $G - 1/\sqrt{2} = 0$ )

3. Логарифм модуля нормированной функции  $g(t)$  ( $N = 9$ )  $\lg |g(t)/g(0)|$

```
Fs = 1024;
```

```
t = -5.22027:1/Fs: 5.22027;
```

```
g = exp(-t.^2).*(-7.82003*10^-7*t.^18 + 0.0000668612*t.^16 - 0.00227328*t.^14 +
0.0397824*t.^12 - 0.387879*t.^10 + 2.13333*t.^8 - 6.4*t.^6 + 9.6*t.^4 - 6*t.^2 +
1);
```

```
plot(t,log10(abs(g)));
```

```
title('Window G T (N = 9) in Time Domain (Log Scale)')
```

```
xlabel('Time ( t )')
```

```
ylabel('abs(g ( t ))');
```

4. Спектр функции  $g(t)$  ( $N = 5$ ) при различных длинах интервала

```
Fs = 1024;
```

```
t1 = -1.32656: 1/Fs: 1.32656;
```

```
t2 = -2.02595: 1/Fs: 2.02595;
```

```
t3 = -2.78329: 1/Fs: 2.78329;
```

```
t4 = -3.66847: 1/Fs: 3.66847;
```

```
g1 = exp(-t1.^2).*(-0.0030784 *t1.^10 + 0.0846561* t1.^8 - 0.761905* t1.^6 +
2.66667* t1.^4 - 3.33333* t1.^2 + 1);
```

```
g2 = exp(-t2.^2).*(-0.0030784 *t2.^10 + 0.0846561* t2.^8 - 0.761905* t2.^6 +
2.66667* t2.^4 - 3.33333* t2.^2 + 1);
```

```
g3 = exp(-t3.^2).*(-0.0030784 *t3.^10 + 0.0846561* t3.^8 - 0.761905* t3.^6 +
2.66667* t3.^4 - 3.33333* t3.^2 + 1);
```

```
g4 = exp(-t4.^2).*(-0.0030784 *t4.^10 + 0.0846561* t4.^8 - 0.761905* t4.^6 +
2.66667* t4.^4 - 3.33333* t4.^2 + 1);
```

```
n = 131072;
```

```
F1 = fft(g1,n);
```

```
F2 = fft(g2,n);
```

```
F3 = fft(g3,n);
```

```
F4 = fft(g4,n);
```

```
f = Fs*(0:(n/2))/n;
```

```
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
```

```
P2 = 20*log10(abs(F2/F2(1)));
```

```
P3 = 20*log10(abs(F3/F3(1)));
```

```
P4 = 20*log10(abs(F4/F4(1)));
```

```
plot(f,P1(1:n/2 + 1),f,P2(1:n/2 + 1), f,P3(1:n/2 + 1),f,P4(1:n/2 + 1)),grid
```

```
title('Windows G T (N = 5) in Frequency Domain')
```

```
xlabel('Frequency ( f )')
```

```
ylabel('G ( f ), d B');
```

5. Оконные функции GT ( $N = 3$ ,  $N = 6$ ,  $N = 12$ ) (см. рис. 4, кривые 1–3) и их спектры соответственно (см. рис. 5).

```
Fs = 1024;
```

```
x = -0.5:1/Fs:0.5;
```

```
u = exp(-(x*5.3039).^2).*(-1696.38* x.^6 + 633.146* x.^4 - 56.2648 *x.^2 + 1);
```

```
u1 = exp(-(x*2.51974*2).^2).*(1 - 101.585* x.^2 + 2579.9* x.^4 - 24960* x.^6 +
105649* x.^8 - 195134* x.^10 + 127069* x.^12);
```

```

u2 = exp(-(x*2.70532*2).^2).*(2.05295*10^8*x.^24 - 1.0519*10^9*x.^22 +
2.27267*10^9*x.^20 - 2.71711*10^9*x.^18 + 1.98388*10^9*x.^16 - 9.21631*10^8
*x.^14 + 2.75466*10.^8*x.^12 - 5.24248*10^7*x.^10 + 6.15577*10^6*x.^8 -
420548*x.^6 + 15083.7*x.^4 - 234.2*x.^2 + 1);
n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
F2 = fft(u2,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(6.5*abs(F/Fs));
P1 = 20*log10(9*abs(F1/Fs));
P2 = 20*log10(12*abs(F2/Fs));
plot(f,P(1:n/2+1),f,P1(1:n/2+1),f,P2(1:n/2+1)), grid
title('Windows GT (N = 3, N = 6, N = 12) in Frequency Domain')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F(y),dB')

```

6. Сравнение окон GTM и GT (см. рис. 6) и их спектров (см. рис. 7)

```

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-1.68294*x.^2-0.6341278*x.^4);
u = exp(-(x*5.3039.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(-1696.38*v.^6 + 633.146*v.^4 -
56.2648*v.^2 + 1);
u1 = exp(-(x*5.3039).^2).*(-1696.38*x.^6 + 633.146*x.^4 - 56.2648*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid;
title('Windows GTM (N = 3) and GT (N = 3) in Time Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Time (x)')
ylabel('u (x)');
n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2+1),f,P1(1:n/2+1)),grid
title('Windows GTM (N = 3) and GT (N = 3) in Frequency Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F (y), dB');

```

```

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-0.540777*x.^2-2.918446*x.^4);
u = exp(-(x*5.56658.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(-87944.8*v.^10 + 78048.7*v.^8 -
22669*v.^6 + 2560.49*v.^4 - 103.289*v.^2 + 1);
u1 = exp(-(x*5.56658).^2).*(-87944.8*x.^10 + 78048.7*x.^8 - 22669*x.^6 +
2560.49*x.^4 - 103.289*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid;
title('Windows GTM (N = 5) and GT (N = 5) in Time Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Time (x)')
ylabel('u (x)');

```

```

n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2 + 1),grid
title('Windows G T M (N = 5) and G T (N = 5) in Frequency Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F (y), dB');

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-0.413772*x.^2-3.172456*x.^4);
u = exp(-(4.6515*x.*(1 - 0.413772*x.^2 + 4*x.^4)).^2).*(-140169*v.^14 + 340116*
v.^12 - 306531*v.^10 + 129867*v.^8 - 27010.1*v.^6 + 2621.56*v.^4 - 100.97*v.^2
+ 1);
u1 = exp(-(x*4.6515).^2).*(-140169*x.^14 + 340116*x.^12 - 306531*x.^10 +
129867*x.^8 - 27010.1*x.^6 + 2621.56*x.^4 - 100.97*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid ;
title('Windows G T M (N = 7) and G T (N = 7) in Time Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Time (x)')
ylabel('u (x)');
n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2 + 1),grid
title('Windows G T M (N = 7) and G T (N = 7) in Frequency Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F (y), dB');

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-1.357794*x.^2 - 1.284411*x.^4);
u = exp(-(x*5.4106.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(2.05259*10^8*v.^24 -
1.05172*10^9*v.^22 + 2.27233*10^9*v.^20 - 2.71674*10^9*v.^18 + 1.98365*10^9
*v.^16 - 9.21535*10^8*v.^14 + 2.75441*10^8*v.^12 - 5.2421*10^7*v.^10 +
6.15541*10^6*v.^8 - 420529*v.^6 + 15083.2*v.^4 - 234.197*v.^2 + 1);
u1 = exp(-(x*5.4106).^2).*(2.05259*10^8*x.^24 - 1.05172*10^9*x.^22 +
2.27233*10^9*x.^20 - 2.71674*10^9*x.^18 + 1.98365*10^9*x.^16 - 9.21535*10^8*
x.^14 + 2.75441*10^8*x.^12 - 5.2421*10^7*x.^10 + 6.15541*10^6*x.^8 -
420529*x.^6 + 15083.2*x.^4 - 234.197*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid ;
title('Windows G T M (N = 12) and G T (N = 12) in Time Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Time (x)')
ylabel('u (x)');

```

```

n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2+1),grid
title('Windows G T M (N = 12) and G T (N = 12) in Frequency Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F (y), dB');

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

*Результаты вычисления определенных интегралов  
для расчета параметров оконных функций (система Wolfram Alpha)*

```

integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2))/(L_3^0.5(0)) dx =
0.152991
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2))/(L_3^0.5(0)))^2 dx =
0.130915
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2) cos(π x))/(L_3^0.5(0))
dx = 0.152713
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2))/(L_4^0.5(0)) dx =
0.159561
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2))/(L_4^0.5(0)))^2 dx
= 0.138604
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2) cos(π x))/(L_4^0.5(0)) dx =
0.158743
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2))/(L_5^0.5(0)) dx =
0.117523
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2))/(L_5^0.5(0)))^2 dx
= 0.103945
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2) cos(π
x))/(L_5^0.5(0)) dx = 0.117639
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2))/(L_6^0.5(0)) dx =
0.119713
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2))/(L_6^0.5(0)))^2 dx =
0.107035
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2) cos(π x))/(L_6^0.5(0))
dx = 0.119961
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2))/(L_7^0.5(0)) dx =
0.120908
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2))/(L_7^0.5(0)))^2 dx =
0.109086
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2) cos(π x))/(L_7^0.5(0))
dx = 0.121318
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2))/(L_9^0.5(0)) dx =
0.12202
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2))/(L_9^0.5(0)))^2 dx =
0.111704
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2) cos(π x))/(L_9^0.5(0))
dx = 0.122793
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.4106 x)^2) L_12^0.5((5.4106 x)^2))/(L_12^0.5(0)) dx =
0.0812328

```

$$\int_{-0.5}^{0.5} \frac{(\exp(-(5.4106 x)^2) L_{12}^{0.5}((5.4106 x)^2))}{(L_{12}^{0.5}(0))} dx = 0.0749071$$

$$\int_{-0.5}^{0.5} \frac{(\exp(-(5.4106 x)^2) L_{12}^{0.5}((5.4106 x)^2) \cos(\pi x))}{(L_{12}^{0.5}(0))} dx = 0.0813022$$

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дворкович В.П., Дворкович А.В.* Окonnéе функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. СПб.: БХВ–Петербург, 2010.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.81;621.396.96

ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ С НУЛЕВОЙ ЗОНОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ  
ДЛЯ РАДИОЛОКАТОРОВ С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

© 2020 г. Р. Н. Ипанов\*

Национальный исследовательский университет “МЭИ”,  
ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250 Российская Федерация

\*E-mail: iproman@ya.ru

Поступила в редакцию 10.07.2019 г.

После доработки 13.03.2020 г.

Принята к публикации 03.04.2020 г.

Для радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) синтезирован зондирующий сигнал с нулевой зоной (НЗ) автокорреляции, представляющий собой последовательность из двух фазокодированных (ФКМ) импульсов, кодированных комплементарными последовательностями двоичного D-кода. Для подавления боковых лепестков (БЛ) автокорреляционной функции (АКФ) при рассогласовании по частоте Доплера дискреты импульсов синтезированного сигнала дополнительно линейно модулированы по частоте. Проведен сравнительный анализ корреляционных характеристик синтезированного сигнала с сигналом без модуляции дискрет и ФКМ-сигналом, кодированным M-последовательностью (МП). Также проанализированы суммарные корреляционные характеристики ансамбля сигналов, используемого в режиме синтеза апертуры РСА. Показано, что в НЗ АКФ при рассогласовании по частоте Доплера уровень всех БЛ АКФ синтезированного сигнала меньше уровня БЛ АКФ ФКМ-сигнала, кодированного МП. Суммарная АКФ ансамбля из четырех сигналов имеет нулевые БЛ вдоль всей временной оси  $\tau$ , а при рассогласовании по частоте в НЗ АКФ имеет уровень БЛ меньше уровня БЛ суммарной АКФ ансамбля из четырех ФКМ-сигналов, кодированных МП.

DOI: 10.31857/S0033849420080069

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для получения высокого качества радиолокационного изображения (РЛИ) в радиолокаторах с синтезированной апертурой (РСА) и инверсных РСА к зондирующим сигналам предъявляются следующие требования:

– они должны быть когерентными в пределах времени синтеза апертуры для обеспечения высокого пространственного разрешения по азимутальной координате;

– они должны иметь внутриимпульсную модуляцию для обеспечения высокого значения средней мощности излучения и одновременно хорошего пространственного разрешения по координате угла места.

В известных космических РСА дистанционно-зондирования Земли до настоящего времени используются сигналы с линейно частотной модуляцией (ЛЧМ) [1–4]. Связано это с тем, что ЛЧМ-сигналы были первыми сложными сигналами, нашедшими применение в радиолокации, и их свойства давно и подробно изучены. Сигналы с фазокодовой манипуляцией (ФКМ) использовались в качестве зондирующих в космических

РСА для получения радиолокационной карты Венеры в 1983–1984 годах [4, 5]. В качестве кода для этих сигналов использовались усеченные M-последовательности (МП).

Следует отметить усиливающийся интерес специалистов к ФКМ-сигналам [4, 6, 7]. Объясняется это тем, что использование дискретного кодирования когерентного ансамбля зондирующих импульсов в РСА открывает перспективу существенного улучшения качества РЛИ по параметрам, связанным свойствами суммарных корреляционных функций ансамбля.

В соответствии со сказанным актуальными для РСА являются ФКМ-сигналы, имеющие нулевую зону (НЗ) боковых лепестков (БЛ) в области центрального пика автокорреляционной функции (НЗ АКФ) [8–13]. Данные сигналы представляют собой периодическую последовательность (пачку) когерентных импульсов, кодированных (манипулированных по фазе) ансамблями комплементарных или ортогональных последовательностей.

В космических РСА паузы между излучением зондирующих сигналов используются для приема отраженных от земной поверхности эхо-сигналов, т.е. чередуется передача и прием сигналов на

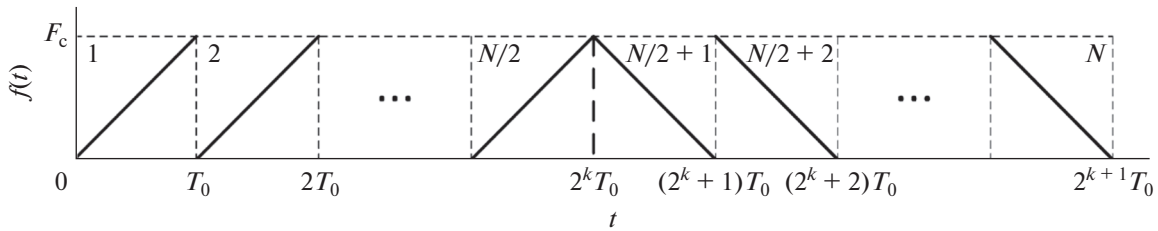


Рис. 1. Закон модуляции дискрет в пределах импульса когерентного дополнительного сигнала.

одну и ту же антенну. Поэтому рассмотренные в [8, 9] сигналы с НЗ АКФ для этой цели не подходят, так как имеют большое количество импульсов в пачке.

Рассмотренные в [10, 11] сигналы с НЗ АКФ состоят из минимального (два) количества импульсов в пачке, однако при рассогласовании по частоте Доплера имеют достаточно высокий уровень БЛ АКФ. В [12, 13] рассмотрены сигналы с НЗ АКФ, в которых для подавления БЛ АКФ при рассогласовании по частоте Доплера используется дополнительная частотная манипуляция дискрет импульсов пачки по линейному закону.

Цель данной работы – синтезировать зондирующий ФКМ-сигнал с НЗ АКФ, в котором для подавления БЛ АКФ при рассогласовании по частоте Доплера используется дополнительная линейная частотная модуляция дискрет импульсов пачки.

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ СИГНАЛА С НЗ АКФ

Рассмотрим радиолокационный сигнал, представляющий собой последовательность (пачку) из  $M$  импульсов, манипулированных по фазе ансамблем из  $M$  последовательностей [12, 13]. Каждый импульс длительностью  $T_n$  состоит из  $N$  подимпульсов (дискрет) длительностью  $T_0 = T_n/N$ . Период следования импульсов  $T = qT_n = qNT_0$ , где  $q \geq 2$  – скважность пачки импульсов. Ансамбль из  $M$  последовательностей можно задать матрицей

$$\mathbf{A}_{M,N} = \|a_{i,n}\|_{i,n=1}^{M,N}, \quad a_{i,n} = \exp(j\pi\tilde{a}_{i,n}), \quad (1)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}_{M,N} = \|\tilde{a}_{i,n}\|_{i,n=1}^{M,N}$  – матрица двоичного кода.

Комплексная огибающая (КО) рассматриваемого сигнала будет иметь вид

$$\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N a_{i,n} \dot{S}_n(t - (n-1)T_0 - (i-1)T), \quad (2)$$

где  $\dot{S}_n(t - (n-1)T_0)$ ,  $(n-1)T_0 \leq t < nT_0$ , – КО  $n$ -го дискрета импульса.

Если  $\dot{S}_1(t) = \dot{S}_2(t) = \dots = \dot{S}_N(t)$  и строки матрицы  $\mathbf{A}_{M,N}$  (1) являются комплементарными после-

довательностями, то (2) является сигналом с нулевой зоной БЛ АКФ  $R(\tau)$  при  $|\tau| \leq T_n$  [9]. Такой сигнал при  $M = 2$  и  $\dot{S}_n(t) = S_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , был рассмотрен в [10, 11].

При  $M = 2$  кодирующую матрицу (1) можно записать в следующем виде [12, 13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,N} &= \left( \mathbf{A}_{2,N/2}^{(1)} \quad \mathbf{A}_{2,N/2}^{(2)} \right); \\ \mathbf{A}_{2,N/2}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{1,N/2}^i \\ \mathbf{D}_{1,N/2}^j \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{2,N/2}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{1,N/2}^{i'} \\ \mathbf{D}_{1,N/2}^{j'} \end{pmatrix}; \quad (3) \\ i, j, i', j' &= 1, 2, \dots, N/2, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{D}_{1,N/2}^i = \|d_{i,n}\|_{n=1}^{N/2}$  и  $\mathbf{D}_{1,N/2}^j = \|d_{j,n}\|_{n=1}^{N/2}$ ,  $\mathbf{D}_{1,N/2}^{i'} = \|d_{i',n}\|_{n=1}^{N/2}$  и  $\mathbf{D}_{1,N/2}^{j'} = \|d_{j',n}\|_{n=1}^{N/2}$  – парные последовательности (пары) двоичного D-кода [11, 14];  $i'$  и  $i$ ,  $j'$  и  $j$  – номера смежных последовательностей двоичного D-кода;  $N = 2^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ .

ФКМ-сигнал (2), кодированный строками матрицы  $\mathbf{A}_{2,N}$  из (3), называется когерентным дополнительным сигналом (КДС) [12, 13].

Таким образом, КДС является сигналом с НЗ АКФ при  $|\tau| \leq T_n$ , у которого КО дискрет  $\dot{S}_n(t)$  каждого из двух импульсов пачки равны между собой при  $n = (p-1)N/2 + 1 \dots pN/2$ , где  $p = 1, 2$ .

На основе сказанного выше, рассмотрим КДС с дополнительной частотной модуляцией дискрет импульсов пачки по линейному закону (КДС-ЛЧМ), как показано на рис. 1.

Закон изменения частоты в пределах  $n$ -го дискрета с учетом рис. 1 имеет вид

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left\lfloor \frac{n-1}{2^k} \right\rfloor F_c + (-1)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2^k} \right\rfloor} \frac{F_c}{T_0} t \\ &\text{при } 0 \leq t < T_0, \end{aligned}$$

где  $\lfloor z \rfloor$  – целая часть числа  $z$ ;  $n = 1, 2, \dots, N = 2^{k+1}$  – номер дискрета в импульсе КДС;  $F_c = b/T_0$  – ширина спектра КДС-ЛЧМ ( $b$  – база ЛЧМ-дискрета).

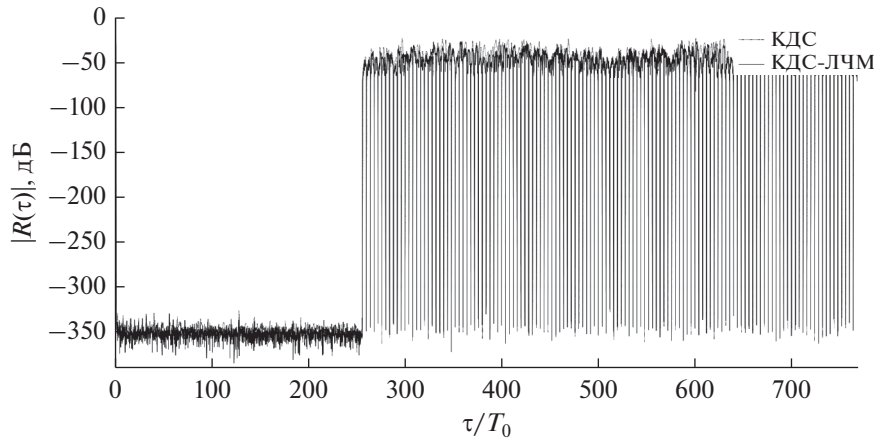


Рис. 2. АКФ КДС и КДС-ЛЧМ.

Тогда закон изменения фазы в пределах  $n$ -го дискрета будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= 2\pi \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] F_c t + 2\pi (-1) \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] \frac{F_c}{2T_0} t^2 = \\ &= 2\pi \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] b \frac{t}{T_0} + \pi (-1) \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] b \left( \frac{t}{T_0} \right)^2 \end{aligned}$$

при  $0 \leq t < T_0$ .

Таким образом, КО (2) КДС-ЛЧМ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^N S_{\left[ \frac{n-1}{2^k} \right]} (t - (n-1)T_0 - (i-1)T) \times \\ &\times \exp \left\{ j \left( 2\pi \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] b \frac{t}{T_0} + \pi (-1) \left[ \frac{n-1}{2^k} \right] b \left( \frac{t}{T_0} \right)^2 + \pi \tilde{a}_{i,n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $S_n(t - (n-1)T_0)$ ,  $(n-1)T_0 \leq t < nT_0$ , – огибающая  $n$ -го дискрета импульса КДС-ЛЧМ;  $\tilde{a}_{i,n}$  – символ двоичного кода, определяемый по (1) и (3).

### 3. АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КДС-ЛЧМ

Проведем сравнительный анализ корреляционных характеристик КДС без модуляции дис-

крет (далее – КДС) с корреляционными характеристиками КДС-ЛЧМ. Для сравнения относительного уровня БЛ этих двух сигналов необходимо обеспечить одинаковый уровень основных лепестков их АКФ, который равен числу дискрет в двух импульсах пачки. Рассмотрим КДС с числом дискрет в импульсе  $N = 256$  [12, 13] и КДС-ЛЧМ с  $N = 256$ , имеющим две разные базы ЛЧМ-дискрета:  $b = 4$  и  $b = 16$  (далее – КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> и КДС-ЛЧМ<sub>16</sub> соответственно). Оба сигнала имеют одинаковую скважность  $q = 2$ . Таким образом, оба сигнала имеют одинаковый уровень основного лепестка АКФ, равный 512.

На рис. 2 представлены АКФ  $R(\tau)$  КДС и КДС-ЛЧМ<sub>4</sub>, а на рис. 3 – функция неопределенности (ФН)  $R(\tau, F)$  КДС-ЛЧМ<sub>4</sub>. Ширина НЗ АКФ  $Z = NT_0(q-1)$  [10–13].

На рис. 3  $M = 2$  – число импульсов в пачке, а  $T = qNT_0$  – период следования импульсов. Половина ширины основного лепестка сечения ФН плоскостью  $\tau = 0$   $R(0, F)$  по нулевому уровню (или ширина основного лепестка по уровню  $-3$  дБ) равна  $\Delta F = 1/(MT) = 1/(qMNT_0)$ . Необходимо в плоскости задержка–частота  $(\tau, F)$  ФН при  $|\tau| < Z$  и  $|F| < \Delta F$  обеспечить минимальный уровень БЛ.

В табл. 1 представлены показатели корреляционных характеристик КДС, КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> и КДС-ЛЧМ<sub>16</sub> для трех сечений ФН плоскостями  $F = 0$ ,  $F = 0.3\Delta F$  и  $F = 0.5\Delta F$ . Из табл. 1 видно, что в НЗ АКФ уровень максимального БЛ АКФ КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> меньше уровня максимального БЛ АКФ КДС более чем на 6.5 дБ, а по среднеквадратическому уровню БЛ – более чем на 6 дБ. Также видно, что в НЗ АКФ максимальный и среднеквадратический уровни БЛ АКФ КДС-ЛЧМ<sub>16</sub> меньше соответствующих уровней БЛ АКФ КДС приблизительно на

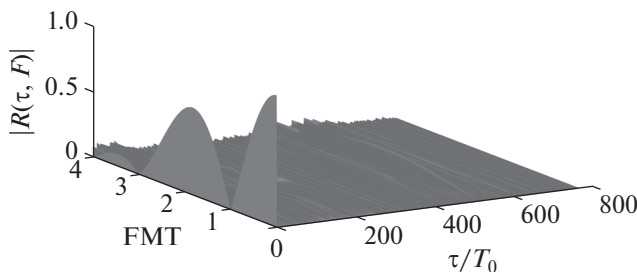


Рис. 3. Функция неопределенности КДС-ЛЧМ.



Таблица 1. Показатели корреляционных характеристик КДС, КДС-ЛЧМ и МП

Тип сигнала	Показатели корреляционных характеристик (в дБ) при разных $F$		
	0	$0.3\Delta F$	$0.5\Delta F$
		$R_{\text{макс}}$	
КДС	-23.8	-23.8	-23.8
МП	-27.3	-27.8	-25.2
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	-26.3	-26.3	-26.4
КДС-ЛЧМ <sub>16</sub>	-32.3	-30.7	-26.4
		$R_{\text{скв}}$	
КДС	-34.9	-34.8	-34.7
МП	-35.2	-33.8	-32.4
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	-41.2	-41.1	-41.0
КДС-ЛЧМ <sub>16</sub>	-47.0	-46.9	-46.8
		$R_{z \text{ макс}}$	
КДС	-330	-24.7	-20.8
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	-329	-31.5	-27.7
КДС-ЛЧМ <sub>16</sub>	-327	-36.6	-32.8
		$R_{z \text{ скв}}$	
КДС	-343	-38.6	-34.7
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	-349	-44.9	-41.0
КДС-ЛЧМ <sub>16</sub>	-353	-50.7	-46.7

Примечание:  $R_{\text{макс}}$  и  $R_{z \text{ макс}}$  — относительные уровни максимальных БЛ АКФ вне и в НЗ АКФ соответственно,  $R_{\text{скв}}$  и  $R_{z \text{ скв}}$  — относительные среднеквадратические уровни БЛ АКФ вне и в НЗ АКФ соответственно.

12 дБ. Кроме того, вне НЗ АКФ среднеквадратический уровень БЛ АКФ КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> и КДС-ЛЧМ<sub>16</sub> меньше среднеквадратического уровня БЛ АКФ КДС более чем на 6 дБ и приблизительно на 12 дБ соответственно. Отсюда следует, что выигрыш по уровню БЛ у КДС-ЛЧМ перед КДС без модуляции дискрет есть уже при малой базе  $b$  ЛЧМ-дискрета. При увеличении базы ЛЧМ-дискрета уровень БЛ АКФ КДС-ЛЧМ уменьшается.

Известно [8, 15], что оптимальными дискретными сигналами, т.е. сигналами с минимальным уровнем максимального БЛ АКФ, являются шумоподобные сигналы. Наиболее известным и часто используемым примером таких сигналов является усеченная М-последовательность, относительный уровень максимального БЛ АКФ которой равен приблизительно  $1/\sqrt{N_M}$ , где  $N_M$  — период М-последовательности.

Проведем также сравнительный анализ корреляционных характеристик рассмотренных КДС с

ФКМ-сигналом, манипулированным по фазе М-последовательностью (далее — МП) с периодом  $N_M = 511$  [12, 13]. Для выравнивания уровней основных лепестков АКФ КДС и МП добавим к ее периоду один элемент со смежного периода, т.е. число дискрет в импульсе МП  $N = N_M + 1 = 512$ .

В табл. 1 также представлены показатели корреляционных характеристик рассматриваемой МП для трех сечений ФН плоскостями  $F = 0$ ,  $F = 0.3\Delta F$  и  $F = 0.5\Delta F$ , а на рис. 4 изображены НЗ АКФ для рассмотренных сигналов КДС и КДС-ЛЧМ<sub>4</sub>, а также часть АКФ МП при рассогласовании по частоте  $F = 0.3\Delta F$ . Из рис. 4 и табл. 1 следует, что при рассогласовании по частоте на  $F = 0.3\Delta F$  и  $F = 0.5\Delta F$  в НЗ АКФ максимальный и среднеквадратический уровни БЛ АКФ КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> меньше соответствующих уровней БЛ АКФ МП. Результаты моделирования показали справедливость данного результата при  $|F| < \Delta F$ .

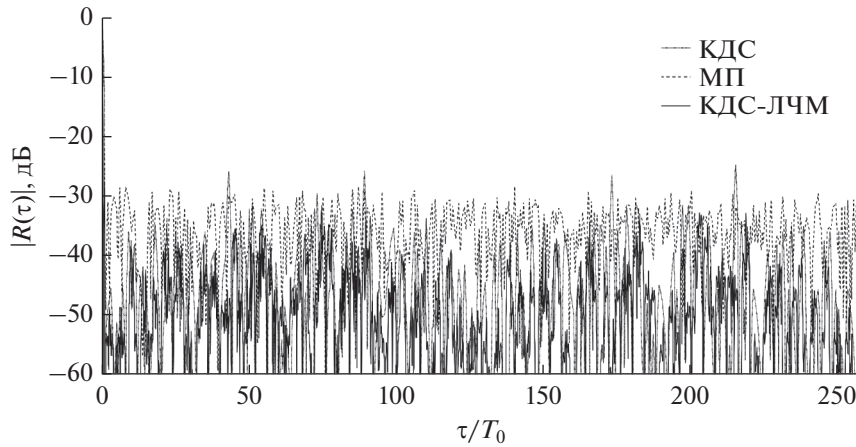


Рис. 4. Нулевая зона АКФ КДС, КДС-ЛЧМ и АКФ МП при  $F = 0.3\Delta F$ .

#### 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СУММАРНЫХ АКФ АНСАМБЛЯ КДС-ЛЧМ И ЦИКЛИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ МП

Как уже было отмечено выше, в космических РСА в качестве зондирующих сигналов использовались ФКМ-сигналы, манипулированные по фазе усеченными МП. При этом в смежных циклах зондирования для максимального подавления БЛ суммарной АКФ в зависимости от необходимого времени синтеза апертуры и других параметров РСА использовались МП с различными порождающими полиномами и/или различными циклическими сдвигами [4, 5].

Максимальное подавление БЛ суммарной АКФ ансамбля МП достигается при использовании полного циклического ансамбля МП с числом дискрет в импульсе, равном ее периоду, т.е. при  $N = N_M$ . При этом смежные МП сдвинуты между собой на один элемент, а число МП в ансамбле равно  $N$ . Тогда для суммарной АКФ полного циклического ансамбля из  $N$  МП длиной в один период можно записать:

$$r_m^+ = \sum_{i=1}^N r_m^i; \quad |m| = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

где  $r_m^i$  — ненормированная АКФ  $i$ -й МП.

Расписав выражение для АКФ каждой из  $N$  МП и просуммировав их согласно (5), обнаружим, что

$$r_m^+ = (N - |m|)(r_m + r_{N-m}), \quad (6)$$

где  $r_m = \sum_{n=1}^{N-m} a_n a_{n+m}$  — аперодическая АКФ текущего участка МП длиной в один период;  $r_{N-m} = \sum_{n=1}^m a_n a_{n+N-m}$  — аперодическая АКФ смежного с правой стороны участка МП.

Известно [15], что сумма в (6) определяет периодическую АКФ МП с периодом  $N = N_M$ , т.е.

$$r_m + r_{N-m} = r_m^p, \quad \text{где}$$

$$r_m^p = \sum_{n=1}^N a_n a_{n+m} \quad \text{при} \quad |m| = 0, 1, \dots, N-1.$$

Также известно, что для МП  $r_m^p = -1$  при  $|m| = 1, 2, \dots, N-1$ .

Таким образом, из (6) получим, что

$$r_m^+ = (N - |m|)r_m^p = -N + |m| \quad \text{при} \quad |m| = 1, 2, \dots, N-1,$$

откуда нормированная суммарная АКФ полного циклического ансамбля МП равна:

$$R_m^+ = -\frac{1}{N} + \frac{|m|}{N^2} \quad \text{при} \quad |m| = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

Так как используемое число МП в циклическом ансамбле зависит от необходимого времени синтеза апертуры и других параметров РСА и чаще всего в циклическом ансамбле применяется намного меньшее число МП, чем в полном циклическом ансамбле, то уровень БЛ суммарной АКФ полного циклического ансамбля МП можно считать минимальным предельно достижимым. Чем меньше МП содержит циклический ансамбль, тем выше уровень БЛ имеет суммарная АКФ. Будем считать циклическим ансамблем с максимальным уровнем БЛ суммарной АКФ ансамбль, состоящий из четырех МП, сдвинутых между собой на 128 элементов.

В табл. 2 представлены показатели суммарных АКФ полного циклического ансамбля из 511 МП и циклического ансамбля из четырех МП для трех сечений ФН плоскостями  $F = 0$ ,  $F = 0.3\Delta F$  и  $F = 0.5\Delta F$ . Из табл. 2 видно, что уровень макси-

**Таблица 2.** Показатели суммарных АКФ ансамблей из 511 МП, четырех МП и четырех КДС-ЛЧМ

Тип ансамбля сигналов	Показатели суммарных АКФ (в дБ) при разных $F$		
	0	$0.3\Delta F$	$0.5\Delta F$
4 МП 511 МП КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>		$R_{\Sigma \text{ макс}}$	
	–38.6	–39.9	–39.8
	–54.2	–55.5	–58.1
4 МП 511 МП КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	–324	–30.7	–26.4
		$R_{\Sigma \text{ скв}}$	
	–46.7	–46.7	–46.6
4 МП 511 МП КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	–58.9	–59.7	–61.1
	–348	–57.3	–52.9
		$R_{\Sigma z \text{ макс}}$	
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	–327	–43.5	–35.4
		$R_{\Sigma z \text{ скв}}$	
КДС-ЛЧМ <sub>4</sub>	–345	–67.0	–59.3

Примечание:  $R_{\Sigma z \text{ макс}}$  и  $R_{\Sigma z \text{ скв}}$  – относительный уровень максимального БЛ суммарной АКФ и относительный среднеквадратический уровень БЛ суммарной АКФ в НЗ АКФ соответственно.

максимального БЛ суммарной АКФ полного циклического ансамбля меньше уровня максимального БЛ циклического ансамбля из четырех МП более чем на 15.5 дБ, а по среднеквадратическому уровню БЛ – более чем на 12 дБ.

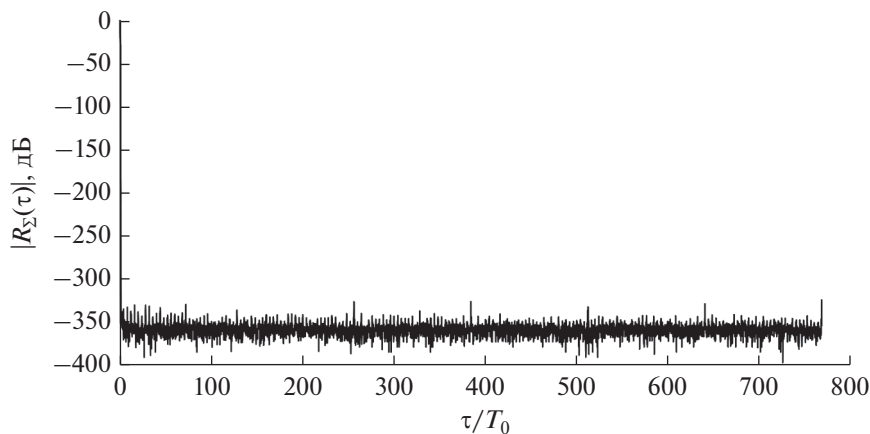
Далее рассмотрим показатели суммарной АКФ ансамбля КДС-ЛЧМ. Согласно (3) всего имеется  $N/2 = 2^k$  КДС, образованных из смежных пар двоичного D-кода порядка  $k$  [12] и образующих полный ансамбль КДС с числом дискрет в импульсе  $N = 2^{k+1}$ .

Результаты моделирования показали, что суммарная АКФ ансамбля из четырех КДС (с моду-

ляцией и без модуляции дискрета) с соседними номерами в полном ансамбле имеет нулевые БЛ вдоль всей временной оси  $\tau$  АКФ. При этом номер ансамбля  $j$  из четырех КДС с числом дискрет в импульсе  $N = 2^{k+1}$  связан с номером КДС  $i$  в полном ансамбле из  $N/2$  сигналов следующим выражением:

$$j = \left\lfloor \frac{i-1}{4} \right\rfloor + 1; \quad i = 1, 2, \dots, 2^k; \quad j = 1, 2, \dots, 2^{k-2}. \quad (8)$$

На рис. 5 и 6 изображены соответственно суммарная АКФ  $R_{\Sigma}(\tau)$  и суммарная ФН  $R_{\Sigma}(\tau, F)$  первого ансамбля ( $j = 1$ ) из четырех КДС-ЛЧМ с

**Рис. 5.** Суммарная автокорреляционная функция ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ.

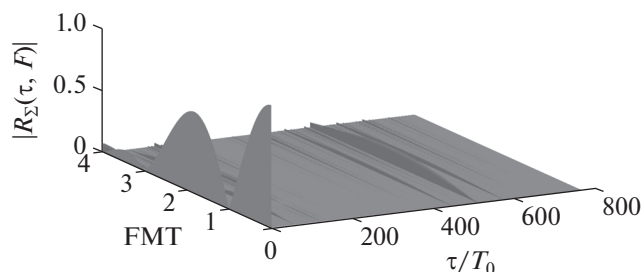


Рис. 6. Суммарная функция неопределенности ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ.

числом дискрет в импульсе  $N = 256$  и базой ЛЧМ-дискрета  $b = 4$  (КДС-ЛЧМ<sub>4</sub>). Сквозность  $q = 2$ .

В табл. 2 также представлены показатели суммарной АКФ рассматриваемого ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> для трех сечений ФН плоскостями  $F = 0$ ,  $F = 0.3\Delta F$  и  $F = 0.5\Delta F$ , а на рис. 7 изображены суммарные АКФ ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ<sub>4</sub>, циклического ансамбля из четырех МП и полного циклического ансамбля из 511 МП при рассогласовании по частоте  $F = 0.3\Delta F$ .

Из рис. 7 и табл. 2 следует, что при рассогласовании по частоте на  $F = 0.3\Delta F$  в НЗ АКФ максимальный и среднеквадратический уровни БЛ суммарной АКФ ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ<sub>4</sub> меньше соответствующих уровней БЛ суммарной АКФ циклического ансамбля из четырех МП. Результаты моделирования показали справедливость данного результата при  $|F| < 0.35\Delta F$ . Также результаты моделирования показали, что суммарные корреляционные характеристики ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ не зависят от базы  $b$  ЛЧМ-дискрета, т.е. показатели его суммарной

АКФ при различных базах ЛЧМ-дискрета будут приблизительно одинаковыми.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены пачечные зондирующие ФКМ-сигналы, имеющие нулевую зону автокорреляции (НЗ АКФ) и названные когерентными дополнительными сигналами. Проведено обоснование наличия у таких сигналов НЗ АКФ и получены требования к кодирующей матрице. Так как НЗ АКФ существует у КДС только при нулевом рассогласовании по частоте Доплера, а также при рассогласовании по частоте в НЗ АКФ появляются боковые лепестки достаточно высокого уровня, то для их возможного подавления рассмотрены КДС с дополнительной частотной модуляцией дискрет импульсов пачки по линейному закону (КДС-ЛЧМ).

Проведен сравнительный анализ корреляционных характеристик КДС-ЛЧМ с различной базой ЛЧМ-дискрета и КДС без модуляции дискрет при рассогласовании по частоте Доплера. Анализ показал, что выигрыш по уровню БЛ у КДС-ЛЧМ перед КДС без модуляции дискрет есть уже при малых базах ЛЧМ-дискрета. При базе ЛЧМ-дискрета, равной четырем, уровень максимального БЛ АКФ КДС-ЛЧМ меньше уровня максимального БЛ АКФ КДС без модуляции дискрет более чем на 6.5 дБ, а по среднеквадратическому уровню БЛ – более чем на 6 дБ. При увеличении базы ЛЧМ-дискрета уровень БЛ АКФ КДС-ЛЧМ уменьшается.

Также проведен сравнительный анализ корреляционных характеристик КДС-ЛЧМ с ФКМ-сигналом, манипулированным по фазе усеченной М-последовательностью и имеющим одинаковое число дискрет в импульсе с числом дискрет в двух импульсах пачки КДС. Анализ показал, что при

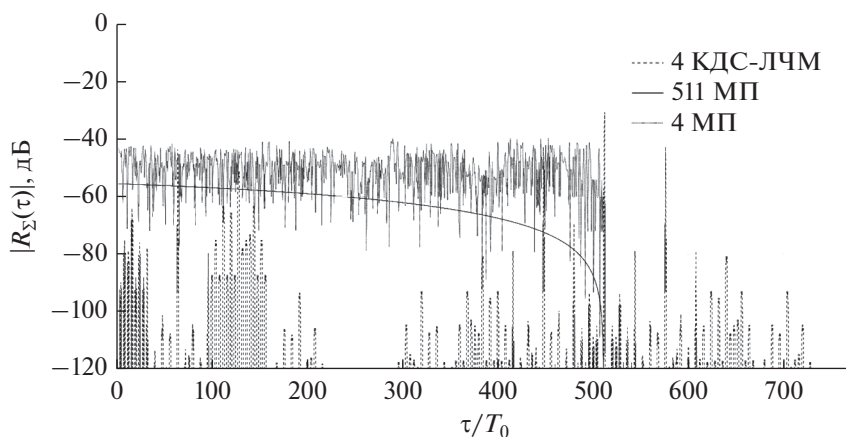


Рис. 7. Суммарные автокорреляционные функции ансамблей из четырех КДС-ЛЧМ, четырех МП и 511 МП при  $F = 0.3\Delta F$ .

рассогласовании по частоте Доплера в НЗ АКФ максимальный и среднеквадратический уровни БЛ АКФ КДС-ЛЧМ с базой ЛЧМ-дискрета, равной четырем, меньше соответствующих уровней БЛ АКФ МП.

Проведен также сравнительный анализ суммарных АКФ ансамбля КДС-ЛЧМ и циклического ансамбля МП при рассогласовании по частоте Доплера. Анализ показал, что суммарная АКФ ансамбля из четырех КДС (с модуляцией и без модуляции дискрета) с соседними номерами в полном ансамбле имеет нулевые БЛ вдоль всей временной оси  $\tau$  АКФ, а при рассогласовании по частоте в НЗ АКФ максимальный и среднеквадратический уровни БЛ суммарной АКФ ансамбля из четырех КДС-ЛЧМ меньше соответствующих уровней БЛ суммарной АКФ циклического ансамбля из четырех МП.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства культуры, образования, науки и спорта Монголии в рамках научного проекта № 19-57-44001.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wehner D.R.* High Resolution Radar. Norwood: Artech House, 1995.
2. *Соколов А.В., Лазуткин Б.А., Григорьев В.А. и др.* Обнаружение и распознавание объектов радиолокации. М.: Радиотехника, 2006.
3. *Ganveer N., Vishal G., Rao R.S., Biradar V.* // Proc. 2016 IEEE Int. Conf. on Recent Trends in Electronics, Information & Communication Technology (RTEICT). Bangalore. 20–21 May 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 1094.
4. *Груздов В.В., Колковский Ю.В., Круштов А.В., Кудря А.И.* Новые технологии дистанционного зондирования Земли из космоса. М.: Техносфера, 2018.
5. *Alexandrov Yu.N., Basilevski A.T., Kotelnikov V.A. et al.* // Astrophysics and Space Phys. Rev. 1988. V. 6. № 1. P. 61.
6. *Li S.F., Chen J., Zhang L.Q., Zhou Y.Q.* // Proc. 2009 IET Int. Radar Conf. Guilin. 20–22 April 2009. Stevenage: IET, 2009. P. 1.
7. *Garren D.A., Pace P.E., Romero R.A.* // Proc. 2014 IEEE Radar Conf. Cincinnati. 19–23 May 2014. N.Y.: IEEE, 2014. P. 0765.
8. *Levanon N., Mozeson E.* Radar Signals. Hoboken: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
9. *Chebanov D., Lu G.* // Proc. 2010 IEEE Radar Conf. Washington. 10–14 May 2010. N.Y.: IEEE, 2010. P. 1428.
10. *Ipanov R.N., Baskakov A.I., Olyunin N., Ka M.-H.* // IEEE Signal Processing Lett. 2018. V. 25. № 10. P. 1560.
11. *Ипанов Р.Н.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 8. С. 823.
12. *Ипанов Р.Н.* // Журн. радиоэлектроники. 2019. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug19/7/text.pdf>.
13. *Ipanov R.N.* // IET Electron. Lett. 2019. V. 55. № 19. P. 1063.
14. *Ипанов Р.Н.* Способ формирования множества ансамблей  $p$ -ичных D-кодов. Патент на изобретение № 2670773. Офиц. бюлл. “Изобретения и полезные модели”. 2018. № 30.
15. *Ipatov V.P.* Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005.

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС  
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

УДК 621.391,621.396

**ПОВЫШЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ  
СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРЯМОХАОТИЧЕСКИХ СРЕДСТВ СВЯЗИ**

© 2020 г. А. С. Дмитриев<sup>а</sup>, М. Г. Попов<sup>а</sup>, А. И. Рыжов<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. А.В. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: mef.box@gmail.com

Поступила в редакцию 24.09.2019 г.

После доработки 24.09.2019 г.

Принята к публикации 20.10.2019 г.

Рассмотрена задача увеличения дальности действия прямохаотических сверхширокополосных приемопередатчиков. Проведены теоретические оценки характеристик, определяющих радиус действия. Разработаны и изготовлены экспериментальные образцы приемопередатчиков с пропускной способностью до 12 Мбит/с и дальностью действия более 200 м. Подготовлено и апробировано программное обеспечение к ним. Проведены измерения характеристик созданных устройств, подтвердившие теоретические оценки.

DOI: 10.31857/S0033849420080021

**ВВЕДЕНИЕ**

С начала 2000 годов, после принятия национальных спектральных масок по нелицензированному использованию сверхширокополосных (СШП) сигналов в беспроводной связи<sup>1, 2, 3</sup>, основные интересы исследователей и разработчиков были сосредоточены на изучении систем персональной связи, радиус действия которых достигает 30...40 м (системы малого радиуса действия) [1–3]. Между тем имеется целый ряд задач, для которых представляет интерес использование средств СШП-связи на расстояниях до 100 м и более. В частности, большое внимание этому вопросу уделяется в связи с проблемой измерения расстояний с большой точностью и создания средств позиционирования на этой основе<sup>4, 5</sup>. Имеется и ряд собственно коммуникационных задач, где применение средств СШП-связи представляет значительный интерес: например, создание локаль-

ной инфокоммуникационной структуры для малых населенных пунктов [4].

При создании таких средств связи возникает ряд новых вопросов как по техническим характеристикам приемопередающих устройств и их реализации, так и по условиям применения.

В данной работе эти вопросы изучаются применительно к прямохаотическим средствам СШП-связи [5–7].

**1. ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ  
ДАЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ  
ПРЯМОХАОТИЧЕСКИХ  
СШП-ПРИЕМОПЕРЕДАТЧИКОВ**

При переходе от приемопередатчиков прямохаотической связи малого радиуса действия с дальностью работы до 30...40 м к средствам с дальностью, характерной для локальных средств беспроводной связи (с дальностью до 100...200 м), должен быть учтен ряд факторов, определяющих диапазон расстояний работоспособности линии связи, в том числе:

- мощность передатчика;
- чувствительность приемника;
- направленность антенн;
- база хаотических радиоимпульсов;
- наличие многолучевого распространения (межсимвольная интерференция).

Вероятность ошибки на 1 бит при приеме определяется отношением энергии сигнала на 1 бит

<sup>1</sup> Решение Федеральной комиссии по связи (FCC) США № FCC 02-48 от 14/02/2002.

<sup>2</sup> Решение ГКРЧ № 09-05-02 от 15 декабря 2009 г.

<sup>3</sup> Standardisation mandate forwarded to CEN/CENELEC/ETSI for harmonised standards covering ultra-wideband equipment. European Commission. TCAM Secretariat. Brussels, 19 April 2007.

<sup>4</sup> Zebra UWB Tag Portfolio Spec Sheet // [https://www.zebra.com/content/dam/zebra\\_new\\_ia/en-us/solutions-verticals/product/location\\_solutions/zebra-ultra-wideband/uwb-tag/spec-sheet/uwb-tag-spec-sheet-en-us.pdf](https://www.zebra.com/content/dam/zebra_new_ia/en-us/solutions-verticals/product/location_solutions/zebra-ultra-wideband/uwb-tag/spec-sheet/uwb-tag-spec-sheet-en-us.pdf).

<sup>5</sup> Decawave DWM1000 Module // <https://www.decawave.com/product/dwm1000-module/>.

информации к спектральной плотности шума  $E_6/N_0$  на входе приемника, которое для свободно-пространства рассчитывается по формуле [8]

$$\frac{E_6}{N_0} = \frac{P_{\text{пер}} T_6 G_{\text{пер}} G_{\text{пр}}}{LN_0 N_{\Phi} I}, \quad (1)$$

или в логарифмическом масштабе

$$\left( \frac{E_6}{N_0} \right)_{\text{дБ}} = (P_{\text{пер}})_{\text{дБВ}} + T_6 + G_{\text{пер}} + G_{\text{пр}} - L - N_0 - N_{\Phi} - I, \quad (2)$$

где  $P_{\text{пер}}$  – мощность излучения передатчика;  $T_6$  – длительность бита;  $G_{\text{пер}}$ ,  $G_{\text{пр}}$  – усиление антенн передатчика и приемника;  $L = 4\pi R^2$  потери в канале связи,  $N_0 = kT$  – мощность теплового шума входных цепей приемника,  $N_{\Phi}$  – шум-фактор приемника,  $I$  – потери на реализацию.

Из (1) следует, что дальность передачи в свободном пространстве

$$R = \sqrt{\frac{P_{\text{пер}} T_6 G_{\text{пер}} G_{\text{пр}}}{4\pi (E_6/N_0) N_0 N_{\Phi} I}} \quad (3)$$

прямо пропорциональна корню квадратному из излучаемой мощности, длине бита, коэффициентам усиления передающей и приемной антенн, и обратно пропорциональна корню квадратному из произведения  $(E_6/N_0)$  на коэффициент шума приемника, спектральной плотности шума и потерям на реализацию.

Обозначим через  $(E_6/N_0)_{\text{тр}}$  минимальное значение  $(E_6/N_0)$  для получения требуемой вероятности ошибок и через  $(E_6/N_0)_{\text{пр}}$  реальное (принятое) значение для  $(E_6/N_0)$ . Разница между этими величинами дает энергетический резерв линии связи между передатчиком и приемником.

Рассмотрим основные факторы, влияющие на дальность передачи. Первым таким фактором является база сигнала. Пусть  $B$  – база хаотического радиопульса  $B = 2FT_{\text{и}}$ , где  $F$  – полоса частот хаотического радиопульса и  $T_{\text{и}}$  – его длительность [9–11].

Увеличение  $B$  позволяет при фиксированной мощности генератора хаоса увеличить излучаемую энергию, приходящуюся на 1 бит, и тем самым повысить предельную дальность передачи. Однако в прямохаотических средствах связи вероятность ошибки зависит не только от  $(E_6/N_0)$ , но и от базы сигнала. Это – свойство энергетического приема [12], которое является также характерным для радиометрических систем [13]. Асимптотическое значение  $(E_6/N_0)_{\text{тр}}$  при больших базах сигнала пропорционально корню квадратному из базы сигнала, т.е.  $(E_6/N_0)_{\text{тр}} \sim B^{1/2}$ . Поэтому, хотя с увеличением базы сигнала энергия принимаемого бита растет пропорционально  $B^{1/2}$  при фиксиро-

ванной мощности передатчика, дальность действия устройства растет медленнее – пропорционально  $B^{1/4}$ .

Из (3) следует, что повышение мощности излучения – прямой способ увеличения дальности действия передатчика, к тому же зачастую наиболее простой в реализации.

Вторым фактором, влияющим на дальность связи, является чувствительность приемника. Она зависит от полосы принимаемого сигнала, метода модуляции и демодуляции, температуры приемника и качества входных малошумящих усилителей, характеризуемого коэффициентом шума  $N_{\Phi}$ .

Суммируя сказанное выше, отметим, что основные факторы – мощность, база сигнала, коэффициенты усиления антенн передатчика  $G_{\text{пер}}$  и приемника  $G_{\text{пр}}$  – сказываются соответственно на дальности передачи  $D$  следующим образом:

$$D \sim P^{1/2}, \quad D \sim B^{1/4}, \quad D \sim (G_{\text{пер}} G_{\text{пр}})^{1/2}.$$

В табл. 1 представлены расчеты бюджета каналов для приемопередатчика типа ППС-4\* (при скорости передачи  $R_6 = 6$  Мбит/с) и ППС повышенной дальности (при скорости передачи  $R_6 = 1.5$  Мбит/с) и соответствующие итоговые значения энергетического резерва.

## 2. ПРИЕМОПЕРЕДАТЧИКИ ПОВЫШЕННОЙ ДАЛЬНОСТИ

Рассмотрим приемопередатчики с повышенной дальностью действия, созданные в рамках НИР “Калинка” [4]. При их разработке за основу были взяты СШП-приемопередатчики типа ППС-4\* [11, 12] с дальностью действия до 30 м (см. табл. 1).

В новых устройствах мощность излучаемого сигнала была увеличена до 100 мВт (в импульсе), а чувствительность приемника по отношению к приемникам устройств ППС-4\* повышена на 4 дБ.

Передатчик устройства (рис. 1) включает в себя генератор хаоса 1, формирующий поток хаотических радиопульсов, модулятор 2, выходной усилитель 3, переключатель передатчик-приемник 4, антенну 5 и цифровой блок 6, который осуществляет преобразование цифрового потока бит в видеопульсы, подаваемые на вход модулятора. Приемник устройства состоит из антенны, цифрового блока и переключателя (общих с передатчиком), малошумящего усилителя 7; детектора огибающей 8 на основе логарифмического детектора, преобразующего микроволновые колебания в импульсы огибающей с амплитудой, пропорциональной логарифму мощности принимаемого радиосигнала. Цифровой блок преобразует последовательность импульсов огибающей в набор цифровых отсчетов, декодируемый в последовательность бит.

Таблица 1. Бюджет канала связи

Параметр	Приемопередатчик типа ППС-4*	Приемопередатчик с повышенной дальностью
$R_6$	6.0 Мбит/с	1.5 Мбит/с
$P_{пер}$	7 дБм	14 дБм
$G_{пер}$	0 дБ	0 дБ (3 дБ)
$F_{ср}$	4.0 ГГц	4.0 ГГц
$L_1 = 20 \lg 10(4\pi f_{ср}/c)$	44.0 дБ	44.0 дБ
$L_2 = 20 \lg 10(D)$	29.54 дБ при $d = 30$ м	40.0 дБ при $d = 100$ м 46.0 дБ при $d = 200$ м
$G_{пр}$	0 дБ	0 дБ (3 дБ)
$P_{пр} = P_{пер} + G_{пер} + G_{пр} - L_1 - L_2$	-67.0 дБм	-70.0 дБм
$N = -174 + 10 \lg(R_6)$	-106 дБм	-112 дБм
$N_{Ф}$	7 дБ	7 дБ
$P_{ш} = N + N_{Ф}$	-99 дБм	-105 дБм
Минимальное значение $E_6/N_0$	17 дБм	19 дБм
$I$	5 дБ	5 дБ
Энергетический резерв канала связи ( $M = P_{пр} - P_{ш} - E_6/N_0 - I$ )	10 дБ	11 дБ
Предлагаемая минимальная чувствительность приемника	-77 дБм	-81 дБм

Конструктивно приемопередатчики были разработаны в двух вариантах: с горизонтальным расположением платы и вертикальной внешней антенной (рис. 2а) и с вертикальным расположением платы и антенны (рис. 2б). Первый вариант более компактный, плата для него может быть расположена в стандартном покупном корпусе, приемопередатчик второго типа размещается в специально разработанном корпусе и более приспособлен для работы в условиях реальной среды. В обоих вариантах приемопередатчиков используются внешне подключаемые антенны, что обеспечивает определенную гибкость в обеспечении необходимого коэффициента усиления.

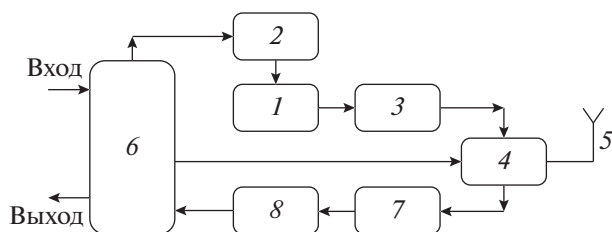


Рис. 1. Структура прямохаотического приемопередатчика: 1 – генератор хаоса, формирующий поток хаотических радиопульсов, 2 – модулятор, 3 – усилитель, 4 – переключатель передача/прием (ключ), 5 – антенна, 6 – цифровой блок, 7 – малозумящий усилитель, 8 – детектор огибающей.

Ниже приведены расчетные характеристики прямохаотического приемопередатчика:

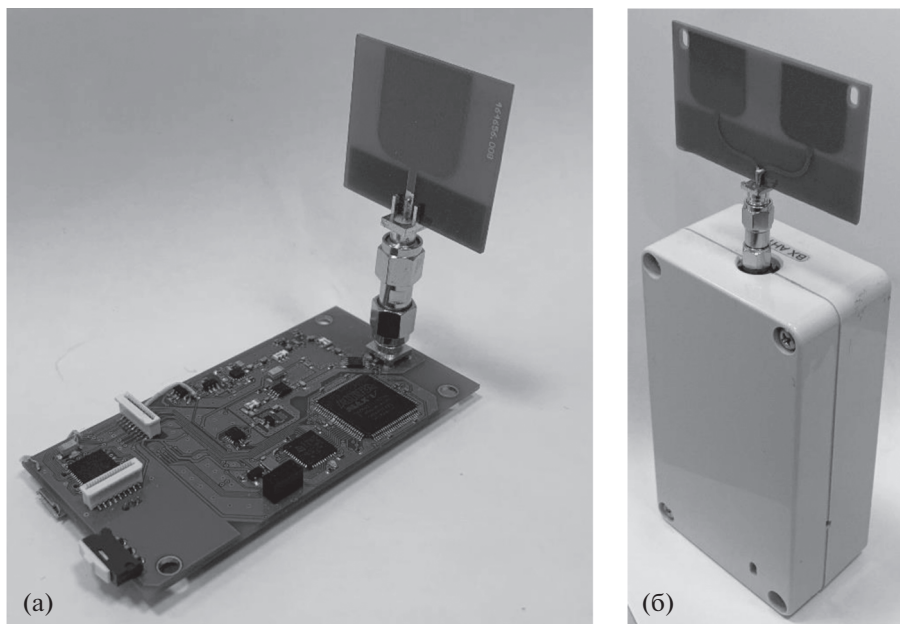
Дальность связи в свободном пространстве, м	до 200
Физическая скорость, Мбит/с	6.0 (12.0)
Пиковая мощность излучения, дБм	20
Усиление антенны, дБ	0 (3)
Чувствительность приемника, дБм	-81

### 3. МНОГОЛУЧЕВОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

С энергетической точки зрения разработанные приемопередатчики должны обеспечивать дальность работы более 100 м в свободном пространстве. Эта характеристика была экспериментально подтверждена с помощью измерений на стенде с эквивалентным затуханием сигнала. Однако реальные трассы даже при наличии прямой видимости демонстрируют достаточно интенсивную многолучевость. Это характерно как для СШП-систем малого радиуса действия, так, как оказалось в процессе измерений, и для систем с повышенной дальностью, даже в условиях открытой местности.

Для борьбы с многолучевостью в прямохаотических средствах СШП-связи малого радиуса действия используются защитные интервалы. Длитель-





**Рис. 2.** Внешний вид приемопередатчиков: без корпуса с антенной, перпендикулярной плоскости платы (а) и в корпусе, антенна расположена вдоль печатной платы (б).

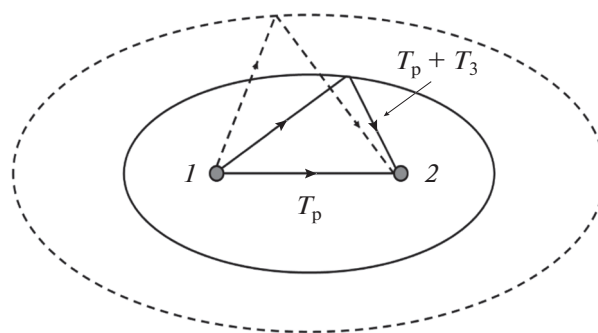
ность этих интервалов согласуется с характерными временами запаздывания для многолучевых каналов. Согласно моделям распространения, характерное время запаздывания для персональных систем связи укладывается в диапазон 30...40 нс. Исходя из соображений подобия можно ожидать, что в системах повышенной дальности характерное время запаздывания будет расти пропорционально планируемой дальности связи, поэтому при увеличении дальности до 100 м оно составит величину порядка 100 нс, и при дальности 200 м — около 200 нс. Это означает, что с учетом запаса защитный интервал в этих случаях должен составлять не менее 150 и 300 нс соответственно. При скважности 2 это соответствует максимальным скоростям передачи 3.0 и 1.5 Мбит/с.

Данная ситуация схематично представлена на рис. 3, где изображены два эллипса вокруг трассы распространения сигнала между передатчиком 1 и приемником 2. Сумма длин путей от передатчика к приемнику для каждого из эллипсов постоянна. Кривая каждого эллипса соответствует точкам однократного переотражения сигнала, излучаемого передатчиком. Время прохождения сигнала от передатчика к приемнику при однократном переотражении определяется по выражению  $T_{\text{п}} = T_{\text{р}} + T_{\text{з}}$ , где  $T_{\text{р}}$  — время распространения между передатчиком и приемником по каналу с прямой видимостью,  $T_{\text{з}}$  — время запаздывания. Внутренний эллипс соответствует времени распространения не прямых лучей  $T_{\text{п}} \sim 1.5T_{\text{р}}$  при однократном переотражении, внешний эллипс соответствует времени распространения не прямых лучей  $T_{\text{п}} \sim 2.0T_{\text{р}}$ .

Эти соотношения наряду с энергетическими соотношениями, представленными в разд. 2, ограничивают дальность работы СШП линии связи.

Для пиковой мощности передатчиков 100 мВт и скважностей 2 и 4 оценки максимально возможных скоростей передачи от дальности могут быть получены из рис. 4а и 4б соответственно. Ограничивающие факторы — энергетический потенциал линии связи с учетом уменьшения эффективности использования принимаемой энергии импульса при увеличении длины импульса и характерное время запаздывания не прямых лучей.

На рис. 4а приведены результаты расчетов для передачи со скважностью 2 и, соответственно, средней мощностью 25 мВт. Линия 1 определяет ограничение по скорости, если в качестве критерия берется



**Рис. 3.** Эллипсы, определяющие время распространения сигнала передатчика при однократном переотражении.

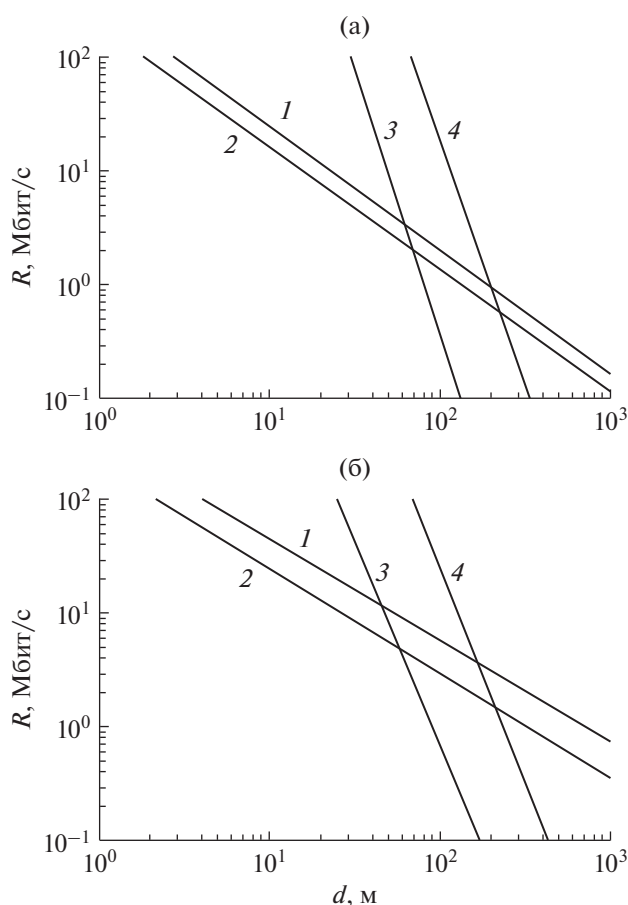


Рис. 4. Зависимости для оценки максимальной скорости передачи данных от дальности при скважности 2 (а) и 4 (б).

запаздывание, соответствующее однократному минимальному запаздыванию в соответствии с моделью запаздывания сигнала, которое пропорционально времени распространения прямого сигнала (см. рис. 3, внутренний эллипс; коэффициент запаздывания  $\sim 1.5$  относительно времени распространения прямого сигнала). Линия 2 определяет ограничение на скорость, если в качестве критерия берется запаздывание, соответствующее двойному максимальному запаздыванию в упомянутой модели (см. рис. 3, внешний эллипс; коэффициент запаздывания  $\sim 2.0$  по отношению ко времени распространения прямого сигнала).

Практически реализуемая из-за наличия многолучевого распространения максимальная скорость передачи лежит в полосе между этими линиями.

Линии 3 и 4 определяют энергетические ограничения на скорость передачи как функции дальности в случаях, когда в передатчике и приемнике используются антенны с  $G_{\text{пер}} = G_{\text{пр}} = 0$  дБ и  $G_{\text{пер}} = G_{\text{пр}} = 3$  дБ соответственно. Линии 1 и 2 расположены на рисунке ниже линий 3 и 4 вплоть до дальности

200...1000 м, и поэтому именно многолучевое распространение на этих расстояниях лимитирует максимальную скорость передачи. Например, при дальности 100 м максимальная скорость может составлять 1.3...2.0 Мбит/с, а при дальности 200 м — примерно 0.6...1.0 Мбит/с.

Поскольку энергетический потенциал не является ограничивающим фактором можно попытаться увеличить дальность передачи за счет увеличения скважности.

На рис. 4б приведена структура ограничивающих линий для передачи со скважностью 4 и пиковой мощностью в импульсе 100 мВт (отметим, что средняя мощность в этом случае равна 12.5 мВт, т.е. в два раза ниже по сравнению с передачей при скважности 2). Структура линий та же, что и в случае передачи со скважностью 2. Однако теперь при  $G_{\text{пер}} = G_{\text{пр}} = 0$  дБ ограничивающим фактором при дальности  $d > 150$  м является энергетический потенциал линии связи. Максимальная скорость передачи на расстоянии 150 м составляет 2 Мбит/с. Для этих же антенн возможно увеличение дальности до 200 м, однако при уменьшении скорости передачи до 1.0 Мбит/с (линия 3).

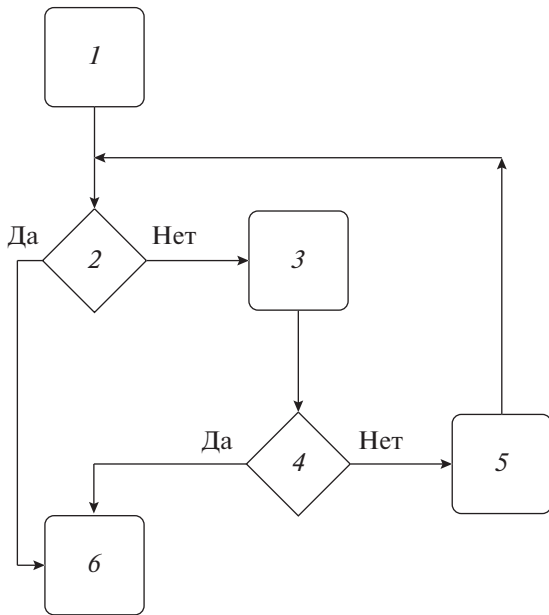
Эта скорость может быть увеличена вдвое, до 1.5...3.0 Мбит/с, за счет увеличения коэффициента усиления антенн до 3 дБ (линия 4). При этом лимитирующим фактором снова начинает выступать многолучевое распространение.

#### 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН И АДАПТИВНЫЕ ПОРОГИ

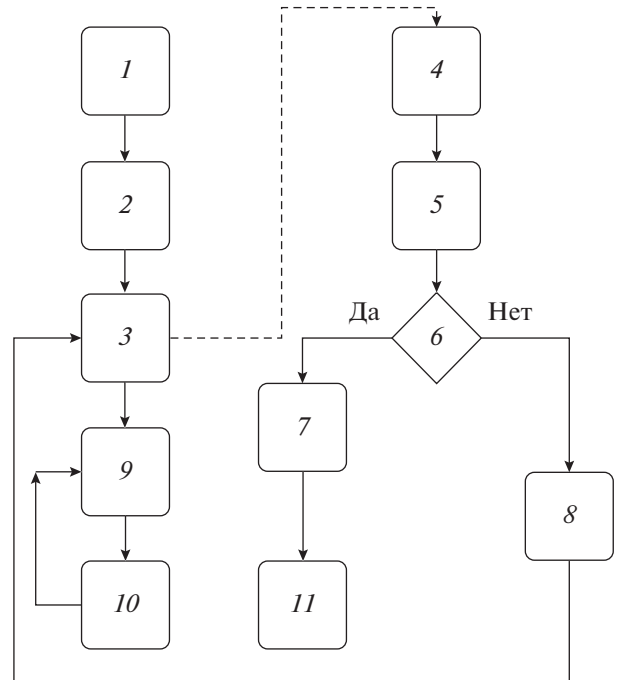
Динамический диапазон работы приемника прямохоотической системы обеспечивается широким динамическим диапазоном логарифмического детектора (до 55 дБ), применяемого в качестве чувствительного элемента. Такого динамического диапазона в целом хватает для приемопередатчиков персональной связи. При изменении расстояний от 1 м до 30 м в свободном пространстве диапазон изменения мощности принимаемого сигнала лежит в пределах 30 дБ. Однако ситуация может измениться, если требуемая дальность связи составляет 100...200 и более метров. В этом случае диапазон изменения мощности принимаемого сигнала при изменении расстояния от 1...2 м до 100...200 м составит уже 40...46 дБ, что может быть критично для работы линии связи при наличии дополнительных возмущающих факторов.

Поэтому для повышения устойчивости работы системы передачи во всем диапазоне изменения дальностей была разработана адаптивная настройка порога приемника, реализуемая программным образом.

Пусть канал связи несимметричен: условно один приемопередатчик представляет собой базовую станцию (БС), а второй — сенсорный узел



**Рис. 5.** Блок-схема алгоритма инициализации сети: 1 – начало работы алгоритма; 2 – проверка статуса СУ; 3 – изменение порога; 4 – проверка превышения количества инициализаций; 5 – инициализация сети; 6 – окончание работы алгоритма.



**Рис. 6.** Блок-схема автоматического подбора порога в режиме передачи данных: 1 – начало работы алгоритма; 2 – прием первого пакета из эфира; 3 – запуск таймера на подсчет времени  $T_n$  для СУ; 4 – таймер на подсчет BER; 5 – сохранение значения BER для порога  $P_i$ ; 6 – проверка наличия неиспользованных порогов; 7 – установление на БС порога с минимальным BER; 8 – выставление следующего значения порога на БС; 9 – обновление на БС информации о BER от СУ; 10 – прием пакета из эфира; 11 – окончание работы алгоритма.

(СУ). Базовая станция осуществляет запросы на передачу, а основной поток данных идет в направлении сенсорный узел – базовая станция. Таким образом, первая задача БС заключается в побудке СУ, после чего он начинает передачу. В связи с такой конфигурацией критической является устойчивость работы приемника БС. В нем и реализована адаптивная настройка порога.

Адаптивная настройка порога на БС реализована для двух процессов: при инициализации сети (первый этап) и при приеме данных от сенсорного узла (второй этап).

При инициализации сети алгоритм выбора порога действует следующим образом (рис. 5). В файле программы задается массив из  $K$  пороговых значений  $(p_1...p_k)$  для приемника БС. Вначале осуществляется проверка статуса устройства (проинициализировано оно или нет, блок 2). В случае, если устройство оказалось проинициализированным (например, из-за ранее прошедшей операции инициализации), работа алгоритма инициализации заканчивается (блок 6) и происходит переход к следующему этапу. В противном случае выставляется значение порога  $p_1$  из списка пороговых значений (блок 3). Далее осуществляется проверка превышения максимального числа инициализаций  $K$  (блок 4). Если превышения нет, то запускается процесс инициализации сети (блок 5): БС посылает СУ серию пакетов побудки, и в случае принятия СУ хотя бы одного пакета-запроса сенсорное устройство посылает базовой

станции ответный пакет, принятие которого БС означает обнаружение устройства и его успешную инициализацию. Если ни один пакет-запрос не принят, то процесс возвращается в блок 3, где выставляется следующее значение порога. Алгоритм инициализации заканчивает свою работу либо в случае обнаружения устройства, либо при превышении максимального числа попыток инициализации.

После инициализации, при приеме базовой станцией первого пакета с данными от сенсорного узла начинает работать алгоритм адаптивной настройки порога второго этапа (рис. 6). Для получения первого пакета с данными используется порог, полученный в конце инициализации сети.

Алгоритм второго этапа имеет две фазы работы: грубая настройка и точная настройка. Это сделано для снижения общего времени работы алгоритма, а также для того чтобы БС не работала длительное время со значениями порогов, на которых невозможна передача данных.

При грубой и точной настройке используется одна и та же процедура адаптации, отличия состо-

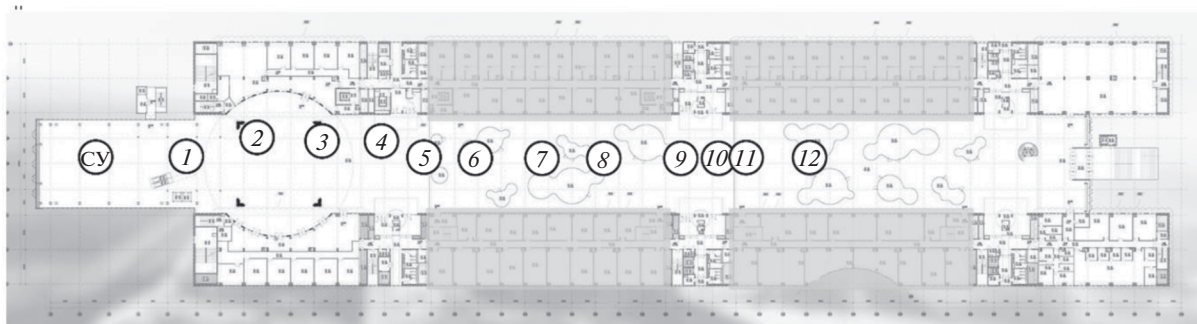


Рис. 7. Расположение БС в ходе проведения экспериментов последовательно на расстоянии (в м) от передатчика до приемника: 38 (точка 1), 55 (2), 85 (3), 105 (4), 115 (5), 130 (6), 150 (7), 170 (8), 200 (9), 210 (10), 220 (11), 240 (12); СУ – сенсорный узел (передатчик).

ят лишь в значениях порогов для БС. При грубой настройке используется система эквидистантных  $M$  порогов. В общем случае  $M \neq K$ . Из  $M$  значений порога процедура выбирает тот, которому соответствует минимальное значение вероятности ошибки на 1 бит (Bit Error Ratio, BER) при приеме. Далее осуществляется переход к точной настройке порога, где BER минимизируется локально в окрестности выбранного при грубой настройке значения порога.

Сам алгоритм работает следующим образом. При приеме пакета с данными от СУ (блок 2) запускается таймер на время  $T_n$  (блок 3), необходимый для регистрации временного интервала, в течении которого накапливается статистика о BER для узла сети (блок 9, 10). После окончания интервала  $T_n$  сохраняется итоговое значение BER для текущего порога  $p_i$  на БС (блоки 4, 5). Далее в случае, если имеются пороги, для которых еще не проходила проверка BER (условие в блоке 6), осуществляется смена порога на БС на следующее значение  $p_{i+1}$  в соответствии со значениями порогов, соответствующими фазе работы алгоритма (блок 8). Далее вновь запускается процесс набора статистики для нового порога БС. После получения BER для последнего значения порога происходит выбор лучшего из порогов по критерию минимального значения BER (блок 7) и алгоритм завершает работу (блок 11).

## 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Предварительные исследования показали, что для полномасштабных измерений для расстояний 100 и более метров крайне желательно иметь полигон закрытого типа (помещение) для обеспечения независимости от климатических условий. После рассмотрения и многочисленных проб было принято решение использовать для этих целей здание Технопарка в Сколково. Это сооружение

(рис. 7, 8а) имеет в длину более 300 м, ширину более 50 м с прямой видимостью практически на всю длину и высоту более 20 м.

В ходе испытаний использовалось следующее оборудование: сенсорное устройство (СУ) с приемопередатчиком повышенной дальности, базовая станция с приемопередатчиком повышенной дальности, ноутбук с программным обеспечением для управления системой связи, лазерный дальномер, стандартные антенны и антенны с двойным коэффициентом усиления (см. рис. 2).

Было проведено две серии экспериментов. В первой серии был использован только алгоритм адаптации порога второго этапа. Точки расположения 1...10 базовой станции в экспериментах показаны на рис. 7. Выходное напряжение логарифмического детектора могло меняться от 0 до 3.3 В. Этому диапазону изменения напряжений на выходе микроконтроллера приемника БС соответствовал диапазон изменения цифровых значений от 0 до 255, среди которых и выбирался порог.

Для проведения измерений было установлено СУ в торце вестибюля здания (рис. 8б). Первоначально БС была установлена в точке 1 (см. рис. 7) на расстоянии 38 м от СУ при наличии прямой видимости между устройствами. Использовались антенны первого типа. Ниже приведены результаты автоматического выбора порога в ходе передачи данных для этого эксперимента:

Порог	145	155	165	154
BER, %	–	0	–	0

Всего в первой группе были произведены измерения для 10 точек расположения базовой станции на расстояниях от 38 до 210 м (рис. 8в, 8г). В экспериментах на расстояниях до 150 м использовали антенны первого типа ( $G_{\text{пер}} = G_{\text{пр}} = 0$  дБ), а на расстояниях больше 150 м – антенны второго типа ( $G_{\text{пер}} =$



**Рис. 8.** Испытания в Сколково: а) здание технопарка (вид сбоку); б) расположение передатчика (СУ); в) зона в Технопарке, по которой перемещалась БС; г) эксперимент при расположении БС в точке 7.

$= G_{пр} = 3$  дБ). Устойчивая связь с  $BER < 3 \times 10^{-5}$  фиксировалась до расстояния 200 м (табл. 2). При экспериментах на расстоянии 210 м первичную инициализацию узла произвести не удалось и связь не была установлена.

После этого было высказано предположение, что дальнейшее увеличение дальности может быть обеспечено, если программными методами решить проблему инициализации СУ. При этом отсутствие инициализации могло быть связано как с тем, что СУ не слышит сигнал БС, так и с тем, что БС с неадаптированным порогом пропускает ответ СУ. Для разрешения этой коллизии во второй серии экспериментов дополнительно к адаптации порога во время передачи данных был использован алгоритм адаптации на этапе инициализации, описанный в разд. 4.

Исследования по определению возможности установления связи и оценкам ее качества во второй серии экспериментов проводили по той же схеме, что и в первой серии. Их результаты на расстояниях от 38 до 200 м лишь в деталях отличались от результатов, полученных в первой серии экспериментов. Однако предельная полученная дальность составила уже не 200 м, а 240 м (см. табл. 4, помимо точек 1...10, связь удалось устано-

вить в точках 11 и 12). Эта экспериментальная точка отмечена на рис. 4. Следует, однако, отметить, что в экспериментах использовалась скважность  $8/3 = 2.67$ , т.е. больше чем на рис. 4а, но меньше чем на рис. 4б.

Использование алгоритма автоматического выбора порога на этапе инициализации положительно сказалось также на увеличении динамического диапазона работы системы по дальности. В первой серии экспериментов наблюдалась неустойчивость в установлении связи на расстояниях менее 5...10 м, что было связано также с нахождением начального порога приемника БС в зоне, где прием сильного сигнала от СУ приводит к ошибкам и препятствует инициализации. Использование алгоритма адаптации при инициализации решает эту проблему. В процессе экспериментов было оценено влияние алгоритма на минимальное расстояние, на котором возможна устойчивая передача данных. Для этого был проведен ряд измерений по передаче данных с уменьшением расстояния между БС и СУ до 1 м. Устойчивая связь при  $BER < 3 \times 10^{-5}$  наблюдалась при уменьшении расстояния вплоть до 2 м по сравнению 5...10 м при измерениях без использования алгоритма адаптации на этапе инициализации.

Таблица 2. Качество связи в точках наблюдения

Номер точки наблюдения	Расстояние от БС до СУ, м	КУ антенны, дБ БС; СУ	Автоматически выбранный порог	BER
1	38	0; 0	155	$(0-2) \times 10^{-5}$
2	55	0; 0	155	$(0-2) \times 10^{-5}$
		0; 0	149	$(1-2) \times 10^{-5}$
3	85	3; 0	150	$(0-1) \times 10^{-5}$
		3; 3	153	$< 10^{-5}$
4	105	3; 3	151	$(0-4) \times 10^{-5}$
5	115	3; 3	152	$< 10^{-5}$
6	130	3; 3	151	$< 3 \times 10^{-5}$
7	150	3; 3	151	$< 3 \times 10^{-5}$
8	170	3; 3	151	$< 3 \times 10^{-5}$
9	200	3; 3	149	$< 3 \times 10^{-5}$
			151	$< 2 \times 10^{-5}$
10	210	3; 3	—	—
11	220	3; 3	150	$< 3 \times 10^{-5}$
12	240	3; 3	150	$< 3 \times 10^{-5}$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача повышения дальности прямохаотических средств СШП-связи. Проанализированы факторы и проведены теоретические оценки характеристик, определяющих радиус действия канала. Разработана конструкция и изготовлены экспериментальные образцы приемопередатчиков с дальностью действия более 200 м. Подготовлено и апробировано программное обеспечение к ним. Проведены экспериментальные исследования созданных устройств, в которых достигнута дальность связи 240 м.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность В.А. Лазареву и М.М. Петросяну за помощь в подготовке и проведении экспериментов.

## ФИНИНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Наука, 2002.
2. *Siviak K., McKeown D.* Ultra-Wideband Technology. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
3. *Арслан Х., Чен Чж. Н., Бенедетто М.* Сверхширокополосная беспроводная связь. М.: Техносфера, 2012.
4. Итоговый отчет по программе “Создание программно-аппаратных средств инфокоммуникационной инфраструктуры для малых населенных пунктов на основе подхода сверхширокополосных беспроводных программно-конфигурируемых сетей”. № Госрегистрации 114122470036. М.: Министерство науки и высшего образования РФ, 2015. [http://fcpir.ru/participation\\_in\\_program/contracts/14.604.21.0036/](http://fcpir.ru/participation_in_program/contracts/14.604.21.0036/)
5. *Дмитриев А.С., Рыжов А.И., Попов М.Г.* // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. (РЭНСИТ). 2018. Т. 10. № 2. С. 313.
6. *Дмитриев А.С., Герасимов М.Ю., Ицков В.В. и др.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 4. С. 354.
7. Процессы передачи и обработки информации в системах со сложной динамикой / Под ред. А.С. Дмитриева и Е.В. Ефремовой. М.: Техносфера, 2019.
8. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, 2-е изд. М.: Вильямс, 2007.
9. *Петрович Н.Т., Размахнин М.К.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Сов. радио, 1969.
10. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
11. *Петрович Н.Т.* Относительные методы передачи информации. М.: Книга, 2003.
12. *Дмитриев А.С., Захарченко К.В., Пузиков Д.Ю.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 3. С. 328.
13. *Кутуза Б.Г., Данильчев М.В., Яковлев О.И.* Спутниковый мониторинг Земли: Микроволновая радиометрия атмосферы и поверхности. М.: Ленанд, 2016.

ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ  
В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

УДК 53.083.2

РЕЗОНАНСНОЕ БЛИЖНЕПОЛЬНОЕ СВЧ-ЗОНДИРОВАНИЕ  
ОЖОГОВЫХ РАН

© 2020 г. А. Г. Галка<sup>a, b, \*</sup>, А. К. Мартусевич<sup>b</sup>, Д. В. Янин<sup>a, b</sup>, А. В. Костров<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Институт прикладной физики РАН,

ул. Ульянова, 46, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

<sup>b</sup>Приволжский исследовательский медицинский университет,

пл. Минина и Пожарского, 10, корп. 1, Нижний Новгород, 603005 Российская Федерация

\*E-mail: galasnn@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.

После доработки 18.02.2020 г.

Принята к публикации 11.03.2020 г.

Рассмотрено развитие метода резонансного ближнепольного СВЧ-зондирования применительно к диагностике ожоговых ран. Разработаны резонансные датчики и развита импедансная модель измерительных систем. Экспериментально установлено, что действительная часть диэлектрической проницаемости ожоговой раны меньше, чем в области интактного участка. Также установлена зависимость электродинамических показателей тканей раны от глубины проникновения ожога, что может быть использовано для экспресс-анализа степени термического поражения.

DOI: 10.31857/S0033849420080033

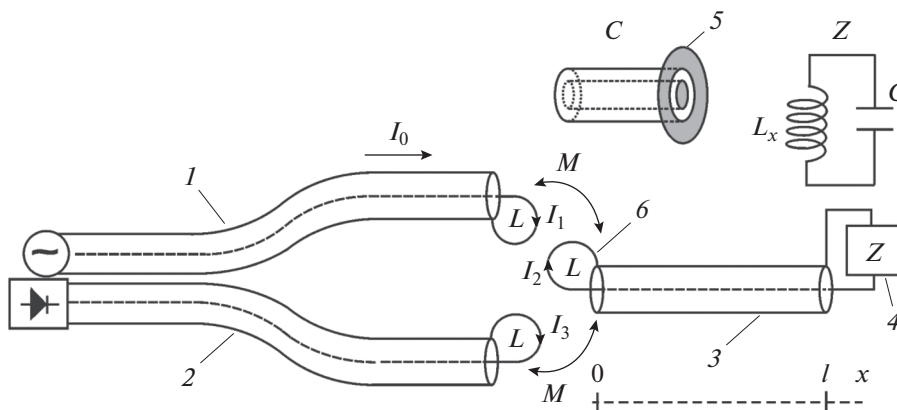
ВВЕДЕНИЕ

На протяжении многих десятилетий ожоги остаются одним из наиболее распространенных видов травм, и тенденции к снижению их частоты до сих пор не наблюдаются. В России ежегодно регистрируется около 500 тысяч случаев термических поражений, в общей структуре травматизма они составляют 6...8% и занимают 3-е место в стране. В настоящее время практически отсутствуют достаточно информативные, неинвазивные и доступные в повседневной практике методы оценки состояния тканей в области ожоговой раны и в околораневой зоне.

Как правило, для нахождения глубины повреждения тканей проводят визуальный осмотр и клинические пробы, при этом результаты зависят от опыта и квалификации врача. Ультразвуковое исследование, компьютерная рентгеновская и магнитно-резонансная томографии практически не используются для диагностики верхних слоев кожи. Применение тепловизионного ИК-исследования позволяет получать информацию о верхних слоях кожи по регистрации инфракрасного излучения, испускаемого поверхностью кожной ткани [1–4]. При этом нижние слои кожи данным методом не лоцируются. С помощью лазерной доплеровской флоуметрии лишь косвенным образом (по показателю микроциркуляции крови) можно оценить глубину проникновения ожога

[5, 6], что недостаточно для полноценного описания состояния раны и окружающих ее тканей.

Следует отметить, что перечисленные высокотехнологичные методы не применимы для повседневного контроля процессов в тканях кожи в силу следующих причин: большая лучевая нагрузка, сложность и дороговизна оборудования, длительность процедур, их высокая стоимость. Известна методика оценки ожогового поражения по измерению проводимости тканей [7], однако она до сих пор не нашла широкого применения на практике. Основной ее недостаток связан с большой площадью электродов, необходимой для снижения переходного сопротивления “электрод–кожа”, и, как следствие, низкая разрешающая способность. В такой системе электрический ток проходит по пути наименьшего сопротивления, а не строго между электродами, отсюда невозможность оценки поражения в ограниченной области. Одним из высокоинформативных методов, позволяющих получать наиболее ценную и полную диагностическую информацию о термической травме, является гистологическое изучение биоптатов пораженных тканей с применением световой микроскопии, а также гистохимических и иммуногистохимических исследований [8, 9]. Однако биопсия инвазивна и применяется в исключительных случаях. Таким образом, имеющиеся данные свидетельствуют о целесообразности и актуальности разработки новых достоверных не-



**Рис. 1.** Схема резонансной ближнепольной измерительной системы: 1 – возбуждающая линия, 2 – приемная линия, 3 – резонатор на отрезке коаксиальной линии, 4 – нагрузка на конце резонатора, 5 – цилиндрический конденсатор, 6 – магнитная рамка резонатора; зондирование среды осуществляется краевым электрическим полем цилиндрического конденсатора.

инвазивных методов для диагностики состояния кожи и подкожных структур при термическом поражении.

В настоящее время одним из перспективных и развивающихся методов диагностики биологических тканей является резонансное ближнепольное СВЧ-зондирование [10]. Данная методика позволяет восстанавливать электродинамические свойства среды без непосредственного физического воздействия. Ее преимущество по сравнению с методами оптического и ИК-диапазонов излучения заключается в возможности исследовать биологические объекты на глубинах до нескольких сантиметров. В работах [11–13] была показана эффективность метода резонансного ближнепольного СВЧ-зондирования для неинвазивной диагностики хронических кожных дерматозов [11], для экспресс-диагностики жизнеспособности органов трансплантатов [12], для неинвазивной диагностики меланомы кожи [13]. Развитие резонансной ближнепольной СВЧ-диагностики в медицинских приложениях обусловлено физиологическим фактом изменения диэлектрической проницаемости и проводимости биологических тканей в области патологии. Электродинамические характеристики среды определяются по измерению импеданса электрически малой антенны (измерительной емкости). Высокая чувствительность метода к малым вариациям комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого объекта достигается за счет резонансного способа измерения импеданса зондирующего элемента. Информацию о внутренней структуре среды можно получить посредством глубинного сканирования тканей квазистатическим электрическим полем системы датчиков с разной глубиной зондирования.

Цель данной работы – дальнейшее развитие метода резонансного ближнепольного СВЧ-зон-

дирования применительно к диагностике тканей при термическом поражении.

## 1. ОПИСАНИЕ ДАТЧИКОВ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ОЖОГОВЫХ РАН

Измерительная система для диагностики ожоговых ран представляет собой высокочастотный СВЧ-резонатор, выполненный на отрезке коаксиальной линии с фторопластовым заполнением (рис. 1). На одном конце резонатора 3 находится магнитная рамка 6 диаметром 0.5 см, к другому подключена нагрузка 4, в состав которой входит зондирующая ближнепольная антенна в виде сменного измерительного аппликатора. Для возбуждения резонатора и приема его отклика использовались две петли магнитной связи диаметром 0.5 см, расположенные вблизи рамки резонатора. Измерительная антенна представляет собой краевую емкость цилиндрического конденсатора длиной 15 мм. Зондирование среды осуществляется краевым полем конденсатора, торец которого прикладывается к поверхности исследуемого объекта. Глубина зондирования такого аппликатора определяется геометрическими параметрами цилиндрической емкости. Использование данной системы позволяет реализовать глубины зондирования от долей миллиметра до нескольких миллиметров, необходимые для изучения ожоговой травмы. Для уменьшения потерь, вносимых средой в резонансную систему, используется так называемое “неполное подключение” нагрузки в резонатор, реализуемое путем параллельного подключения индуктивности  $L_x$  к цилиндрическому конденсатору.

Применительно к диагностике ожоговых ран были разработаны и изготовлены два аппликатора с максимальными глубинами зондирования 3 и



5 мм. Диаметры внутренних проводников цилиндрических конденсаторов были равны соответственно 3,5 и 6 мм, диаметры внешних – 10 и 13 мм. Резонансную частоту датчика порядка 700 МГц выбирали из условия, чтобы масштаб локализации зондирующего электрического поля был меньше глубины скин-слоя (характерной длины затухания зондирующей волны в среде). Добротность датчика составляла 270 и определялась магнитной связью резонатора с приемной 2 и возбуждающей 1 линиями. Наличие исследуемого объекта в области зондирующего поля приводило к сдвигу и уширению резонансной кривой измерительной системы.

Для исключения влияния внешних объектов на показания датчика резонансную измерительную систему помещали в металлический цилиндрический корпус диаметром 4 см. На одном торце металлического цилиндра устанавливали два высокочастотных разъема для подключения возбуждающей и приемной линий к соответствующим петлям связи. С другой стороны с помощью резьбового соединения подключали измерительную емкость с необходимой глубиной зондирования. В качестве источника СВЧ-колебаний в резонаторе использовался высокостабильный (стабильность частоты на уровне  $10^{-6}$ ) свип-генератор в виде быстродействующего синтезатора частот на основе однопетлевой системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Управление генератором осуществлялось программным образом от компьютера. Шаг перестройки частоты 10 кГц. Для регистрации резонансного отклика использовался высокочастотный детектор с входным сопротивлением 50 Ом. За время свипирования 5 мс в частотном диапазоне  $f = 680...710$  МГц регистрировался резонансный отклик датчика. Сигнал с детектора поступал на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП) USB3000 с частотой оцифровки 3 МГц. Данные с АЦП передавались в ПК для дальнейшей обработки. По сдвигу резонансной частоты и уменьшению амплитуды сигнала при резонансе восстанавливались электродинамические параметры исследуемой среды в области ближнеполюсной антенны.

## 2. ИМПЕДАНСНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Для изучения тканей ожоговой раны необходимо построение импедансной модели резонансного датчика. Цель данного теоретического анализа – получить выражение для тока в приемной петле связи, имеющей резонансный характер, которое позволит определить связь резонансной частоты датчика и амплитуды тока при резонансе с комплексной диэлектрической проницаемостью среды.

Теоретическое описание датчика основано на сведении исходной распределенной резонансной системы к эквивалентному ей контуру с сосредоточенными параметрами. Представим исходную измерительную систему в виде трех контуров 1–3, объединенных между собой магнитными связями.

Контур 1, соответствующий передающей линии, состоит из источника колебаний (генератора) и передающей петли связи  $j\omega L$ , соединенных коаксиальным кабелем с волновым сопротивлением  $\rho$ .

Контур 2 соответствует резонатору датчика. Нагрузка  $Z$  на конце резонатора состоит из цилиндрической емкости и индуктивности  $L_x$ , параллельно с ней соединенной:

$$Z = \left( \frac{1}{j\omega L_x} + j\omega C_{\text{кон}} + j\omega C_{\text{изм}}\epsilon \right)^{-1}. \quad (1)$$

Здесь введены обозначения:  $C_{\text{кон}}$  – емкость цилиндрического конденсатора без учета краевой емкости, а  $C_{\text{изм}}$  – измерительная краевая емкость,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость исследуемой среды.

Контур 3, соответствующий приемной линии, состоит из детектирующего устройства с входным сопротивлением  $R$ , равным волновому сопротивлению соединительного кабеля  $\rho$ , и приемной петли связи  $L$ . Импеданс взаимной индукции между контурами 1–2 и 2–3 обозначим  $Z_M = j\omega M$ . Магнитной связью между контурами 1 и 3 будем пренебрегать.

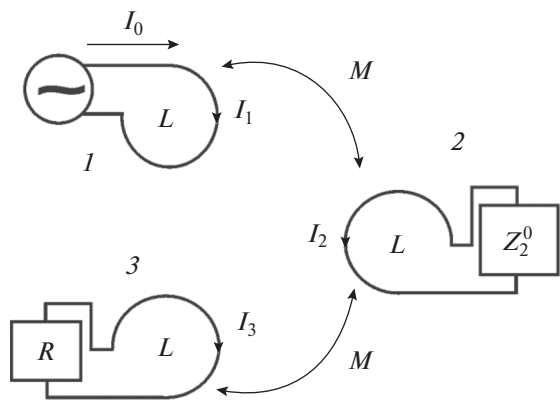
При условии равенства внутреннего сопротивления генератора волновому сопротивлению  $\rho$  соединительного коаксиального кабеля эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами для контура 1 состоит из генератора и магнитной петли связи с импедансом  $j\omega M$ .

Контур с сосредоточенными параметрами, эквивалентный контуру 2, получается пересчетом импеданса  $Z$  по отрезку длиной линии, образующей резонатор, к магнитной рамке резонатора по следующей формуле:

$$Z_2^0 = \rho_0 \frac{Z + j\rho_0 \operatorname{tg}(kl)}{\rho_0 + jZ \operatorname{tg}(kl)}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  – волновое сопротивление линии, образующей резонатор,  $l$  – длина резонатора,  $k = \omega\sqrt{L_n C_n}$  – волновое число ( $\omega = 2\pi f$  – круговая частота генератора,  $L_n, C_n$  – погонная индуктивность и емкость резонатора соответственно). Таким образом, контур 2 представлен импедансом  $Z_2^0$  и индуктивным сопротивлением магнитной рамки резонатора  $j\omega L$ .

Эквивалентная схема приемной линии (контур 3) в соответствии с выражением (2) при  $R = \rho$



**Рис. 2.** Эквивалентная схема измерительной системы:  $L$  – индуктивность магнитных рамок,  $M$  – взаимная индуктивность,  $1-3$  – контуры; магнитная связь между контурами  $1$  и  $3$  не учитывается.

состоит из последовательно соединенных индуктивного сопротивления приемной петли связи  $j\omega L$  и сопротивления  $R$ . Общая эквивалентная схема трех сосредоточенных контуров с магнитными связями изображена на рис. 2.

Для определения тока в приемной петле связи найдем эквивалентное сопротивление  $Z_{вх}$  измерительной системы. Для этого воспользуемся формулой пересчета импеданса через магнитную связь [14]. В общем случае импеданс  $Z_n$  из контура  $b$  в контур  $a$  (рис. 3) пересчитывается следующим образом:

$$Z'_n = -\frac{Z_M^2}{j\omega L_b + Z_n}, \quad (3)$$

где  $Z_M = j\omega M$  – импеданс взаимоиндукции между рамками  $L_a$  и  $L_b$ .

Пересчитаем по формуле (3) сопротивление  $R$  из контура  $3$  в контур  $2$ , учитывая, что  $L_a = L_b = L$ :

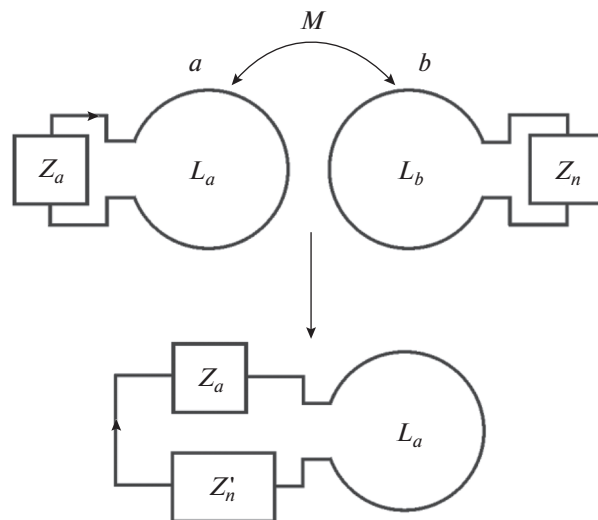
$$R' = -Z_M^2 / (j\omega L + R). \quad (4)$$

Затем последовательно соединенные сопротивления  $R'$  и  $Z_2 = Z_2^0 + j\omega L$  из контура  $2$  пересчитаем в контур  $1$ . После соответствующих подстановок получим выражение для импеданса  $Z_{вх}$  резонансной измерительной системы:

$$Z_{вх} = j\omega L - Z_M^2 / (Z_2 - Z_M^2 / (j\omega L + R')). \quad (5)$$

В соответствии с [15] амплитуда тока в возбуждающей петле  $I_1$  равна:

$$I_1 = I_0(1 - G), \quad (6)$$



**Рис. 3.** Схема пересчета импеданса  $Z_b$  из контура  $b$  в контур  $a$  через магнитную связь  $M$ .

где  $I_0$  – амплитуда падающей волны,  $G$  – коэффициент отражения, причем

$$G = \frac{Z_{вх} - \rho}{Z_{вх} + \rho}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), с учетом (5) получим ток в возбуждающей петле связи:

$$I_1 = 2I_0 \left( 1 + \frac{j\omega L}{\rho} - \frac{Z_M^2}{\rho Z_2 - \rho Z_M^2 / Z_3} \right)^{-1}, \quad (8)$$

где  $Z_3 = j\omega L + R'$ . Для нахождения комплексных амплитуд токов  $I_2, I_3$  запишем уравнения Кирхгофа для контуров  $2$  и  $3$  (рис. 2):

$$\begin{aligned} I_1 Z_M + I_2 Z_2 + I_3 Z_M &= 0, \\ I_2 Z_M + I_3 Z_3 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $I_1 Z_M, I_3 Z_M$  – электродвижущие силы (ЭДС) взаимной индукции, наводимые в резонаторе токами  $I_1$  и  $I_3$  соответственно, а  $I_2 Z_M$  – ЭДС взаимной индукции, наводимая током  $I_2$  в приемной петле связи. Выражая из (9)  $I_2, I_3$ , получим

$$I_2 = -\frac{Z_M}{Z_2 - Z_M^2 / Z_3} I_1, \quad I_3 = \frac{Z_M^2}{Z_2 Z_3 - Z_M^2} I_1. \quad (10)$$

Используя (8), преобразуем (10) к следующему виду:

$$I_3 = \frac{I_0}{(1 + j\omega L / \rho) (0.5 Z_2 Z_M^{-2} (\rho + j\omega L) - 1)}, \quad (11)$$

где  $Z_2$  зависит от импеданса измерительной емкости  $Z$ .

Выражения (8) и (11) справедливы как при сильной связи резонатора с линиями возбуждения и приема сигнала ( $M \sim L$ ), так и при слабой ( $M \ll L$ ).

Наличие исследуемой среды с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  в области зондирующего поля измерительной емкости приводит к изменению нагрузки на конце резонатора:

$$Z(\epsilon) = Z_0 + Z_1, \quad (12)$$

где  $Z_0$  – импеданс нагрузки, когда датчик не приведен в контакт с исследуемой средой, а  $Z_1$  – малая добавка к импедансу, появляющаяся при наличии среды, причем  $|Z_1|/\rho \ll 1$ . На частотах  $\omega = \omega_0(1 + \delta)$ , близких к собственной резонансной частоте  $\omega_0$ , когда  $|\delta| \ll 1$ , представим ток  $I_3$  в виде асимптотического ряда по малому параметру  $\alpha = \max(|\delta|, |Z_1|/\rho, j\omega L/\rho)$ :  $I_3 = I_3^0 + I_3^1 + \dots$ , где  $I_3^i$  – члены асимптотического ряда. В нулевом порядке малости по параметру  $\alpha$  получим уравнение для тока в приемной петле в отсутствие контакта датчика со средой:

$$I_3 = -I_0 \left( 1 + j \frac{\rho \omega_0 L}{2(M\omega_0)^2} + \frac{\rho \rho_0}{2(M\omega_0)^2} \frac{Z_0 + \rho_0 \operatorname{tg}(k_0 l)}{\rho_0 + jZ_0 \operatorname{tg}(k_0 l)} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где  $k_0$  – волновое число для распространяющейся вдоль отрезка длинной линии, образующей резонатор, электромагнитной волны на частоте  $\omega_0$ . Для коаксиального резонатора с диэлектрическим заполнением  $\epsilon_{\text{фрт}}$  величина  $k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_{\text{фрт}}}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Резонансную частоту ненагруженного датчика  $\omega_0$  найдем из условия максимальной амплитуды выходного сигнала  $\max |I_3|$ , которое выполняется при равенстве нулю суммы второго и третьего слагаемых в знаменателе выражения (13):

$$\omega_0 \frac{L}{\rho_0} + \frac{\operatorname{Im}(Z_0) + \rho_0 \operatorname{tg}(k_0 l)}{\rho_0 - \operatorname{Im}(Z_0) \operatorname{tg}(k_0 l)} = 0. \quad (14)$$

В первом порядке малости по параметру  $\alpha$  получим

$$I_3 = -I_0 \left( 1 + j \frac{\rho \omega_0 L}{2(M\omega_0)^2} \delta + \frac{\rho \rho_0}{2(M\omega_0)^2} \times \left[ jk_0 l \delta \left( (\omega_0 L/\rho_0)^2 + 1 \right) + \frac{Z_1 (\omega_0 L \operatorname{tg}(k_0 l) + \rho_0)}{\rho_0 + jZ_0 \operatorname{tg}(k_0 l)} \right] \right)^{-1}. \quad (15)$$

Выражение для квадрата модуля  $I_3$ , пропорционального мощности принимаемого сигнала

на детектирующем устройстве, имеет следующий вид:

$$|I_3|^2 = \frac{I_0^2}{(1 + B \operatorname{Re} Z_1)^2 + A^2 (V\delta + \rho_0 B \operatorname{Im} Z_1)^2}, \quad (16)$$

где

$$A = \frac{\rho}{2(M\omega_0)^2}, \quad B = \frac{\omega_0 L \operatorname{tg}(k_0 l) + \rho_0}{\rho_0 + \operatorname{Im} Z_0 \operatorname{tg}(k_0 l)}, \\ V = \omega_0 L + \rho_0 k_0 l.$$

Выражение (16) описывает резонансную характеристику измерительной системы. Относительный сдвиг резонансной частоты датчика  $\delta$  и амплитуда тока выходного сигнала  $\max |I_3|$  на резонансной частоте зависят от поправки к импедансу  $Z_1$  зондирующей антенны и в соответствии с (16) определяются выражениями

$$\delta = -\frac{\rho_0 B \operatorname{Im} Z_1}{\omega_0 L + \rho_0 k_0 l}, \quad (17)$$

$$\max |I_3| = \frac{I_0}{1 + B \operatorname{Re} Z_1}. \quad (18)$$

Собственная добротность измерительной системы ( $Z_1 = 0$ ) определяется шириной резонансной кривой по уровню 1/2:

$$Q = \frac{A^2}{4} (\omega_0 L + \rho_0 k_0 l)^2. \quad (19)$$

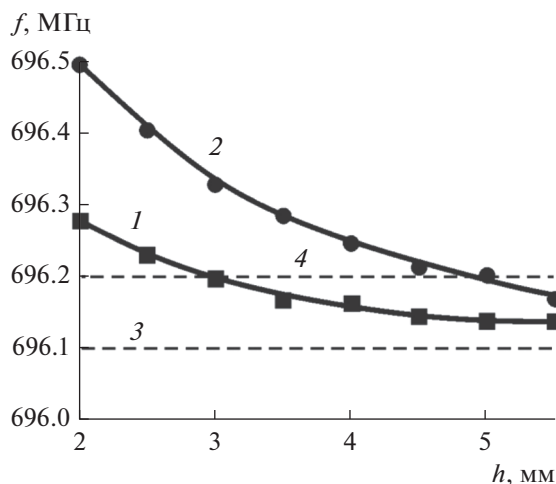
Для получения выражений, связывающих относительный сдвиг резонансной частоты  $\delta$  и амплитуду сигнала при резонансе  $\max |I_3|$  с комплексной диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ , в соответствии с (1) и (12), запишем выражение для  $Z_1(\epsilon, \omega)$  в виде:

$$Z_1(\epsilon, \omega) = Z(\epsilon, \omega_0(1 + \delta)) - Z_0 = \\ = \left( \frac{1}{(1 + \delta)Z_x} + \frac{(1 + \delta)}{Z_{\text{кон}}} + \frac{(1 + \delta)\epsilon}{Z_{\text{изм}}} \right)^{-1} - \\ - \left( \frac{1}{Z_x} + \frac{1}{Z_{\text{кон}}} + \frac{1}{Z_{\text{изм}}} \right)^{-1}, \quad (20)$$

где введены обозначения:  $Z_x = j\omega_0 L_x$ ,  $Z_{\text{кон}} = 1/(j\omega_0 C_{\text{кон}})$ ,  $Z_{\text{изм}} = 1/(j\omega_0 C_{\text{изм}})$ . Считая  $\delta \ll 1$ , разложим  $Z_1$  по параметру  $\delta$  до первого порядка малости:

$$Z_1 = (1 - \delta)Z_0 \left( 1 - \frac{2\delta Z_0}{Z_x} + \frac{Z_0(\epsilon - 1)}{Z_{\text{изм}}} \right)^{-1} - Z_0. \quad (21)$$

При дополнительном ограничении на измеряемые значения диэлектрической проницаемости



**Рис. 4.** Резонансная частота датчика в зависимости от глубины залегания тefлонового параллелепипеда в спирту: 1 – для аппликатора с глубиной зондирования 3 мм; 2 – для аппликатора с глубиной зондирования 5 мм; 3 – резонансная частота  $f = f_s$  аппликаторов при бесконечном удалении тefлонового параллелепипеда, 4 – линия, сдвинутая на 100 кГц вверх по частоте относительно  $f_s$ ; точки – экспериментальные данные, сплошная кривая – аппроксимация.

$|Z_0(\epsilon - 1)/Z_{\text{изм}}| \ll 1$  после соответствующих преобразований, получим

$$Z_1 = j(\epsilon' - j\epsilon'' - 1) \frac{(\text{Im } Z_0)^2}{\text{Im } Z_{\text{изм}}} - j \text{Im } Z_0 \delta \left( 1 - 2 \frac{\text{Im } Z_0}{\text{Im } Z_x} \right). \quad (22)$$

Выделим действительную и мнимую части  $Z_1$ :

$$\begin{aligned} \text{Re } Z_1 &= \epsilon'' \frac{(\text{Im } Z_0)^2}{\text{Im } Z_{\text{изм}}}, \\ \text{Im } Z_1 &= (\epsilon' - 1) \frac{(\text{Im } Z_0)^2}{\text{Im } Z_{\text{изм}}} - \text{Im } Z_0 \delta \left( 1 - 2 \frac{\text{Im } Z_0}{\text{Im } Z_x} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Сопоставляя эти выражения с (17) и (18), окончательно получим

$$\epsilon' = 1 + a_1 \delta, \quad \epsilon'' = a_2 (I_0 / \max |I_3| - 1). \quad (24)$$

В выражениях (24) неизвестные коэффициенты  $a_1, a_2$  находятся путем калибровки, суть которой состоит в измерении  $\delta$  и  $\max |I_3|$  при контакте датчика со средой с известной комплексной диэлектрической проницаемостью (например, спирт).

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СВЧ-ЗОНДИРОВАНИЯ ОЖОГОВЫХ РАН

Основным параметром резонансного датчика является глубина зондирования. Глубина зондирования в среде  $h_{\text{зонд}}$  определяется размером об-

ласти локализации зондирующего электростатического поля ближнепольной антенны. Электродинамические свойства среды этой области оказывают влияние на ее импеданс, а все элементы вне этого пространства вносят пренебрежимо малый вклад, т.е. находятся за пределами чувствительности датчика. Глубину зондирования можно измерить путем изменения расстояния от датчика до некоторого инородного включения, расположенного в однородной среде. Очевидно, что при фиксированной геометрии зондирующего элемента глубина зондирования  $h_{\text{зонд}}$  будет зависеть от контрастности диэлектрической проницаемости неоднородности. В экспериментах по определению глубины зондирования в качестве однородной среды использовался спирт, по своим диэлектрическим свойствам близкий к биологической ткани. В качестве инородного включения был выбран прямоугольный параллелепипед из тefлона с поперечными размерами, превосходящими размеры измерительного аппликатора примерно в три раза. Поскольку значения диэлектрической проницаемости спирта и кожи близки, а тefлоновая неоднородность в спирту имеет высокий контраст, результаты измерений позволяют найти максимальную глубину зондирования в биологической ткани.

При удалении измерительного аппликатора, находящегося в спирту, от тefлонового параллелепипеда фиксировалась резонансная частота датчика  $f$  в зависимости от его расстояния до верхней плоскости диэлектрика  $h$ . При большом удалении кривая  $f(h)$  переставала изменяться, приближаясь к постоянному значению  $f_s$ , соответствующему однородному полупространству, заполненному спиртом. Ошибка измерения частоты в эксперименте составляла порядка  $\Delta f_{\text{error}} = 10$  кГц. Введем понятие глубины зондирования  $h_{\text{зонд}}$  как расстояние  $h$ , начиная с которого собственная частота  $f$  отличается от  $f_s$  не более чем на  $10\Delta f_{\text{error}} = 100$  кГц. На рис. 4 приведены зависимости  $f$  от  $h$  для двух сменных аппликаторов. Экспериментально измеренные глубины зондирования  $h_{\text{зонд}}$  составляли 3 и 5 мм.

Для экспериментальной апробации метода резонансного ближнепольного СВЧ-зондирования ожоговых тканей был обследован 31 пациент с различными ожогами, в том числе мужчин – 21, женщин – 10. Все пациенты подписали Информированное согласие на участие в исследованиях. Программа эксперимента была одобрена и утверждена Локальным этическим комитетом ФГБОУ ВО «ПИМУ» Минздрава России. Среди всей группы обследуемых больных 8 пациентов имели первую степень ожога с поверхностным поражением кожи, у 16 человек наблюдалась вторая степень с глубоким ожогом без повреждения росткового слоя кожи, и 7 пациентов имели тре-

**Таблица 1.** Действительная и мнимая части усредненной диэлектрической проницаемости  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  ткани ожоговой раны I степени нижней конечности на глубинах зондирования датчиков 3 и 5 мм в различных участках раневой поверхности

Область сканирования раневой поверхности	Комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon$	
	$h_{\text{зонд}} = 3 \text{ мм}$	$h_{\text{зонд}} = 5 \text{ мм}$
Интактный участок	$33 - j3.8$	$49 - j6.1$
Граница ожога	$24 - j4.1$	$38 - j8.2$
Центр ожога	$18 - j5.3$	$30 - j10.7$

тью степень ожога с повреждением росткового слоя кожи.

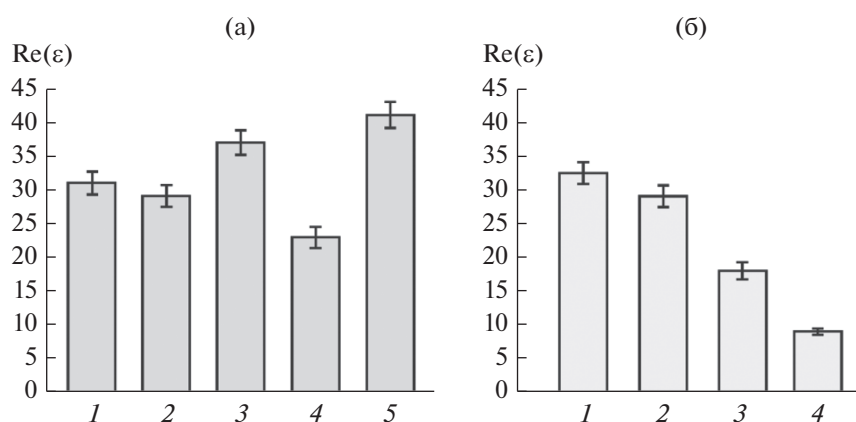
Большинство пациентов (71%) имели термические поражения конечностей. По глубине поражения наблюдалось преобладание ожогов II степени (51.6%), характеризующихся достаточно глубоким нарушением целостности и структуры покровных тканей в месте ожога, но с возможностью его самостоятельного восстановления.

Диэлектрические свойства ожоговой раны изучались в трех точках путем перемещения датчика вдоль поверхности кожи: интактный участок (непораженный участок тела); участок на границе здоровой кожи и ожоговой раны; центр ожога. Проведенные исследования позволили установить, что действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости ткани ожоговой раны  $\epsilon'$  на глубинах зондирования датчиков значительно меньше, нежели в области интактного участка (табл. 1), причем снижение менее выражено в краевой зоне и максимально – в центральной части области поражения. Диэлектрические параметры биологических тканей, измеренные двумя датчиками с максимальными глубинами зондирования 3 и 5 мм, различаются, что может быть объяснено тем, что структура кожи меняется в зависимости от глубины.

Напротив, по соотношению мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$  интактного и обожженного участков покровных тканей выявлена обратная динамика: значение  $\epsilon''$  прогрессивно нарастает от непораженного участка к краевой и центральной зонам раны (см. табл. 1). Подобное распределение диэлектрических свойств ожоговой раны обусловлено как изменением структуры биологической ткани, так и изменением степени их гидратации [16].

Кроме того, датчиком с максимальной глубиной зондирования 5 мм была измерена действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости покровных тканей при локализации ожога в различных участках тела. Обнаружено, что наиболее высокое значение этого параметра имеет место при локализации ожога в области туловища и промежности, что обусловлено более высоким содержанием в них жидкостных структур, а наиболее низкое – в области головы и шеи, промежуточные положения между ними занимают ожоговые раны, полученные на конечностях.

Также была установлена зависимость между  $\epsilon'$  и глубиной полученного термического поражения (рис. 5). Установлено, что с углублением ожога данный параметр прогрессивно снижается, достигая минимальных значений при наиболее тяжелых



**Рис. 5.** Действительная часть усредненной диэлектрической проницаемости, измеренной датчиком с максимальной глубиной зондирования 3 мм при ожоге I степени (а): 1 – верхняя конечность, 2 – нижняя конечность, 3 – туловище, 4 – область головы и шеи, 5 – промежность; при ожогах I–III степени нижней конечности (б): 1 – интактный участок, 2 – ожог I степени, 3 – ожог II степени, 4 – ожог III степени.

поражениях (III степень – ожог с поражением костно-мышечных элементов опорно-двигательного аппарата). Это связано с соответствующим снижением количества водного компонента в тканях при утяжелении травмы.

Результаты показывают перспективы применения метода резонансного ближнепольного СВЧ-зондирования в биомедицинской диагностике кожи и ее нарушений, возникающих в условиях ожога. Однако реализовать его диагностический потенциал в полной мере можно только посредством восстановления глубинного профиля комплексной диэлектрической проницаемости тканей кожи. Это наиболее актуально для определения глубины и объема термической травмы, что принципиально необходимо для выбора тактики лечения. В рамках дальнейшей работы предполагается разработать математический аппарат ближнепольной СВЧ-томографии, численные алгоритмы его реализации и провести экспериментальную апробацию на биологических тканях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрированы перспективы развития метода ближнепольной резонансной СВЧ-диагностики применительно к зондированию ожоговых ран. При такой диагностике основным источником информации о поверхностной структуре исследуемого объекта служит импеданс ближнепольных антенн, включенных в качестве нагрузки в резонансную систему. В рамках данного исследования разработаны и изготовлены резонансные СВЧ-датчики с максимальными глубинами зондирования 3 и 5 мм. Зондирование среды осуществлялось краевой емкостью цилиндрического конденсатора. Для восстановления диэлектрической проницаемости и проводимости исследуемой среды по резонансному отклику датчика развита импедансная модель измерительной системы. С помощью сконструированных датчиков измерена комплексная диэлектрическая проницаемость тканей кожи в области термической травмы различных участков тела. Экспериментально установлено, что действительная часть диэлектрической проницаемости на указанных глубинах зондирования ожоговой раны значительно меньше, нежели в области интактного участка. Также установлена зависимость электродинамических показателей раны от глубины проникновения ожога, что может быть использовано для экспресс-анализа степени термического поражения. Важно отметить, СВЧ-зондирование может быть реализовано без снятия раневых покрытий. Данному направлению будут посвящены дальнейшие исследования.

## СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ НОРМ

Все процедуры, выполненные в исследованиях с участием человека, соответствовали этическим стандартам учреждения, в котором проводились исследования, и утвержденным правовым актам Российской Федерации и международных организаций.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания НИР Министерства здравоохранения Российской Федерации (2018–2020 гг.), а также при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (стипендии Президента РФ молодым ученым и аспирантам (Галка А.Г.), СП-471.2019.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-42-520053 p\_a).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрипаль А.В., Сагайдачный А.А., Усанов Д.А. Тепловизионная биомедицинская диагностика: Учеб. пособие Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009.
2. Колесов С.Н., Воловик М.Г. // Оптик. журн. 2013. Т. 80. № 6. С. 59.
3. Мартусевич А.К., Ларионова К.Д., Перетягин С.П. и др. // Фундаментальные исслед. 2013. № 3. С. 332.
4. Турчин И.В. // Успехи физ. наук. 2016. Т. 186. № 5. С. 550.
5. Крылов К.М., Юрова Ю.В., Крылов П.К., Орлова О.В. // Скорая мед. помощь. 2017. № 1. С. 29.
6. Ida T., Iwazaki H., Kawaguchi Y. et al. // Wound Repair Regen. 2016. V. 24. № 2. P. 349.
7. Лаврешин П.М., Владимирова О.В., Гобеджишвили В.К. Термические и химические повреждения. Электротравма: Учеб. пособие. Ставрополь: Изд-во СтГМУ, 2017.
8. Петров С.В., Райхлин Н.Т. Руководство по иммуногистохимической диагностике опухолей человека. Казань: Титул, 2004.
9. Gogly B., Godeau G., Gilbert S. // Clinical Oral Investigation. 1997. V. 1. № 3. P. 147.
10. Янин Д.В., Галка А.Г., Костров А.В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2014. Т. 57. № 1. С. 35.
11. Yanin D.V., Galka A.G., Kostrov A.V. et al. // EPJ Web Conf. 2018. V. 195. № 8. P. 08007.
12. Янин Д.В., Галка А.Г., Смирнов А.И. и др. // Успехи прикл. физики. 2014. Т. 2. № 6. С. 555.
13. Янин Д.В., Галка А.Г., Смирнов А.И. и др. // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/3/text.pdf>.
14. Кугушев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники (Линейные электромагнитные процессы). М.: Энергия, 1969.
15. Баскаков С.В. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. М.: Высш. шк.; 1980.
16. Седунов Б.И., Франк-Каменецкий Д.А. // Успехи физ. наук. 1963. Т. 79. № 4. С. 617.

УДК 537.67

## ИНЖЕКЦИОННАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ СПИНОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В МАГНИТНОМ ПЕРЕХОДЕ С УЧЕТОМ СПИНОВОЙ ПОДВИЖНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2020 г. Е. А. Вилков<sup>а</sup>, \*, С. А. Никитов<sup>а</sup>, О. А. Бышевский-Конопко<sup>а</sup>,  
А. Р. Сафин<sup>б</sup>, Л. А. Фомин<sup>с</sup>, С. Г. Чигарев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup>Национальный исследовательский университет “МЭИ”,  
ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250 Российская Федерация

<sup>с</sup>Институт проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов РАН,  
ул. Институтская, 6, Черноголовка Московской обл., 142432 Российская Федерация

\*E-mail: e-vilkov@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.

После доработки 29.10.2019 г.

Принята к публикации 25.11.2019 г.

С учетом спиновой подвижности электронов рассмотрено численное решение уравнения для неравновесной спиновой поляризации на границе магнитного контакта с током, образованного двумя ферромагнетиками. Рассчитаны частоты спин-инжекционного излучения. Показано, что при определенной плотности тока, превышающей пороговое значение, эти частоты лежат в терагерцовом диапазоне частот. При этом установлено, что для одного и того же терагерцового диапазона частот даже при небольших значениях разности подвижности электронов со спином вверх и вниз плотность тока может быть на два порядка меньше, чем плотность тока при одинаковой подвижности.

DOI: 10.31857/S0033849420080148

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время магнитные нанопереходы между двумя магнетиками с протекающим по ним спин-поляризованным током являются одними из интересных объектов исследований [1–11], что связано с перспективами их применений в терагерцовой спинтронике [12], в трехмерных наноманитных устройствах [13], в запоминающих устройствах и сенсорах [14]. Спиновая инжекция током через нанокontakt двух магнетиков может приводить к значительному неравновесному накоплению спина в области непосредственно вблизи контакта. В частности, может возникать инверсная заселенность спиновых подзон ферромагнетика, в который инжектируются неравновесные по спину горячие электроны. При этом возможны излучательные спин-флип-переходы электронов проводимости, которые стимулированы опосредованно через  $s-d$ -обменное взаимодействие с электромагнитной волной [15, 16]. Частота излучения при таких переходах определяется энергией эффективного обменного расщепления спиновых подзон и лежит в терагерцовом диапазоне [15], который весьма привлекателен для практического применения.

Сравнительно недавно нами [15] было получено уравнение для неравновесной спиновой поляризации на границе магнитного контакта с током, образованного двумя ферромагнетиками, и оценена частота спин-флип-перехода между неравновесными квазиуровнями Ферми с учетом непрямых электронных переходов. Показано, что при определенной плотности тока, превышающей пороговое значение, эта частота лежит в терагерцовом диапазоне частот. Однако в этой и других работах [17–19] всегда полагалось, что подвижности электронов с противоположным направлением спина равные, хотя известно, что в ферромагнетиках, как правило, подвижности отличаются друг от друга [3, 4]. Это приближение, возможно, является причиной несоответствия теоретических и экспериментальных значений порогового тока при регистрации терагерцового излучения [15].

Цель данной работы – проверить это предположение. Для этого было получено и решено численно уравнение для неравновесной спиновой поляризации в магнитном переходе с учетом разной подвижности электронов проводимости. Решение данной задачи важно как с теоретической,

так и с практической точек зрения, поскольку оно позволяет более корректно описывать спиновую инжекцию в магнитных металлических переходах и определять частоту спин-инжекционного излучения с учетом не прямых межподзонных излучательных переходов электронов.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ СПИНОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотрим случай, когда электрический ток протекает через границу однородных ферромагнетиков, векторы намагниченности которых (они же соответствуют осям квантования в разных средах) образуют некоторый угол рассогласования  $\varphi$ . Будем считать, что между слоями ферромагнетиков нанесен сверхтонкий буферный слой (диэлектрик или немагнитный металл), устраняющий обменную связь между ними. Введем обозначения:  $P_1$  – равновесная спиновая поляризация инжектора (ферромагнетик, из которого инжектируются спин-поляризованные электроны),  $P_2$  – равновесная спиновая поляризация рабочей области (ферромагнетик, в который инжектируются спин-поляризованные электроны). Пусть электрический ток протекает вдоль оси  $x$  через границу ферромагнетиков. Для упрощения будем считать, что плотность электрического тока не меняется ( $j = \text{const}$ ) как по поперечному сечению магнитного контакта, так и вдоль оси  $x$ , нормальной к его плоскости. Предположим также, что в обоих спиновых подзонах носители тока рабочей области имеют разные подвижности и коэффициенты диффузии:

$$\mu_- \neq \mu_+, \quad D_- \neq D_+, \quad (1)$$

где знаки “+” и “-” означают, что направление спина электрона проводимости сонаправленно или противоположно направлению намагниченности рабочей области соответственно.

Из уравнения движения магнитного момента  $\vec{\mu}$  неравновесных электронов [20] в стационарных условиях ( $\partial \vec{\mu} / \partial t = 0$ ) можно получить следующее уравнение [21]:

$$\nabla J_s(x) = -\mu_B \frac{P(x) - P_2}{\tau}, \quad (2)$$

где  $\tau$  – время продольной спиновой релаксации,  $\mu_B$  – магнетон Бора,

$$J_s(x) = \frac{\mu_B}{en} [j_+(x) - j_-(x)] \quad (3)$$

– плотность спинового потока ( $e$  – заряд электрона,  $n$  – концентрация электронов проводимости,  $j_{\pm}$  – парциальные плотности электрического (зарядового) тока).

При наличии электрического поля  $E(x)$  и градиентов парциальных концентраций возникают

парциальные плотности электрического (зарядового) тока, определяемые соотношением

$$j_{\pm} = e\mu_{\pm}n_{\pm}(x)E(x) - eD_{\pm} \frac{dn_{\pm}}{dx}, \quad (4)$$

где  $\mu_{\pm}$  и  $D_{\pm}$  – соответственно парциальные подвижности и коэффициенты диффузии электронов.

Полная плотность тока  $j = j_+(x) + j_-(x)$  в стационарном состоянии не зависит от  $x$ . Выражая  $E(x)$  через  $j$ , получим с учетом (1), (2) для плотности спинового потока

$$J_s(x) = (\mu_B/en)\{Q(P)j - enD(P)\nabla P\}, \quad (5)$$

где

$$Q(P) = \frac{\mu_+ - \mu_- + (\mu_+ + \mu_-)P}{\mu_+ + \mu_- + (\mu_+ - \mu_-)P}, \quad (6)$$

$$D(P) = \frac{\mu_+D_- + \mu_-D_+ + (\mu_+D_- - \mu_-D_+)P}{\mu_+ + \mu_- + (\mu_+ - \mu_-)P}.$$

Подстановка (5), (6) в (2) с учетом условия сохранения электрического заряда  $\nabla \vec{j} = 0$  дает уравнение, описывающее неравновесную спиновую поляризацию в магнитном переходе:

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2P}{dx^2}\{(\mu_+D_- + \mu_-D_+)(\mu_+ + \mu_-) + \\ & + 2P(\mu_+^2D_- - \mu_-^2D_+) + (\mu_+ - \mu_-)(\mu_+D_- - \mu_-D_+)P^2\} + \\ & + \frac{dP}{dx} \frac{j}{en} 2(\mu_+ + \mu_-) + 2\mu_+\mu_-(D_+ - D_-) \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \\ & + (\mu_+ + \mu_-)^2 \frac{(P - P_2)}{\tau} + 2(\mu_+^2 - \mu_-^2) \times \\ & \times \frac{(P^2 - P_2P)}{\tau} + (\mu_+ - \mu_-)^2 \frac{(P^3 - P_2P^2)}{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tau$  – время релаксации спинов, усредненное по всем спином.

Проводимость и коэффициент диффузии свободных электронов в металле связаны соотношением  $\sigma_{\pm} = e^2D_{\pm}g_{\pm}$  [22], согласно которому коэффициент диффузии запишем в виде

$$D_{\pm} = \sigma_{\pm} / e^2g_{\pm}, \quad (8)$$

где параметры  $g_{\pm}$  обозначают плотности состояний на уровнях Ферми. Учитывая, что  $\sigma_{\pm} = en_{\pm}\mu_{\pm}$ , получим из уравнения (8) следующее выражение:

$$D_{\pm} = n_{\pm}\mu_{\pm} / eg_{\pm}. \quad (9)$$

В дальнейших преобразованиях примем, что разница в коэффициентах диффузии для электронов с разным направлением спинов определяется только разностью подвижностей, т.е. мы принимаем следующее равенство:

$$n_+/g_+ = n_-/g_-. \quad (10)$$



Равенство (10) вполне допустимо, учитывая, что плотность состояний на уровне Ферми определяется по формулам

$$\begin{aligned} g_+(E) &= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} V \sqrt{E_f}, \\ g_-(E) &= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} V \sqrt{E_f + 2I_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку энергия Ферми много больше, чем обменная энергия  $E_f \gg 2I_2$ , то из (11) следует, что  $g_-(E) \approx g_+(E)$ . Соответственно, число электронов с разным направлением спина, участвующих в процессах переноса (вблизи уровня Ферми) и определяемых через (11) как  $n_+ \approx g(\epsilon_{F_+})\Delta\epsilon$ ,  $n_- \approx g(\epsilon_{F_-} + 2I_2)\Delta\epsilon$ , приблизительно равно (различно, но не существенно). Вводим обозначение  $b$  – константы отношения подвижностей  $b = \mu_-/\mu_+$ . Тогда исходное уравнение (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dx^2} \{b(1+b) + (-b+1)P\} - \frac{dP}{dx} \frac{j}{j_D l} b - \\ - \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 b(1-b^2) - \frac{(P-P_2)}{2I^2} (1+b)^2 - \\ - (1-b^2) \frac{(P^2 - P_2P)}{I^2} - (1-b)^2 \frac{(P^3 - P_2P^2)}{I^2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где мы ввели обозначения:  $l = \sqrt{D_+}\tau$  – длина спиновой релаксации для электронов со спином по направлению намагниченности,  $j_D = enD_+/l$  – плотность тока, по порядку величины совпадающая с плотностью тока диффузии  $j_D^* = enD/l = enl/\tau$  при  $D_- = D_+ = D$  [15].

Предположим теперь, что в обоих спиновых подзонах носители тока имеют одинаковые подвижности и коэффициенты диффузии,  $\mu_- = \mu_+ = \mu$ ,  $D_- = D_+ = D$ , т.е.  $b = 1$ . В этом случае уравнение (12), описывающее неравновесную спиновую поляризацию, значительно упрощается и имеет вид [15]

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{j}{j_D^*} \frac{dP}{dx} - \frac{P - P_2}{I^2} = 0. \quad (13)$$

Из условия непрерывности спинового потока (6) на границе между двумя ферромагнетиками [15] запишем граничное условие:

$$\begin{aligned} J_s(0) &= \frac{\mu_B}{en} \{jQ(P)|_{x=0} - enD(P)\nabla P|_{x=0}\} = \\ &= \frac{\mu_B}{en} P_1 j \cos \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Равенство (14) записано для случая, когда спиновая поляризация инжектора остается неизменной

величиной или возмущается крайне слабо. Как показано в работе [15], данное условие выполняется при подборе соответствующих материалов. При этом, влиянием отраженного от границы потока электронов на спиновую поляризацию прошедших в рабочую область электронов можно пренебречь. Из формулы (14) с учетом формул (8)–(11) получим выражение

$$\begin{aligned} P(0) &= \\ &= \frac{(b-1) + P_1(1+b) \cos \varphi + 2bl(j_D/j)(\partial P/\partial x)|_{x=0}}{(1+b) + (b-1)P_1 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для получения в явном виде выражения для  $P(0)$  примем следующее приближение:

$$(\partial P/\partial x)|_{x=0, b \neq 1} \approx (\partial P/\partial x)|_{x=0, b=1}. \quad (16)$$

Такое допущение в первом приближении позволяет оценить граничные значения спиновой поляризации в зависимости от соотношения подвижностей. Таким образом, учитывая, что [15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0} &= \lambda_1 \frac{j}{j_D} \frac{P_1 \cos \varphi - P_2}{(j/j_D) - \lambda_1 l}, \\ \lambda_1 &= \frac{j}{2j_D l} - \sqrt{\left(\frac{j}{2j_D l}\right)^2 + \frac{1}{l^2}} \quad \text{при } b = 1, \end{aligned}$$

получим первое граничное условие в виде

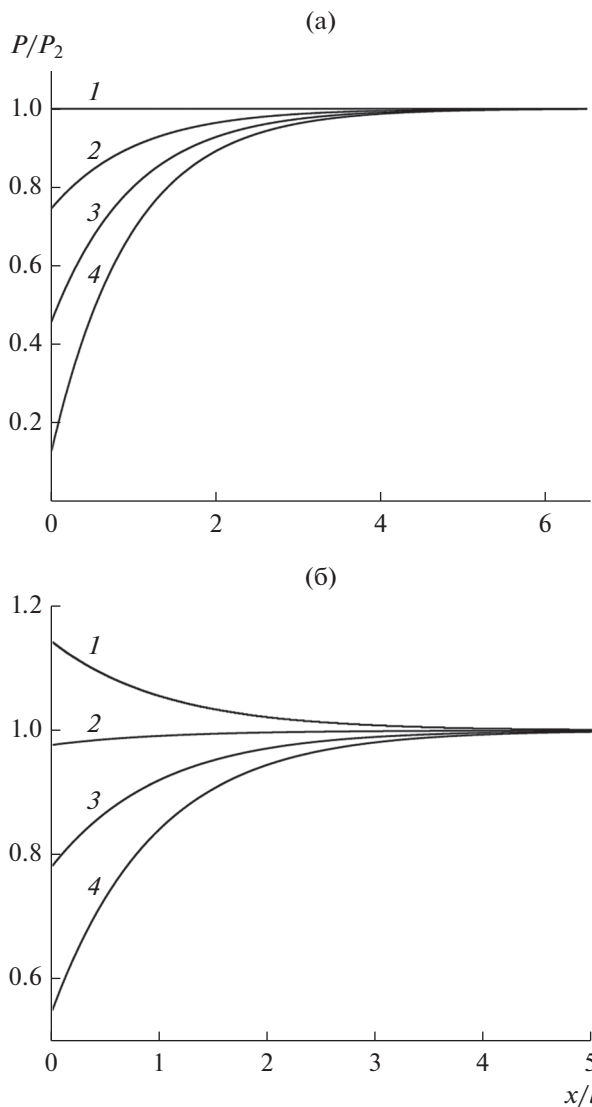
$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{(b-1) + P_1(1+b) \cos \varphi + 2bld}{(1+b) + (b-1)P_1 \cos \varphi}, \\ d &= \frac{P_1 \cos \varphi - P_2}{(j/j_D) - \lambda_1 l}. \end{aligned} \quad (17)$$

Второе граничное условие очевидно:

$$P(\infty) = P_2. \quad (18)$$

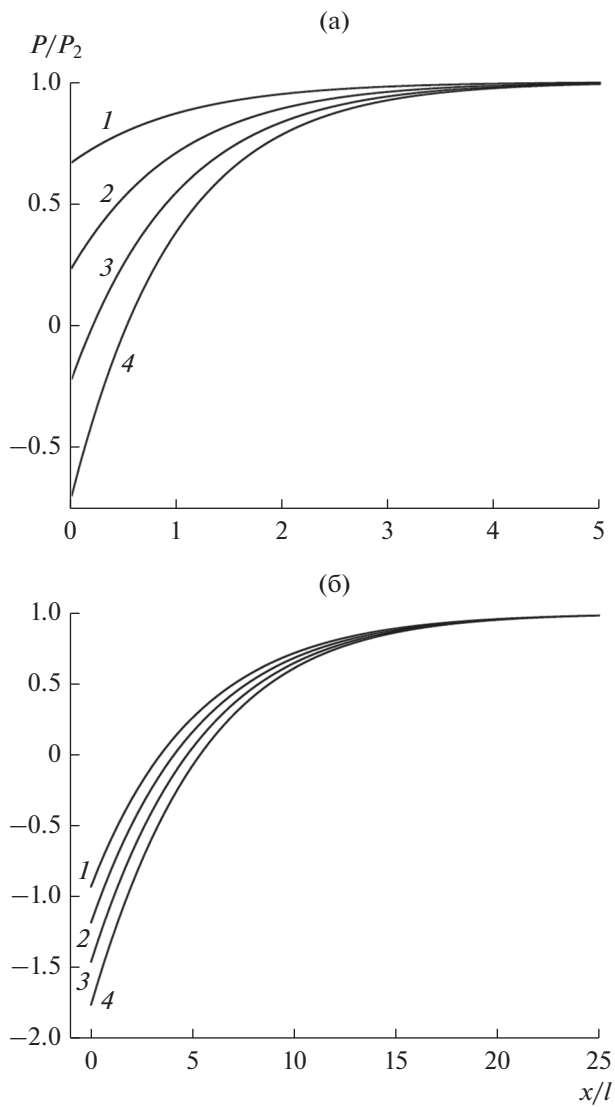
Кроме того, при расчете мы предполагали, что в области магнитного перехода (определяется длиной спиновой релаксации) подвижность электронов с направлением спина вдоль намагниченности выше, чем подвижность электронов с противоположным направлением спина. Это предположение основано на хорошо известном явлении – магнитосопротивлении [4], когда электроны с направлением спина против направления намагниченности ферромагнетика испытывают дополнительное сопротивление их движению через контакт магнитного перехода, т.е. их подвижность значительно меньше. Таким образом, число неравновесных электронов в рабочей области около контакта слоев магнитного перехода должно расти за счет неравенства подвижностей. Это подтверждается результатами численного расчета уравнения (12), показанных на рис. 1 и 2.

Из рис. 1 и 2 видно, что при различных углах  $\varphi$  между намагниченностями слоев и отношений спиновой поляризации инжектора и рабочей об-



**Рис. 1.** Пространственное распределение спиновой поляризации (отнесенной к равновесному значению) вблизи границы двух ферромагнетиков, угол между направлениями намагниченностей  $60^\circ$ ,  $P_1/P_2=2$  (а) и  $5$  (б),  $j/j_D = 0.1$  при различных значениях отношения подвижностей:  $b = 1$  (1),  $0.9$  (2),  $0.8$  (3),  $0.7$  (4).

ласти  $P_1/P_2$  неравновесное значение спиновой поляризации  $P$  вблизи границы  $x = 0$  тем больше, чем больше значение  $b$ . Кроме того, при малых значениях плотностей токов, определяемых через  $j/j_D$  (см. рис. 1, 2а) кривые быстрее выходят на полку асимптоты (примерно  $x \approx 5l$ ), соответствующей равновесному значению спиновой поляризации, чем при большем отношении плотностей тока (рис. 2б) рабочей области. При больших отношениях  $j/j_D$  (см. рис. 2б) выход на полку асимптоты происходит на расстояниях на порядок больше  $x \approx 25l$ .



**Рис. 2.** Пространственное распределение спиновой поляризации (отнесенной к равновесному значению) вблизи границы двух ферромагнетиков, угол между направлениями намагниченностей  $120^\circ$ ,  $P_1/P_2 = 5$  и  $j/j_D = 0.1$  (а) и  $P_1/P_2 = 2$  и  $j/j_D = 5$  (б) при различных значениях отношения подвижностей:  $b = 1$  (1),  $0.9$  (2),  $0.8$  (3),  $0.7$  (4).

Также согласно рис. 1, 2, для того чтобы возникла инверсная заселенность спиновых подзон, т.е. неравновесная спиновая поляризация была отрицательной  $\Delta P < 0$ , необходимо согласно формуле (14) наличие неравенства  $P_1 \cos \varphi < P_2$ , что выполняется всегда при  $\varphi > \pi/2$ . Но для  $\varphi < \pi/2$  инверсия возможна только при определенном соотношении  $P_1$  и  $P_2$ . Неравенство  $\Delta P > 0$  выполняется при условии, что  $P_1 \cos \varphi > P_2$ . Согласно данным, приведенным на рис. 1а (кривая 1) и рис. 1б (кривая 2), можно подобрать два различных ферромагнетика с разной равновесной спиновой по-

ляризаацией, когда при протекании через них тока равновесная спиновая поляризация в рабочей области не нарушается и выполняется соотношение  $P/P_2 = 1$  для любого  $x$ . Для выполнения этого условия, согласно формуле (14), необходимо равенство нулю выражения  $P_1 \cos \varphi - P_2 = 0$  и значения  $b$ , равного единице. Очевидно, что в этом случае неравновесные электроны заселяют энергетические подзоны электронов с разным направлением спина в рабочем слое в такой пропорции, что не нарушают равновесную спиновую поляризацию  $P_2$ . Однако при тех же условиях, но с учетом разности подвижностей электронов происходит нарушение равновесной спиновой поляризации  $P_2$  тем больше, чем больше значение  $b$  (см. рис. 1, кривые 2–4). При достаточно больших значениях  $b$  и углах  $\varphi > \pi/2$  (см. рис. 2б) можно добиться инверсной заселенности спиновых подзон  $P/P_2 < 0$  со спиновой поляризацией больше, чем равновесная спиновая поляризация рабочей области (см. рис. 2б, область  $0 < x/l < \sim 2$ ).

На рис. 3 показана зависимость спиновой поляризации (при  $x \approx 0.2l$ ), отнесенной к ее равносному значению  $P/P_2$ , от  $j/j_D$  при различных углах  $\varphi$  и отношениях подвижностей  $b$ . Видно, что спиновая поляризация при малых токах близка к линейной зависимости от отношения  $j/j_D$ , но при увеличении плотности тока она стремится к предельному значению и все зависимости выходят на горизонтальные асимптоты. Для  $b = 1$  максимальное значение неравновесной поляризации определяется выражением  $P = P_1 \cos \varphi$  [15]. Как и в случае пространственной зависимости (см. рис. 1, 2), при  $\varphi > \pi/2$  для большей разности подвижностей электронов ( $b < 1$ ) большие по модулю значения неравновесной спиновой поляризации достигаются при меньших значениях плотности тока. При  $\varphi < \pi/2$  увеличение разностей подвижностей, наоборот, уменьшает неравновесное значение поляризации при одинаковом значении плотности тока. Это связано с тем, что при одинаковом направлении продольных компонент намагниченностей инжектора и рабочей области увеличение числа инжектированных электронов со спином по направлению намагниченности компенсируется более быстрым их уходом из рабочей области за счет их большей подвижности.

### 3. ЧАСТОТЫ СПИН-ИНЖЕКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТНЫХ КОНТАКТНЫХ ПЕРЕХОДАХ

Как уже было показано ранее, инжекция спин-поляризованных электронов током приводит к нарушению равновесного спинового состо-

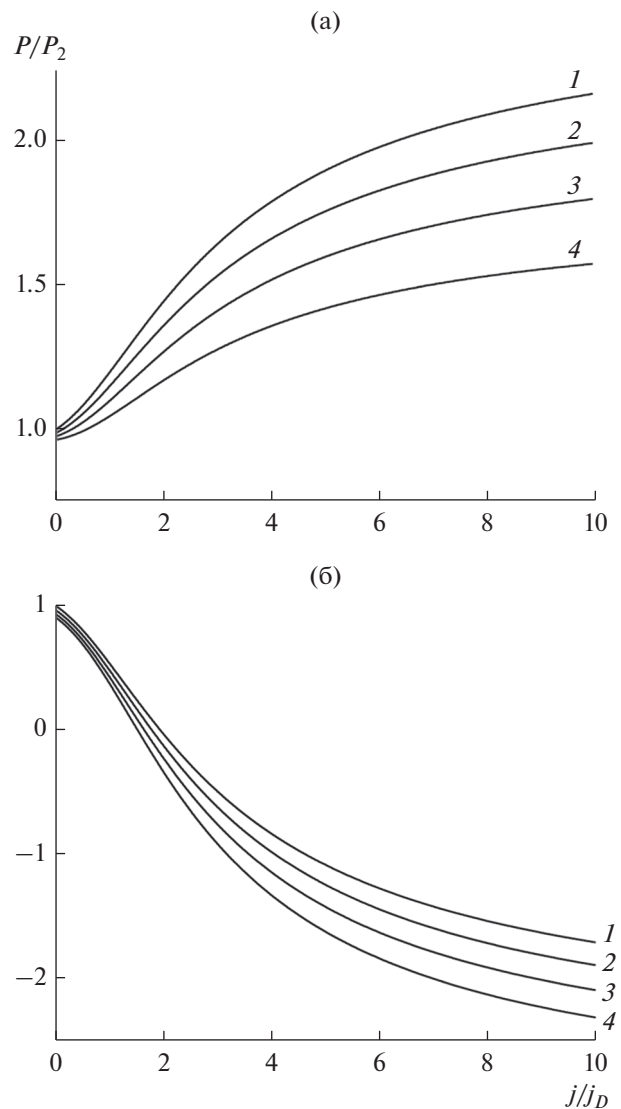
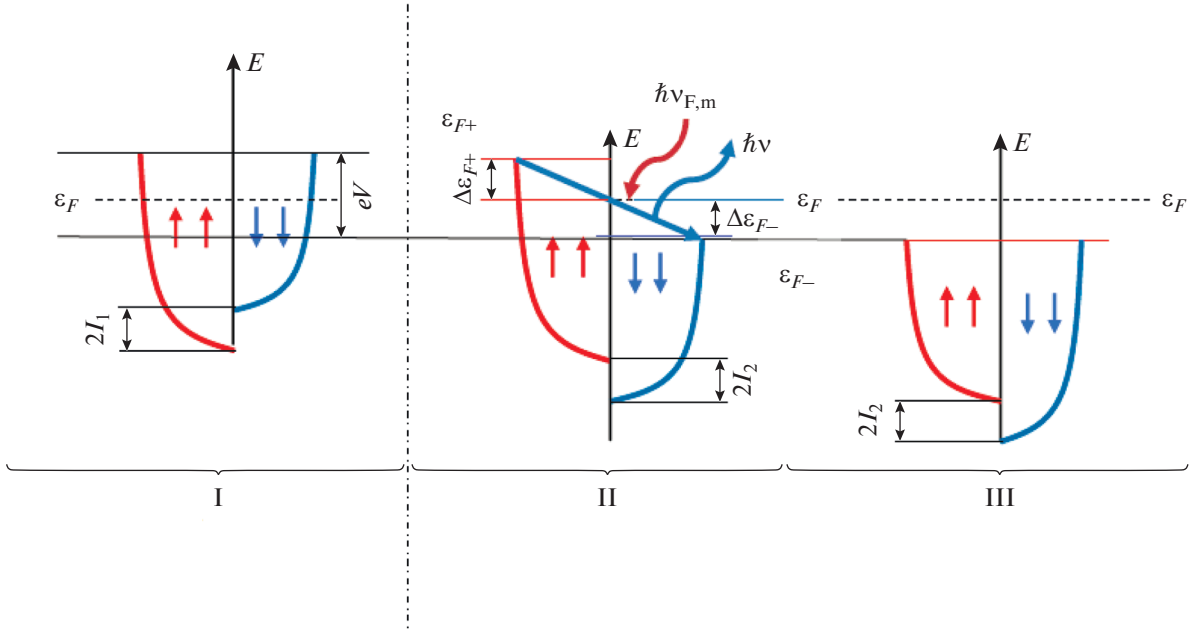


Рис. 3. Спиновая поляризация на границе двух ферромагнетиков (отнесенной к равносному значению) в зависимости от (безразмерной) плотности тока  $j/j_D$  при  $\varphi = 60^\circ$  (а) и  $120^\circ$  (б) для отношения  $P_1/P_2 = 5$  при различных значениях отношения подвижности:  $b = 1$  (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 (4).

яния в одном из слоев магнитного контакта. Следствием этого может быть как изменение магнитного состояния рабочей области, пронизываемой спиновым потоком (например, изменение направления ее намагниченности [4]), так и создание неравновесных по спину условий. В результате последнего одним из каналов релаксации неравновесной системы электронов могут быть их излучательные (прямые и не прямые) переходы между спиновыми подзонами (с перевертотом спина) из занятых состояний в свободные, которые определяются неравновесными квази-



**Рис. 4.** Схема энергетических электронных зон и квазиуровней Ферми: I – в первом ферромагнетике, II – для неравновесных электронов во втором ферромагнетике, III – для равновесных электронов во втором ферромагнетике вне области инжекции.

уровнями Ферми. Предположим теперь, что в результате инжекции спинов в рабочую область магнитного контакта не происходит перемагничивание рабочей области и основным процессом спиновой релаксации являются излучательные электронные переходы.

Неравновесные электроны имеют соответствующие им неравновесные квазиуровни Ферми  $\epsilon_{F+}$  и  $\epsilon_{F-}$ , отсчитываемые от дна нижней спиновой подзоны (рис. 4). В неравновесных условиях возможны электронные переходы из занятых состояний, расположенных ниже квазиуровня Ферми  $\epsilon_{F+}$  для минорной спиновой подзоны, в свободные электронные состояния, расположенные выше квазиуровня Ферми  $\epsilon_{F-}$  для мажорной спиновой подзоны (см. рис. 4). Если квазиуровень Ферми  $\epsilon_{F+}$  смещен выше относительно равновесного значения уровня Ферми рабочей области на величину  $\Delta\epsilon_{F+} = \epsilon_{F+} - (\epsilon_{F0+} - eV/2)$ , а квазиуровень Ферми  $\epsilon_{F-}$  – ниже на величину  $\Delta\epsilon_{F-} = (\epsilon_{F0-} - eV/2) - \epsilon_{F-}$ , то максимальную частоту излучения можно также представить в виде суммы величин  $\Delta\epsilon_{F+}$  и  $\Delta\epsilon_{F-}$ , деленной на постоянную Планка  $\hbar$  [15]:

$$\nu \equiv \frac{\Delta\epsilon_{F+} + \Delta\epsilon_{F-}}{2\pi\hbar} = \frac{|\epsilon_{F+} - \epsilon_{F0+}| + |\epsilon_{F-} - \epsilon_{F0-}|}{2\pi\hbar} \quad (19)$$

Мы ввели здесь знаки модуля, чтобы эта формула соответствовала любому знаку  $\Delta P$ .

Значения квазиуровней подзон зависят от неравновесной спиновой поляризации  $\Delta P$  и энергетического обменного расщепления  $I_2$ :

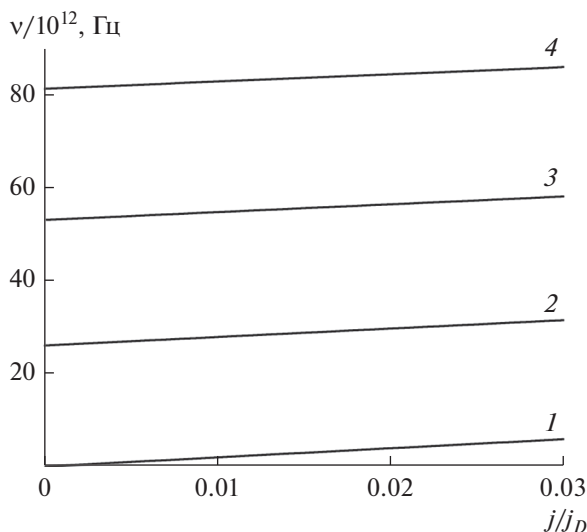
$$\epsilon_{F+} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \left[ \left( \frac{1 - P_2 + |\Delta P|}{2} \right)^{2/3} \right] + 2I_2,$$

$$\epsilon_{F-} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \left[ \left( \frac{1 + P_2 - |\Delta P|}{2} \right)^{2/3} \right].$$

Здесь было использовано предположение, что на один электрон приходится фазовый объем  $(2\pi\hbar)^3$  и количество электронов с одним направлением спина  $n_{-,+} = n(1 \pm P)/2$  равно объему сферы с радиусом, равным импульсу Ферми деленному на  $(2\pi\hbar)^3$ . Далее удобнее выразить изменение квазиуровней через равновесное значение  $P_2$  и неравновесную добавку  $\Delta P$  следующим образом:

$$\Delta\epsilon_{F+} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \left[ \left( \frac{1 - P_2 - \Delta P}{2} \right)^{2/3} - \left( \frac{1 - P_2}{2} \right)^{2/3} \right], \quad (20)$$

$$\Delta\epsilon_{F-} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \times \left[ \left( \frac{1 + P_2}{2} \right)^{2/3} - \left( \frac{1 + P_2 + \Delta P}{2} \right)^{2/3} \right], \quad (21)$$



**Рис. 5.** Зависимость частоты спин-инжекционного излучения от (безразмерной) плотности тока  $j/j_D$  при  $\varphi = 120^\circ$  и для отношения  $R_1/P_2 = 5$  при различных значениях отношения подвижностей:  $b = 1$  (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 (4).

где  $m$  – масса электрона,  $n$  – концентрация электронов проводимости в металле. В формулах (19)–(21) знак изменений квазиуровней зависит от знака неравновесной спиновой добавки и может быть как положительным, так и отрицательным.

На рис. 5 представлена зависимость частоты излучения  $\nu$  от тока, рассчитанная по формулам (19)–(21) для нескольких значений  $b$ . Видно, что учет разности проводимости и коэффициентов диффузии электронов в разных спиновых подзонах понижает теоретическое значение плотности тока для нижней и верхней границ терагерцового излучения на порядок для  $b = 0.9$  и на два порядка для  $b = 0.7$ . Это позволяет объяснить существенное различие диапазонов (примерно на два порядка) пусковых плотностей тока, соответствующих терагерцовому диапазону между теоретической оценкой [15] и измерениями в эксперименте [19]. Согласно рис. 5 диапазону частот спин-инжекционного излучения 5...40 ТГц соответствуют плотности тока, примерно на три-четыре порядка меньше (при  $b = 0.85 - 0.95$ ) чем плотность тока диффузии. Исходя из оценки тока диффузии  $j_D \sim 10^{10} \dots 10^{11}$  А/см<sup>2</sup> получаем плотности тока в магнитном переходе  $j \sim 10^6 \dots 10^7$  А/см<sup>2</sup>, что вполне достижимо экспериментально без теплового пробоя магнитного контакта. Более низкие частоты соответствуют меньшим плотностям тока. Однако при этом необходимо учитывать затухание электромагнитных волн, возникающее главным образом благодаря поглощению

этих волны в слоях магнитного контакта. Как показано в работе [16], для того чтобы превысить уровень мощности, соответствующий потерям в слоях магнитного контакта и уровню тепловых шумов, необходимо превысить некоторое пусковое значение плотности тока, обеспечивающее необходимый уровень мощности излучения. Это может служить объяснением, почему в эксперименте спин-инжекционное излучение появляется, лишь с некоторого порогового значения плотности тока.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С учетом спиновой зависимости подвижности электронов рассмотрено численное решение уравнения для неравновесной спиновой поляризации на границе магнитного контакта с током, образованного двумя ферромагнетиками. Показано, что при различных углах между намагниченностями и отношениях спиновой поляризации инжектора и рабочей области неравновесное значение спиновой поляризации вблизи границы  $x = 0$  тем больше, чем больше разность подвижностей электронов с противоположным направлением спина. Расчет частот спин-инжекционного излучения показал, что при определенной плотности тока, превышающей пороговое значения, эта частота лежит в терагерцовом диапазоне частот. При этом установлено, что для одного и того же диапазона частот даже при небольших значениях разности подвижности электронов со спином вверх и вниз плотность тока может быть на два порядка меньше, чем плотность тока при одинаковой подвижности. Это позволяет объяснить существенную разность, примерно на два порядка, между теоретической оценкой [15] и измерениями в эксперименте [19] плотностей тока, соответствующих терагерцовому диапазону частот.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-57-76001 ЭРА\_а, 18-29-27020 мк, 19-29-03015 мк, 20-07-00349 А), государственной программы № 075-00475-19-00 и Президиума РАН (программа № 5 “Фотонные технологии в зондировании неоднородных сред и биообъектов”).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fert A., George J.-M., Jaffrès H. et al. // Europhys. News. 2003. V. 34. P. 227.
2. Gregg J.F., Petej I., Jougelet E., Dennis C. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2002. V. 35. P. R121.
3. Zutic I., Fabian J., Das Sarma S. // Rev. Mod. Phys. 2004. V. 76. P. 323.

4. *Concepts in Spin Electronics* / Ed. S. Maekawa. N.-Y.: Oxford Univ. Press, 2006.
5. *Fert A.* // *Rev. Mod. Phys.* 2008. V. 80. P. 1517.
6. *Baltz V., Manchon A., Tsoi M. et al.* // *Rev. Mod. Phys.* 2018. V. 90. № 1. P. 015005.
7. *Grunberg P. A.* // *Rev. Mod. Phys.* 2008. V. 80. P. 1531.
8. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Панас А.И., Эпштейн Э.М.* // *Успехи физ. наук.* 2009. Т. 179. С. 359.
9. *Звездин А.К., Звездин К.А., Хвальковский А.В.* // *Успехи физ. наук.* 2008. Т. 178. С. 436.
10. *Yu G., Upadhyaya P., Fan Y. et al.* // *Nature Nanotechnology.* 2014. V. 9. P. 548.
11. *Lau Y.-C., Betto D., Rode K. et al.* // *Nature Nanotechnology.* 2016. V. 11. P. 758.
12. *Walowski J., Munzenberg M.* // *J. Appl. Phys.* 2016. V. 120. P. 140901.
13. *Fernandez-Pacheco A., Streubel R., Fruchart O. et al.* // *Nature Commun.* 2017. V. 8. P. 15756.
14. *Dhillon S.S., Vitiell M.S., Linfield E.H., et al.* // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2017 V. 50. P. 363001.
15. *Вилков Е.А., Михайлов Г.М., Чигарев С.Г. и др.* // *РЭ.* 2016. Т. 61. № 9. С. 844.
16. *Kadigrobov A., Ivanov Z., Claeson T. et al.* // *Europhys. Lett.* 2004. V. 67. P. 948.
17. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Эллиотт Р.Дж.* // *РЭ.* 2003. Т. 48. № 9. С. 1030.
18. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Крикунов А.И. и др.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2007. Т. 85. С. 192.
19. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Маликов И.В. и др.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2011. Т. 93. С. 289.
20. *Вилков Е.А., Михайлов Г.М., Никитов С.А. и др.* // *ЖЭТФ.* 2018. Т. 154. С. 1108.
21. *Вилков Е.А., Никитов С.А., Логунов М.В. и др.* // *РЭ.* 2019. Т. 64. № 12. С. 105.
22. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1988.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.311.243

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТРОЛЛЕРОВ ЗАРЯДА СОЛНЕЧНОЙ ПАНЕЛИ

© 2020 г. Н. П. Гребенчиков<sup>а</sup>, Д. О. Варламов<sup>а</sup>, С. М. Зуев<sup>а, \*</sup>, Р. А. Малеев<sup>а</sup>,  
А. А. Скворцов<sup>а</sup>, А. П. Гребенчиков<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский политехнический университет,  
ул. Б. Семеновская, 38, Москва, 107023 Российская Федерация

\*E-mail: sergei\_zuev@mail.ru

Поступила в редакцию 05.08.2019 г.

После доработки 07.11.2019 г.

Принята к публикации 20.11.2019 г.

Представлены результаты, полученные в области анализа и разработки контроллеров для заряда солнечной электростанции. Приведено описание контроллеров заряда солнечной панели, предложена схема солнечной установки с их использованием. Рассчитана точка максимальной мощности (ТММ) солнечной батареи из поликристаллического кремния. Предложено программное обеспечение на языке Pascal для исследования и анализа контроллеров заряда, которое может быть использовано для солнечных батарей разного типа, в том числе из перовскита. Показано, что контроллер, который отслеживает ТММ, обладает лучшими характеристиками, так как обеспечивает более высокий заряд.

DOI: 10.31857/S0033849420080057

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время особое внимание уделяется восстанавливаемым источникам энергии, что связано с дефицитом традиционных ресурсов и экологическими проблемами. Широкое применение находят системы преобразования солнечной энергии в электрическую<sup>1</sup>. Большинство известных производителей в области восстанавливаемой энергетики занимаются развитием собственной солнечной индустрии.

Создание и изготовление систем конвертации солнечной энергии в электроэнергию представляется многообещающим и динамично развиваемым направлением создания экологически чистых источников энергии.

В 2016 г. было выработано около 364 ГВт солнечной энергии<sup>2</sup>. Мощности всемирной солнечной энергетики увеличиваются в XXI столетии со средним темпом более 50% в год. На данные темпы не оказывают большого влияния ни финансовые кризисы, ни внезапные колебания стоимости иных энергоресурсов. Несмотря на то что процент солнечной энергетики во всемирной энергопотребляющей сети не слишком

велик, однако ведущие специалисты предполагают, что через 30–40 лет она будет основным источником энергии на планете<sup>3</sup>.

В настоящее время большинство населения планеты проживает в местностях, где до сих пор имеется дефицит электроэнергии. Таким образом, возобновляемые источники энергии, к которым относятся и солнечные электростанции, являются наилучшим вариантом для использования в быту.

Преимуществом систем преобразования солнечной энергии является минимальный уход в эксплуатации и высокая экологичность. К числу недостатков таких систем следует отнести относительно высокую себестоимость и низкий КПД [1]. Однако КПД таких систем может быть повышен с помощью эффективного контроллера солнечного заряда.

Цель данной работы – анализ и разработка контроллеров для заряда солнечной электростанции.

#### 1. ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве экспериментальных образцов использовали солнечные батареи из поликристаллического кремния размером 545 × 668 × 28 мм, которые были размещены на открытом воздухе с прямым доступом солнечных лучей.

<sup>1</sup> Каталог The World's Top 4 Alternative Energy Companies. <http://www.investopedia.com/investing/top-alternative-energy-companies/>.

<sup>2</sup> Доклад Statistical Review of World Energy. <http://www.bp.com/en/global/corporate/energy-economics/statistical-review-of-world-energy.html>.

<sup>3</sup> <https://yearbook.enerdata.ru/renewables/wind-solar-share-electricity-production.html>.

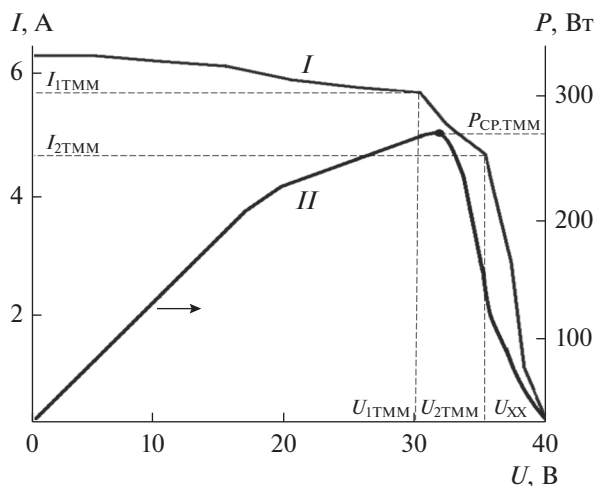


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика солнечной панели.

Для разработки принципиальной схемы проведен обзор имеющихся контроллеров для зарядки накопителей энергии от солнечных панелей. Независимо от конструкции фотопреобразователей, все они оснащены устройством, которое называется контроллером заряда солнечной панели. В схему установки входит также аккумуляторная батарея (АБ) – накопитель энергии, который заряжается от солнечной панели. Собственно, данный второстепенный источник энергии обслуживается контроллером первым [2].

Контроллер выполняет различные функции в ходе заряда/разряда АБ. Целесообразно чтобы заряд АБ происходил не напрямую, тогда можно будет контролировать процесс зарядки, обеспечивая тем самым более высокие технические показатели.

Функция контроллера состоит в регулировании мощности, исходящей от солнечной панели к АБ.

В современных контроллерах заряда используется широтно-импульсная модуляция (ШИМ) для постепенного снижения доли энергии, подаваемой на АБ по мере ее заряда, что обеспечивает высокий КПД и повышает срок службы АБ. При этом обеспечивается периодическая дозарядка АБ.

Наиболее перспективными являются контроллеры заряда, которые обеспечивают отслеживание точки максимальной мощности (ОТММ). Контроллеры типа ОТММ в основном трансформируют повышенное напряжение в силу тока. Такой контроллер отслеживает ток в постоянном режиме, а также напряжение на солнечной батарее, затем перемножает их значения и определяет пару ток–напряжение, при которых мощность солнечной батареи будет максимально возможной. Встроенный процессор позволяет контролировать, на какой из четырех стадий заряда – наполнение, насыщение, выравнивание или поддержка – находится аккумуля-

лятор, и на основании этих данных автоматически определяется, какой ток должен подаваться в аккумуляторы. В то же время процессор может давать команды на вывод параметров на экран, хранение данных. К недостаткам можно отнести то, что при использовании контроллера типа ОТММ теряется определенное количество энергии, но эта потеря пренебрежимо мала по сравнению с дополнительной энергией, которую обеспечивает данный контроллер [2].

В основном солнечные энергосистемы используют АБ с напряжением 12 В. Солнечные панели (СП) могут давать значительно больше напряжения, чем требуется для зарядки АБ. Поиск оптимального соотношения между выходным напряжением и током, обеспечивающим максимальное использование солнечной энергии, является одной из основных задач при использовании СП [3].

При низких напряжениях возрастают потери в проводах, но применение контроллера типа ОТММ дает возможность существенно повысить напряжения в проводах и тем самым уменьшить потери мощности. Контроллер типа ОТММ преобразует избыточное напряжение в дополнительный ток.

СП может генерировать различные напряжения в зависимости от следующих параметров:

- 1) количество солнечного света;
- 2) подключенная нагрузка;
- 3) температура СП.

При изменении времени суток и погодных условий напряжение, производимое СП, будет постоянно варьироваться. Величина тока независимо от напряжения будет определяться характеристиками конкретной СП (рис. 1).

Оптимальное соотношение между током и напряжением называется точкой максимальной мощности (ТММ), а соответствующие величины тока и напряжения обозначаются  $I_{ТММ}$  и  $U_{ТММ}$ .

На рис. 1 линией I показано напряжение солнечной панели  $U_{1ТММ} = 30$  В, соответствующее току  $I_{1ТММ} = 6.2$  А, линией II – напряжение  $U_{2ТММ} = 35$  В, соответствующее току  $I_{2ТММ} = 5$  А. Среднее расчетное значение максимальной мощности соответствует точке  $P_{cp.ТММ}$ .

Режим максимальной мощности зависит от интенсивности излучения солнца [4]. Например, для расчета возьмем СП мощностью  $P_{1СП} = 100$  Вт,  $U_{1СП} = 18$  В при  $I_{1СП} = 5.56$  А. Определим сопротивление нагрузки:

$$R_{1сп.н} = U_{1сп}/I_{1сп} = 18/5.56 = 3.24 \text{ Ом.}$$

При любой другой нагрузке СП будет выдавать менее 100 Вт. Так что если статическая нагрузка подключена непосредственно к панели, а ее сопротивление выше или ниже, чем внутреннее сопротивление



панелей на ТММ, то мощность, потребляемая от панели, будет меньше максимально доступной [5].

Другой пример, если присоединить СП мощностью  $P_{2СП} = 100$  Вт непосредственно к свинцово-кислотной батарее  $U_{2СП} = 12$  В, то напряжение на панели будет понижено вблизи напряжения нагрузки АБ, так как сопротивление АБ ниже, чем у панелей, но ток остается прежним на  $I_{2СП} = 5.56$  А. Это происходит потому, что СП ведут себя как источники тока, поэтому ток определяется доступным излучением Солнца.

Определим мощность под нагрузкой:

$$P_{2СП.н} = U_{2СП} I_{2СП} = 66.72 \text{ Вт.}$$

Следовательно, СП теперь ведет себя как СП на 66 Вт.

В работах зарубежных авторов [6–10] показано, что ТММ может быть рассчитана различными методами.

*Первый метод* “Perturb and Observe” [6] основан на периодическом полном сканировании всей ВАХ СП (как правило, один раз в два часа). Данный метод является наиболее распространенным.

*Второй метод* “Scan and Hold” [7]. При первом сканировании напряжение устанавливается и запоминается напряжение, советующее ТММ. К числу преимуществ такого метода следует отнести высокую скорость работы и обеспечение непрерывного заряда. Однако такой метод не эффективен в условиях низкой солнечной активности.

*Третий метод* “Percentage of open circuit voltage” [8]. Основан на измерении напряжения холостого хода ( $U_{xx}$ ) и периодическом сканировании ВАХ с целью определения оптимальных параметров. Имеет такие же преимущества, как и второй метод.

*Четвертый метод* [9, 10] основан на одномоментном определении ТММ. Полученное значение остается фиксированным и не изменяется в процессе заряда, поэтому КПД такого метода самое низкое, необходим жесткий выбор рабочей точки.

Исходя из заданных требований к проведению экспериментов в данной работе, мы использовали наиболее распространенный первый метод.

На рис. 2 представлена применяемая принципиальная схема контроллера типа ОТММ без микроконтроллера управления.

Работа контроллера типа ОТММ основана на схеме синхронного понижающего преобразователя (LM2596). Данный преобразователь понижает более высокое напряжение солнечной панели до напряжения зарядки АБ. Микроконтроллер (рис. 3) пытается максимизировать мощность от СП, управляя рабочим циклом, чтобы солнечная панель работала в точке максимальной мощности [11].

Контроллер типа ОТММ состоит из следующих элементов (см. рис. 2):  $JP1$  – винтовой зажим, предназначенный для подключения солнечной панели,  $JP2$  – выходной винтовой зажим для подключения АБ, зажим  $JP3$  служит для подключения нагрузки;  $F1$  и  $F2$  – предохранители на 5 А. От правильного расположения, подключения и корректной работы зависит процесс заряда СП. Неправильная работа какого-либо из зажимов вызывает сигнал об отказе при зарядке.

Понижающий преобразователь напряжения состоит из синхронных полевых транзисторов-переключателей  $Q2$  и  $Q3$  и катушки индуктивности  $L1$ , а также конденсаторов  $C1$  и  $C2$ . Катушка индуктивности сглаживает ток переключения и вместе с конденсатором  $C2$  сглаживает выходное напряжение. Конденсатор  $C8$  и резистор  $R6$  представляют собой демпфирующую сеть, которая используется для обрезания напряжения катушки индуктивности, произведенного переключателем током в катушке индуктивности.

Полевой транзистор  $Q1$  предназначен [12] для исключения заряда ночью. В некоторых контроллерах заряда вместо полевых транзисторов в цепи питания применяются диоды. Однако в нашем случае применение полевого транзистора обусловлено возможностью регулирования зарядного тока, контролем напряжения и шунтированием токоограничительного резистора, который задает заряд малым током (1...2% от емкости аккумулятора), что является важной функцией для исследуемых систем. Полевой транзистор  $Q1$  включается, когда полевой транзистор  $Q2$  включен от напряжения через диод  $D1$ . Резистор  $R1$  снимает напряжение с затвора полевого транзистора  $Q1$ , поэтому он отключается при выключении полевого транзистора  $Q2$ .

Особенностью разработанной схемы является применение полевых транзисторов вместо диодов, что позволяет уменьшить падение напряжения. Диод  $D3$  – СВЧ-диод, который повышает эффективность конвертера;  $IR2104$  – это полумостовой драйвер для управления полевыми транзисторами с помощью ШИМ-сигнала от микроконтроллера (вывод  $D9$ ). Полумостовой драйвер также можно отключить управляющим сигналом (низкий уровень на выводе  $D8$ ) от микроконтроллера. Диод  $D2$  и конденсатор  $C7$  являются частью схемы начальной загрузки, которая генерирует напряжение возбуждения затвора высокой стороны для полевых транзисторов  $Q1$  и  $Q2$ .

Для измерения тока использовали датчик тока с эффектом Холла ( $ACS 712$ ). Он считывает текущее значение и преобразует его в соответствующее значение напряжения. Датчик тока измеряет ток от солнечной панели и подает на аналоговый вывод микроконтроллера  $A1$ .

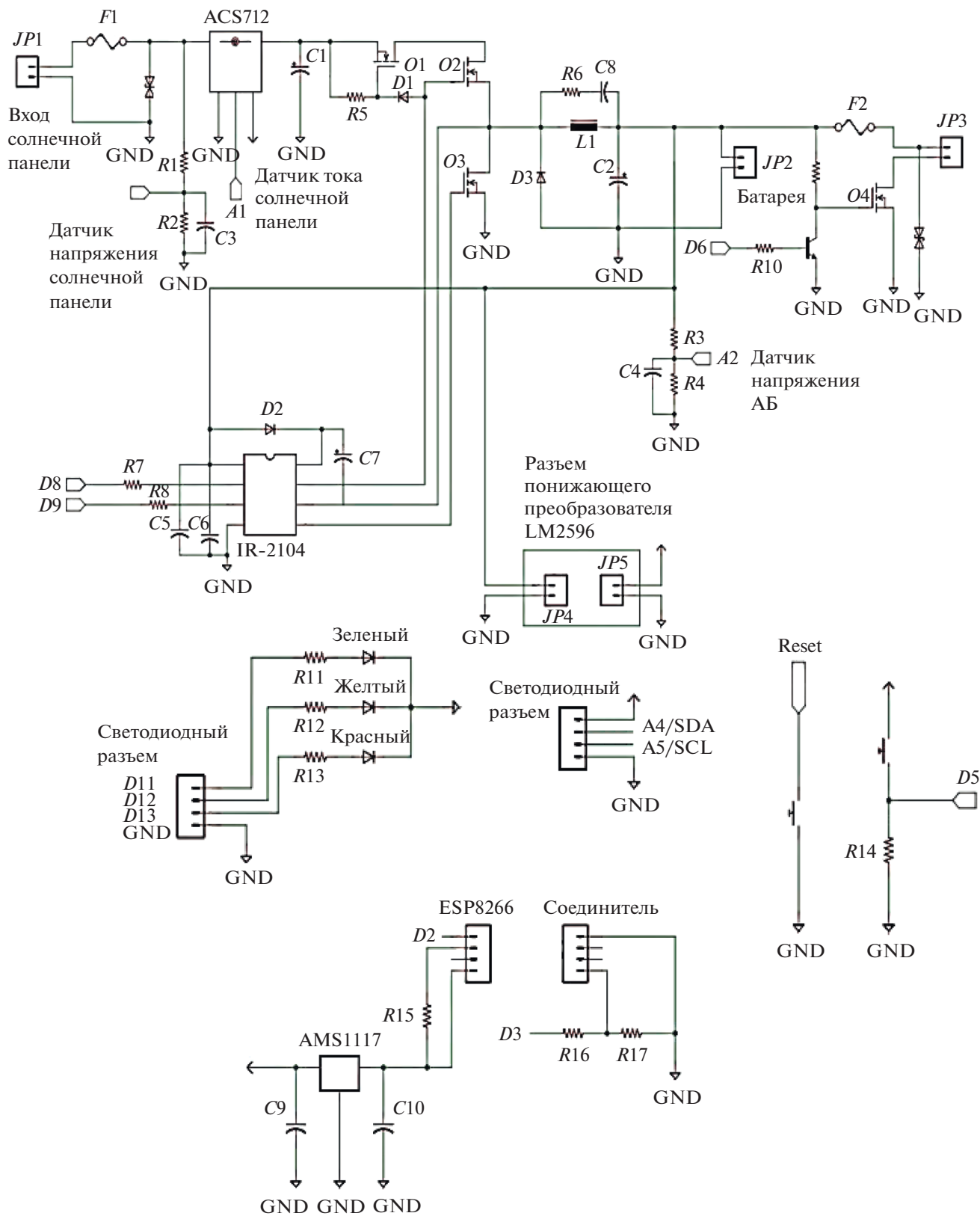


Рис. 2. Принципиальная схема контроллера типа ОТММ без микроконтроллера управления.

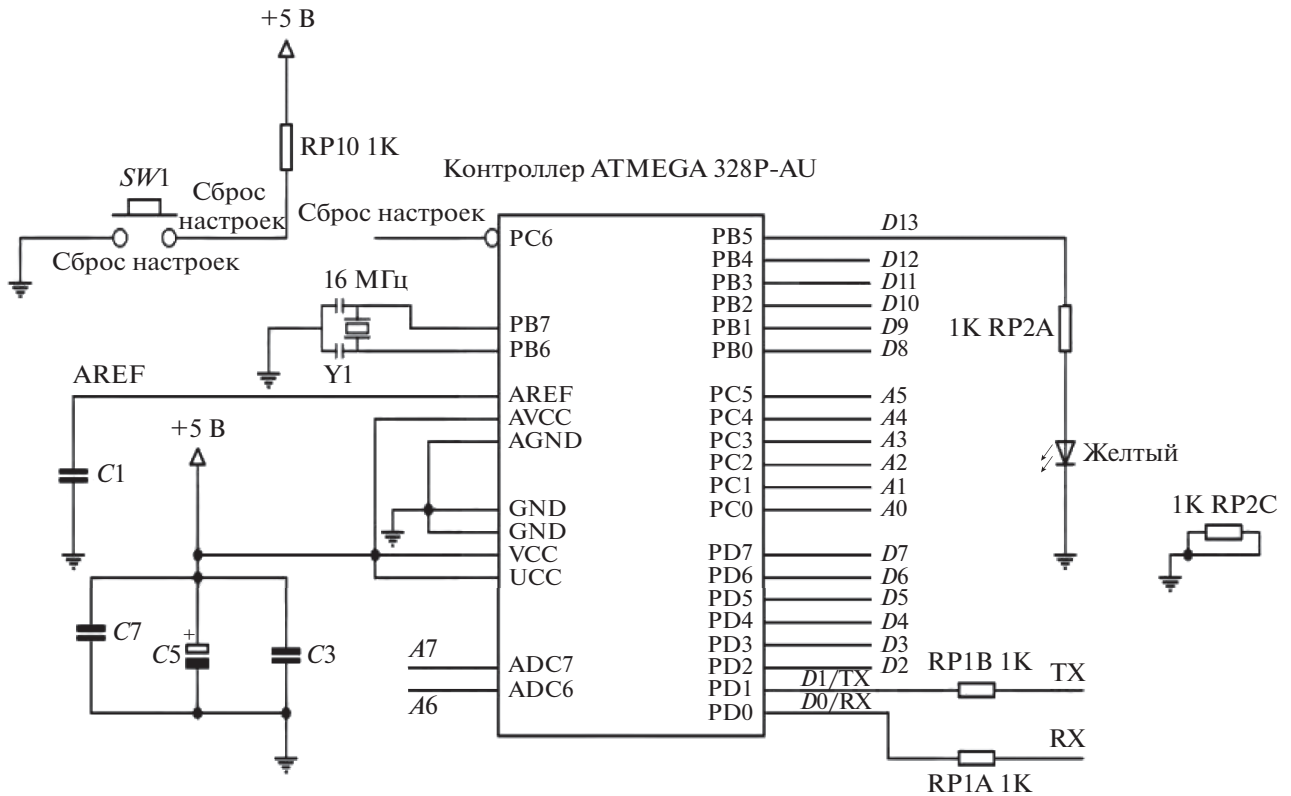


Рис. 3. Принципиальная схема микроконтроллера.

Для мониторинга используется регистрации данных с помощью модуля Wi-Fi, который обеспечивает автоматическую передачу информации.

В результате проведенных исследований была разработана математическая модель для СП с целью ее оптимизации. ВАХ представлена следующим уравнением:

$$I_{CЭ} = I_{\Phi} - I_{он} \left\{ \exp \left[ \frac{e(U_{CЭ} + I_{CЭ}R_{п})}{AkT} \right] - 1 \right\} - \frac{U_{CЭ} + I_{CЭ}R_{п}}{R_{ш}}, \quad (1)$$

где  $A$  – поправочный коэффициент, принимает значения от 1 до 5;  $e$  – заряд электрона;  $k$  – постоянная Больцмана,  $k/e = 8.62 \times 10^{-5}$  эВ/К;  $T$  – температура элемента, К;  $R_{п}$ ,  $R_{ш}$  – последовательное и шунтовое сопротивления СЭ, Ом;  $U_{д}$ ,  $I_{д}$  – напряжение (в В) и ток (в А), протекающий через диод  $VD$ , моделирующий  $p-n$ -переход;  $I_{\Phi}$  – фототок, протекающий через  $p-n$ -переход;  $I_{он}$  – обратный ток насыщения  $p-n$ -перехода;  $I_{CЭ}$ ,  $U_{CЭ}$  – выходные ток и напряжение СЭ.

Приняты следующие обозначения параметров солнечного элемента: ток, напряжение, мощность соответственно  $I$ ,  $U$ ,  $P$ , а параметры СБ –  $I_{CB}$ ,  $U_{CB}$ ,  $P_{CB}$ .

На рис. 4 представлена схема замещения солнечного элемента и его эквивалентная схема.

Обозначим  $k_0 = e/(AkT)$ , тогда формулу (1) можно представить в виде

$$I = I_{\Phi} - I_{он} \left\{ \exp[k_0(U + IR_{п})] - 1 \right\} - (U + IR_{п})/R_{ш}. \quad (2)$$

Математическая модель СЭ обязана соответствовать следующему условию: сумма в (2) должна представлять собой диодное напряжение  $U_{д}$ , падающее на самом СЭ. Величина этого напряжения больше выходного напряжения  $U$ , когда СЭ отдает энергию внешней нагрузке. Если направление тока в модели СЭ принять такое, как показано на рис. 4, то  $U_{д} = U + IR_{п}$ . При обратном направлении тока знак изменится на противоположный:  $U_{д} = U - IR_{п}$ .

Для исследования и анализа контроллеров заряда было разработано программное обеспечение (ПО) на языке Pascal (рис. 5), которое получает данные с микроконтроллера и обрабатывает их. Оно выводит данные на монитор компьютера в виде графических зависимостей. Также разработанное ПО позволяет просматривать параметры системы в реальном времени [13, 14].

Программа обеспечивает вывод экспериментальных данных в таблицу. К достоинствам данного ПО можно отнести и то, что в него можно

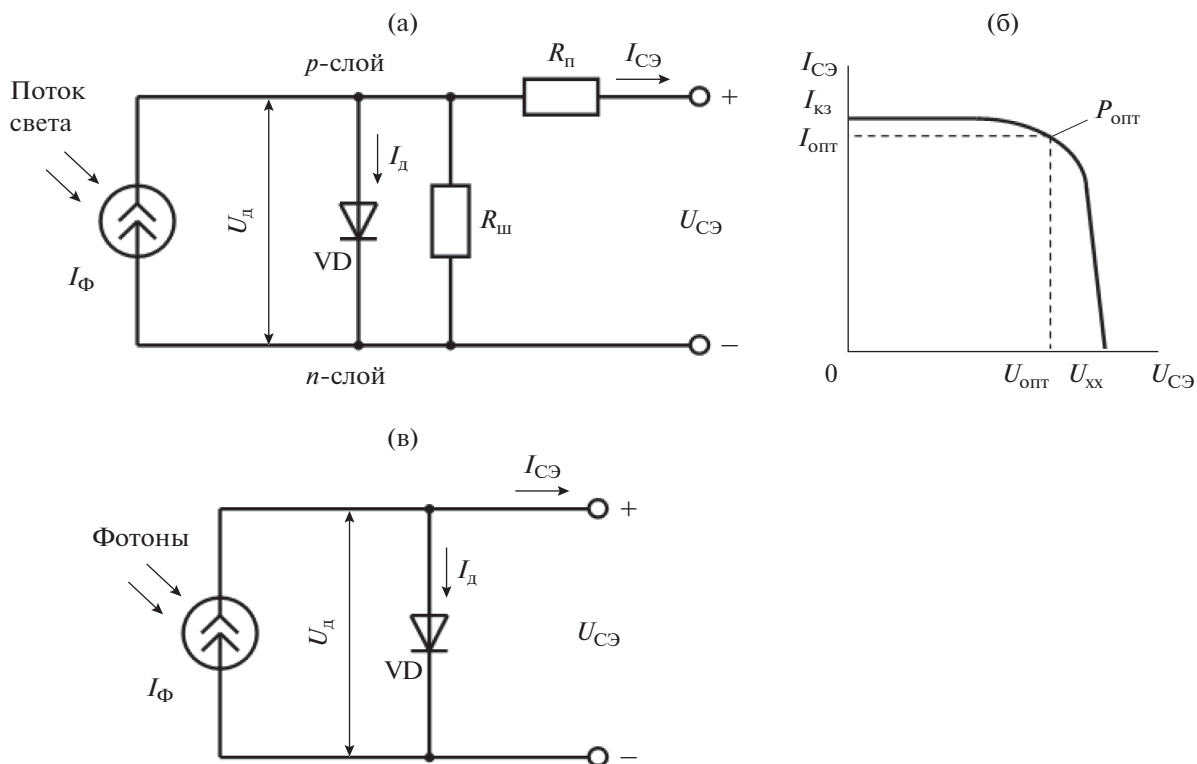


Рис. 4. Схема замещения солнечного элемента: а – эквивалентная схема; б – вольт-амперная характеристика; в – идеализированная модель СЭ.

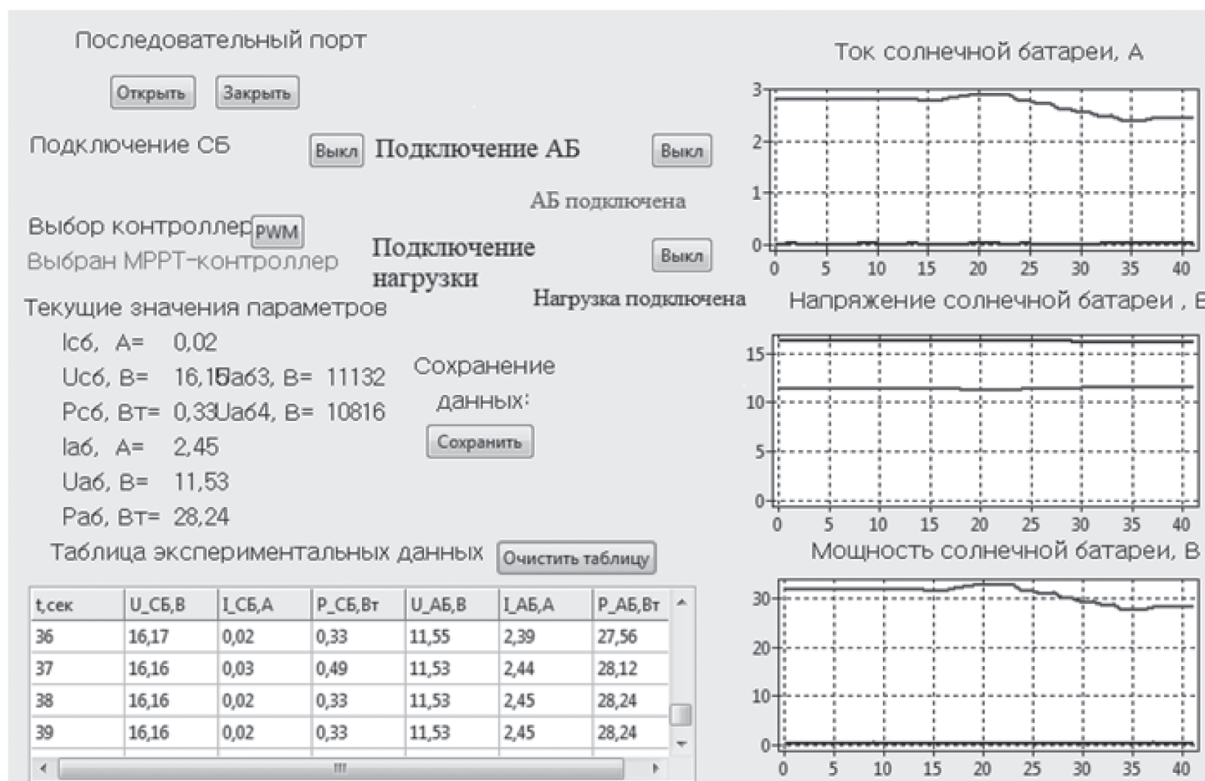


Рис. 5. Вид интерфейса программного обеспечения на языке Pascal для исследования и анализа контроллеров заряда.

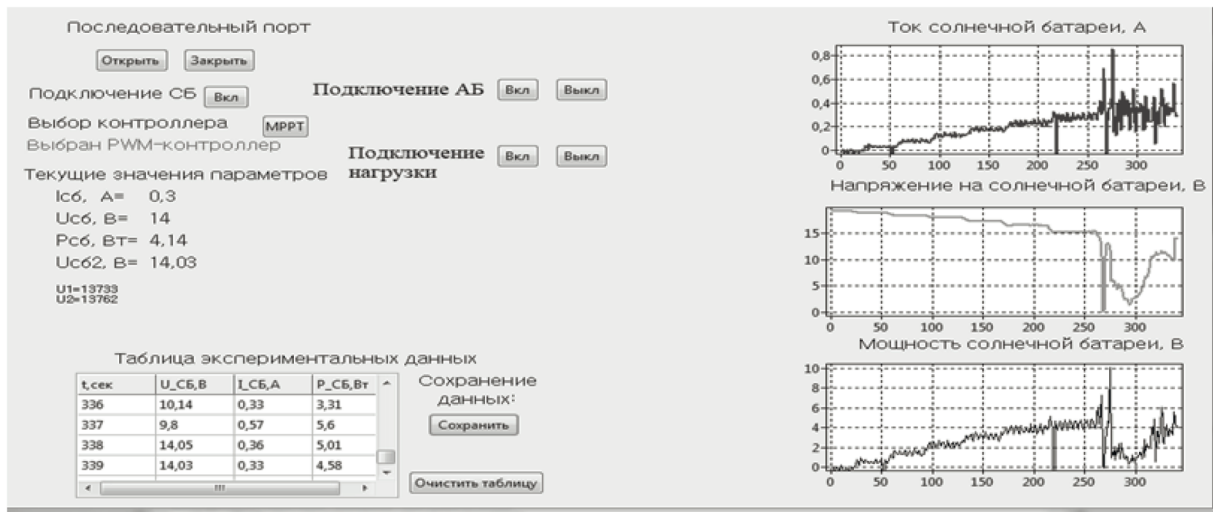


Рис. 6. Вид интерфейса программного обеспечения с данными СП и АБ.

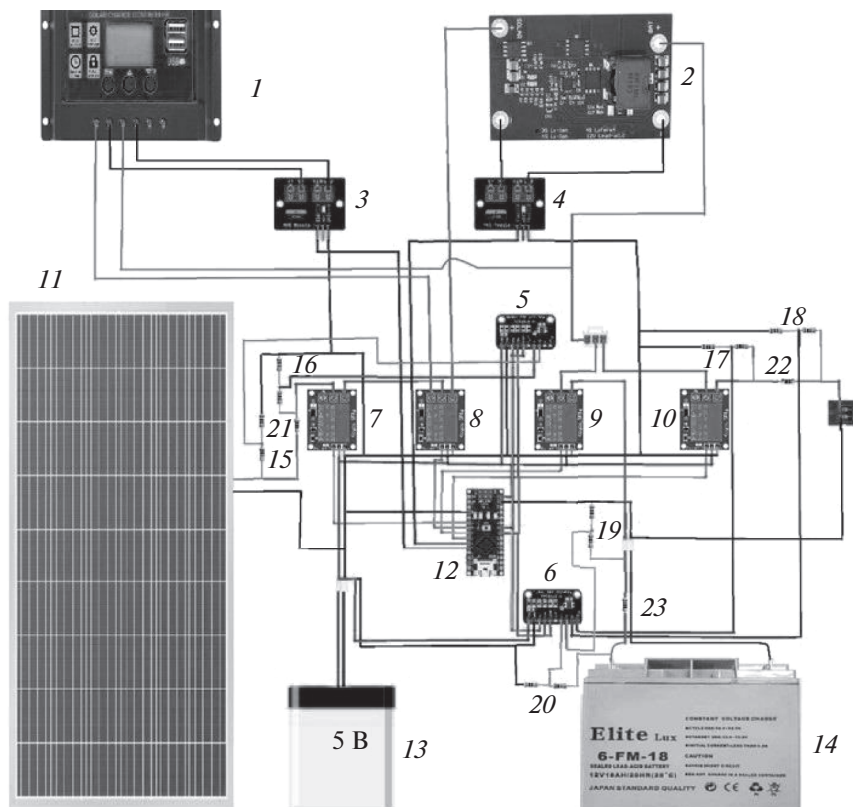
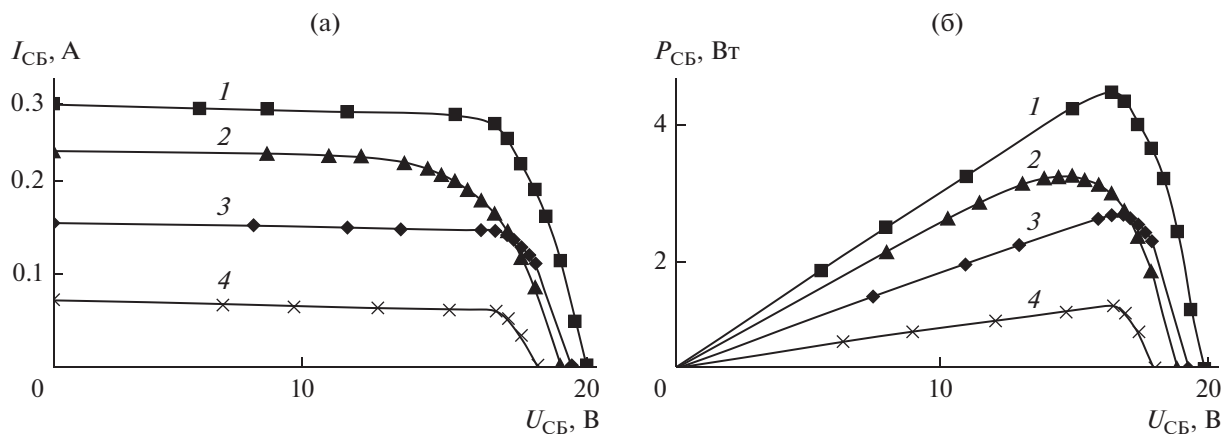


Рис. 7. Схема экспериментального стенда для исследования и анализа контроллеров заряда солнечных панелей: 1 – контроллер типа ШИМ; 2 – контроллера типа ОТММ; 3, 4 – силовые ключи на полевых транзисторах; 5, 6 – АЦП-модули; 7–10 – реле-модули; 11 – СП; 12 – микроконтроллер; 13 – АБ 5 В для питания схемы управления; 14 – АБ 12 В для накопления энергии с СП; 15–20 – делители напряжения; 21–23 – шунтирующие резисторы.

добавлять другие функции и выводить одновременно несколько зависимостей. На рис. 6 показан пример вывода данных с СП и АБ.

Для экспериментального исследования и анализа контроллеров заряда солнечных панелей был разработан стенд, схема которого представ-

лена на рис. 7. Результаты экспериментальных исследований контроллеров заряда солнечных панелей, полученные с помощью разработанного стенда, приведены на рис. 8: ВАХ солнечной панели (рис. 8а) и зависимости мощностей от напряжений солнечной панели (рис. 8б).



**Рис. 8.** Вольт-амперная характеристика солнечной панели (а) и зависимости мощностей от напряжений солнечной панели (б): кривые 1 – характеристика СП при оптимальном угле направления на Солнце и при открытом окне; 2 – угол направления на Солнце  $\theta_0$  и открытом окне; 3 – оптимальный угол направления на Солнце и закрытом окне; 4 – угол направления на солнце  $\theta_0$  и закрытом окне.

Далее по данным, полученным в ходе работы на данном стенде, были построены экспериментальные зависимости (рис. 9а–9в) мощности от времени при ступенчатой нагрузке (рис. 9а) и зависимости тока и напряжения от времени при ступенчатой нагрузке (рис. 9б, 9в). Это одни из основных временных зависимостей основных параметров солнечной панели [15, 16].

Мощность от времени при ступенчатой нагрузке носит ступенчатый характер и является функцией от потребляемого тока внешней нагрузкой.

На рис. 10 представлены характеристики при ступенчатом повышении потребляемого тока с помощью электронной нагрузки. Как видно из рисунка, происходит снижение напряжения на АБ и возрастание отдаваемой мощности.

Далее были получены характеристики для контроллеров типа ШИМ (рис. 11а) и типа ОТММ (рис. 11б).

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что общий заряд, передаваемый на АБ, был выше

в случае контроллера типа ОТММ при более низкой мощности, собираемой с СП. Также следует отметить, что у контроллера типа ШИМ на этапе зарядки “Максимальный заряд”, который длится около 56 мин, сила тока, подаваемая на АБ, меньше, чем сила тока на СП, из-за потерь в электронике. Иная картина наблюдается у контроллера типа ОТММ, у которого на этапе зарядки “Максимальный заряд”, длящемся около 32 мин, в результате процесса инверсии/преобразования к АБ может быть подан больший ток с повышенной плотностью тока [17], чем было произведено с СП, что приводит к сокращению времени зарядки. Также отметим, что у контроллера типа ШИМ этап зарядки “Насыщение/Поддержка” занимает 3 ч 12 мин, тогда как у контроллера типа ОТММ этап зарядки “Прием/Поддержка” занимает 2 ч 29 мин. Это также является существенным преимуществом контроллера типа ОТММ, так как сокращается время зарядки АБ.

**Таблица 1.** Сравнение полученных экспериментально параметров для контроллеров ШИМ и ОТММ

Параметр	Контроллер ШИМ	Контроллер ОТММ
Напряжение СП	Напряжение СП и напряжение АБ должны быть равны	Напряжение СП может быть выше, чем напряжение АБ
Напряжение АБ	Наилучшей производительности можно достичь при идеальной температуре (около 25°C) и при почти полной зарядке АБ	АБ можно заряжать при низких температурах и низкой емкости напряжения
Эффективность применения	Лучше всего подходит для небольших систем, где преимущества контроллера типа ОТММ неэффективны с точки зрения затрат	Применяются в основном в системах мощностью 200 Вт+, так как позволяют раскрыть все преимущества этого типа контроллера, хотя могут быть применены и в менее мощных системах

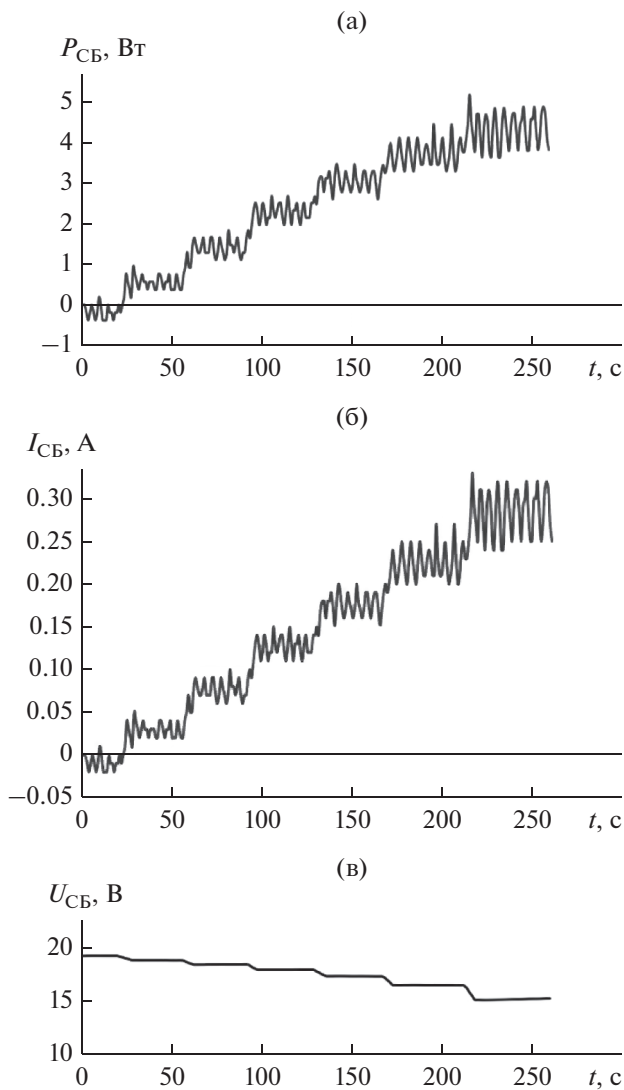


Рис. 9. Зависимости мощности (а), тока (б) и напряжения (в) от времени при ступенчатой нагрузке.

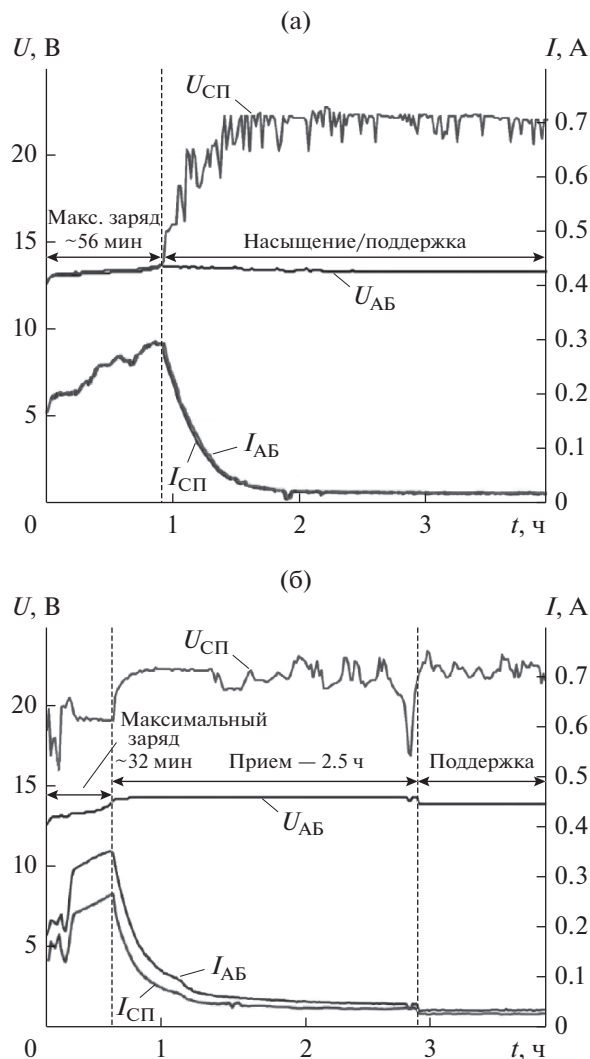


Рис. 10. Характеристики контроллера заряда типа ШИМ (а) и ОТММ (б).

Сравнение некоторых параметров, полученных в результате экспериментов, для каждого типа контроллеров представлены в табл. 1.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе представлено описание контроллеров заряда солнечной панели, а также предложена схема комбинированной силовой установки с их использованием. Рассчитана точка максимальной мощности солнечной батареи из поликристаллического кремния. Предложено программное обеспечение на языке Pascal для исследования и анализа контроллеров заряда, которое может быть использовано для солнечных батарей разного типа, в том числе из перовскита. Исследование контроллеров показало, что контроллер типа

ОТММ обладает лучшими характеристиками, т.к. обеспечивает более высокий заряд.

Рассмотренный в данной работе контроллер заряда типа ОТММ может быть рекомендован к использованию в системах солнечных батарей разного типа, например, монокристаллических (Si, GaAs, перовскит), поликристаллических, фотохимических, аморфных, органических или их комбинации, а также для использования в сложных погодных и климатических условиях и при режимах работы в условиях высоких температур, что требует отдельного исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашикарров А.П.* Маркировка радиоэлементов. М.: ДМК Пресс, 2011.

2. *Германович В., Турилин А.* Альтернативные источники энергии и энергосбережение. Практические конструкции по использованию энергии ветра, солнца, земли, воды, биомассы. СПб.: Наука и Техника, 2014.
3. *Баскаков А.П., Муц В.А.* Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. М.: ИД “БАСТЕТ”, 2013.
4. *Зуев С.М., Шматков Ю.М., Малеев Р.А. et al.* Электрооборудование и электроника автомобилей в основных терминах с их объяснением на русском и английском языках. Учебный справочник. М.: Московский Политех, 2017.
5. *Васильев А.М., Ландсман А.П.* Полупроводниковые фотопреобразователи. М.: Сов. радио, 1971.
6. *Куашнинг Ф.* Технология-Расчеты-Моделирование. Астана, 2013.
7. *Лукутин Б.В., Муравлев И.О., Плотников И.А.* Системы электроснабжения с ветровыми и солнечными электростанциями. Томск: Томск. политех. ун-т, 2015.
8. *Зуев С.М.* // Тез. докл. 4-го Междисциплинарного научного форума с междунар. уч. “Новые материалы и перспективные технологии”. М.: Буки Веди, 2018. Т. 1.
9. *Зуев С.М., Алексюк М.Р., Канарейкин А.И. и др.* // Изв. МГТУ “МАМИ”. 2019. № 1. С. 17.
10. *Малеев Р.А., Зуев С.М., Лавриков А.А., Гребенчиков Н.П.* // Изв. МГТУ “МАМИ”. 2019. № 1. С. 29.
11. *Карлацук В.И.* // Инженерный вестник. 2014. № 10. С. 501.
12. *Акимов А.В., Варламов Д.О., Зуев С.М.* Конструкция, описание работы и проведение диагностики системы электростартерного пуска современных транспортных средств. М.: Московский Политех, 2017.
13. *Гаврилов С.А.* Схемотехника. Мастер-класс. М.: Наука и Техника, 2016.
14. *Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Кучер Т.В.* Программирование на Free Pascal и Lazarus. М.: Интуит, 2016.
15. *Шматков Ю.М., Зуев С.М., Лавриков А.А.* Исследование работы системы электростартерного пуска транспортных средств. М.: Московский Политех, 2017.
16. *Скворцов А.А., Рыбин В.В., Зуев С.М.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 6. С. 73.
17. *Skvortsov A.A., Zuev S.M., Koryachko M.V.* // Key Eng. Mater. 2018. № 771. P. 118.