СОДЕРЖАНИЕ

Номер 4, 2021

ПОЗДРАВЛЕНИЕ С ЮБИЛЕЕМ

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 3–4

ПОЗДРАВЛЕНИЕ С ЮБИЛЕЕМ

ЮРИЙ ФИЛИППОВИЧ ГОЛУБЕВ (к 80-летию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0002338821040053

17 апреля 2021 г. члену редколлегии нашего журнала Юрию Филипповичу Голубеву исполнилось 80 лет.

Юрий Филиппович Голубев, доктор физико-математических наук, профессор – ученый с мировым именем в области механики и процессов управления. Круг его научных интересов и достижений охватывает механику космического полета, управление траекторным движением космических аппаратов, совершающих межпланетные перелеты, робототехнику, вариационное исчисление, оптимальное управление.

Ю.Ф. Голубеву принадлежат важные результаты, признанные российскими и зарубежными учеными. Он внес значительный вклад в теорию создания адаптивных алгоритмов управления сложными механическими системами в условиях действия возмущений. Фундаментальное значение имеет разработанная им серия высокоэффективных алгоритмов автономного управления космическими аппаратами, спускающимися в атмосфере Земли и планет, для широкого множества начальных и конечных условий и атмосферных возмущений.

Ученым построены эффективные алгоритмы управления, обеспечивающие статическую и динамическую устойчивость шагающих аппаратов, и разработаны новые принципы повышения проходимости шагающих машин на основе рационального распределения реакций и силомоментного очувствления конечностей. Ю.Ф. Голубев является автором более 350 научных публикаций, в том числе трех монографий и одного учебника, выдержавшего несколько изданий.

Юрий Филиппович – замечательный педагог. В течение многих лет он преподает студентам механико-математического факультета МГУ теоретическую механику и читает разнообразные спецкурсы по механике космического полета, робототехнике, мехатронике, математическим основам искусственного интеллекта.

Редколлегия и редакция журнала “*Известия РАН. Теория и системы управления*” желают Вам, дорогой Юрий Филиппович, доброго здоровья на многие годы, новых научных идей и свершений, благодарных учеников и счастья!

ПОЗДРАВЛЕНИЕ С ЮБИЛЕЕМ

СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ ЖЕЛТОВ
(к 65-летию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0002338821040120

26 апреля 2021 г. исполнилось 65 лет одному из ведущих отечественных специалистов в области искусственного интеллекта, систем технического зрения и обработки информации в технических системах, заместителю генерального директора по науке ГНЦ ФГУП "Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем" (ГосНИИАС), члену редколлегии журнала "Известия РАН. Теория и системы управления", академику РАН, заслуженному деятелю науки РФ, доктору технических наук, профессору Сергею Юрьевичу Желтову.

Сергей Юрьевич закончил Московский физико-технический институт (МФТИ) в 1979 г. по специальности "Системы автоматического управления", а в 1982 г. – там же очную аспирантуру.

С 1977 г. С.Ю. Желтов работает в ГосНИИАС, пройдя путь от младшего научного сотрудника до заместителя генерального директора.

С.Ю. Желтов сформировал новое научное направление в области перспективных систем управления, связанное с обработкой видеоинформации и интеллектуализацией систем. При его непосредственном участии в ГосНИИАС была создана лаборатория технического зрения, которая выполняет ряд важных проектов, связанных с разработками интеллектуальных методов и алгоритмов обнаружения объектов в сложной фоноцелевой обстановке, методов анализа изображений в современных системах дистанционного зондирования и их использованием в перспективных системах авиационного вооружения.

Сергей Юрьевич принимал личное участие в отработке и принятии на вооружение трех отечественных боевых авиационных комплексов и шести образцов управляемого оружия, входящих в их состав.

Под руководством ученого проводится большой объем исследований по интеллектуализации систем управления авиационных комплексов, а также разработка функционального алгоритмического и программного обеспечения, реализующего технологии искусственного интеллекта в авиационных системах.

С.Ю. Желтов возглавляет созданную им научную школу в области систем технического зрения и обработки информации в технических системах управления, признанную за рубежом и имеющую межотраслевое значение. Он автор и соавтор более 230 научных трудов, в том числе четырех монографий, автор девяти патентов РФ на изобретения и полезные модели. За большой личный вклад в разработку перспективных высокотехнологичных систем авиационной техники ему были присвоены звания "Почетный машиностроитель", "Почетный авиастроитель" и "Почетный работник промышленности города Москвы".

Сергей Юрьевич многие годы ведет педагогическую деятельность, заведует кафедрами "Управляющие и информационные системы" МФТИ и "Системы автоматического и интеллектуального управления" МАИ.

С.Ю. Желтов проводит большую научно-организационную работу, является членом редколлегий журналов "Известия РАН. Теория и системы управления", "Полет" и др. При его активном участии создан журнал "Вестник компьютерных и информационных технологий".

Высокий профессионализм Сергея Юрьевича Желтова, его целеустремленность, преданность гражданскому и служебному долгу, созидательная деятельность и огромное чувство ответственности перед обществом служат ярким примером безукоризненного служения своему Отечеству и по праву снискали заслуженный авторитет, уважение и признание многих людей.

Дорогой Сергей Юрьевич! Редколлегия и редакция нашего журнала поздравляют Вас с Юбилеем! Желаем Вам здоровья, счастья, творческих успехов!!!

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 7–26

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.9

ДИНАМИКА ГИСТЕРЕЗИСНО-СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ: МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА[1]

© 2021 г. А. Л. Медведский[a], П. А. Мелешенко[b,c], В. А. Нестеров[d], О. О. Решетова[b], М. Е. Семенов[b,e,f,*]

[a] *Федеральное государственное унитарное предприятие "Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского", Жуковский, Россия*

[b] *Воронежский государственный ун-т, Воронеж, Россия*

[c] *Целевая поисковая лаборатория прорывных технологий радиосвязи Фонда перспективных исследований, Воронеж, Россия*

[d] *МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*

[e] *ФГБУН Федеральный исследовательский центр "Единая геофизическая служба Российской академии наук", Обнинск, Россия*

[f] *Воронежский государственный технический ун-т, Воронеж, Россия*

**e-mail:mkl150@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.
После доработки 20.11.2020 г.
Принята к публикации 25.01.2021 г.

Основные результаты работы связаны с изучением динамики осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием вынуждающей силы и гистерезисного воздействия, формализуемого посредством феноменологической модели Боука–Вена. Установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов. Основные результаты получены в рамках метода асимптотических разложений (метода малого параметра).

Рассмотрена система двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля в условиях воздействия вынуждающей силы на один из них: в аналитической форме была установлена зависимость между амплитудами и частотами собственных колебаний осцилляторов. Также в работе описана система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, в которой вынуждающая сила, действующая на один из них, определяется выходом гистерезисного преобразователя, на вход которого подается рассогласование между скоростями осцилляторов. Установлено, что существенное влияние на синхронизацию в системе оказывает параметр связи между осцилляторами, а также параметр, определяющий влияние гистерезисного звена.

DOI: 10.31857/S0002338821040107

Введение. Уравнение Ван-дер-Поля – классическое уравнение теории колебаний, посредством которого описывается универсальный механизм возникновения автоколебательных режимов через бифуркацию Андронова–Хопфа. Кроме того, известна возможность появления как квазигармонических, так и релаксационных колебаний.

К настоящему времени число автоколебательных систем, поведение которых моделируется при помощи уравнения Ван-дер-Поля, достаточно велико: различные системы в радиотехнике, такие, как триодный генератор и генератор на туннельном диоде, динамика кардиоритмов, а также разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота [1] и мн. др. [2, 3]. Системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля успешно применялись для анализа сложных систем, в том числе и с распределенными параметрами (тропические циклоны, где было использовано свойство осцилляторов генерировать автоколебательные режимы), а также при описании ионизационных волн [4] и в широком спектре задач, связанных с моделированием процессов, протекающих в человеческом организме.

Весьма обширное направление, связанное с моделированием процессов в организме человека, также основывается на свойствах осциллятора Ван-дер-Поля. По-видимому, в одной из пер-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00158) и РНФ (грант 19-11-0197).

вых работ [5] в указанном направлении динамика сокращений сердечной мышцы моделировалась посредством трех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. С помощью этой модели удалось объяснить многие виды аритмии и даже предсказать ряд новых, обнаруженных впоследствии. В настоящее время активно продолжаются исследования, в которых динамика кардиостимуляторов моделируется уравнениями осцилляторов Ван-дер-Поля. Так, например, в работе [6] предлагается модель, позволяющая воспроизвести несколько известных электрокардиологических явлений, таких, как тахикардия, полная блокада сердца, трепетание предсердий и фибрилляцию желудочков. В [7] исследуется феноменологическая модель сердцебиения, состоящая из двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, позволяющая проанализировать синхронизацию ритмов. В [8] представлена модель сердечно-сосудистой системы, которая является комбинацией уравнения Ван-дер-Поля и информационной модели в форме сети Вольтерры.

Недавние исследования показали, что динамику осциллятора голосовой связки возможно моделировать с помощью уравнения Ван-дер-Поля. Оказалось, что указанная модель упрощает ее анализ и в должной степени соответствует основным принципам функционирования [9]. Отметим также работу [10], где осциллятор Ван-дер-Поля применяется для моделирования процессов, возникающих при отоакустической эмиссии, т.е. звуков, генерируемых в наружном слуховом проходе колебаниями волосковых клеток ушной улитки.

Так как перемещение людей и животных носит ритмичный характер, то для моделирования походки, а также движений конечностей часто применяют системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. В [11] показано, что бипедальное передвижение возможно моделировать с помощью взаимосвязанных осцилляторов Ван-дер-Поля, более того, варьируя параметры осцилляторов, можно управлять длиной шага и частотой ходьбы. Работа [12] предлагает модель, состоящую из нескольких осцилляторов Ван-дер-Поля, Дуффинга и Рэлея, что позволяет описать силу контакта между ногами человека и жесткой поверхностью. Параметры модели были получены на основе обработки экспериментальных данных. Анализ устойчивости проводился с использованием метода энергетического баланса и метода возмущений. В [13] изучается биомеханическая модель реакции моста на движение пешеходов, при этом моделирование походки пешехода осуществляется посредством осциллятора Ван-дер-Поля. Показано, что при некотором критическом значении числа пешеходов, зависящем от физических параметров моста, амплитуда его колебаний резко возрастает. Отметим, что этот факт находится в полном соответствии с наблюдаемыми явлениями.

Одним из фундаментальных свойств нелинейных систем является синхронизация, т.е. установление определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний систем в результате их взаимодействия. Синхронизация автоколебаний исследовалась как в технических системах, например, синхронизация электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате чего обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта, так и в биологических, социальных, экономических. В частности, синхронизация колебаний мембранного потенциала моделей взаимодействующих биологических нейронов использовалась в задачах сегментации зашумленных изображений [14]. В классических работах [15, 16] рассматривались фундаментальные вопросы теории синхронизации периодических и квазипериодических колебаний. Отметим в этой связи, что система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля является эталоном для реализации различных режимов синхронизации.

Известно, что в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля могут реализовываться как регулярные, так и хаотические режимы движения [17]. Одной из классических задач, связанной со сложной динамикой, является задача управления. В [18, 19] описывались алгоритмы управления техническими системами, основанные на вариациях внутренних параметров и параметров внешнего воздействия. В [20, 21] рассматривались методы управления механическими системами, где желаемым был периодический режим. Управление хаотической динамикой, основанное на различных модификациях принципа обратной связи в сочетании с методами теории уравнений с запаздывающим аргументом, приведено в [22, 23]. Один из перспективных методов управления хаотической динамикой основан на использовании гистерезисных преобразователей в контуре управления [24].

Явления гистерезисной природы возникают в различных технических системах как на уровне отдельных блоков, так и на уровне управляющих воздействий. Динамике систем с гистерезисом посвящено значительное количество публикаций, из которых отметим [25–27]. В указанных работах рассматриваются нелинейные динамические системы и их отклик на гистерезисное воздействие, описываемое в рамках феноменологического похода (модель Боука-Вена и ее вариации). В области моделирования технических систем с гистерезисом отметим, прежде всего, работу [28], в которой приводится динамическая модель двуногого робота с точечными опорами. В рамках этой модели гистерезис проявляется в связях между динамическими характеристиками. В [29] описывается гистерезисное поведение в осцилляторе Ван-дер-Поля–Дуффинга вблизи субгармонического резонанса 3:1, исследуется влияние на зоны синхронизации и резонанса. Отметим, что гистерезисные явления, свойственны не только физическим и техническим системам, но имеют место также и в области экономики и социологических наук. В частности, в публикациях [30, 31] описываются модели экономических и социальных систем, наблюдаемые характеристики которых (уровень безработицы, уровень стресса и т.д.) демонстрируют ярко выраженное гистерезисное поведение.

Гистерезисные преобразователи в управляющих элементах рассматривались в работах [32–34], в качестве составляющих колебательных систем – в [35, 36]. Отметим, что при описании моделей гистерезиса традиционно используются два подхода: первый из них основан на операторной трактовке носителей гистерезисных свойств в терминах преобразователей с пространством состояний и входно-выходными соответствиями [37, 38]. Второй основан на феноменологическом подходе, в котором гистерезисная петля описывается посредством дифференциальных и алгебраических соотношений – наиболее популярной в этом смысле является модель Боука–Вена. Детальный анализ этой модели содержится в ряде работ [39–42]. Модель Боука–Вена является удобным, с точки зрения алгоритмической реализации, инструментом формализации гистерезисных зависимостей, особенно в случаях, когда гистерезисные элементы являются частями сложной системы.

1. Динамика осциллятора Ван-дер-Поля с внешним воздействием гистерезисной природы. 1.1. Осциллятор Ван-дер-Поля с периодическим внешним воздействием. Следуя классическим методам исследования осциллятора Ван-дер-Поля, основанных на идеях метода малого параметра, приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты [16]. Для этого запишем уравнение Ван-дер-Поля в следующем виде:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 B\cos(\omega t). \tag{1.1}$$

Формально введем в это уравнение малый параметр:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(\omega_0^2 B\cos(\omega t) + \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x}). \tag{1.2}$$

Очевидно, что при $\varepsilon = 1$ уравнение (1.2) эквивалентно (1.1). Однако для дальнейших построений удобно считать ε малым ($|\varepsilon| \ll 1$) параметром. В этом случае, следуя классическим схемам [16], решение уравнения (1.2) ищется в виде формального степенного ряда по ε в виде

$$x = A\cos\psi + \varepsilon u_1(A,\psi) + \varepsilon^2 u_2(A,\psi) + \ldots, \tag{1.3}$$

где $\psi = \omega t + \varphi(t)$, $u_1(A,\psi)$, $u_2(A,\psi), \ldots$ – неизвестные функции, не содержащие резонансных слагаемых, в свою очередь A и φ – амплитуда и фаза колебаний соответственно, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A,\varphi) + \varepsilon^2 f_2(A,\varphi) + \ldots, \quad \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A,\varphi) + \varepsilon^2 F_2(A,\varphi) + \ldots. \tag{1.4}$$

Здесь $\Delta = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты, F_1, F_2, f_1, f_2 – неизвестные функции, которые следует определить из условий отсутствия резонансных членов для функции u_1. Ниже ограничимся поиском лишь приближенного решения соответствующего линейным по ε слагаемым.

Следуя [16], подставим (1.3) и (1.4) в (1.2) и, приравняв к нулю резонансные слагаемые при ε в первой степени, получим следующую систему, определяющую динамику амплитуды и фазы свободных колебаний:

$$\dot{A} = -\frac{\omega_0 B}{2}\sin\varphi + \frac{\mu}{2}A\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right), \quad \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_0 B}{2A}\cos\varphi, \tag{1.5}$$

здесь $A_0 = 2/\sqrt{\alpha}$ – амплитуда свободных автоколебаний.

В синхронном режиме можно положить $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Исключая из полученных уравнений φ, найдем уравнение для определения A:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\right)^2 \frac{A^2}{A_0^2} = b^2, \quad \text{где} \quad b = \frac{\omega_0 B}{A_0}. \tag{1.6}$$

В следующих разделах будет проведен сравнительный анализ результатов справедливых для классического уравнения Ван-дер-Поля, с результатами, полученными для уравнения, которое содержит гистерезисное звено.

1.2. Осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном в контуре обратной связи. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля, содержащее в правой части, помимо внешнего гармонического воздействия, гистерезисный блок, формализованный посредством феноменологической модели Боука–Вена. В [43] было показано, что включение гистерезисного звена в правую часть аналогичных систем существенным образов влияет на их динамические особенности. Это объясняется в первую очередь тем, что выход гистерезисного преобразователя (как в рамках конструктивного, так и феноменологического представления) зависит не только от входа в настоящий момент времени, но и от всей его предыстории.

Модель Боука–Вена определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \Phi_{BW}(x,t) = \alpha x(t) + (1-\alpha) D z(t), \\ \dot{z}(t) = A_1 \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) - \gamma \dot{x}(t) |z(t)|^n, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $x(t)$ – вход, а $z(t)$ – выход, A_1, β, n, γ – параметры, отвечающие за определение формы гистерезисной петли. Детальный анализ указанной модели приведен в монографии [36].

Осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном будет формализован при помощи уравнения

$$\ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega t) + \Phi_{BW}(x,t). \tag{1.8}$$

Для дальнейшего исследования перепишем уравнение (1.8) следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \varepsilon(\mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + G(t)), \tag{1.9}$$

где $G(t) = B\omega_1^2 \cos(\omega t) + \Phi_{BW}(x,t)$. Здесь, как и ранее, решение ищем в виде (1.3). Далее, формально дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{x} = \dot{A}\cos\psi - A\sin\psi\dot{\psi} + \varepsilon\dot{u}_1\omega + \ldots, \tag{1.10}$$

$$\ddot{x} = \ddot{A}\cos\psi - 2\dot{A}\sin\psi\dot{\psi} - A\cos\psi\dot{\psi}^2 - A\sin\psi\ddot{\psi} + \varepsilon\ddot{u}_1\omega^2 + \ldots. \tag{1.11}$$

Подставляя найденные соотношения в уравнение (1.9) и ограничившись линейными по ε слагаемым, получим соотношение

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_1^2 u_1 = \left(2\omega_1 f_1 - A\frac{\partial F_1}{\partial \phi}\Delta\right)\sin\psi - \left(2\omega_1 A F_1 - A\frac{\partial f_1}{\partial \phi}\Delta\right)\cos\psi - \mu A\Delta\left(1 - \frac{A^2\alpha}{4}\right)\sin\psi - G(t). \tag{1.12}$$

Из условия отсутствия резонансных слагаемых в правой части (1.12) определим следующую систему для амплитуды и фазы:

$$\begin{cases} 2f_1 - A\dfrac{\Delta}{\omega_0}\dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi} = -G_{\sin}(t) + \mu A\Delta\left(1 - \dfrac{A^2\alpha}{4}\right), \\ 2AF_1 + \dfrac{\Delta}{\omega_0}\dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -G_{\cos}(t), \end{cases} \tag{1.13}$$

где $G_{\sin}(t)$ и $G_{\cos}(t)$ – первые гармоники разложение в ряд Фурье $G(t)$.

Примем, что преобразователь Боука–Вена применяется исключительно к нулевому решению $x_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$, первую гармонику разложение в ряд Фурье выхода оператора Боука–Вена можно представить следующим образом:

$$\Phi_{BW}(A\cos(\omega t + \varphi)) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi. \tag{1.14}$$

Так как $a_0/2 = 0$, то $F_{\sin}(t)$ и $F_{\cos}(t)$ принимают вид

$$F_{\sin}(t) = \omega_0^2 B\sin\varphi + b_1\sin\varphi, \quad F_{\cos}(t) = \omega_0^2 B\cos\varphi + a_1\cos\varphi. \tag{1.15}$$

Из системы уравнений (1.13) с учетом (1.15) получим уравнения для определения амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\dfrac{\omega_0^2 B + b_1}{2\omega_0}\sin\varphi + \dfrac{\mu}{2}A\left(1 - \dfrac{A^2}{A_0^2}\right), \\ \dot{\varphi} = \Delta - \dfrac{\omega_0^2 B + a_1}{2\omega_0 A}\cos\varphi. \end{cases} \tag{1.16}$$

В синхронном режиме полагая $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ и исключая из (1.16) φ, найдем уравнение для определения A:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{(\omega_0^2 B + b_1)^2}{(\omega_0^2 B + a_1)^2}\right)\frac{A^2}{A_0^2} = \alpha\frac{(\omega_0^2 B + b_1)^2}{4\omega_0^2\mu^2}. \tag{1.17}$$

Для определим значений коэффициентов при разложении в ряд Фурье a_1 и b_1, воспользуемся методом гармонического баланса:

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\Phi_{BW}\left(A\cos(\omega t + \varphi)\right)\cos(\omega t + \varphi)dt, \quad b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\Phi_{BW}\left(A\cos(\omega t + \varphi)\right)\sin(\omega t + \varphi)dt. \tag{1.18}$$

Если коэффициент системы (1.7) $\alpha = 0$, то в первом уравнении остается только гистерезисная составляющая. Второе уравнение системы (1.7) перепишем как

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t)(A_1 - \left[\beta\operatorname{sgn}\left(\dot{x}(t)z(t)\right) + \gamma\right]|z(t)|^n), \tag{1.19}$$

Параметр n в модели Боука–Вена существенным образом влияет на форму гистерезисной петли. В общем случае аналитическое представление, даже первого приближения, получить крайне затруднительно, поэтому ниже рассматриваются три разных случая, соответствующие различным значениям параметра n модели Боука–Вена.

В первом из них положим $n = 1$, определяя вход как $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, а выход – как $z(t) = b\cos(\omega t + \varphi)$. Рассмотрим частный случай, когда параметр модели Боука–Вена $A_1 = 1$:

$$\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)\left(1 - \left[\beta\operatorname{sgn}\left(-A\omega\sin(\omega t + м)b\cos(\omega t + \varphi)\right) + \gamma\right]\ |b\cos(\omega t + \varphi)|\right). \tag{1.20}$$

Умножим на $\sin(\omega t + \phi)$левую и правую части уравнения (1.20) и проинтегрируем их по периоду:

$$\int_0^{2\pi/\omega}\dot{z}(t)\sin(\omega t + \varphi)dt = \\ = \int_0^{2\pi/\omega} -A\omega\sin^2(\omega t + \varphi)(1 - \left[\beta\operatorname{sgn}\left(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)b\cos(\omega t + \varphi)\right) + \gamma\right]|b\cos(\omega t + \varphi)|)dt. \tag{1.21}$$

Вычислив интегралы, запишем соотношение

$$-b\pi = -A\pi + \frac{4Ab}{3}(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi). \tag{1.22}$$

Откуда для b получим

$$b = \frac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}. \tag{1.23}$$

Следовательно, первое приближение выхода гистерезисного преобразователя принимает вид

$$z(t) = \frac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}\cos(\omega t + \varphi). \tag{1.24}$$

Вернемся к уравнениям (1.18) и определим коэффициенты a_1 и b_1:

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi)dt;$$
$$b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)dt. \quad (1.25)$$

Интегрируя эти выражения, получим

$$a_1 = \frac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}; \quad b_1 = 0. \quad (1.26)$$

Выполним подстановку в уравнение (1.17). Тогда зависимость амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия будет определяться как

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{(\omega_0^2 B)^2}{\left(\omega_0^2 B + \dfrac{3A\pi}{4A(\beta\sin^3\varphi + \gamma\cos^3\varphi) + 3\pi}\right)^2}\right)\frac{A^2}{A_0^2} = \alpha\frac{(\omega_0^2 B)^2}{4\omega_0^2\mu^2}. \quad (1.27)$$

Теперь рассмотрим случай $n = 2$. Тогда уравнение (1.19) примет вид

$$\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)(1 - [\beta\,\mathrm{sgn}\,(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)b\cos(\omega t + \varphi)) + \gamma](b\cos(\omega t + \varphi))^2). \quad (1.28)$$

Выполнив аналогичные с (1.21) преобразования, получим уравнение относительно b:

$$b^2 + \frac{4}{\gamma A}b - \frac{4}{\gamma} = 0. \quad (1.29)$$

Запишем соотношение для положительного корня уравнения (1.29):

$$b = \frac{2}{\gamma A}(-1 + \sqrt{1 + A^2\gamma}), \quad (1.30)$$

где коэффициенты a_1 и b_1 имеют вид:

$$a_1 = \frac{2}{\gamma A}(-1 + \sqrt{1 + A^2\gamma}); \quad b_1 = 0. \quad (1.31)$$

Подставим a_1 и b_1 в уравнение (1.17), тогда зависимость амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия определена как

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{(\omega_0^2 B)^2}{\left(\omega_0^2 B + \dfrac{2}{\gamma A}(-1 + \sqrt{1 + A^2\gamma})\right)^2}\right)\frac{A^2}{A_0^2} = \alpha\frac{(\omega_0^2 B)^2}{4\omega_0^2\mu^2}. \quad (1.32)$$

Теперь рассмотрим третий случай, когда $n = 3/2$. Уравнение (1.19) примет вид

$$\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)(1 - [\beta\,\mathrm{sgn}\,(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)b\cos(\omega t + \varphi)) + \gamma]|b\cos(\omega t + \varphi)|^{3/2}). \quad (1.33)$$

Проинтегрируем (1.33):

$$-b\pi = -A\pi + \frac{4}{21}Ab^{3/2}\left((\beta + \gamma)F\left[\pi + \frac{\varphi}{2}, 2\right] + (\beta - \gamma)F\left[\frac{\varphi}{2}, 2\right] + \right.$$
$$\left. + 2\beta F\left[\frac{\pi + \varphi}{2}, 2\right] + (-\beta + \gamma)F\left[\frac{1}{4}(\pi + 2\varphi), 2\right] - (\beta + \gamma)F\left[\frac{1}{4}(3\pi + 2\varphi), 2\right]\right), \quad (1.34)$$

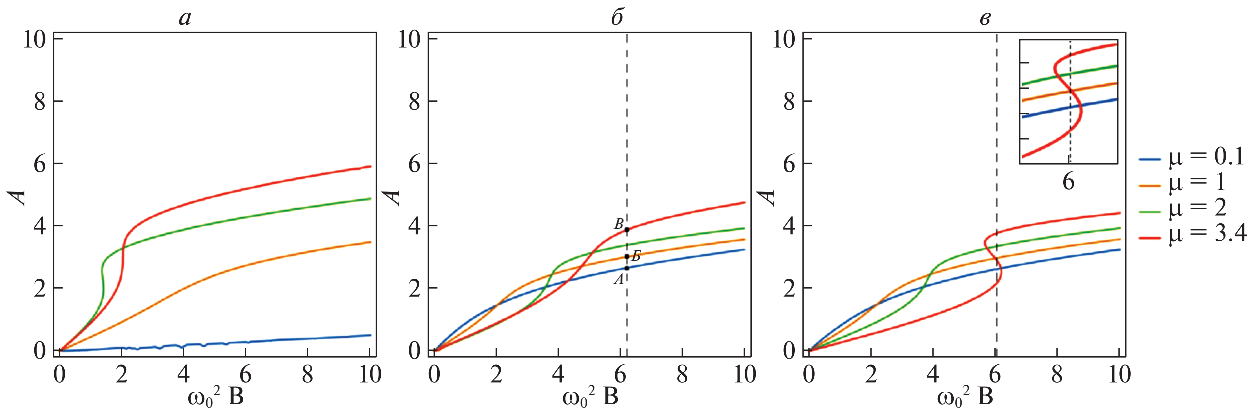

Рис. 1. Зависимости амплитуд решения A от амплитуды вынуждающей силы $\omega_0^2 B$ для различных значений μ: *а* – для уравнения, не содержащего гистерезисный блок; *б* – при значении параметра модели Боука–Вена $n = 1$; *в* – при значении параметра модели Боука–Вена $n = 2$

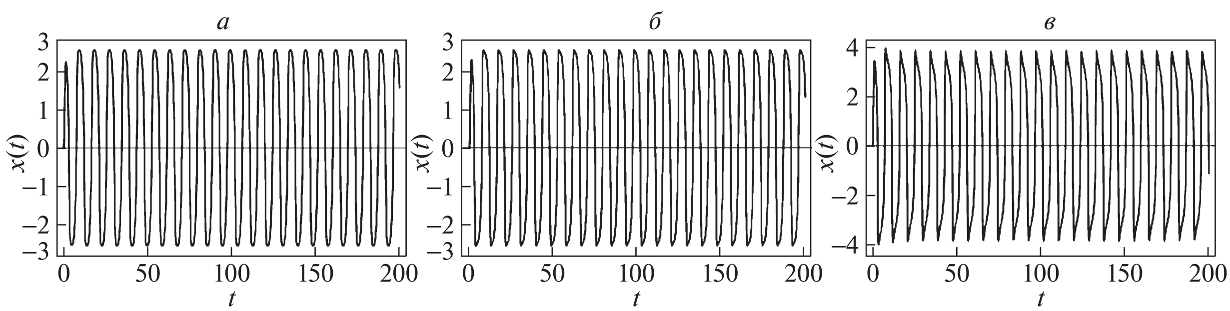

Рис. 2. Численное решение системы (1.8) при значениях параметров $n = 1$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$ и различных значениях μ: *а* – $\mu = 0.1$, *б* – $\mu = 1$, *в* – $\mu = 3.4$

где $\mathrm{F}[\varphi;m]$ – эллиптический интеграл первого рода, удовлетворяющий соотношению $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$:

$$\mathrm{F}[\varphi;m] = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - m\sin^2(\theta)}}\, d\theta.$$

Проведем преобразования, аналогичные (1.23)–(1.26), и найдем коэффициенты a_1 и b_1. После подстановки последних в уравнение (1.17) получим зависимость между амплитудой решения и амплитудой внешнего воздействия для случая $n = 3/2$:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{(\omega_0^2 B)^2}{(\omega_0^2 B + a_1)^2}\right)\frac{A^2}{A_0^2} = \alpha\frac{(\omega_0^2 B)^2}{4\omega_0^2\mu^2},$$

$$a_1 = 7056A^2\left((\beta+\gamma)F\left[\pi + \frac{\varphi}{2}, 2\right] + (\beta-\gamma)F\left[\frac{\varphi}{2}, 2\right] + 2\beta F\left[\frac{\pi+\varphi}{2}, 2\right] + \right. \tag{1.35}$$

$$\left. + (-\beta+\gamma)F\left[\frac{1}{4}(\pi + 2\varphi), 2\right] - (\beta+\gamma)F\left[\frac{1}{4}(3\pi + 2\varphi), 2\right]\right)^2.$$

На рис. 1, 2 приведены графики зависимости амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия, а также параметра μ для полученных соотношений (1.27) и (1.32).

Особо отметим, что при значениях параметра $\mu = 3.4$ и $\omega_0^2 B \approx 2\pi$ (параметры численного решения систем (1.1) и (1.8)) имеет место неоднозначная зависимость амплитуды колебаний от

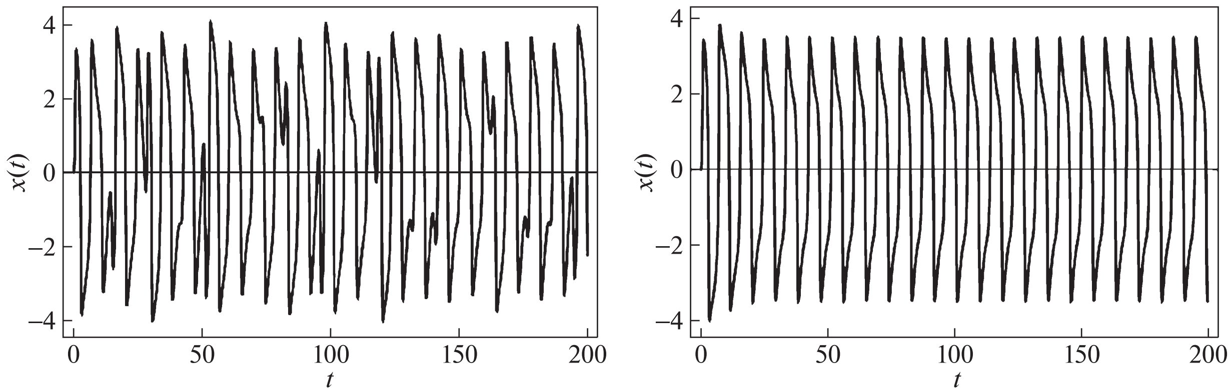

Рис. 3. Решение систем (1.1), (1.8) при значениях $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$

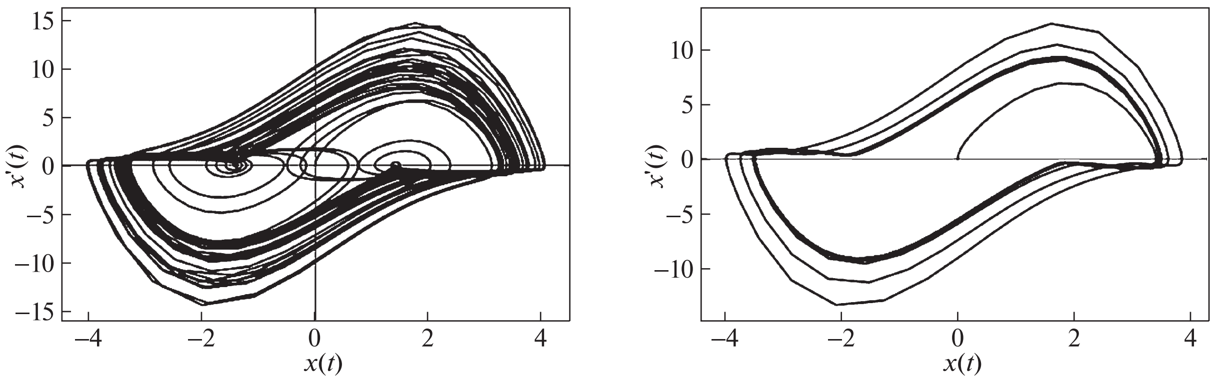

Рис. 4. Фазовые портреты (1.1), (1.8) при значениях $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$

амплитуды внешнего воздействия, т.е. при одной и той же внешней вынуждающей силе возможно два устойчивых режима колебаний, отличающиеся амплитудой.

На рис. 1, *б* отмечены некоторые значения параметров, которым соответствуют графики решений, приведенные на рис. 2 (точкам А, Б и В соответствуют рис. 2, *а*–*в*). Сопоставление соответствующих рисунков показывает, что с точностью до 3% амплитуда собственных колебаний осциллятора совпадает с результатами теоретических расчетов.

1.3. Различные режимы динамики осциллятора Ван-дер-Поля. Известно, что в осцилляторе Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием внешней периодической силы, могут реализовываться различные режимы динамики: периодический, квазипериодический, хаотический. Так для значений $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$ и $\omega_0^2 = \pi$ в системе (1.1) спектр показателей Ляпунова, вычисленных с помощью стандартного алгоритма Вольфа, имеет значения [0.109414, –2.41502, 0.0], которые соответствуют хаотическому режиму.

В настоящем разделе исследуется влияние гистерезисного звена на режимы колебаний осциллятора Ван-дер-Поля. Известно, что гистерезисное слагаемое способно регуляризировать сложные, в том числе, и хаотические движения. В этой связи одна из задач настоящей работы заключается в исследовании возможности управления, в том числе и хаотической динамикой, посредством гистерезисного блока.

На следующих графиках (рис. 3, 4) отражена динамика решения системы (1.1) и (1.8) и их фазовые портреты.

Как следует из результатов численного моделирования (уравнения решались в среде MatLab с использованием метода Рунги–Кутты четвертого порядка с шагом интегрирования 0.01), системы (1.1) и (1.8) имеют существенные отличия в динамике. Объяснить это можно тем, что включение гистерезисного звена приводит к диссипации энергии и, как следствие, к изменению

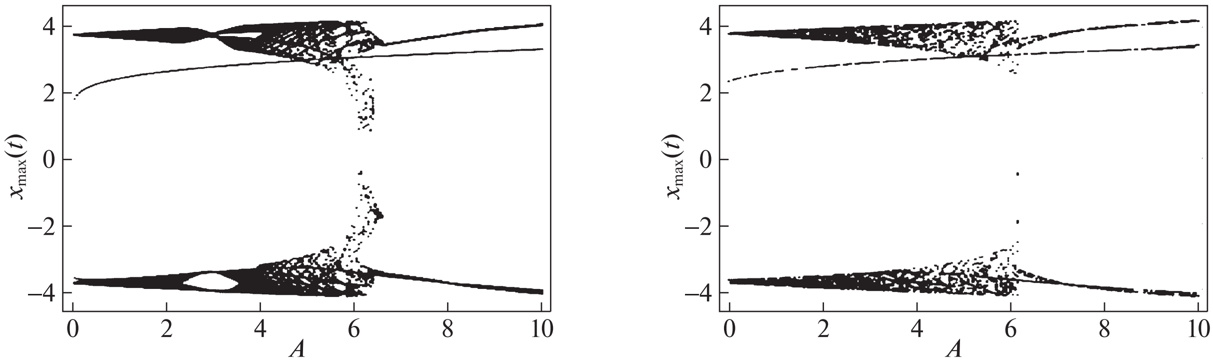

Рис. 5. Бифуркационные диаграммы в зависимости от амплитуды внешнего воздействия для систем (1.1), (1.8) при значениях $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$

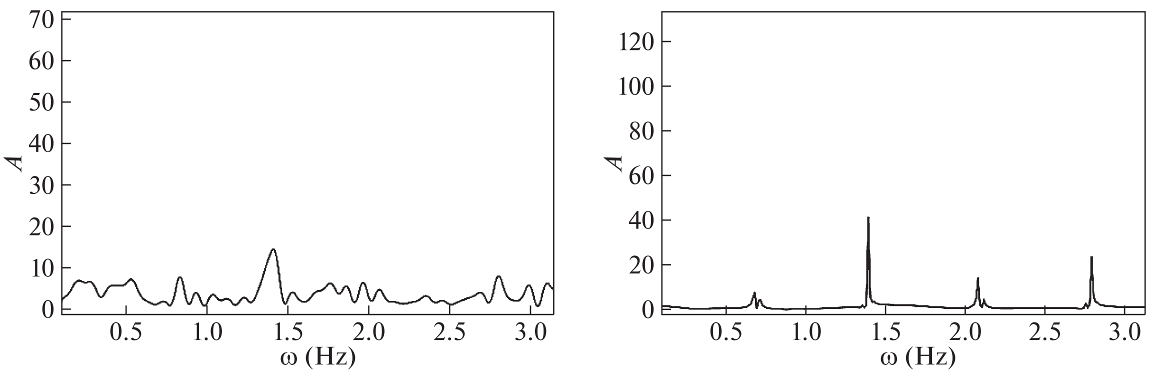

Рис. 6. Спектральные характеристики для систем (1.1) и (1.8) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$

динамических характеристик рассматриваемой системы. Как видно из рис. 3, *б* и 4, *б*, в системе (1.8) устанавливаются периодические колебания. Этот факт также подтверждают показатели Ляпунова: для уравнения (1.8) при значениях параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$ они будут равны [0.00018, −0.935628, −11.1694].

На рис. 5 представлены бифуркационные диаграммы для систем (1.1) и (1.8) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия.

На рис. 6 приведены спектры решения систем (1.1) и (1.8).

Спектр решения системы (1.1) является непрерывным, что, как известно, соответствует хаотическому поведению, в то время как спектр уравнения (1.8) демонстрирует четырехчастотное движение.

1.4. Синхронизация собственных колебаний осциллятора с частотой вынуждающей силы. Моделирование динамики системы (1.1) показало, что при значениях параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 = \pi$ и существенном влиянии периодической внешней силы $\omega_0^2 B = 2\pi$ в области значения параметра $\omega \in [0.8, 1.8]$ происходит синхронизация собственных колебаний с частотой вынуждающей силы. Отметим, что синхронизация по амплитуде внешнего воздействия при этом не возникает. Добавление гистерезисного звена, формализованного моделью Боука–Вена при указанных параметрах сдвигает интервал синхронизации $\omega \in [0.7, 1.7]$, что связано с регуляризирующей ролью гистерезисного звена.

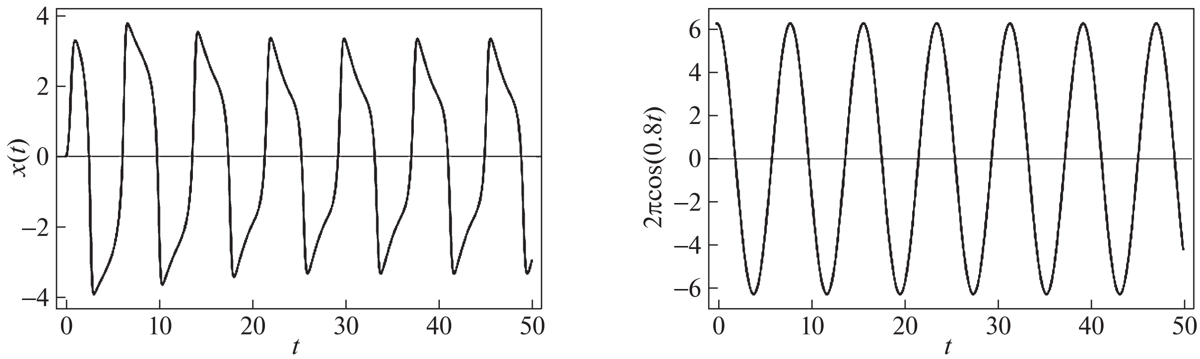

Рис. 7. Численное решение системы (1.1) и возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega_0^2 = \pi$, $\omega = 0.8$

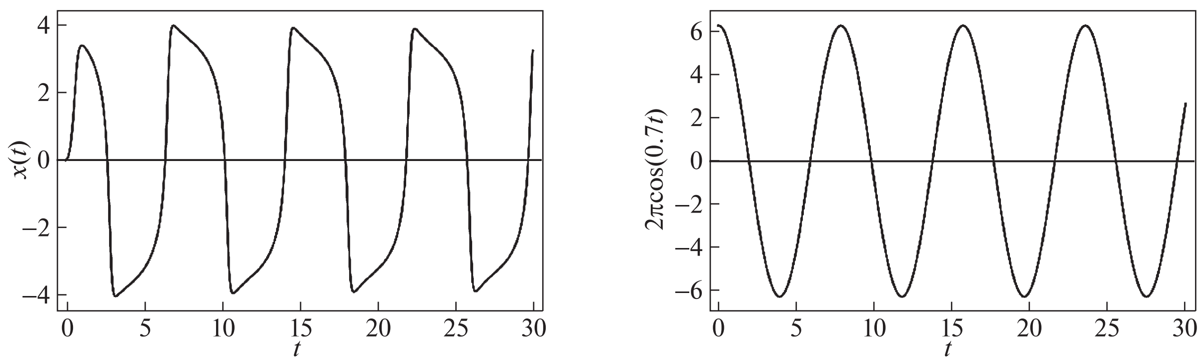

Рис. 8. Численное решение системы (1.8) и возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega_0^2 = \pi$, $\omega = 0.7$

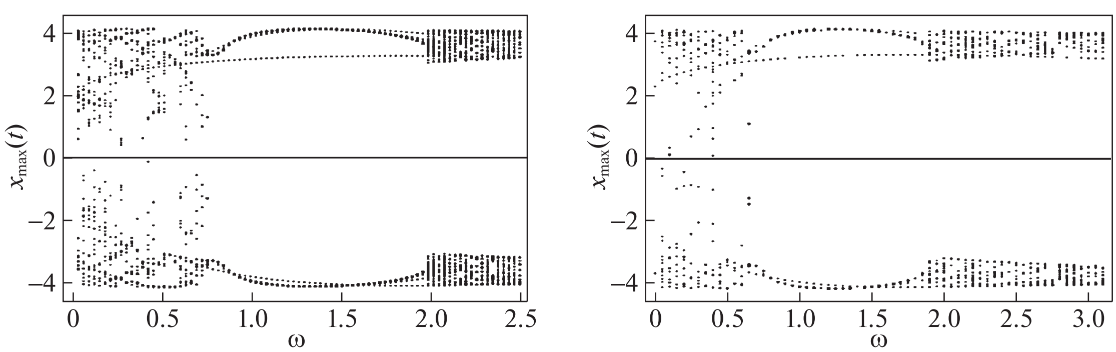

Рис. 9. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для систем (1.1) и (1.8) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega_0^2 = \pi$

На рис. 7–9 приведены графики решения уравнений (1.1) и (1.8) и соответствующие им графики поведения возмущающей силы, а также бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω.

Отметим, что увеличение амплитуды внешнего воздействия в уравнении (1.8) приводит к увеличению полосы синхронизации. Так, значению $B = 3$ соответствует интервал $\omega \in [0.4,\ 2.1]$, а значению $B = 4 - \omega \in [0.2,\ 2.4]$.

2. Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисной внешней силой. 2.1. Математическая модель. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases}\ddot{x} - \mu(1-\lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2\cos(\omega_v t),\\ \ddot{y} - \mu(1-\lambda y^2)\dot{y} + \omega_1^2 y = \nu x,\end{cases} \tag{2.1}$$

где μ и $\lambda = 1/\mu$ — управляющие параметры, ω_1 и ω_2 — частоты собственных колебаний осцилляторов, ω_v — частота внешнего сигнала, B — его амплитуда, ν — параметр связи между осцилляторами.

Исследуем взаимную синхронизацию осцилляторов x и y. Отметим, что в системе (2.1) осциллятор x будет являться ведущим, а y — ведомым.

Решение уравнений будем искать в виде $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, где $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а A_1, A_2 и φ_1, φ_2 — медленно меняющиеся функции времени.

Для удобства применения метода малого параметра, представим систему (2.1) в виде

$$\begin{cases}\ddot{x} + \omega_1^2 x = \mu(1-\lambda x^2)\dot{x} + B\omega_1^2\cos(\omega_v t),\\ \ddot{y} + \omega_1^2 y = \mu(1-\lambda y^2)\dot{y} + \nu x.\end{cases} \tag{2.2}$$

Учитывая порядок малости, вычислим $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$ и $\ddot{y}$. Так как равенства будут одинаковые с точностью до коэффициентов, приведем только два соотношения:

$$\dot{x} = \dot{A}_1\cos(\omega t + \varphi_1) - \dot{A}_1\sin(\omega t + \varphi_1)(\omega + \dot{\varphi}_1), \tag{2.3}$$

$$\ddot{x} = -2\dot{A}_1\omega\sin(\omega t + \varphi_1) - \dot{A}_1\cos(\omega t + \varphi_1)(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_1). \tag{2.4}$$

Используя соотношения (2.3) и (2.4), преобразуем отдельно левую и правую части уравнений системы (2.2) для осциллятора x:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -2\dot{A}_1\omega\sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1)(\dot{A}_1(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_1) + \omega_1^2\dot{A}_1), \tag{2.5}$$

$$\mu(1-\lambda x^2)\dot{x} + B\omega_1^2\cos(\omega_v t) = B\omega_1^2\cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1)\left(\mu\omega A_1 - \frac{A_1^3\omega}{4}\right). \tag{2.6}$$

С учетом аналогичных преобразований для осциллятора y запишем систему (2.2) в следующем виде:

$$\begin{cases}-2\dot{A}_1\omega\sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1)(\dot{A}_1(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_1) + \omega_1^2 A_1) =\\ = B\omega_1^2\cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1)\left(\mu\omega A_1 - \dfrac{A_1^3\omega}{4}\right),\\ -2\dot{A}_2\omega\sin(\omega t + \varphi_2) - \cos(\omega t + \varphi_2)(\dot{A}_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) =\\ = \nu A_1\cos(\omega t + \varphi_1) - \sin(\omega t + \varphi_2)\left(\mu\omega A_2 - \dfrac{A_2^3\omega}{4}\right).\end{cases} \tag{2.7}$$

Соотношения для амплитуды и фазы первого осциллятора были получены ранее в разд. 1.1:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\omega_1 B}{2}\sin\varphi_1 + A_1\left(\frac{\mu}{2} - \frac{A_1^2}{8}\right), \quad \dot{\varphi}_1 = \Delta - \frac{\omega_1 B}{2A_1}\cos\varphi_1.$$

Выполним преобразования для осциллятора y в системе (2.7) и получим эквивалентную систему для определения $\dot{A}_2$ и $\dot{\varphi}_2$:

$$\begin{cases}-2\dot{A}_2\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2(A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \nu A_1\sin\varphi_1 - \cos\varphi_2\left(\mu\omega A_2 - \dfrac{A_2^3\omega}{4}\right),\\ -2\dot{A}_2\omega\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2(A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \nu A_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\left(\mu\omega A_2 - \dfrac{A_2^3\omega}{4}\right).\end{cases} \tag{2.8}$$

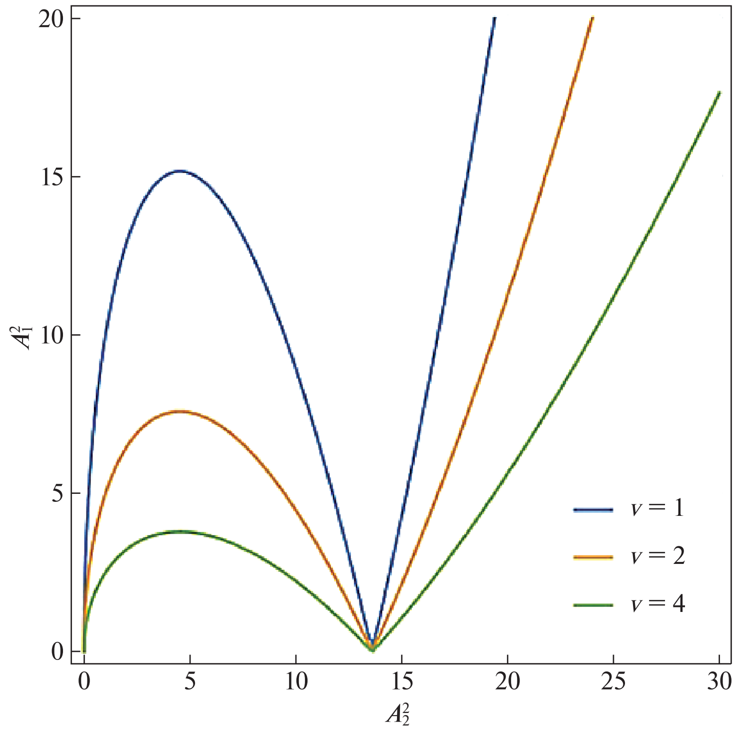

Рис. 10. зависимости A_1^2 от A_2^2 при различных значениях ν

Запишем соотношения для амплитуды и фазы осциллятора y:

$$\dot{A}_2 = A_2\left(\frac{\mu}{2} - \frac{A_2^2}{8}\right) - \frac{\nu A_1}{2\omega}\sin\Phi, \quad \dot{\varphi}_2 = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\nu A_1}{2\omega A_2}\cos\Phi, \quad \Phi = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{2.9}$$

В синхронном режиме, приравнивая (2.9) к нулю, получим следующее выражение:

$$\left(\frac{A_2\omega\mu}{\nu A_1}\left(1 - \frac{A_2^2}{4\mu}\right)\right)^2 + \left(\frac{A_2\omega\Delta}{\nu A_1}\right)^2 = 1. \tag{2.10}$$

Для получения зависимости между квадратами амплитуд A_1^2 и A_2^2 при различных значениях параметра ν приведем уравнение (2.9) к виду

$$A_2^6\omega^2\mu^2 - 8A_2^4\omega^2\mu^3 + A_2^2(16\omega^2\mu^4 - \omega^2\Delta^2) = 16\mu^2\nu^2A_1^2. \tag{2.11}$$

На рис. 10 приведена зависимость A_1^2 от A_2^2 при различных значениях ν.

2.2. Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Рассмотрим систему, аналогичную (2.1), с гистерезисным блоком в первом уравнении:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2\cos(\omega_\nu t) + b\Phi_{BW}(x,t), \\ \ddot{y} - \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \tag{2.12}$$

Уравнение для осциллятора x было подробно исследовано в разд. 2.2. Таким образом, соотношения для определения амплитуды и фазы колебаний для осциллятора x совпадают с уравнениями (1.16). Уравнение для осциллятора y осталось неизменным относительно системы (2.1), следовательно, амплитуда и фаза колебаний могут быть определены согласно уравнениям (2.9).

При рассмотрении систем (2.1) и (2.12) особое значение представляет динамика осциллятора y в зависимости от параметра, определяющего влияние гистерезисного звена. На рис. 11

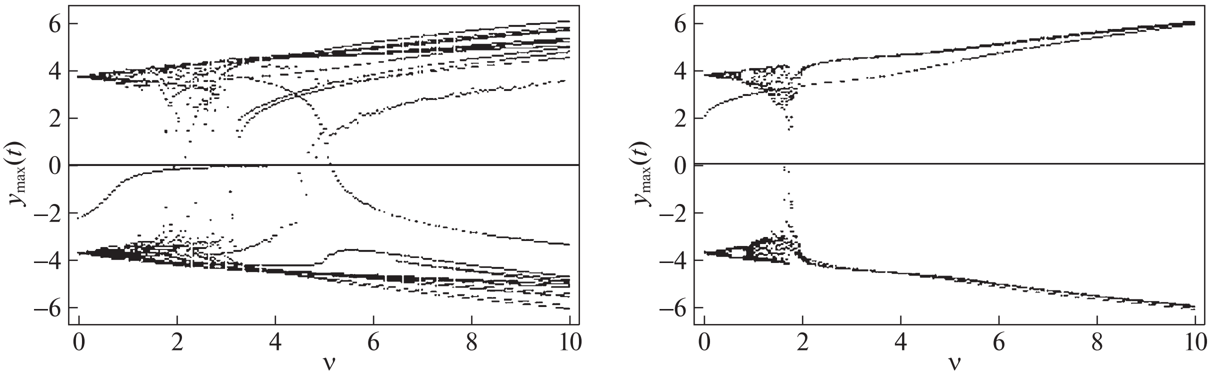

Рис. 11. Бифуркационная диаграмма поведения осциллятора y в зависимости от параметра ν

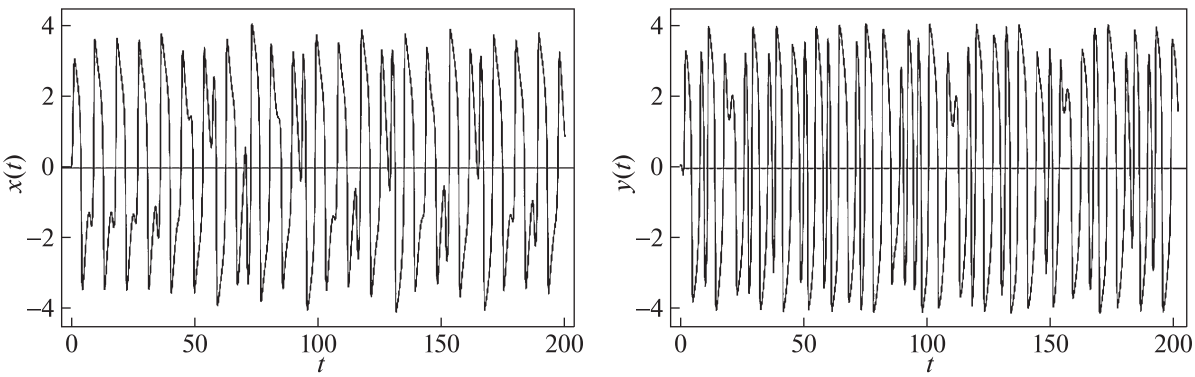

Рис. 12. Решения системы (2.1) при значениях $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$, $\nu = 2$

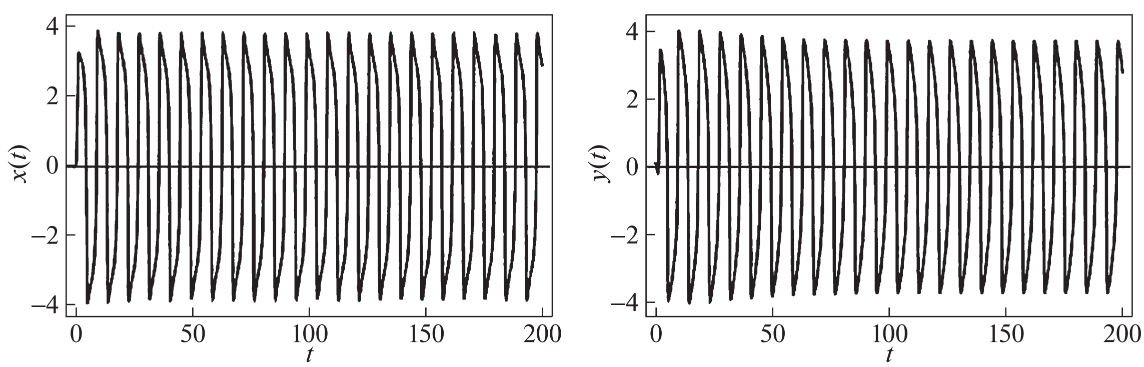

Рис. 13. Динамика осцилляторов x и y системы (2.12) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$, $b = 1.7$, $\nu = 2$

приведены бифуркационные диаграммы осциллятора y в зависимости от параметра ν для систем (2.1) и (2.12).

2.3. Численное моделирование системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Приведем результаты численного моделирования решения систем (2.1) и (2.12). Динамика осцилляторов x и y, а также их фазовые портреты отражены на рис. 12–15.

Из анализа аналитических и численных результатов для систем (2.1) и (2.12) следует вывод о регуляризирующей роли гистерезисного блока в системе. Для иллюстрации этого факта

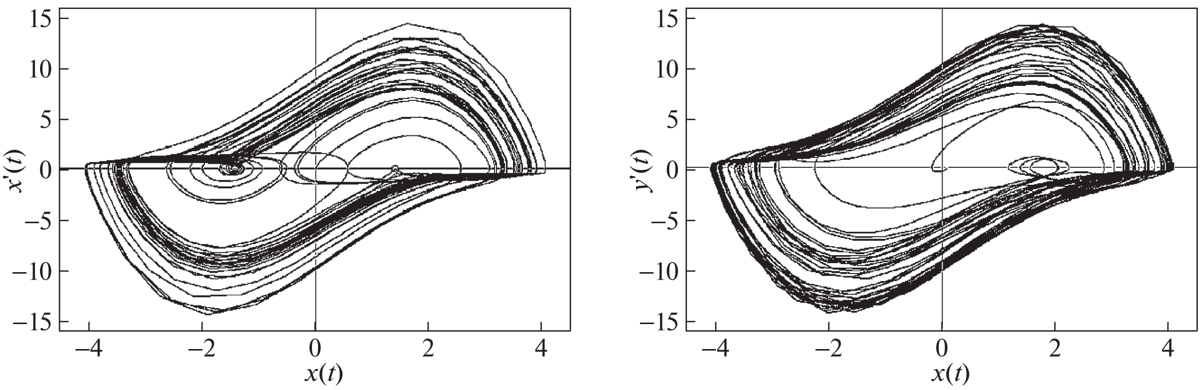

Рис. 14. Фазовые портреты осцилляторов x и y системы (2.1) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$, $\nu = 2$

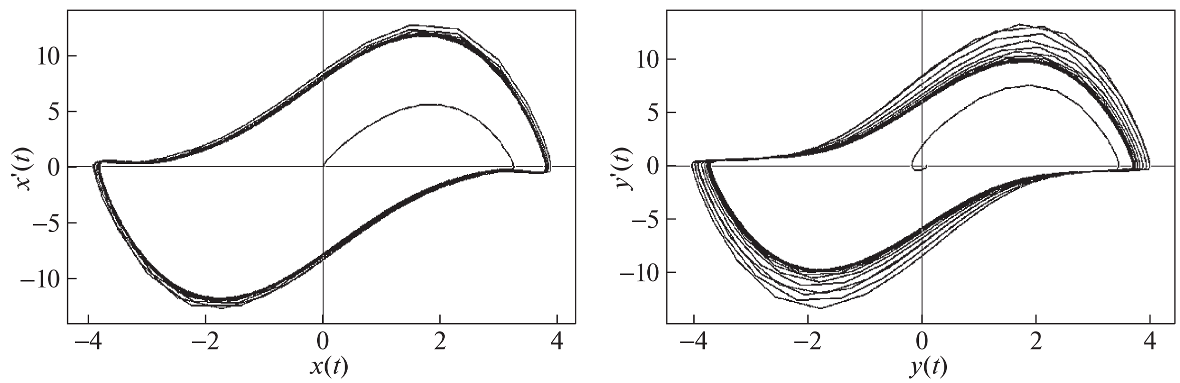

Рис. 15. Фазовые портреты x и y системы (2.12) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$, $b = 1.7$, $\nu = 2$

приведем спектр показателей Ляпунова. Для системы (2.1) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$ и $\nu = 2$ были получены следующие значения: [0.110291857, –0.15691426, –2.417233756, –4.93154012], что соответствует хаотическому режиму *a* для системы (2.12) при тех же значениях параметров, а также при $b = 1.7$ был получен следующий спектр: [0.000193202, −0.18328, −0.935938, −5.54008, −11.1454], т.е. устойчивый цикл (старший показатель незначимо отличается от нуля).

2.4. Синхронизация в системах связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Динамика систем (2.1) и (2.12), а также динамика вынуждающей силы отражены на графиках рис. 16, 17. При указанных значениях параметров наблюдается как взаимная синхронизация осцилляторов x и y, так и вынужденная синхронизация по частоте с внешним воздействием. Отметим, что в отличие от случая, когда рассматривался единственный осциллятор (1.1) и (1.8), область значения параметра ω_ν отличается. В частности, если говорить о взаимной синхронизации в системе (2.1), то значение параметра $\omega_\nu \in [0.8, 1.8]$, однако в случае вынужденной синхронизации значения ω_ν принадлежит отрезку [0.8, 1.1]. В системе (2.12) взаимная синхронизация происходит при значении параметра $\omega_\nu \in [0.7, 1.7]$, а вынужденная синхронизация – при $\omega_\nu \in [0.7, 1]$. Существенное влияние на полосу синхронизации осцилляторов оказывает параметр линейной связи ν. С увеличением параметра полоса синхронизации становится значительно уже при $\nu = 3.6$, взаимная синхронизация осцилляторов в системе (2.1) происходит при $\omega_\nu \in [0.7, 1.4]$, а вынужденная синхронизация – при $\omega_\nu \in [0.7, 0.9]$. Для системы (2.12) $\omega_\nu \in [0.8, 1.3]$ и $\omega_\nu \in [0.8, 1]$ соответственно.

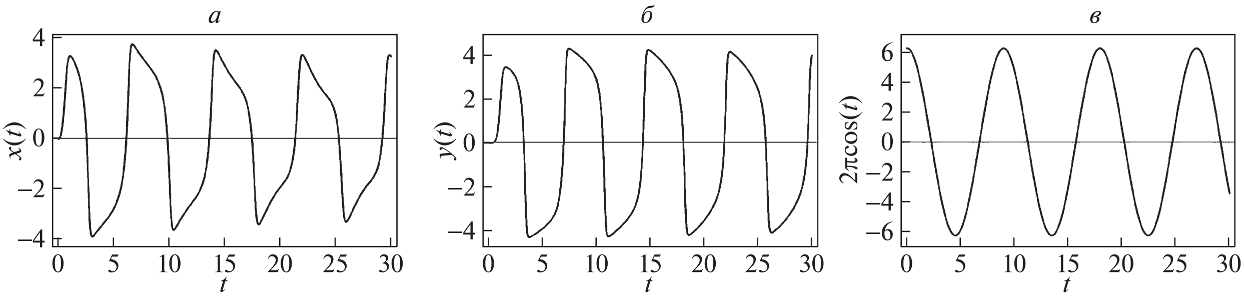

Рис. 16. Поведение осциллятора: *а* – x в системе (2.1); *б* – y в системе (2.1); *в* – возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2.6$, $B = 2$, $\omega_v = 0.8$

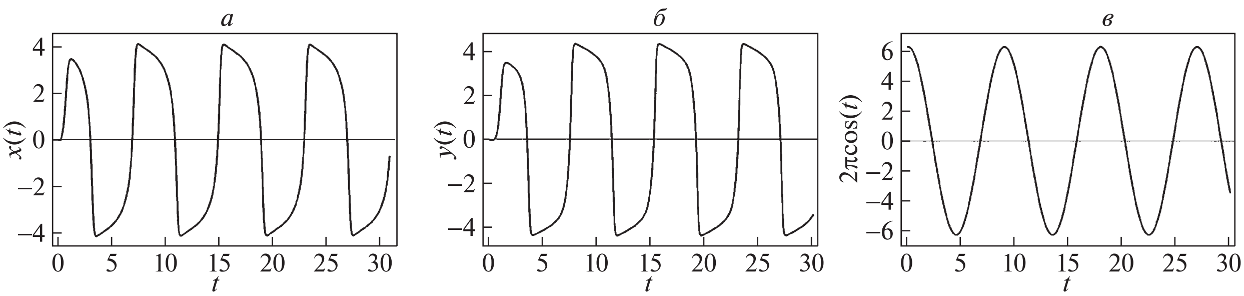

Рис. 17. Поведение осциллятора: *а* – x в системе (2.12); *б* – y в системе (2.12); *в* – возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2.6$, $B = 2$, $b = 1.7$, $\omega_v = 0.8$

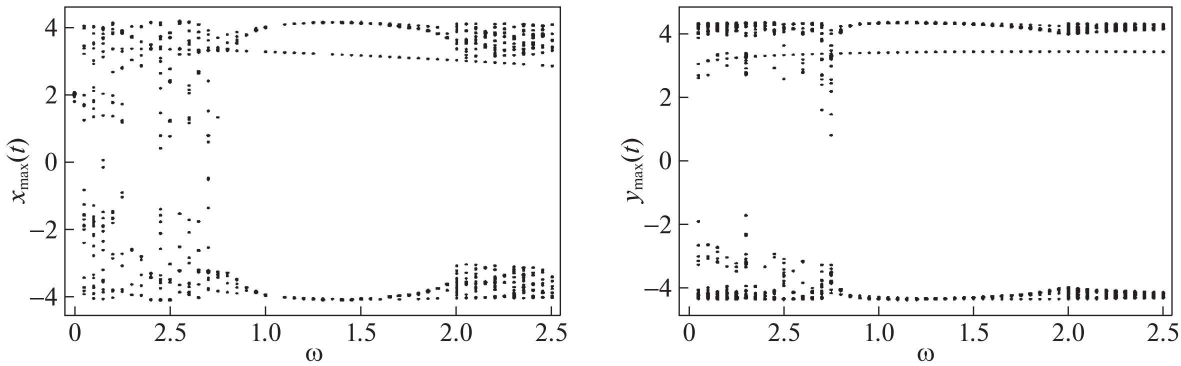

Рис. 18. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (2.1) для осциллятора x (слева) и для осциллятора y (справа) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2.6$, $B = 2$

На рис. 18, 19 приведены бифуркационные диаграммы поведения осцилляторов x и y в системах (2.1) и (2.12) в зависимости от параметра ω_v.

Поясним результаты, полученные выше. В системе (2.12) на вход гистерезисного блока подается сигнал, который представляет собой сумму, состоящую из собственных колебаний системы и отклика системы на внешнее периодическое воздействие. Синхронизация с внешним воздействием представляется затруднительной в силу того, что система обладает собственными сильными колебаниями, имеющими определенный период и “неправильную” форму. В том случае, когда спектральные характеристики собственных колебаний имеют ярко выраженную доминирующую частоту, происходит синхронизация (выход гистерезисного преобразователя имеет частоту).

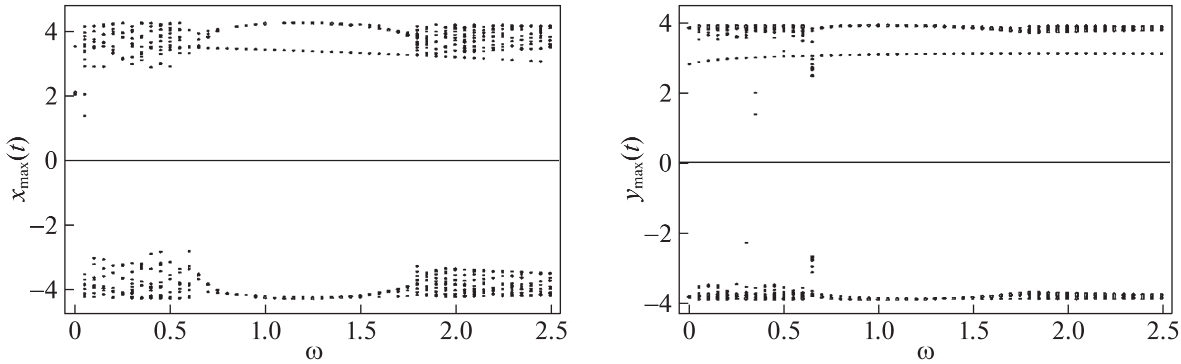

Рис. 19. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (2.12) для осциллятора x (слева) и для осциллятора y (справа) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2.6$, $b = 1.7$, $B = 2$

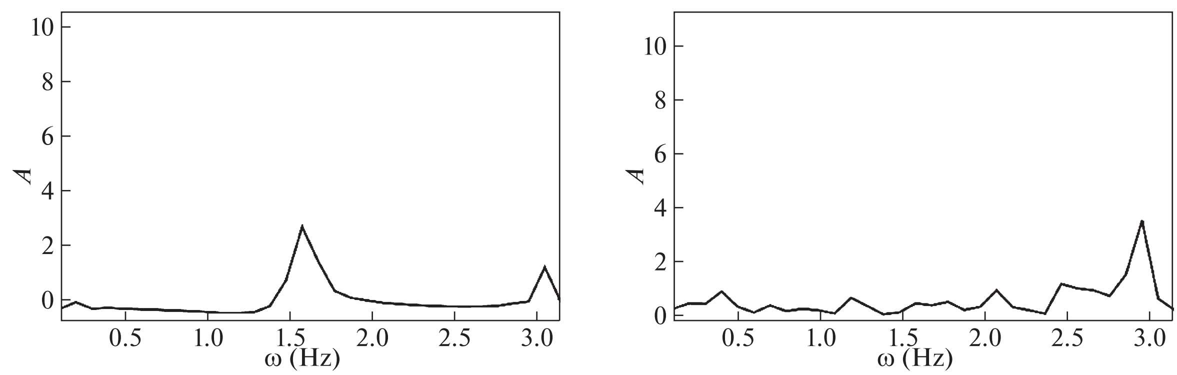

Рис. 20. Спектральная характеристика выхода гистерезисного преобразователя в уравнении (2.12) при значениях параметра, принадлежащих интервалу синхронизации осцилляторов x и y, $\omega_v = 0.8$ (слева), и при значениях параметра, не принадлежащих интервалу синхронизации $\omega_v = 1.9$ (справа)

На рис. 20 представлен спектр выхода гистерезисного преобразователя в зависимости от различных значений параметров ω_v.

2.5. Система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Рассматривается система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с несимметричной связью, в которой вынуждающая сила, действующая на первый из них, определяется выходом гистерезисного преобразователя, на вход которого подается рассогласование между скоростями осцилляторов:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} - \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \tag{2.13}$$

Численное решение системы (2.13) показало, что для осцилляторов x и y характерны различные режимы поведения. Приведем бифуркационные диаграммы в зависимости от различных параметров системы (рис. 21).

Также были вычислены показатели Ляпунова, при этом параметрам системы $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_v = 1$, $\nu = 1$ соответствуют значения [0.11806, −0.0392802, −0.317961, −0.621109, −2.03704]. Поведение осцилляторов x и y при соответствующих параметрах отражено на графиках рис. 22, 23.

В отличие от рассмотренного выше случая (2.1) и (2.12) с линейной связью между осцилляторами x и y синхронизация в системе (2.13) затруднительна, так как вынуждающая сила, действующая на первый осциллятор, определяется выходом гистерезисного преобразователя, вход

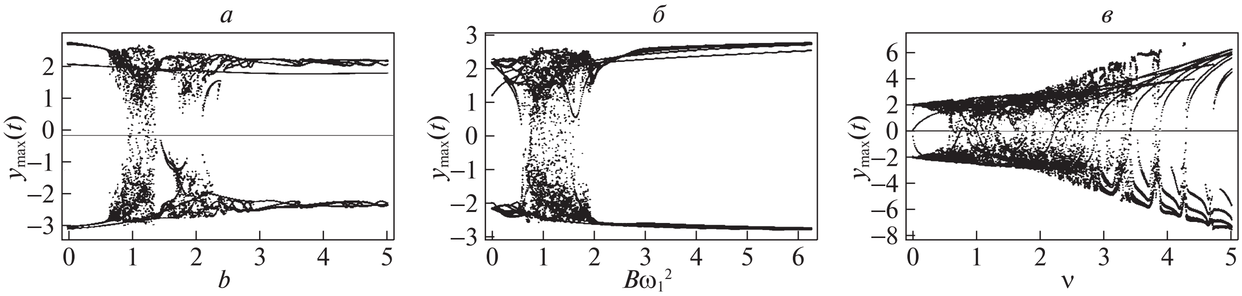

Рис. 21. Бифуркационные диаграммы поведения осциллятора y: *а* – в зависимости от коэффициента перед гистерезисным блоком b; *б* – в зависимости от амплитуды внешнего воздействия $B\omega_1^2$; *в* – в зависимости от параметра ν при $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$

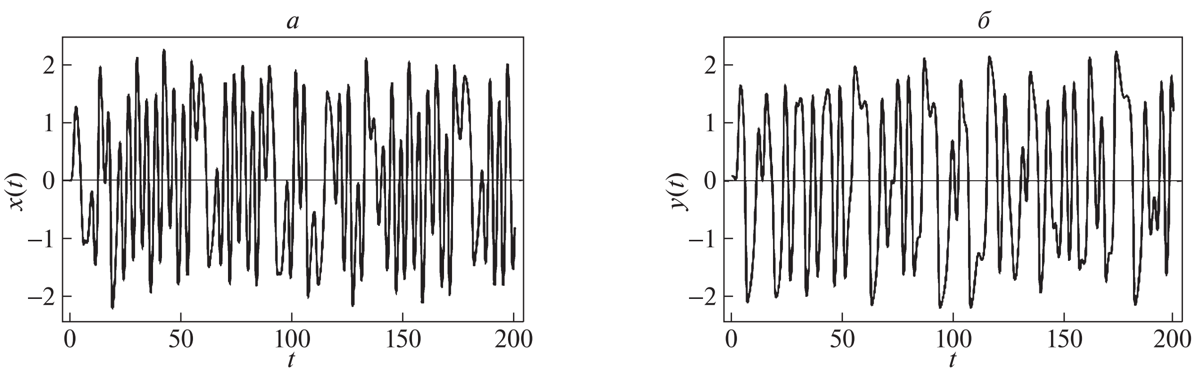

Рис. 22. Динамика поведения: *а* – осциллятора x; *б* – осциллятора y при значениях параметров $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_\nu = 1$, $b = 1.3$, $\nu = 1$

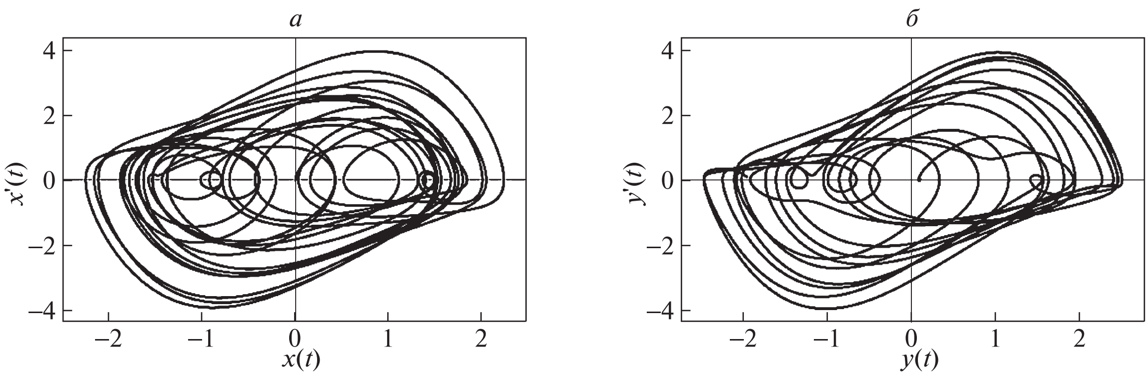

Рис. 23. Фазовый портрет: *а* – осциллятора x; *б* – осциллятора y при значениях параметров $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_\nu = 1$, $b = 1.3$, $\nu = 1$

которого в свою очередь зависит от рассогласования между скоростями осцилляторов. Однако были определены параметры системы, при которых возможна как внешняя, так и внутренняя синхронизация. Отметим, что внешняя синхронизация системы происходит только по частоте, тогда как при внутренней синхронизации частота и амплитуда совпадают. Параметры системы (2.13) $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$ при значении частоты внешнего гармонического воздействия $\omega_\nu = 1$ соответствуют интервалу внешней и внутренней синхронизаций осцилляторов x и y. На рис. 24 приведены графики, иллюстрирующие соответствующую динамику.

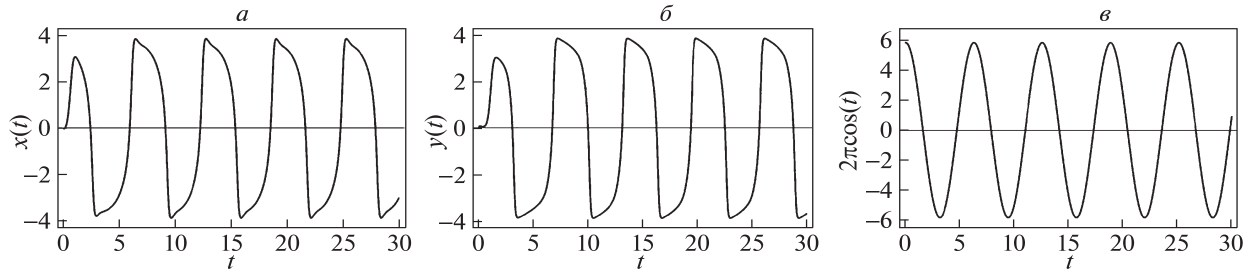

Рис. 24. Поведение осциллятора: *а* – x в системе (2.13); *б* – y в системе (2.13); *в* – возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$, $\omega_\nu = 1$

Исследование интервалов внешней синхронизации показало, что с увеличением параметра ν полоса синхронизации увеличивается. Так, параметрам $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$ соответствуют значения, принадлежащие интервалу $\omega_\nu \in [0.6,\ 1.9]$, а в случае $\nu = 3.6$ синхронизация возможна при $\omega_\nu \in [0.4,\ 2.2]$. Также удалось установить, что с увеличением влияния гистерезисного звена, т.е. с увеличением параметра b, полоса внешней синхронизации будет уменьшаться, а именно параметрам $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $\nu = 2.6$, $b = 3$ соответствует интервал $\omega_\nu \in [0.6,\ 1.7]$. Аналогичные результаты справедливы и для внутренней синхронизации: с увеличением параметра ν интервал увеличивается, а с увеличением параметра b интервал уменьшается.

Заключение. В работе рассмотрены различные динамические режимы осциллятора Ван-дер-Поля в условиях периодического воздействия при наличии гистерезисного блока в контуре обратной связи. С использованием техники асимптотических разложений (метода малого параметра) было получено аналитическое решение для уравнения осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием вынуждающей силы и гистерезисного воздействия, формализуемого посредством феноменологической модели Боука–Вена. Также была установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов. Идентифицирован диапазон значений параметров, соответствующих хаотическим и регулярным режимам движения, а также определены параметры, отвечающие синхронизации собственных колебаний осциллятора с внешней вынуждающей силой.

При рассмотрении системы двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля в условиях воздействия вынуждающей силы на один из них в аналитической форме получена зависимость между амплитудами и частотами собственных колебаний осцилляторов. Также было установлено, что гистерезисный блок существенным образом влияет как на внешнюю, так и на внутреннюю синхронизацию. Другими словами интервал внутренней синхронизации заметно увеличивается, при этом синхронизация с внешним воздействием оказывается затруднительна.

Исследована динамика системы перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с несимметричной связью, в которой вынуждающая сила определяется выходом гистерезисного преобразователя, на вход которого подается рассогласование между скоростями осцилляторов. Рассмотрены различные режимы динамики системы, а также синхронизация осцилляторов. Получены количественные оценки влияния на синхронизацию параметра связи между осцилляторами, а также параметра, определяющего влияние гистерезисного звена.

Представленные в статье результаты ориентированы в первую очередь на расширение классов систем, динамика которых моделируется осцилляторами (системами связанных осцилляторов) Ван-дер-Поля. Как было отмечено выше, список реальных технических систем, а также биологических, экономических систем, систем различных органов в организме человека и животных, поведение которых моделируется посредством систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, достаточно широк. При этом гистерезисные особенности естественным образом проявляются в динамике механических (роботизированных) систем вследствие старения и износа их составляющих (действительно, люфты и упоры – преобразователи гистерезисной природы могут быть конструктивно инсталлированы в соответствующие системы или проявиться в них с течением времени). В связи с этим возможность учитывать на модельном уровне гистерезисные свойства роботизированных систем расширяет возможности идентификации их разнообразных динамических режимов, что в конечном итоге повышает адекватность соответствующих математических моделей. Применительно к задачам экономики, биологии, медицины, в которых исследуются модели автоколебательных систем, включение в указанные модели гистерезисных блоков позволит учесть такую важную их особенность, как локальная память. Действительно, для многих систем из указанных предметных областей типична ситуация, когда будущее зависит не только от текущего состояния и формализованных связей, но и от предыстории. Это свойство внутренне присуще гистерезисным преобразователям. Кроме того гистерезисные блоки, как было показано в работе, обладают фильтрующими свойствами, что позволяет рассматривать их как один из инструментов управления динамическими системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Veskos P., Demiris Y.* Developmental Acquisition of Entrainment Skills in Robot Swinging Using van der Pol Oscillators // Proc. Fifth International Workshop on Epigenetic Robotics: Modeling Cognitive Development in Robotic Systems Lund University Cognitive Studies. Nara, Japan. 2005. P. 87.
2. *Yabuno H., Kaneko H., Kuroda M., Kobayashi T.* Van der Pol Type Self-excited Micro-cantilever Probe of Atomic Force Microscopy // Nonlinear Dyn. 2008. № 54. P. 137.
3. *Dutra M.S., de Pina Filho A.C., Romano V.F.* Modeling of a Bipedal Locomotor Using Coupled Nonlinear Oscillators of Van der Pol // Biol. Cybern. 2003. V. 88. P. 286.
4. *Klinger T., Piel A., Seddighi F., Wilke C.* Van der Pol Dynamics of Ionization Waves // Physics Letters A. 1993. V. 182. № 2, 3. P. 312.
5. *Van der Pol B., Van der Mark J.* The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillation, and an Electrical Model of the Heart // Philosophical Magazine & Journal of Science. 1928. V. 6. № 38. P. 763.
6. *Ryzhii E., Ryzhii M.* Modeling of Heartbeat Dynamics with a System of Coupled Nonlinear Oscillators // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 404. P. 67–75.
7. *Dos Santos Angela M., Lopes Sergio R., Viana R.L.Ricardo L.* Rhythm Synchronization and Chaotic Modulation of Coupled Van der Pol Oscillators in a Model for the Heartbeat // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier. 2004. V. 338 (3). P. 335–355.
8. *Булдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И.* Моделирование связей в системе “сердце-сосуды” // Наука и образование. Электронный научно-технический журнал. 2013. № 1. С. 123.
9. *Lucero J., Schoentgen J.* Modeling Vocal Fold Asymmetries with Coupled van der Pol Oscillators // Proceedings of Meetings on Acoustics. 2013. V. 19 (1). P. 060165.
10. *Long G.R., Tubis A., Jones K.L.* Modeling Synchronization and Suppression of Spontaneous Otoacoustic Emissions Using Van der Pol oscillators: Effects of Aspirin Administration // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 3. P. 1201.
11. *Dutra M.S., de Pina Filho A.C., Romano V.F.* Modeling of a Bipedal Locomotor Using Coupled Nonlinear Oscillators of Van der Pol // Biol. Cybern. 2003. V. 88. P. 286.
12. *Kumar P., Kumar A., Racic V., Erlicher S.* Modelling Vertical Human Walking Forces Using Self-sustained Oscillator // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. V. 99. P. 345–363.
13. *Belykh I., Jeter R., Belykh V.* Foot Force Models of Crowd Dynamics on a Wobbly Bridge // Science Advances. 2017. V. 3. № 11. P. e1701512.
14. *Соловьёв А.М., Кабулова Е.Г., Семёнов М.Е.* Модель динамики биологической нейронной сети с гистерезисными связями // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 1. С. 133–141.
15. *Андронов А.А.*, *Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. Под ред. Н.А. Железцова. 2-е изд. М.: Наука, 1981. 914 с.
16. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
17. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 121–149.
18. *Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.* Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
19. *Глебов С.Г., Зотов А.Н.* Управление системой с двумя степенями свободы посредством потенциальных сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 161–167.
20. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 3–15.
21. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 3–15.
22. *Pyragas K.* Continuous Control of Chaosby Self-Controlling Feedback // Phys. Lett. 1992. V. 170. P. 421–427.

23. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 175–177.

24. *Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Sobolev V.A., Bogaychuk A.N.* The van der Pol Oscillator Under Hysteretic Control: Regular and Chaotic Dynamics // J. Physics: Conference Series. 2019. V. 1368. P. 042030.

25. *Arena A., Carboni B., Lacarbonara W.* Nonlinear Dynamic Response of Hysteretic Wire Ropes: Modeling and Experiments // ASME 2018 Intern. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf. Quebec City, Canada, 2018. P. V008T10A050.

26. *Antonelli M., Carboni B., Lacarbonara W., Bernardini D., Kalmar-Nagy T.* Quantifying Rate-Dependence of a Nonlinear Hysteretic Device // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices. 2020. V. 1. P. 347–355.

27. *Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S.* Dynamical Response Identification of a Class of Nonlinear Hysteretic Systems // J. Intelligent Material Systems and Structures. 2018. V. 29. P. 2795–2810.

28. *Yudaev S., Rachinskii D., Sobolev V.* Asymptotic Solution for a Biped Walker Model: Slow-Fast Systems and Hysteresis: Theory and Applications // Extended Abstracts Summer. 2018. V. 10. P. 95–99.

29. *Fahsi A., Belhaq M.* Hysteresis Suppression and Synchronization Near 3:1 Subharmonic Resonance // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 42. P. 1031–1036.

30. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* A Model of Hysteresis Arising From Social Interaction Within a Firm // J. Physics: Conference Series. 2017. V. 811. P. 012011.

31. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* On the Rationale for Hysteresis in Economic Decisions // J. Physics: Conference Series. 2017. V. 811. P. 012012.

32. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Balthazar J.M.* Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers // Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics. Springer Proceedings in Physics, Cham: Springer, 2018. V. 199. P. 259–275.

33. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.* Stabilization of Coupled Inverted Pendula: From Discrete to Continuous Case // J. Vibration and Control. 2020. April. https://doi.org/10.1177/1077546320923436

34. *Семенов М.Е., Матвеев М.Г., Лебедев Г.Н., Соловьёв А.М.* Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. № 8. С. 516–525.

35. *Семенов М.Е., Матвеев М.Г., Мелешенко П.А., Соловьев А.М.* Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского// Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. № 20. С. 106–113.

36. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Reshetova O.O.* Efficiency of Hysteretic Damper in Oscillating Systems // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2020. V. 15. P. 43.

37. *Semenov M.E., Reshetova O.O., Tolkachev A.V., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.* Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model // Topics in Nonlinear Mechanics and Physics. V. 228. Singapore: Springer, 2019. P. 229–253.

38. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.

39. *Ikhouane F., Rodellar J.* On the Hysteretic Bouc–Wen Model // Nonlinear Dyn. 2005. V. 42. P. 63–78.

40. *Ikhouane F., Rodellar J.* Systems with Hysteresis: Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model. N.Y.: John Wiley & Sons, 2007.

41. *Charalampakis A.E., Koumousis V.K.* Identification of Bouc–Wen Hysteretic Systems by a Hybrid Evolutionary Algorithm // J. Sound and Vibration. 2008. V. 314. P. 571–585.

42. *Charalampakis A.E., Koumousis V.K.* A Bouc–Wen Model Compatible With Plasticity Postulates // J. Sound and Vibration. 2009. V. 322. P. 954–968.

43. *Семенов М.Е., Мелешенко П.А., Решетова О.О.* Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2018. № 3. С. 158–171.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 27–45

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62-50

СВОЙСТВО СТАБИЛЬНОСТИ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ[1]

А. А. Зимовец[a,*], А. Р. Матвийчук[a,], А. В. Ушаков[a,***], В. Н. Ушаков[a,****]**

[a] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

*e-mail: aazimovets@gmail.com

**e-mail: matv@uran.ru

***e-mail: aushakov.pk@gmail.com

****e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 18.11.2019 г.
После доработки 29.11.2020 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается нелинейная конфликтно управляемая система на конечном промежутке времени и в конечномерном пространстве, стесненная нестационарными фазовыми ограничениями. Изучается игровая задача о сближении в фиксированный момент времени с компактом в фазовом пространстве системы. Исследуется центральное в теории позиционных дифференциальных игр свойство стабильности. Приведены некоторые модификации определения *u*-стабильного моста и аппроксимирующей этот мост системы множеств. Эти модификации ориентированы на разработку алгоритмов приближенного вычисления решений в конкретных игровых задачах о сближении при наличии фазовых ограничений на систему. Описаны две конкретные задачи о сближении, для которых проведено математическое моделирование и представлены результаты моделирования.

DOI: 10.31857/S0002338821040132

Введение. Рассматривается нелинейная конфликтно управляемая система на конечном промежутке времени. Фазовый вектор системы принадлежит конечномерному евклидову пространству и стеснен нестационарным фазовым ограничением. Изучается игровая задача о сближении системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени в рамках теории позиционных дифференциальных игр [1–4]. Исследуется центральное в этой теории свойство стабильности, введенное в дифференциальные игры Н.Н. Красовским [1, 2]. Предлагается схема приближенного конструирования максимального *u*-стабильного моста — множества разрешимости в задаче о сближении.

Отметим, что задача о сближении в игровой постановке является одной из центральных и наиболее важных задач теории управления динамическими системами, функционирующими в условиях неопределенности [1–9]. Она актуальна во многих приложениях. Многие задачи управления из механики, экономики и физики могут быть формализованы и решаться как игровые задачи управления нелинейными динамическими системами на конечном промежутке времени [9–13].

В работе рассматриваются две конкретные задачи управления нелинейными динамическими системами — задача об управлении механической системой “маятник на тележке” и задача об управлении четырехколесным автомобилем (машиной Дубинса) при наличии подвижных фазовых ограничений. В этих задачах моделируется численно построение множеств разрешимости, разрешающих управлений и траекторий на конечном промежутке времени, приводится графическое сопровождение результатов численного моделирования.

По своей тематике работа близка к [1–16].

[1] Работа В.Н. Ушакова и А.В. Ушакова выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 19-11-00105).

1. Постановка задачи. Пусть задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 \leq \vartheta < \infty$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v), \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, $P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$, $Q \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^q)$, где $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ — метрическое пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой.

Предполагается, что выполнены следующие условия на функцию $f(t, x, u, v) = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v)$.

Условие A. Вектор-функции $f^{(1)}(t, x, u)$ и $f^{(2)}(t, x, v)$ определены и непрерывны на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$ и $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times Q$ соответственно, и для любого компакта $\mathbf{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \left\| f^{(1)}(t, x^{(1)}, u) - f^{(1)}(t, x^{(2)}, u) \right\| &\leq \mathbf{L} \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\|, \\ \left\| f^{(2)}(t, x^{(1)}, v) - f^{(2)}(t, x^{(2)}, v) \right\| &\leq \mathbf{L} \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\| \end{aligned} \tag{1.2}$$

для любых $(t, x^{(i)}) \in \mathbf{D}$, $i = 1, 2$, $u \in P$, $v \in Q$.

Условие B. Существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \mu(1 + \|x\|) \quad \text{для любых} \quad (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q;$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Считаем, что, наряду с системой (1.1), заданы целевое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ и множество Φ — ограниченная замкнутая область в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in \Phi\} \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$;

б) многозначное отображение $t \mapsto \Phi(t)$ непрерывно на $[t_0, \vartheta]$ в хаусдорфовой метрике;

в) $M \subset \Phi(\vartheta)$.

Рассматриваемая здесь игровая задача заключается в следующем.

Задача о сближении. Первому игроку требуется выбором управления $u = u(t)$ обеспечить приведение движения $x(t)$ системы (1.1) в момент ϑ на множество M, как бы ни действовал второй игрок в рамках допустимых позиционных управлений $v = v(t, x)$. При этом до момента ϑ управление первого игрока $u = u(t)$ должно обеспечивать включение

$$(t, x(t)) \in \Phi. \tag{1.3}$$

Решение задачи о сближении требуется обеспечить в классе позиционных стратегий $u(t, x)$ первого игрока или в классе позиционных процедур управления этого игрока.

В [2] показано, что для сформулированной игровой задачи о сближении справедливо следующее утверждение: существует такое замкнутое множество $W^0 \subset \Phi$, называемое *множеством позиционного поглощения*, что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in \Phi \backslash W^0$ задача о сближении не разрешима.

Установлено, что множество W^0 есть максимальный (по включению) u-стабильный мост. Свойство стабильности было введено в дифференциальные игры в работах [1, 2]. Это свойство можно облечь в различные формулировки; самая ранняя его формулировка дана в этих публикациях.

Множество W^0, которое для простоты будем называть множеством разрешимости задачи о сближении, допускает аналитическое описание в немногих случаях, поэтому важен вопрос о приближенном построении W^0. Вопросу о приближенном конструировании W^0 посвящены работы [14–16]. При приближенном конструировании W^0 используется не непосредственно свойство u-стабильности, а некоторые его модификации.

2. Свойство u-стабильности, u-стабильные мосты и u-стабильные тракты в задаче о сближении. Свойство u-стабильности – ключевое при выделении множества W^0 в фазовом ограничении Φ. Для какого-либо замкнутого множества W в Φ его u-стабильность означает слабую инвариантность W относительно некоторого набора дифференциальных включений, индуцированных системой (1.1) на промежутке $[t_0, \vartheta]$. Как известно, свойство слабой инвариантности множеств относительно дифференциальных включений хорошо изучено, например [3].

Упомянутый набор дифференциальных включений (д.в.) зададим ниже.

Для этого введем некоторую ограниченную замкнутую цилиндрическую область $\mathbf{D} = [t_0, \vartheta] \times \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, настолько большую, что в ней будут заведомо содержаться все элементы разрешающей задачу о сближении конструкции. В том числе в этой области содержатся множество $M^* = (\vartheta, M) = \{(\vartheta, x) : x \in M\}$, фазовое ограничение Φ и множество разрешимости W^0 задачи о сближении – максимальный u-стабильный мост.

Итак, считаем, что все элементы разрешающей конструкции содержатся в $\mathbf{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Для любых $(t, x, v) \in \mathbf{D} \times Q$ определим множество

$$F_v(t, x) = F^{(1)}(t, x) + f^{(2)}(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m,$$

$$F^{(1)}(t, x) + f^{(2)}(t, x, v) = \{f = f^{(1)} + f^{(2)}(t, x, v) : f^{(1)} \in F^{(1)}(t, x)\},$$

где $F^{(1)}(t, x) = \operatorname{co}\mathcal{F}^{(1)}(t, x)$ – выпуклая оболочка множества $\mathcal{F}^{(1)}(t, x) = \{f^{(1)}(t, x, u) : u \in P\}$.

З а м е ч а н и е. Существует такая положительная функция $\omega^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_v(t_*, x_*), F_v(t^*, x^*) \leq \omega^*\left(\left|t_* - t^*\right| + \left\|x_* - x^*\right\|\right), \quad (t_*, x_*),\ (t^*, x^*) \in \mathbf{D}, \quad v \in Q,$$

а также

$$d(F_v(t_*, x_*), F_v(t_*, x^*)) \leq \mathbf{L}\left\|x_* - x^*\right\|, \quad (t_*, x_*),\ (t_*, x^*) \in \mathbf{D}, \quad v \in Q.$$

Здесь $\mathbf{L}$ – постоянная Липшица из условия A, отвечающая области $\mathbf{D}$; $d(F_*, F^*)$ – хаусдорфово расстояние между F_* и F^* из $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Введем в рассмотрение д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in F_v(t, x), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad v \in Q. \tag{2.1}$$

Дадим определение оператора u-стабильного поглощения в задаче о сближении, выраженное на языке многозначных отображений $(t, x) \to F_v(t, x)$, $v \in Q$ и д.в. (2.1) (см., например, [14]).

Предварительно введем обозначения: $X_v(t^*, t_*, x_*)$ – множество достижимости д.в. (2.1) в момент t^* ($t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$) с начальным условием $x(t_*) = x_*$;

$$X_v(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_v(t^*\, t_*, x_*);$$

$$X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X^* \cap X_v(t^*, t_*, x_*) \neq \varnothing\};$$

$$\widehat{X}^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \bigcap_{v \in Q} X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*);$$

$$X^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \Phi(t_*) \cap \widehat{X}^{-1}(t_*, t^*, X^*).$$

Здесь X_* и X^* – множества из $\mathbb{R}^m$.

Определение 1 (см. [14]). Оператором u-стабильного поглощения π в задаче о сближении (разд. 1) назовем многозначное отображение $(t_*, t^*, X^*) \to \pi(t_*, t^*, X^*) \subset \mathbb{R}^m$, $(t_*, t^*, X^*) \in \Delta^* \times 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*, t^*, X^*) = X^{-1}(t_*, t^*, X^*).$$

Определение 2 (см. [14]). Замкнутое множество $W \subset \Phi$ назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении, если

$$W(\vartheta) \subset M, \quad W(t_*) \subset \pi(t_*, t^* W(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \Delta^*,$$

здесь $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$; $\Delta^* = \{(t_*, t^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \le t_* \le t^* \le \vartheta\}$. Обозначим символом W^0 максимальный (по включению) u-стабильный мост [1, 2]. Такой мост в задаче о сближении существует и $W^0 \subset \mathbf{D}$, $W^0(\vartheta) \subset M$.

Введем время $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которое назовем обратным временем.

Представим конфликтно управляемую систему (1.1) в терминах обратного времени в виде

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad z \in \mathbb{R}^m. \tag{2.2}$$

Вектор-функцию $h(\tau, z, u, v)$ запишем как

$$h(\tau, z, u, v) = h^{(1)}(\tau, z, u) + h^{(2)}(\tau, z, v),$$

где

$$h^{(1)}(\tau, z, u) = -f^{(1)}(t_0 + \vartheta - \tau, z, u), \quad h^{(2)}(\tau, z, v) = -f^{(2)}(t_0 + \vartheta - \tau, z, v),$$

$$\tau \in [t_0, \vartheta], \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

Наряду с системой (2.2) рассмотрим д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_v(\tau, z) = -F_v(t_0 + \vartheta - \tau, z), \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad v \in Q. \tag{2.3}$$

Введем обозначения при $t_0 \le \tau_* < \tau^* \le \vartheta$:

$Z_v(\tau^*, \tau_*, z_*)$ – множество достижимости в момент τ^* д.в. (2.3) с начальным условием $z(\tau_*) = z_*$;

$$Z_v(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z_v(\tau^*, \tau_*, z_*), \quad Z_* \subset \mathbb{R}^m;$$

$$\widehat{Z}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap_{v \in Q} Z_v(\tau^*, \tau_*, Z_*);$$

$$Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \widehat{Z}(\tau^*, \tau_*, Z_*) \cap \Phi(\tau^*).$$

Введем также отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \to Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ на множестве $\{(\tau^*, \tau_*, Z_*) : t_0 \le \tau_* < \tau^* \le \vartheta$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m\}$. Задав между тройками (t_*, t^*, X^*) и (τ^*, τ_*, Z_*) соответствие с помощью равенств

$$\tau^* = t_0 + \vartheta - t_*, \quad \tau_* = t_0 + \vartheta - t^*, \quad Z_* = X^*,$$

запишем определение оператора π u-стабильного поглощения в терминах обратного времени τ.

Определение 3. Оператором u-стабильного поглощения χ в задаче о сближении назовем многозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \to \chi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $(t_0 \le \tau_* < \tau^* \le \vartheta$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m)$, заданное соотношением

$$\chi(\tau^*, \tau_*, Z_*) = Z(\tau^*, \tau_*, Z_*).$$

Определение 4. Замкнутое множество $Z \subset \Phi$ назовем *u-стабильным трактом* в задаче о сближении, если

$$Z(t_0) \subset M, \quad Z(\tau^*) \subset \chi(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)), \quad t_0 \le \tau_* < \tau^* \le \vartheta. \tag{2.4}$$

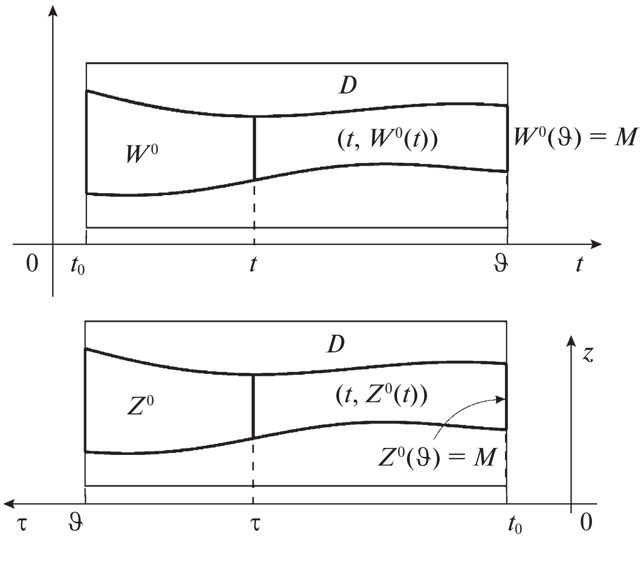

Рис. 1. Множества W^0 и Z^0 в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$

О п р е д е л е н и е 5. Множество $Z^0 \subset \mathbf{D}$, где $Z^0(\tau) = W^0(t)$, $t + \tau = t_0 + \vartheta$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, назовем *максимальным u-стабильным трактом системы* (2.2).

В самом деле, Z^0 есть максимальный по включению u-стабильный тракт системы (2.2).

Множества W^0 и Z^0 изображены на рис. 1.

3. Аппроксимирующая система $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$. Пользуясь конструкциями обратного времени τ, сведем приближенное вычисление максимального u-стабильного моста W^0 к приближенному вычислению максимального u-стабильного тракта Z^0 системы (2.2).

В связи с этим введем в этом разделе аппроксимирующую систему $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Аппроксимирующая система $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ есть то понятие, которое составляет теоретическую основу для разработки алгоритма приближенного вычисления множества Z^0 в задаче о сближении. Это понятие возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы, отвечающей промежутку $[t_0, \vartheta]$, дискретной схемой, отвечающей конечному разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. А именно, вместо промежутка $[t_0, \vartheta]$ рассматривается двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ $(N = 2^r, r \in \mathbb{N})$, и множества $Z_v(\tau^*, \tau_*, z_*)$, $v \in Q$ из разд. 2 подменяются более удобными для вычисления выпуклыми множествами $z_* + \delta H_v(\tau_*, z_*)$, $\delta = \tau^* - \tau_*$, $v \in Q$. Соответственно этому определения множеств $Z(\tau^*, \tau_*, z_*)$ и $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ трансформируются в определения множеств, задействованных в дискретной схеме приближенного вычисления Z^0.

Прежде чем определить аппроксимирующую систему $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, введем в рассмотрение “промежуточную” систему $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$, также отвечающую разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Заметим при этом, что система $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ не задействована в приближенных вычислениях множества Z^0, а является лишь вспомогательной системой в наших рассуждениях, обосновывающих корректность (аппроксимирующую сущность) системы $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$.

Итак, пусть $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ — двоичное разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N = 2^r$, где $r \in \mathbb{N}$. Разбиению Γ сопоставим систему $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $Z^0(\tau_i) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau_i, z) \in Z^0\}$ — временны́х сечений множества Z^0. Наряду с системой

$\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ определим систему $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ при помощи рекуррентного соотношения $Z^\Gamma(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$, $i = \overline{1, N}$, где $Z^\Gamma(\tau_0) = M$.

Так как, согласно определению множества Z^0, его сечения $Z^0(\tau_i)$ удовлетворяют соотношениям

$$Z^0(\tau_0) = M, \quad Z^0(\tau_i) \subset Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^0(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.1}$$

то

$$Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i), \quad i = \overline{0, N}. \tag{3.2}$$

Введем последовательность двоичных разбиений $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $n \in \mathbb{N}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, где $N(n) = 2^{n-1}$.

В этой последовательности каждое последующее разбиение содержит предыдущие разбиения.

Для упрощения обозначений полагаем $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{0, N(n)}$, и каждому разбиению $\Gamma^{(n)}$ по аналогии с разбиением Γ сопоставляем систему $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ множеств

$$Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M, \quad Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)})), \quad i = \overline{1, N(n)}.$$

Для любого двоичного момента $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ справедливы включения

$$Z^0(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad Z^{(k)}(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad \text{где} \quad n < k, \quad \tau_* \in \Gamma^{(n)}. \tag{3.3}$$

Пусть τ_* – двоичный момент из $[t_0, \vartheta]$. Принимая во внимание включения (3.3), получаем, что последовательность $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$ сходится в хаусдорфовой метрике к компакту

$$\hat{Z}(\tau_*) = \bigcap_n Z^{(n)}(\tau_*).$$

Это означает, что для любой точки $z_* \in \hat{Z}(\tau_*)$ найдется последовательность $\{z_*^{(n)}\}$ ($z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$, $n \in \mathbb{N}$), сходящаяся к z_*, и, с другой стороны, любая сходящаяся последовательность $\{z_*^{(n)}\}$ ($z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$, $n \in \mathbb{N}$) имеет в пределе точку $z_* \in \hat{Z}(\tau_*)$.

Распространим определение множества $\hat{Z}(\tau_*)$ с двоичных моментов $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ на все остальные моменты $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$. Полагаем для этого $t_n(\tau_*) = \max\{\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)} : \tau_i^{(n)} \le \tau_*\}$.

Пусть τ_* – недвоичный момент из $[t_0, \vartheta]$. Определим $\hat{Z}(\tau_*)$ как множество всех точек $z_* \in \Phi(\tau_*)$, для каждой из которых найдется последовательность $\{(t_n(\tau_*), z_*^{(n)})\}$ ($z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$), сходящаяся к (τ_*, z_*) при $n \to \infty$. Вместе с тем введем множество

$$\hat{Z} = \bigcup_{\tau_* \in [t_0, \vartheta]} (\tau_*, \hat{Z}(\tau_*)) \subset \Phi \subset \boldsymbol{D}. \tag{3.4}$$

Так как множество $\hat{Z}$ получено из последовательности систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, с использованием некоторых предельных переходов, то будем писать

$$\hat{Z} = \lim_{n \to \infty} \{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. $\hat{Z} = Z^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала включение $\hat{Z} \subset Z^0$. Для этого покажем, что $\hat{Z}$ удовлетворяет соотношениям вида (2.4), т.е. соотношениям

$$\hat{Z}(t_0) \subset M, \quad \hat{Z}(\tau^*) \subset \chi(\tau^*, \tau_*, \hat{Z}(\tau_*)), \quad t_0 \le \tau_* < \tau^* \le \vartheta. \tag{3.5}$$

В самом деле, $\hat{Z}(\tau_0) = Z^0(\tau_0) = M$.

Покажем теперь, что выполнено второе из соотношений (3.5). Пусть выбраны произвольно τ_*, τ^*, $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$, $\Delta^* = \{(\tau_*, \tau^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \le \tau_* \le \tau^* \le \vartheta\}$ – двоичные моменты из $[t_0, \vartheta]$ и точка $z^* \in \hat{Z}(\tau^*)$. Поскольку $z^* \in Z^{(n)}(\tau^*) = Z(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, то $z^* \in Z_v(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$ при любых $v \in Q$, $n \in \mathbb{N}$ и $z^* \in \Phi(\tau^*)$. Значит, при любых $v \in Q$ и $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$, которая является начальной для некоторого решения $z_v^{(n)}(\tau)$ д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H_v(\tau, z)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$, удовлетворяющего $z_v^{(n)}(\tau^*) = z^*$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что последовательность $\{z_v^{(n)}(\tau)\}$ на $[\tau_*, \tau^*]$ равномерно сходится к некоторой функции $z_v(\tau)$ на $[\tau_*, \tau^*]$. Очевидно, что $z_v(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ является решением д.в. (2.3), удовлетворяющим краевым условиям

$$z_v(\tau_*) = z_* = \lim_{n \to \infty} z_v^{(n)}(\tau_*) \in \hat{Z}(\tau_*) \quad \text{и} \quad z_v(\tau^*) = z^*.$$

Эти соотношения означают, что

$$z^* \in Z_v(\tau^*, \tau_*, \hat{Z}(\tau_*)), \quad v \in Q. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6), а также включение $z^* \in \Phi(\tau^*)$ и произвольный выбор точки z^* в $\hat{Z}(\tau^*)$, получаем, что выполняется второе из соотношений (3.5). Соотношение (3.5) доказано для двоичных моментов τ_*, τ^* из $[t_0, \vartheta]$.

Пусть теперь τ_* и τ^* – недвоичные моменты из $[t_0, \vartheta]$. Выберем произвольную точку $(\tau^*, z^*) \in \hat{Z}$, и пусть $\{(t_n(\tau^*), z_n^*)\}$ – последовательность из $\hat{Z}$, сходящаяся к (τ^*, z^*).

Выберем последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$, сходящуюся к τ_* слева. Так как $t_n(\tau_*)$, $t_n(\tau^*)$ – двоичные моменты разбиения $\Gamma^{(n)}$, то

$$Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, значит, при любом $v \in Q$ выполняются включения

$$Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z_v(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset \Phi(t_n(\tau^*)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что существует такая точка $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, что некоторое решение $z_v^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$ д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H_v(\tau, z)$, $z_v^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z_*^{(n)}$ удовлетворяет равенству $z_v^{(n)}(t_n(\tau^*)) = z_n^*$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что последовательность $\{z_v^{(n)}(\tau)\}$ на $[\tau_*, \tau^*]$ равномерно сходится к некоторой функции $z_v(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ (здесь мы доопределили $z_v^{(n)}(\tau)$ на промежутке $[t_n(\tau^*), \tau^*]$ с помощью равенства $z_v^{(n)}(\tau) = z_n^*$, $n \in \mathbb{N}$).

Вектор-функция $z_v(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ является решением д.в. (2.3) и удовлетворяет условиям

$$z_v(\tau_*) = z_* = \lim_{n \to \infty} z_*^{(n)} \in \hat{Z}(\tau_*), \quad z_v(\tau^*) = z^* = \lim_{n \to \infty} z_n^* \in \hat{Z}(\tau^*).$$

Также из включения $z_n^* \in Z(t_n(\tau^*)) \subset \Phi(t_n(\tau^*))$ и непрерывности многозначного отображения $\tau \to \Phi(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ следует включение $z^* \in \Phi(\tau^*)$.

Следовательно, $z^* \in \Phi(\tau^*) \cap Z_v(\tau^* \tau_*, \hat{Z}(\tau_*))$, $v \in Q$. Поскольку $v \in Q$ и $z^* \in \hat{Z}(\tau^*)$ выбраны произвольно, то

$$\hat{Z}(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \hat{Z}(\tau_*)) \tag{3.7}$$

для недвоичных моментов τ_*, τ^* ($(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$).

Аналогично доказывается включение (3.7) в случае, когда один из моментов τ_*, τ^* двоичный, а другой – нет.

Итак, для всевозможных пар $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$ установлены соотношения (3.5), откуда вытекает $\hat{Z} \subset Z^0$.

Докажем включение $Z^0 \subset \hat{Z}$.

В самом деле, для любого двоичного момента $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ справедливо включение

$$Z^0(\tau_*) \subset \hat{Z}(\tau_*). \tag{3.8}$$

Пусть теперь $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ – недвоичный момент и $(\tau_*, z_*) \in Z^0$.

Рассмотрим последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$ двоичных моментов $t_n(\tau_*)$, входящих в такие разбиения $\Gamma^{(n)}$, что $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Так как $Z^0(\tau_*) \subset Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$, то $z_* \in Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$.

Выберем некоторое $v \in Q$. Имеет место

$$z_* \in \Phi(\tau_*) \cap Z_v(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Значит, существует такая последовательность $\{z(t_n(\tau_*))\}$ точек $z(t_n(\tau_*)) \in Z^0(t_n(\tau_*)) \subset \hat{Z}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, что некоторое решение $z_v^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), \tau_*]$ д.в. $dz/d\tau = H_v(\tau, z)$, $z_v^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z(t_n(\tau_*))$ удовлетворяет условию $z_v^{(n)}(\tau_*) = z_*$, $n \in \mathbb{N}$.

Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| z(t_n(\tau_*)) - z_* \| = 0,$$

и, значит, $(\tau_*, z_*) = \lim_{n\to\infty}(t_n(\tau_*), z(t_n(\tau_*)))$, где $(t_n(\tau_*), z(t_n(\tau_*))) \in \hat{Z}$. Тогда, согласно определению множества $\hat{Z}$, верно включение $(\tau_*, z_*) \in \hat{Z}$. Так как недвоичный момент $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ и точка $(\tau_*, z_*) \in Z^0$ выбраны произвольно, то $Z^0(\tau_*) \subset \hat{Z}(\tau_*)$ при недвоичных $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$.

Принимая во внимание включение $Z^0(\tau_*) \subset \hat{Z}(\tau_*)$ при двоичных $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, получаем, что (3.8) справедливо при всех $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ и, значит, $Z^0 \subset \hat{Z}$. Из включений $\hat{Z} \subset Z^0$, $Z^0 \subset \hat{Z}$ следует $Z^0 = \hat{Z}$. Лемма 1 доказана.

В лемме 1 утверждается, что максимальный u-стабильный тракт Z^0 есть предел

$$\hat{Z} = \lim_{n\to\infty}\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$$

"промежуточных" систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$. Однако непосредственно применять эти системы для приближенного вычисления множества Z^0 удается лишь в относительно немногих случаях, поскольку в большинстве случаев не удается вычислить точно множества $Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M$, $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$, $i = \overline{1, N(n)}$.

Бесперспективность точного вычисления множеств $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ обусловлена тем, что мы не можем в сколько-нибудь нетривиальных случаях вычислить точно множества достижимости $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m$. Поэтому возникает необходимость в подмене множеств $Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$ такими множествами, которые были бы близки в некотором смысле (например, в смысле хаусдорфовой метрики) к множествам $Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$ и которые к тому же можно было бы точно вычислить.

Задавшись целью определить такие вычислимые множества, введем аппроксимирующую систему $\{\tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^m$.

Поясним, какой смысл мы вкладываем в понятие аппроксимирующей системы $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$. Мы считаем, что задано двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Каждому полуинтервалу $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ сопоставим д.в.:

$$\begin{gathered}\frac{dz}{d\tau} \in H_v(\tau_i, z^{(i)}) + \varphi(\Delta)\mathbf{B}, \quad z(\tau_i) = z^{(i)} \in \mathbb{R}^m, \\ \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad v \in Q;\end{gathered} \tag{3.9}$$

здесь $\varphi(\delta) = \omega^*((1+K)\delta)$, $\delta > 0$; функция $\omega^*(\rho)$, $\rho > 0$ определена в разд. 2;

$$\Delta = \Delta(\Gamma); \quad K = \max_{(\tau,z,u,v)\in \mathbf{D}\times P\times Q} \|h(\tau, z, u, v)\| < \infty; \quad \mathbf{B} = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^m : \|\mathrm{b}\| \le 1\}$$

Пусть $(\tau_i, z^{(i)})$ и $(\tau_i, Z^{(i)})$ из $\mathbf{D}$ и $v \in Q$.

Введем обозначения: $\bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta H_v(\tau_i, z^{(i)})$ – множество достижимости в момент τ_{i+1} д.в. $dz/d\tau \in H_v(\tau_i, z^{(i)})$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $z(\tau_i) = z^{(i)}$;

$$\bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup_{z^{(i)}\in Z^{(i)}} \bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)});$$

$$\bar{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap_{v\in Q} \bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)});$$

$\tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = \bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) + \omega(\Delta)\mathbf{B}$ – множество достижимости д.в. (3.9) в момент τ_{i+1};

$$\tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup_{z^{(i)}\in Z^{(i)}} \tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)});$$

$$\tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap_{v\in Q} \tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \cap \Phi(\tau_{i+1});$$

здесь $\omega(\delta) = \delta\varphi(\delta)$, $\delta > 0$.

Как известно, при τ_i, τ_{i+1} из Γ, $(\tau_i, z^{(i)}) \in \mathbf{D}$, и $v \in Q$ справедлива оценка

$$d(Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}), \bar{Z}_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})) \le \omega(\Delta). \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует включение

$$Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) \subset \bar{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, \mathrm{z}^{(i)}) + \omega(\Delta)\mathbf{B} = \tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, \mathrm{z}^{(i)}). \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекает

$$\begin{gathered}Z_v(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}), \\ (\tau_i, Z^{(i)}) = \mathbf{D}, \quad \tau_i \ \text{ и } \ \tau_{i+1} \ \text{ из } \ \Gamma, \ v \in Q.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из (3.12) получаем

$$\begin{gathered}Z(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \\ (\tau_i, Z^{(i)}) \subset \mathbf{D}, \quad \tau_i \ \text{ и } \ \tau_{i+1} \ \text{ из } \ \Gamma.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Введем аппроксимирующую систему $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$. Аппроксимирующая система $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ предназначена для аппроксимации множеств Z^0.

Определение 6. Аппроксимирующей системой $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^m$, соответствующей двоичному разбиению $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем набор множеств

$$\tilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = M, \quad \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) = \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.14}$$

Теперь сравним системы $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ и $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающие одному и тому же разбиению Γ.

Принимая во внимание $\tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_0) = Z^{\Gamma}(\tau_0) = M$ и включения (3.13), получаем

$$Z^{\Gamma}(\tau_i) \subset \tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i), \quad \tau_i \in \Gamma. \tag{3.15}$$

Вместе с тем справедливы включения

$$Z^0(\tau_i) \subset Z^{\Gamma}(\tau_i) \subset \tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i), \quad i = \overline{0, N}.$$

Таким образом, аппроксимирующая система $\{\tilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ является мажорантой для набора сечений $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множества Z^0.

Сосредоточимся на рассмотрении двоичных разбиений $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для упрощения введем обозначение $\tilde{Z}^{(n)}(\tau_*) = \tilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_*)$, $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Аппроксимирующая система $\{\tilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ запишется в виде $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$.

Введем в рассмотрение множество Ω^0 всех тех точек $(\tau_*, z_*) \in \mathbf{D}$, каждая из которых представима в виде $(\tau_*, z_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(t_n(\tau_*), z_n)$, где $\{(t_n(\tau_*), z_n)\}$ — некоторая последовательность точек $(t_n(\tau_*), z_n) \in (t_n(\tau_*), \tilde{Z}^{(n)}(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$. При таком определении справедливо равенство $\Omega^0(\tau_0^{(n)}) = \Omega^0(t_0) = M$.

Так как при любых $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$Z^{(n)}(\tau_*) \subset \tilde{Z}^{(n)}(\tau_*), \tag{3.16}$$

то из определения Ω^0 и $Z^0 = \lim\limits_{n\to\infty}(Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma)$ вытекает включение

$$Z^0(\tau_*) \subset \Omega^0(\tau_*) \tag{3.17}$$

при любом недвоичном $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$. Следовательно, имеет место включение

$$Z^0 \subset \Omega^0. \tag{3.18}$$

Кроме того, по той же самой схеме рассуждений, что и для Z^0, доказывается включение

$$\Omega^0(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \Omega^0(\tau_*)) \tag{3.19}$$

при любых τ_*, τ^*, $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$.

Учитывая равенство $\Omega^0(t_0) = M$ и (3.19), получаем, что замкнутое множество Ω^0 в $\mathbf{D}$ есть u-стабильный тракт системы (2.2). Следовательно, справедливо включение

$$\Omega^0 \subset Z^0. \tag{3.20}$$

Из (3.18) и (3.20) следует следующее утверждение.

Л е м м а 2. $Z^0 = \Omega^0$.

Объединяем леммы 1 и 2.

Т е о р е м а. $Z^0 = \hat{Z} = \Omega^0$.

Теорема представляет собой теоретическое обоснование возможности использования аппроксимирующих систем $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ для приближенного вычисления максимального u-стабильного тракта Z^0 и, стало быть, максимального u-стабильного моста W^0 в игровой задаче о сближении системы (1.1) с M в момент ϑ при наличии фазового ограничения Φ.

Заметим, однако, что сама система $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ не может быть реализована в точности в процессе приближенных вычислений (в конкретных игровых задачах о сближении), поскольку в нетривиальных конфликтно управляемых системах даже при множествах $M \subset \mathbb{R}^m$ и

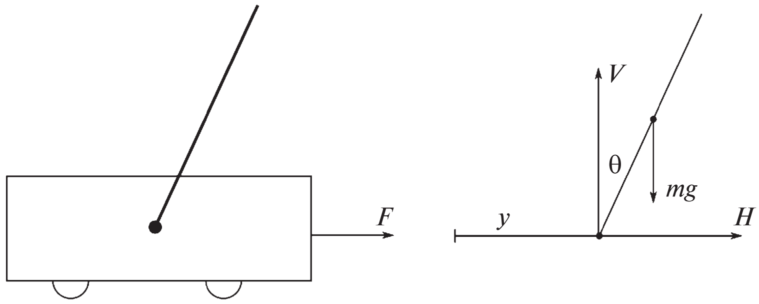

Рис. 2. Механическая система тележка–маятник

$\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ с простой геометрией несчетные множества $\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$ имеют непростую геометрическую структуру. Эти множества определяются соотношениями вида

$$\tilde{Z}^{\Gamma}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \Phi(\tau^*) \cap \left(\bigcap_{v \in Q} \tilde{Z}_v^{\Gamma}(\tau^*, \tau_*, Z_*) \right),$$

где

$$\tilde{Z}_v^{\Gamma}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = Z_* + \delta H_v(\tau_*, Z_*) + \omega(\delta)\mathbf{B},$$
$$Z_* + \delta H_v(\tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} (z_* + \delta H_v(\tau_*, z_*)),$$

Γ – некоторое конечное разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$, Z_* – множество из $\mathbb{R}^m$, τ_* и τ^* – соседние моменты разбиения Γ, $\delta = \tau^* - \tau_* > 0$.

Таким образом, можно сделать вывод, что для проведения эффективных приближенных вычислений максимального u-стабильного тракта Z^0 сама система $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ требует корректировки, что является важной отдельной задачей.

4. Вычисление приближенных решений в конкретных игровых задачах. В этом пункте рассматриваются две задачи о сближении конкретных динамических систем на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$.

З а д а ч а 1. Задана механическая управляемая система – обратный маятник с точкой подвеса, находящейся на тележке, которая передвигается по горизонтальной плоскости [13].

На тележку воздействует в горизонтальном направлении тяговое усилие величины F. Обратный маятник подвержен силе гравитации $m\vec{g}$, приложенной к его центру тяжести, а также находится под действием горизонтальной $\vec{H}$ и вертикальной $\vec{V}$ составляющих сил реакции в опорной точке маятника; m – масса маятника, m^* – масса тележки, $\vec{g}$ – гравитационная постоянная (рис. 2).

Полагаем, что L – расстояние между центром тяжести маятника и его опорной точкой, y – смещение опорной точки маятника, α – угол наклона маятника по отношению к вертикальной оси, I – момент инерции маятника относительно центра массы. Введем переменные $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$. Допустим также, что $u = u(t)$ – величина тягового усилия $\vec{F}(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$, где $|\vec{F}(t)| \leq \mu$, μ – заданное положительное число; k – коэффициент трения горизонтальной поверхности.

Считаем, что $u = u(t)$ находится в распоряжении первого игрока и может выбираться как позиционное управление $u(t, x)$ $(|u(t, x)| \leq \mu)$, где $(t, x) = (t, x_1, x_2, x_3, x_4)$ – позиция системы тележка–маятник. Считаем также, что коэффициент трения $k = k(t)$, который рассматриваем как управление $v = v(t) = k(t)$ второго игрока, неизвестен первому игроку. Мы не исключаем, что он может быть реализован как функция $k(t) = v(t, x(t))$, где функция $v(t, x)$ удовлетворяет неравенству $|v(t, x(t))| \leq \zeta$, а $x(t)$ – движение системы (4.1), ζ – заданное положительное число.

При таких обозначениях уравнение системы тележка—маятник принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{\Delta(x_1)}\{(m+m^*)mgL\sin x_1 - mL\cos x_1(u + mLx_2^2\sin x_1 - vx_2)\},\\
\dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = -\frac{1}{\Delta(x_1)}\{-mL\cos x_1 mgL\sin x_1 + (I+mL^2)(u + mLx_2^2\sin x_1 - vx_2)\};
\end{aligned} \tag{4.1}$$

здесь $\Delta(x_1) = (I + mL^2)(m + m^*) - m^2L^2\cos x_1$.

Рассматривается игровая задача о сближении системы (4.1) с целевым множеством $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| \le 0.5 \text{ м}\}$ $(x = (x_1, x_2, x_3, x_4))$ при наличии стационарного фазового ограничения $\Phi = [t_0, \vartheta] \times \Omega$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 2.5$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4 : -0.3 \text{ рад/с} \le x_2 \le 0.3 \text{ рад/с}, -0.5 \text{ м/с} \le x_4 \le 0.5 \text{ м/с}\}$ со следующими значениями входящих в (4.1) параметров: $m = 0.25$ кг, $m^* = 2$ кг, $g = 9.81$ м/с^2, $L = 1$ м, $I = 1$ кг $\cdot$ м^2, $x^{(0)} = (-0.257$ рад, 0.048 рад/с, 0.050 м, -0.028 м/с$) \in \mathbb{R}^4$, $Q = [0$ кг/м, 0.39 кг/м$]$, $P = [-1\text{Н}, 1\text{Н}]$, $\tilde{Q} = \{v^{(l)} \in Q : v^{(l)} = l \cdot 0.03,\ l \in \overline{1,13}\}$, $\tilde{P} = \{u^{(s)} \in P :\ u^{(s)} = s \cdot 0.25\text{Н},\ s \in \overline{-4,4}\}$. Здесь обозначено

$$\|x\|^* = \sqrt{L^2x_1^2 + \frac{9.81}{g}L^3x_2^2 + x_3^2 + \frac{9.81}{g}Lx_4^2}.$$

Вычислить точно множество разрешимости W^0 рассматриваемой игровой задачи о сближении для системы (4.1) не представляется возможным, поэтому осуществим приближенное вычисление W^0, согласно изложенной в разд. 3 методике.

Именно система (4.1) записывается в терминах обратного времени $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -z_2, \quad \dot{z}_2 = \frac{1}{\Delta(z_1)}\{(m+m^*)mgL\sin z_1 - mL\cos z_1(u + mLz_2^2\sin z_2 - vz_2)\},\\
\dot{z}_3 &= -z_4, \quad \dot{z}_4 = \frac{1}{\Delta(z_1)}\{-mL\cos z_1 mgL\sin z_1 + (I+mL^2)(u + mLz_2^2\sin z_1 - vz_2)\}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Затем вводится конечное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, где $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $i = \overline{0, N-1}$, — диаметр разбиения Γ.

Система $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^4$, аппроксимирующая максимальный u-стабильный тракт Z^0, определяется рекуррентными соотношениями

$$\tilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = M, \quad \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) = \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})) = \bigcap_{v \in Q} \tilde{Z}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})) \cap \Omega, \quad i = \overline{1, N}. \tag{4.3}$$

Так как множества $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ несчетны и имеют сложную геометрию, то их точное вычисление невозможно; каждое из них приходится рассчитывать приближенно как некоторое конечное (состоящее из конечного числа точек) множество $\tilde{\mathfrak{Z}}^\Gamma(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^4$. В частности, и $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = M$ вычисляем приближенно как некоторое конечное множество $\tilde{\mathfrak{Z}}^\Gamma(\tau_0)$ в $\mathbb{R}^4$.

Так как в (4.3) входят множество $\Omega = \Phi(\tau_i)$ и множества P и Q — ограничения на управления игроков, то их также аппроксимируем некоторыми конечными множествами $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ в пространствах $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^1$ соответственно. При этом операции пересечения множеств, входящих в (4.3), ставится в соответствие некоторая операция над конечными множествами $\tilde{\mathfrak{Z}}_v^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{\mathfrak{Z}}^\Gamma(\tau_{i-1}))$ и $\tilde{\Omega}$.

После того, как вычислили множества $\tilde{\mathfrak{Z}}^\Gamma(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, в пространстве $\mathbb{R}^4$, определяем в этом пространстве набор конечных множеств $\tilde{\mathcal{W}}^\Gamma(\tau_i)$, отвечающий разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$: $\tilde{\mathcal{W}}^\Gamma(t_j) = \tilde{\mathfrak{Z}}^\Gamma(\tau_i)$, $t_j = t_0 + \vartheta - \tau_i$, $i = N, N-1, \ldots, 0$. Согласно изложенной в разд. 3 теории, набор $\{\tilde{\mathcal{W}}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$ аппроксимирует множество разрешимости W^0 в игровой задаче о сближении системы (4.1) с M.

Имея в своем распоряжении аппроксимирующий набор $\{\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_j) : t_j \in \Gamma\}$, первый игрок приступает ко второму этапу конструирования приближенного решения задачи о сближении для системы (4.1) – реализации стратегии экстремального прицеливания [2] на набор $\{\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_j) : t_j \in \Gamma\}$. Предполагаем при этом, что второй игрок выбирает некоторое управление $v(t)$ – постоянное на полуинтервалах $[t_j, t_{j+1})$ разбиения Γ. Управление $v(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ может по ходу времени формироваться по принципу обратной связи:

$$v(t) = v^{(j)} = v(t_j, x(t_j)) \in \tilde{Q}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1};$$

здесь $v(t, x)$ – некоторая функция, зависящая от позиции (t, x), $x(t_j)$ – фазовый вектор системы (4.1) в момент t_j.

Далее заметим, что, имея выбранную начальную позицию $(t_0, x^{(0)})$ системы (4.1), первый игрок выбирает произвольно вектор $u(t_0) \in \tilde{P}$ в качестве управления на начальном промежутке $[t_0, t_1)$:

$$u^*(t) = u(t_0), \quad t \in [t_0, t_1).$$

При этом в системе (4.1) присутствует в качестве управления $v(t)$ на $[t_0, t_1)$ некоторый вектор $v^{(0)} \in \tilde{Q}$:

$$v(t) = v^{(0)}, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Для проведения последующих выкладок правую часть системы обозначим через $f(t, x, u, v) \in \mathbb{R}^4$, а также полагаем

$$f^{(1)}(t, x, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\Delta(x_1)} mL \cos x_1 u \\ 0 \\ -\dfrac{1}{\Delta(x_1)} (I + mL^2) u \end{pmatrix}.$$

Движение системы (4.1) на полуинтервале $[t_0, t_1)$ моделируем как звено ломаной Эйлера: $\tilde{x}(t) = x^{(0)} + (t - t_0) f(t_0, x^{(0)}, u(t_0), v^{(0)})$, $t \in [t_0, t_1)$. Далее, имея в распоряжении в момент t_1 фазовый вектор $\tilde{x}(t_1)$, вычисляем ближайшую к $\tilde{x}(t_1)$ на $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_1)$ точку $\tilde{y}(t_1)$ и вектор $s(t_1) = \tilde{y}(t_1) - \tilde{x}(t_1) \in \mathbb{R}^4$. Затем первый игрок вычисляет управление $u^*(t) = u^e(t_1)$, $t \in [t_1, t_2)$ из условия экстремального прицеливания движения системы (4.1) из точки $\tilde{x}(t_1)$ на множество $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_1)$:

$$\langle s(t_1), f^{(1)}(t_1, \tilde{x}(t_1), u^e(t_1))\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_1), f^{(1)}(t_1, \tilde{x}(t_1), u)\rangle.$$

Движение системы (4.1) на промежутке $[t_1, t_2]$ моделируем как звено ломаной Эйлера:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_1) + (t - t_1) f(t_1, \tilde{x}(t_1), u^e(t_1), v^{(1)}), \quad t \in [t_1, t_2];$$

здесь $v(t) = v^{(1)}$ – некоторое управление второго игрока, реализовавшееся на $[t_1, t_2)$.

Продолжаем вычисление разрешающих управлений $u^*(t) = u^e(t_j)$ на последующих промежутках $[t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{3, N-1}$, разбиения Γ в соответствии с правилом экстремального прицеливания [2]:

$$\langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j))\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, \tilde{x}(t_j), u)\rangle,$$

где $s(t_j) = \tilde{y}(t_j) - \tilde{x}(t_j)$, $\tilde{y}(t_j)$ – ближайшая к $\tilde{x}(t_j)$ точка на $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_j)$.

Движение системы (4.1) на промежутках $[t_j, t_{j+1}]$ моделируем как звено ломаной Эйлера:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_j) + (t - t_j) f(t_j, \tilde{x}(t_j), u^e(t_j), v^{(j)}), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Для реализовавшейся в ходе вычислений ломаной Эйлера $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, получаем, что величина

$$\rho(\tilde{x}(\vartheta), \tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(\vartheta)) = \min_{y \in \tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(\vartheta)} \|\tilde{x}(\vartheta) - y\|$$

– расстояние от точки $\tilde{x}(\vartheta)$ до множества $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(\vartheta)$ есть малое положительное число. Тогда, учитывая близость множеств $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(\vartheta) = \tilde{\mathfrak{Z}}^{\Gamma}(t_0)$ и $W^0(\vartheta) = Z^0(t_0) = M$, получаем, что $\rho(\tilde{x}(\vartheta), M)$ есть малое положительное число.

Следует полагать, что правило экстремального прицеливания будет также эффективно действовать и в отношении реального движения $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ системы (4.1), которое на промежутках $[t_j, t_{j+1})$ разбиения Γ описывается соотношением

$$x(t) = x(t_j) + \int_{t_j}^{t} f(t, x(t), u^e(t_j), v^{(j)})dt, \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

где $u^e(t_j)$ вычисляется из условия

$$\langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, x(t_j), u^e(t_j))\rangle = \max_{u \in \tilde{P}} \langle s(t_j), f^{(1)}(t_j, x(t_j), u)\rangle,$$

$s(t_j) = y(t_j) - x(t_j) \in \mathbb{R}^4$, $y(t_j)$ – ближайшая к $x(t_j)$ точка на $\tilde{\mathcal{W}}^{\Gamma}(t_j)$.

Представим графическое сопровождение результатов математического моделирования решения задачи 1 (рис. 3–5).

З а д а ч а 2. Задана управляемая система, описывающая динамику движения четырехколесной тележки на горизонтальной плоскости [11, 12]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u \quad . \end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь (x_1, x_2) – координаты точки на тележке, расположенной посередине между задними колесами тележки, x_3 – угол поворота тележки, u – управляющее воздействие, которое может принимать значения в диапазоне $[-1, 1]$.

В данном случае тележку мы идентифицируем с точкой, имеющей координаты (x_1, x_2), т.е. не рассматриваем тележку как протяженный объект.

Требуется перевести управляемую систему (4.4) из точки $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ на одноточечное множество $M = \{(0, 0, \pi)\}$ в момент времени $\vartheta = 8.2$, т.е. необходимо развернуть тележку на 180°, обходя при этом подвижные препятствия. Эти препятствия для фазовой точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ представляют собой в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ круговые цилиндры $\mathbb{Z}^*(t)$ и $\mathbb{R}^{**}(t)$ с осями, параллельными оси x_3 и основаниями в плоскости x_1, x_2 – кругами $K^*(t)$ и $K^{**}(t)$, совершающими периодические движения, параллельные оси x_2, между прямыми линиями $x_2 = -1.5$ и $x_2 = 1.5$ со скоростью, равной 1, начиная каждый от своей линии (см. рис. 6, 7). Считаем при этом, что фазовая точка x системы (4.4) может соприкасаться с цилиндрами $\mathbb{Z}^*(t)$ и $\mathbb{Z}^{**}(t)$ по их границам. Таким образом, в рассматриваемой задаче фазовое ограничение Φ в $\mathbb{R}^3$ представимо равенством

$$\Phi = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, \Phi(t)),$$

где $\Phi(t) = \mathbb{R}^3 \backslash (\operatorname{int} \mathbb{Z}^*(t) \cup \operatorname{int} \mathbb{Z}^{**}(t))$, $t = 0$, $\vartheta = 8.2$.

В этой задаче управления системой (4.4) полагаем, что помеха $v = v(t)$ отсутствует, т.е. $v = v(t) = 0$, $t \in [t_0, \vartheta]$. В связи с отсутствием помехи v здесь предполагается иной подход к решению задачи. Этот подход, так же как и подход к решению задачи 1, реализует приближенное решение. Он включает в себя три основных этапа и предполагает приближенное вычисление множеств достижимости $X(t_j, t_0, x^{(0)})$ системы (4.4), отвечающих моментам t_j из некоторого конечного разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Эти множества $\tilde{X}^{\Gamma}(t_j)$ в $\mathbb{R}^3$

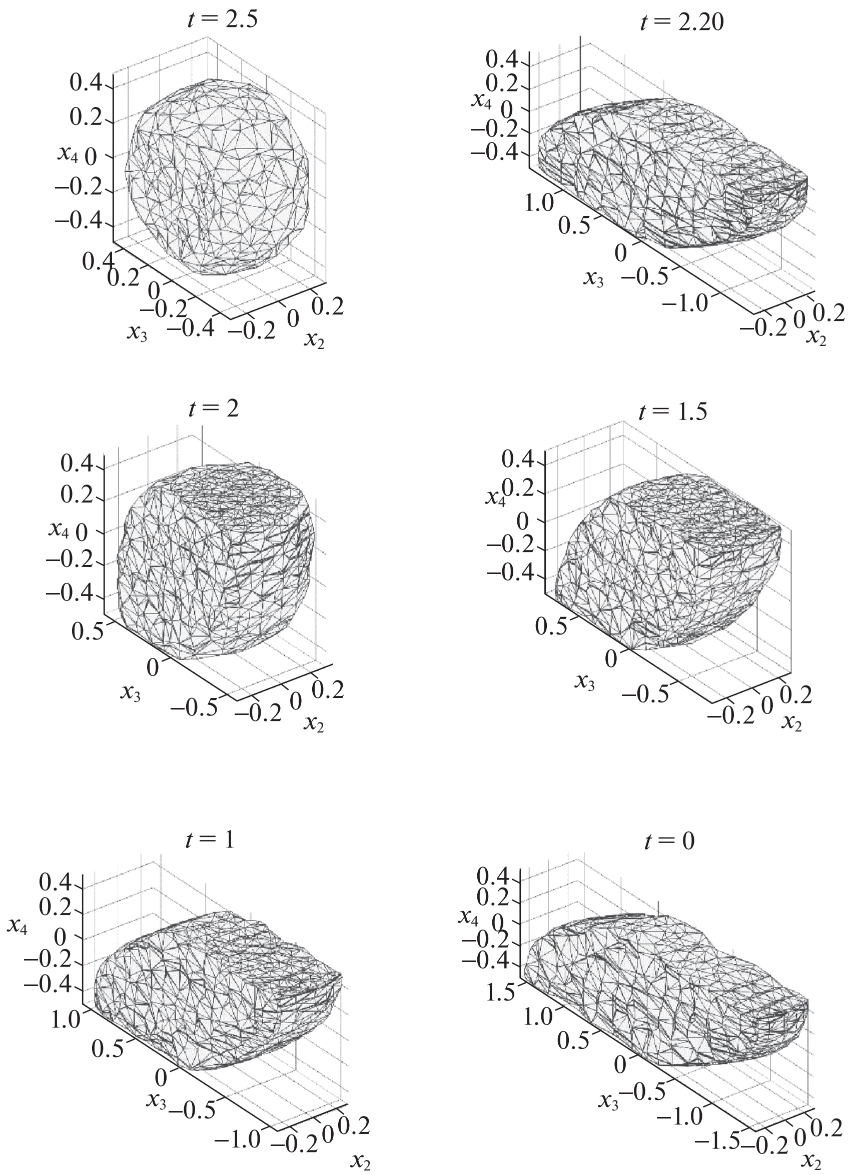

Рис. 3. Проекции множеств $\tilde{\mathscr{W}}^{\Gamma}(t_j)$, $(t_j = 0,\ 1,\ 1.5,\ 2,\ 2.2,\ 2.5)$ на подпространство переменных x_2, x_3, x_4 фазового пространства $\mathbb{R}^4$

вычисляются как конечные (т.е. состоящие из конечного числа точек) множества по рекуррентной формуле

$$\tilde{X}^{\Gamma}(t_j) = \tilde{X}^{\Gamma}(t_j, t_{j-1}, \tilde{X}^{\Gamma}(t_{j-1})) \cap \Phi(t_j), \qquad \tilde{X}^{\Gamma}(t_0) = \{x^{(0)}\}.$$

Таким образом, эти множества развиваются во времени t от начальной точки $x^{(0)}$, отвечающей начальному моменту t_0, с учетом изменяющегося во времени фазового ограничения $\Phi(t)$. В момент $\vartheta = 8.2$ выполняется включение $x^f = (0, 0, \pi) \in \tilde{X}^{\Gamma}(\vartheta)$. На втором этапе решения, пятясь в прямом времени t от конечной точки x^f и перебирая множества достижимости $\tilde{X}^{\Gamma}(t_j)$, $j = N, N-1, \ldots, 0$, приходим в конечном итоге в некоторую точку $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^{(0)}$, близкую с большой степенью точности к $x^{(0)}$. На третьем этапе решения из точки $x^{(0)}$ (как из начальной) вычисляем движение $x(t)$ системы (4.4), порожденное программным кусочно-постоянным (постоянным на

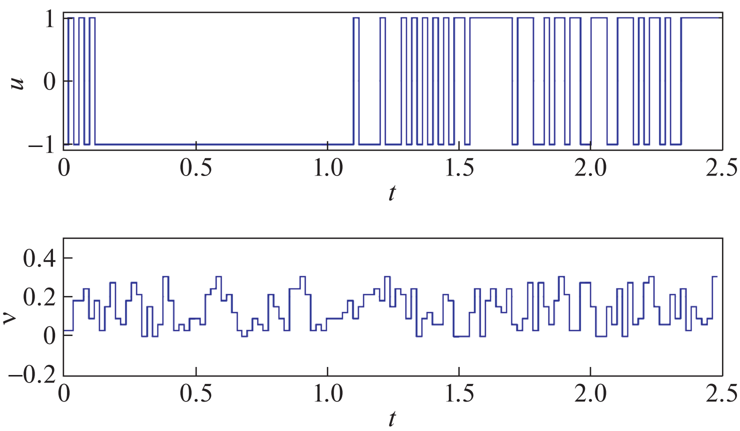

Рис. 4. Графики управления $u^*(t)$ на [0, 2.5], вычисленного по правилу экстремального прицеливания на множества $\tilde{W}^{\Gamma}(t_j)$, и произвольно выбранного управления $v(t)$ на [0, 2.5] второго игрока

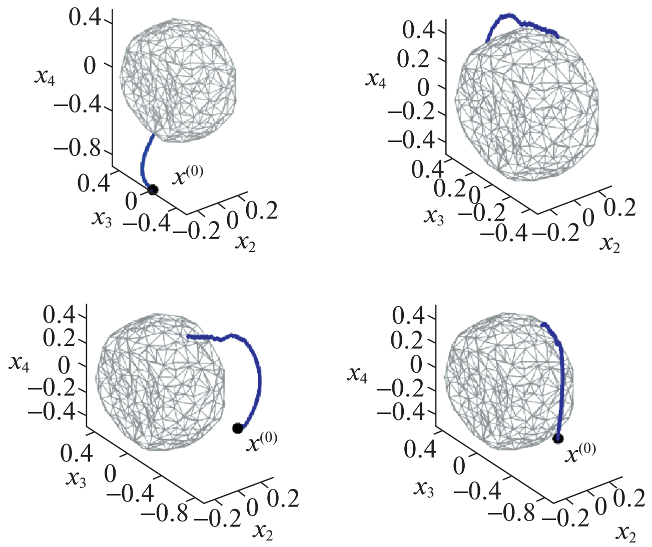

Рис. 5. Проекции на трехмерные подпространства из $\mathbb{R}^4$ движения $x(t)$, $x(0) = x^{(0)}$ системы (4.2), порожденного управлениями $u^*(t)$ и $v(t)$

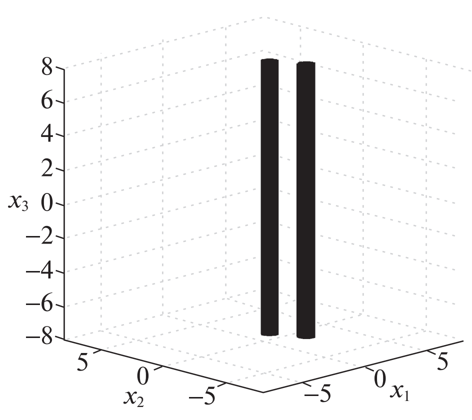

Рис. 6. Объединение замкнутых цилиндров $\mathbb{Z}^*(t)$ и $\mathbb{Z}^{**}(t)$ в $\mathbb{R}^3$, таких, что $\mathrm{int}(\mathbb{Z}^*(t) \cup \mathbb{Z}^{**}(t))$ является препятствием в момент t для фазовой точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ системы (4.4)

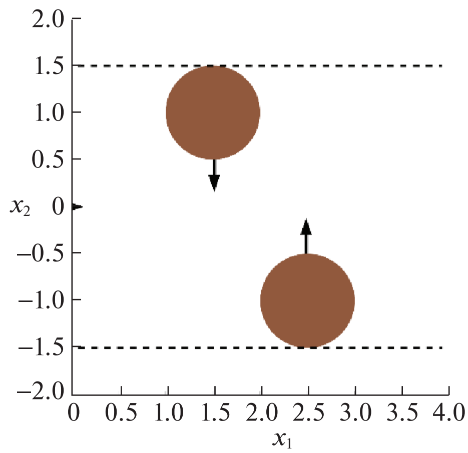

Рис. 7. Проекция препятствия $\mathrm{int}(\mathbb{Z}^*(t_0) \cup \mathbb{Z}^{**}(t_0))$ на плоскость переменных x_1, x_2

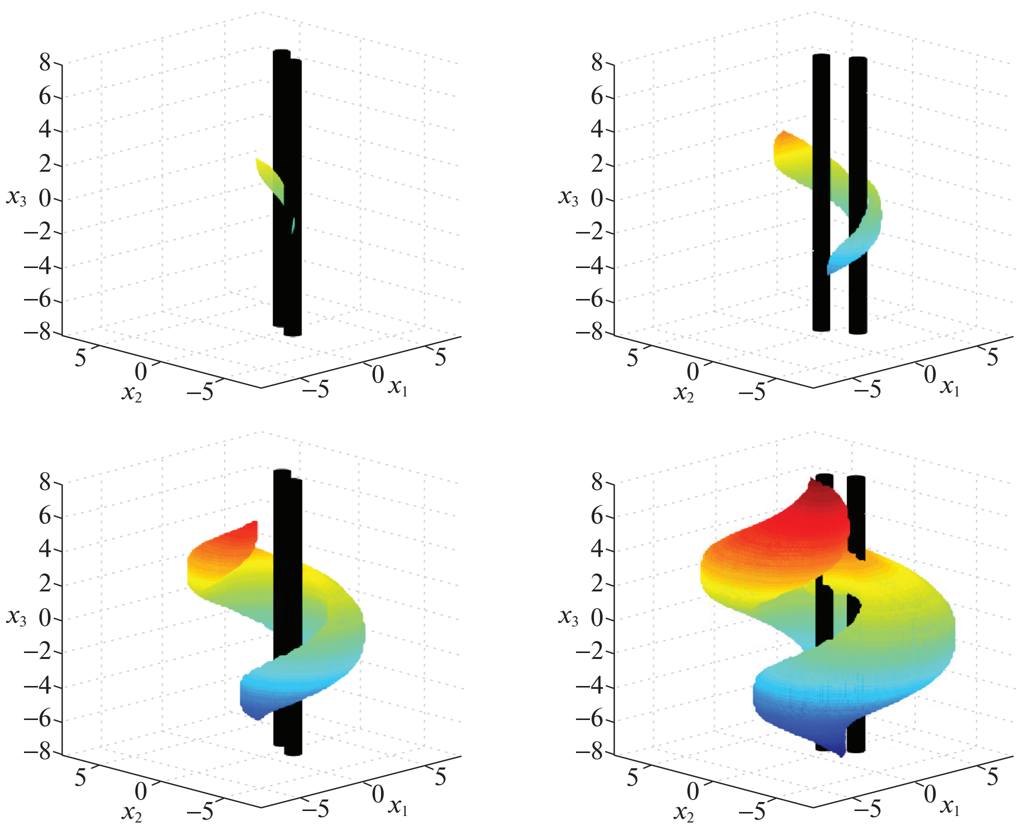

Рис. 8. Множества $\tilde{X}^{\Gamma}(t_j, t_0, x^{(0)}) \subset \mathbb{R}^3$ и множества $\mathrm{int}(\mathbb{Z}^*(t_j) \cup \mathbb{Z}^{**}(t_j))$ в моменты t_j = 2, 4, 6, 8.2

полуинтервалах $[t_j, t_{j+1})$) управлением $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, максимально сдвигаясь в направлении на ломаную $\tilde{x}(t)$ в каждый момент $t_j \in \Gamma$. В результате применения управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ приходим в момент ϑ в точку $x(\vartheta)$, очень близкую к финальной точке $x^f = (0, 0, \pi)$. Отметим, что хорошая близость $x(\vartheta)$ к x^f обусловлена простотой динамики управляемой системы (4.4) и малой размерностью системы. Эти ее особенности позволили провести весьма точные приближенные вычисления множеств достижимости $X^{\Gamma}(t_j)$, $j = \overline{1, N}$, в виде множеств $\tilde{X}^{\Gamma}(t_j)$ и тем самым

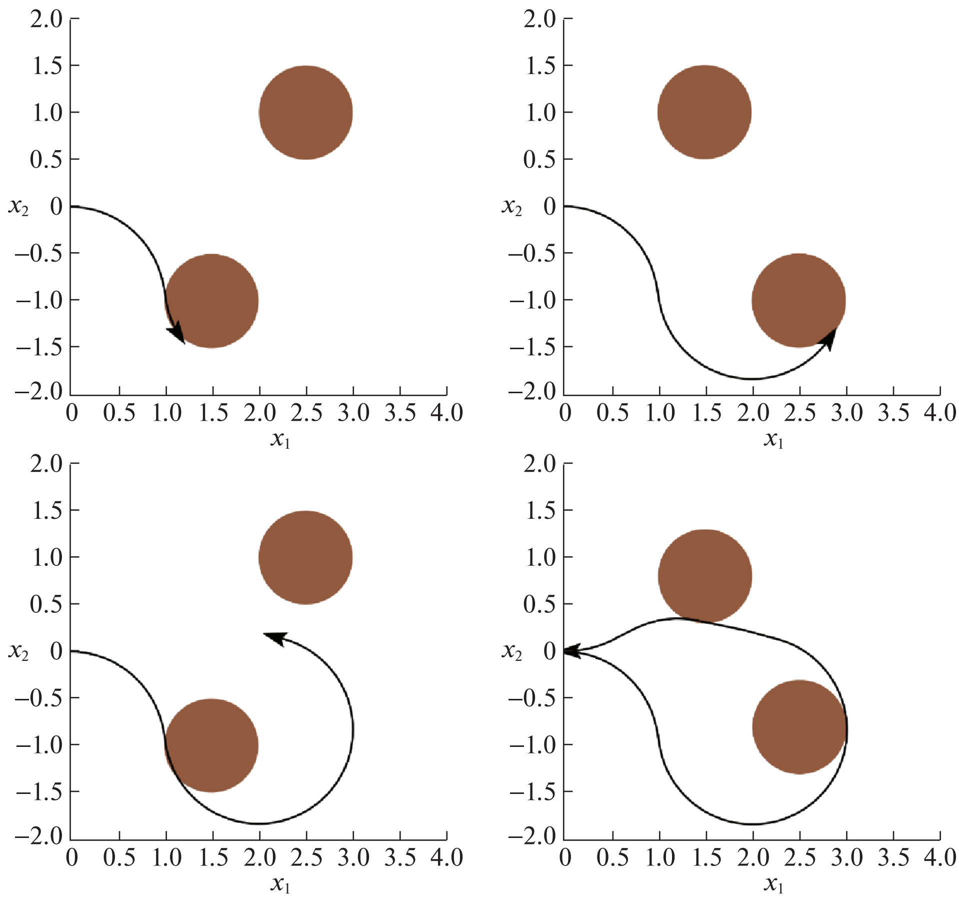

Рис. 9. Проекция движения $x(t)$ системы (4.4), порожденного управлением $u^*(t)$, на плоскость x_1, x_2 и множества $K^*(t_j) \cup K^{**}(t_j)$ в моменты t_j = 2, 4, 6, 8.2

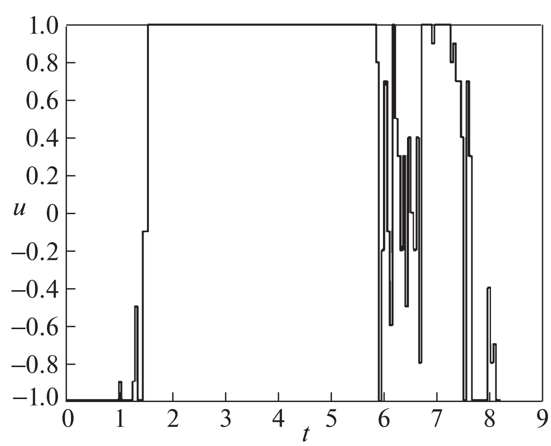

Рис. 10. Разрешающее управление $u^*(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 8.2]$

обеспечили условия для построения траектории $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, подходящей близко к финальной точке x^f в момент $\vartheta = 8.2$.

Ниже представлены элементы графического сопровождения результатов математического моделирования решения задачи 2 (рис. 8–10).

Заключение. Для конечномерной управляемой системы рассмотрена игровая задача о сближении с целевым множеством в фазовом пространстве системы. Предложен метод приближенного конструирования множества разрешимости. В конкретной задаче управления механической системой “тележка–маятник на тележке” конструируется разрешающее управление на основе принципа Н.Н. Красовского экстремального прицеливания на множество разрешимости. Описана задача управления движением четырехколесной тележки на горизонтальной плоскости. По условиям задачи тележка стеснена подвижными фазовыми ограничениями. Требуется за фиксированное время осуществить разворот тележки на 180°, соблюдая фазовые ограничения. В задаче управления тележкой построено разрешающее программное управление. Предложенный в работе метод построения приближенных решений применим к широкому кругу конкретных задач управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Куржанский А.Б.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
4. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
5. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 119–158.
6. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
7. *Никольский М.С.* Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
8. *Половинкин Е.С.* Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 433–446.
9. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
10. *Ананьевский И.М., Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
11. *Dubins L.S.* On Curves of Minimal Length with a Constraint of Average Curvature and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American J. Math. 1957. V. 79. № 79. P. 407–516.
12. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Тр. Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24. № 1. С. 143–155.
13. *Халил Х.К.* Нелинейные системы, 3-е изд. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, 2009.
14. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. 1987. Т. 51. № 2. С. 216–222.
15. *Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* О приближенном построении решений в игровых задачах управления // ПММ. Т. 61. Вып. 3. 1997. С. 413–421.
16. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Тр. МИАН. 2010. С. 299–318.

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.977

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ЧАСТИ КООРДИНАТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА

© 2021 г. В. И. Максимов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Москва

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 30.03.2019 г.
После доработки 23.03.2021 г.
Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача отслеживания траектории нелинейной управляемой системы дифференциальных уравнений в условиях неточного измерения в дискретные моменты времени части фазовых координат. Указывается устойчивый к помехам алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теорий управления с обратной связью. Алгоритм состоит из двух блоков: блока динамического восстановления неизмеряемых координат и блока управления.

DOI: 10.31857/S0002338821040090

Введение. В статье описывается задача управления системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание траекторией заданной системы траектории другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. В работе исследуем задачу, в которой предполагается, что измеряются (с ошибкой) в дискретные моменты времени не все, а часть фазовых координат заданной управляемой системы. Кроме того, полагаем, что неизвестное возмущение является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е. может быть неограниченным. Учитывая данную особенность задачи, конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения, который основан на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Предлагаемый алгоритм содержит два блока: блок реконструкции в темпе “реального времени” ненаблюдаемых координат, а также блок управления, использующий результаты работы блока реконструкции в качестве входа.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), y_1(t)), \quad t \in T, \\ \dot{y}_1(t) &= f_{21}(t, x_1(t), y_1(t)) + Cv(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальным состоянием

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$ – конечный момент времени, $x \in R^n$ – измеряемая часть полного фазового вектора системы, $y \in R^N$ – неизмеряемая часть, $v \in R^r$ – возмущение, f_1 и f_{21} – липшицевые функции с константой Липшица L, C – стационарная матрица соответствующей размерности. Назовем систему (1.1) возмущенной. Система (1.1) подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; R^r)$. Как это возмущение $v(\cdot)$, так и отвечающее ему решение системы (1.1) $z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)) = \{x_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)), y_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))\}$, где $z_1 = \{x_1, y_1\}$, $z_{10} = \{x_{10}, y_{10}\}$, неизвестны.

Наряду с системой (1.1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= f_{21}(t, x(t), y(t)) + Cu(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

с начальным состоянием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

и управлением $u \in R^r$. Назовем её следящей. Начальные состояния систем (1.1) и (1.2) полагаем в дальнейшем известными.

В дискретные, достаточно частые, моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m_h} \quad (\tau_0 = 0, \tau_{m_h} = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряется часть фазовых состояний системы (1.1), а именно состояния $x_1(\tau_i) = x_1(\tau_i; z_{10}, v(\cdot))$, а также состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; z_0, u(\cdot))$ системы (1.2). Состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^n$, $i \in \overline{0, m_h - 1}$, удовлетворяют неравенствам

$$|x_1^h(\tau_i) - \xi_i^h|_n \le h. \tag{1.3}$$

Здесь $h \in (0,1)$ – уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве R^n. Для простоты ограничимся случаем, когда состояния $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$ системы (1.2) измеряются точно. Будем предполагать

$$|x_0 - x_{10}|_n \le h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \le h. \tag{1.4}$$

Неравенства (1.3) означают, что состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. В свою очередь неравенства (1.4) говорят о том, что начальные состояния следящей и возмущенной систем близки.

Обсуждаемая в работе задача состоит в построении алгоритма формирования управления $u = u^h(\cdot)$ системой (1.2), позволяющего осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решение $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (1.1), т.е. обеспечить малость величины $\sup_{t\in T} |z(t) - z_1(t)|_{n+N}$. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x_1(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ в правой части системы (1.2), такое, что отклонение решения системы (1.2) $z(\cdot) = z(\cdot; z_0, u^h(\cdot)) = \{x(\tau_i; z_0, u(\cdot)), y(\tau_i; z_0, u(\cdot))\}$ $(z_0 = \{x_0, y_0\})$ от решения системы (1.1) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T; R^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h и периода дискретизации δ.

Задача слежения – одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [1–5]). В данной работе мы рассмотрим случай измерения части координат. При этом укажем алгоритм решения, который основан на методе динамического обращения, развитом в [6, 7], а также известном в теории позиционного управления методе экстремального сдвига [8]. В связи с неполнотой информации (а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы (1.1) – $\{x_1(\tau_i), y_1(\tau_i)\}$, а лишь его части – $x_1(\tau_i)$), наряду с блоком управления, нами будет использоваться дополнительный блок – блок динамического восстановления неизмеряемых координат. Последний будет играть роль поставщика недостающей информации о текущем фазовом состоянии системы (1.1). Эта информация оперативно передается на блок управления, формирующий u по принципу обратной связи. Среди последних работ, где сначала оценивается часть координат, а затем все координаты подаются на вход контура управления, следует отметить [9].

Другие задачи отслеживания решений дифференциальных уравнений, основанные на методе экстремального сдвига, обсуждались, например, в [10–15]. При этом в работах [10–12] рассматривался случай измерения "всех" координат. Случай измерения части фазовых координат обсуждался в публикациях [13] (линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений), [14] (система с последействием), [15] (система с распределенными параметрами).

2. Метод решения. Перейдем к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1). \tag{2.1}$$

Как было отмечено выше, при решении задачи слежения будут использоваться два блока.

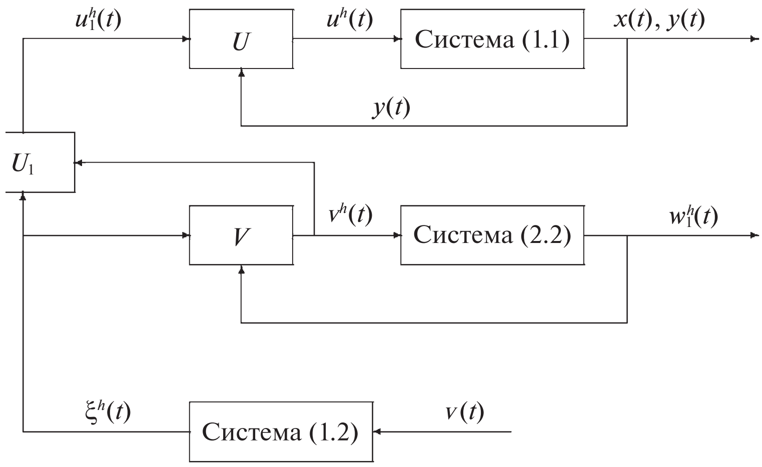

Рис. 1

Первый (вспомогательный) блок – блок реконструкции, содержит управляемую систему и закон формирования управления $u_0^h(\cdot)$ этой системой по принципу обратной связи U_0. Динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_1^h(t) = u_0^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_1^h, u_0^h \in R^n) \tag{2.2}$$

с начальным условием $w_1^h(0) = x_0$. Здесь управление $u_0^h(\cdot)$ задается формулой

$$u_0^h(t) = u_{0i}^h = U_0(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}), \tag{2.3}$$

ξ_i^h – результат измерения компоненты $x_1(\tau_i)$ (см. (1.3)), п.в. – почти всех. При $i = 0$ полагаем $\xi_0^h = x_0$. Закон $U_0(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times R^n \times R^n \mapsto R^n$ конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $u_0^h(\cdot)$, стоящее в правой части системы (2.2), позволяет с помощью некоторого отображения $U_1 : T \times R^n \times R^n \to R^N$ сконструировать функцию $u_1^h(\cdot)$:

$$u_1^h(t) = u_{1i}^h = U_1(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}), \tag{2.4}$$

являющуюся приближением (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемой части фазовой траектории $y_1(\cdot)$.

Второй (основной) блок – блок управления системой (1.2), содержит закон $U(\cdot, \cdot, \cdot)$: $T \times R^N \times R^N \mapsto R^r$ формирования управления $u = u^h(\cdot)$. Закон U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров управление $u = u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, u_{1i}^h, y(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}) \tag{2.5}$$

обеспечивает отслеживание решения системы (1.2) решением системы (1.2).

На рис. 1 изображена блок-схема алгоритма решения задачи.

3. Алгоритм решения. Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Фиксируем некоторое семейство Δ_h (2.1), а также две функции $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$ и $\alpha_1(h) : (0,1) \to (0,1)$.

Пусть $M \subset R^n$ – область, в которой остаются первые n фазовых координат решения системы (1.1), порожденного неизвестным возмущением $v(\cdot)$, т.е.

$$x_1(t) \in M \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Условие. В области $T \times M$ функция $y \to F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную функцию $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой функцией по совокупности переменных с постоянной Липшица L_y.

Кроме того, полагаем, что функция f_1 – дифференцируема, а компонента $x(\cdot)$ решения системы (1.2) обладает следующим свойством: $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T; R^n)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$, числа $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (2.1). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются векторы u_{0i}^h, u_{1i}^h и u_i^h по формулам (2.3)–(2.5), в которых

$$\begin{gathered} U_0(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}[w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h + \tau_i f_1(0, x_{10}, y_{10})], \\ U_1(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h) = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h + f_1(0, x_{10}, y_{10})), \\ U(\tau_i, u_{1i}^h, y(\tau_i)) = -\alpha_1^{-1} C^{\mathrm{T}}(y(\tau_i) - u_{1i}^h). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь символ “Т” означает транспонирование. Затем на вход системы (2.2) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u_0^h(t)$ вида (2.3), (3.1), а на вход системы (1.2) – управление $u = u^h(t)$ вида (2.5), (3.1). Под действием этих управлений решение системы (1.2) переходит из состояния $z(\tau_i)$ в состояние $z(\tau_{i+1})$, а решение системы (2.2) – из состояния $w_1^h(\tau_i)$ в состояние $w_1^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Оказывается, что при определенном согласовании величин h, $\delta(h)$, $\alpha(h)$ и $\alpha_1(h)$ построенное таким образом управление $u = u^h(\cdot)$ решает обсуждаемую задачу слежения.

Прежде чем перейти к доказательству этого факта, приведем два вспомогательных утверждения. Заметим, что встречающиеся далее постоянные c_j, C_j зависят от структуры системы (1.2) и не зависят от h, α, α_1, δ.

Лемма 1 [10]. Пусть неотрицательная функция $\varphi(\cdot)$ при всех $i \in \overline{0, m_h - 1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(\tau_{i+1}) \le \varphi(\tau_i)(1 + p\delta) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |G(\tau)| d\tau,$$

где $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$, $p = \mathrm{const} > 0$, $G(\cdot) \in L_\infty(T; R)$. Тогда справедливы неравенства

$$\varphi(\tau_i) \le \left(\varphi(0) + \int_0^{\tau_i} |G(\tau)| d\tau \right) \exp(p\tau_i).$$

Символ $|\cdot|$ здесь означает модуль числа.

Лемма 2. Пусть $\alpha(h) \to 0$, $\delta(h) \to 0$, $(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0$ при $h \to 0$, причем $\delta(h_1) \le \delta(h_2)$, если $h_1 \le h_2$. Тогда можно указать такое число $h_0 \in (0,1)$, что при всех $h \in (0, h_0)$ верно неравенство

$$\sup_{t \in T} |u_1^h(t) - y_1(t)|_N \le C_1 \nu^h,$$

где $\nu^h = \nu(h, \alpha(h), \delta(h)) = \alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h)$.

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть также $\alpha_1(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $\delta^\gamma(h) \le C_1 \alpha_1^2(h)$ при некотором $\gamma \in (0,1)$. Тогда можно указать $h_1 \in (0, h_0)$, такое, что при всех $h \in (0, h_1)$ верно неравенство

$$\max_{i \in [0:m_h]} \varepsilon_1(\tau_i) \le C_2(h^2 + \alpha_1 + \delta^\gamma + (\nu^h)^2 \delta^{-\gamma}),$$

где $\varepsilon_1(t) = |z(t) - z_1(t)|_{n+N}^2$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\delta = \delta(h)$, $\nu^h = \nu(h, \alpha(h), \delta(h))$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Следствие. Если $\gamma = 1/2$, $\delta = h$, $\alpha = h^{1/2}$, $\alpha_1 = h^{1/2}$, то справедливо неравенство

$$\max_{i \in [0:m_h]} \varepsilon_1(\tau_i) \le C_3 h^{1/2}.$$

Замечание. Пусть неточно измеряются состояния $x(\tau_i)$ системы (1.2), т.е. в моменты τ_i находятся величины $\psi_i^h \in R^n$, такие, что

$$|\psi_i^h - x(\tau_i)|_n \le h, \quad i \in \overline{1, m_h - 1}.$$

В этом случае блок реконструкции следует дополнить системой

$$\dot{w}_2^h(t) = v^{h(1)}(t), \quad t \in T \quad (w_2^h, v^{h(1)} \in R^n)$$

с начальным состоянием $w_2^h(0) = x_{10}$. При этом управление $v^{h(1)}(t)$ будем вычислять по правилу

$$v^{h(1)}(t) = v_i^{h(1)} = V^{(1)}(\tau_i, \psi_i^h, w_2^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}[w_2^h(\tau_i) - \psi_i^h + \tau_i f_1(0, x_0, y_0)].$$

В свою очередь управление $u^h(t)$ вычисляется по формуле (2.5), в которой вместо вектора $y(\tau_i)$ стоит вектор

$$u_{2i}^h = U_2(\tau_i, \psi_i^h, v_i^{h(1)}) = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \psi_i^h, v_i^{h(1)} + f_1(0, x_0, y_0)),$$

т.е.

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, u_{1i}^h, u_{2i}^h) = -\alpha_1^{-1} C'(u_{2i}^h - u_{1i}^h).$$

При этом теорема и следствие будут справедливыми.

4. Примеры. Пример 1. Рассматриваются две материальные точки единичной массы, которые двигаются по прямой под действием внешних сил. Силы гравитации, а также сопротивления среды отсутствуют. Поэтому уравнения движения точек, согласно второму закону Ньютона, имеют вид

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad \vartheta \in (0, +\infty) \tag{4.1}$$

и

$$\ddot{x}_1(t) = v(t), \quad t \in T. \tag{4.2}$$

Здесь $x(t)$ ($x_1(t)$) – путь, пройденный к моменту t первой (второй) точкой, $\dot{x}(t)(\dot{x}_1(t))$ – скорость первой (второй) точки, $u(\cdot)(v(\cdot))$ – сила воздействия на первую (вторую) точку. В начальный момент времени ($t = 0$) состояния точек и их скоростей изменения близки:

$$|x_0 - x_1(0)| \le h, \quad |\dot{x}(0) - \dot{x}_1(0)| \le h.$$

Сила $v(\cdot)$, действующая на вторую точку, неизвестна. Известно лишь, что она удовлетворяет условию $v(\cdot) \in L_2(T; R)$. В дискретные моменты времени $\tau_i, \tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\tau_0 = 0$, измеряются пути, пройденные каждой из точек, т.е. определяются числа ξ_i^h и ψ_i^h, такие, что

$$|x_1(\tau_i) - \xi_i^h| \le h, \quad |x(\tau_i) - \psi_i^h| \le h.$$

Необходимо указать алгоритм формирования управления $u(\cdot)$ по принципу обратной связи

$$u(t) = u(\xi_i^h, \psi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

такой, что первая точка отслеживает движение второй, т.е. величина

$$\varepsilon(t) = \max\{|x(t) - x_1(t)|, |\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)|\}$$

мала при малых величинах погрешности измерения h и расстояния между узлами измерения фазовых положений точек $\delta = \tau_i - \tau_{i-1}$.

Для решения сформулированной задачи был использован описанный выше алгоритм. Уравнение (4.1) сводилось к виду (1.2) заменой переменных $y(t) = \dot{x}(t)$, а уравнение (4.2) – к виду (1.1) заменой $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$. Полученные системы решались методом Эйлера с шагом δ.

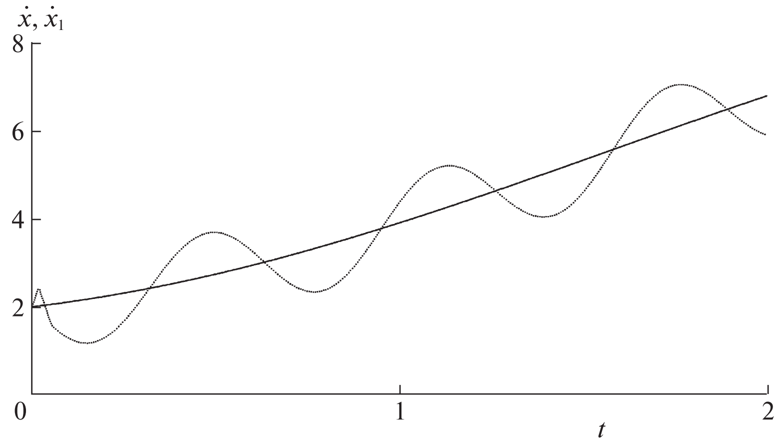

Рис. 2

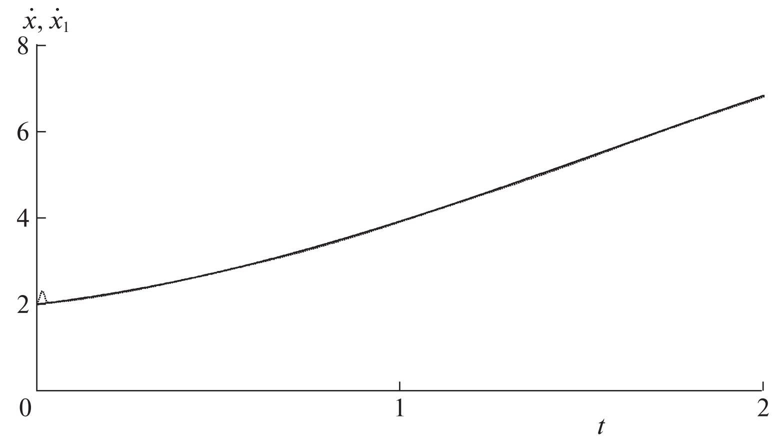

Рис. 3

В моменты $\tau_i = i\delta$ числа v_i^h, u_{1i}^h и u_i^h вычислялись по формулам (2.3)–(2.5) и (3.1). В ходе эксперимента полагалось $v(t) = 1 + \sin(2t)$, $\vartheta = 2$, $x_0 = x_{10} = 2$, $y_0 = y_{10} = 2$, $\alpha = \alpha_1 = 0.002$, $\xi_i^h = x_1(\tau_i) + h\cos(10t)$, $\psi_i^h = x(\tau_i) + h$. Результаты вычислительного эксперимента показаны на рис. 2, 3. Рисунок 2 отвечает случаю $h = 0.01$, $\delta = 0.002$, в то время как рисунок 3 – случаю $h = 0.001$, $\delta = 0.002$. На рисунках сплошная линия изображает $\dot{x}(\cdot)$, пунктирная линия – $\dot{x}_1(\cdot)$. Как показал эксперимент, графики кривых $x(\cdot)$ и $x_1(\cdot)$ во втором случае практически совпадают.

П р и м е р 2. Аналогичная задача решалась для систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 3y(t), \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) &= -x(t) + y(t) + u(t), \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + 3y_1(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{y}_1(t) &= -x_1(t) + y_1(t) + v(t), \quad y_1(0) = y_{10}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Системы (4.3)–(4.4) решались методом Эйлера с шагом δ. В ходе эксперимента полагалось $v(t) = t^2$, $\vartheta = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\alpha = \alpha_1 = 0.002$, $\xi_i^h = x_1(\tau_i) + h\cos(10t)$, $x_{10} = x_0$, $y_{10} = y_0 + h$. Результаты эксперимента приведены на рис. 4, 5. Рисунок 4 отвечает случаю $h = 0.5$, $\delta = 0.002$, а рисунок 5 – случаю $h = 0.1$, $\delta = 0.002$. На указанных рисунках сплошная линия изображает $y(\cdot)$, пунктирная линия –$y_1(\cdot)$.

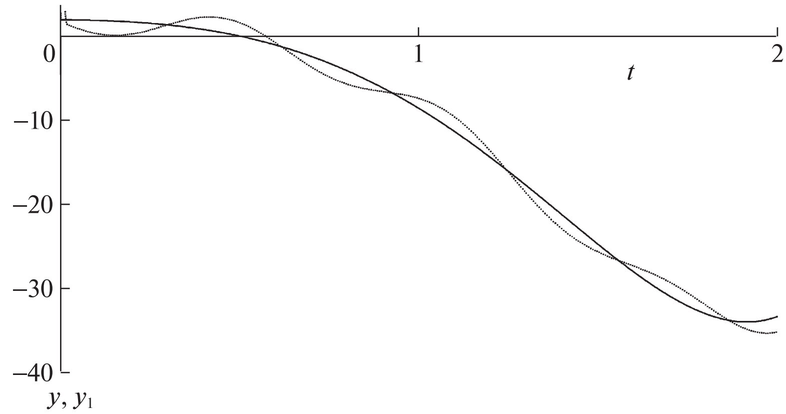

Рис. 4

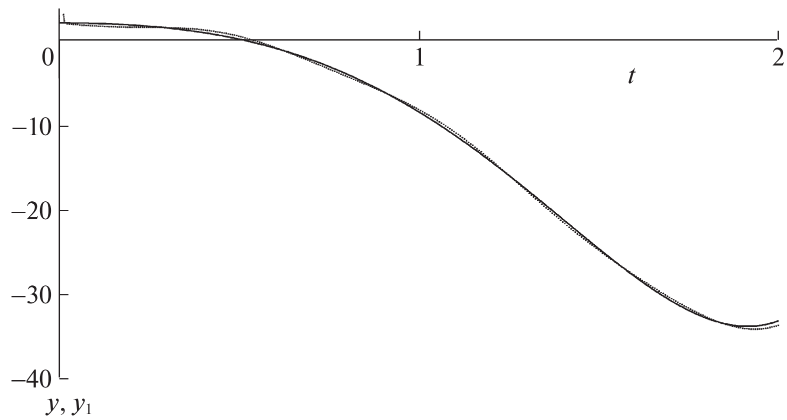

Рис. 5

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Пусть

$$\dot{X}(t) = \dot{x}_1(t) - f_1(0, x_{10}, y_{10}), \qquad X(0) = x_{10}. \tag{П.1}$$

Функция, стоящая в правой части (П.1), является дифференцируемой, ее производная суммируема с квадратом евклидовой нормы. В нуле эта функция обращается в ноль. Кроме того,

$$X(\tau_i) = x_1(\tau_i) - \tau_i f_1(0, x_{10}, y_{10}).$$

В силу теоремы 5 из работы [16] можно указать $h^{(1)} \in (0,1)$, такое, что при всех $h \in (0, h^{(1)})$ справедливо неравенство

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |u_0^h(t) - \dot{X}(t)|_n \le c_1 \nu^h.$$

В свою очередь, в силу условия,

$$y_1(t) = f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), \dot{x}_1(t)), \tag{П.2}$$

$$|f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), u_0^h(t) + f_1(0, x_{10}, y_{10})) - f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), \dot{x}_1(t))|_N \le L_y c_1 \nu^h. \tag{П.3}$$

Заметим, что

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T}|\dot{x}_1(t)|_n < +\infty.$$

В таком случае при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|f_{1y}^{-1}(t, x_1(t), u_0^h(t) + f_1(0, x_{10}, y_{10})) - u_1^h(t)|_N \le L_y(|t - \tau_i| + |x_1(\tau_i) - \xi_i^h|_n + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}_1(t)|_n dt) \le c_2(h + \delta(h)). \quad (\text{П.4})$$

Утверждение леммы следует из равенства

$$u_{1i}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, u_{0i}^h + f_1(0, x_{10}, y_{10}))$$

и (П.2)–(П.4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_1(t)$. Обозначим

$$F_1(t, x, y) = \{f_1(t, x, y) + By, f_{21}(t, x, y)\}, \quad F_2(u) = \{0, Cu\}, \quad F(t, x, y, u) = F_1(t, x, y) + F_2(u).$$

Тогда система (1.2) запишется в виде

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t), u(t)),$$

а система (1.1) – в виде

$$\dot{z}_1(t) = F(t, z_1(t), v(t)).$$

Здесь $z_1 = \{x_1, y_1\}$, $z = \{x, y\}$. При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо равенство

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_i + \pi_{i,t}^h + p_{i,t}^h, \quad (\text{П.5})$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_1(\tau_i)$,

$$\pi_{i,t}^h = 2(z(\tau_i) - z_1(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{t} \{F(\tau, z(\tau), u_i^h) - F(\tau, z_1(\tau), v(\tau))\}\, d\tau),$$

$$p_{i,t}^h = \left|\int\limits_{\tau_i}^{t} \{F(\tau, z(\tau), u_i^h) - F(\tau, z_1(\tau), v(\tau))\} d\tau\right|_{n+N}^2,$$

символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве. Заметим, что

$$\pi_{i,t}^h = \chi_{i,t}^h + \rho_{i,t}^h. \quad (\text{П.6})$$

Здесь

$$\chi_{i,t}^h = 2\left(z(\tau_i) - z_1(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{t} \{F_1(\tau, z(\tau)) - F_1(\tau, z_1(\tau))\} d\tau\right),$$

$$\rho_{i,t}^h = 2(y(\tau_i) - y_1(\tau_i), \quad \int\limits_{\tau_i}^{t} C\{u_i^h - v(\tau)\}\, d\tau).$$

Далее, имеем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\chi_{i,t}^h \le 2L\varepsilon_i^{1/2}\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1^{1/2}(\tau)\,d\tau \le 2L(t-\tau_i)^{1/2}\varepsilon_i^{1/2}\left(\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)\,d\tau\right)^{1/2} \le (t-\tau_i)\varepsilon_i + L^2\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)\,d\tau, \qquad (\text{П}.7)$$

$$\rho_{i,t}^h \le 2(y(\tau_i) - u_{1i}^h, \int\limits_{\tau_i}^t C\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau) + 2c_*|y_1(\tau_i) - u_{1i}^h|_N \int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r + |v(\tau)|_r\}\,d\tau \le$$
$$\le 2\int\limits_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{1i}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau) + (t-\tau_i)^{1-\gamma}c_*^2|y_1(\tau_i) - u_{1i}^h|_N^2 + (t-\tau_i)^\gamma\int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\}\,d\tau, \qquad (\text{П}.8)$$

где c_* – евклидова норма матрицы C, L – постоянная Липшица функции $z \to F(t,z,u)$. Кроме того,

$$p_{i,t}^h \le c_1\left\{(t-\tau_i)\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)\,d\tau + \left|\int\limits_{\tau_i}^t C\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau\right|_N^2\right\} \le c_1(t-\tau_i)\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)\,d\tau + c_2\delta\int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\}\,d\tau. \qquad (\text{П}.9)$$

В силу (3.1) и леммы 2 при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верна оценка

$$\int\limits_{\tau_i}^t |u_i^h|_N^2\,d\tau \le \frac{2(t-\tau_i)}{\alpha_1^2}c_*^2((C_1\nu^h)^2 + \varepsilon_i) \le c_3(t-\tau_i)\alpha_1^{-2}((\nu^h)^2 + \varepsilon_i). \qquad (\text{П}.10)$$

Из (П.5), воспользовавшись (П.6)–(П.9), устанавливаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ неравенство

$$\varepsilon_1(t) \le (1 + t - \tau_i)\varepsilon_i + c_4\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)d\tau + c_5(t-\tau_i)^{1-\gamma}(\nu^h)^2 +$$
$$+ c_6(t-\tau_i)^\gamma\int\limits_{\tau_i}^t \left\{|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\right\}d\tau + 2\int\limits_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{1i}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\})d\tau. \qquad (\text{П}.11)$$

Таким образом, из (П.12), учитывая (П.11), получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\varepsilon_1(t) + \alpha_1\int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\}d\tau \le \varepsilon_i + (t-\tau_i)\varepsilon_i + c_5(\nu^h)^2(t-\tau_i)^{1-\gamma} + 2\int\limits_{\tau_i}^t (y(\tau_i) - u_{1i}^h, C\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau +$$
$$+ \alpha_1\int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\}d\tau + c_6(t-\tau_i)^\gamma\int\limits_{\tau_i}^t \{|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2\}d\tau + c_4\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)d\tau.$$

Значит (см. (3.1)), при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_1(t) + \alpha_1\int\limits_{\tau_i}^t \{|u_i^h|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\}d\tau \le \varepsilon_i + (t-\tau_i)\varepsilon_i + c_5(\nu^h)^2(t-\tau_i)^{1-\gamma} +$$
$$+ c_6(t-\tau_i)^\gamma\int\limits_{\tau_i}^t \{|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2\}d\tau + c_4\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_1(t) \le \varepsilon_i + (t-\tau_i)\varepsilon_i + c_5(\nu^h)^2(t-\tau_i)^{1-\gamma} + c_7((t-\tau_i)^\gamma + \alpha_1)\int\limits_{\tau_i}^t |v(\tau)|_r^2 d\tau +$$
$$+ c_6(t-\tau_i)^\gamma\int\limits_{\tau_i}^t |u_i^h|_r^2 d\tau + c_4\int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon_1(\tau)d\tau. \qquad (\text{П}.12)$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, из (П.12) выводим справедливую при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценку

$$\varepsilon_1(t) \le \left\{(1+\delta)\varepsilon_i + c_5(\nu^h)^2\delta^{1-\gamma} + c_6\delta^\gamma \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h|_r^2\, d\tau + c_7(\delta^\gamma + \alpha_1)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau\right\} \exp\{c_4(t-\tau_i)\}. \qquad (\text{П.13})$$

Кроме того, в силу (П.10) при $\delta\alpha_1^{-2} \le c_8\delta^{1-\gamma}$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h|_r^2 d\tau \le c_9\delta^{1-\gamma}((\nu^h)^2 + \varepsilon_i).$$

Поэтому при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$c_6(t-\tau_i)^\gamma \int\limits_{\tau_i}^{t} |u_i^h|_r^2 d\tau \le c_{10}\delta((\nu^h)^2 + \varepsilon_i).$$

Нетрудно видеть, что при $0 < t - \tau_i < \delta(h) \le \delta(h_0)$, $h \in (0, h_0)$, $i \in \overline{0, m-1}$,

$$\exp\{c_4(t-\tau_i)\} \le 1 + c_{11}\delta.$$

В таком случае при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ получаем из (П.13)

$$\varepsilon_1(t) \le (1 + c_{12}\delta)\varepsilon_i + c_{13}(\nu^h)^2\delta^{1-\gamma} + c_{14}(\alpha_1 + \delta^\gamma)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau. \qquad (\text{П.14})$$

Учитывая (П14), а также лемму 1, заключаем, что верны неравенства

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\tau_i) &\le \left(\varepsilon_1(0) + c_{13}\left(\delta\sum_{j=0}^{i}(\nu^h)^2\right)\delta^{-\gamma} + c_{14}(\alpha_1 + \delta^\gamma)\int\limits_0^{\tau_i} |v(\tau)|_r^2 d\tau\right)\exp\{c_{12}\tau_i\} \le \\ &\le c_{15}\left(\varepsilon_1(0) + \left(\delta\sum_{j=0}^{i}(\nu^h)^2\right)\delta^{-\gamma} + \alpha_1 + \delta^\gamma\right).\end{aligned} \qquad (\text{П.15})$$

Кроме того (см. (1.4)), $\varepsilon_1(0) \le c_{16}h^2$. Из (П.15) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
3. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
4. *Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5. С. 25–32.
5. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // АиТ. 2014. № 9. С. 45–64.
6. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
7. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
9. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 18–25.

10. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // ПММ. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.
11. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
12. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 1. С. 14–26.
13. *Максимов В.И.* Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 218–230.
14. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последействием при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 415–426.
15. *Maksimov V.I.* Game Control Problem for a Phase Field Equation // JOTA. 2016. V. 170. № 1. P. 294–307.
16. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. МИРАН им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 559–586.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 57–73

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ С НАЧАЛЬНЫМ И КОНЕЧНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ДВИЖЕНИЯ С ЦЕЛЬЮ НАИСКОРЕЙШЕГО ПОВОРОТА ТВЕРДОГО ТЕЛА[1]

© 2021 г. А. М. Шматков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: shmatkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.
После доработки 24.09.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

В плоском случае рассмотрена задача поворота твердого тела на заданный угол за минимально возможное время с помощью взаимодействующей с ним подвижной массы, движения которой ограничены внутренностью заданного круга. Исследована соответствующая двухточечная задача оптимального быстродействия для системы с тремя фазовыми переменными при наличии фазового ограничения. Показано наличие континуума как кривых, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, так и искомых оптимальных траекторий. В случае, когда подвижная масса начинает и заканчивает свое движение на границе круга, получены оптимальные траектории и длительности ее перемещения. Исследование основано на анализе одномерной механической системы, движения которой соответствуют решениям уравнений трехмерной задачи для оптимальных управлений.

DOI: 10.31857/S000233882103015X

Введение. В агрессивных и ранимых средах при изменении пространственной ориентации робототехнических систем ряд существенных затруднений возникает из-за наличия внешних по отношению к корпусу робота движителей: колес, пропеллеров, ног и т.п. Один из возможных способов решения проблемы – использование для переориентации внутренних подвижных масс, что позволяет делать корпус герметичным [1–4]. Тогда возникает ограничение на допустимые положения внутренней массы, состоящее в том, что она не может находиться от центра масс корпуса дальше, чем на некотором заданном расстоянии, зависящем от габаритов устройства. Тот же самый подход может быть применен для управления вращением космических аппаратов [5] без использования реактивных двигателей и гиростабилизирующих систем.

При известных предположениях об особенностях маневра можно пренебречь влиянием внешних сил и полагать соответствующую механическую систему замкнутой, т.е. состоящей только из объекта управления и движущейся массы. Это позволяет упростить математическую модель и получить в аналитическом виде, например, решение задачи о пространственной переориентации тела по заданной программе [6]. Кроме того, для плоского случая, когда оба объекта могут осуществлять только плоскопараллельные движения, оказывается возможным провести подробный анализ некоторых задач оптимального управления, который будет изложен ниже.

Данная работа включает в себя обобщение и анализ кратко изложенных ранее результатов [7].

1. Уравнения движения. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела массы M и материальной точки массы m. Допустим, что все внешние силы отсутствуют, и не будем делать никаких предположений о внутренних силах, действующих на оба объекта. Пусть сначала твердое тело и материальная точка покоятся. Тогда на основании законов сохранения количе-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-11-00307).

ства движения и углового момента, а также того обстоятельства, что общий центр масс системы никогда не движется, можно получить уравнения [4]

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{\mu(yu - xv)}{a^2 + \mu(x^2 + y^2)}, \quad u^2 + v^2 \le V^2, \quad x^2 + y^2 \le R^2. \tag{1.1}$$

В (1.1) фазовые переменные x и y – декартовы координаты материальной точки в связанной с твердым телом системе координат, имеющей начало в его центре масс. Последний также является центром круга радиуса $R > 0$, пределы которого материальная точка никогда не должна покидать. Управления u и v – проекции вектора скорости материальной точки на оси введенной системы координат, причем длина этого вектора не может превышать некоторой заданной величины V. Еще одна фазовая переменная – угол поворота твердого тела φ. Через $a = \sqrt{J/M}$ обозначен радиус инерции тела, где J – главный центральный момент инерции, а $\mu = m/(M + m)$.

В общем случае граничные условия для системы (1.1) можно записать в форме

$$\begin{gathered} x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad x_0^2 + y_0^2 \le R^2, \\ x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \varphi(T) = \varphi_T, \quad x_T^2 + y_T^2 \le R^2. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Заменим переменные в (1.1), согласно [8]:

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}x, \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}y, \quad \tilde{R} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}R, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad \tilde{t} = \frac{V\sqrt{\mu}}{a}t.$$

Сохраним старые обозначения переменных и получим

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{yu - xv}{1 + x^2 + y^2}, \quad u^2 + v^2 \le 1, \quad x^2 + y^2 \le R^2. \tag{1.3}$$

Потом перейдем к полярным переменным

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad u = r_\xi\cos\xi, \quad v = r_\xi\sin\xi,$$

где r и α описывают положение материальной точки, а r_ξ и ξ – ее скорость. Тогда систему (1.3) можно записать в форме [8]

$$\dot{r} = \hat{u}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\hat{v}}{r}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{r\hat{v}}{1 + r^2}, \quad \hat{u}^2 + \hat{v}^2 \le 1, \quad r \le R, \tag{1.4}$$

где $\hat{u} = r_\xi\cos(\xi - \alpha)$ и $\hat{v} = r_\xi\sin(\xi - \alpha)$ – новые управления. Заметим, что для любого управления $\hat{v} \ne 0$ из (1.4) следует

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{r^2}{1 + r^2}. \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.2) для общего случая можно заменить на [8]

$$\begin{gathered} r(0) = r_0, \quad \alpha(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad r_0 \le R, \\ r(T) = r_T, \quad \alpha(T) = \alpha_T, \quad \varphi(T) = \varphi_T, \quad r_T \le R. \end{gathered}$$

Далее будут рассмотрены задачи оптимального быстродействия для системы (1.4) с различными вариантами граничных условий.

2. Оптимальное управление для участков траектории, не лежащих на ограничении. Запишем гамильтониан [9] для системы (1.4):

$$H = p_0 + p_r\hat{u} + \zeta\hat{v}, \quad p_0 = \text{const} \le 0, \quad \zeta = \frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2}. \tag{2.1}$$

В (2.1) через p_r, p_α и p_φ обозначены переменные, сопряженные к фазовым переменным r, α и φ соответственно. Сопряженные переменные p_α и p_φ постоянны, поскольку

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Заметим, что гамильтониан (2.1) можно рассматривать как сумму константы p_0 и скалярного произведения вектора управления с компонентами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ на некоторый вектор ψ с компонентами p_r и ζ. Согласно принципу максимума, на оптимальной траектории величина H должна достигать максимума как функция вектора управления, а потому последний должен быть сонаправлен вектору ψ, а также иметь максимально возможную норму, которая в данной задаче (1.4) равна единице. Кроме того, на оптимальной траектории гамильтониан равен нулю. Следовательно, скалярное произведение единичного вектора управления и сонаправленного ему вектора ψ постоянно и равно $-p_0$. Тогда норма вектора ψ постоянна и равна p_0, причем $p_0 \neq 0$, так как вектор $\psi(t) \not\equiv 0$. Отсюда имеем интеграл движения $\psi^2 = p_r^2 + \zeta^2 = p_0^2$ и оптимальные управления в форме

$$\hat{u}_* = \frac{p_r}{-p_0}, \quad \hat{v}_* = \frac{\zeta}{-p_0}. \tag{2.2}$$

Поскольку вектор сопряженных переменных определен с точностью до ненулевого скалярного множителя, в дальнейшем положим $p_0 = -1$. Получаем систему дифференциальных уравнений, которой должна удовлетворять оптимальная траектория:

$$\begin{gathered} \dot{r} = p_r, \quad \dot{p}_r = \left(\frac{p_\alpha}{r^2} + \frac{p_\varphi(1-r^2)}{(1+r^2)^2}\right)\left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}\right), \\ \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{r^2} - \frac{p_\varphi}{1+r^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{-p_\alpha}{1+r^2} + \frac{p_\varphi r^2}{(1+r^2)^2} \end{gathered} \tag{2.3}$$

и интеграл движения

$$p_r^2 + \left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}\right)^2 = 1. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) позволяет, в частности, исключить переменную p_r:

$$p_r = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}\right)^2}. \tag{2.5}$$

Положительный знак в формуле (2.5) соответствует тем участкам траекторий, на которых расстояние r увеличивается, а отрицательный – тем, на которых оно уменьшается.

Заметим, что вследствие обратимости времени в механических системах уравнения (2.3) инвариантны относительно замены переменных

$$\alpha \to -\alpha, \quad \varphi \to -\varphi, \quad p_r \to -p_r, \quad t \to -t. \tag{2.6}$$

Другими словами, если твердое тело поворачивается на угол $\varphi(T)$ при движении материальной точки из начального положения в конечное, то при прохождении той же самой траектории в обратном направлении угол поворота твердого тела составит $-\varphi(T)$.

3. Задача со свободным правым концом траектории. Это случай, когда значения переменных r и α в конечный момент времени T не заданы. Тогда условия трансверсальности [9] дают $p_r(T) = 0$ и $p_\alpha = 0$. Соответствующее решение найдено в [8, 10]. Оптимальная траектория представляет собой спираль, которая с ростом φ при $r_0 < 1$ монотонно асимптотически приближается к единичной окружности изнутри, а при $r_0 > 1$ – снаружи. Уравнение кривой имеет вид

$$\alpha(r) = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{\psi(\rho)}}, \quad \psi(\rho) = \frac{r_T^2(1+\rho^2)^2}{(1+r_T^2)^2} - \rho^2, \quad r_T = r(T). \tag{3.1}$$

Неизвестное значение r_T можно найти из уравнения

$$\varphi_T = \mp\int_{r_0}^{r_T} \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^2)\sqrt{\psi(\rho)}}. \tag{3.2}$$

Заметим, что интегралы в (3.1) и (3.2) являются эллиптическими [11].

4. Движение по прямой. Так как модуль оптимальной скорости равен единице, то время движения равно длине пройденного участка кривой [12]. Пусть в конечный момент времени T величина угла поворота твердого тела φ_T не задана. Следовательно, в этом случае требуется найти самую короткую траекторию, соединяющую две заданные точки, а потому решением является отрезок прямой. Для нахождения соответствующей зависимости $\varphi = \varphi(r)$ используем условие трансверсальности $p_\varphi = 0$. Из (2.3) имеем

$$r\cos(\alpha - C_p) = p_\alpha, \quad C_p = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r_0^2 - p_\alpha^2}}{p_\alpha}. \tag{4.1}$$

Следовательно, величина $|p_\alpha|$ равна расстоянию от начала координат до прямой, содержащей рассматриваемый отрезок. На основании (2.3) получаем

$$\varphi(r) = \frac{-p_\alpha}{\sqrt{1 + p_\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r^2 - p_\alpha^2}{1 + p_\alpha^2}} - C_\varphi, \tag{4.2}$$

где значение постоянной интегрирования C_φ легко найти из условия $\varphi(r_0) = 0$. Таким образом, при $p_\varphi = 0$ поиск решения трудностей не представляет, а потому в дальнейшем будем полагать $p_\varphi \neq 0$.

5. Траектории на оптимальных кривых, проходящих через начало координат. Как следует из (2.3), движения могут включать точку $r = 0$ лишь при $C_\alpha = 0$. В этом случае система (2.3) примет вид [13]

$$\ddot{r} = \frac{-p_\varphi^2 r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^3}, \quad \dot{\alpha} = \frac{-p_\varphi}{1 + r^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi r^2}{(1 + r^2)^2}. \tag{5.1}$$

В свою очередь соотношения (5.1) можно записать в форме

$$\frac{d^2\eta}{d\alpha^2} + \sin\eta = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{8}(\cos\eta - 1), \quad \eta = 4\operatorname{arctg} r. \tag{5.2}$$

Первое из уравнений системы (5.2) описывает колебания маятника [14]. В качестве параметра семейства можно использовать, например, значения производной функции $\eta = \eta(\alpha)$ в начальный момент времени. В дальнейшем, если явно не указано обратное, будем полагать $C_\alpha \neq 0$.

6. Связь с одномерной механической системой. Запишем (2.4) в форме

$$\left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)^2 + \left(\frac{C_\alpha}{r} - \frac{r}{1 + r^2}\right)^2 = \frac{1}{p_\varphi^2}, \quad C_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_\varphi}. \tag{6.1}$$

Заметим, что интеграл (6.1) можно рассматривать как гамильтониан одномерной консервативной механической системы, состоящей из материальной точки с массой, равной 2, движущейся в центральном поле [15] под действием потенциальной силы со скоростью p_r/p_φ, причем потенциальная энергия равна

$$\Pi = \left(\frac{C_\alpha}{r} - \frac{r}{1 + r^2}\right)^2. \tag{6.2}$$

Функция $\Pi = \Pi(r)$ стремится к нулю при $r \to +\infty$ и $\Pi(r) \to +\infty$ при $r \to 0$. На рис. 1 показан характерный вид зависимостей $\Pi = \Pi(r)$ при различных величинах параметра C_α, а на рис. 2 – некоторые траектории движения материальной точки, согласно (2.3). График *1* на рис. 1 соответствует случаю $C_\alpha < -1/8$. Производная потенциальной энергии при этом всюду отрицательна, а потому все движения точки инфинитны [15]. Такой кривой принадлежит, в частности, траектория *1* на рис. 2. Если $C_\alpha = -1/8$, то зависимость $\Pi(r)$ имеет точку перегиба при $r_* = \sqrt{3}/3$, как показано на графике *2* рис. 1, причем $\Pi(r_*) = 27/64$. Следовательно, при $C_\alpha = -1/8$, кроме инфинитных, существует единственное финитное движение точки – по окружности с центром в начале координат и радиусом r_*. При $C_\alpha \geq -1/8$ точка может двигаться по гораздо более сложным

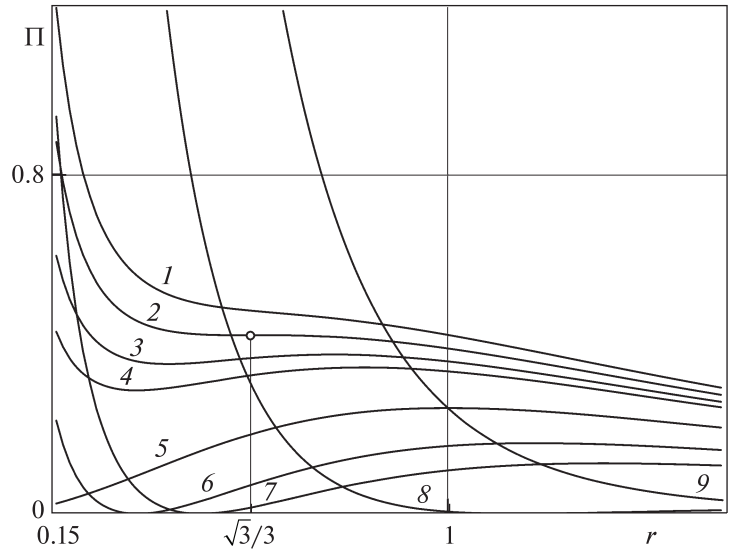

Рис. 1. Зависимости $\Pi = \Pi(r)$, характерные для различных значений параметра C_α и занумерованные в порядке его возрастания

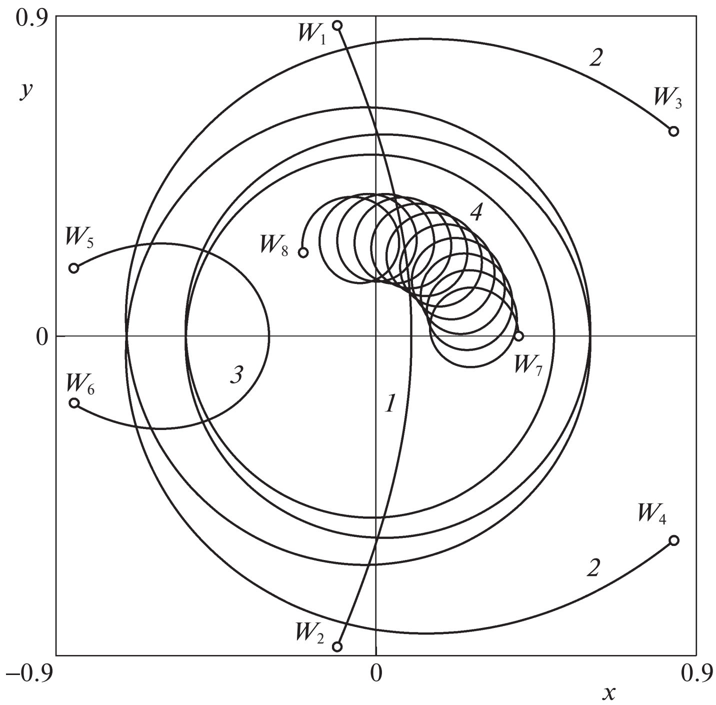

Рис. 2. Траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности: *1–3* лежат на инфинитных кривых, а *4* – на финитной кривой

инфинитным кривым, чем при меньших C_α, что видно на примере траектории *2* рис. 2, построенной для $C_\alpha = -1/8$, тогда как траектории *1* рис. 2 соответствует $C_\alpha = -0.3$.

Зависимость $\Pi(r)$ для $-1/8 < C_\alpha < 1$ всегда имеет локальный минимум при $r = r_-$ и локальный максимум при $r = r_+$, удовлетворяющие в случае $-1/8 < C_\alpha \le 0$ биквадратному уравнению

$$C_\alpha = \frac{(r_\mp^2 - 1)r_\mp^2}{(r_\mp^2 + 1)^2}, \quad r_- < r_+, \quad r_+ > \frac{\sqrt{3}}{3}, \tag{6.3}$$

причем

$$\Pi(r_{\mp}) = \frac{4r_{\mp}^2}{(1+r_{\mp}^2)^4} = \frac{16(C_\alpha - 1)^2(2C_\alpha + 1 \mp \sqrt{8C_\alpha + 1})^2}{(3 \mp \sqrt{8C_\alpha + 1})^4}. \quad (6.4)$$

Как следует из соотношения (6.3) и видно из графиков *3* и *4* на рис. 1, с увеличением значения C_α и приближением его к нулю величина r_- монотонно уменьшается и также стремится к нулю, причем $\Pi(r_-) > 0$, а величина r_+ монотонно растет и стремится к единице. При $C_\alpha = 0$ минимум $\Pi(r_- = 0) = 0$ и максимум $\Pi(r_+ = 1) = 1/4$, а соответствующая зависимость показана на графике *5* рис. 1. Как видно из графиков *6*–*8* на рис. 1, по мере дальнейшего роста величины C_α и приближении ее к единице потенциальная энергия $\Pi(r_-)$ по-прежнему равна нулю, а значение r_-^2 монотонно растет и удовлетворяет линейному уравнению

$$C_\alpha = \frac{r_-^2}{1 + r_-^2}, \quad (6.5)$$

в то время как монотонно растущее значение $r_+ > 1$ по-прежнему удовлетворяет соотношению (6.3). Как и при $C_\alpha < -1/8$, для $C_\alpha \geq 1$ производная потенциальной энергии всюду отрицательна и все движения инфинитны, что показано на графике *9* рис. 1 в случае $C_\alpha = 1$.

Равенство нулю потенциальной энергии при $0 < C_\alpha < 1$ в точке $r = r_-$ означает равенство единице составляющей скорости вдоль радиус-вектора точки, т.е. существование проходящей через начало координат касательной к траектории. Это отличает движения точки при $C_\alpha < 0$ от движений при $C_\alpha > 0$, что видно на рис. 2 из сравнения траекторий *1* и *2* с траекторией *3*, которая построена для случая инфинитного движения при $C_\alpha > 0$.

Наличие потенциальной ямы для $-1/8 < C_\alpha < 1$ означает существование оптимальных финитных движений при $r_- \leq r(t) \leq r_+$. Таковыми, в частности, являются окружности с радиусами r_- и r_+. В отличие от них остальные финитные движения замкнуты только в исключительных ситуациях, когда за период колебания одномерной механической системы с гамильтонианом (6.1) угол α меняется на величину $2\pi i/j$, где i и j – целые числа. Если $-1/8 < C_\alpha < 0$, то кривые финитных движений охватывают начало координат и имеют качественное сходство с классическими решениями для неодномерной задачи [15]. В случае $0 < C_\alpha < 1$ соответствующие кривые всегда смещены, как, например, траектория *4* на рис. 2.

7. Выбор параметров. В общем случае оптимальная траектория зависит от постоянных p_α и p_ϕ. Однако другая пара величин может оказаться более удобной.

Каждое финитное или инфинитное движение содержит хотя бы одну точку поворота [15]. Выберем из них любую, расстояние $r_{\min} > 0$ от которой до точки $r = 0$ минимально для всей кривой. Тогда последнюю можно разбить на две ветви, симметричные относительно прямой, которая проходит через начало координат и указанную точку поворота. Кроме того, в этой точке кинетическая энергия в гамильтониане (6.1) равна нулю, откуда следует выражение

$$p_\phi = \pm\frac{r_{\min}(1 + r_{\min}^2)}{C_\alpha(1 + r_{\min}^2) - r_{\min}^2}. \quad (7.1)$$

Выбор знака в соотношении (7.1) зависит от выбора нужной ветви и направления движения по ней (2.5), что связано с обычной для автономных задач оптимального управления инвариантностью системы (2.3) относительно замены:

$$p_\alpha \to -p_\alpha, \quad p_\varphi \to -p_\varphi, \quad p_r \to -p_r, \quad t \to -t.$$

Вместо параметров p_α и p_φ будем использовать C_α и $r_{\min}$, поскольку величина $r_{\min}$ имеет очевидный физический смысл, а свойства движения существенно зависят от значения C_α. Например, при $C_\alpha < -1/8$ и $C_\alpha \geq 1$ все кривые инфинитны для любой величины $r_{\min}$.

Заметим, что для каждого значения $r_{\min}$ существует множество значений параметра C_α:

$$\frac{r_{\min}^2}{2(1+r_{\min}^2)} - \frac{r_{\min}}{2\sqrt{1+r_{\min}^2}} < C_\alpha < \frac{r_{\min}^2}{2(1+r_{\min}^2)} + \frac{r_{\min}}{2\sqrt{1+r_{\min}^2}},$$
$$C_\alpha \neq 0, \quad C_\alpha \neq \frac{r_{\min}^2}{1+r_{\min}^2}, \tag{7.2}$$

при которых величина потенциальной энергии (6.4) равна $\Pi(r_{\min})$, помимо точки $r_{\min}$, еще в двух точках: $r_{\max}$ и r_b, причем $r_{\min} < r_{\max} < r_b$. Для различных интервалов значений C_α, принадлежащих множеству (7.2), эти точки можно найти по следующим формулам:

$$\begin{gathered} r_{\max} = -f_k + f_D, \quad r_b = -f_k - f_D, \quad C_\alpha < 0; \\ r_{\max} = f_k - f_D, \quad r_b = -f_k - f_D, \quad 0 < C_\alpha < \frac{r_{\min}^2}{1+r_{\min}^2}; \\ r_{\max} = f_k + f_D, \quad r_b = f_k - f_D, \quad C_\alpha > \frac{r_{\min}^2}{1+r_{\min}^2}, \end{gathered} \tag{7.3}$$

где

$$f_k = \frac{r_{\min}}{2k}, \quad f_D = \frac{\sqrt{r_{\min}^2 - 4C_\alpha k(1+r_{\min}^2)}}{2k}, \quad k = C_\alpha + C_\alpha r_{\min}^2 - r_{\min}^2.$$

При $-1/8 \le C_\alpha < 1$, когда существуют как инфинитные, так и финитные движения, для любой финитной кривой точка, наиболее удаленная от начала координат, находится от него на расстоянии $r_{\max}$.

8. Условия финитности оптимальной кривой. Получим дополнительные условия, которым при каждом выбранном значении $r_{\min}$ должна удовлетворять величина $-1/8 \le C_\alpha < 1$ для того, чтобы движение было финитным. Поскольку зависимость потенциальной энергии (6.4) от C_α в точке локального максимума имеет сложный вид, сначала найдем ограничения на значения r_+.

Как следует из анализа одномерной системы, для финитности движения необходимо, чтобы $r_{\min} \le r_+$ и $\Pi(r_{\min}) \le \Pi(r_+)$, т.е. точка должна иметь возможность находиться в области потенциальной ямы с полной энергией $\Pi(r_{\min})$, не превышающей высоты потенциального барьера $\Pi(r_+)$. Используя формулу (6.3) для r_+ и соотношение (6.4) для $\Pi(r_+)$, находим ограничение сверху при всех $r_{\min}$:

$$r_+ \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3r_{\min}^2 + 1 + \sqrt{D}}, \quad D = (3r_{\min}^2 + 1)^2 + 4r_{\min}^2$$

и ограничение снизу при $r_{\min} < \sqrt{3}/3$:

$$r_+ \ge \sqrt{1+r_{\min}^2} - r_{\min}.$$

Для всех остальных значений $r_{\min} \ge \sqrt{3}/3$ получаем $r_+ \ge r_{\min}$.

Однако этих условий недостаточно для того, чтобы соответствующее движение было финитным. Еще нужно, чтобы хотя бы одна точка кривой находилась от начала координат на расстоянии, не превышающем r_+. Иначе движение будет инфинитным, а расстояние до точки, ближайшей к началу координат, будет равно не значению $r_{\min}$, а величине r_b, вычисляемой по формулам (7.3). Причина в потенциальном барьере, разделяющем при полученных дополнительных условиях значения r на лежащие внутри потенциальной ямы $r \le r_+$ и находящиеся снаружи $r > r_+$. Траектория должна лежать целиком либо с одной, либо с другой стороны локального максимума потенциальной энергии. В случае двухточечной задачи проверку нужно проводить как для начального, так и для конечного значений переменной r. Если они оказываются по разные стороны от точки r_+, то для выбранного значения $r_{\min}$ решения не существует.

Поскольку, согласно (6.3), величина C_α монотонно растет при увеличении r_+, то для нее нетрудно записать полученные ограничения. Имеем при всех $r_{\min}$

$$C_\alpha \le \frac{(3r_{\min}^2 + 1 + \sqrt{D})(3r_{\min}^2 - 1 + \sqrt{D})}{(3r_{\min}^2 + 3 + \sqrt{D})^2},$$

для $r_{\min} < \sqrt{3}/3$

$$C_\alpha \ge \frac{r_{\min}(r_{\min} - \sqrt{1 + r_{\min}^2})}{2(1 + r_{\min}^2)},$$

а для прочих значений $r_{\min} \ge \sqrt{3} / 3$

$$C_\alpha \ge \frac{(r_{\min}^2 - 1)r_{\min}^2}{(r_{\min}^2 + 1)^2}.$$

9. Поиск допустимых значений параметров в задаче с фазовым ограничением. При наличии ограничивающей окружности радиуса R с центром в начале координат для любых траекторий появляется дополнительное условие $r_{\min} \le R$, которое далее для сокращения формул не будем указывать.

Найдем такие условия на параметр C_α, при которых полная энергия $\Pi(r_{\min})$ одномерного движения не меньше потенциальной энергии $\Pi(r_a)$ в некоторой точке r_a соответствующей кривой. Получим, что величина C_α должна удовлетворять либо ограничению

$$C_\alpha \le \frac{r_{\min} r_a (r_{\min} r_a - 1)}{(1 + r_{\min}^2)(1 + r_a^2)}, \quad r_{\min} \le r_a, \tag{9.1}$$

либо ограничению

$$C_\alpha \ge \frac{r_{\min} r_a (r_{\min} r_a + 1)}{(1 + r_{\min}^2)(1 + r_a^2)}, \quad r_{\min} \le r_a. \tag{9.2}$$

При $C_\alpha < -1/8$ и $C_\alpha \ge 1$ все траектории лежат на инфинитных кривых, а потому не выходят за пределы заданного круга тогда и только тогда, когда их начала и концы находятся в тех же самых пределах. Следовательно, полная энергия $\Pi(r_{\min})$ не может быть меньше потенциальной энергии в начальной и конечной точках траектории. Тогда значения параметра C_α должны дополнительно удовлетворять хотя бы одному из условий (9.1), (9.2) как при $r_a = r(0)$, так и при $r_a = r(T)$. Эти ограничения остаются справедливыми и в случае $-1/8 \le C_\alpha < 1$ для траекторий, лежащих на инфинитных кривых.

Финитные кривые могут полностью находиться внутри заданного круга радиуса R только при $\Pi(r_{\min}) \le \Pi(R)$. Для них должны быть выполнены полученные выше условия финитности оптимальной кривой и, кроме того, значения параметра C_α должны принадлежать следующему множеству:

$$\frac{r_{\min} R(r_{\min} R - 1)}{(1 + r_{\min}^2)(1 + R^2)} \le C_\alpha \le \frac{r_{\min} R(r_{\min} R + 1)}{(1 + r_{\min}^2)(1 + R^2)}.$$

В случае, когда финитная кривая лишь частично удовлетворяет фазовому ограничению, соответствующие явные условия для параметров получить невозможно, а потому необходимо использовать свойства конкретной задачи или просто следить за текущим расстоянием $r(t)$ в процессе численного интегрирования системы (2.3) и отбрасывать те траектории, которые нарушают ограничение. Для понимания существа проблемы рассмотрим пример, когда ограничивающая окружность пересекает кривую, фрагмент которой показан на рис. 2 под номером *4*. В общем случае невозможно выяснить, выходит ли за пределы круга некоторый участок этой кривой, соединяющий заданные в условии задачи граничные точки, без вычисления эллиптических интегралов, к которым может быть сведено решение уравнений (2.3).

10. Оптимальное управление в точке выхода на ограничение. Запишем фазовое ограничение $r \le R$ из (1.4) в форме

$$g(r(t), \alpha(t), \varphi(t)) = r(t) - R \le 0. \tag{10.1}$$

Введем полную производную по времени χ функции g в силу системы дифференциальных уравнений (1.4):

$$\chi(r, \alpha, \varphi, \hat{u}, \hat{v}) = (\operatorname{grad} g, f) = \frac{\partial g}{\partial r}\hat{u} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\hat{v}}{r} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{-r\hat{v}}{1+r^2} = \hat{u}. \tag{10.2}$$

Градиент в (10.2) вычисляется по вектору с компонентами, являющимися фазовыми переменными r, α и φ, а вектор f имеет компоненты, равные производным этих переменных по времени, согласно (1.4). Из (10.2) видно, что градиент функции χ по вектору управления с компонентами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ для любых значений последних представляет собой ненулевой вектор с компонентами 1 и 0.

Рассмотрим участок траектории, где фазовое ограничение (10.1) обращается в тождество $g(t) \equiv 0$. Он представляет собой дугу окружности радиуса R с центром в начале координат. Функция χ на нем равна нулю, поскольку в этом случае управление $\hat{u}$, согласно (1.4), равно нулю. Запишем ограничение на управление из (1.4) в виде

$$q(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{u}^2 + \hat{v}^2 - 1 \le 0. \tag{10.3}$$

Из (10.3) следует, что градиент функции q по вектору управления с компонентами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ является вектором с компонентами $2\hat{u}$ и $2\hat{v}$. На рассматриваемом участке траектории $\hat{u} = 0$, а значение $\hat{v} = 0$ не представляет интереса, поскольку в этом случае механическая система покоится. Тогда градиенты функций χ и q по вектору управления линейно независимы при $g(t) \equiv 0$. Следовательно, при $g(t) \equiv 0$ все траектории движения системы (1.4) регулярны.

Найдем оптимальное управление для этого участка. Из принципа максимума Понтрягина, формулы (2.1) и ограничения (10.3) следует, что управления $\hat{u}$ и $\hat{v}$ на оптимальной траектории равны

$$\hat{u}_{*0} = 0, \quad \hat{v}_{*0} = \operatorname{sign}\zeta. \tag{10.4}$$

В точке стыка, соответствующей моменту времени τ, должно выполняться условие скачка в одной из двух форм:

$$p(\tau + 0) = p(\tau - 0) + \lambda \operatorname{grad} g(r(\tau), \alpha(\tau), \varphi(\tau)), \quad p_0(\tau + 0) = p_0(\tau - 0), \tag{10.5}$$

$$p(\tau - 0) + \lambda \operatorname{grad} g(r(\tau), \alpha(\tau), \varphi(\tau)) = 0, \quad p_0(\tau - 0) = 0, \quad \lambda \ne 0. \tag{10.6}$$

В (10.5) и (10.6) скаляр λ – действительное число, p – вектор с компонентами p_r, p_α и p_φ, вектор $p(\tau - 0)$ равен пределу слева вектора $p(t)$ в точке, соответствующей моменту τ, вектор $p(\tau + 0)$ равен аналогичному пределу справа, таким же образом определены и значения константы p_0, записанные в форме $p_0(\tau - 0)$ и $p_0(\tau + 0)$.

Предположим, что условие скачка выполняется в форме (10.6). Так как функция (10.1) зависит от r и не зависит от α и φ, то из (10.6) получаем

$$p_0(\tau - 0) = 0, \quad p_r(\tau - 0) = -\lambda \ne 0, \quad p_\alpha(\tau - 0) = 0, \quad p_\varphi(\tau - 0) = 0. \tag{10.7}$$

Соответствующий предел гамильтониана (2.1) с учетом (2.2) и (10.7) есть

$$H(\tau - 0) = -\lambda \hat{u}_*(\tau - 0) = -\lambda \frac{-\lambda}{|\lambda|} = |\lambda|. \tag{10.8}$$

Значение гамильтониана на оптимальном решении постоянно и равно нулю. Тогда предел (10.8) должен быть равен нулю, но, с другой стороны, как указано в (10.6), $\lambda \ne 0$. Следовательно, мы пришли к противоречию и условие скачка должно выполняться в форме (10.5).

По аналогии с (10.7) из (10.5) получаем, что все сопряженные переменные, кроме p_r, в точке стыка должны быть непрерывны:

$$p_r(\tau + 0) = p_r(\tau - 0) + \lambda, \quad p_\alpha(\tau + 0) = p_\alpha(\tau - 0), \quad p_\varphi(\tau + 0) = p_\varphi(\tau - 0). \tag{10.9}$$

Кроме того, оптимальная траектория непрерывна и $r(\tau \pm 0) = R$. Тогда

$$H(\tau \pm 0) = p_0 + p_r(\tau \pm 0)\hat{u}_*(\tau \pm 0) + \zeta(\tau \pm 0)\hat{v}_*(\tau \pm 0), \tag{10.10}$$

где

$$\zeta(\tau \pm 0) = \frac{p_\alpha}{R} - \frac{p_\varphi R}{1 + R^2}. \qquad (10.11)$$

Значения $\hat{u}_*(\tau - 0)$ и $\hat{v}_*(\tau - 0)$ определены формулами (2.2), а значения $\hat{u}_*(\tau + 0)$ и $\hat{v}_*(\tau + 0)$ – формулами (10.4). Гамильтониан (2.1) на оптимальном решении непрерывен. Следовательно, в точке стыка имеем $H(\tau - 0) = H(\tau + 0)$, а потому из (10.10) для момента времени τ следует уравнение

$$p_r(\tau - 0)\frac{p_r(\tau - 0)}{-p_0} + \zeta(\tau - 0)\frac{\zeta(\tau - 0)}{-p_0} = \zeta(\tau + 0)\operatorname{sign}\zeta(\tau + 0). \qquad (10.12)$$

Из (2.4) вытекает равенство

$$p_r^2(\tau - 0) + \zeta^2(\tau - 0) = p_0^2. \qquad (10.13)$$

Из (10.4) и условия $\hat{u}_{*0} + \hat{v}_{*0} = 1$ следует неравенство $\zeta(\tau + 0) \neq 0$. Тогда из (10.12) получаем $\zeta(\tau + 0) = -p_0$. Но, согласно (10.11), имеем $\zeta(\tau - 0) = \zeta(\tau + 0)$ и находим $p_r(\tau - 0) = 0$ из (10.13). Следовательно, $p_r(\tau - 0) = 0$ на любой оптимальной траектории, имеющей точку стыка.

Поскольку можно, обратив время, поменять местами начальное и конечное состояния, не меняя траекторию, то это означает, что значение p_r равно нулю как при выходе оптимальной траектории на ограничение, так и при сходе с него. Согласно (2.2), получаем, что оптимальная траектория выходит на ограничивающую окружность и сходит с нее, касаясь этой окружности.

В качестве примера рассмотрим задачу со свободным правым концом траектории и выходом на фазовое ограничение [7]. Когда конечное положение материальной точки не задано, то, как показано в [8], при $r(0) > 1$ на оптимальной траектории значение $r(t)$ всегда больше единицы и монотонно уменьшается с ростом $|\alpha(t)|$, а при $r(0) = 1$ оптимальная траектория – единичная окружность с центром в начале координат. Поэтому при $R \geq 1$ фазовое ограничение можно игнорировать и рассматривать только случай $R < 1$.

Пусть τ – момент времени, в который траектория выходит на ограничивающую окружность. Согласно (10.9), сопряженные переменные p_α и p_φ непрерывны на всей траектории, причем $p_\alpha = 0$ в силу соответствующего условия трансверсальности. Кроме того, согласно изложенному выше, $p_r(\tau) = 0$ при $r(\tau) = R$. Тогда участок траектории от начальной точки до точки выхода на ограничение описывается формулой (3.1) при $r(T) = R$.

11. Оптимальные траектории, начинающиеся и заканчивающиеся на ограничивающей окружности. В рассматриваемом случае из проведенного выше анализа одномерной механической системы вытекает, что $\Pi(r_{\min}) \geq \Pi(R)$ для всех оптимальных кривых, которые по этой причине удобно разделить на два подмножества Ψ и Φ: принадлежащие к первому существуют при $\Pi(r_{\min}) > \Pi(R)$, а ко второму – при $\Pi(r_{\min}) = \Pi(R)$. В первом случае $p_r(0) \neq 0$, а во втором $p_r(0) = 0$.

Кривые из подмножества Ψ должны удовлетворять одному из условий (9.1), (9.2) для $r_a = R$, причем в формулах (9.1) и (9.2) необходимо заменить нестрогие неравенства на строгие. По значениям $r_{\min}$ и C_α, удовлетворяющим этим неравенствам, можно найти соответствующие значения p_φ, согласно (7.1), где для любой траектории достаточно ограничиться положительным знаком, поскольку отрицательный знак соответствует той же самой траектории, пройденной в обратном направлении и дающей те же самые терминальные значения $\alpha_T = \alpha(T)$ и $\varphi_T = \varphi(T)$, только взятые с обратным знаком. Далее можно получить $p_\alpha = C_\alpha p_\varphi$, после чего правые части дифференциальных уравнений в системе (2.3) полностью определены.

Для рассматриваемого подмножества $p_r(0) \neq 0$ и в формуле (2.5) всегда следует выбирать отрицательный знак, поскольку в начале движения скорость материальной точки всегда направлена внутрь окружности. Тогда можно строить оптимальные траектории, интегрируя систему (2.3) при условиях $r(0) = R$, $\alpha(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ вплоть до точки, где переменная r снова станет равной R. То, что хотя бы одна такая точка обязательно существует, следует из описанных выше свойств одномерной механической системы. Время движения T будет равно времени оптимального быстродействия. В результате будут получены зависимости $\alpha_T = \alpha_T(r_{\min}, C_\alpha)$, $\varphi_T = \varphi_T(r_{\min}, C_\alpha)$ и $T = T(r_{\min}, C_\alpha)$. Обратные функции $r_{\min} = r_{\min}(\alpha_T, \varphi_T)$ и $C_\alpha = C_\alpha(\alpha_T, \varphi_T)$ можно аппроксимировать обычными методами и использовать для поиска значений параметров $r_{\min}$ и C_α по заданным значениям α_T и φ_T.

Все кривые из подмножества Φ являются финитными и полностью лежат внутри ограничивающей окружности. Заметим, что каждое движение зависит только от значения C_α, так как параметр $r_{\min}$ можно исключить благодаря равенству $\Pi(r_{\min}) = \Pi(R)$. Поскольку в начальный момент времени кинетическая энергия в гамильтониане (6.1) равна нулю, из анализа функции (6.2) вытекает, что материальная точка одномерной системы может двигаться в сторону меньших значений переменной r только тогда, когда величина радиуса R ограничивающей окружности лежит между локальным минимумом и локальным максимумом потенциальной энергии, т.е. $r_- < R < r_+$. Из этого условия получаем следующее множество значений параметра C_α для рассматриваемого подмножества кривых:

$$\frac{(R^2-1)R^2}{(R^2+1)^2} < C_\alpha < \frac{R^2}{R^2+1}.$$

Для построения можно применять тот же самый численный метод, что и для кривых из первого подмножества, только в формуле (7.1) нужно заменить $r_{\min}$ на R и всегда полагать $p_r(0) = 0$.

Отыскание оптимальных траекторий на кривых из подмножества Φ осложнено тем, что для них величина p_r в граничных точках равна нулю, т.е. траектория в начале и конце касается окружности радиуса R, а потому удовлетворяет там полученному выше условию для точки выхода на ограничение. Следовательно, необходимым условиям оптимальности удовлетворяет и траектория, состоящая из любого целого количества таких кусков. Более того, можно без нарушения этих условий дополнительно вставить любые участки движения по ограничению между любыми двумя кусками, а также как перед первым, так и после последнего куска.

12. Пример. Для случая, когда все искомые траектории должны начинаться и заканчиваться на ограничивающей окружности радиуса R, были выполнены вычисления при $R = 1/2$.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость выбора оптимального управления от конечного положения материальной точки на ограничивающей окружности, заданного углом α_T, и соответствующей величине угла поворота твердого тела φ_T. Заметим, что на рис. 3 показана только область $-\pi \le \alpha_T \le \pi$, $-\pi \le \varphi_T \le \pi$, а для остальных значений α_T и φ_T она должна быть периодически продолжена по обеим координатным осям. Тогда, в частности, точка L_1 будет отождествлена с точкой L_2, как и L_3 с L_4. В результате все точки L_n при $n = 0,\dots,5$ окажутся на одной непрерывной кривой и будут расположены на ней в порядке возрастания номеров n слева направо. То же самое относится и к точкам S_n при $n = 0,\dots,9$, которые лягут на одну прямую, представленную на рис. 3 пятью отрезками. Точки этой прямой соответствуют траекториям, полностью лежащим на ограничивающей окружности, и представляют собой решения

$$\varphi_T = -\frac{R^2}{1+R^2}\alpha_T, \quad -5\pi \le \alpha_T \le 5\pi \tag{12.1}$$

уравнения (1.5) при $r(t) \equiv R$. На рис. 3 соответствующие отрезки отвечают соотношениям

$$\varphi_T = -\frac{R^2}{1+R^2}\big(\alpha_T + 2\pi(n-2)\big), \quad -\pi \le \alpha_T \le \pi \tag{12.2}$$

и обозначены точками S_{2n}, S_{2n+1} при $n = 0,\dots,4$.

Заметим, что процесс перемещения подвижной массы можно отображать на плоскости параметров α_T и φ_T как движение точки по некоторой кривой, только пока в качестве соответствующего участка траектории для массы используется дуга какой-либо окружности.

Кривая L_2L_3, проходящая через начало координат и симметричная относительно него, разделяет область возможных значений α_T и φ_T на два множества. Каждая точка, принадлежащая одному из них, соответствует прохождению подвижной массы по какой-либо оптимальной траектории в одном направлении, а точка, симметричная относительно начала координат и принадлежащая другому множеству, — в противоположном. Таким свойством обладают и точки на самой кривой L_2L_3. Вследствие инвариантности (2.6) достаточно описать только одно из этих множеств, например, лежащее ниже L_2L_3.

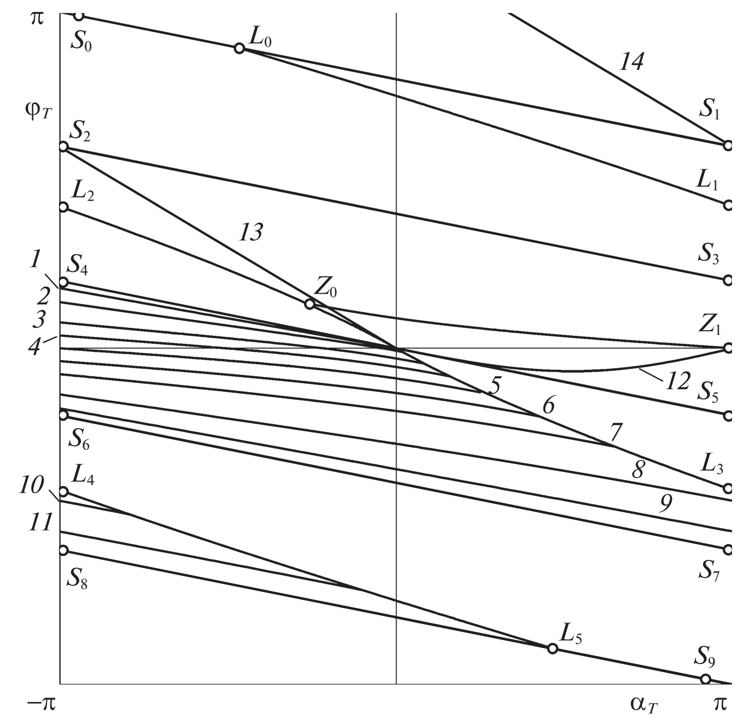

Рис. 3. Множество значений углов α_T и φ_T, разделенное на области действия различных законов оптимального управления

Для точек на L_2L_3 оптимальны траектории без участков движения по границе, находящиеся на кривых из описанного выше подмножества Ф и состоящие из единственного куска. Например, траектории *1* на рис. 4 соответствует точка кривой L_2L_3 на рис. 3 с абсциссой $\alpha_T = -2$ и ординатой $\varphi_T \approx 0.903$.

Точкам в области, лежащей на рис. 3 ниже кривой L_2L_3 и выше отрезка прямой S_4S_5, соответствуют оптимальные траектории, состоящие из двух кусков. Первый из них представляет собой дугу ограничивающей окружности, а второй соответствует точке пересечения прямой, параллельной отрезку S_4S_5 и проходящей через рассматриваемую точку, с кривой L_2L_3. При этом величина центрального угла, опирающегося на дугу первого участка, равна разности абсцисс точки пересечения и рассматриваемой точки, а движение по этому участку происходит по часовой стрелке. Заметим, что значение α_T для любой точки пересечения положительно.

Как следует из сказанного выше при описании подмножества Ф, указанные два куска можно поменять местами. Более того, первый кусок может быть в произвольном месте разбит на две части и тогда второй должен быть вставлен между двумя этими частями. Все полученные таким способом траектории имеют одну и ту же длину, а также удовлетворяют одним и тем же граничным условиям, т.е. подвижная масса приходит за одно и то же время в одну и ту же точку, а твердое тело при этом поворачивается на один и тот же угол.

Далее рассмотрим область, лежащую ниже отрезка S_4S_5 и кривой L_2L_3, но выше кривой, обозначенной номером *5*. Точки последней соответствуют траекториям [13] при оптимальных движениях, проходящих через точку $r = 0$. Заметим, что кривая *5* симметрична Z_0Z_1 относительно начала координат. Точка Z_0, как и симметричная ей общая точка кривых *5* и L_2L_3, соответствует траектории, которая включает точку $r = 0$ и обладает теми же свойствами, что и прочие для кривой L_2L_3. Точка Z_1 и все лежащие на оси абсцисс рис. 3 отвечают случаям, когда перемещение подвижной массы в новое положение не приводит к изменению ориентации твердого тела. Для Z_1 речь идет о траектории в виде отрезка прямой, проходящей через центр масс тела. Остальные отрезки, начала и концы которых лежат на ограничении, тоже являются оптимальными траекториями. На рис. 3 они соответствуют точкам кривой *12*, а также симметричной ей относительно

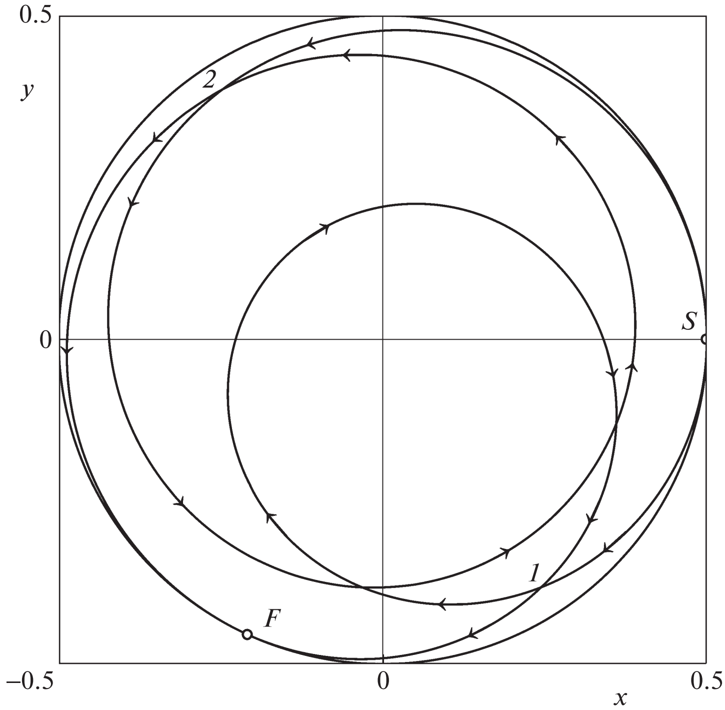

Рис. 4. Две оптимальные траектории, касающиеся ограничивающей окружности в начальной точке S и конечной точке F; направление движения показано стрелками. Для первой время движения $T \approx 2.90$, а для второй – $T \approx 4.65$

начала координат, которая лежит в рассматриваемой области и на рис. 3 не показана. Для вычислений была использована формула

$$\varphi_T = -\frac{2R\cos\dfrac{\alpha_T}{2}}{\sqrt{1 + R^2\cos^2\dfrac{\alpha_T}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{R\sin\dfrac{\alpha_T}{2}}{\sqrt{1 + R^2\cos^2\dfrac{\alpha_T}{2}}}\right),$$

следующая из (4.1) и (4.2). Кривые *1–4* на рис. 3 получены при убывающих значениях параметра $r_{\min}$, равных 0.45, 0.35, 0.20 и 0.10. Их точки соответствуют оптимальным траекториям из описанного выше подмножества Ψ. Например, траектория *1* на рис. 5 соответствует точке с абсциссой $\alpha_T = -3$ на кривой *2*.

Как и только что рассмотренная область, множество, лежащее на рис. 3 ниже кривых *5* и L_2L_3, но выше отрезка S_6S_7, целиком заполнено точками, соответствующими оптимальным траекториям из подмножества Ψ. Кривые *6–9* на рис. 3 получены при тех же значениях параметра $r_{\min}$, что и кривые *1–4*, но взятых в обратном порядке. Например, траектория *2* на рис. 5 соответствует точке с той же самой абсциссой $\alpha_T = -3$, что и траектория *1*, но на кривой *8*, а не *2*.

Теперь рассмотрим область, лежащую на рис. 3 ниже отрезка S_6S_7, но выше кривой L_4L_5 и отрезка, обозначенного точками S_8 и S_9. Траектории, соответствующие точкам на кривой L_4L_5, обладают теми же свойствами, что и для кривой L_2L_3. Например, траектории *2* на рис. 4 соответствует точка кривой L_4L_5 на рис. 3 с ординатой $\varphi_T \approx -2.66$ и той же самой абсциссой $\alpha_T = -2$, что и в случае траектории *1* на рис. 4.

Возьмем какую-либо внутреннюю точку из рассматриваемой области и проведем через нее прямую, параллельную отрезку S_6S_7, как было описано ранее для точек, лежащих ниже кривой L_2L_3 и выше отрезка S_4S_5. В случае, когда эта прямая пересекает кривую L_4L_5, оптимальная траектория также состоит из двух кусков: дуги ограничивающей окружности и траектории, соответствующей точке пересечения, причем центральный угол, на который опирается дуга, равен

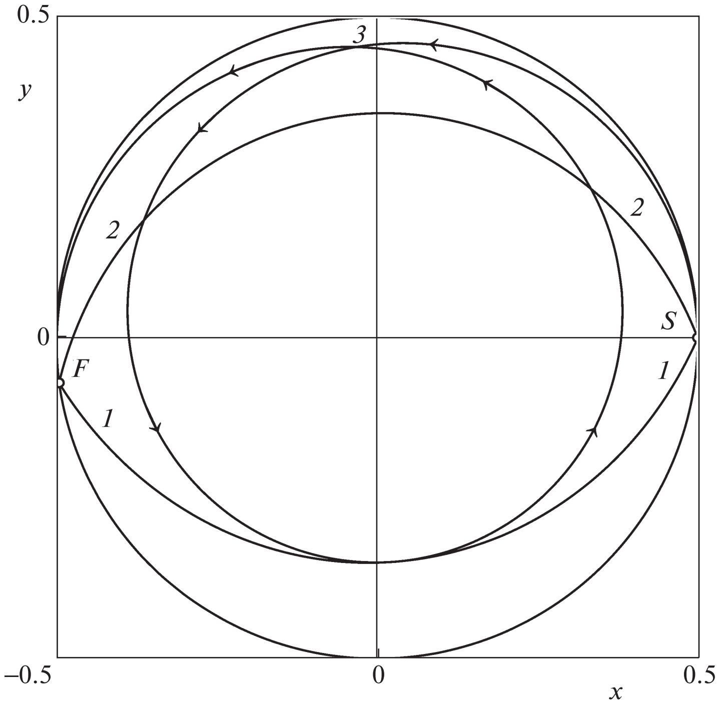

Рис. 5. Три оптимальные траектории, не касающиеся ограничивающей окружности и полученные для величины $r_{\min} = 0.35$ при значениях $C_{1\alpha} \approx -0.1861$, $C_{2\alpha} \approx -0.1659$ и $C_{2\alpha} \approx -0.1030$. Для первой время движения $T \approx 1.24$, для второй – $T \approx 1.35$, а для третьей – $T \approx 4.05$. Направление движения из начальной точки S в конечную точку F по траектории *3* показано стрелками.

разности абсцисс рассматриваемой точки и точки пересечения. Различие лишь в том, что в данном случае подвижная масса перемещается по дуге против часовой стрелки. Если пересечение отсутствует, то нужно сперва взять на прямой точку с абсциссой $-\pi$ и перейти к другой точке, симметричной взятой относительно оси ординат, а затем провести через нее прямую, параллельную отрезку S_6S_7. Она обязательно пересечет кривую L_2L_3. Искомая траектория снова будет состоять из двух кусков, один из которых будет соответствовать точке пересечения и обладать всеми свойствами, описанными выше применительно к кривой L_2L_3, а второй будет опять дугой ограничивающей окружности. Величина центрального угла для нее равна увеличенной на 2π разности абсцисс рассматриваемой точки и точки пересечения. Перемещение массы опять будет происходить против часовой стрелки.

На рис. 3 ниже кривой L_4L_5 и выше отрезка S_8L_5 находится область, все точки которой соответствуют оптимальным траекториям из подмножества Ψ. Кривые *10* и *11* получены при значениях параметра $r_{\min}$, равных 0.35 и 0.45, т.е. чем больше величина $r_{\min}$, тем ниже находится график. Пример оптимальной траектории для рассматриваемой области показан на рис. 5 под номером *3*. Эта траектория соответствует точке с такой же абсциссой $\alpha_T = -3$, что и траектории *1* и *2* на рис. 5, но лежит на кривой *10* рис. 3.

Наконец рассмотрим область, лежащую на рис. 3 ниже отрезка, обозначенного точками S_8 и S_9. Траектории, соответствующие всем точкам этой области, относятся к подмножеству Φ и состоят из дуги ограничивающей окружности и куска, соответствующего некоторой точке кривых L_2L_3 и L_4L_5. Как и раньше, для отыскания последней проведем через рассматриваемую точку прямую, параллельную указанному отрезку. Возьмем на ней точку с абсциссой $-\pi$ и перейдем к точке, симметричной относительно оси ординат, после чего будем действовать точно так, как и при описанном выше анализе области, лежащей ниже отрезка S_6S_7, но выше кривой L_4L_5 и отрезка, обозначенного точками S_8 и S_9. Единственное отличие заключается в том, что полученную для этой области величину центрального угла нужно увеличить на π и значение абсциссы рассматриваемой точки.

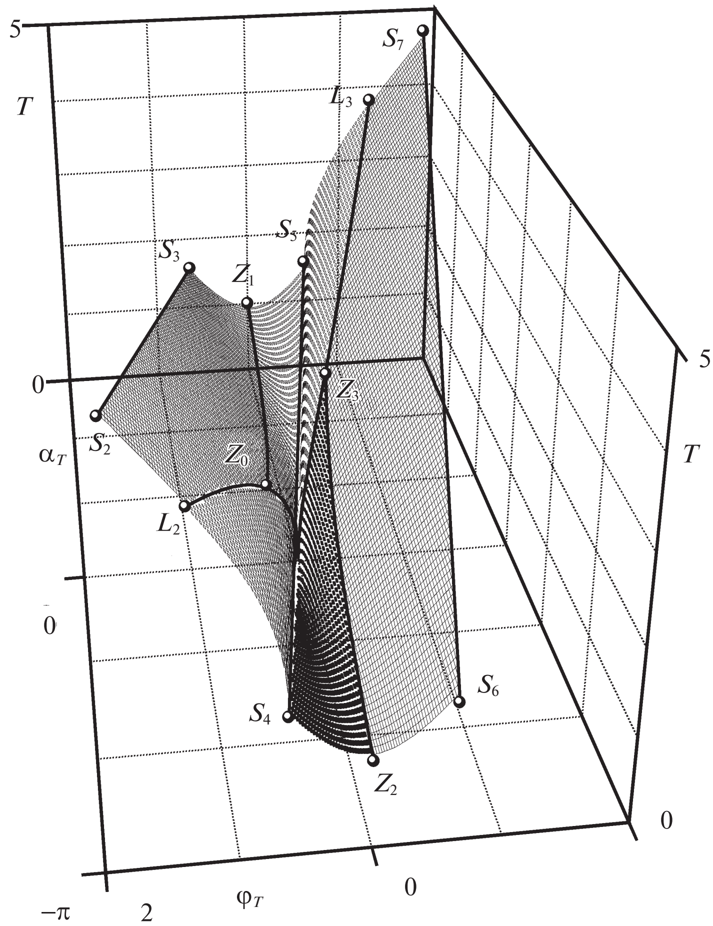

Рис. 6. Функция Беллмана в области, близкой к началу координат

Было также вычислено время движения по оптимальным траекториям $T = T(\alpha_T, \varphi_T)$. На рис. 6 эта функция показана для области значений α_T и φ_T, лежащей на рис. 3 между отрезками S_2S_3 и S_6S_7. Проекция кривой Z_2Z_3 рис. 6 на плоскость параметров α_T, φ_T совпадает с кривой *5* на рис. 3. Смысл всех остальных обозначений на рис. 6 тот же, что и соответствующих им на рис. 3.

На рис. 7 показаны интервалы значений функции Беллмана. Все обозначения на рис. 7 имеют тот же смысл, что и соответствующие им на рис. 3 и 6.

В данной задаче функция Беллмана всюду непрерывна, но имеет разрывы первой производной на отрезках, отмеченных точками S_n для $n = 0,\ldots,9$. Поясним этот эффект. Сначала напомним, что фактически речь идет о едином при $-5\pi \le \alpha_T \le 5\pi$ отрезке (12.1), который разбит на пять частей (12.2) для $-\pi \le \alpha_T \le \pi$. Теперь рассмотрим какие-либо две точки с одинаковыми абсциссами, лежащие на небольших расстояниях по разные стороны от отрезка L_5S_9 на рис. 3 и 7. Нижней точке соответствует траектория, которая включает в себя, как показано выше, короткий кусок, похожий на траекторию *1* рис. 4, а вся остальная часть движения происходит по ограничивающей окружности. Для верхней точки эта последняя часть незначительна, но другая часть гораздо больше по длине и ближе к траектории *2* рис. 4. Длина же траекторий того типа, который показан на рис. 4, быстрее увеличивается с ростом углового расстояния между начальной и конечной точками при малых значениях этого расстояния. Поэтому по мере удаления вверх от отрезка L_5S_9 на рис. 3 время движения для соответствующих траекторий увеличивается быстрее, чем при удалении вниз, хотя при приближении к данному отрезку эти времена стремятся к одному и тому же значению – длине некоторой дуги ограничивающей окружности. Рисунок 7 показывает, что первая производная функции Беллмана непрерывна на всех остальных кривых рис. 3.

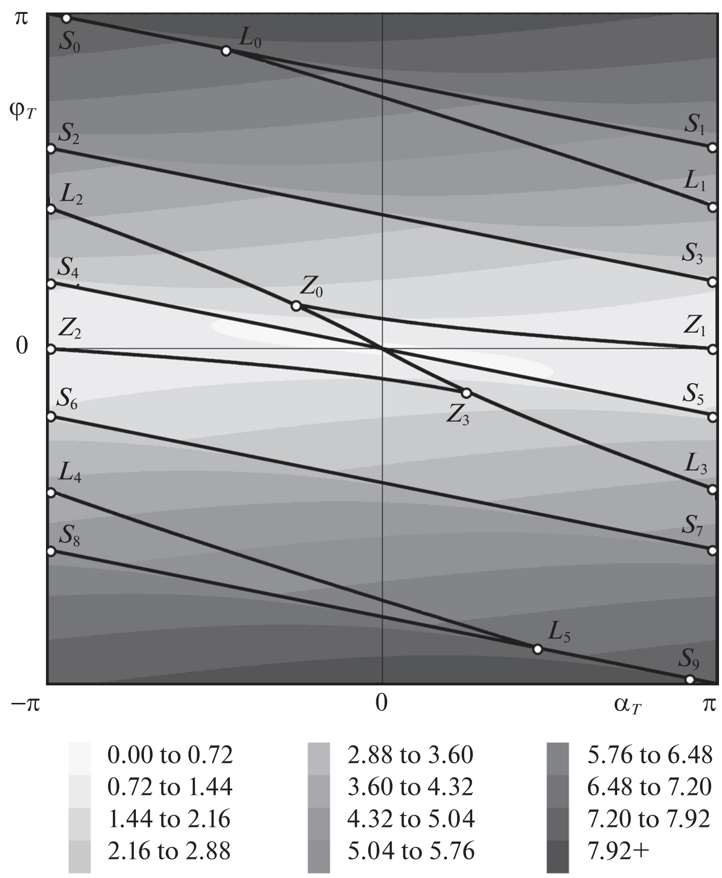

Рис. 7. Диапазоны значений времени оптимального быстродействия как функции α_T и φ_T, показанные оттенками серого

13. Неединственность решения. На плоскости параметров α_T и φ_T есть точки, которым соответствуют не только указанные выше траектории, но и иные, также удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Как следует из описания подмножества Φ, каждая траектория, соответствующая произвольной точке на кривых $L_{2n}L_{2n+1}$ рис. 3 при $n = 0, 1, 2$, может быть куском траектории, которая состоит из любого целого числа таких кусков и удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. На той части рис. 3, которая выше кривой L_2L_3, такие точки лежат в двух областях: между ней и кривой *13*, соединяющей начало координат с точкой S_2, а также между кривыми *14* и $S_0L_0L_1$. Координаты этих точек можно вычислить, умножая абсциссу и ординату каждой точки кривых $L_{2n}L_{2n+1}$, $n = 0, 1, 2$, на произвольное натуральное число l, увеличивая длины соответствующих траекторий в l раз и получая при каждом значении l новый набор кривых на рис. 3. Если $l \to \infty$, то последние становятся отрезками прямой, угол наклона которой равен углу наклона касательной к кривой L_2L_3 в начале координат. Вычисления при $R = 1/2$ показывают, что величины времени движения для всех соответствующих им точек больше, чем при использовании траекторий, описанных выше при анализе различных областей на рис. 3. Отсюда следует и невозможность использования таких кривых в качестве кусков оптимальных траекторий, включающих участки ограничивающей окружности. Это связано с быстрым ростом длины кривой, похожей на траекторию *4* рис. 2, по мере увеличения количества “петель” на ней.

Заключение. В общем случае оптимальные траектории в задаче о наискорейшем повороте твердого тела с помощью подвижной массы имеют нетривиальный вид и каждая из них требует вычисления эллиптических интегралов. Решение соответствующей системы из трех дифференциальных уравнений, помимо постоянных интегрирования, зависит от двух параметров, значения которых необходимо искать, учитывая пять граничных условий: две координаты для начального положения подвижной массы, столько же для конечного и требуемый угол поворота твердого тела. Наличие ограничения, не позволяющего массе выйти за заданные пределы, еще более усложняет проблему. Это делает затруднительным сугубо вычислительный подход, основанный, скажем, на прямом переборе по двум углам множества начальных значений сопряженных переменных [13], поскольку заранее неизвестен общий вид получаемой кривой, который может кардинально меняться при малом изменении каждого из параметров задачи. Исследование движения одномерной механической системы, связанной со свойствами оптимальных траекторий, позволило установить их основные качественные характеристики и найти ограничения на их параметры, что дало возможность, в частности, рассмотреть все варианты для случая, когда как в начале, так и в конце движения подвижная масса находится на ограничивающей окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmoeckel F., Worn H.* Remotely Controllable Microrobots Acting as Nano Positioners and Intelligent Tweezers in Scanning Electron Microscopes (SEMs) // Proc. Intern. Conf. Robotics and Automation, IEEE. V. 4. N.Y., 2001. P. 3903–3913.
2. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // Transactions of ASME. J. Dynamical Systems, Measurement and Control. 2006. V. 128. P. 122–133.
3. *Chernousko F. L.* Two-dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
4. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
5. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН ТиСУ. 2019. № 6. С. 139–162.
6. *Шматков А.М.* Изменение пространственной ориентации твердого тела с помощью подвижной массы // Изв. РАН ТиСУ. 2020. № 4. С. 151–159.
7. *Шматков А.М.* Влияние габаритов управляемого устройства на оптимальный по быстродействию поворот с помощью подвижной внутренней массы // ДАН. 2019. Т. 486. № 3. С. 292–296.
8. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
10. *Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.* Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы // Изв. РАН ТиСУ. 2019. № 3. С. 10–23.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
12. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
13. *Шматков А.М.* Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы // Вестн. МГУ. Математика, механика. 2020. № 3. С. 63–67.
14. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 74–83

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИ ОПАСНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СЕТИ СВЯЗИ. III. ОЦЕНКИ МЕЖУЗЛОВЫХ ПОТОКОВ

© 2021 г. Ю. Е. Малашенко[a], И. А. Назарова[a,*]

[a] *ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

**e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.
После доработки 04.12.2020 г.
Принята к публикации 25.01.2021 г.

В рамках вычислительных экспериментов анализируются изменения величин предельно допустимых потоков, которые можно передать между узлами при повреждениях сети. На начальном этапе для каждой пары вершин источник-приемник независимо определяется максимальный однопродуктовый поток. Вектор максимальных потоков используется для оценки предельных функциональных возможностей исходной, неповрежденной сети. В ходе вычислительных экспериментов последовательно рассматривается каждое повреждение из заданного множества, для всех пар источник–приемник находятся максимальные потоки в поврежденной сети. Для каждой пары узлов определяются все повреждения, при которых максимальный поток либо равен нулю, либо оказывается меньше допустимой величины. На основе полученных данных формируются диаграммы возможного ущерба для всех пар источник-приемник. Вычислительные эксперименты проводились для сетей с радиально-кольцевыми структурами и совпадающими множествами узлов. Результирующие диаграммы позволяют сравнивать и находить наиболее уязвимые пары с недоминируемыми векторными оценками ущерба.

DOI: 10.31857/S0002338821030112

Введение. Данная работа продолжает исследования, начатые в [1, 2]. В [1] оценка последствий каждого разрушения производилась по двум критериям: число разъединенных пар и/или уменьшение пропускной способности каналов связи между узлами источник-приемник. Величина ущерба вычислялась как разность максимальных значений потока между каждой парой вершин в исходной и поврежденной сети. В [2] основное внимание уделено получению гарантированных [3] оценок уязвимости сети. Для оценки ущерба от каждого повреждения определялось: общее число разъединенных пар и все направления связи, пропускная способность по которым оказывалась меньше заданного нормативного значения. Расчеты по указанным критериям позволили получить представительные векторные оценки для маркировки наиболее опасных в смысле предложенных критериев разрушающих воздействий. Предложенные в [2] методы можно рассматривать как возможные подходы к решению классической задачи исследования операций: в условиях неопределенности о намерениях нападающего оценить возможные последствия целенаправленных атак [4, 5].

В работе на модели многопользовательской сети связи [6] продолжен процесс изучения изменений предельно допустимых потоков между всеми парами узлов при разрушающих воздействиях. В качестве критического повреждения [1, 2] рассматривается подмножество ребер, при удалении которых хотя бы для одной пары узлов разрываются все возможные пути соединения. Для каждой пары вершин источник-приемник по двум критериям проводится оценка уменьшения потока при каждом повреждении из заданного множества. На первом шаге определяются все разрушающие воздействия, при которых максимально возможный поток для некоторой выделенной пары узлов становится равным нулю (первый критерий). На следующем шаге для данной пары находятся повреждения, при которых максимальный поток оказывается ниже допустимого уровня, но больше нуля (второй критерий). На основе полученных данных формируются диаграммы предельно допустимых потоков между каждой парой вершин при всех критических повреждениях из заданного множества. Граничные точки на диаграммах соответствуют наиболее уязвимым парам узлов, для них показатели потерь оказываются недоминируемыми хотя бы по одному из критериев. Вычислительные эксперименты проводились для всех возможных комбинаций пар вершин источник-приемник с учетом направления передачи. Анализируются результаты последствий разрушающих воздействий на сетевые системы с различными структурными особенностями.

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы используется математическая запись модели передачи многопродуктового потока [1, 2]. Структура сети $G(\mathbf{d})$ задается множествами $\langle V, R, U\rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$. Ребро $r_k = (v_{n_k}, v_{j_k})$ соединяет вершины v_{n_k}, v_{j_k} (инцидентно вершинам v_{n_k}, v_{j_k}), которые для него служат концевыми. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра. Ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} прямого и обратного направления из множества ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$. Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k}.

Обозначим через $S(v_n)$ множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел v_n; $T(v_n)$ – множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел v_n. Состав множеств $S(v_n)$, $T(v_n)$ однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j, такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$ считается *исходящей* из вершины v_n и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, ориентированная дуга $u_{k+E} = (v_j, v_n)$ – *входящей* для v_n и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} – *исходящей* и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Предполагается, что в сети между любой парой узлов могут передаваться потоки разных видов. Назовем парой узлов-корреспондентов p_m упорядоченную пару вершин $p_m = (v_{s_m}, v_{t_m})$, где вершина с номером s_m является источником, а с номером t_m – стоком или приемником потока m-го вида. В настоящей работе, как и в [1, 2], в сети из N узлов рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных потоков различных видов, которые передаются между парами узлов из множества $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$.

Пусть x_{mk} – величина потока m-го вида, который передается по дуге u_k в прямом, а $x_{m(k+E)}$ – величина потока m-го вида, который передается по дуге u_{k+E} в обратном направлении, $x_{mk} \ge 0$, $x_{m(k+E)} \ge 0$, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, E}$. Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k, определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей – $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ – наперед заданные положительные числа $d_k > 0$. Вектором $\mathbf{d}$ определяются следующие ограничения на все потоки, передаваемые по ребру r_k:

$$\sum_{m=1}^{M} (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \le d_k, \quad x_{mk} \ge 0, \quad x_{m(k+E)} \ge 0, \quad k = \overline{1, E}. \tag{1.1}$$

Обозначим через z_m величину потока m-го вида, который поступает в сеть в узле с номером s_m и покидает из узла с номером t_m.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для всех видов потоков должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \ge 0, \quad z_m \ge 0. \tag{1.2}$$

Величина z_m равна входному потоку m-го вида, который пропускается от источника к стоку пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент векторов потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m, .., z_M)$:

$$\mathcal{X}(x, \mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \,|\, (\mathbf{z}, x) \text{ удовлетворяют } (1.1), (1.2)\}. \tag{1.3}$$

2. Формирование множества структурных повреждений. В настоящей работе, как и в [1, 2], рассматриваются три типа повреждений: разрушение минимального разреза, разделяющего пару источник-приемник в неповрежденной сети, разрушение минимального разреза в сети с единичными пропускными способностями и разрушение всех ребер, инцидентных вершине.

Для построения множества повреждений первого типа для некоторой произвольной пары $p_a \in P$ решается задача поиска максимально возможного потока, который можно передать в сети $G(\mathbf{d})$ из вершины с номером s_a в вершину с номером t_a без учета всех остальных.

З а д а ч а 1. Для фиксированного a найти максимальный поток

$$z_a^0 = \max_{\mathbf{z}, x}\{z_a \,|\, \mathbf{z} \in \mathcal{X}(x, \mathbf{d})\}.$$

Решению задачи 1 (максимальному значению потока z_a^0) соответствует набор ребер – минимальный разрез R_a, $R_a \subset R$ [7]. Множество номеров ребер, образующих разрез R_a, обозначим

$$h(a) = \left\{k \,|\, r_k \in R_a, z_a^0 = \sum_{k \in h(a)} d_k\right\},$$

здесь R_a – минимальное по суммарной пропускной способности подмножество ребер, таких, что при удалении их из сети максимальный поток из v_{s_a} в v_{t_a} становится равным нулю, т.е. в графе $G(\mathbf{d}) \backslash R_a$ между вершинами v_{s_a} и v_{t_a} нет пути.

Последовательно для всех $p_m \in P$ решаются цепочки задач 1 и формируются вектор максимальных потоков:

$$\mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0, \ldots, z_M^0),$$

а также множество повреждений первого типа:

$$H(\cdot) = \{h(1), h(2), h(3), \ldots, h(m), \ldots, h(M)\},$$

где $h(m)$ – набор номеров ребер, входящих в минимальный разрез R_m, $R_m \subset R$, $p_m \in P$. При решении задачи 1 для некоторой фиксированной пары p_a максимальному потоку z_a^0 ставится в соответствие единственный минимальный разрез $R(z_a)$ и набор номеров ребер $h(a)$.

Для построения критически опасных повреждений второго типа – минимальных разрезов единичной сети, в ходе вычислительного эксперимента пропускные способности всех ребер исходной сети полагаются равными единице:

$$d_k = 1, \quad k = \overline{1, E}.$$

Сеть с единичными пропускными способностями обозначим через $G(1)$, а множество достижимых потоков (1.3) – $\mathcal{X}(x, 1)$:

$$\mathcal{X}(x, 1) = \{\mathcal{X}(x, \mathbf{d}) \,|\, d_k = 1, k = \overline{1, E}\}.$$

Для определения минимального разреза для каждой пары $p_m \in P$ решается задача о максимальном потоке в единичной сети.

З а д а ч а 2. Для некоторой фиксированной пары p_m найти максимальный поток

$$z_m^1 = \max_{\mathbf{z}, x}\{z_m \,|\, \mathbf{z} \in \mathcal{X}(x, 1)\}.$$

Решение задачи 2 – максимальный целочисленный поток z_m^1 из вершины с номером s_m в вершину с номером t_m. Величина z_m^1 равна числу ребер в минимальном по суммарной пропускной способности разрезе $R(z_m^1)$, $z_m^1 = |R(z_m^1)|$. В настоящей работе максимальному потоку z_m^1 ставится в соответствие единственный разрез $R(z_m^1)$ со списком номеров ребер

$$q(m) = \left\{ k \,|\, r_k \in R(z_m^1), z_m^1 = \sum_{k \in q(m)} d_k \right\}.$$

При удалении $R(z_m^1)$ из $G(1)$ максимальный поток z_m^1 из v_{s_m} в v_{t_m} становится равным нулю.

Множество повреждений второго типа

$$Q(\cdot) = \{q(1), q(2), \ldots, q(m), \ldots, q(M)\}$$

состоит из наборов номеров ребер, входящих в минимальные разрезы $R(z_m^1)$, $m = \overline{1, M}$.

Множество повреждений третьего типа

$$Y(\cdot) = \{y(1), y(2), \ldots, y(n), \ldots, y(N)\}$$

состоит из наборов номеров ребер, инцидентных вершине v_n:

$$y(n) = \{k \,|\, r_k \in R(v_n)\},$$

где $R(v_n)$ – множество ребер, инцидентных v_n.

Для сокращения объема необходимых вычислений элементы множеств $H(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $Y(\cdot)$ сравниваются между собой, производится удаление повторяющихся повреждений любого типа и формирование множества *уникальных* повреждений:

$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_l, \ldots, w_L\},$$

которое не содержит одинаковых элементов.

3. Оценки повреждений. При проведении вычислительных экспериментов при некотором повреждении w_l пропускная способность ребер сети $G(\mathbf{d}(l))$ задается следующим образом:

$$d_k(l) = \begin{cases} d_k, & \text{если } k \notin w_l, \\ 0, & \text{если } k \in w_l. \end{cases}$$

В поврежденной сети $G(d(l))$ для всех $p_m \in P$ последовательно для каждого $m = \overline{1, M}$ определяется возможный максимальный поток.

З а д а ч а 3. При некоторых заданных l и m найти

$$z_m^0(l) = \max_{\mathbf{z}, x} \{z_m \,|\, (x, \mathbf{z}) \in Z(x, \mathbf{d}(l))\}.$$

Задача 3 решается последовательно для всех p_m, $p_m \in P$, и всех $w_l \in W$. Для найденных максимальных потоков $z_m^0(l)$, $m = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, L}$, рассчитываются индикаторные показатели:

$$\xi(m, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_m^0(l) = 0, \\ 0, & \text{если } z_m^0(l) > 0. \end{cases}$$

Для каждой пары $p_m \in P$ и всех $w_l \in W$ вычисляется

$$\rho(m) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \xi(m, l)}{L}$$

– доля от общего числа повреждений W, при которых максимальный поток для данной пары p_m становится равен нулю.

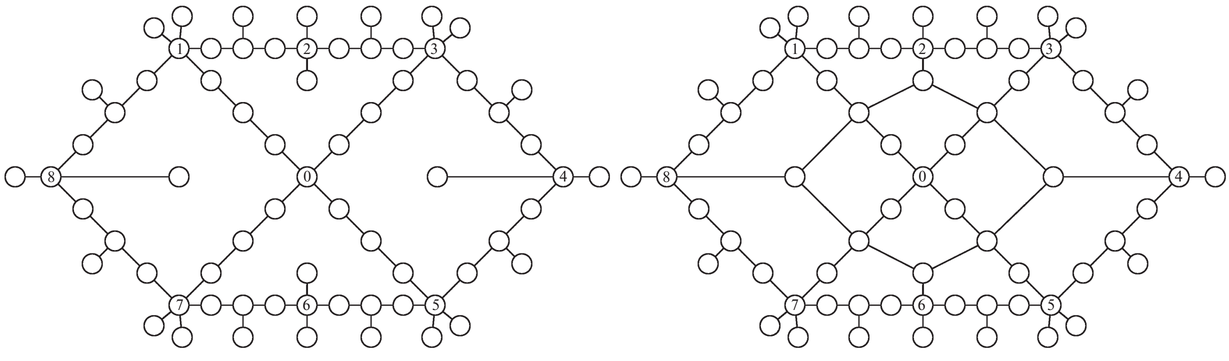

Рис. 1. Базовая и кольцевая сети

Для каждой пары p_m, для которой $z_m^0(l) > 0$ при повреждении w_l, и некоторого наперед заданного значения g рассчитывается индикаторная функция:

$$\eta(m,l,\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \geq \dfrac{z_m^0(l)}{z_m^0} > 0, \\ 0, & \text{если } \gamma < \dfrac{z_m^0(l)}{z_m^0}. \end{cases}$$

Значение параметра γ задается априори в диапазоне $0 < \gamma < 1$. При заданном γ для некоторой пары p_m и всех повреждений из W, таких, что $z_m^0(l) > 0$, определяется

$$\varphi(m,\gamma) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \eta(m,l,\gamma)}{L},$$

равная доле от общего числа повреждений из W, при которых максимальный поток для данной пары p_m становится меньше или равен заданному критическому пороговому значению γ.

На основе значений $(\rho(m), \varphi(m,\gamma))$ для всех пар $p_m \in P$ строятся диаграммы, которые позволяют оценить влияние каждого из повреждений на потоки между всеми парами вершин источник-приемник. Недоминируемые значения – точки на внешней границе диаграмм, они указывают на пары-корреспонденты, которым повреждения из W наносят наибольший ущерб хотя бы по одному из показателей.

4. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1: слева – базовая сеть, а справа – кольцевая. Пропускные способности выбирались случайным образом из отрезка [900, 999] и были равны для совпадающих ребер в обеих сетях. Пропускная способность каждого из дополнительных ребер на рис. 1 справа равна 900. Число повреждений – элементов множества W – составляет 125 для базовой сети и 118 – для кольцевой. Для формирования множества W было найдено порядка 10^4 минимальных разрезов, из которых менее 100 (около 1%) оказались уникальными.

На рис. 2 слева изображена диаграмма расчетных значений $(\rho(m), \varphi(m,\gamma))$ при $\gamma = 0.6$ для базовой сети, а справа – для кольцевой. Каждый значок плюс на диаграммах относится к одной паре узлов p_m, а цифра рядом означает число пар источник-приемник с совпадающими значениями $(\rho(m), \varphi(m,\gamma))$. Большое количество точек-плюсов на оси абсцисс $\rho(m)$ относится к парам узлов, для которых $z_m^0(l) = 0$, оставшиеся значения $z_m^0(l) > 0.6$, т.е. больше заданного критического значения γ.

Для всех пар узлов оценки ущерба проводятся для всех повреждений из множества W. Значение $\rho(m)$ – относительный показатель – *доля* от общего числа повреждений, при которых

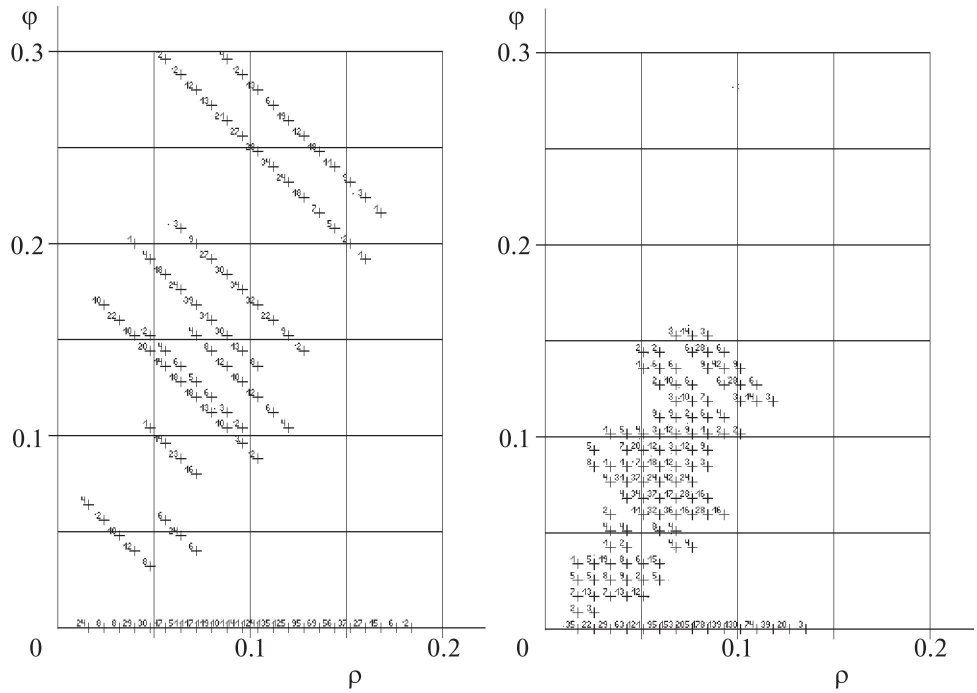

Рис. 2. Диаграмма повреждений

максимальный поток становится равным нулю для данной пары. Величина $\rho(m)$ не зависит от значений γ, а определяется структурой сети и составом множества повреждений W.

На рис. 2 значения $\varphi(m,\gamma)$ по оси ординат значительно отличаются для разных сетей. В кольцевой сети больше обходных путей и максимальные потоки оказываются больше $\gamma = 0.6$ у большего числа пар-корреспондентов.

Точки-плюсы, расположенные вдоль северо-восточной границы диаграммы, соответствуют парам узлов, для которых потери потока оказываются недоминируюмыми хотя бы по одному показателю ущерба $\rho(m)$ или $\varphi(m,\gamma)$. Для кольцевой сети линия северо-восточной границы проходит значительно ближе к началу координат. Последнее означает, что ущерб в кольцевой сети меньше, чем в базовой, даже для самых “уязвимых” пар с наибольшими потерями.

В обеих сетях для большинства пар источник-приемник существует либо один, либо два пути соединения. На рис. 2 точки-плюсы оси абсцисс $\rho(m)$ относятся в основном к парам, имеющим один или три пути соединения. Точки на диаграмме отвечают парам узлов p_m, для которых $z_m^0(l) \le 0.6 z_m^0$, и относятся к парам с двумя возможными путями соединения. Значение $\gamma = 0.6$ выделяет все такие пары, поскольку относительные потери потока при повреждении одного из путей в среднем составляет 0.5.

На рис. 3, 4 представлены четыре диаграммы: слева для значений $\gamma = 0.673$, а справа – для $\gamma = 0.7$, на рис. 3 – для базовой сети, на рис. 4 – для кольцевой. Указанные диаграммы разительно отличаются от рис. 2 при $\gamma = 0.6$. Дело в том, что при $\gamma = 0.7$ критическими потерями считается уменьшение максимального потока на 30%, что возможно при разрушении даже одного из трех путей соединения. В результате для некоторых пар узлов, у которых $\varphi(m,\gamma) = 0$ при $\gamma = 0.6$, фиксируются потери потока, и для пар p_m соответствующие точки-плюсы $\varphi(m,\gamma) > 0$ оказываются недоминируемым показателем ущерба.

Для тех пар, для которых значение максимального потока в поврежденной сети

$$0.673 z_m^0 \le z_m^0(l) \le 0.7 z_m^0,$$

при $\gamma = 0.673$ не фиксируются потери потока. В результате общее число точек-плюсов на верхних ярусах диаграммы уменьшается и меняется состав (список) пар с недоминируемыми

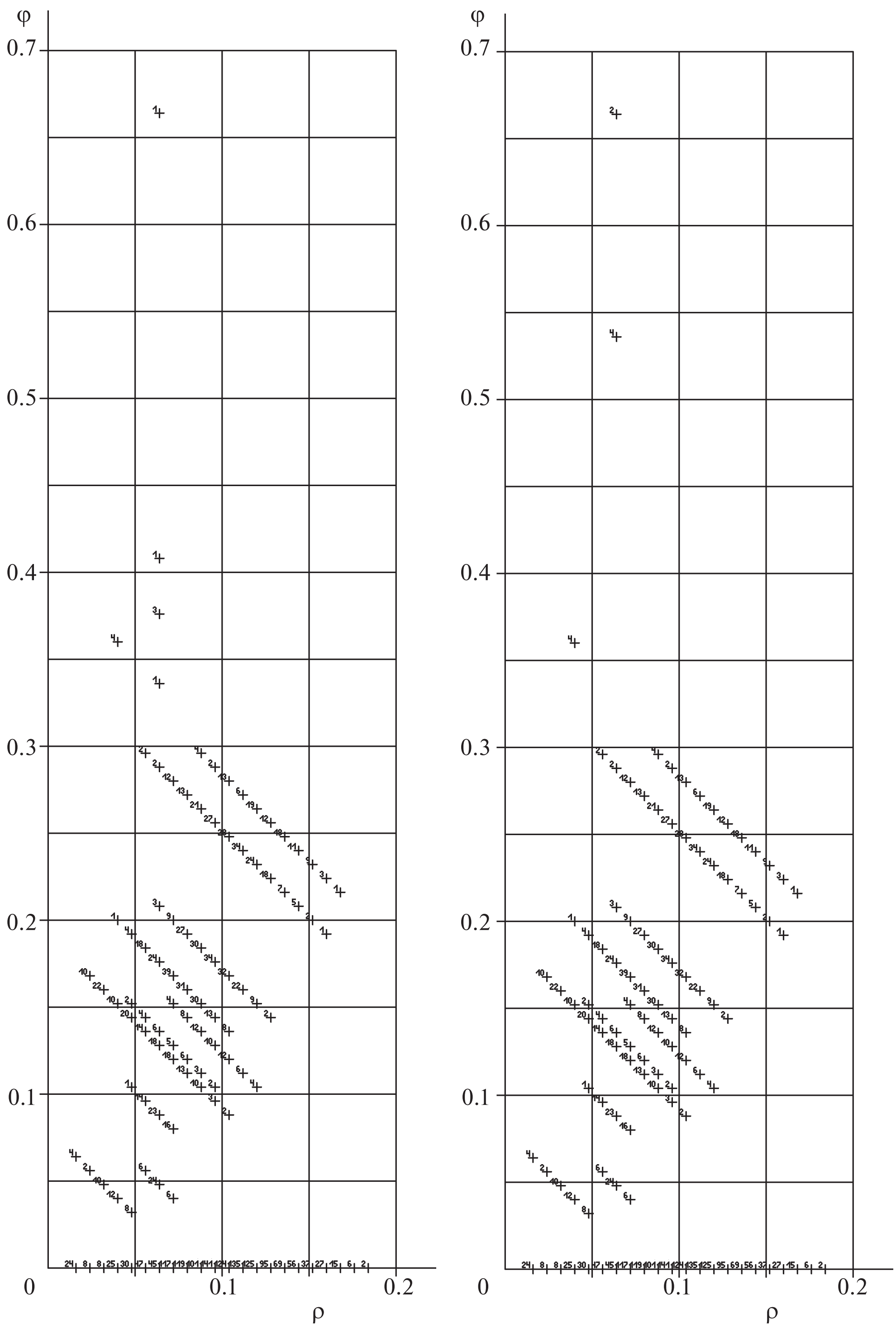

Рис. 3. Диаграмма для базовой сети

показателями ущерба. Проведенные расчеты и внешние различия диаграммы позволяют достаточно подробно анализировать последствия разрушающих воздействий. В частности, расчеты при различных γ дают возможность определять число разрушенных путей соединения. Подобрав значения γ, можно выделить группы пар-корреспондентов с разными потерями при разрушении одинакового числа путей.

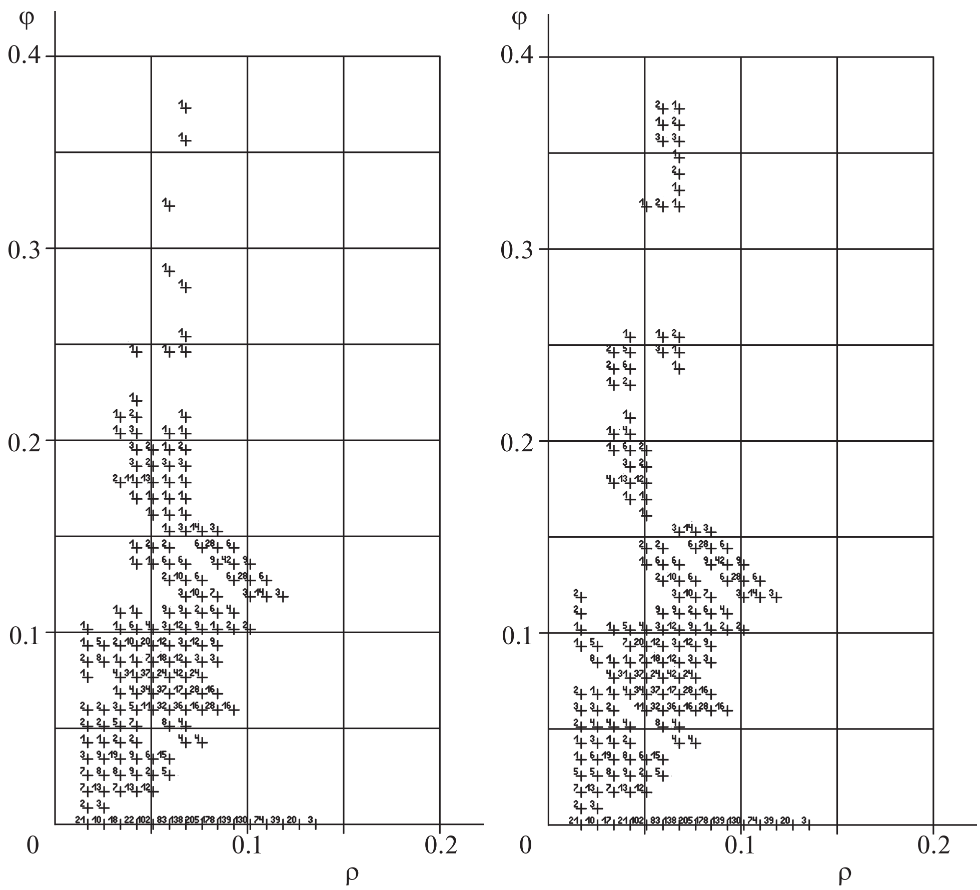

Рис. 4. Диаграмма для кольцевой сети

Заключение. В последние годы значительно возрос интерес к более предметному и комплексному анализу уязвимости сложных взаимосвязанных сетевых систем, функционирующих как единое территориально-распределенное образование [8—11]. В [9] прослеживается, как эволюционировали модели и методы исследования уязвимости и живучести: теоретико-графовые, вероятностные, эвристические, имитационные, оптимизационные и др. В [10] основное внимание уделяется специальным моделям уязвимости сетей, отмечается необходимость отдельного анализа террористических действий и/или спланированных хакерских атак, а также влияния человеческого фактора при авариях. В [11] приведен обзор возможных стратегий защиты сетей от природных катастроф.

Различные критерии и методы используются для поиска критических элементов сети [12—18]. В [12] рассматривается задача поиска множества дуг взвешенной сети, удаление которых из сети минимизирует два критерия: максимальный поток и стоимость разрушения. Парето-оптимальные решения этой задачи определяются с помощью специализированного алгоритма ветвей и границ, а также применения релаксации Лагранжа к последовательности однокритериальных задач о поиске максимального потока и минимального разреза. В [13] изучается проблема идентификации подмножества элементов (узлов, дуг, путей, клик и т.д.), удаление которых минимизирует заданную меру связности в поврежденной сети. Приводится обзор некоторых методов, в том числе использующих эвристики, математическое программирование, алгоритмы аппроксимации и подходы динамического программирования. В [14] изучаются предельные функциональные возможности многопродуктовой сети и их изменения при повреждениях сетевых элементов — минимальных разрезов трех основных типов. В частности, рассчитываются две группы количественных характеристик последствий каждого повреждения: доля разделенных пар узлов и уменьшение максимально возможного потока для каждой пары. Указанные показатели используются для двухкритериального ранжирования повреждений. Полученные агрегированные оценки ущерба позволяют также находить критически опасные структурные повреждения сети в рамках предложенных критериев.

В [15–18] рассматривается так называемая проблема определения критических вершин, которая состоит в поиске подмножества из K вершин связного графа, удаление которых ведет к минимизации выбранного критерия связности. В [15] задача решается с использованием методов целочисленного линейного программирования, в [16] – формулируется как двухкритериальная, в [17] изучается ее NP-сложность, а также анализируются результаты проведенных вычислительных экспериментов. В [18] представлен обширный обзор по указанной теме.

Проблема уязвимости кластерных объединений при отказах различных сетевых элементов рассматривается в [19, 20]. В [19] вводится понятие среднего коэффициента кластеризации, проблема формулируется как оптимизационная, доказывается ее NP-полнота и немонотонность, а также предлагается два алгоритма, позволяющих идентифицировать вершины, ключевые для кластерных объединений. В [20] изучается устойчивость структур кластерных связей и исследуется проблема ранжирования повреждений для заданного класса сетевых систем по трем критериям, включая мощность разреза.

В настоящей работе продолжено изучение потокового метода априорного анализа структурной неуязвимости сети при разрушениях определенного вида [1, 2]. Выбор в качестве структурных повреждений разрезов, минимальных по пропускной способности и числу ребер, а также отделяющих некоторую вершину от сети, определяется логикой исследования. Поиск наиболее уязвимых пар источник-приемник для указанных повреждений ведется по двум критериям (обнуление потока и падение потока ниже наперед заданного уровня), что позволяет заранее оценить, насколько структура сохраняет нормативную работоспособность сетевой системы после разрушения. При проведении вычислительного эксперимента использовались методы потокового программирования с полиномиальной оценкой вычислительной сложности [7, 21]. Как уже отмечалось в [2], суммарные вычислительные затраты не превышают $O(N^7)$, где N – число узлов сети. Предложенная схема проведения расчетов проста и поддается распараллеливанию, поэтому при исследовании уязвимости больших сетей могут быть использованы кластеры из персональных компьютеров с различными операционными системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Анализ критически опасных повреждений сети связи. I. Модель и вычислительный эксперимент // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 106–115.
2. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Анализ критически опасных повреждений сети связи. II. Гарантированные оценки функциональных характеристик // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 6. С. 109–119.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
4. *Данскин Дж.М.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. М.: Сов. радио, 1970.
5. *Cochran J.J., Cox Jr. L.A., Keskinocak P. et al.* Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 8 Volume Set. N.Y.: Wiley, 2010.
6. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Экспресс-анализ и агрегированное представление множества достижимых потоков многопродуктовой сетевой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 63–72.
7. *Йенсен П., Барнес Д.* Потоковое программирование. М.: Радио и связь, 1984.
8. *Grubesic T.H., Matisziw T.C., Murray A.T. et al.* Comparative Approaches for Assessing Network Vulnerability // Inter. Regional Sci. Review. 2008. V. 31.
9. *Murray A.T.* An Overview of Network Vulnerability Modeling Approaches // GeoJournal. 2013. V. 78. P. 209–221.
10. *Johansson J.* Risk and Vulnerability Analysis of Interdependent Technical Infrastructures. Addressing Socio-technical Systems. Doctoral Thesis in Industrial Automation. Department of Measurement Technology and Industrial Electrical Engineering. Lund: Lund University, 2010.
11. *Gomes T., Esposito C., Hutchison D. et al.* Survey of Strategies for Communication Networks to Protect against Large-scale Natural Disasters // Int. Workshop on Reliable Networks Design and Modeling (RNDM). Halmstad, 2016. P. 11–22.
12. *Royset J.O., Wood R.K.* Solving the Bi-objective Maximum-flow Network-interdiction Problem // INFORMS J. Comput. 2007. V. 19. Iss. 2. P. 175–184.
13. *Walteros J., Pardalos P.* Selected Topics in Critical Element Detection // Optimization and its Applications. 2012. V. 71. P. 9–26.

14. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Один подход к анализу возможных структурных повреждений в многопродуктовых сетевых системах // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1626–1638.
15. *Veremyev A., Prokipyev O.A., Pasiliao E.L.* Critical Nodes for Distance-based Connectivity and Related Problems in Graphs // Networks. 2015. V. 66. Iss. 3. P. 170–195.
16. *Ventresca M., Harrison K.R., Ombuki-Berman B.M.* The Bi-objective Critical Node Detection Problem // European J. Oper. Res. 2018. V. 265. Iss. 3. P. 895–908.
17. *Li J., Pardalos P.M., Xin B., Chen J.* The Bi-objective Critical Node Detection Problem with Minimum Pairwise Connectivity and Cost: Theory and Algorithms // Soft Computing. 2019. V. 23. P. 1–16.
18. *Lalou M., Tahraoui M.A., Kheddouci H.* The Critical Node Detection Poblem in Networks: a Survey // Computer Science Review. 2018. V. 28. P. 92–117.
19. *Kuhnle A., Nguyen N.P., Dinh T.N. et al.* Vulnerability of Clustering under Nodes Failure in Complex Networks // Social Network Analysis and Mining. 2017. V. 7. Iss. 1. P. 8–24.
20. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Анализ кластерных повреждений в сетевых системах // ЖВМиМФ, 2020. Т. 60. № 2. С. 338–348.
21. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 51-37

Памяти профессора В.Н. Вагина

О СИНТЕЗЕ СИСТЕМ, ИМЕЮЩИХ СТРУКТУРУ КОМБИНАТОРНОЙ БЛОК-СХЕМЫ[1]

А. О. Клягин[a,*], Н. П. Кочетова[a,], Д. Ю. Темников[a,***], А. Б. Фролов[a,****]**

[a] *НИУ МЭИ, Москва, Россия*

**e-mail: antik998@mail.ru*

***e-mail: natashka99@yandex.ru*

****e-mail: dnstnt@mail.ru*

*****e-mail: abfrolov@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
После доработки 25.11.2020 г.
Принята к публикации 25.01.2021 г.

Обоснован метод числовой и алгебраической формализации и решения задачи синтеза систем, имеющих структуру одной из четырех разновидностей комбинаторных блок-схем. Получены аналитические представления блоков и дуальных блоков таких систем при представлении элементов и нумерации блоков и дуальных блоков начальными неотрицательными целыми числами. При этом используются алгебраические идентификаторы блоков, что позволяет строить блоки распределенно, т.е. независимо один от другого. Согласно обоснованному в работе методу формализации содержательных представлений систем, одна и та же комбинаторная блок-схема может быть моделью различных синтезируемых систем. Этот тезис проиллюстрирован примером синтеза вычислительной сети и схемы распределения ключей в беспроводной сенсорной сети.

DOI: 10.31857/S0002338821040077

Введение. В системном анализе используются двухуровневые и трехуровневые структурные модели систем, построенных из однотипных элементов и образованных блоками, характеризуемыми одинаковыми количествами вхождений в них элементов, а также одинаковыми количествами блоков, в которые входят определенные совокупности элементов. Такие модели изучаются в комбинаторном анализе, как так называемые комбинаторные блок-схемы. Теория комбинаторных блок-схем возникла при организации сравнительных экспериментов в аграрной науке: по определенной схеме выбирались наименования культур для их совместного выращивания на определенных полях. Этим достигалось совмещение по времени их испытаний в различных условиях. Далее комбинаторные блок-схемы применялись для тестирования групп крови, в настоящее время подобные исследования практикуются в генетике. В компьютерных науках на их основе изучаются распределенные вычислительные системы и схемы распределения ключей в них. На основе этих моделей отслеживаются связи между элементами сложной системы и при необходимости прогнозируются цепочки таких связей. Теория комбинаторных блок-схем отражена в монографии [1] и учебнике [2], в англоязычных изданиях наиболее востребованы книги [3, 4]. Комбинаторная блок-схема задается множеством элементов и множеством блоков, состоящих из элементов. Множество имен ее блоков принимается в качестве множества элементов двойственной по отношению к ней блок-схемы, множество блоков которой находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством элементов исходной блок-схемы, а сами ее блоки являются множествами имен блоков исходной блок-схемы, содержащих элемент, который соответствует блоку двойственной блок-схемы. Например, если элементами выступают индексы сельскохозяйственных культур, а блоки состоят из индексов культур, возделываемых на наделах определенного поля, то каждый блок двойственной блок-схемы (дуальный блок)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00294 а).

содержит имена полей, на наделах которых возделывается соответствующая ему культура. В иной интерпретации элементами могут быть компьютеры компьютерной сети, блоками — совокупности компьютеров отдельных локальных сетей, тогда дуальные блоки содержат локальные сети, в которых присутствует соответствующий дуальному блоку компьютер. Описанное соответствие комбинаторной и двойственной комбинаторной блок-схемы называется в данной работе правилом двойственности. Наряду с явными представлениями совокупностей блоков перечислением входящих в них элементов применяются представления комбинаторных блок-схем бинарными матрицами инцидентности и двудольными мультиграфами. Строки матрицы соответствуют элементам, а столбцы — блокам комбинаторной блок-схемы. Соответственно вершины одной доли двудольного графа суть элементы, а вершины другой доли — блоки. Ребра графа соответствуют вхождениям элементов в блоки. Матричные и графовые представления двойственной комбинаторной блок-схемы получаются транспонированием матрицы инцидентности или перестановкой долей двудольного графа исходной блок-схемы. В российской литературе данное направление прикладного комбинаторного анализа представлено, например, работами [5—7], где изучаются в основном симметричные комбинаторные схемы, в которых количества элементов и узлов совпадают, или так называемые квазиполные двудольные графы. Подобные работы важны для поиска алгоритмов вычисления комбинаторных блок-схем данного вида, инвариантных для применения в других областях. В [5, 7] даются матричные способы построения комбинаторных блок-схем, в любых двух блоках которых имеется единственный общий элемент и каждая пара элементов присутствует точно в одном блоке. Такие комбинаторные блок-схемы называются проективными плоскостями размерности два. В более сложных проективных плоскостях размерности три любые два элемента присутствуют в большем количестве блоков. Этим достигается моделирование множественных связей в сложных системах. Графовые представления таких проективных плоскостей даны в [6]. Трехуровневыми по построению являются линейные и квадратичные трансверсальные комбинаторные блок-схемы [1, 8], применяемые, например, в беспроводных сенсорных сетях [8].

Порядок $n = p^l$ и размерность d комбинаторной блок-схемы являются основными параметрами проективных плоскостей. По ним определяются мощности v множеств элементов и блоков, числа k элементов в блоке, а также количество блоков, в которые входит любая выбранная пара элементов; оно же — число элементов в пересечении любых двух блоков, а также число блоков, всегда имеющих единственный общий элемент. При синтезе трансверсальных блок-схем параметр k, определяющий число элементов в блоке, выбирается независимо, но при ограничении $d \le k \le n$. По порядку $n = p^l$ и размерности d трансверсальной блок-схемы определяются мощность множества элементов и мощность множества блоков, а также порог пересечения — наибольшее возможное число элементов в пересечении двух блоков.

Применение комбинаторных блок-схем позволяет совмещать изучение отдельных элементов параллельно в составе определенным образом собранных их подмножеств. Примером может служить осуществление 376 тестов с комбинаторными блоками, состоящими примерно из 5000 клонов вместо индивидуальных тестов с 220000 клонами, в Лос-Аламосской национальной лаборатории [9]. На основе комбинаторных блок-схем строятся комбинаторные библиотеки кодов аминокислот [10]. Применение комбинаторных методов для синтеза криптографических протоколов отражено в [11, 12]. Применению комбинаторных блок-схем в вычислительной технике посвящены упомянутые выше [5, 6]. В [7] дана интерпретация симметричной комбинаторной блок-схемы при моделировании многокомпонентной системы связи и подчеркнут универсальный характер таких моделей, допускающих подобные интерпретации в различных приложениях. Отметим также, что, согласно [12], изучаемые в настоящей работе алгоритмы синтеза трансверсальных комбинаторных схем применимы к синтезу ортогональных массивов и множественных латинских квадратов.

Приведенные в статье численные примеры получены с использованием системы компьютерной алгебры Sage [13] посредством алгебраического процессора МЭИ [14].

В разд. 1 дана постановка задачи настоящей работы. Раздел 2 является расширенным изложением доклада [15] на XIX Международной конференции “Проблемы теоретической кибернетики”. Здесь рассматриваются числовая и алгебраическая формализации и аналитические решения задач вычисления блоков для циклических и ациклических проективных плоскостей, линейной и квадратичной трансверсальных блок-схем и двойственных схем. В заключение обсуждаются особенности предложенного метода синтеза сложных систем определенного класса и возможности использования предлагаемых методов для решения производных задач.

1. Постановка задачи. Разнообразие технических и иного рода систем, моделируемых комбинаторными блок-схемами, требует единого подхода к их формализации. Универсальным методом унификации представлений систем перечислительного характера является нумерация элементов и блоков. Тогда в качестве множеств элементов, как и номеров блоков, можно принять множества начальных неотрицательных целых чисел. Такая нумерация будет удовлетворять отмеченному выше правилу двойственности, если по номеру блока однозначно вычисляется множество входящих в этот блок элементов (чисел), а по элементу (числу) однозначно вычисляется дуальный блок, т.е. множество номеров блоков, содержащих этот элемент. В настоящей работе описаны нумерации такого рода применительно к циклическим и ациклическим плоскостям, а также трансверсальным схемам, порядок которых есть простое число или степень простого числа. Они несколько различаются, но в каждом случае реализуются на основе алгебраического подхода, когда элементам и блокам взаимно-однозначно сопоставляются просто вычисляемые их алгебраические образы, числовые прообразы которых также легко рассчитываются. Применение нумерации элементов и блоков комбинаторных блок-схем позволяет сделать их представления более наглядными, скрыв особенности их алгебраической природы, а также создать условия для независимого и параллельного вычисления блоков на основе (беспереборного) построения алгебраических идентификаторов блоков по заданному номеру блока. В роли таких идентификаторов блоков циклических проективных плоскостей выступают разностное множество Зингера и номер блока. В качестве идентификаторов блоков ациклических проективных плоскостей используются нормированные базисы двумерных или соответственно трехмерных подпространств векторного пространства размерности три или четыре над конечным полем порядка p^l, множества числовых образов нормированных элементов которых как раз и являются блоками проективной плоскости. В качестве элементов выступают числовые нормированные образы базисов одномерных подпространств. Алгебраическими идентификаторами блоков трансверсальных комбинаторных блок-схем являются d-наборы (т.е. пары или тройки) элементов поля порядка p^l. Использование алгебраических идентификаторов позволяет строить блоки распределенно, т.е. независимо один от другого, избегая необходимости анализа их матричных или графовых представлений в полном объеме, как в работах [5–7]. Этим предлагаемый алгебраический подход отличается и от алгебраического метода в публикации [3], где в качестве элементов ациклической проективной плоскости рассматриваются одномерные подпространства, а блоками являются совокупности соответствующих элементам блока одномерных подпространств, объединение которых есть соответствующее блоку двумерное пространство.

Таким образом, задача данной работы – обосновать метод численной и алгебраической формализации в задачах синтеза систем, структура которых соответствует проективным плоскостям указанного выше порядка, а также линейным или квадратичным трансверсальным комбинаторным блок-схемам, и на его основе разработать новые алгебраические и соответствующие алгоритмические подходы к синтезу этих комбинаторных схем, а также их двойственных аналогов.

2. Алгебраические методы построения некоторых комбинаторных блок-схем. Рассмотрим некоторые разновидности комбинаторных блок-схем, используемых в качестве структурных моделей ряда технических или иного рода систем. Уравновешенная неполная блок-схема (УНБС) [1, 2] определяется на конечном множестве элементов $\mathbf{X}$ мощности v и образована как множество $\mathbf{A}$ собственных подмножеств, называемых блоками. Каждый блок состоит из k элементов, каждый элемент из $\mathbf{X}$ присутствует в r блоках, а каждая пара различных элементов встречается в λ блоках. УНБС имеют сокращенное обозначение (v, k, λ)-УНБС. Остальные параметры восстанавливаются по нему на основе элементарных соотношений $bk = vr$ и $r(k-1) = \lambda(v-1)$, где b – число блоков УНБС. Вот некоторые УНБС: $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-УНБС называется проективной плоскостью размерности два и порядка n. Она обозначается PP$(2,n)$. Проективная плоскость размерности три и порядка n PP$(3,n)$ – это $(n^3 + n^2 + n + 1, n^2 + n + 1, n + 1)$-УНБС. Блоки таких УНБС попарно имеют λ общих элементов. Другой разновидностью комбинаторных блок-схем являются так называемые трансверсальные блок-схемы. Они характеризуются тем, что попарно блоки имеют не более одного общего элемента, но для любых двух непересекающихся блоков найдется μ, $\mu > 0$, других блоков, имеющих по λ общих элементов с каждым из них. Формализованное описание трансверсальных блок-схем будет дано ниже.

2.1. *Построение блоков и дуальных блоков циклических проективных плоскостей.* Строение блоков циклической проективной плоскости PP$(2,n)$ определяется $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-разностным множеством − совокупностью $n + 1$ элементов группы Z_{n^2+n+1}, такой, что любой ненулевой элемент этой группы можно получить как разность некоторых из этих элементов. Одну из разновидностей такого множества – разностное множество Зингера найдем как множество дискретных логарифмов элементов поля F_n^3, являющихся многочленами степени менее двух [1]. Для этого используется примитивный многочлен степени три над полем GF(n) и его корень x, т.е. примитивный элемент поля GF(n^3). Разностное множество Зингера образуется из показателей степеней j этого элемента, при которых степени многочленов x^j не превышают 1. Множество элементов проективной плоскости PP(2,n) есть множество из $n^2 + n + 1$ неотрицательных целых чисел, в качестве блока номер 0 можно принять множество чисел, составляющих разностное множество Зингера, а блок номер 0 двойственной проективной плоскости PP(2,n) образуется противоположными вычетами, т.е. числами, которые находятся вычитанием элементов нулевого блока проективной плоскости из 0 по модулю $n^2 + n + 1$. Тогда i-й блок, $i \in \{1, ..., n^2 + n\}$, как проективной плоскости, так и двойственной проективной плоскости получается прибавлением единицы по модулю $n^2 + n + 1$ к каждому элементу их i – 1-го блока. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 [15]. Блок, имеющий номер j, циклической проективной плоскости PP(2, n) вычисляется последовательным прибавлением его номера по модулю $n^2 + n + 1$ к элементам ($n^2 + n + 1$, $n + 1$, 1)-разностного множества Зингера. Блок, имеющий номер j, циклической двойственной проективной плоскости DPP(2,n) получается последовательным вычитанием из его номера j по модулю $n^2 + n + 1$ элементов этого разностного множества.

Для вычисления блоков циклической проективной плоскости PP(3,n) и двойственной циклической проективной плоскости DPP(3,n) используется ($n^3 + n^2 + n + 1$, $n^2 + n + 1$, $n + 1$)-разностное множество Зингера. Это совокупность $n^2 + n + 1$ элементов группы $Z_{n^3+n^2+n+1}$, такая, что любой ненулевой элемент этой группы можно получить n + 1-кратно как разность по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$ различных $n + 1$ пар некоторых из этих $n^2 + n + 1$ элементов. Вычисление этого разностного множества Зингера производится как множества дискретных логарифмов элементов поля F_n^4, являющихся многочленами степени менее трех [1]. Для этого используется примитивный многочлен степени четыре над полем GF(n) и его корень x, т.е. примитивный элемент поля GF(n^4). Разностное множество Зингера образуется из показателей степеней j этого элемента, при которых степени многочленов x^j не превышают двух. Алгебраическая среда для этих вычислений удобно образуется средствами системы компьютерной алгебры Sage. Вычисления блоков и дуальных блоков производятся по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$. Тогда множество элементов проективной плоскости PP(3,n) есть множество из $n^3 + n^2 + n + 1$ неотрицательных целых чисел, в качестве блока номер 0 можно принять множество чисел, составляющих разностное множество Зингера. Нулевой блок двойственной проективной плоскости DPP(3,n) образуется противоположными вычетами, т.е. числами, которые получаются вычитанием элементов нулевого блока проективной плоскости PP(3,n) из 0 по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$. Тогда i-й блок, $i \in \{1, ..., n^3 + n^2 + n\}$, как проективной плоскости PP(3,n), так и двойственной проективной плоскости DPP(3,n) получается прибавлением единицы по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$ к каждому элементу их i–1-го блока. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 [15]. Блок, имеющий номер j, циклической проективной плоскости PP(3,n) вычисляется последовательным прибавлением его номера по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$ к элементам ($n^3 + n^2 + n + 1$, $n^2 + n + 1$, $n + 1$)-разностного множества Зингера. Блок, имеющий номер j, циклической двойственной проективной плоскости DPP(3.n) получается последовательным вычитанием из его номера j по модулю $n^3 + n^2 + n + 1$ элементов этого разностного множества.

Как видим, алгебраическими идентификаторами блоков циклической проективной плоскости размерности два или три выступают разностное множество Зингера и номер блока.

Пример 1. Циклическая проективная плоскость PP(3,2) – это (15,7,3)-УНБС:

0. [0–2, 4, 5, 8, 10],	1. [1–3, 5, 6, 9, 11],	2. [2–4, 6, 7, 10, 12],	3. [3–5, 7, 8, 11, 13],
4. [4–6, 8, 9, 12, 14],	5. [5–7, 9, 10, 13, 0],	6. [6–8, 10, 11, 14, 1],	7. [7–9, 11, 12, 0, 2],
8. [8–10, 12, 13, 1, 3],	9. [9–11, 13, 14, 2, 4],	10. [10–12, 14, 0, 3, 5],	11. [11–13, 0, 1, 4, 6],
12. [12–14, 1, 2, 5, 7],	13. [13, 14, 0, 2, 3, 6, 8],	14. [14, 0, 1, 3, 4, 7, 9].	

Двойственная циклическая проективная плоскость DPP(3,2) имеет 15 дуальных блоков:

0. [0, 14, 13, 11, 10, 7, 5], 1. [1, 0, 14, 12, 11, 8, 6], 2. [2, 1, 0, 13, 12, 9, 7], 3. [3, 2, 1, 14, 13, 10, 8], 4. [4, 3, 2, 0, 14, 11, 9], 5. [5, 4, 3, 1, 0, 12, 10], 6. [6, 5, 4, 2, 1, 13, 11], 7. [7, 6, 5, 3, 2, 14, 12], 8. [8, 7, 6, 4, 3, 0, 13], 9. [9, 8, 7, 5, 4, 1, 14], 10. [10, 9, 8, 6, 5, 2, 0], 11. [11, 10, 9, 7, 6, 3, 1], 12. [12, 11, 10, 8, 7, 4, 2], 13. [13, 12, 11, 9 , 8, 5, 3], 14. [14, 13, 12, 10, 9, 6, 4].

2.2. Построение блоков и дуальных блоков ациклических проективных плоскостей. Пусть F_n – поле порядка $n = p^k$, а x – его примитивный элемент, $F(n^{d+1})$ – его алгебраическое расширение степени $d + 1$, рассматриваемое как векторное пространство V размерности $d + 1$, а также как поле, порождаемое примитивным полиномом степени $d + 1$ над полем F_n. Множество $V^* = V\backslash\{0\}$ по отношению коллинеарности разбивается на классы эквивалентности. В качестве представителей этих классов удобно выбрать нормированные многочлены множества V^*. Их совокупность V' составляет проективное пространство размерности d. Его элементы являются проективными подпространствами нулевой размерности, или точками (представителями классов коллинеарности – подпространств единичной размерности векторного пространства V). Множества из d различных точек образуют базисы линий проективного пространства и одновременно нормированные базисы подпространств размерности d векторного пространства V. Имеется

$$N_d = (n^{d+1} - 1)/(n - 1) = n^d + nn^{d-1} + \ldots + n + 1$$

точек и такое же количество линий. Множества точек и линий образуют проективную плоскость $PP(d,n)$ размерности d и порядка n. Будем использовать следующие методы нумерации элементов векторных пространств размерности s и проективных пространств размерности $s - 1$. Номерами ненулевых элементов поля F_n считаются их индексы по основанию образующего элемента x, а нулевому элементу присваивается номер 0 (т.е. полагаем, что индекс нулевого элемента поля равен нулю: ind 0=0). Элементам $e = (e_0, \ldots, e_{s-2}, e_{s-1}) \in F(n^s)$ присвоим номера

$$\varphi(e) = \mathrm{ind}e_0 + n\mathrm{ind}e_1 + \ldots + n^{s-2}\mathrm{ind}e_{s-2} + n^{s-1}\mathrm{ind}e_{s-1}.$$

При этом числовым образом векторного пространства F_n^s будет множество $\{\overline{0, n^s - 1}\}$.

Номер $\psi(e)$ элемента $e = (e_0, e_1, \ldots, e_{s-2}, 1)$ проективного пространства размерности $s - 1$ будем определять формулой

$$\psi(e) = \varphi(\hat{e}) + N_{s-2}, \quad s \geq 1,$$

полагая, что $\hat{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_{s-2})$, $\psi(1) = 0$, $N_0 = 1$. Нумерации

$$\varphi: F_n^s \to \{\overline{0, n^s - 1}\}$$

и

$$\psi: V' \to \{\overline{0, (n^s - 1)/(n - 1) - 1}\}$$

являются биекциями и, следовательно, обратимы:

$$\varphi^{-1}(M) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad M = 0, \\ (x^{i_0}, \ldots, x^{i_{s-2}}, x^{i_{s-1}}), & \text{если} \quad M > 0, \end{cases}$$

где $(i_0, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1})$ есть набор коэффициентов разложения числа M по степеням числа n;

$$\psi^{-1}(M') = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad M' = 0, \\ (x^{i_0}, \ldots, x^{i_{s-2}}, 1), & \text{если} \quad M' > 0, \end{cases}$$

где $(i_0, \ldots, i_{s-2})$ есть набор коэффициентов разложения по степеням n числа $M = M' - N_{s-2}$. При такой нумерации получаем каноническое представление проективной плоскости, т.е. $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-УНБС как комбинаторной блок-схемы: множество **X** элементов – это множество неотрицательных целых чисел $\overline{0, n^2 + n}$ (образов точек), а множество **B** блоков – это множество наборов B номеров точек, составляющих линии,– образы линий. Ниже будет показано, что блоки

Таблица 1

Порядковый номер t линии	$t = 0$	$t = \overline{1, n}$	$t = jn + i,\ j = \overline{1, n},\ i = \overline{1, n}$
$(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)})$ $(\psi(\mathbf{e}^{(1)}), \psi(\mathbf{e}^{(2)}))$	$((1), (0,1))$ $(0, 1)$	$((1), (0, x^{t-1}, 1))$ $(0, 1 + n\,t)$	$((x^{j-1}, 1), (x^{i-1}, 0, 1))$ $(j, n + i)$

также можно упорядочить, пронумеровав их начальными неотрицательными целыми числами $\overline{0, N_2 - 1}$.

Для вычисления блоков будем использовать их алгебраические идентификаторы, базисы линий в проективном пространстве размерности два, образованные парами многочленов $(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)})$. Пусть первыми элементами таких пар являются многочлен (1) нулевой степени или нормированные многочлены $(e_0, 1)$ первой степени. Вторые элементы $\mathbf{e}^{(2)}$ базисов остальных блоков подберем из числа многочленов, не принадлежащих алгебраическим замыканиям других базисов с тем же первым элементом $\mathbf{e}^{(1)}$. Пары многочленов, соответствующие базисам линий с номером t, представлены в табл. 1.

Алгебраические замыкания базисов в проективном пространстве суть его линии, а их образы — блоки проективной плоскости на множестве **X.** По номерам $\psi(\mathbf{e}^{(1)})$ и $\psi(\mathbf{e}^{(2)})$ первого и второго элементов базиса можно определить порядковый номер $N(\psi(\mathbf{e}^{(1)}), \psi(e^{(2)}))$ порождаемой им линии и, следовательно, номер ее числового образа, т.е. блока:

$$N(\psi(\mathbf{e}^{(1)}), \psi(\mathbf{e}^{(2)})) = \begin{cases} (\psi(\mathbf{e}^{(2)}) - 1)/n, & \text{если} \quad \psi(\mathbf{e}^{(1)}) = 0, \\ \psi(\mathbf{e}^{(1)})n + \psi(\mathbf{e}^{(2)}) - N_1 + 1, & \text{если} \quad \psi(\mathbf{e}^{(1)}) > 0. \end{cases}$$

При этом блоки получают анонсированные выше номера $\overline{0, N_2 - 1}$.

Алгебраическое замыкание $\langle\{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}\}\rangle$ базиса можно вычислить, добавляя линейные комбинации $\mathbf{e}^{(2)} + x^t\mathbf{e}^{(1)}$, $t = \overline{1, n-1}$, поскольку все элементы блока являются нормированными многочленами. В этом случае вычисляется и соответствующий блок

$$\{\psi(\mathbf{e}^{(1)}), \psi(\mathbf{e}^{(2)}), \psi(\mathbf{e}^{(2)} + x^1\mathbf{e}^{(1)}), \ldots, \psi(\mathbf{e}^{(2)} + x^{n-1}\mathbf{e}^{(1)})\}.$$

П р и м е р 2. Представим числовые образы базисов линий проективной плоскости (21, 5, 1) списком пар элементов, упорядоченных по возрастанию номеров порождаемых базисами блоков:

((0, 1), (0, 5), (0, 9), (0, 13), (0, 17), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)).

Вычислим, например, блок B_{12} по образу (2,8) линии $(\psi^{-1}(2), \psi^{-1}(8))$ как образ замыкания:

$$\langle\psi^{-1}(2), \psi^{-1}(8)\rangle = \langle((x, 1), (1, 0, 1))\rangle =$$
$$= \{(x,1), (1,0,1), (1,0,1) + x(x,1), (1,0,1) + (x+1)(x,1), (1,0,1) + 1(x,1)\} =$$
$$= \{(x, 1), (1,0,1), (x,x,1), (0, x+1, 1), (x+1, 1, 1)\}.$$

Отсюда

$$B_{12} = \{\psi(x,1), \psi(1,0,1), \psi(x,x,1), \psi(0, x+1, 1), \psi(x+1, 1, 1)\} = (2, 8, 10, 13, 19).$$

По номеру j блока можно определить образы (номера) первого $n_1(j)$ и второго $n_2(j)$ элементов базиса его прообраза:

$$n_1(j) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \le n, \\ \left\lfloor \dfrac{j-1}{n} \right\rfloor, & \text{если} \quad j > n, \end{cases} \qquad n_2(j) = \begin{cases} 1 + nj, & \text{если} \quad j \le n, \\ j - (n_1(j) - 1)n, & \text{если} \quad j > n. \end{cases}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Таблица 2

Порядковый номер t линии	$t = 0$	$t = \overline{1,n}$	$t = jn + i$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$	$t = jn^2 + in + r$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$, $r = \overline{1,n}$
$(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)})$	$((1),$ $(0,1),$ $(0,0,1))$	$((1),$ $(0,1),$ $(0,0,x^{t-1},1))$	$((1),$ $(0,x^{j-1},1),$ $(0,x^{i-1},0,1))$	$((x^{j-1},1),$ $(x^{i-1},0,1),$ $(x^{r-1},0,0,1))$
$(\psi(\mathbf{e}^{(1)}), \psi(\mathbf{e}^{(2)}), \psi(\mathbf{e}^{(3)}))$	$(0, 1, n+1)$	$(0, 1, tn^2 + n + 1)$	$(0, nj + 1, n^2 + ni + 1)$	$(j, n + i, n^2 + n + r)$

Утверждение 3 [15]. Блок, имеющий номер j, проективной плоскости можно получить по формуле

$$\psi(\langle\{\psi^{-1}(n_1(j)), \psi^{-1}(n_2(j))\}\rangle).$$

Заметим, что число 0 имеется в блоках $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, содержащих числа $\overline{0,n}$, а числа i, $1 < i < n$ включаются в блок B_0 и блоки B_{tn+i}, $t = \overline{1,n}$. Каждое из остальных чисел $j \in \mathbf{X}$ присутствует в $n + 1$ блоках, каждый раз с одним из чисел $\overline{0,n}$. Если $j \le 2n$, то j есть второй элемент блока, т.е. числовой образ $\psi(\mathbf{e}^{(2)})$ второго элемента базиса, который можно определить по j и числовому образу $\psi(\mathbf{e}^{(1)})$ первого элемента базиса:

$$\psi(\mathbf{e}^{(2)}) = \begin{cases} jn + 1, & \text{если} \quad \psi(\mathbf{e}^{(1)}) = 0, \\ j - (\psi(\mathbf{e}^{(1)}) - 1)n, & \text{если} \quad \psi(\mathbf{e}^{(1)}) > 0. \end{cases}$$

Если $j > 2n$, то оно есть образ $3, 4, \ldots n$-го или $n + 1$-го элемента блока. При знании первого элемента, применяя обращенное правило его вычисления по первому и второму элементам, получаем второй элемент блока.

Утверждение 4 [15]. Множество номеров блоков проективной плоскости, содержащих заданный элемент s, представимо формулой

$$B(s) = \begin{cases} \{0\} \cup \{s * n + t : t = \overline{1,n}\}, & \text{если} \quad s \le n, \\ \{B_0(s)\} \cup \{B_k(s) : k = \overline{1,n}\}, & \text{если} \quad s > n, \end{cases}$$

где

$$B_0(s) = \left.\frac{\psi(\psi^{-1}(s) - x^i) - 1}{n}\right|_{\psi(\psi^{-1}(s) - x^i) \bmod n = 1},$$

$$B_k(s) = \psi(\psi^{-1}(s) - x^i\psi^{-1}(k)) + (k-1)n\Big|_{\psi(\psi^{-1}(s) - x^i\psi^{-1}(k)) \le 2n,\ i \in \{\overline{0, n-1}\}}.$$

Проективные плоскости большей размерности строятся аналогично. В частности, базисы прообразов блоков для PP(3,n) представлены в табл. 2.

Исходя из этого можно сформулировать утверждения, аналогичные рассмотренным в данном разделе применительно к проективным плоскостям PP(3,n).

2.3. Построение блока трансверсальной блок-схемы по его номеру и множества блоков, содержащих данный элемент. Линейная трансверсальная комбинаторная блок-схема TD(k,n) [1, 3] строится из элементов k попарно не пересекающихся множеств w_i, содержащих по n элементов, и состоит из n^2 множеств Y_j, $j = \overline{1,n^2}$, содержащих по k элементов. При этом каждое множество Y_j имеет точно один элемент из каждого множества w_i, $i = \overline{0,k-1}$, и если $j \ne s$, то Y_j и Y_s имеют не более одного общего элемента. Таким образом, комбинаторная блок-схема TD(k, n) определена на множестве мощности kn. Если n –

простое число или степень простого числа, то TD(k, n) существует. Тогда в алгебраической интерпретации она определяется на множестве пар (x_1, y), $x_1 \in \mathbf{X_1}$, где $\mathbf{X}_1$ есть множество из k элементов поля F_n, $y \in F_n$; блоки линейной трансверсальной блок-схемы $TD(k, n)$ определяются парой элементов $(a, b) \in F(n^2)$ [8]:

$$B_{a,b} = \{(ax_1 + b, x_1) : x_1 \in \mathbf{X_1}\}.$$

В числовой интерпретации [15] линейная трансверсальная блок-схема TD(k, n) над полем F_n задается на числовом множестве

$$\mathbf{X} = \{s : s = \varphi(x^j, x^i),\ i \in \overline{(0, k-1)},\ j \in \overline{(0, n-1)}\},$$

где x – примитивный элемент поля. Ее блоками являются множества

$$B_{a,b} = \{\varphi(ax^i + b, x^i), i = (0, k-1)\}, \quad a, b \in F_n.$$

Пусть номера блоков $B_{a,\,b}$ представляются числами $N^{(2)}(B_{a,\,b}) = \varphi(a, b)$. Вычислим множество $G_{TD(k,n)}(t)$ номеров блоков $B_{a,\,b}$, содержащих элемент $t \in \mathbf{X}$, т.е. дуальный блок с номером t. Заметим, что $\varphi^{-1}(t) = (x^{(t - \lfloor t/n \rfloor n)}, x^{\lfloor t/n \rfloor})$. Таким образом, получено следующее утверждение.

Утверждение 4 [8, 15]. Справедливы представления

$$B_{a,b} = (\varphi(ax^i + b, x^i)), \quad i = (0, k-1), \quad a, b \in F_n;$$
$$G_{\mathrm{TD}(k,n)}(t) = \{\varphi(a, b) : \{a, b \in F_n; \varphi(ax^{\lfloor t/n \rfloor} + b, x^{\lfloor t/n \rfloor}) = t\}, \quad t \in \mathbf{X}.$$

Трансверсальная блок-схема TD(t, k, n) – это тройка (**X**, **H**, **A**), где **X** – конечное множество мощности kn, **H** – разбиение **X** на k частей, называемых группами, размера n, **A** – множество k-подмножеств множества **X**, называемых блоками, которая удовлетворяет следующим условиям:

(1) $|H \cap A| = 1$ для каждого $H \in \mathbf{H}$ и каждого $A \in \mathbf{A}$,

(2) каждое t-подмножество множества **X** из t различных групп оказывается точно в одном блоке из **A**.

Если n – простое число или его степень, то TD(t, k, n) существует. В алгебраической интерпретации в этом случае блоки квадратичной трансверсальной блок-схемы TD(3, k, n) определяются тройками элементов $(a, b, c) \in F(n^3)$:

$$B_{a,b,c} = \{(ax_1{}^2 + bx_1 + c, x_1) : x_1 \in \mathbf{X}_1\},$$

где $\mathbf{X}_1$ есть множество из k элементов поля F_n [8].

В числовой интерпретации [15] квадратичная трансверсальная блок-схема TD(t, k, n) над полем F_n также задается на числовом множестве

$$\mathbf{X} = \{s : s = \varphi(x^j, x^i), i \in \overline{(0, k-1)}, j \in \overline{(0, n-1)}\},$$

где x есть примитивный элемент поля.

Пусть номерами блоков $B_{a,\,b,\,c}$ являются числа $N^{(3)}(B_{a,\,b,\,c}) = \varphi(a, b, c)$. Множество $G_{\mathrm{TD}(3,k,n)}(t)$ номеров блоков $B_{a,\,b,\,c}$, содержащих элемент $t \in \mathbf{X}$, также можно определить, учитывая, что $\varphi^{-1}(t) = (x^{r_0}, x^{r_1}, x^{q_1})$, где

$$r_0 = t - q_0 n \quad \text{при} \quad q_0 = \lfloor t/n \rfloor;$$
$$r_1 = q_0 - q_1 n \quad \text{при} \quad q_1 = \lfloor q_0/n \rfloor.$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Утверждение 5 [8, 15]. Справедливы представления

$$B_{a,b,c} = \{\varphi(ax^{2i} + bx^i + c, x^i), i \in \{\overline{0, k-1}\}\}, \quad \{a, b, c\} \subseteq F_n;$$

$$G_{\mathrm{TD}(3,k,n)}(t) = \{\varphi(a, b, c) : \{a, b, c\} \subseteq F_n; \varphi(ax^{2\lfloor t/n \rfloor} + bx^{\lfloor t/n \rfloor} + c, x^{\lfloor t/n \rfloor}) = t\}.$$

Полученные аналитические представления блоков комбинаторных блок-схем и их двойственных аналогов легко трансформируются в алгоритмы. Они были протестированы с использованием системы компьютерной алгебры Sage [13], ассоциированной с алгебраическим процессором МЭИ [14].

П р и м е р 3. Схема ячеистой связи по квадратичной трансверсальной блок-схеме TD(3,3,3) и двойственной такой блок-схеме. Здесь $d = 3$, $k = 3$, $n = 3$.

По умолчанию, элементами блок-схемы TD(3,3,3) являются числа $\overline{0,8}$, их количество есть $kn = 9$. В этой блок-схеме $n^3 = 27$ блоков по три элемента:

0. [0, 3, 6], 1. [0, 4, 7], 2. [0, 5, 8], 3. [0, 5, 7], 4. [0, 3, 8], 5. [0, 4, 6], 6. [0, 4, 8], 7. [0, 5, 6], 8. [0, 3, 7], 9. [1, 4, 7], 10. [1, 5, 8], 11. [1, 3, 6], 12. [1, 3, 8], 13. [1, 4, 6], 14. [1, 5, 7], 15. [1, 5, 6], 16. [1, 3, 7], 17. [1, 4, 8], 18. [2, 5, 8], 19. [2, 3, 6], 20. [2, 4, 7], 21. [2, 4, 6], 22. [2, 5, 7], 23. [2, 3, 8], 24. [2, 3, 7], 25. [2, 4, 8], 26. [2, 5, 6].

Имеется $kn = 9$ блоков двойственной трансверсальной блок-схемы DTD(3,3,3), т.е. множеств номеров блоков из TD(3,3,3), содержащих элемент, являющийся номером дуального блока:

0. [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8],
1. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17],
2. [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26],
3. [0, 4, 8, 11, 12, 16, 19, 23, 24],
4. [1, 5, 6, 9, 13, 17, 20, 21, 25],
5. [2, 3, 7, 10, 14, 15, 18, 22, 26],
6. [0, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 21, 26],
7. [1, 3, 8, 9, 14, 16, 20, 22, 24],
8. [2, 4, 6, 10, 12, 17, 18, 23, 25].

Сеть построена из 27 узлов, каждый из которых представляет собой полносвязную сеть из трех компьютеров. Каждый компьютер при этом входит в одну из девяти полносвязных подсетей, включающих по 9 компьютеров, он помечается номером этой подсети. Эти номера суть элементы TD(3, 3, 3), а блоки – тройки номеров, пометки компьютеров узла. Дуальные блоки включают номера блоков, содержащих номер данного дуального блока. Любые два компьютера из разных узлов могут принадлежать одной полносвязной сети из девяти компьютеров (если имеют одинаковые пометки), тогда компьютеры связаны непосредственно. Если же они оба не принадлежат ни одной такой сети (имеют разные пометки), то в узлах, в которые они входят, могут быть компьютеры с одинаковыми пометками или общих пометок нет. Тогда в первом случае необходимы три шага для соединения, а во втором – четыре шага. Таким образом, любые два компьютера либо связаны непосредственно, либо через двух или трех посредников. Эта система трехуровневая: уровни компьютеров (по умолчанию), узлов и полносвязных сетей. Подсистемы второго и третьего уровней соответствуют классам двух разбиений элементов первого уровня. Эта же комбинаторная схема имеет еще одну интерпретацию, представляющую собой формализацию схемы предварительного распределения ключей в беспроводной сенсорной сети. При этом элементы – это номера различных ключей. Блоки соответствуют узлам сети и являются множествами номеров ключей, встроенных в память узла. Дуальные блоки содержат номера узлов, которые имеют ключ, номер которого есть номер дуального блока. Узлы, в блоках которых имеется элемент с данным номером, могут коммутировать с использованием ключа с этим номером. Иначе найдется узел, в блоке которого имеется элемент, содержащийся в блоке первого узла, и другой элемент, содержащийся в блоке второго узла. Тогда возможна коммутация между двумя узлами с использованием этих двух ключей третьего узла, например с зашифрованием в первом узле, расшифрованием и зашифрованием в третьем узле и расшифрованием во втором узле.

Возможны подобные интерпретации любых трансверсальных комбинаторных блок-схем TD(3, k, n) и DTD(3, k, n). Так TD(3, 3, 4) и DTD(3, 3, 4) имеют 64 блока по три элемента и 12 дуальных блоков по 16 элементов.

Заключение. В статье обоснован метод синтеза систем, структура которых соответствует комбинаторной блок-схеме одной из рассматриваемых разновидностей при условии, что порядок блок-схемы является простым числом или степенью простого числа, отличающийся применением числовой и алгебраической формализации таких систем с использованием алгебраических идентификаторов блоков.

Получены аналитические представления, по которым блоки и дуальные блоки как циклических, так и ациклических проективных плоскостей, а также линейных и квадратичных трансверсальных блок-схем вычисляются независимо или параллельно.

Этот метод на содержательном уровне предполагает определение разновидности комбинаторной блок-схемы, которой соответствует структура синтезируемой системы, подбор основных параметров комбинаторной блок-схемы и ее двойственного аналога. Далее в соответствии с правилом двойственности осуществляется нумерация элементов, блоков и дуальных блоков комбинаторной блок-схемы. При этом строятся и используются характерные для данного типа комбинаторной блок-схемы алгебраические идентификаторы блоков. Вычисляются все или отдельные блоки и дуальные блоки. При реализации системы или ее подсистемы осуществляется предметная интерпретация построенной комбинаторной блок-схемы или отдельных блоков и анализируются свойства синтезированной системы, обусловленные свойствами комбинаторной модели. Различные предметные системы допускают одну и ту же формализацию в виде комбинаторной блок-схемы, и наоборот, конкретная комбинаторная блок-схема может иметь различные предметные интерпретации. Естественно, что рассмотренные подходы позволяют строить аффинные плоскости как остаточные комбинаторные блок-схемы. Наконец, синтез трансверсальных комбинаторных систем по существу эквивалентен построению ортогональных латинских квадратов и ортогональных массивов. Алгебраические идентификаторы блоков могут использоваться также для решения некоторых производных задач, связанных с вычислением пересечений блоков или дуальных блоков или определением блока, имеющего пересечения с каждым из двух данных блоков для выявления характера связей в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
2. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004.
3. *Stinson D.* Combinatorial Designs: Constructions and Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2003.
4. *Colbourn C., Dinitz J. Eds*. The CRC Handbook of Combinatorial Designs, 2nd Ed. Boca Raton: CRC Press, 2007.
5. *Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С.* Комбинаторные методы построения двудольных однородных неизбыточных квазиполносвязных графов (симметричных блок-схем) // АиТ. 2009. № 2. С. 133–164.
6. *Пархоменко П.П., Каравай М.Ф.* Кратные комбинаторные блок-схемы // АиТ. 2013. № 6. С. 121–131.
7. *Пархоменко П.П.* Алгоритмизация синтеза комбинаторных блок-схем одного класса // АиТ. 2016. № 7. С. 113 –122.
8. *Lee J., Stinson D.R.* On the Construction of Practical Key Predistribution Schemes for Distributed Sensor Networks Using Combinatorial Designs // ACM Transactions on Information and Systems Security. 2008. V. 11. № 2. Article 5.
9. *Du D., Hwang F., Wu W., Znati T.* New Construction for Transversal Design // J. Computational Biology. 2006. V. 13. № 4. P. 990–995.
10. *Andrew B., MacConnel A.B., Price A.K., Brian M., Paege B.M.* An Integrated Microfluidic Processor for DNA-Encoded Combinatorial Library Functional Screening // ACS Comb Sci. 2017. V. 19. № 3. P. 181–192.
11. *Черемушкин А.В.* Комбинаторно-геометрические подходы к построению схем предварительного распределения ключей (обзор). Прикладная математика. Математические методы криптографии. 2008. № 11 (1). С. 55–63.
12. *Paterson M.B., Stinson D.R.* Unified Approach to Combinatorial Key Predistribution Schemes for Sensor Networks // Designs, Codes and Cryptography. 2014. V. 71, Iss. 3. P. 433–457.
13. Sage web site https://www.sagemath.org. (дата последнего обращения 13.11.2019)
14. *Frolov A.B., Vinnikov A.M.* Modeling Cryptographic Protocols Using Computer Algebra Systems 2020 // V Intern. Conf. on Information Technologies in Engineering Education. Moscow, Russia, 2020. P. 1–4.
15. *Фролов А.Б., Клягин А.О., Кочетова Н.П., Темников Д.Ю.* Распределенное вычисление комбинаторных блок-схем // Проблемы теоретической кибернетики. Матер. заочного семинара XIX Междунар. конф. / Под ред. Ю.И. Журавлева. Казань, 2020. С. 126–129.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 94–110

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 330.45

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ РАБОТАМИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

П. С. Кошелев[a],*, А. В. Мищенко[b],**

[a] *МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*

[b] *Национальный исследовательский ун-т "Высшая школа экономики", Москва, Россия*

**e-mail: kosh-mail@yandex.ru*

***e-mail: alnex4957@rambler.ru*

Поступила в редакцию 30.11.2019 г.
После доработки 13.01.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Разрабатываются методы решения задачи оптимизации выполнения работ проекта в сфере логистики с учетом неопределенности. С помощью методов исследования операций построены математические модели изучаемых процессов и сформулированы методы решения рассматриваемых задач. Приводится ряд примеров, демонстрирующих возможности использования описанных методов и моделей в практической деятельности.

DOI: 10.31857/S0002338821040089

Введение. Многие задачи управления так или иначе связаны с распределением ограниченных ресурсов. Моделирование оптимального их применения часто сводится к решению задач теории расписаний, сетевого планирования, формирования производственных программ предприятия, планирования обработки заявок в конвейерных системах, распределения транспортных средств по маршрутам. Перечисленные задачи часто используются при оценке эффективности проектов, реализуемых в различных сферах народного хозяйства, таких, как промышленное производство, системы складирования, транспорт, центры по обработке больших информационных данных. Общая постановка этих задач заключается в том, чтобы упорядочить во времени выполнение определенных действий при соблюдении ряда условий. Каждое действие состоит из элементарных операций, называемых работами (заявками или заданиями), которые могут быть либо подготовлены заранее, либо поступать динамически. Организация выполнения работ осуществляется таким образом, чтобы минимизировать один из следующих показателей: время выполнения всех работ, среднее взвешенное время завершения работ, объем незавершенной обработки заявок за определенный период, потери времени на ожидание обработки заявок. Моделирование распределения ограниченных ресурсов часто сводится к решению линейных и нелинейных задач дискретной оптимизации, большинство которых относится к NP-трудным, которые характеризуются экспоненциальным ростом объема вычислений при увеличении размерности задачи [1]. Это обстоятельство, а также то, что находить оптимальное решение часто приходится в условиях неточной исходной информации, определяет актуальность разработки эффективных методов управления ограниченными ресурсами.

В предлагаемой статье основное внимание будет уделено оптимизации управления проектом при изменяющихся длительностях работ. Несмотря на то, что на текущий момент времени созданы многочисленные методы и модели оптимизации управления ресурсами проектов, тем не менее, при решении проблемы минимизации инвестиционной фазы проекта в условиях неопределенности и риска существует определенный дефицит соответствующего количественного инструментария. При этом именно инвестиционная фаза как наиболее трудоемкая и капиталоемкая играет существенную роль в успехе всего проекта. Ошибки планирования на этом периоде, вызванные неучтенным риском, могут привести к значительным потерям.

Рассмотрена детерминированная модель теории расписаний, предполагающая использование нескладируемых ресурсов с учетом матричного задания времени выполнения операций исполнителями и предложен метод ветвей и границ получения оптимального решения. Получены методы оценки устойчивости расписаний при выполнении непрерываемых работ проекта при различных способах задания изменения их длительности. В ситуации, когда длительности работ заданы как случайные величины, предложена двухкритериальная модель оценки эффективности расписания.

Модели оптимального управления ограниченными ресурсами рассматривались в ряде публикаций отечественных и зарубежных авторов. Например, оптимизационные задачи оценки эффективности производственных программ в условиях неопределенности исследуются в [2, 3]. Методы оценки устойчивости расписаний при изменении параметров задачи анализируются в [4, 5]. Динамические и статические модели и методы управления ограниченными ресурсами на транспорте рассмотрены в [6–8]. Точные и приближенные алгоритмы построения оптимальных расписаний для планирования работы многопроцессорной вычислительной техники представлены в [9–11]. Модели и методы управления ограниченными ресурсами, которые сводятся к решению минимаксных задач, приведены в [12–18].

1. Описание моделей. Традиционно общая постановка задачи календарного планирования заключается в следующем. Необходимо выполнить n работ проекта, технологическая последовательность которых задана ориентированным ациклическим графом. Для завершения каждой работы необходимы ресурсы нескладируемого вида.

Нескладируемые ресурсы – ресурсы, высвобождаемые после окончания работы и используемые для последующих задач (машины, компьютеры, станки) [19].

В детерминированной постановке заданы также длительности работ t_i. Объемы нескладируемых ресурсов, как правило, ограничены. В этой ситуации необходимо определить такую последовательность выполнения работ, которая, не нарушая ресурсных ограничений и ограничений, накладываемых на последовательность их осуществления, обеспечивает минимизацию времени завершения всех работ проекта.

В рамках этой постановки задачи рассматриваются отдельно ситуации, когда для выполнения работ проекта необходим фиксированный объем нескладируемых ресурсов, или объем ресурсов может меняться, увеличивая или уменьшая при этом длительность работ.

В случае, если в качестве нескладируемых ресурсов используются исполнители (машины, станки, приборы), наиболее часто встречаются следующие постановки задач.

1. Для осуществления каждой работы применяется один исполнитель из m имеющихся, и увеличение числа исполнителей, выделяющихся для выполнения работы, не приводит к уменьшению ее длительности. Время реализации работы одинаково у всех исполнителей.

2. Для выполнения каждой работы i, $i = \overline{1,n}$, может использоваться от одного до k_i исполнителей ($k_i = \overline{1,m}$). Длительность работы равна t_i/e, $e = \overline{1,k_i}$, здесь e – число исполнителей работы i, t_i – продолжительность работы i, если ее делает один исполнитель.

3. Работа i может осуществляться любым числом исполнителей от 1 до m. Длительность работы i, как и ранее, равна t_i/e в ситуации, когда время выполнения работы одинаково у всех исполнителей ($e = \overline{1,m}$). Тогда оптимальный по быстродействию план заключается в следующем. Вначале все исполнители делают работу один, затем работу два и т.д., т.е. каждую работу выполняют все исполнители. Длина расписания в этом случае равна:

$$T_{\text{опт}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{m},$$

где m – число исполнителей работ проекта.

4. Работа i может выполняться k_i исполнителями ($k_i = \overline{1,m}$), и время осуществления работы исполнителями разное. В этом случае время выполнения работы i исполнителем j задается числом t_{ij}, $i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}$. Если случаи 1–3 подробно изучены в специальной литературе [20–23], то ситуация реализации работ несколькими исполнителями с разным временем выполнения работ практически не изучена. Далее данная постановка задачи будет обсуждаться подробнее.

2. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим ситуацию, когда необходимо сделать n работ проекта, технологическая последовательность которых задана ориентированным графом. Время выполнения работы i исполнителем j определяется величиной t_{ij}, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$. Если работа i не может быть осуществлена исполнителем j, то $t_{ij} = \infty$. Если работа i может выполняться исполнителями e и k, то время реализации работы i исполнителями e и k равно:

$$t_i(e,k) = \frac{1}{\dfrac{1}{t_{ie}} + \dfrac{1}{t_{ik}}} = \frac{t_{ie}t_{ik}}{t_{ie} + t_{ik}}. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) может быть получена исходя из следующих соображений: если работа i происходит за время t_{ie} и t_{ik} соответственно исполнителями e и k, то за одну единицу времени при условии, что исполнители осуществляют работу i совместно, они выполнят $1/t_{ie} + 1/t_{ik}$ часть работы i или $(t_{ie} + t_{ik})/(t_{ie}t_{ik})$. Следовательно, вся работа i будет сделана исполнителями k и e за время $(t_{ie}t_{ik})/(t_{ie} + t_{ik})$. Естественным образом формула (2.1) может быть обобщена на случай, если работа i исполняется множеством исполнителей M_i:

$$t_i(M_i) = \frac{1}{\sum_{j \in M_i} \dfrac{1}{t_{ij}}}, \tag{2.2}$$

где $t_i(M_i)$ – длительность выполнения работы i множеством исполнителей M_i; t_{ij} – время реализации работы i, $i = \overline{1,n}$, исполнителем j из множества M_i.

При решении задачи минимизации времени реализации работ в условиях выполнения их исполнителями с различным временем осуществления работы необходимо не только задать последовательность проведения работ, но и определить, какие именно исполнители должны сделать каждую работу. Для этого в случае непрерываемых работ может быть использован метод ветвей и границ, вычислительная схема которого заключается в следующем.

Ш а г 1. Вычисление нижней оценки оптимальной продолжительности расписания. Пусть технологическая последовательность выполнения работ задается ориентированным графом.

Оценим продолжительность каждой работы с помощью формулы (2.2) следующим образом:

$$t_i^{\min} = \frac{1}{\sum_{j \in M_i} \dfrac{1}{t_{ij}}}; \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

где M_i – множество всех исполнителей, каждый из которых может выполнить работу i за конечное время. Очевидно, что $t_i^{\min}$ – минимальное время, за которое может быть завершена работа i.

Данная задача является NP-трудной, поскольку к NP-трудным относится задача оптимизации выполнения работ несколькими идентичными исполнителями при условии, что каждую работу может осуществлять один исполнитель [1].

Далее найдем длину критического пути на графе для ситуации, когда в качестве длительностей работ приняты величины $t_i^{\min}$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим эту величину через $S_{\text{кр}}^{\min}$ и определим $T_{\text{н}} = S_{\text{кр}}^{\min}$ (индекс "н" в $T_{\text{н}}$ соответствует словосочетанию "нижняя оценка").

Очевидно, что за время, меньшее, $S_{\text{кр}}^{\min}$, все работы проекта выполнены быть не могут.

Ш а г 2. Вычисление верхней оценки оптимальной продолжительности расписания. Традиционно в качестве верхней оценки используется продолжительность какого-либо допустимого расписания. Будем формировать расписание, исходя из следующих соображений: если исполнитель e в момент времени τ, $\tau \geq 0$, может быть назначен для выполнения нескольких работ, то исполнитель выделяется той работе, которая входит в путь максимальной длины $S_j^{\max}(\tau)$, рассчитанный с учетом частичного или полного завершения работ этого пути к моменту времени τ.

Используя этот приоритет при формировании расписания, мы получим один из возможных допустимых планов, продолжительность которого обозначим через $T_{\text{в}}$ (индекс "в" в $T_{\text{в}}$ соответствует словосочетанию "верхняя оценка"). Если $T_{\text{в}} = T_{\text{н}}$, то оптимальное решение получено. В противном случае (если $T_{\text{в}} > T_{\text{н}}$) переходим к шагу 3 описываемого алгоритма.

Ш а г 3. На этом шаге в предположении, что вычислены $T_{\text{н}}$ и $T_{\text{в}}$, анализируется эффективность очередного формируемого допустимого расписания путем вычисления текущих нижних

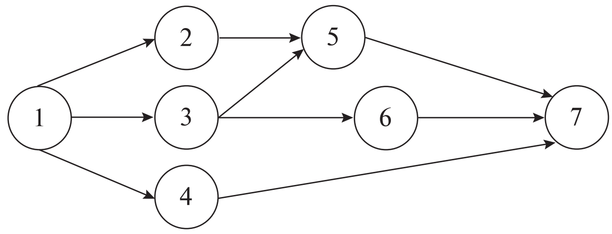

Рис. 1. Ориентированный граф, задающий последовательность выполнения работ

оценок $T_н^{тек}(\tau)$ в момент времени τ, связанный с окончанием одной из выполняемых работ и выделением освободившегося исполнителя для очередной работы. Расчет текущей нижней оценки происходит следующим образом:

$$T_н^{тек}(\tau) = \tau + T_н(\tau), \tag{2.4}$$

где τ – момент времени, в который вычисляется $T_н^{тек}(\tau)$, считая $\tau = 0$ моментом начала работ проекта; $T_н(\tau)$ – нижняя оценка оптимальной продолжительности работ с учетом полного или частичного завершения работ проекта к моменту τ.

Далее сравниваем значения $T_н^{тек}(\tau)$ и $T_в$. Если $T_н^{тек}(\tau) \geq T_в$, то данное расписание не будет оптимальным, оно отбраковывается, переходим к анализу очередного расписания. Если $T_н^{тек}(\tau) <$ $< T_в$, то формирование текущего расписания продолжается, т.е. в момент времени τ выбирается очередная работа и для ее выполнения выделяется один или несколько исполнителей. Продолжительность работы вычисляется с использованием формулы (2.2). В результате подобного анализа каждого допустимого расписания оно будет или отбраковано, или полностью сформировано. В последнем случае сравниваем его продолжительность T^* с величиной $T_в$. Если $T^* < T_в$, то в дальнейшем полагаем $T_в = T^*$.

Предлагаемый алгоритм заканчивает свою работу при следующих вариантах.

1. При очередной корректировке $T_в$ получим $T_в = T_н$. В этом случае оптимальным будет то расписание, длина которого равна $T_н$.

2. Рассмотрены все допустимые расписания, тем не менее, последнее значение $T_в > T_н$. Тогда выбираем в качестве оптимального плана тот, которому соответствует последнее (минимальное) значение $T_в$.

Рассмотрим пример вычисления оптимального расписания с использованием предложенного метода ветвей и границ для следующей ситуации. Пусть задан ориентированный граф, представляющий технологическую последовательность выполнения работ (рис. 1).

Будем считать, что в проекте будут участвовать два исполнителя, для которых время выполнения работы задается матрицей $T = (t_{ij})$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}$, здесь $i = \overline{1,7};\ j = 1;2)$ следующего вида:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 2 & 2.4 \\ 3 & 3.4 \\ 4 & 4.6 \\ 5 & 5.8 \\ 6 & 6.8 \\ 7 & 7.6 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (2.3), найдем минимально возможную продолжительность работ: $t_1^{\min} = 1/((1/1) + (1/1.2)) = 0.55$, аналогично: $t_2^{\min} = 1.2$; $t_3^{\min} = 1.6$; $t_4^{\min} = 2.4$; $t_5^{\min} = 2.8$; $t_6^{\min} \approx 3.4$; $t_7^{\min} = 3.8$.

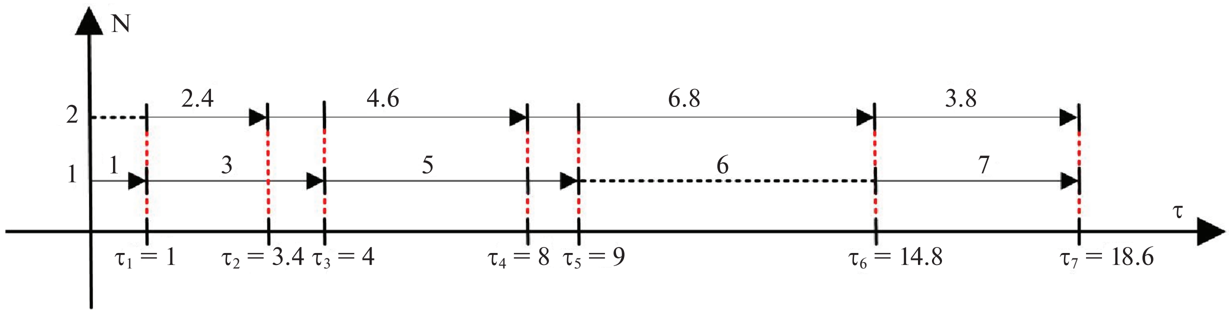

Рис. 2. Диаграмма Ганта первого допустимого расписания

Согласно рис. 1, определим работы, входящие в каждый из четырех путей ориентированного графа: $|S_1| = \{1,2,5,7\}$; $|S_2| = \{1,3,5,7\}$; $|S_3| = \{1,3,6,7\}$; $|S_4| = \{1,4,7\}$. Здесь $|S_j|$ – множество работ, входящих в путь j, $j = \overline{1,4}$. С учетом определения $t_i^{\min}$, $i = \overline{1,7}$, и $|S_j|$ вычислим минимально возможную длину каждого пути ориентированного графа: $S_1^{\min} = 0.55+1.2+2.8+3.8 = 8.35$, по тому же принципу: $S_2^{\min} = 8.75$; $S_3^{\min} = 9.35$; $S_4^{\min} = 6.75$.

Таким образом, если каждую работу будут выполнять два исполнителя, то критическим путем будет путь S_3 и его длина с учетом формулы (2.3) будет равна:

$$S_{\text{кр}}^{\min} = 9.35.$$

Поэтому $T_{\text{н}} = 9.35$.

Для того, чтобы получить верхнюю оценку продолжительности оптимального плана, сформируем допустимое расписание с использованием эвристики, предложенной в описании метода ветвей и границ.

В момент времени $\tau = 0$ можно начать выполнять только первую работу, и для этого выделяется первый исполнитель, который заканчивает первую работу в момент времени $\tau_1 = 1$. Далее, с учетом структуры ориентированного графа, изображенного на рис. 1, начиная с момента τ_1 можно выполнять работы два, три и четыре. При условии, что работа три лежит на критическом пути, ей выделяется первый исполнитель, а работе два – второй исполнитель, так как работа два входит в первый путь, который продолжительнее четвертого пути. В момент времени $\tau_2 = 3.4$ заканчивается вторая работа и второй исполнитель передается четвертой работе. В момент времени $\tau_3 = 4$ заканчивается третья работа и первый исполнитель передается для выполнения пятой работы. В момент времени $\tau_4 = 8$ заканчивается четвертая работа и второй исполнитель начинает выполнять шестую работу. В момент $\tau = 9$ заканчивается пятая работа, а в момент времени $\tau = 14.8$ завершается выполнение шестой работы.

Работу семь оба исполнителя выполняют совместно в течение 3.8 единицы времени. Таким образом, продолжительность расписания $T_{\text{к.п}}$ равна:

$$T_{\text{к.п}} = 14.8 + 3.8 = 18.6.$$

Индекс "к.п" в $T_{\text{к.п}}$ соответствует словосочетанию "критический путь".

С учетом описанного выше метода ветвей и границ $T_{\text{в}} = 18.6$.

Сформированное расписание с использованием диаграммы Ганта будет выглядеть следующим образом (рис. 2).

З а м е ч а н и е. Здесь и далее на оси N полужирным отмечены номера работ, числа, выделенные курсивом, обозначают их длительность. Горизонтальная пунктирная линия в области шестой работы показывает, что в рассматриваемом допустимом расписании в период с момента $\tau = 9$ и до $\tau = 14.8$, пока второй исполнитель выполняет шестую работу, первый исполнитель простаивает. Вертикальные пунктирные линии в данном случае не несут какой-либо смысловой нагрузки и присутствуют просто для наглядности.

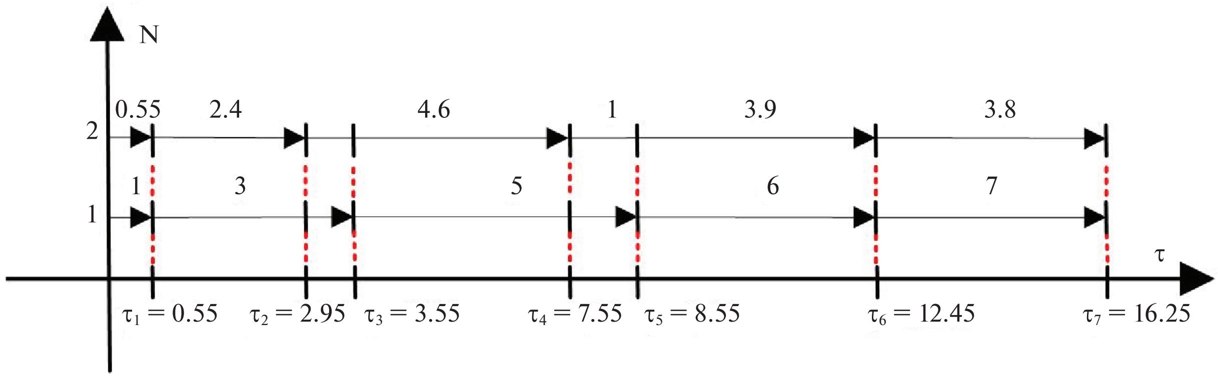

Рис. 3. Улучшенное расписание

В ситуации, если возможно в момент времени $\tau = 9$ подключить к выполнению работы шесть первого исполнителя, она будет иметь следующую продолжительность:

$$\tau_6 = 1 + \frac{5.8}{6.8} \times 3.4 = 3.9.$$

Следовательно, момент времени τ_6, в который будет завершена работа шесть, равен

$$\tau_6 = 9 + 3.9 = 12.9,$$

а все работы будут выполнены в момент

$$\tau_7 = 12.9 + 3.8 = 16.7.$$

Поэтому в качестве улучшенной верхней оценки можно принять

$$T_{\text{в}} = 16.7.$$

Расписание с длительностью $T = 16.7$ также может быть улучшено за счет того, что работе один для ее выполнения выделяются оба исполнителя. В этом случае, как было показано выше, время ее осуществления равно 0.55.

Тогда диаграмма Ганта улучшенного расписания будет выглядеть следующим образом (рис. 3).

Таким образом, при совместном выполнении двумя исполнителями работ один, семь и частично совместном выполнении работы шесть удалось снизить значение верхней оценки с $T_{\text{в}} = 18.6$ до $T_{\text{в}} = 16.25$.

Как было отмечено выше, если $T_{\text{в}} > T_{\text{н}}$, то необходим дальнейший анализ допустимых расписаний с вычислением текущих нижних оценок $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau_i)$, где τ_i – момент завершения работы с номером i, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим диаграмму Ганта при формировании второго допустимого расписания (рис. 4) и вычислим одну из текущих оценок в момент завершения работы три, выполняемой первым исполнителем при формировании второго допустимого расписания.

С учетом формулы (2.4)

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau_3 = 4.2) = 4.2 + T_{\text{н}}(\tau_3).$$

Для того, чтобы определить $T_{\text{н}}(\tau_3)$, необходимо рассчитать минимальные длительности путей S_1, S_2, S_3, S_4 с учетом полного или частичного их выполнения к моменту времени τ_3. Путь S_1 уменьшился на величину длительности первой работы в случае, если она выполнялась двумя исполнителями, поэтому $S_1^{\min}(\tau_3) = S_1^{\min} - t_1^{\min} = 8.35 - 0.55 = 7.8$.

Учитывая, что во втором и третьем пути работы один и три выполнены, получим $S_2^{\min}(\tau_3) = 8.75 - 0.55 - 1.6 = 6.6$; $S_3^{\min}(\tau_3) = 9.35 - 0.55 - 1.6 = 7.2$.

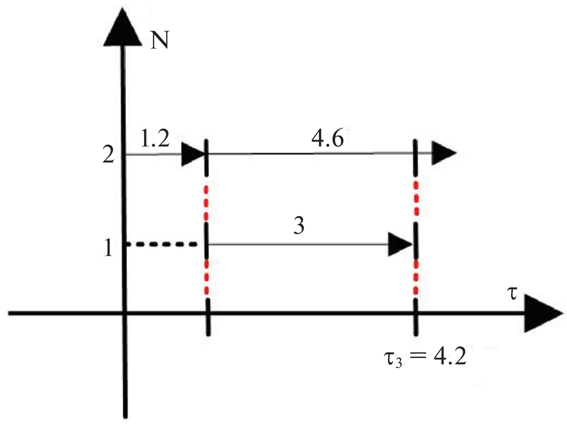

Рис. 4. Фрагмент диаграммы Ганта

Работа четыре на диаграмме Ганта (рис. 4) выполнена на три единицы. Поэтому ее остаток в долях от всей длительности составит величину Δ, которая вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta = 1 - \frac{3}{4.6} = \frac{16}{46} = \frac{8}{23}.$$

Если эту часть работы будут осуществлять исполнители один и два, то время выполнения остатка этой работы $t_4^{\min}(\tau_3)$ составит:

$$t_4^{\min}(\tau_3) = \frac{8}{23} \times 2.4 = 0.82.$$

Таким образом, $S_4^{\min}(\tau_3)$ можно вычислить как

$$S_4^{\min}(\tau_3) = 0.82 + 3.8 = 4.62.$$

С учетом предлагаемого метода ветвей и границ (шаг 3) $T_{\text{н}}^{\min}(\tau_3)$ для формируемого расписания вычисляется по формуле

$$T_{\text{н}}^{\min}(\tau_3) = \max\{S_1^{\min}(\tau_3), S_2^{\min}(\tau_3), \mathrm{S}_3^{\min}(\tau_3), S_4^{\min}(\tau_3)\} = \max\{7.8; 6.6; 7.2; 4.62\} = 7.8.$$

Следовательно, величина первой текущей нижней оценки равна

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau_3) = 4.2 + 7.8 = 12.$$

Так как $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau_3) < T_{\text{в}} = 16.25$, то формирование данного расписания должно быть продолжено.

Учитывая комбинаторный характер данного алгоритма, может быть использована усеченная схема метода ветвей и границ. Отличие этой схемы от ранее изложенной состоит в том, что на шаге 2 алгоритма и при каждой последующей корректировке $T_{\text{в}}$ вычисляется величина $T_{\text{в}} - T_{\text{н}}$. Если эта величина удовлетворяет требованию

$$T_{\text{в}} - T_{\text{н}} < \delta,$$

то полученный допустимый план выбирается в качестве оптимального. Здесь $\delta > 0$ — величина, характеризующая требуемую точность решения.

3. Управление работами проекта в условиях неопределенности и риска. В разд. 2 статьи рассмотрена задача оптимизации работ проекта по критерию быстродействия в ситуации, когда работы могут выполняться различными исполнителями за различное время. Время проведения работы исполнителем в условиях детерминированных исходных данных модели задается следующей матрицей:

$$T = (t_{ij}), \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}.$$

Здесь n – число работ, m – число исполнителей. Напомним, что каждая работа i может выполняться как одним исполнителем, так и группой исполнителей M_i, такой, что $\forall t_{ij} \in M_i$, $t_{ij} < \infty$.

Предложенный выше метод решения может определить оптимальную последовательность работ в условиях, когда элементы матрицы $T = (t_{ij})$ детерминированы. В то же время на практике часто встречаются ситуации, когда определить однозначно элементы матрицы T невозможно, тогда возможны такие варианты их количественной оценки.

1. Элементы матрицы t_{ij} могут меняться в заданных диапазонах, т.е. $t_{ij} \in [t_{ij}^1, t_{ij}^2]$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$. Здесь t_{ij}^1 – минимальное значение элемента матрицы t_{ij}, а t_{ij}^2 – максимальное значение элемента матрицы t_{ij} и, кроме того, t_{ij} может принимать любое значение из диапазона $[t_{ij}^1, t_{ij}^2]$.

2. Среди элементов матрицы T существует некоторое ее подмножество элементов $T' \subseteq T$, обладающих тем свойством, что их величина может получать приращение $\varepsilon > 0$.

3. Элементы матрицы t_{ij} есть случайные величины с известным законом распределения, полученным или на основе накопленной статистики, или путем экспертных оценок. При этом эксперты могут использовать свои знания о проектах-аналогах [24].

Ниже будут изучены некоторые подходы к оптимизации управления работами проектов в рассмотренных ситуациях.

3.1. Интервальное задание времени осуществления работы исполнителями. В ситуации, когда $t_{ij} \in [t_{ij}^1, t_{ij}^2]$ и задано множество исполнителей M_i, которые могут выполнить работу i, вообще говоря, за различное время, продолжительность работы i будет меняться в интервале

$$\tau_i \in \left[\frac{1}{\sum\limits_{j\in M_i} \frac{1}{t_{ij}^1}}; \frac{1}{\sum\limits_{j\in M_i} \frac{1}{t_{ij}^2}} \right]. \tag{3.1}$$

Соответственно с учетом формулы (3.1) продолжительность любого расписания R_e, $e = \overline{1,L}$, будет также изменяться в интервале $[T_e^1, T_e^2]$. Здесь T_e^1 и T_e^2 – минимальная и максимальная продолжительность расписания R_e. Если работы не прерываемы, то, как было доказано в [4], длительность любого допустимого расписания может быть представлена в виде следующей формулы:

$$T_k = \sum_{i\in F_k} \tau_i. \tag{3.1.1}$$

Здесь F_k – подмножество работ исходного множества работ проекта F, т.е. $F_k \subseteq F$.

Таким образом, определяя для каждой работы i множество исполнителей M_i, мы находим диапазон длительности работы i в ситуации, если элементы матрицы времени выполнения работы T заданы интервально. Соответственно длительность каждого расписания также задана интервально.

Возникает вопрос: как выбрать из множества допустимых расписаний кратчайшее?

Существует одна ситуация, когда этот выбор очевиден: например, если существует расписание K, такое, что $T_k^2 \le T_j^1$; $j = \overline{1,L}$; $j \ne k$. Здесь L – число всех возможных допустимых расписаний. Очевидно, что расписание R_k будет оптимальным при любых значениях $t_{ij} \in [t_{ij}^1, t_{ij}^2]$.

В остальных случаях для нахождения одного (или нескольких) оптимальных расписаний необходимы дополнительные исследования. Сформируем множество расписаний, которые при некоторых значениях $t_{ij} \in [t_{ij}^1, t_{ij}^2]$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, могут быть оптимальными. Для этого зададим $T_p^1 = \min\limits_{j=\overline{1,L}} T_j^1$ и включим расписание R_p в множество потенциально оптимальных расписаний $O_{\text{опт}}$. Расписание называется потенциально оптимальным, если существуют длительности работ из области допустимых значений, при которых данное расписание оптимально.

Определим $T_q^2 = \min\limits_{j=\overline{1,L}} T_j^2$ и включим расписание R_q в множество $O_{\text{опт}}$. И, наконец, включим в множество $O_{\text{опт}}$ все те расписания, у которых $T_j^1 < T_q^2$, $j = \overline{1,L}$.

Далее, так как в $O_{\text{опт}}$ входят все расписания, которые потенциально могут быть оптимальными, выделим среди допустимых планов $O_{\text{опт}}$ план $R_m \in O_{\text{опт}}$ и зададим множество, на котором может изменяться время выполнения работы исполнителями, при котором R_m будет оптимальным, следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} t_{ij}^1 \le t_{ij} \le t_{ij}^2; \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}; \\ \sum\limits_{i \in F_m} \dfrac{1}{\sum\limits_{j \in M_i^m} \dfrac{1}{t_{ij}}} \le \sum\limits_{i \in F_k} \dfrac{1}{\sum\limits_{j \in M_i^k} \dfrac{1}{t_{ij}}}, \quad k = \overline{1,L_1}, \end{cases} \tag{3.2}$$

где F_k – подмножество работ, сумма длительностей которых определяет продолжительность расписания R_k, M_i^k – множество исполнителей, выполняющих работу i в расписании k ($i = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,L_1}$). Здесь L_1 – число потенциально оптимальных расписаний.

Аналогично формуле (3.2) может быть определена область изменения t_{ij} для любого другого плана $R_i \in O_{\text{опт}}$.

Таким образом, предложен механизм формирования всех возможных оптимальных расписаний при изменении длительностей выполнения работ исполнителями в диапазоне $t_{ij}^1 \le t_{ij} \le t_{ij}^2$ и для каждого такого оптимального расписания выделена область изменения времени выполнения каждой работы исполнителем, в которой данное расписание остается оптимальным. Такие области изменения времени осуществления работ исполнителями для расписания называют еще областями устойчивости этих расписаний [4].

3.2. Планирование выполнения работ проекта в условиях увеличения длительностей работ. Рассмотрим ситуацию, когда среди элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, существует некоторое подмножество элементов $T' \subseteq T$, обладающих тем свойством, что если $t_{ij} \in T'$, то величина этого элемента может увеличиться на некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим, как будет реагировать оптимальное расписание на увеличение значений элементов $t_{ij} \in T'$.

Отметим, что в этом случае длительность работы i при выполнении ее исполнителями множества M_i с учетом формулы (2.2) вычисляется следующим образом:

$$t_i(M_i) = \frac{1}{\sum\limits_{j \in M_i} \dfrac{1}{t_{ij} + \Delta_{ij}}}; \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } t_{ij} \in T'; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В определении величины Δ_{ij} через T' обозначено множество возмущенных элементов матрицы T ($T' \subseteq T$), т.е. таких элементов, величина которых может возрасти на число $\varepsilon > 0$. Источником подобных возмущений может выступать как окружающая, так и внутренняя среда проекта [25].

Рассмотрим ситуацию, когда работу i могут выполнять два исполнителя и длительность выполнения работы i первым и вторым исполнителем по отдельности составляет t_{i1} и t_{i2}. Если $t_{i1} \in T'$ и $t_{i2} \in T'$, то с учетом формул (2.2) и (3.3) получим

$$t_i(M_i) = \frac{1}{\dfrac{1}{t_{i1} + \varepsilon} + \dfrac{1}{t_{i2} + \varepsilon}}. \tag{3.4}$$

Здесь в множество M_i входят первый и второй исполнители.

Преобразуя правую часть формулы (3.4), найдем

$$t_i(M_i) = \frac{(t_{i1} + \varepsilon)(t_{i2} + \varepsilon)}{t_{i1} + t_{i2} + 2\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Из формулы 3.5 следует, что предел длительности работы $t_i(M_i)$ в этом случае равен

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} t_i(M_i) = \frac{(t_{i1} + \varepsilon)(t_{i2} + \varepsilon)}{t_{i1} + t_{i2} + 2\varepsilon} = \infty.$$

Из рассмотренного примера, в частности, следует, что при выполнении работ несколькими исполнителями интенсивность роста длительности работы i при увеличении ε определяется тем, сколько элементов Δ_{ij} в формуле (3.3) положительны. Учитывая, что длительность расписания R_i для непрерываемых работ задается суммарной длительностью некоторого подмножества работ F_i, получим, что длительность работы e расписания R_q τ_e^q вычисляется с помощью следующего выражения:

$$\tau_e^q = \frac{1}{\sum\limits_{j \in M_e^q} \frac{1}{t_{ej} + \Delta_{ej}}}, \tag{3.6}$$

где M_e^q – множество исполнителей, выполняющих работу e в расписании R_q, величина Δ_{ej} равна ε (величина возмущения), если t_{ej} является элементом T' (множество возмущенных элементов $T' \subseteq T$) и нулю – в противном случае.

Введем показатель, характеризующий число элементов t_{ej} из T' в правой части выражения (3.6):

$$W_{ej}^q = \begin{cases} 1, & \text{если в календарном плане } R_q \text{ работу } e \text{ выполняет исполнитель } j \text{ и } t_{ej} \in T'; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.7}$$

С учетом формулы (3.7) число ненулевых элементов Δ_{ej} в правой части выражения (3.6) Ω_e^q может быть вычислено следующим образом:

$$\Omega_e^q = \sum_{j \in M_e^q} W_{ej}^q. \tag{3.8}$$

С использованием формулы (3.8) определим для каждого расписания R_q величину V_q по следующей формуле:

$$V_q = \max_{e \in F_q} \Omega_e^q.$$

Здесь F_q – подмножество работ проекта, суммарная длительность которых задает продолжительность плана R_q. Очевидно, что V_q определяет максимальную степень полинома от ε, выражающего длительность расписания, как величину, зависящую от параметра ε.

Расписание с наименьшим значением V_q вычисляется с помощью формулы

$$V_e = \min_{q = \overline{1, L}} V_q,$$

где L – число допустимых расписаний.

Расписание R_e обладает тем свойством, что, начиная с некоторого положительного числа ε', для всех значений возмущений $\varepsilon' < \varepsilon < \infty$ оптимальным расписанием будет расписание R_e. Это объясняется тем, что степень полинома от ε, задающего его длительность, будет наименьшей по сравнению с другими расписаниями.

С учетом формул (3.1.1) и (3.5) продолжительность каждого расписания R_q, $q = \overline{1,L}$, T_q в ситуации, когда существует множество возмущенных элементов $T' \subseteq T$, может быть представлена как функция параметров t_{ij}, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, и ε, т.е.

$$T_q = f_q(t_{ij}, \varepsilon); \quad q = \overline{1,L}.$$

Согласно (3.5), $f_q(t_{ij}, \varepsilon)$ есть сумма дробных функций, в знаменателе и числителе которых стоят многочлены от t_{ij} и ε. При этом степень многочлена по ε в числителе всегда больше, чем степень многочлена по ε в знаменателе (следствие формулы (3.5)), при росте ε:

$$\frac{df_q(t_{ij}, \varepsilon)}{d\varepsilon} > 0$$

для всех ε начиная с некоторого $\varepsilon > \varepsilon^*$.

Учитывая нелинейный рост длительности T_q от ε и непрерывность функций $f_k(t_{ij}, \varepsilon)$ по ε, проанализируем, как меняется оптимальное расписание при росте ε. Рассмотрим значение функций $f_q(t_{ij}, \varepsilon)$ в условиях отсутствия возмущения ε, т.е. при $\varepsilon = 0$. Пусть оптимальным в этих условиях будет план R_e. Рассмотрим уравнения от ε:

$$f_e(\varepsilon) = f_j(\varepsilon), \quad j = \overline{1,L}, \quad j \neq e. \tag{3.9}$$

Пусть ε_j – минимальное положительное решение уравнения (3.9). Выберем $\varepsilon_k = \min\limits_{j=\overline{1,L}} \varepsilon_j$. Следовательно, на интервале увеличения $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$ оптимальным будет расписание R_e. Начиная со значения $\varepsilon > \varepsilon_k$, оптимальным будет расписание R_k. Решая уравнения (3.9) на области увеличения $\varepsilon > \varepsilon_k$ и выбирая минимальное положительное решение $\varepsilon_p (\varepsilon_p > \varepsilon_k)$, определим зону увеличения ε для оптимального расписания R_k и далее для оптимального расписания R_p.

Таким образом, если известен диапазон увеличения возмущения $0 \le \varepsilon \le D$, то интервал $(0, D)$ может быть разбит на отрезки, характеризующиеся тем, что при увеличении возмущения ε в рамках фиксированного отрезка оптимальное расписание не меняется. Область увеличения возмущения ε, на которой фиксированное расписание остается неизменным, называют областью устойчивости расписания.

Рассмотрим пример использования предлагаемой методики определения области устойчивости расписания. Пусть для реализации проекта необходимо сделать три работы. Работы могут выполняться в любой последовательности двумя исполнителями. Матрица времени выполнения работы исполнителем T задана следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 2 & 2.4 \\ 3 & 3.2 \end{pmatrix}.$$

В множество возмущенных элементов $T' \subseteq T$ включен один элемент $T' = \{t_{22}\}$. Рассмотрим два расписания в ситуации, когда $\varepsilon = 0$, и изобразим соответствующие диаграммы Ганта (рис. 5, 6):

Согласно плану R_1, каждая работа выполняется двумя исполнителями, поэтому их длительности соответственно равны: $t_1 = 1/((1/1) + (1/1.2)) = 0.55$; $t_2 = 1.2$; $t_3 = 1.6$. Длина первого расписания

$$T_1 = 0.55 + 1.2 + 1.6 = 3.35.$$

Согласно плану R_2, вначале выполняется двумя исполнителями работа один, затем первый исполнитель осуществляет работу два, а второй исполнитель – работу три. Соответственно длина второго расписания

$$T_2 = 0.55 + 3.2 = 3.75.$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ оптимальным является план R_1.

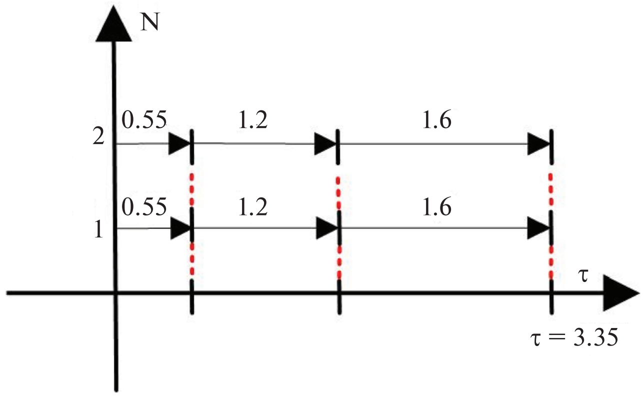

Рис. 5. Диаграмма Ганта для первого расписания R_1

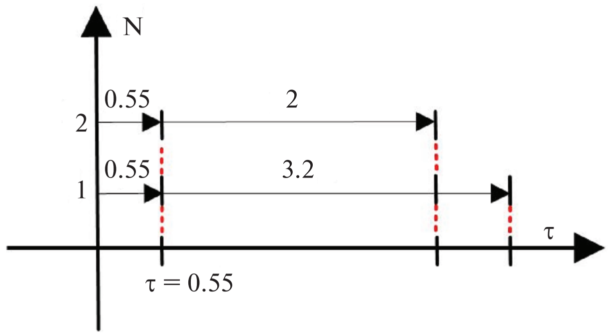

Рис. 6. Диаграмма Ганта для второго расписания R_2

Согласно формуле (3.3), длина расписания R_1 при наличии возмущения ε составит:

$$T_1(\varepsilon) = 0.55 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4 + \varepsilon}} + 1.6 = 2.15 + \frac{4.8 + 2\varepsilon}{4.4 + \varepsilon}$$

и $T_2(\varepsilon)$ с учетом того, что в него не входят элементы из T':

$$T_2 = 3.75.$$

Приравняем значения $T_1(\varepsilon)$ и $T_2(\varepsilon)$: $3.75 = 2.15 + (4.8 + 2\varepsilon)/(4.4 + \varepsilon)$. Отсюда $\varepsilon = 5.5$. Следовательно, расписание R_1 оптимально, если величина возмущения ε не превышает числа 5.5, т.е. $0 \le \varepsilon \le 5.5$, расписание R_2 оптимально, если $\varepsilon > 5.5$.

3.3. Стохастическое задание продолжительности работ проекта. Рассмотрим ситуацию, когда длительности выполнения работ проекта t_{ij}, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, являются случайными величинами с заданным законом распределения, т.е.

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij1} & p_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ t_{ijQ} & p_Q \end{bmatrix}.$$

Здесь p_k, $k = \overline{1, Q}$, – вероятность того, что длительность выполнения работы i исполнителем j равна t_{ijk}, $\sum_{k=1}^{Q} P_k = 1$, $p_k \ge 0$.

В этом случае можно в качестве времени выполнения работы исполнителем принять его математическое ожидание, т.е.

$$t_{ij} = \overline{t_{ij}} = \sum_{k=1}^{Q} t_{ijk} p_k.$$

Далее для определения оптимального плана выполнения работ можно использовать метод ветвей и границ, предложенный в статье. Также будем считать, что работы не прерываемы и каждая выполняется одним исполнителем.

Учитывая, что продолжительность выполнения работ каждым исполнителем задана как случайная величина, длительность каждого расписания также будет случайной величиной. Для непрерываемых работ продолжительность каждого расписания R_k может быть представлена суммой продолжительностей работ некоторого подмножества работ $F_k \subseteq F$ [4] (здесь F – множество всех работ проекта). Определим риск расписания, согласно [22], как дисперсию длительности всех работ, входящих в F_k:

$$W_k = \sum_{i \in F_k} \sigma_i^2 d_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j \in F_k \\ i < j}} C(i, j)\, d_i d_j, \tag{3.10}$$

где σ_i^2 – дисперсия продолжительности работы с номером i; $C(i, j)$ – ковариация продолжительностей работ с номерами i и j ($i \in F_k$; $j \in F_k$; $i < j$); W_k – количественная оценка риска расписания, оцениваемого как дисперсия длительностей работ множества F_k с учетом их выполнения одним исполнителем.

Показатель d_i, задающий долю длительности работы в длине расписания, определяется следующим образом:

$$d_i = \frac{\overline{\tau_i}}{\sum_{j \in F_k} \overline{\tau_j}}, \tag{3.11}$$

где $\overline{\tau_i}$ – математическое ожидание длительности работы $i \in F_k$ с учетом ее выполнения одним или несколькими исполнителями; $\sum_{j \in F_k} \overline{\tau_j}$ – суммарное математическое ожидание длительностей работ, входящих в F_k.

Таким образом, в условиях задания элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, как случайных величин с заданным распределением вероятностей, эффективность каждого расписания выполнения работ проекта может быть определена по двум критериям:

1) математическое ожидание длительности выполнения работ расписания;

2) риск расписания, оцениваемый как дисперсия продолжительности расписания.

Рассмотрим пример оценки эффективности расписания в условиях стохастического задания времени выполнения работы исполнителями. Пусть для реализации проекта необходимо выполнить три работы. Работы можно выполнять в любой последовательности. Выполнять работы будут два исполнителя, у которых время выполнения работы t_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) является случайной величиной, распределение которой дается следующей таблицей 1.

Приведем следующее расписание выполнения работ проекта: вначале оба исполнителя выполняют работу один, затем второй исполнитель делает работу два, а первый исполнитель работу три. Диаграмма Ганта для такого расписания представлена на рис. 7.

Как отмечалось выше, эффективность расписания в ситуации стохастической матрицы времени выполнения работы исполнителем T определяется двумя показателями: математическим ожиданием длительностей работ и риском расписания, оцениваемым как волатильность его длительности.

Рассчитаем математическое ожидание длительности расписания. Для этого вычислим математическое ожидание длительности при выполнении работ один, два и три.

Таблица 1. Время выполнения работ исполнителями проекта

Вероятность	Элементы матрицы T					
	t_{11}	t_{12}	t_{21}	t_{22}	t_{31}	t_{32}
1/2	1.0	1.2	2.0	2.4	3	3.3
1/3	0.9	1.1	2.1	2.3	3.2	3.4
1/6	1.3	1.4	1.9	2.2	2.9	3.2

Обозначим соответствующие возможные значения длительности первой работы через τ_{11}, τ_{12}, τ_{13}, заданные с вероятностью $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/6$: $\tau_{11} = 1/((1/1) + (1/1.2)) = 0.55$. Аналогично $\tau_{12} = 0.51$; $\tau_{13} = 0.68$. Следовательно, математическое ожидание длительности выполнения работы один при условии ее реализации исполнителями один и два равно:

$$\overline{t_1} = 0.55 \times \frac{1}{2} + 0.51 \times \frac{1}{3} + 0.68 \times \frac{1}{6} = 0.56.$$

Соответственно, математическое ожидание длительностей работ два и три при условии, что работу два выполняет второй исполнитель, а работу три – первый исполнитель, равно:

$$\overline{t_2} = 2.4 \times \frac{1}{2} + 2.3 \times \frac{1}{3} + 2.2 \times \frac{1}{6} = 2.35;$$

$$\overline{t_3} = 3 \times \frac{1}{2} + 3.2 \times \frac{1}{3} + 2.9 \times \frac{1}{6} = 3.1.$$

Из диаграммы Ганта на рис. 7 следует, что математическое ожидание расписания $\overline{T}$ равно:

$$\overline{T} = 0.56 + 3.1 = 3.66.$$

Величина T складывается из ожидаемого времени выполнения работы один двумя исполнителями и ожидаемого времени выполнения работы три первым исполнителем.

Таким образом, $F_1 = \{1, 2\}$, $F_3 = \{1\}$, где F_1 и F_3 соответственно задают множества исполнителей, выполняющих первую и третью работы.

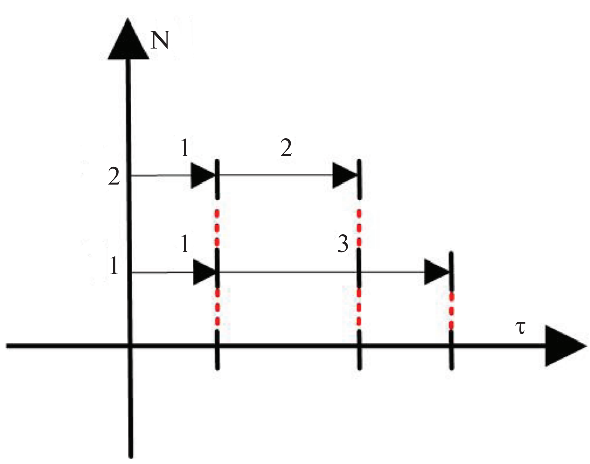

Рис. 7. Диаграмма Ганта при выполнении трех работ проекта

Воспользуемся формулой (3.10) для оценки риска предложенного расписания:

$$\sigma_1^2 = \sum_{k=1}^{Q} (\overline{t_1} - \tau_{1k})^2 p_k = (0.56 - 0.55)^2 \times \frac{1}{2} + (0.56 - 0.51)^2 \times \frac{1}{3} + (0.56 - 0.68)^2 \times \frac{1}{6} = 0.0033;$$

$$\sigma_3^2 = \sum_{k=1}^{Q} (\overline{t_3} - \tau_{3k})^2 p_k = (3.1 - 3)^2 \times \frac{1}{2} + (3.1 - 3.2)^2 \times \frac{1}{3} + (3.1 - 2.9)^2 \times \frac{1}{6} = 0.015.$$

Рассчитаем d_1 и d_3 с учетом формулы (3.11):

$$d_1 = \frac{0.56}{3.66} = 0.16;$$

$$d_3 = \frac{3.1}{3.66} = 0.84.$$

Вычислим ковариацию длительностей работ один и три:

$$C(i, j) = \sum_{k=1}^{Q} (\overline{t_1} - \tau_{1k})(\overline{t_3} - \tau_{3k}) p_k;$$

$$C(1,3) = (0.56 - 0.55)(3.1 - 3) \times \frac{1}{2} + (0.56 - 0.51)(3.1 - 3.2) \times$$
$$\times \frac{1}{3} + (0.56 - 0.68)(3.1 - 2.9) \times \frac{1}{6} = -0.005.$$

Подставив полученные значения в формулу (3.10), получим количественную оценку риска предложенного расписания:

$$w = 0.0033 \times 0.16^2 + 0.015 \times 0.84^2 - 2 \times 0.005 = 0.0007.$$

Таким образом, для сформированного расписания математическое ожидание его продолжительности $\overline{T} = 3.66$ единицы времени, а риск расписания (его волатильность) $w = 0.0007$.

Что же касается допустимой величины риска, то, по всей видимости, уровень риска является субъективной величиной, т.е. каждый инвестор самостоятельно определяет допустимый уровень риска, хотя и существуют наиболее распространенные характеристики уровня риска проекта, являющиеся по сути универсальными [26].

Полученную двухкритериальную оценку плана можно сравнить с подобными оценками для других допустимых расписаний и, используя методы сведения многокритериальных оценок к одному критерию, выбрать наилучший вариант.

Заключение. Основное внимание было уделено рассмотрению подходов к оптимизации управления проектами в сфере логистики в условиях неточного задания длительностей работ. Объективное существование неопределенности и риска – неотъемлемый компонент любой экономической деятельности [27], при этом одной из причин низкой степени осознания менеджером необходимости эффективно управлять рисками в рамках всей организации является сложность идентификации и измерения риска при принятии решений [28].

На сегодняшний день проблема риска стала предметом как общетеоретических, так и ориентированных на практику исследований, в том числе и в России. Анализируя современное развитие общества, можно говорить о том, что сложность социально-экономического взаимодействия неуклонно возрастает, что ведет к пропорциональному росту неопределенности в организационно-экономических и социально-экономических системах, способной повлиять на механизм реализации взаимодействия между субъектами систем. В свою очередь рост неопределенности, достигая некоторого критического уровня, может повлиять не только на механизм взаимодействия в системе, но и поставить вопрос о дальнейшем ее существовании как целостной структуры [29]. Данное рассуждение в значительной степени применимо и к системам логистики.

Показателем того, что факторы неопределенности и риска продолжают играть существенную роль при оценке эффективности сложных систем, является то, что за последние несколько десятилетий целый ряд работ именно в этой области был отмечен нобелевскими премиями (в том числе К. Эрроу, Г. Марковиц, У. Шарп, Дж. Акерлоф, Ф. Найт) [30].

Ввиду того, что степень неопределенности той среды, в которой современные предприятия осуществляют свою деятельность, имеет скорее тенденцию к росту, чем к снижению, интерес к подобным исследованиям выглядит вполне закономерным. Следовательно, потребность в создании и совершенствовании методик, позволяющих учесть и минимизировать риск и неопределенность в процессе управления проектами, также будет скорее всего возрастать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. *Мищенко А.В., Халиков М.А.* Распределение ограниченных ресурсов в задаче оптимизации производственной деятельности предприятия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6.
3. *Мищенко А.В., Пилюгина А.В.* Динамические модели управления научно-производственными системами // Вестн. МГТУ им. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 2.
4. *Мищенко А.В., Сушков Б.Г.* Задача оптимального распределения ресурсов на сетевой модели при линейных ограничениях на время выполнения работ // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 10. № 5.
5. *Мищенко А.В., Когаловский В.М.* Проблемы устойчивости задач производственного планирования в машиностроении // Экономика и мат. методы. 1992. № 3.
6. *Мищенко А.В.* Устойчивость решений в задаче перераспределения транспортных средств в случае экстренного закрытия движения на участке метрополитена // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 3.
7. *Мищенко А.В.* Задача распределения транспортных средств по автобусным маршрутам при неточно заданной матрице корреспонденций пассажиропотока // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 2.
8. *Катюхина О.А., Мищенко А.В.* Динамические модели управления транспортными ресурсами на примере организации работы автобусного парка // Аудит и финансовый анализ. 2016. № 2. С. 156–167.
9. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 34–37.
10. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3.
11. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах с нефиксированными параметрами // Некоторые алгоритмы планирования вычислений и организации контроля в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 40–51.
12. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Transport-type Problems with a Criterion // АиТ. 1995. № 12. С. 109–118.
13. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Наследственно-минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 6. С. 104–121.
14. *Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I.* Minimax Estimations of Expectates of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. Т. 8. № 2. С. 216–226.
15. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
16. *Tizik A.P., Tsurkov V.I.* Iterative Functional Modification Method for Solving a Transportation Problem // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. № 1. P. 134–143.
17. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Hereditarily Minimax Matrices in Models of Transportation Type // J. Computer and Systems Sciences International. 1998. V. 37. № 6. P. 927–944.
18. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 2003. V. 42. № 4. P. 562–574.
19. *Светлов Н.М., Светлова Г.Н.* Информационные технологии управления проектами. М.: ФГОУ ВПО РГАУ–МСХА им. К.А. Тимирязева, 2007. С. 6.
20. *Баркалов С.А., Воропаев В.И., Секлетова Г.И. и др.* Математические основы управления проектами / Под ред. В.М. Буркова. М.: Высш. шк., 2005.
21. *Мищенко А.В.* Методы управления инвестициями в логических системах. М.: ИНФРА-М, 2009.
22. *Секерина А.Б.* Риск-менеджмент инвестиционного проекта / Под ред. Грачевой М.В. М.: Юнити-Дана, 2009.

23. *Танаев В.С., Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. М.: Наука, 1975. 256 с.
24. *Ильин Н.И., Лукманова И.Г., Немчин А.М., Никешин С.Н., Петрова С.Н., Романова К.Г., Шапиро В.Д.* Управление проектами. СПб.: ДваТри, 1996. С. 187.
25. *Разу М.Л., Якутин Ю.В., Разу Б.М., Бронникова Т.М., Титов С.А.* Управление проектом: основы проектного управления / Под ред. М.Л. Разу. М.: Компания КноРус, 2006.
26. *Иванов В.В., Ковалев В.В., Лялин В.А.* Инвестиции. М.: ТК Велби, 2003.
27. *Кузовлева И.А., Марченко Д.С.* Управление рисками и неопределенностью при оценке эффективности девелоперского проекта // ФӘН-Наука. 2012. № 8. С. 26–28.
28. *Россошанская О.В., Рач Д.В.* Риск как категория компетентностного похода в управлении проектами // Управление проектами и развитие производства. 2009. № 2. С. 1–9.
29. *Кузьмин Е.А.* Неопределенность в экономике: понятия и положения // Вопросы управления. 2012. № 2. С. 80–92.
30. *Евстратов Р.М.* Неопределенность, вероятность, действие как главные составляющие предпринимательского риска // Основы экономики, управления и права. 2013. № 1. С. 58–61.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 111–118

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.865.8+620.3

УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ТУННЕЛЬНОГО МИКРОСКОПА

© 2021 г. В. А. Карташев[a],*, В. В. Карташев[a]

[a] *ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kart@list.ru*

Поступила в редакцию 22.05.2020 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Визуализация измерений нанорельефа сканирующим туннельным микроскопом является встроенной функцией системы управления, которая учитывает особенности работы прибора. Для улучшения различимости мелких образований измерения проектируют на подстилающую плоскость, которую выбирают таким образом, чтобы перепад высот всего набора точек оказался как можно меньше. Относительная высота точки рельефа визуализируется с помощью метода градиентной закраски. В работе предложен способ увеличения точности представления результатов измерений, который основан на использовании штатных функций программного обеспечения системы управления. Результаты экспериментов показывают, что предложенное решение существенно улучшает различимость мелких деталей нанорельефа.

DOI: 10.31857/S0002338821030082

Введение. Сканирующий туннельный микроскоп представляет собой устройство, которое позволяет измерять рельеф поверхности с точностью до долей нанометра. Он состоит из трехстепенного манипулятора, на конце которого закреплен зонд в виде иглы с радиусом закругления острия порядка 1 нм. Основная область его применения – получение изображения нанообразований и их структур на поверхности исследуемого образца с максимально возможным разрешением.

Система управления обеспечивает перемещение иглы, расположенной на конце пьезоманипулятора, на расстоянии туннельного зазора от исследуемой поверхности. Туннельный зазор – это зазор, который преодолевают туннелирующие электроны, при приложении разности потенциалов между измеряемой поверхностью образца и иглой.

Измерения проводятся в узлах сетки, шаг которой может быть задан до десятых долей нанометра. В результате измерений получается двумерный массив расстояний от иглы до высот поверхности.

Второй функцией системы управления микроскопом является визуализация нанорельефа. Наличие этой функции обусловлено необходимостью учета при интерпретации измерений технологических особенностей реализации движения иглы и условий протекания туннельного тока. Кроме этого, важна возможность оперативной оценки качества проведенных измерений. Функция визуализации должна обеспечить наглядное и достоверное представление результатов измерений в виде графического образа отсканированной поверхности.

До последнего времени функция графической визуализации результатов измерений была достаточно простой. Она обеспечивала представление измерений в виде проекции на двумерную плоскость, в которой высота точки кодируется с использованием метода градиентной закраски [6]. Более точное представление результатов измерений было нецелесообразно в виду того, что не существовало способа измерения размеров острия иглы.

Задача определения формы и размеров острия иглы была успешно решена в работах [1–3]. В [4, 5] сформулированы необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять поверхность нанорельефа для того, чтобы она совпала с поверхностью, полученной с помощью алгоритма обработки измерений, предложенного в [1–3]. В основе их лежит условие достижимости каждой точки рельефа для касания туннельной оболочкой острия иглы. В работе [2] продемонстрированы возможности по устранению погрешностей измерений, вызванных гистерезисом пьезодвигателей. Эти результаты служат основанием для дальнейшего развития метода представления измерений путем проекции на плоскость.

1. Метод градиентной закраски. Основным способом выделения структуры рельефа поверхности на изображении является раскрашивание участков двумерного изображения массива высот поверхности (скана) в цвет, который определяется относительной высотой расположения участка.

Наибольшее распространение получила палитра из четырех цветов, схожая с той, которая применяется в географических картах (синий, зеленый, желтый и красный, причем синий цвет соответствует наиболее низко расположенным точкам) [6–10]. Достаточно часто пользователю предоставлена возможность самостоятельно выбирать палитру и число основных цветов в ней [7, 9].

Расширенный набор основных цветов позволяет точнее передавать структуру рельефа поверхности. При ограниченном наборе цветов трудно выделить мелкие объекты в силу того, что при небольшом перепаде высот изменения яркости трудно различимы для глаза.

2. Построение подстилающей плоскости. Обозначим через $OXYZ$ систему координат, в которой проводились измерения. Точка O – точка начала измерений. Ось OZ направлена вдоль оси зонда вверх, ось OX – вдоль линии сканирования, ось OY образует с ними правую тройку.

Улучшить различимость мелких объектов можно, если использовать для проекции такую плоскость, относительно которой перепад высот точек массива измерений минимален. Отношение размеров мелких объектов к общему перепаду высот окажется существенно большим, вследствие чего станет возможным наблюдать такие объекты, которые ранее не были различимы. В дальнейшем плоскость, используемая для проекции, называется подстилающей.

В программном обеспечении туннельных микроскопов подстилающая плоскость ищется путем решения задачи, в которой вместо кратчайшего расстояния до плоскости минимизируется среднеквадратичное отклонение [6]. Коэффициенты a, b и d выбираются такими, которые минимизируют вертикальное среднеквадратичное отклонение точки от плоскости:

$$\sum_{ij}(z_{ij} - (ax_{ij} + by_{ij} + d))^2 \to \min_{a,b,d}. \tag{2.1}$$

Здесь z_{ij} – измеренное значение поверхности рельефа в узле сетки, x_{ij}, y_{ij} – координаты узлов. Суммирование идет по всем узлам.

Распространенность такого подхода объясняется простотой решения задачи (2.1), которая сводится к нахождению корней системы линейных уравнений третьего порядка [6]. Достоинством критерия (2.1) является то, что для всех видов нанорельефа получаемое изображение соответствует реальности.

Этим свойством обладают далеко не все критерии. Например, известный критерий минимизации среднеквадратичного расстояния [11]

$$\sum_{ij}(\alpha x_{ij} + \beta y_{ij} + \gamma z_{ij} + \delta)^2 \to \min_{\substack{a,\beta,\gamma,\delta \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1}}, \tag{2.2}$$

в котором абсолютная величина выражения $\alpha x_{ij} + \beta y_{ij} + \gamma z_{ij} + \delta$ равна расстоянию от точки с координатами $(x_{ij}, by_{ij}, z_{ij})$ до плоскости, задаваемой уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. При значительном перепаде высот задача (2.2) может привести к вертикальной плоскости. Например, нетрудно убедиться в том, что она является решением для цилиндрической поверхности с образующей, параллельной плоскости измерения, и основанием в виде верхней половины эллипса, вертикальная h и горизонтальная w полуоси которого удовлетворяют неравенству $h \gg w$.

Распознать случай, в котором получена вертикальная подстилающая плоскость, по изображению достаточно сложно в силу того, что пользователю неизвестно, какая картинка должна получиться.

В выражении (2.1) $|z_{ij} - (ax_{ij} + by_{ij} + d)|$ является длиной вертикального отрезка, заключенного между точкой измерения $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ и подстилающей плоскостью. Его длина зависит от выбора системы координат, в которой решается задача (2.1). Длину отрезка в системе координат $OXYZ$ обозначим через μ_{0ij}:

$$\mu_{0ij} = |z_{ij} - (ax_{ij} + by_{ij} + d)|.$$

Левая часть выражения (2.1) представляет собой функцию $I_0(a, b, d)$, вычисляемую в той же системе координат:

$$I_0(a,b,d) = \sum_{ij} \mu_{0ij}^2.$$

Обозначим через $I_0^* = I_0(a_0, b_0, d_0)$ значение функции $I_0(a, b, d)$, полученное в результате решения задачи (2.1) в системе координат $OXYZ$. Здесь a_0, b_0, d_0 – значения переменных a, b, d, при которых достигается минимальное значение функции. В системе координат $OXYZ$ они являются коэффициентами уравнения подстилающей плоскости P_0, заданной уравнением $z_0 = a_0x + b_0y + d_0$.

Покажем, что в подходящей системе координат решение задачи (2.1) приводит к меньшей величине, чем I_0^*.

3. Итерационный метод нахождения подстилающей плоскости. Обозначим через ν_{0ij} и ν_{1ij} расстояния от точки измерений $M_{ij}(x_{0ij}, y_{0ij}, z_{0ij})$ до плоскости $OXYZ$ и подстилающей плоскости P_0 соответственно. Имеет место неравенство $\nu_{1ij} < \mu_{0ij}$. Из него следует, что

$$\sum_{ij} \nu_{1ij}^2 < \sum_{ij} \mu_{0ij}^2 = \sum_{ij} (z_{0ij} - (a_0x_{0ij} + b_0y_{0ij} + d_0))^2 = I_0^*.$$

В системе координат $OXYZ$

$$\sum_{ij} \nu_{0ij}^2 = I_0(0,0,0)$$

в силу того, что $\nu_{0ij} = |z_{ij}|$. Значение $I_0^* = I_0(a_0, b_0, d_0)$ получено в результате решения минимизационной задачи (2.1), поэтому $I_0(0, 0, 0) < I_0^*$. В результате

$$\sum_{ij} \nu_{1ij}^2 < \sum_{ij} \mu_{0ij}^2 = \sum_{ij} (z_{0ij} - (a_0x_{0ij} + b_0y_{0ij} + d_0))^2 < \sum_{ij} \nu_{0ij}^2.$$

Повторим описанную процедуру далее в соответствии с алгоритмом, который изображен на рис 1. На шаге n вводится система координат $O_nX_nY_nZ_n$, связанная подстилающей плоскостью P_{n-1}, которая была найдена на предыдущем шаге работы алгоритма: $O_nX_n \in P_{n-1}$, $O_nY_n \in P_{n-1}$, $O_nZ_n \perp P_{n-1}$. В блоке 1 решается минимизационная задача (2.1) и находятся коэффициенты a_n, b_n, d_n уравнения подстилающей плоскости P_n.

Затем строится система координат $O_{n+1}X_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1}$, связанная с плоскостью P_n. В качестве начала координат O_{n+1} берется произвольная точка подстилающей плоскости. Взаимно перпендикулярные оси $O_{n+1}X_{n+1}$ и $O_{n+1}Y_{n+1}$ лежат в подстилающей плоскости, ось $O_{n+1}Z_{n+1}$ перпендикулярна к ней. Для того, чтобы сохранить ориентацию изображения на подстилающей плоскости, целесообразно направить ось $O_{n+1}X_{n+1}$ вдоль оси OX.

В блоке 2 вычисляются координаты точек измерений $M_{ij}(x_{nij}, y_{nij}, z_{nij})$ в осях $O_n X_n Y_n Z_n$.

Пусть μ_{nij} – длина вертикального отрезка, заключенного между точкой M_{ij} и плоскостью P_n. В осях $O_nX_nY_nZ_n$ $\mu_{nij} = |z_{nij} - (a_nx_{nij} + b_ny_{nij} + d_n)|$ и

$$\sum_{ij} \mu_{nij}^2 = \sum_{ij} (z_{nij} - (a_nx_{nij} + b_ny_{nij} + d_n))^2 = I_n^* = I_n(a_n, b_n.d_n).$$

Здесь $I_n^* = I_n (a_n, b_n, d_n)$ – решение задачи (2.1), найденной на шаге n.

Обозначим через ν_{nij} и $\nu_{(n+1)ij}$ расстояния от точки измерений $M_{ij}(x_{nij}, y_{nij}, z_{nij})$ до плоскости $O_nX_nY_nZ_n$ и подстилающей плоскости P_n соответственно. Принимая во внимание, что $\nu_{(n+1)ij} < \mu_{nij}$, имеем

$$\sum_{ij} \nu_{(n+1)ij}^2 < \sum_{ij} \mu_{nij}^2 = \sum_{ij} (z_{nij} - (a_nx_{nij} + b_ny_{nij} + d_n))^2 = I_n^*.$$

При решении задачи (2.1) на шаге $n + 1$ для плоскости $O_nX_nY_nZ_n$ значение функции

$$I_n(0,0,0) = \sum_{ij} \nu_{nij}^2 = \sum_{ij} z_{nij}^2,$$

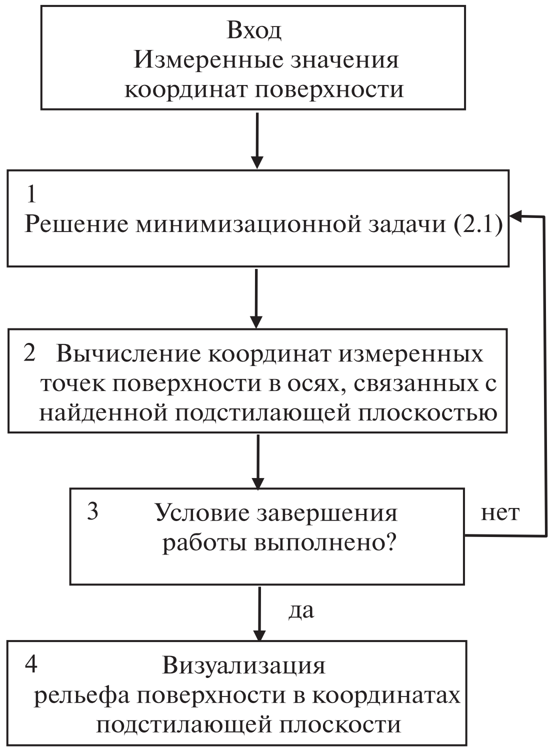

Рис. 1

поэтому

$$\sum_{ij} \mu_{nij}^2 = \sum_{ij} (z_{nij} - (a_n x_{nij} + b_n y_{nij} + d_n))^2 = I_n^* < I_n(0,0,0) = \sum_{ij} \nu_{nij}^2.$$

В результате имеем неравенство

$$\sum_{ij} \nu_{(n+1)ij}^2 < \sum_{ij} \mu_{nij}^2 = \sum_{ij} (z_{nij} - (a_n x_{nij} + b_n y_{nij} + d_n))^2 = I_n^* < \sum_{ij} \nu_{nij}^2.$$

При работе алгоритма получается монотонно убывающая положительная последовательность сумм:

$$s_n = \sum_{ij} (z_{nij} - (a_n x_{nij} + b_n y_{nij} + d_n))^2.$$

Предел последовательности обозначим через S. Покажем, что каждая из последовательностей коэффициентов a_n, b_n, d_n ограниченна.

В общем случае нанорельеф представляет собой поверхность, полная кривизна которой почти во всех точках положительна. В окрестности любой такой точки, внутренней для поверхности, можно выбрать сферу B малого радиуса r, для которой ее проекция Пр(B) на произвольную плоскость будет целиком принадлежать проекции измеряемого нанорельефа A: Пр(B) $\subset$ Пр(A).

Пусть теперь какая-либо из последовательностей a_n, b_n, d_n неограниченна. Тогда последовательность норм линейных операторов $\|z_n - (a_n x_n + b_n y_n + d_n)\|$, $(x_n, y_n, z_n) \in O_n X_n Y_n Z_n$ также будет неограниченной. Отсюда неограниченны последовательности значений функций $z_n - (a_n x_n + b_n y_n + d_n)$, которые они принимают на проекции сферы Пр$_n$(B) на плоскость $O_n X_n Y_n$: $(x_n, y_n) \in$ Пр$_n$(B).

В результате последовательность s_n будет представлять собой сумму квадратов членов, часть которых неограниченно возрастает, что противоречит установленному выше свойству о монотонном убывании s_n. Каждая из ограниченных последовательностей a_n, b_n, d_n имеет предельные точки. Обозначим любой их набор через A, B, D соответственно. Покажем, что $A = B = 0$.

Введем прямоугольную систему координат $O_S X_S Y_S Z_S$, в которой точка O_S лежит на предельной подстилающей плоскости, заданной уравнением $z - (Ax + By + D) = 0$, и ось $O_S Z_S$ направлена перпендикулярно к ней.

Предположим, что сформулированное выше утверждение неверно. Решим минимизационную задачу (2.1) в системе координат $O_S X_S Y_S Z_S$. Если хотя бы один из двух коэффициентов A или B отличен от 0, то найденная подстилающая плоскость наклонена к плоскости $O_S X_S Y_S$ под некоторым углом. К ней можно применить итерационный алгоритм и найти лучшее, чем S, решение задачи (2.1).

Из доказанного утверждения следует, что последовательности a_n и b_n имеют предел.

Сформулированное свойство позволяет заключить, что по мере работы алгоритма наклон подстилающей плоскости будет изменяться все меньше и, следовательно, она будет стремиться к своему предельному положению в пространстве. Это можно использовать для определения момента окончания работы рассматриваемого алгоритма. Его работу следует прекратить, если в блоке 3 оба коэффициента a_n и b_n становятся меньше некоторой заданной величины. В качестве условия остановки алгоритма можно также использовать известные критерии близости членов последовательности s_n к своему пределу S.

4. Геометрические свойства найденного решения. Обозначим через π предельную подстилающую плоскость. В системе координат $O_S X_S Y_S Z_S$ она задается уравнением $z - D = 0$. Коэффициенты этого уравнения являются предельными значениями коэффициентов уравнений плоскостей, получаемых в процессе работы рассмотренного выше итерационного алгоритма в собственных координатах $O_n X_n Y_n Z_n$.

В силу того, что решение задачи (2.1) в системе координат $O_S X_S Y_S Z_S$ совпадает с плоскостью π, имеет место равенство

$$S = \sum_{ij} (z_{ij} - D)^2. \tag{4.1}$$

Выражение (4.1) с точностью до множителя (который определяется только числом узлов сетки измерений) пропорционально среднеквадратичному отклонению измеренных точек нанорельефа от плоскости $z - D = 0$. Из этого следует, что полученная подстилающая плоскость может быть найдена путем решения задачи минимизации (2.2). Единственность ее решения позволяет заключить, что последовательность d_n имеет только одну предельную точку.

Задача (2.2) обычно решается методом градиентного спуска. В настоящей работе предлагается использовать итерационный алгоритм, каждый шаг которого состоит в применении штатной функции нахождения подстилающей плоскости к результату работы алгоритма на предыдущем шаге. В настоящее время в системе управления туннельным микроскопом эта функция применяется однократно. Таким образом, предложенный способ решения позволяет избежать разработки новых программных модулей и связанных с этим вопросов верификации, обеспечения надежности их работы и интегрирования в существующий программный код.

После того, как подстилающая поверхность найдена, в блоке 4 она используется для визуализации измерений.

5. Сравнение методов. Штатная подсистема визуализации измерений выполняет только один шаг рассмотренного выше алгоритма. Таким образом, для того, чтобы улучшить точность визуального представления измерений, достаточно реализовать возможность применения подсистемы к преобразованным ею координатам точек столько раз, сколько необходимо.

Штатные средства визуализации позволяют пользователю следить за изменениями картинки в пошаговом режиме. Итерационный метод решения задачи так же, как и задача (4.2), при большом перепаде высот нанорельефа может приводить к решению в виде вертикальной плоскости. Визуальное наблюдение за изменением получаемого изображения позволяет остановить работу алгоритма, как только разрешение деталей сцены перестает улучшаться.

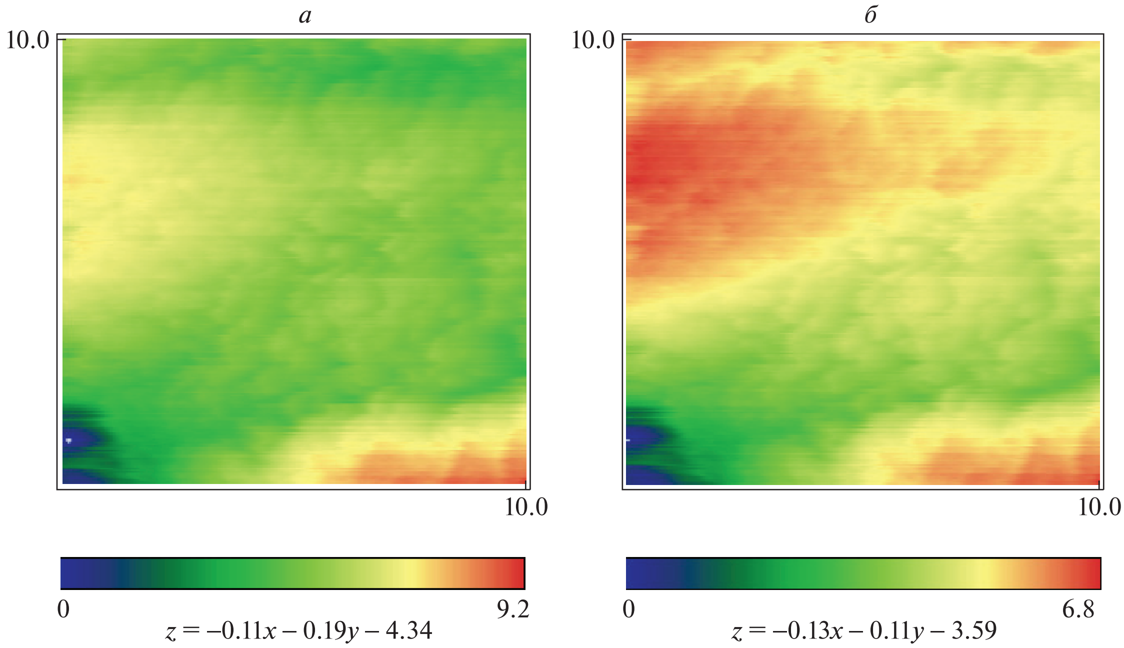

Рис. 2

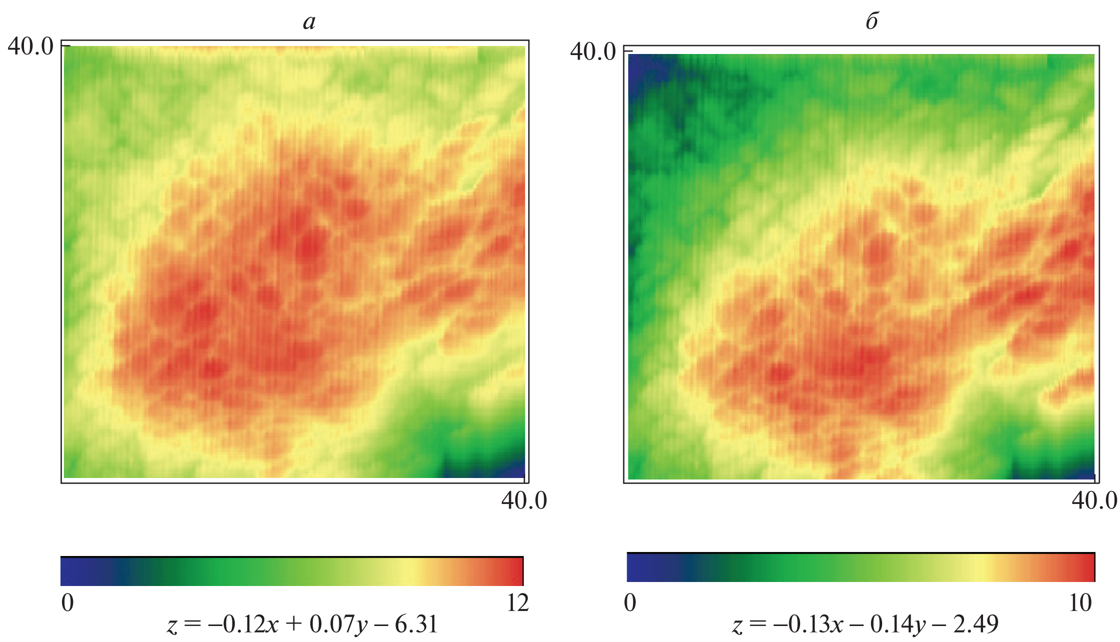

Рис. 3

В преимуществе выбора подстилающей плоскости с помощью итерационного метода нетрудно непосредственно убедиться, сравнивая изображения, приведенные на рис. 2 и 3. Размеры областей нанорельефа указаны в нанометрах. Ось *OX*, вдоль которой движется игла при сканировании, в плоскости рисунка направлена по горизонтальной оси, *OY* – по вертикальной. Числа, нанесенные по осям координат, обозначают размеры участка сканирования. Во всех примерах сетка сканирования имеет размер 128 × 128 точек.

В нижней части рисунков показана палитра, с помощью которой кодируется высота точек рельефа относительно подстилающей плоскости и перепад высот в нанометрах. Приведены уравнения подстилающих плоскостей, на которые проектировались результаты измерений. В приведенных примерах итерационный алгоритм останавливался, если изменение всех коэффициентов подстилающей плоскости оказывалось менее 0.01.

На рис. 2, *а* и 3, *а* подстилающая плоскость вычисляется с помощью метода наименьших квадратов, на рис. 2, *б* и 3, *б* – итерационным методом.

Рисунок 2 получен путем сканирования поверхности меди, нанесенной методом вакуумного напыления на стеклянную подложку. Сравнивая указанные на рис. 2, *а* и *б* параметры закраски, нетрудно заметить, что применение метода итераций позволило уменьшить перепад высот на треть. Коэффициенты подстилающей плоскости вычислены на третьем шаге работы итерационного алгоритма. Время работы алгоритма составило 1 с.

Непосредственное сравнение рисунков показывает также, что предлагаемый метод приводит к более информативной закраске. На рис. 2, *б* лучше видна структура рельефа поверхности: "ложбина", закрашенная зеленым цветом, между двумя выпуклыми участками красного цвета. Лучше различимы границы выпуклостей, можно точнее измерить их размеры.

На рис. 3 показан участок поверхности платины, полученный вакуумным напылением на стеклянной пластине. Использование итерационного метода позволило уменьшить перепад высот с 12 до 10 нм, т.е. улучшить разрешение на 15%. В результате на рис. 3, *б* четче прослеживается структура поверхности, чем на рис. 3, *а*. Действительно, из рис. 3, *а* можно сделать вывод о том, что нанообразования, закрашенные красным цветом, лежат на одной высоте, т.е. в центре рельеф близок к некоторой плоскости. Рисунок 3, *б* показывает, что на самом деле она является выпуклой.

Коэффициенты подстилающей плоскости вычислены на пятом шаге работы итерационного алгоритма. Время работы алгоритма составило 1.5 с.

Результаты применения метода итераций и метода наименьших квадратов сравнивались на достаточно большом количестве измерений различных поверхностей. Во всех случаях изображение, получаемое методом итераций, было более информативным. Существенное увеличение визуального разрешения связано с известным эффектом восприятия, при котором большее значение имеет не линейный размер мелких объектов, а их площадь, которая увеличивается двукратно. В случае рис. 3 увеличение площади составляет 30%.

Следует заметить, что использование метода итераций не приводит к существенному увеличению времени расчетов, так как даже для сканов с изображением, имеющим разрешение 256 × × 256 точек, оно не превышает нескольких секунд. Полученные результаты позволяют рекомендовать метод итераций для включения в штатные средства обработки изображений зондовых микроскопов.

Заключение. Предложенный способ увеличения точности представления результатов измерений нанорелефа поверхности основан на известном методе построения подстилающей плоскости, который традиционно используется в туннельной микроскопии. Это упрощает задачу совершенствования функции визуализации измерений, применяемой в современных системах управления туннельным микроскопом.

В большинстве исследованных примеров представления измерений поверхности удается найти такую подстилающую плоскость, в которой перепад высот меньше на 15% по сравнению с плоскостями, построенными стандартными средствами. При этом в отдельных случаях перепад уменьшается в 1.5 раза. Во всех проведенных экспериментах с помощью метода итераций обеспечивается более точное отображение мелких структурных элементов поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташев В.А., Карташев В.В.* Способ определения формы и размеров острия иглы зондового микроскопа. Патент РФ № 2449294. Патенты и полезные модели. № 12. 2012.
2. *Карташев В.А., Карташев В.В.* Влияние особенностей работы системы управления туннельного микроскопа на точность измерений // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 1. С. 130–136.
3. *Kartashev V.A., Kartashev V.V.* Impact of Features of Control Systems of the Tunneling Microscope on the Measurement Accuracy // J. Computer and Systems Sciences International. 2014. V. 53. № 1. P. 124–129.
4. *Карташев В.А., Карташев В.В.* Учет особенностей управления туннельным микроскопом при интерпретации измерений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 128–133.

5. *Kartashev V.A., Kartashev V.V.* Taking into Account the Features of a Tunneling Microscope Control for Interpreting Measurements // J. Computer and Systems Sciences International. 2018. V. 57. № 5. P. 784.
6. *Миронов В.Л.* Основы сканирующей зондовой микроскопии. М.: Техносфера, 2004. 114 с.
7. *Филонов А.С., Яминский И.В.* Обработка и анализ данных в сканирующей зондовой микроскопии: алгоритмы и методы // Наноиндустрия. 2007. № 2. С. 32–34.
8. Наноэдьюкатор. Модель СЗМУ-Л5. Руководство пользователя. М.: НИИФП ЗАО “НТ-МДТ”, 2005.
9. Лабораторный нанотехнологический комплекс “УМКА” на базе сканирующего туннельного микроскопа. М.: КОНЦЕРН “НАНОИНДУСТРИЯ”, 2011.
10. *Синицына О.В.* Обработка и анализ данных зондовой микроскопии, обзор программного обеспечения // Нано- и микросистемная техника. 2007. № 2. С. 2–7.
11. *Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А.* Эконометрия. Новосибирск: НГУ, 2005. 744 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 119–129

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 628.517.4–681.53

АКТИВНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕСУЩЕЙ ПЛИТЫ ВИБРОЗАЩИТНЫХ УСТРОЙСТВ[1]

© 2021 г. И. Ж. Безбах, В. А. Мелик-Шахназаров[a,*], В. И. Стрелов[a], А. А. Трегубенко[a]

[a] *ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kmikran@spark-mail.ru*

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.
После доработки 29.01.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Разработан способ подавления резонансов поперечных колебаний несущей плиты активного виброзащитного устройства, позволяющий расширить его активный диапазон частот и понизить коэффициент пропускания вибраций. Используется второй дополнительный контур управления отдельными, выбранными резонансами плиты. Его инерционные сервисные движители и акселерометры располагаются на плите (или в объеме плиты) в определенных позициях вблизи от максимума волны, а в электрических цепях устанавливаются фильтры, настроенные на частоту резонанса. Для описания конструкции используется структурная схема, состоящая из электрических и механических импедансов, которые представляют резонансы несущей плиты, установленной на упругих опорах, резонансы ее поперечных колебаний, а также резонансы в цепи инерционных сервисных движителей. Применение теории электрических цепей позволяет определять динамическое поведение системы управления, а также конструктивные и мощностные характеристики ее узлов.

DOI: 10.31857/S0002338821040119

Введение. Для защиты от вибраций прецизионной измерительной и технологической аппаратуры необходимы активные виброзащитные устройства (АВЗУ), содержащие опорную плиту, все шесть мод колебаний которой подавлены. Потребность в таких устройствах привела к тому, что вслед за слишком "металлоемкой" конструкцией [1] была разработана идеальная в своей простоте конструкция, служащая в настоящее время основой коммерческих виброзащитных устройств [2, 3]. Основными узлами этой конструкции являются: опорная плита, на которой с помощью упругих опор устанавливается несущая плита с защищаемым объектом. На несущей плите установлена *симметрично расположенная* группа из восьми акселерометров и восьми сервисных движителей, соединенных с опорной плитой. Акселерометры и движители включены в восемь отдельных цепей управления, так что все шесть мод колебаний плиты, установленной на упругих опорах, оказываются подавлены.

Указанные конструкции АВЗУ характеризуются нижней границей активного диапазона частот ~2 Гц и максимальным коэффициентом подавления колебаний 35–40 дБ, который достигается при ~10 Гц. Существенно, что указанные характеристики для рассматриваемой конструкции АВЗУ являются предельными из-за "паразитного" сигнала наклона акселерометров, который вызывается изменением проекции вектора силы тяжести инерционной массы акселерометров на его ось чувствительности. Отношение динамического, "полезного" сигнала акселерометра к паразитному обратно пропорционально квадрату частоты, так что ниже ~2 Гц помеха становится выше допустимого уровня; это и определяет (неустранимую) нижнюю границу активного диапазона устройства.

Отметим, что именно благодаря отсутствию паразитного сигнала наклона акселерометров в условиях невесомости, активное виброзащитное устройство gLIMIT функционирует на международной космической станции в области низких частот вплоть до ~0.01 Гц [4].

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН и с использованием оборудования ЦКП ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" при поддержке Минобрнауки России (проект RFMEFI62119X0035).

Для расширения активного диапазона АВЗУ рассматриваемого вида в лабораторных/цеховых условиях, а также на транспортных средствах нами была разработана новая структура симметричной группы акселерометров и сервисных движителей, позволяющая включить их в электрические цепи для *раздельного управления* шестью модами колебаний несущей плиты [5]. Такая конструкция позволяет, используя простые электрические цепи, осуществить компенсацию сигнала наклона акселерометров, что приводит к смещению нижней границы активного диапазона частот от ~2 до ~0.2 Гц и 10-кратному увеличению максимального коэффициента подавления колебаний (до 60 дБ).

В области низких (ниже ~200 Гц) частот цепи управления АВЗУ подавляют три поступательные и три торсионные моды колебаний плиты в отсутствие ее объемной деформации. При расширении активного диапазона в область более высоких частот в плите возбуждаются резонансы поперечных колебаний, нарушающие работу цепей управления АВЗУ, т.е. фактически ограничивающие активный диапазон со стороны высоких частот. Отметим, что поперечные резонансы плиты с добротностью Q, расположенные выше верхней границы активного диапазона частот устройства (т.е. при величине модуля функции передачи разомкнутой цепи управления $|H(i\omega)| \le 1$), также могут приводить к появлению паразитных автоколебаний в цепи управления при условии $|H(i\omega)|Q \ge 1$.

Отмеченные ограничения активного диапазона частот могут быть устранены либо путем уменьшения размера плиты (что не всегда возможно из-за фиксированных размеров защищаемого объекта), либо с помощью дополнительного устройства (пассивного или активного), подавляющего резонансы ее поперечных колебаний.

Теоретические расчеты и компьютерное моделирование пассивного динамического подавления резонансов поперечных колебаний плиты показали, что для плиты толщиной ≥30 мм необходимы виброгасящие резонаторы с недостижимо высокими упругими потерями. Поэтому единственным перспективным способом решения проблемы представляется активное подавление резонансов. При этом следует иметь в виду ряд обстоятельств, ограничивающих выбор конструкции такого устройства.

Резонансы поперечных колебаний несущей плиты, нарушающие работу АВЗУ, могут располагаться вблизи от верхней границы его активного диапазона частот, так что включить дополнительные полосовые фильтры в цепь управления невозможно из-за фазовых ограничений, поэтому для подавления резонансов необходим дополнительный контур управления, не влияющий на амплитудно- и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) главного контура. Он должен содержать отдельные цепи для измерения амплитуды поперечных колебаний выбранной подавляемой волны (группы волн), а также отдельные сервисные движители. Целью настоящей работы является создание устройства, удовлетворяющего указанным условиям.

1. Конструкция и структурная схема устройства. Очевидно, что при конструировании АВЗУ с независимым управлением шестью модами колебаний несущей плиты [5] конструкционные и динамические характеристики шести одномодовых парциальных устройств могут быть рассчитаны раздельно.

На рис. 1 показана одномодовая схема АВЗУ с дополнительными контурами управления, предназначенными для подавления резонансов поперечных колебаний несущей плиты. Главная цепь управления содержит несущую плиту массой m_1, которая опирается на упругий элемент c_1. На плите установлен акселерометр $А_1$ и магнитная система электродинамического преобразователя: опорного магнитоэлектрического движителя (ОД) $Дв_1$ (катушка которого установлена на опорной плите). Электрические цепи управления с функцией передачи $W_{1о.о.с}(i\omega)$ замыкают цепь отрицательной обратной связи, что подавляет пропускание внешних вибраций $n(t)$ от опорной плиты к несущей. Подробно структурная схема и динамические звенья главного контура управления АВЗУ рассмотрены в [6].

Второй контур управления, собственно служащий для подавления резонансов поперечных колебаний несущей плиты, содержит электрические цепи обратной отрицательной связи $W_{2о.о.с}(i\omega)$, а также акселерометр $А_2$ и инерционный сервисный движитель (ИД) [7], *которые устанавливаются вблизи от максимума подавляемой волны на поверхности или в объеме плиты*. ИД состоит из массы m_2, опирающейся на упругий элемент c_2 и электродинамического преобразователя $Дв_2$, управляющего движением массы m_2. ИД действует на плиту в заданной “точке” ньютоновой силой инерции $F_{Н}(t) = m_2a_2(t)$, где $a_2(t)$ – ускорение массы m_2. Требования к функции передачи цепи управления $W_{2о.о.с}(i\omega)$ будут рассмотрены ниже.

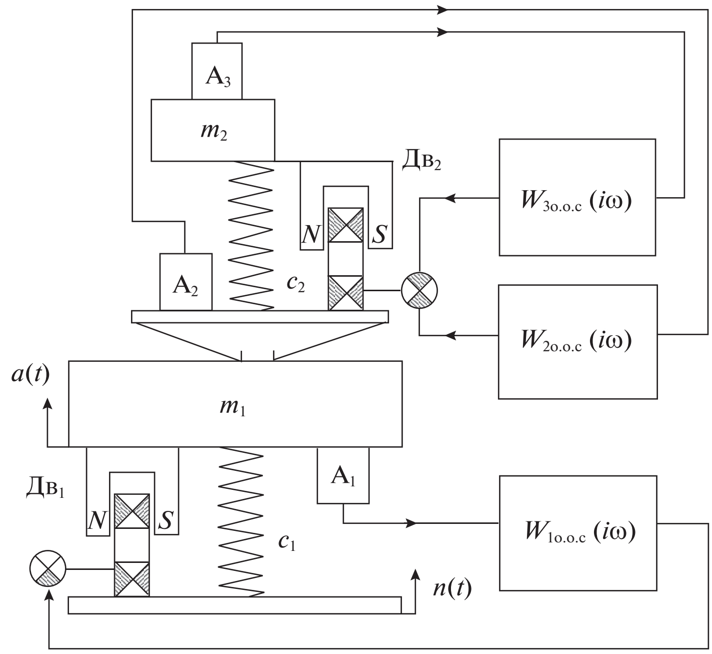

Рис. 1. Схема одномодовой конструкции АВЗУ с узкополосным активным гасителем резонансов поперечных колебаний несущей плиты

Следует обратить внимание на то, что второй контур управления, соединенный с несущей плитой посредством акселерометра и инерционного движителя, включен во все шесть первых контуров управления АВЗУ.

Третий контур управления является вспомогательным, он предназначен для подавления резонанса ИД. Контур содержит электрические цепи обратной отрицательной связи $W_{3\text{о.о.с}}(i\omega)$, акселерометр А$_3$, установленный на инерционной массе m_2, и электродинамический преобразователь Дв$_2$. Как будет показано ниже, в результате подавления резонанса ИД расширяется его рабочий диапазон частот, а также уменьшаются фазовые ограничения для АЧХ второго контура управления. Отметим, что подавление резонанса подвижной системы электродинамических преобразователей с целью повышения их качества впервые было предложено Григорьевым В.С. и Фурдуевым В.В. в 1937 г. (цитируется по [8, 9]).

Следует отметить, что использование во втором контуре управления ИД обусловлено конструктивными соображениями. Действительно, сервисные движители должны располагаться в определенных позициях вблизи от максимума подавляемой стоячей волны, однако пространство между несущей и опорной плитами АВЗУ практически полностью занято симметрично расположенными группами сервисных опорных движителей, акселерометров и упругих опор [5]. Поэтому указанное условие можно выполнить лишь используя ИД, размещенные в объеме несущей плиты.

Необходимо также отметить, что для расширения активного диапазона частот АВЗУ достаточно подавить влияние только первых резонансов плиты (от двух до четырех), поэтому второй контур управления должен/может быть узкополосным.

Для математического описания динамики конструкции, показанной на рис. 1, используется метод структурной схемы, которая, как видно из рис. 2, состоит из однонаправленных динамических звеньев, каждому из которых соответствует определенная функция передачи. В сущности, эта схема представляет собой графическое изображение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику всех частей конструкции. Оно предпочтительнее обычной математической записи уравнений, так как позволяет весьма просто, используя правила электрических цепей, “свертывать” уравнения в одно для получения функций передачи соединений механических и электрических импедансов [10, 11].

Важно, что метод электрических цепей устанавливает соответствие каждого динамического звена определенному конструктивному элементу устройства. Это позволяет определять также

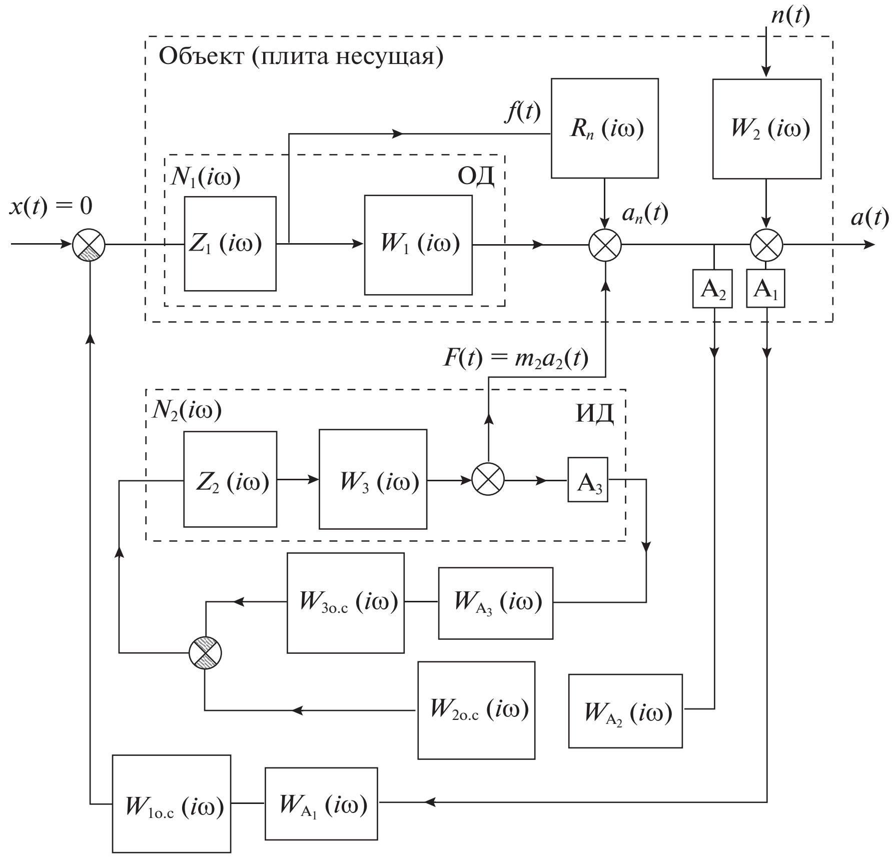

Рис. 2. Структурная схема одномодовой конструкции АВЗУ с узкополосным активным гасителем резонансов поперечных колебаний несущей плиты

необходимые физические параметры механических и электрических элементов конструкции, исходя из заданных заранее основных характеристик устройства. Необходимый анализ выполняется не сложным способом с помощью компьютерной программы, рассчитанной для вычисления функций с комплексными переменными.

Согласно схеме на рис. 2, “свертка” проводится по цепям двух типов следующим образом. Первый – функция передачи последовательной цепи динамических звеньев, которая равна произведению функций передачи звеньев цепи. Второй – функция передачи замкнутой цепи с отрицательной обратной связью (контура управления), представляющая собой дробь, числителем которой является произведение функций передачи динамических звеньев, включенных в прямом направлении, а знаменателем – единица плюс произведение функций передачи всех звеньев замкнутой цепи.

Как видно из рис. 2, структурная схема рассматриваемой конструкции АВЗУ содержит, кроме основного, два дополнительных контура управления. Первый, главный контур управления (подробно исследован в [6]) включает следующие динамические звенья: акселерометр A_1, усилитель сигнала акселерометра $W_{A_1}(i\omega)$, электрические цепи обратной связи $W_{1о.с}(i\omega)$ и сервисный движитель $N_1(i\omega)$. Функция передачи последнего определяется электрическим импедансом $Z_1(i\omega)$ катушки электродинамического преобразователя $Дв_1$, нагруженного механическим импедансом несущей плиты $W_1(i\omega)$, установленной на упругих опорах, и коэффициентом электромеханической связи преобразователя [6].

Динамическое звено $W_2(i\omega)$, подключенное к главному контуру управления, представляет параллельный резонанс плиты (установленной на упругие опоры), входным сигналом которого, как видно из рис. 1, является смещение свободного конца упругого элемента $n(t)$ (в последовательном резонансе плиты $W_1(i\omega)$ входной сигнал есть сила, приложенная электродинамическим преобразователем к массе m_1). Как видно из структурной схемы, звено $W_2(i\omega)$ не входящее в замкнутый контур управления, представляет собой фильтр входного (внесенного) сигнала $n(t)$ виброзащитного устройства.

Второй контур управления, собственно предназначенный для подавления резонансов поперечных колебаний плиты, состоит из следующих динамических звеньев: акселерометр A_2, усилитель сигнала акселерометра $W_{A_2}(i\omega)$, электрические цепи обратной связи $W_{2\text{o.c}}(i\omega)$ и сервисный движитель $N_2(i\omega)$. Функция передачи последнего определяется электрическим импедансом катушки электродинамического преобразователя $Z_2(i\omega)$, нагруженного механическим импедансом $W_3(i\omega)$, который представляет инерционную массу m_2, установленную на упругой опоре c_2, а также коэффициентом электромеханической связи преобразователя [12].

Динамическое звено $R_n(i\omega)$ обозначает ряд резонансов поперечных колебаний несущей плиты, т.е. ряд включенных параллельно механических импедансов. В отличие от всех звеньев, описывающих колебания с сосредоточенными параметрами, при соединении звена $R_n(i\omega)$ (где $n = 1$, 2, 3, ... – номер резонанса несущей плиты) с другими звеньями место расположения акселерометров и сервисных движителей на плите должно быть учтено введением соответствующих коэффициентов связи.

Форма волны резонансов поперечных колебаний плиты определяется аналитически [13, 14] либо компьютерными расчетами, так что для каждой (n-й) моды определено место расположения акселерометров и ИД вблизи от максимума волны. Это позволяет получить максимальные значения коэффициентов связи рассматриваемых резонансов с внешними цепями.

Каждый резонанс объемных колебаний плиты может быть с достаточной точностью представлен импедансом соответствующего замещающего эквивалентного резонатора с сосредоточенными параметрами. Для определения его параметров (массы m, упругой податливости c, сопротивления потерь r) может быть использован компьютерный расчет резонансов плиты, однако для первых резонансов они могут быть легко получены приравниванием потенциальной энергии, кинетической энергии и энергии рассеяния объемного и локального резонансов [15]. Считая волну синусоидальной для упругой податливости n-го эквивалентного резонатора с сосредоточенными параметрами, получаем

$$c_n = \frac{24}{\pi^4}\frac{l_n^3}{Eh^3b}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.1}$$

Здесь l – длина полуволны n-го резонатора, E – модуль упругости материала плиты, h и b – толщина и ширина плиты соответственно.

Для массы эквивалентного резонатора:

$$m_n = 0.36m_0 \tag{1.2}$$

(m_0 – масса покоящегося стержня).

Следовательно, функция передачи n-го резонанса поперечных колебаний плиты (по ускорению) может быть записана таким образом:

$$R_n(i\omega) = \frac{i\omega}{z_n^R(i\omega)} = \frac{i\omega}{r_n + i\omega m_n + 1/(i\omega c_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

(здесь $z_n^R(i\omega)$ – импеданс n-го резонанса).

На структурной схеме в качестве входного сигнала динамического звена $R_n(i\omega)$ обозначены суммарные объемные силы $f(t)$, источником которых являются сервисные движители в цепи главного контура управления АВЗУ (Дв$_1$ на одномодовой схеме, показанной на рис. 1).

Важно, что динамическое звено $R_n(i\omega)$ (как видно из рис. 2) включено и в первый, и второй контуры управления, но различным образом. В первый контур звено $R_n(i\omega)$ включено параллельно звену $W_1(i\omega)$, что соответствует параллельному соединению “основного” резонанса АВЗУ (колебания несущей плиты, установленной на упругих опорах) с группой резонансов объемных колебаний плиты. Именно в результате такого соединения при определенных условиях, которые будут рассмотрены ниже, в системе появляются автоколебания на частоте одного из резонансов плиты. С вторым контуром управления звено $R_n(i\omega)$ соединено как источник внесенного сигнала (в главном контуре управления такую роль играет звено $W_2(i\omega)$).

Особенностью второго контура управления является упомянутая выше цепь дополнительной обратной связи $W_{3о.с}(i\omega)$, предназначенная для подавления механического резонанса ИД [8, 9]. В рассматриваемом устройстве ИД с подавленным резонансом приобретает ряд важных свойств: 1) расширяется диапазон его рабочих частот; 2) снижаются фазовые ограничения при установке в цепях управления $W_{2о.с}(i\omega)$ фильтров с необходимыми АЧХ и ФЧХ; 3) упрощается конструкция ИД, так как не требуется настройка частоты его механического резонанса.

Заметим, что электрическим аналогом плиты является полый объемный радиочастотный резонатор сантиметрового диапазона волн. Для возбуждения и детектирования определенной формы волны последний также соединяется с внешними цепями с помощью зондов в виде штырьков или петель, которые вводятся в его объем в известных позициях. В рассматриваемой конструкции эту роль выполняют электромеханические зонды — акселерометр и ИД, установленные на плите в определенной “точке” (на площадке малого размера).

2. Подавление резонансов несущей плиты типичного активного виброзащитного устройства. На основе представленных выше общих закономерностей далее приводится расчет устройства, предназначенного для подавления резонансов поперечных колебаний несущей плиты конкретного экспериментального макета АВЗУ [6, 12]. На структурной схеме рис. 2 это устройство представлено вторым контуром управления. Первый, основной контур, подробно исследован нами в [6]. Динамика рассматриваемой конструкции, как отмечалось выше, определялась с помощью структурной схемы, состоящей из ряда электрических и механических импедансов, и правил теории электрических цепей.

Параметры экспериментального ИД таковы: масса m_2 = 0.8 кг, резонансная частота $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{m_2 c_2}) \approx 100$ Гц, сопротивление катушки электродинамического преобразователя $R =$ $= 12$ Ом, индуктивность $L = 22$ мГн. Магнитная индукция в зазоре магнитной системы $B \approx 0.2$ Тл, длина провода в магнитном поле $l = 50$ м, коэффициент электромеханической связи $K = Bl = 10$ (конструкция движителя может отличаться от оптимальной, так как использовались имеющиеся узлы макета АВЗУ).

Функция передачи сервисного ИД $N_2(i\omega)$ описывает динамику двух связанных элементов конструкции, электродинамического преобразователя (катушка в магнитном поле) и механической нагрузки (инерционная масса). В динамику этого звена важный вклад вносит появление в электрической цепи ИД *внесенного* электрического импеданса вследствие возникновения электродвижущей силы в катушке, движущейся в магнитном поле. Функция передачи движителя по ускорению, учитывающая этот эффект, имеет такой вид [6, 12]:

$$N_2(i\omega) = \frac{a}{u} = -i\omega\left(\frac{Z_2(i\omega)z_3(i\omega)}{K} + K\right)^{-1}. \tag{2.1}$$

Здесь

$$Z_2(i\omega) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_{вн}} \tag{2.2}$$

— полный электрический импеданс преобразователя, учитывающий эффект внесенной емкости $C_{вн} = m_2/K^2$ [12] (R и L — электрическое сопротивление и индуктивность катушки соответственно), K — коэффициент электромеханической связи преобразователя,

$$z_3(i\omega) = r + i\omega m_2 + 1/(i\omega c_n) \tag{2.3}$$

— механический импеданс (m_2 — величина инерционной массы, c_2 — податливость пружины, r — коэффициент трения пружины).

На рис. 3 и 4 сплошной кривой показаны модуль и фазовый угол функции передачи $N_2(i\omega)$ инерционного движителя, которая определяется уравнением (2.1). На кривых кроме резонансного максимума и соответствующего понижения фазы вблизи от $\nu_0 \approx 100$ Гц видны изломы асимптот резонанса и изменение фазы в широком диапазоне частот. Как отмечалось в [12], эти аномалии связаны с эффектом внесенной емкости и возникновением так называемого электромеханического резонанса. Видно, что наличие в актуальном диапазоне частот двух резонансов приводит к большому понижению фазы, затрудняющему/исключающему возможность включения фильтров или корректирующих звеньев в цепь управления обратной связи $W_{2о.с}(i\omega)$. Пунктирные кривые на рис. 3 и 4 показывают, что подавление резонанса ИД устраняет эту проблему.

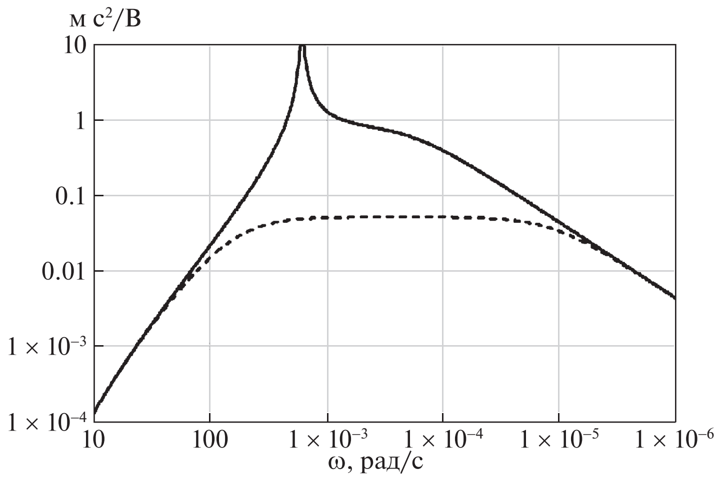

Рис. 3. Кривая модуля функции передачи инерционного движителя $N_2(i\omega)$ (сплошная кривая). То же с подавленным резонансом $H_1(i\omega)$ (пунктирная кривая)

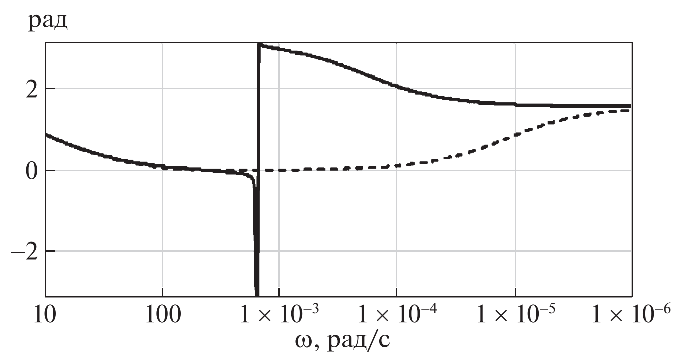

Рис. 4. Фазовый угол инерционного движителя $\phi_1(\omega) = \arg N_2(i\omega)$ (сплошная кривая). То же с подавленным резонансом $\phi_2(\omega) = \arg H_1(i\omega)$ (пунктирная кривая)

Функцию передачи движителя, включенного в третий, вспомогательный контур управления, показанного на рис. 2, можно записать следующим образом:

$$H_1(i\omega) = \frac{N_2(i\omega)}{1 + K_S N_2(i\omega)}. \qquad (2.4)$$

Здесь K_S – полный коэффициент усиления цепи, состоящей из звеньев $W_{3\text{о.с}}(i\omega)$, $W_{\text{А}_3}(i\omega)$ и коэффициента передачи акселерометра А$_3$ (в единицах В/м · с$^{-2}$). Величина K_S может варьироваться в зависимости от того, насколько широкая “площадка” необходима на кривой $|H_1(i\omega)|$ для размещения фильтров или корректоров (на рис. 3 представлена кривая $|H_1(i\omega)|$ для $K_S = 20$ В/м · с$^{-2}$).

Подчеркнем преимущества рассматриваемой цепи управления, содержащей ИД с подавленным механическим резонансом. В исходном состоянии резонанс ИД может быть использован для создания цепи узкополосного управления, однако для этого собственная частота движителя должна быть настроена на подавляемый резонанс поперечных колебаний плиты. Очевидно, что такое решение сопряжено с высокими требованиями к механической конструкции ИД. При подавленном же собственном резонансе ИД является широкополосным звеном, а настройка полосы (диапазона) управления осуществляется с помощью электрических полосовых пропускающих фильтров (включены в звено $W_{2\text{о.о.с}}(i\omega)$). Важно также, что в этом случае один ИД с подавленным резонансом может быть включен в цепи для подавления двух (или более) резонансов поперечных колебаний плиты.

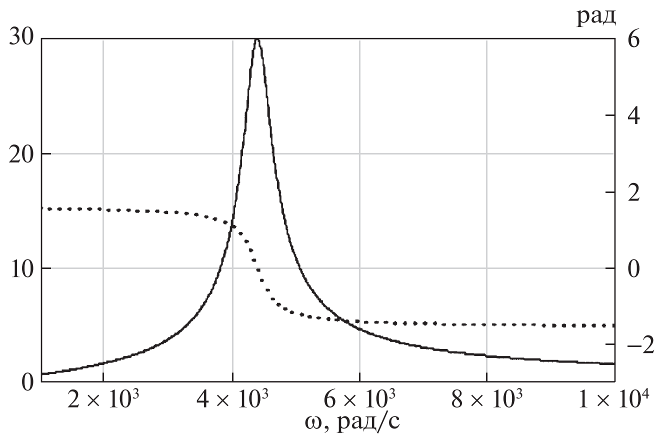

Рис. 5. АЧХ и ФЧХ полосового пропускающего фильтра $F_1(i\omega)$, включенного в звено $W_{2\text{о.с}}(i\omega)$ второго контура управления

Выбор схемы полосно-пропускающего фильтра определялся характером спектра резонансов плиты, полученного компьютерным моделированием. Для используемой в макете несущей плиты из плексигласа размером 450 × 450 × 100 мм^3 рассчитанные частоты первых резонансов распределены таким образом: 431, 643, 809, 1009, 1634, 1664, 1731, 1969, 2184, 2380 Гц. Видно, что для управления отдельными резонансами в цепи обратной связи необходимы фильтры с добротностью порядка 10. Подходящей для данной цели является схема активного фильтра с многопетлевой обратной связью [16, 17], реализующей полосовой пропускающий фильтр второго порядка (в случае, когда соответствующий фильтр нижних частот имеет первый порядок). Его функция передачи имеет вид

$$F_1(i\omega) = \frac{K_1\left(\omega_0/Q\right)i\omega}{(i\omega)^2 + \left(\omega_0/Q\right)i\omega + \omega_0^2}. \tag{2.5}$$

Простая процедура расчета цепей обратной связи [16] позволяет получить заданные: максимальный коэффициент передачи K_1, добротность, которая определяется соотношением $Q = \omega_0/(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})$, где $\omega_{\text{в}}$ и $\omega_{\text{н}}$ – верхняя и нижняя границы модуля функции передачи фильтра на уровне 0.707 максимального значения кривой передачи, и центральную частоту $\omega_0 = \sqrt{\omega_{\text{в}}\omega_{\text{н}}}$.

На рис. 5 показаны АЧХ и ФЧХ фильтра со следующими параметрами: $\omega_0 = 700\times 2\pi$, $Q = 10$, $K_1 = 30$.

Функция передачи замкнутого второго контура *по внесенному сигналу* может быть записана следующим образом:

$$H_2^*(i\omega, n) = \frac{a_n}{f} = \frac{1}{1 + H_1(i\omega)F_1(i\omega)K_2} m_2 R_n(i\omega). \tag{2.6}$$

Здесь a_n – колебание n-й поперечной объемной моды, f – суммарные объемные упругие силы, источником которых является группа опорных движителей, включенных в главный контур управления АВЗУ, $H_1(i\omega)$ – функция передачи ИД с подавленным резонансом (формула (2.4)), $F_1(i\omega)$ – функция передачи полосового пропускающего фильтра (формула (2.5)), включенного в звено $W_{2\text{о.о.с}}(i\omega)$, K_2 – полный коэффициент усиления цепи вместе с коэффициентом передачи акселерометра A_2 (0.03 В/м $\cdot$ с$^{-2}$), m_2 – активная масса ИД, $R_n(i\omega)$ – функция передачи n-го резонанса плиты (формула (1.3)), играющего роль входного фильтра внесенного сигнала.

При гипотетическом отсутствии в рассматриваемом диапазоне частот объемных резонансов плиты в (2.6) $R_n(i\omega) = 1$, так что уравнение

$$H_2(i\omega) = \frac{1}{1 + H_1(i\omega)F_1(i\omega)K_2} m_2 \tag{2.7}$$

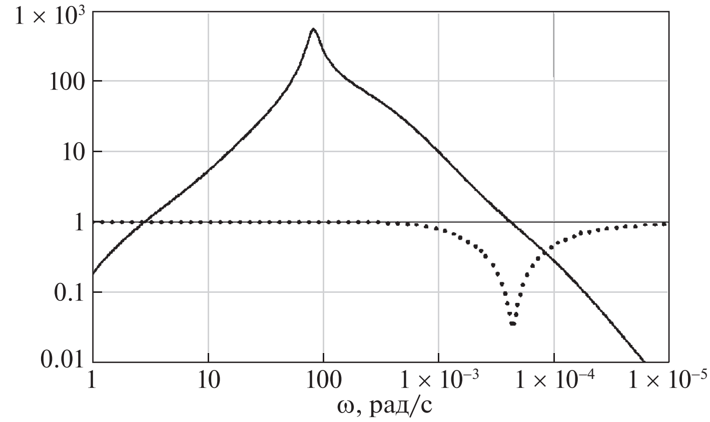

Рис. 6. Частотная зависимость модуля функции передачи разомкнутого первого контура управления $H(i\omega)$ (сплошная кривая) и замкнутого второго контура управления $H_2(i\omega)$ (пунктирная кривая)

представляет собой обобщенную функцию пропускания внесенного сигнала, модуль которой, как видно из рис. 6, имеет вид минимума по форме близким к кривой $F_1^{-1}(i\omega)$ с максимальным коэффициентом подавления ~30 дБ на частоте ~700 Гц.

На рис. 6 показан также модуль функции передачи разомкнутого первого главного контура управления виброзащитного устройства:

$$H(i\omega) = N_1(i\omega)W_{1\text{о.о.с}}(i\omega)W_{\text{A}_1}(i\omega), \tag{2.8}$$

где

$$N_1(i\omega) = \frac{a}{u} = -i\omega\left(\frac{Z_1(i\omega)W_1(i\omega)}{K} + K\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

В данном случае кривая $H(i\omega)$ рассчитана для АВЗУ с верхней границей активного диапазона частот ~700 Гц. Подробно расчеты цепей управления АВЗУ представлены в [6].

Из структурной схемы (рис. 2) видно, что цепи, включающие объемные резонансы плиты

$$P_n(i\omega) = N_n(i\omega)W_{1\text{о.о.с}}(i\omega)W_{\text{A}_1}(i\omega), \tag{2.10}$$

где

$$N_n(i\omega) = \frac{a_n}{u} = -i\omega\left(\frac{Z_1(i\omega)R_n(i\omega)}{K} + K\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.11}$$

подключены параллельно цепи обратной связи (2.8). (В приведенных формулах предполагается, что коэффициенты связи акселерометров и движителей с резонансами поперечных колебаний плиты равны единице.)

Выше в качестве образца была представлена функция передачи цепи второго контура управления (2.7), рассчитанного для подавления второй резонансной моды поперечных колебаний несущей плиты ($z_2^R(i\omega)$ согласно (1.3)) с частотой $\nu_2 \approx 700$ Гц. Условием возникновения/самовозбуждения паразитных автоколебаний в замкнутой цепи АВЗУ, связанных с этой модой, является соотношение

$$|P_2(i\omega_2)| \geq 1 \tag{2.12}$$

($\omega_2 \approx 700 \times 2\pi$ – круговая частота второй моды резонанса поперечных колебаний плиты).

При включении второго контура управления это условие приобретает вид

$$|P_2(i\omega_2)| \times |H_2(i\omega_2)| \geq 1. \tag{2.13}$$

Для несущей плиты из органического стекла максимум модуля функции передачи рассматриваемого резонанса $\left|P_2(i\omega_2)\right| \leq 30$ дБ, а пропускание второго контура цепи управления, как отмечалось выше, $\left|H_2(i\omega_2)\right| \approx -30$ дБ. Так что произведение (2.13) оказывается меньше единицы и резонанс при частоте $\nu_2 \approx 700$ Гц подавляется.

Как отмечалось выше, второй контур управления может быть рассчитан для подавления более одного резонанса при условии размещения ИД и акселерометров в позиции с достаточно большом коэффициентом связи с выбранной группой волн.

Заключение. Разработан способ подавления резонансов поперечных колебаний несущей плиты АВЗУ, позволяющий расширить его активный диапазон частот и понизить коэффициент пропускания. Конструкция устройства характеризуется следующими особенностями.

1. Используется второй дополнительный контур управления отдельными, выбранными резонансами поперечных колебаний плиты, для связи с которыми на ее поверхности (или в объеме) устанавливаются акселерометры и инерционные сервисные движители. Второй контур не связан с первым гальванически, его сигнал является для первого внесенным, так что он не влияет на АЧХ и ФЧХ последнего.

2. Резонансы поперечных колебаний плиты могут быть достаточно точно замещены резонансами с сосредоточенными параметрами и представлены рядом импедансов с определенными эквивалентными массой, упругой податливостью и потерями. При соединении n-го импеданса с внешними цепями учитывается коэффициент его связи с акселерометрами и движителями, расположенными в позиции, которая определяется исходя из известной формы волны n-й гармоники резонанса поперечных колебаний плиты (обычно вблизи от максимума волны). Форма волны, резонансные частоты, параметры замещающих резонансов, а также коэффициенты связи n-й гармоники с акселерометрами и движителями определяются аналитически или компьютерными вычислениями.

3. Рассматриваемая конструкция описывается структурной схемой, связывающей электрические и механические импедансы, которые представляют механические резонансы с сосредоточенными параметрами и резонансы поперечных колебаний плиты в виде замещающих резонансов. Использование правил теории электрических цепей (фактической свертки системы дифференциальных уравнений) позволяет определять динамическое поведение цепи или ее отдельных участков, а также конструктивные, мощностные и массогабаритные характеристики узлов устройства.

4. Поскольку результаты расчета цепей управления АВЗУ представлены на частотной шкале, при необходимости уточненные параметры замещающих резонаторов, а также коэффициенты связи упругой волны с акселерометрами и движителями могут быть легко получены (уточнены) экспериментально на макете или опытном экземпляре устройства с помощью низкочастотного анализатора спектра.

Отметим, что разработанное устройство может быть использовано также для подавления резонансных колебаний в трубопроводах, вентиляционных воздуховодах, панелях-выгородках, оптических столах, элементах конструкции машин, приборных стоек и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoque Md. E., Mizuno T., Ishino Y., Takasaki M.* A Six-Axis Hybrid Vibration Isolation System Using Active Zero-PowerControl Supported by Passive Weight Support Mechanism // J. Sound and Vibration. 2010. V. 329. № 17. P. 3417–3430.
2. Acoustic, Vibration & EMI Isolation Specialists: http://www.herzan.com
3. Imaging Ellipsometry – Active Vibration Isolation: http://www.halcyonics.com
4. *Carlos M. Grodsinsky, Mark S. Whorton* Survey of Active Vibration Isolation Systems for Microgravity Applications // J. Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. № 5. P. 586–596.
5. *Мелик-Шахназаров В.А., Стрелов В.И., Софиянчук Д.В., Безбах И.Ж.* Новая конструкция активных виброзащитных устройств // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. № 6. С. 61–67.
6. *Мелик-Шахназаров В.А., Софиянчук Д.В., Стрелов В.И., Трегубенко А.А.* Динамические звенья и границы эффективности активных виброзащитных устройств // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 90–97.
7. *Мелик-Шахназаров В.А., Стрелов В.И., Софиянчук Д.В., Трегубенко А.А.* Активные виброзащитные устройства с инерционными сервисными движителями // Космич. исслед. 2018. Т. 56. № 2. С. 156–159.

8. *Митрофанов Ю., Пикерсгиль А.* Электродинамическая обратная связь в акустических системах // Радио. 1970. № 5. С. 25–26.
9. *Эфрусси М.* О воспроизведении низших звуковых частот // Радио. 1974. № 7. С. 32–35.
10. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления / Пер. с англ. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
11. Основы автоматического управления / Под ред. Пономарева В.М., Литвинова А.П. М.: Высш. шк., 1974. 439 с.
12. *Мелик-Шахназаров В.А., Стрелов В.И., Софиянчук Д.В., Трегубенко А.А.* Функции передачи электродинамических преобразователей в цепях управления активных виброзащитных устройств // Инженерная физика. 2017. № 2. С. 20–26.
13. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985. 474 с.
14. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 т. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
15. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. М.: Искусство, 1980. 416 с.
16. *Фолкенберри Л.* Применение операционных усилителей и линейных ИС / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 572 с.
17. *Джонсон Д., Джонсон Дж., Мур Г.* Справочник по активным фильтрам / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1983. 128 с.

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 629.056.6, 621.373.826

МЕТОД АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КАНАЛА БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ПОГРЕШНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОГО СЧИСЛЕНИЯ

© 2021 г. А. А. Голован[a], В. Ю. Мишин[b], А. В. Молчанов[c,]*, М. В. Чиркин[b]

[a] ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

[b] ФГБОУ ВО “Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина”, Рязань, Россия

[c] ПАО “Московский институт электромеханики и автоматики”, Москва, Россия

*e-mail: a.v.molchanov@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2020 г.
После доработки 08.12.2020 г.
Принята к публикации 25.01.2021 г.

Описан метод, позволяющий анализировать влияние погрешностей гироскопического канала бесплатформенной инерциальной навигационной системы на погрешности инерциального счисления. Метод был реализован с помощью компьютерного имитатора бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Развит общий подход к процедуре моделирования погрешностей в компьютерном имитаторе с проведением нулевого теста. Моделирование дало возможность выделить погрешности инерциального счисления в случаях различных типов траекторий летательного аппарата при применении цифровой обработки данных в гироскопических каналах лазерных датчиков угловой скорости.

DOI: 10.31857/S0002338821040041

Введение. Методы математического моделирования широко используются при исследовании прикладных задач навигации и управления. Соответствующие компьютерные имитаторы являются важной составляющей разработки и тестирования программно-математического обеспечения (ПМО) бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). В частности, они востребованы в задаче анализа влияния погрешностей инерциальных датчиков – акселерометров и гироскопов (датчиков угловой скорости (ДУС)) – на точность инерциального счисления БИНС. Такая задача, в частности, возникает на стадиях проектирования системы, применения новых, перспективных программно-аппаратных решений.

Вопросами компьютерной имитации прикладных задач навигации и управления занимаются во многих научно-производственных организациях и учебных заведениях соответствующего профиля. Среди предметных публикаций по этой тематике выделим (не претендуя на полноту) монографии [1–3], статью [4]. Среди зарубежных разработок имитаторов для тестирования интегрированных инерциально-спутниковых навигационных систем выделим продукт SimINERTIAL компании Spirent (www.spirentgnss.com, www.spirentgnss.ru).

Очевидны требования, предъявляемые к математическому обеспечению компьютерного имитатора: алгоритмы должны обеспечивать универсальность и полноту имитационного моделирования, оставаясь достаточно простыми в вычислительном плане и использующими минимальный набор исходных данных для моделирования.

Как известно [5], любая инерциальная навигационная система предназначена для определения движения материальной точки – приведенной чувствительной массы блока ньютонометров или акселерометров (далее акселерометров) – и движения приборной системы координат, отождествляемой с корпусом объекта. Движение материальной точки и приборной системы координат удовлетворяет известным уравнениям теоретической механики, которые должны учитывать принятые в навигации модели формы Земли, ее поля тяготения, вращение Земли и т.п. Опора на эти инвариантные механические объекты и понятия определяет универсальность имитатора.

С практической точки зрения это означает, что имитатор без каких-либо модификаций может быть использован для моделирования разноплановых задач функционирования БИНС разного класса точности: от точных систем, построенных на лазерных, волоконно-оптических, твердотельных волновых гироскопах, до грубых систем на MEMS-датчиках. Это достигается за счет имитации первичной навигационной информации – идеальных показаний идеально установленных инерциальных датчиков (в общем случае – интегрирующих): акселерометров, измеряющих удельную внешнюю силу, и гироскопов, измеряющих абсолютную угловую скорость объекта.

При моделировании важно обеспечить выполнение так называемого нулевого теста, когда по сформированным показаниям идеальных инерциальных датчиков бортовые алгоритмы БИНС воспроизводят исходную траекторию (координаты, линейные скорости, углы ориентации) с максимальной точностью, в идеале, абсолютно точно. Для обеспечения нулевого теста необходимо решение задач механики: определения движения по известным силам и скоростям (прямая задача), определения сил и скоростей движения по известной траектории (обратная задача). Задача выполнения нулевого теста при кажущейся простоте и очевидности содержит, однако, ряд тонкостей, которые потребовали проведения аккуратного исследования, подробно описанное в [6]. В разработанном имитаторе исключительно важную роль играют алгоритмы формирования идеальных показаний акселерометров и ДУС для в общем случае интегрирующих датчиков и последующая тщательная проверка нулевого теста. Это обстоятельство выделяет данный имитатор от других аналогичных разработок.

Очевиден пример использования нулевого теста – имитация возмущенного режима работы БИНС. Имитируя инструментальные погрешности инерциальных датчиков в соответствии с классом точности инерциальной системы, либо используя стендовые записи реализаций инструментальных погрешностей конкретной БИНС, можно простым суммированием идеальных показаний и реализаций инструментальных погрешностей сымитировать “реальные” измерения инерциальных датчиков. Уровень “не выполнения” нулевого теста будет отражать точностные характеристики конкретной автономной БИНС на заданной траектории движения объекта.

Применительно к рассматриваемой в настоящей статье задаче тестирования алгоритмов цифровой обработки квадратурных сигналов лазерного гироскопа с механической вибрационной частотной подставкой имитируемые идеальные показания ДУС служат входной информацией для соответствующей математической модели блока лазерных ДУС. Выходная информация блока моделирования будет служить входной информацией для нулевого теста, уровень “не выполнения” которого будет отражать точностные характеристики алгоритмов цифровой обработки данных.

Важной составляющей компьютерного имитатора служит исходная траектория объекта, например, записи географических координат, компонент вектора линейной скорости, углов ориентации корпуса объекта. Среди указанных траекторных параметров нет угловых скоростей ω_z корпуса объекта и компонент вектора удельной внешней силы f_z, являющихся полезными сигналами для инерциальных датчиков. Эти параметры вычисляются отдельно при помощи описываемых далее алгоритмов.

Существуют два способа формирования исходных траекторных данных. Первый способ предполагает явное аналитическое задание траекторных параметров как функций времени. Второй способ основан на зарегистрированных экспериментально телеметрических данных конкретного навигационного эксперимента, например полетных данных. Использование телеметрической информации много предпочтительней первого варианта, поскольку последующее моделирование в этом случае будет осуществляться на характерном классе траекторных движений объекта. Далее рассмотрен вариант применения телеметрических данных.

1. Состав исходной траекторной информации для моделирования, предобработка. Выше упоминался необходимый и достаточный состав исходной траекторной информации: время t_j, географическая широта φ, долгота λ, высота h, компоненты восточной V_E, северной V_N, вертикальной V_{up} относительной скорости, углы истинного курса ψ, крена γ и тангажа v. Информационный поток телеметрических данных часто имеет низкую частоту регистрации, например 1 Гц, и может содержать записи выходных параметров нескольких БИНС, установленных на объекте, а также данные приемника сигналов спутниковых навигационных систем (СНС). Здесь также возможна многовариантность регистрируемой информации, когда записываются данные автономного (шулеровского) режима функционирования БИНС и данные так называемого комплексного канала БИНС.

Предобработка исходных телеметрических данных для последующего моделирования включает следующие этапы:

– предварительная проверка исходной информации на наличие сбоев регистрации и синхронизации. В случае выявленных дефектов входной информации осуществляется (если возможно) ее корректировка;

– регистрация финального состава траекторной телеметрической информации из многовариантных наборов позиционной, скоростной, угловой информации БИНС и СНС;

– оконное сглаживание телеметрической информации для ослабления возмущений, вызванных ошибками квантования при записи данных, рассинхронизацией разнородных информационных потоков;

– интерполяция кубическими сплайнами телеметрических данных с низкой частоты (например, 1 Гц) на задаваемую более высокую частоту (например, 2400 Гц), обусловленная постановкой задачи проводимого исследования.

Результатом начальной стадии моделирования является опорная, идеальная траектория объекта при нужной частоте “регистрации”, регистрации без ошибок, синхронизации и т.п., включающая в себя упомянутый выше состав траекторной информации.

2. Задача моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков БИНС с проведением нулевого теста. Моделирование показаний идеальных инерциальных датчиков БИНС следует за предобработкой телеметрических данных и содержит две составляющие. Первая – собственно моделирование идеальных показаний инерциальных датчиков. Вторая – проведение нулевого теста, когда сымитированные идеальные показания являются входом для типовых бортовых алгоритмов БИНС при отсутствии ошибок начальной выставки системы. Выполнение нулевого теста заключается в том, что алгоритмы инерциального счисления БИНС должны восстановить исходную траекторию с высокой точностью, например с точностью первых десятков сантиметров для координат.

2.1. М о д е л и р о в а н и е п о к а з а н и й г и р о с к о п о в [6–8]. Задача ставится следующим образом. В моменты времени t_j, t_{j+1} предполагаются известными координаты φ, λ, h точки M, отождествляемой с объектом, и параметры ориентации ψ, γ, υ приборного трехгранника Mz, также отождествляемого со связанной с корпусом объекта системой координат. Требуется вычислить значения вектора $\omega_z = (\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \omega_{z_3})^{\text{т}}$ абсолютной угловой скорости трехгранника Mz, соответствующего его переходу из углового положения, которое трехгранник занимал в момент времени t_j, в угловое положение, которое он займет в момент времени t_{j+1}.

Один из вариантов численного решения этой задачи основан на частном случае интегрируемости уравнения Пуассона:

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z, \quad \hat{\omega}_z = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z_3} & -\omega_{z_2} \\ -\omega_{z_3} & 0 & \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} & -\omega_{z_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

для матрицы ориентации A_z приборного трехгранника Mz БИНС (точка M – центр блока акселерометров), образованного осями чувствительности акселерометров, относительно инерциальной системы отсчета $O\xi$ (точка O – центр навигационного эллипсоида Земли).

Если вектор угловой скорости ω_z не меняет своего направления на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, то интеграл

$$\gamma_z = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(\tau)\, d\tau = (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)^{\text{т}}$$

представляет собой вектор конечного поворота γ_z приборного трехгранника Mz на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ и точное решение уравнения Пуассона может быть записано в следующем виде:

$$A_z(t_{j+1}) = \left(E + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_z + \frac{1-\cos\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_z^2 \right) A_z(t_j), \quad \gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $\hat{\gamma}_z$ – кососимметрическая матрица вида (2.1), поставленная в соответствии вектору γ_z, E – единичная (3×3)-матрица.

В [6] приведено описание численного алгоритма, определяющего на основе уравнения (2.2) вектор γ_z при помощи значений $A_z(t_j)$, $A_z(t_{j+1})$ матрицы ориентации. Окончательно интегрально среднее значение вектора ω_z абсолютной угловой скорости на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ определяется так: $\omega_z = \gamma_z/\Delta t$, где $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. Далее величина ω_z отождествляется с идеальным измерением абсолютной угловой скорости блока ДУС на этом интервале.

2.2. Моделирование показаний акселерометров [6, 8]. В моменты времени t_j, t_{j+1} предполагаются известными координаты φ, λ, h точки M, отождествляемой с объектом, значение вектора скорости в момент времени t_j, параметры ориентации ψ, γ, ν приборного трехгранника Mz. Требуется вычислить в осях приборного трехгранника Mz значения вектора $f_z = (f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3})^{\text{т}}$ внешней удельной силы, которая соответствует переходу точки M из ее положения в момент времени t_j в положение, которое она займет в момент времени t_{j+1}. При этом учитывается навигационная модель удельной силы тяготения $\bar{g}^0$, действующей на точку M во время ее движения.

Один из вариантов численного решения сформулированной задачи основан на частном случае интегрируемости динамических уравнений движения, записанных в осях сопровождающего географического трехгранника Mx:

$$\dot{A}_x = \hat{\omega}_x A_x, \quad \dot{v}_x = \hat{\omega}_x v_x + f_x + g_x^0. \tag{2.3}$$

Здесь A_x – матрица ориентации географического трехгранника Mx относительно инерциального $O\xi$, ω_x – вектор его абсолютной угловой скорости, v_x – вектор абсолютной линейной скорости точки M в осях Mx, g_x^0 – вектор удельной силы тяготения в осях Mx, f_x – искомый вектор удельной силы, измеряемый блоком акселерометров, если бы их оси чувствительности совпадали с осями Mx.

Будем считать, что векторы $f_x + g_x^0$ и ω_x не меняют своего направления на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Тогда уравнение (2.3) интегрируется в явном виде:

$$\begin{gathered}
A_x(t_{j+1}) = \left(E + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_x + \frac{1-\cos\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_x^2\right)A_x(t_j), \quad \gamma = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_x(\tau)d\tau = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\text{т}}, \\
v_x(t_{j+1}) = \left(E + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_x + \frac{1-\cos\gamma}{\gamma}\hat{\gamma}_x^2\right)v_x(t_j) + \left(E + \frac{1-\cos\gamma}{\gamma^2}\hat{\gamma}_x + \frac{\sin\gamma}{\gamma^3}\hat{\gamma}_x^2\right)\Delta F, \\
\Delta F = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (f_x + g_x^0)(\tau)\,d\tau \quad \gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

В (2.4) неизвестным параметром является вектор ΔF и $f_x + g_x^0 = \Delta F/\Delta t$. В [6] приведено подробное описание численного алгоритма определения вектора ΔF и в итоге – искомого вектора f_z внешней удельной силы в проекциях уже на оси приборного трехгранника Mz.

2.3. Нулевой тест. “Показания” ω_z, f_z блоков ДУС и акселерометров далее используются в штатных алгоритмах инерциального счисления БИНС при отсутствии ошибок начальной выставки БИНС и при идеальных параметрах ее вертикального канала. Интегрируются кинематические уравнения для счисления географических координат и параметров ориентации приборного трехгранника Mz, динамические уравнения для счисления линейной скорости движения точки M. Параметры полученной траектории сравниваются с аналогичными параметрами опорной траектории, которая использована в качестве основы моделирования.

Опыт применения имитатора для телеметрических полетных данных показал высокую точность выполнения нулевого теста.

3. Математическая модель лазерного ДУС с цифровой обработкой выходной информации. В качестве прецизионных датчиков угловой скорости широко используются гироскопы на основе кольцевых гелий-неоновых лазеров. Погрешность лазерного гироскопа содержит несколько составляющих [9]. Математическое моделирование позволяет выделить влияние каждой из них на погрешности инерциального счисления.

В соответствии с результатами работы [10] при временах усреднения выходного сигнала лазерного ДУС, превышающих 1000 с, доминирует нестабильность дрейфа гироскопа. Если время усреднения находится в диапазоне 0.01–100 с и используется цифровая обработка квадратурных сигналов [11], доминирует случайная погрешность, обратно пропорциональная квадратному корню из времени осреднения, которая вызвана связью встречных волн в кольцевом резонаторе [12] в условиях применения знакопеременной частотной подставки. В данной работе именно эта составляющая проанализирована при моделировании влияния погрешностей гироскопического канала на результаты инерциального счисления.

Известно, что источником информации о движении кольцевого лазера является изменение фазы Саньяка – разности фаз ψ генерируемых лазером встречных волн. Последовательный теоретический подход к описанию динамики кольцевого лазера с учетом связи встречных волн основан на теории Лэмба [9]. Предполагая, что кольцевой лазер идеален, а его информационные сигналы зависят только от мгновенной разности фаз встречных волн, можно создать упрощенную модель кольцевого лазера, учитывающую связь встречных волн [11–15] с помощью дифференциального уравнения:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{8\pi A}{\lambda L}(\omega_{z_i}(t) + \omega_i(t) - \omega_L \sin(\psi + \gamma)), \tag{3.1}$$

где L – периметр кольцевого резонатора, A – площадь фигуры, ограниченной оптической осью кольцевого резонатора, ω_L – порог синхронизации, λ – длина волны лазерного излучения, γ – фаза коэффициентов связи встречных волн, ω_{z_i} – имитируемые идеальные показания ДУС, $\omega_i(t)$ – угловая скорость, с которой колеблется кольцевой лазер (вибрационная подставка).

В качестве отсчетов угловой скорости $\omega_i(t)$, с которой колеблется кольцевой лазер, используются сигналы, экспериментально зарегистрированные для кольцевых лазеров с механическими вибрационными частотными подставками [16, 17]. В процессе выполнения измерений эти датчики находились в режиме измерений проекций угловой скорости вращения Земли, на оси чувствительности лазерных гироскопов. Для каждого массива $\omega_{z_i}(t)$ использованы различные реализации $\omega_i(t)$, отличающиеся центральной частотой, на которой происходят колебания кольцевого лазера.

Численное решение дифференциального уравнения (3.1) осуществляется методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Поскольку в уравнении (3.1) имеется слагаемое, пропорциональное $\sim\sin(\psi)$, а заданная угловая скорость ω_{z_i} может изменяться в широких пределах (± 400 град/с), то шаг, с которым ищется решение, должен быть достаточно мал. В [15] показано, что спектры первичных сигналов кольцевого лазера с механической вибрационной частотной подставкой, испытывающего вращение с угловой скоростью до ± 400 град/с, содержат гармоники вплоть до частот, близких к 2 МГц. Чтобы исключить явление “элайзинга” (маскировка частот), частота дискретизации должна, как минимум, в 2 раза превышать верхнюю границу занимаемой сигналом полосы частот. Поэтому частота дискретизации первичных сигналов кольцевого лазера и восстановленной фазы Саньяка ψ выбрана заведомо больше указанного предела (4.8 МГц).

Первичные информационные сигналы $U_c(t)$, $U_s(t)$ с фазой Саньяка ψ связаны следующими соотношениями:

$$U_c(t) = U_{c,0} + U_{c,m}\cos(\psi + \varphi_c), \quad U_s(t) = U_{s,0} + U_{s,m}\sin(\psi + \varphi_s), \tag{3.2}$$

где дополнительные фазовые сдвиги φ_c, φ_s обусловлены неточным расположением центров фоточувствительных площадок, $U_{c,0}$, $U_{s,0}$ и $U_{c,m}$, $U_{s,m}$ смещения и амплитуды первичных сигналов.

Чтобы из первичных сигналов (3.2) извлечь информацию об угловой скорости, использован алгоритм обработки квадратурных сигналов, развитый в работах [11, 15, 16] применительно к лазерной гироскопии. Цифровая обработка включает следующие стадии:

– дискретизация первичных сигналов;

– аппроксимация эллипсом множества точек, соответствующих первичным отсчетам на плоскости переменных U_c, U_s;

– определение параметров квадратурных сигналов $U_{c,0}$, $U_{s,0}$, $U_{s,m}$, $U_{c,m}$, φ_c и φ_s;

– определение разности фаз ψ встречных волн, генерируемых кольцевым лазером;

– подавление с помощью режекторного фильтра составляющей выходного сигнала, связанной с колебаниями кольцевого лазера (вибрационной подставкой).

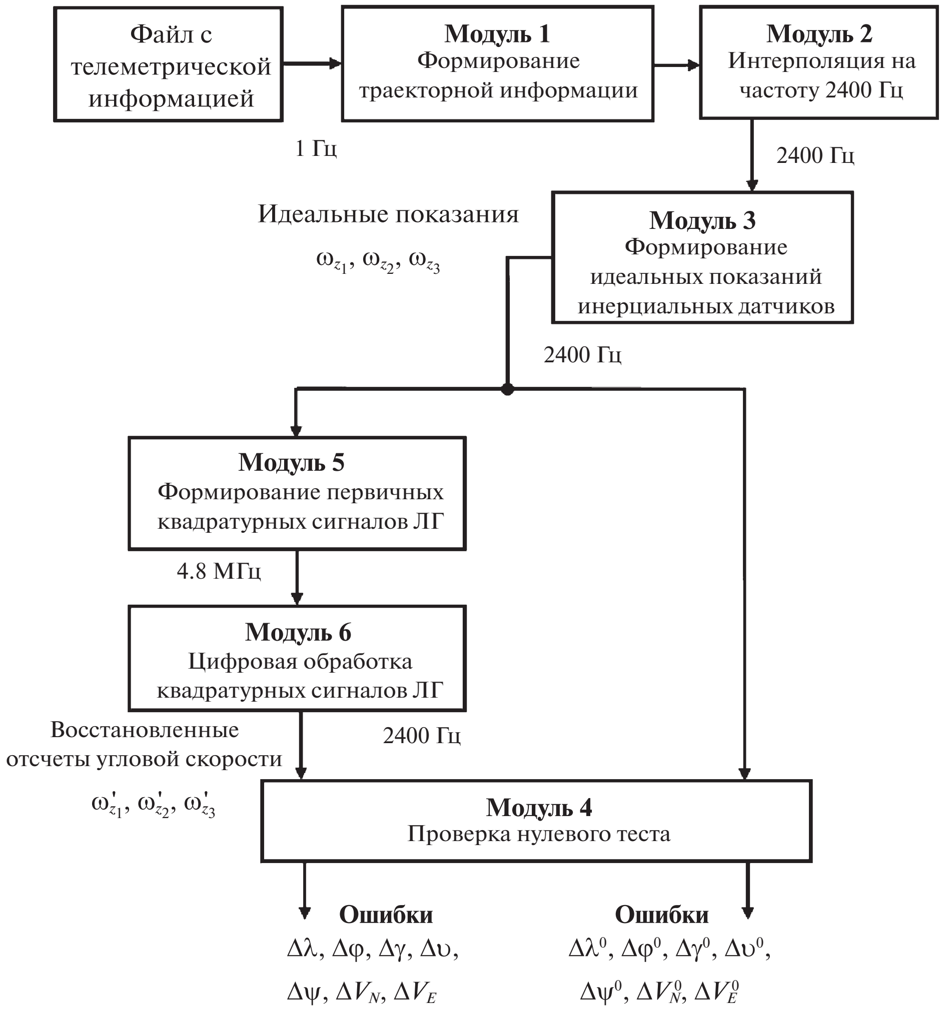

Рис. 1. Структурная схема процедуры моделирования

Выходные данные модели лазерного гироскопа представляют собой восстановленные отсчеты угловой скорости ω'_{z_i} с частотой дискретизации 2400 Гц.

4. Описание процедуры моделирования. Процедура моделирования выполняется с помощью нескольких программных модулей (рис. 1). На первом этапе выбирается файл, содержащий телеметрическую информацию, записанную с частотой дискретизации 1 Гц во время реального полета летательного аппарата. В процессе моделирования данные, содержащиеся в файле, подвергались требуемой обработке.

Первый модуль выделяет из входного файла телеметрическую информацию, необходимую для последующего моделирования. Состав траекторной информации: время t_j, долгота λ, широта φ, высота h, восточная V_E, северная V_N, вертикальная V_{UP} составляющие скорости, углы курса ψ, крена γ и тангажа v. Эти данные представляют собой последовательности отсчетов с частотой 1 Гц.

Реализована мультивариантность выбора траекторной информации, поскольку в телеметрическом файле содержатся:

– позиционные, скоростные данные СНС;

– позиционные, скоростные, угловые данные автономного “шулеровского” режима БИНС;

– позиционные, скоростные, угловые данные комплексного режима БИНС.

Второй модуль интерполирует данные БИНС с частоты 1 Гц на задаваемую более высокую частоту. Интерполяция осуществляется с помощью кубических сплайнов. Для каждой дискретной функции рассчитывается кусочно-непрерывная функция, состоящая из полиномов третьей степени. Задается новый массив времени t с постоянным шагом, который определяется заданной частотой дискретизации $\tau = 1/f_s$. С помощью рассчитанных интерполирующих функций создаются новые массивы траекторных данных (время t_j, географические координаты λ, φ, h, скорости V_E, V_N, V_{UP}, углы ψ, γ, v), имеющих более высокую частоту дискретизации f_s. При интерполяции (как и при предварительном сглаживании) учитывались возможные переходы значений углов курса, тангажа, крена через особые точки: $\pm\pi$, $\pm\pi/2$. В работе осуществлялась интерполяция данных на частоту 2400 Гц, соответствующую частоте данных на выходе исследуемой системы.

Третий модуль осуществляет вычисление и запись в выходные файлы идеальных показаний инерциальных датчиков: датчиков абсолютной угловой скорости (ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3}) и акселерометров (f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3}). Сжатое описание этих алгоритмов было представлено выше. Результаты работы третьего модуля, отсчеты абсолютной угловой скорости ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3} используются для проверки разработанных алгоритмов цифровой обработки квадратурных сигналов лазерного гироскопа с механической вибрационной частотной подставкой.

Четвертый модуль производит проверку выполнения “нулевого теста”, когда при помощи идеальных показаний акселерометров и гироскопов алгоритмы счисления инерциальной навигации восстанавливают опорную траекторию, которая служит основой моделирования идеальных показаний инерциальных датчиков f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3}, ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3}. Результатом работы данного модуля являются ошибки “восстановленной” опорной траектории: ошибки координат ($\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$), ошибки компонент относительной скорости в восточном и северном направлении (ΔV_E, ΔV_N) и ошибки определения углов курса $\Delta\psi$, крена $\Delta\gamma$ и тангажа $\Delta\nu$.

Четвертый модуль организован так, что для него входной информацией может служить отдельный файл с показаниями блока ДУС, полученными путем преобразований исходных идеальных показаний блока ДУС. Тем самым этот модуль позволяет осуществить тестирование используемых алгоритмов цифровой обработки сигналов ДУС в режиме автономного “шулеровского” инерциального счисления (для горизонтальных каналов БИНС).

В пятом модуле для каждого из заданных массивов имитируемых идеальных показаний ДУС ω_{z_i} выполняется решение дифференциального уравнения (3.1), формируются отсчеты разности фаз встречных волн ψ_i, по которым моделируются первичные квадратурные сигналы кольцевых лазеров (3.2).

Шестой модуль реализует выбранный алгоритм обработки [11, 13, 15] первичных квадратурных сигналов, сформированных в модуле 5. Выходными данными модуля являются массивы показаний ДУС ω'_{z_i}, которые включают погрешности, задаваемые в модели кольцевого лазера и вносимые выбранным алгоритмом обработки первичных сигналов.

Далее с помощью четвертого модуля осуществлялась проверка выполнения “нулевого теста”, когда при помощи идеальных показаний акселерометров (f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3}) и восстановленных показаний гироскопов (ω'_{z_i}, ω'_{z_2}, ω'_{z_3}), алгоритмы счисления инерциальной навигации восстанавливают опорную траекторию. Результатом являются ошибки определения координат, компонент относительной скорости в восточном и северном направлении и углов курса, крена и тангажа, обусловленные используемым методом обработки первичных сигналов лазерного гироскопа.

5. Результаты моделирования. При моделировании погрешностей инерциального счисления в гироскопических каналах БИНС задавались одинаковые погрешности, реализовывались идентичные алгоритмы подавления составляющей выходного сигнала, связанной с колебаниями кольцевого лазера (частотной подставкой). Использованы одинаковые амплитуды частотных подставок и законы их ошумления; центральные частоты колебаний кольцевых лазеров различались на заданную величину разноса частот: 400 ± 20 Гц.

Моделирование погрешностей инерциального счисления выполнено для двух типов траекторий полета. Первый тип: маневренный полет, который содержит взлет и набор высоты, динамичный участок с маневрами, снижение и возврат в начальную точку (рис. 2, *а*). Второй тип: перелет из одной точки в другую, который содержит взлет и набор высоты, участок полета с минимальными эволюциями, снижение и посадка (рис. 2, *б*).

На первом этапе решалась задача подтверждения комплексной работоспособности исследованного программно-математического обеспечения лазерного ДУС с цифровой обработкой (программные модули 5 и 6) и имитатора БИНС, реализованного в программных модулях 1–4.

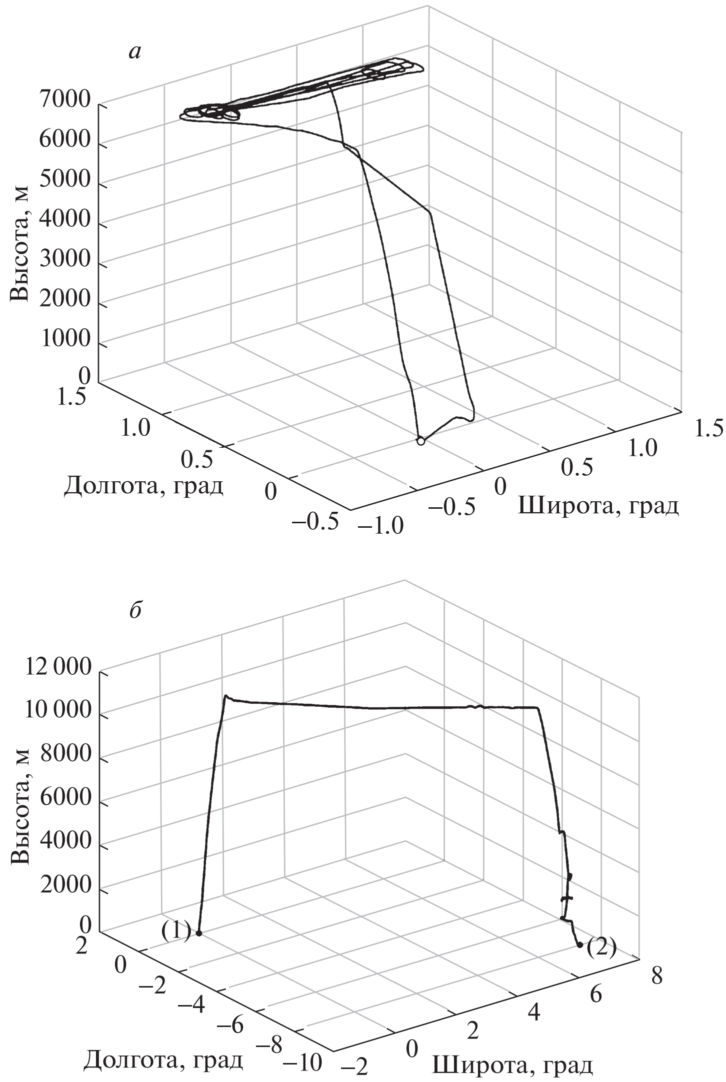

Рис. 2. Типовые траектории, для которых выполнено моделирование: *а* – маневренный полет с возвратом в исходную точку, *б* – перелет из точки 1 в точку 2

В качестве тестовой траектории была использована траектория первого типа. Случайная погрешность измерения угловой скорости в модели лазерного ДУС была задана равной нулю (статический порог синхронизации ω_L принят нулевым). Параметры режекторного фильтра: ширина полосы 20 Гц, коэффициент подавления 60 дБ. Результаты моделирования показали, что используемый метод обработки первичных сигналов лазерного гироскопа приводит к появлению ошибок, которые не превышают:

– 0.7 м по модулю в определении координат,

– 0.012 м/с компонент относительной скорости в восточном и северном направлениях,

– 1–2 угл. с по углам курса, крена и тангажа.

Полученные результаты хорошо соотносятся с результатами моделирования погрешностей углов ориентации при высокоскоростных маневрах с угловыми ускорениями, превышающих 100 град/с^2 [13].

На втором этапе в математическую модель лазерного ДУС вводилась величина ненулевого порога захвата и определялись погрешности инерциального счисления. Моделирование проводилось для траекторий первого и второго типа с теми же параметрами режекторного фильтра, что и на первом этапе. Величина статического порога синхронизации лазерного ДУС

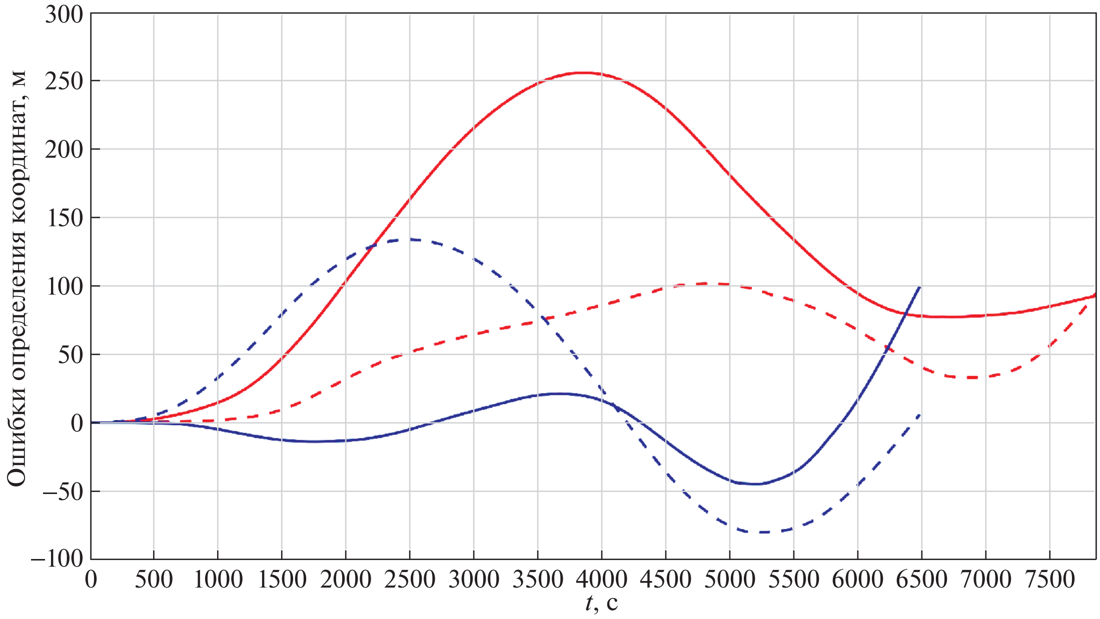

Рис. 3. Ошибки определения координат: красный цвет – маневренный полет, синий цвет – перелет, сплошные кривые – широта, пунктирные кривые – долгота

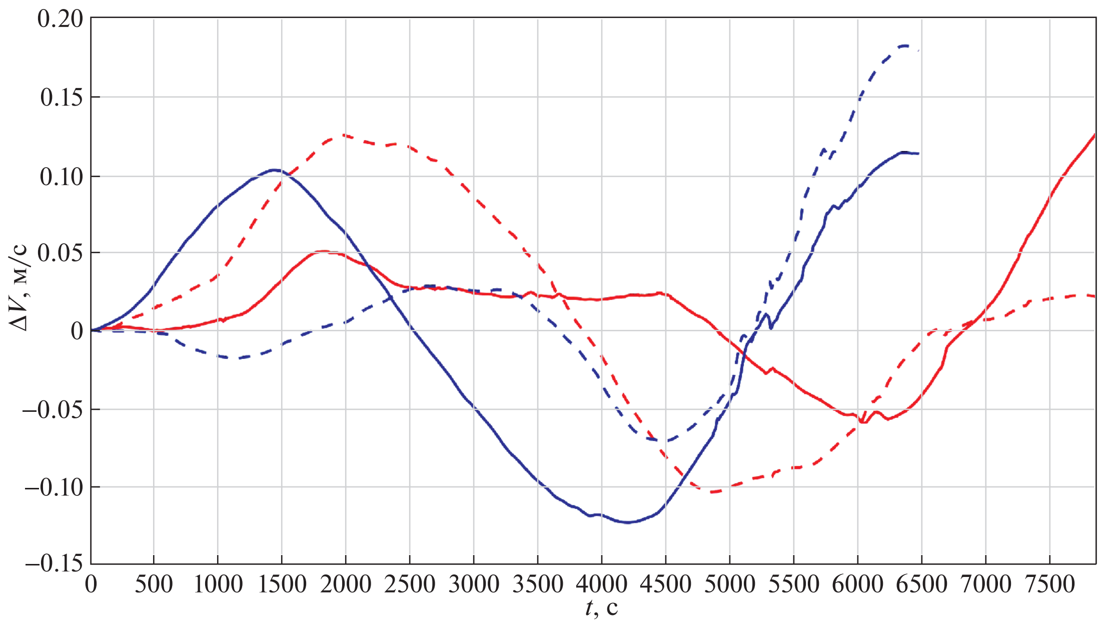

Рис. 4. Ошибки определения скоростей: красный цвет – маневренный полет, синий цвет – перелет, сплошные кривые – ΔV_E, две пунктирные кривые – ΔV_N

$\omega_L = 0.01$ град/с. Выбранная величина ω_L является характерным нижним пределом для лазерных ДУС КЛ-3, серийно выпускаемых для комплектации систем БИНС-СП2.

Результаты моделирования для типовых траекторий представлены на рис. 3–6. Введение случайной погрешности в гироскопические каналы приводит к появлению погрешностей координат, линейных скоростей и углов ориентации. Отклонения от "истинных" значений увеличиваются и составляют:

– для координат 100–250 м по модулю;

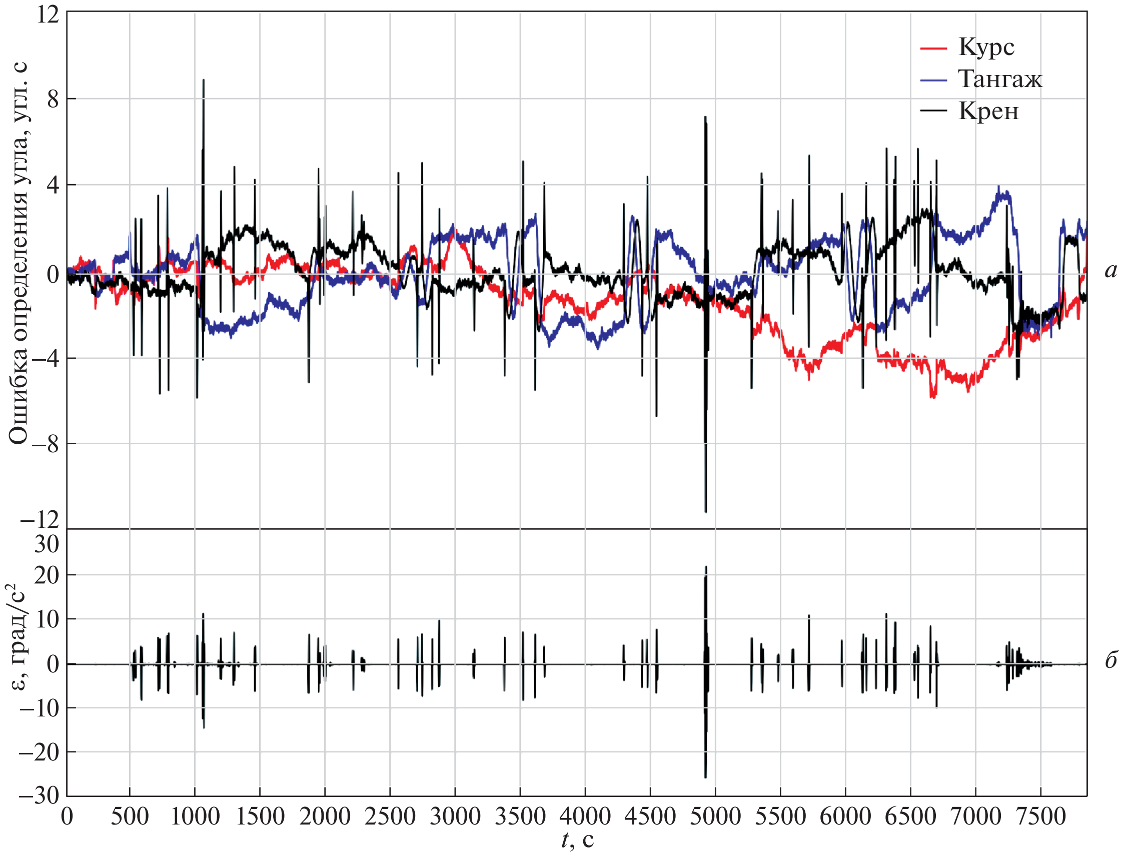

Рис. 5. Ошибки определения углов (*а*) (маневренный полет): красный цвет – курс, синий цвет – тангаж, черный цвет – крен; угловые ускорения по крену (*б*)

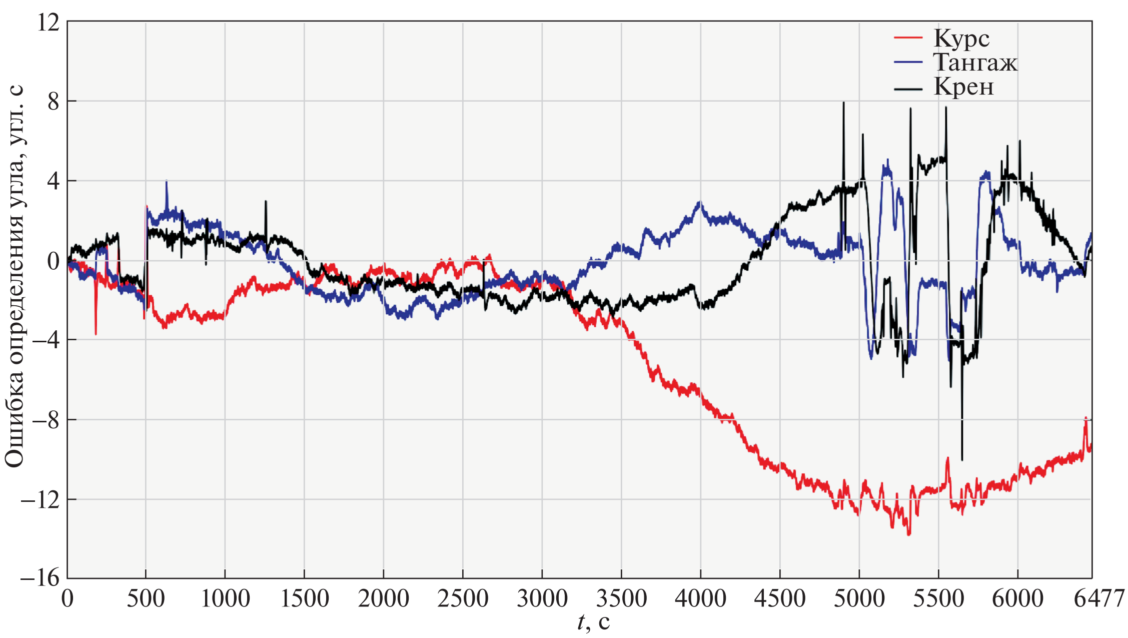

Рис. 6. Ошибки определения углов (перелет): красная кривая – курс, синяя кривая – тангаж, черная кривая – крен

– для линейных скоростей 0.05–0.2 м/с;

– для углов курса, крена и тангажа 5 угл. с с выбросами до 12 угл. с.

Ошибки определения линейных скоростей и углов ориентации увеличились на порядок, ошибки определения координат возрастают в сотни раз. Масштаб обнаруженных отклонений характерен для обоих типовых траекторий и с запасом укладывается в требования к системам класса точности БИНС-СП2 [18].

Однако очевидны и различия. В случае маневренного полета отклонения углов пространственной ориентации от истинных значений содержат большое количество выбросов, в особенности для угла крена. Их появление отражает более сложную динамику объекта, характеризующуюся значительными изменениями составляющих угловой скорости. Частые изменения курсового угла (виражи в горизонтальной плоскости, рис. 2, *а*) сопровождаются быстрыми изменениями угла крена и колебаниями соответствующей составляющей углового ускорения с большими амплитудами, что неизбежно сопровождается погрешностями, вносимыми в результат режекторной фильтрацией потока выходных данных лазерного ДУС [13]. Данный процесс хорошо иллюстрирует график изменения углового ускорения по каналу крена, приведенный на рис. 5, *б*. Однако накопление с течением времени погрешностей определения углов в данном случае не наблюдается.

В случае простого перелета количество и размах выбросов на графиках ошибок определения углов значительно меньше. Однако через 3000 с появляются явные признаки накопления погрешности определения курсового угла, величина которой в конце полета приближается к значимой для БИНС величине 12 угл. с.

Обнаруженные особенности изменения погрешностей для разных типов траекторий объекта требуют отдельного анализа, что выходит за рамки статьи, основная задача которой заключается в описании метода анализа погрешностей гироскопического канала БИНС на основе компьютерной имитации задачи.

Примененный метод анализа погрешностей гироскопического канала с помощью компьютерного имитатора БИНС позволил оценить погрешности счисления при введении режекторной фильтрации вибрационной подставки лазерного ДУС и величины случайной компоненты ухода в угле.

Полученные результаты, с одной стороны, подтверждают возможность применения такого подхода в обработке выходной информации с лазерного ДУС в инерциальных навигационных системах с погрешностью определения координат лучше 1.85 км (2σ), а с другой – демонстрируют возможности данного подхода для оценки целесообразности применения новых программно-аппаратных решений в других задачах инерциально-спутниковой навигации.

Заключение. Для двух качественно различающихся траекторий летательного аппарата определено влияние режекторной фильтрации вибрационной подставки лазерного ДУС и величины случайной компоненты ухода в угле на погрешности инерциального счисления БИНС. Фильтрация приводит к появлению ошибок, которые не превышают: 0.7 м для координат, 0.012 м/с для компонент относительной скорости в восточном и северном направлениях, 2 угл. с по углам курса, крена и тангажа. Введение случайной погрешности в гироскопические каналы, вызванной связью встречных волн в кольцевом лазере и ошумлением вибрационной подставки, сопровождается увеличением погрешностей определения линейных скоростей до 0.2 м/с, углов ориентации до 5 угл. с, а ошибки определения координат возрастают до 250 м.

Развитый подход создает предпосылку для исследования вкладов составляющих погрешностей инерциальных датчиков и особенностей алгоритмов обработки их первичных сигналов на погрешность инерциального счисления БИНС. Выгодное преимущество подобного моделирования заключается в возможности исследовать влияние каждого из факторов по отдельности и распространить анализ, например, на нестабильность дрейфа выходного сигнала гироскопа [10].

Описанный метод тщательной компьютерной имитации для оценки погрешностей гироскопического канала БИНС без каких-либо серьезных изменений может быть использован в других задачах инерциально-спутниковой навигации, возникающих при сравнительном анализе возможностей инерциальных датчиков различных типов или для оценки целесообразности применения новых программно-аппаратных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеев В.В., Распопов В.Я.* Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб.: Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2009. 280 с.
2. *Емельянцев Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2016. 393 с.
3. *Веремеенко К.К., Желтов С.Ю., Ким Н.В., Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н.* Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратах. М.: Физматлит, 2009. 556 с.
4. *Тихомиров В.А., Александров С.Ю.* Моделирование информационного потока бесплатформенной инерциальной системы самолета // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического ун-та. 2014. Т. 1. № 4. С. 23–35.
5. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. 136 с.
6. *Богданов О.Н.* Методика согласованного моделирования измерений инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта с приложением к задачам инерциальной и спутниковой навигации: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 146 с.
7. *Богданов О.Н., Фомичев А.В.* Имитация показаний идеальных датчиков угловой скорости БИНС на основе телеметрических данных движения объекта // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2014. № 3. С. 40–47.
8. *Баранов Э.В., Богданов О.Н., Голован А.А., Кокорев С.М., Куликов Д.Ю., Пестраков М.И.* Имитатор спутниковых радиосигналов с блоком универсального моделирования работы БИНС // Новости навигации. 2016. № 1. С. 22–27.
9. *Aronovitz F.* Fundamentals of the Ring Laser Gyro // Optical Gyros and their Application // RTO-AG-339. 1999. P. 3-1–3-45.
10. *Molchanov A.V., Serebryakov A.E., Klimakov V.V., Dao H.N., Mishin V.Yu., Chirkin M.V.* The Effect of Slow Fluctuation Processes in the Ring Laser Gyroscope on its Bias Instability // Proc. 25-th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, Russia, 2018. P. 302–305.
11. *Molchanov A.V., Belokurov V.A., Chirkin M.V., Koshelev V.I., Mishin V.Yu., Morozov D.A.* Precision Laser Gyro with a Digital Channel for Quadrature Signal Processing // Proc. 22nd Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, Russia, 2015. P. 307–314.
12. *Молчанов А.В., Степанов А.Ю., Чиркин М.В.* Статистические характеристики подложек зеркал и случайная погрешность лазерного гироскопа // Авиакосмическое приборостроение. 2008. № 3. С. 9–17.
13. *Chirkin M.V., Mishin V.Yu., Morozov D.A., Golovan A.A., Molchanov A.V.* Filtering Output Signals of a Laser Gyro Triad // Proc. 21 Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, Russia, 2014. P. 388–390.
14. *Алексеев С.Ю., Чиркин М.В., Мишин В.Ю., Морозов Д.А., Борисов М.В., Молчанов А.В., Захаров М.А.* Методика измерения порога синхронизации при изготовлении и эксплуатации прецизионных кольцевых лазеров // Гироскопия и навигация. 2013. № 2. С. 75–83.
15. *Мишин В.Ю., Молчанов А.В., Чиркин М.В.* Проблема цифровой обработки первичных квадратурных сигналов в лазерных гироскопах // Приборы. 2013. № 1 (151). С. 33–38.
16. *Molchanov A.V., Belokurov V.A., Chirkin M.V., Kagalenko M.B., Koshelev V.I., Mishin V.Yu., Morozov D.A.* The Application of Advanced Processing Technique to the Triad of Precision Laser Gyroscopes // Proc. of 23rd Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, Russia, 2016. P. 120–122.
17. *Зимин В.С., Мишин В.Ю., Морозов Д.А.* Особенности функционирования вибрационной частотной подставки в триаде лазерных гироскопов // “Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2017”. Сб. тр. Междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф. В 4 т. Рязань, 2017. С. 249–253.
18. ГОСТ РВ 52 339-2005. Системы бесплатформенные инерциально-навигационные на лазерных гироскопах. М., 2005. С. 15.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 142–156

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.78

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ ПОВОРОТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА[1]

© 2021 г. А. В. Молоденков[a,*], Я. Г. Сапунков[a]

[a] Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

*e-mail: molalexei@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.
После доработки 13.08.2020 г.
Принята к публикации 28.12.2020 г.

В кватернионной постановке рассматривается задача оптимального по быстродействию поворота космического аппарата как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольно заданных граничных условиях. В классе обобщенных конических движений произведена модификация задачи оптимального поворота, которая позволила получить ее аналитическое решение. Аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального поворота. Дается алгоритм квазиоптимального поворота космического аппарата. Приводятся числовые примеры, показывающие, что решение модифицированной задачи хорошо аппроксимирует решение традиционной задачи оптимального поворота космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338821030124

Введение. Построение управления пространственной переориентацией космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает задачи программного углового движения (поворота), программного управления и поиска управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача расчета программного углового движения и реализующего его управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (например, [1–8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального поворота в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В настоящей статье (разд. 1–3) в традиционной постановке рассматривается задача оптимального по быстродействию программного поворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА с ограниченной функцией управления. С применением кватернионов на основании принципа максимума Понтрягина получены выражения для структуры оптимального управления, функции Гамильтона–Понтрягина и сопряженной системы уравнений для исходной задачи. В разд. 4 дается краткое описание численного решения традиционной задачи [9] и приведены наводящие соображения, обосновывающие переход от традиционной задачи оптимальной переориентации КА к так называемой модифицированной задаче оптимального разворота. В разд. 5, 6 представлено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального по быстродействию поворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, доведенное до алгоритма. В классе обобщенных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

конических движений произведена модификация классической задачи оптимального по быстродействию поворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача с функционалом быстродействия, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Найденное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (кавазиоптимальное) решение классической задачи оптимального поворота КА при произвольных граничных условиях. Получены явные выражения для вектора угловой скорости, управляющего момента и траектории движения КА. Вектор управляющего момента получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости традиционной задачи оптимального поворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи, — плоский эйлеров поворот, коническое движение — решения традиционной и модифицированной задач полностью совпадают. В разд. 7 приводятся численные примеры, показывающие близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального поворота произвольного КА (твердого тела) при произвольных граничных условиях. Среди примеров рассматриваются повороты Международной космической станции (МКС) и КА “Спейс Шаттл”.

Статья продолжает исследования, начатые в [10–13]. В [10, 11] были получены аналитические решения задач оптимальных по быстродействию поворотов сферически-симметричного КА и осесимметричного КА в классах конических движений, а в [12, 13] — квазиоптимальные решения задач минимальных по энергии и в смысле комбинированного функционала поворотов произвольного КА.

Отметим, что в литературе известно квазиоптимальное решение задачи поворота КА [14], которое получено с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана на основе решения задачи оптимальной переориентации КА в кинематической постановке, где функцией управления выступает вектор угловой скорости КА. Направление вектора угловой скорости КА при этом определяется граничными условиями по угловому положению КА.

1. Постановка традиционной задачи. Движение КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации вокруг центра масс описывается уравнениями [1]

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], \tag{1.2}$$

где $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — кватернион поворота КА, $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости, i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, связанного с КА трехмерного векторного пространства, $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^{\mathrm{T}}$ — вектор внешнего момента, действующего на КА, матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

— тензор инерции. Фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$ и управление $\mathbf{M}$ удовлетворяют требованиям задачи оптимального управления [15] ($\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ — непрерывные функции, $\mathbf{M}(t)$ — кусочно-непрерывная функция); кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ нормирован, т.е. $\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, символ “$\circ$” означает кватернионное умножение, а “[. , .]” — векторное произведение. В динамических уравнениях Эйлера (1.2) I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции твердого тела.

На управляющий момент наложено ограничение

$$|\mathbf{M}| \le M_{\max}. \tag{1.3}$$

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T \tag{1.4}$$

и угловой скорости КА

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{1.5}$$

Необходимо определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1.1), (1.2) при ограничении (1.3) и граничных условиях (1.4), (1.5), доставляющее минимум функционалу (задача быстродействия)

$$J = T. \tag{1.6}$$

2. Переход к безразмерным переменным. Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам

$$t^{\text{безраз}} = t(M_{\max}/I^{\text{масш}})^{1/2}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\omega}(I^{\text{масш}}/M_{\max})^{1/2}, \quad \mathbf{M}^{\text{безраз}} = \mathbf{M}/M_{\max},$$

$$I_k^{\text{безраз}} = I_k/I^{\text{масш}}, \quad k = 1,2,3, \quad I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)/3)^{1/2},$$

при этом вид формул (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) не изменится, а ограничение (1.3) запишется так:

$$|\mathbf{M}| \le 1. \tag{2.1}$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи в безразмерных переменных и верхние индексы у них будут опущены.

3. Применение принципа максимума. Выполним процедуру принципа максимума Понтрягина [1, 15]. Введем вспомогательные функции $\boldsymbol{\Psi}(t)$ (кватернион) и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (вектор), сопряженные к фазовым переменным $\boldsymbol{\Lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H = (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega})/2 + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]), \tag{3.1}$$

где “(. , .)” – скалярное произведение векторов.

Сопряженная система:

$$\begin{cases} 2\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{\Psi} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \boldsymbol{\Psi})/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}], \end{cases} \tag{3.2}$$

где “vect(.)” обозначает векторную часть кватерниона, а “~” – сопряжение кватерниона. Как видно, уравнения для переменных $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу $\mathbf{C}$:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{C} \circ \boldsymbol{\Lambda}. \tag{3.3}$$

Используя это и введя обозначение [1]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \boldsymbol{\Psi}) = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \boldsymbol{\Lambda}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{c}_v = \text{vect}\mathbf{C}$, сопряженную систему (3.2) запишем так:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \boldsymbol{\Lambda}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (1.1) (замена кватернионной сопряженной переменной $\boldsymbol{\Psi}$ на векторную переменную $\mathbf{p}$ (3.4)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после принципа максимума, на четыре.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (3.1) на компактном множестве (2.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/\left|\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}\right|. \tag{3.6}$$

Функция Гамильтона–Понтрягина (3.1) с учетом новой переменной $\mathbf{p}$ (4.4) примет вид

$$H = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})/2 + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]). \tag{3.7}$$

4. Наводящие соображения. В данном разделе приводятся примеры численного решения традиционной задачи оптимального по быстродействию поворота для различных вариантов динамической конфигурации КА и соображения, основанные на этих примерах. Среди примеров рассмотрены повороты КА “Спейс Шаттл” [16] и МКС [17].

Численное решение задачи оптимального поворота (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (2.1), сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}], \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{c}_v = \mathbf{const}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/|\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}|, \tag{4.4}$$

$$H^{\text{опт}}(T) = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p})/2 + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}^{\text{опт}} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}])\big|_{t=T} = 1, \tag{4.5}$$

откуда подлежат нахождению величины $\mathbf{M}^{\text{опт}}$, $T^{\text{опт}}$, $\mathbf{\Lambda}^{\text{опт}}$, $\boldsymbol{\omega}^{\text{опт}}$, $\mathbf{c}_v$.

Конечное условие (4.3) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega}$ в виде

$$\operatorname{vect}(\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{4.6}$$

Для решения краевой задачи (4.1), (4.2), (4.4)–(4.6) разработан итерационный численный метод [9], представляющий собой комбинацию методов Рунге–Кутты, Ньютона и градиентного спуска. Важно отметить, что условие совпадения кватерниона ориентации твердого тела в конечный момент времени с кватернионом, определяющим заданную конечную ориентацию твердого тела (условие (4.3)), заменено условием обращения в нуль векторной части кватернионного произведения $\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T$ (4.6). В [16, 18] авторы пытались выполнить условие $\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве первого приближения по недостающим начальным условиям при решении краевой задачи (4.1), (4.2), (4.4)–(4.6) оптимального управления с произвольными граничными условиями по угловому положению и угловой скорости твердого тела берутся начальные условия по переменным $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}$, полученные при решении задачи оптимального поворота сферически-симметричного КА в классе плоских эйлеровых поворотов.

Для твердых тел (КА) с различным распределением масс сравним кинематические характеристики оптимального движения в задачах оптимального поворота с одними и теми же граничными условиями.

Например:

$$\mathbf{\Lambda}_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_T = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, -0.59). \tag{4.9}$$

Тело 1. Сферически-симметричное твердое тело $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$.

Тело 2. Произвольное тело $I_1 = 0.9869$, $I_2 = 1.1843$, $I_3 = 0.7895$.

Тело 3. Произвольное тело $I_1 = 0.9506$, $I_2 = 1.3308$, $I_3 = 0.5704$.

Тело 4. МКС как произвольное твердое тело $I_1 = 4853000$ кг · м^2, $I_2 = 23601000$ кг · м^2, $I_3 = 26278000$ кг · м^2 (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные величины).

Тело 5. КА “Спейс Шаттл” (динамические характеристики КА “Спейс Шаттл” такие же, как у почти осесимметричного твердого тела): $I_1 = 3400648$ кг · м^2, $I_2 = 21041672$ кг · м^2 или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$; $I_3 \approx I_2$.

Таблица 1

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1 (t_1)	0.80437	0.36758	–0.37955	0.27171	–0.03412	–0.03576	–0.55873
Тело 2 (t_2)	0.80480	0.36812	–0.37874	0.27082	–0.03497	–0.03416	–0.57245
Тело 3 (t_3)	0.80582	0.36894	–0.37740	0.26853	–0.03943	–0.03158	–0.60068
Тело 4 (t_4)	0.80405	0.36949	–0.38005	0.26935	–0.04073	–0.04253	–0.58311
Тело 5 (t_5)	0.80311	0.37231	–0.37877	0.27006	–0.02850	–0.04501	–0.58950

Таблица 2

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1 (t_1^0)	0.83121	0.36278	–0.35560	0.22588	0.02843	–0.04552	–0.60910
Тело 4 (t_4^0)	0.82396	0.35523	–0.36235	0.25220	0.02834	–0.05283	–0.61018
Тело 5 (t_5^0)	0.82698	0.35296	–0.36222	0.24560	0.02813	–0.04666	–0.61162

Время быстродействия $T_k^{\text{опт}}$, где $k = \overline{1,5}$, означает номер тела (КА), в каждом из случаев:

$$T_1^{\text{опт}} = 0.8965, \quad T_2^{\text{опт}} = 0.8858, \quad T_3^{\text{опт}} = 0.8654, \quad T_4^{\text{опт}} = 0.8774, \quad T_5^{\text{опт}} = 0.8728.$$

В табл. 1 приведены кинематические характеристики (компоненты кватерниона положения КА и вектора угловой скорости) для указанных КА в промежуточных точках t_k интервалов времени движения $[0, T_k^{\text{опт}}]$ при решении задачи оптимального управления с граничными условиями (4.7)–(4.9) в традиционной постановке. Промежуточные точки t_k выбирались максимально близкими друг к другу (насколько позволяет программа численного решения задачи с переменным шагом вычисления по времени t) и ориентированы на приблизительную середину наибольшего интервала $[0, T_1^{\text{опт}}]$:

$$t_1 = 0.4508, \quad t_2 = 0.4504, \quad t_3 = 0.4502, \quad t_4 = 0.4513, \quad t_5 = 0.4515.$$

В табл. 2 рассмотрим кинематические характеристики оптимального движения тел 1, 4, 5 для случая, когда граничные условия по угловому положению определяются выражениями (4.7), (4.8), а по угловой скорости они нулевые (поворот из положения покоя в положение покоя):

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, 0.0). \tag{4.10}$$

Время быстродействия при этом $T_1^{\text{опт}} = 1.3916$, $T_4^{\text{опт}} = 1.5645$, $T_5^{\text{опт}} = 1.5278$. Промежуточные точки t_k^0, ориентированные на приблизительную середину наибольшего интервала $[0, T_4^{\text{опт}}]$, таковы:

$$t_1^0 = 0.7809, \quad t_4^0 = 0.7823, \quad t_5^0 = 0.7815.$$

Аналогичные расчеты проводились и для других начальных и конечных состояний КА. Из табл. 1, 2 и других проведенных расчетов с другими граничными условиями видно, что кинематические характеристики оптимального движения КА независимо от их динамической конфигурации, достаточно похожи. Отметим, что в задаче оптимального по энергии поворота произвольного твердого тела с фиксированным временем [13] это проявляется более явно, так как интервал времени движения твердого тела и его промежуточная (срединная) точка одинаковы во всех примерах. Отсюда следует, что, используя кинематические характеристики тела со сферической симметрией, из динамических уравнений Эйлера с учетом моментов инерции произвольных тел можно вычислить управляющие моменты для движения произвольных тел. Такие моменты можно рассматривать как квазиоптимальные управляющие моменты для перевода КА из начального состояния в конечное состояние. Выражения для траектории углового движения и угловой скорости КА можно построить аналитически в явном виде на основе решения так называемой модифицированной задачи оптимального поворота, а управляющий момент определить исходя из решения обратной задачи динамики твердого тела. Покажем это.

5. Модифицированная задача оптимального поворота. Движение КА по-прежнему описывается соотношениями (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (2.1), при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости КА произвольны и заданы.

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального поворота твердого тела является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения $\mathbf{\Lambda}(t)$ из уравнения (1.1) при известных $\mathbf{\Lambda}_0$, $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (2.1) при условии, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ задается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t), \tag{5.1}$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции времени, известно решение [19], удовлетворяющее начальному условию (1.3):

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}, \tag{5.2}$$

где символ $\mathbf{exp}\{.\}$ обозначает кватернионную экспоненту [1]. Формулы (6.1), (6.2) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального поворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–5, 7, 8, 10].

Заметим [19], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (2.1) с угловой скоростью:

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = -(\mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t)),$$

отличающейся от (5.1) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\boldsymbol{\omega}(t)$, не известно.

Другими словами, предлагаемая структура угловой скорости (5.1) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Выражение (5.1) и решение (5.2) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона $\mathbf{K}$, $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион $\mathbf{\Lambda}$ будут определяться соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)\ /\ 2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(t) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \tag{5.4}$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда если ввести обозначения

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \tag{5.5}$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2, \tag{5.6}$$

где f, f_1, g, g_1 — фазовые координаты, u_1, u_2 — управляющие параметры.

Ограничимся случаем, когда кватернион $\mathbf{K}$ представляется в виде произведения:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}, \tag{5.7}$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (5.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже включен в формулу (5.3), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}. \tag{5.8}$$

Условия того, что выражения для $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ (5.3), (5.4) удовлетворяют граничным условиям (1.4), (1.5) с учетом (5.7), (5.8), запишутся как

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0)\sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0)\cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{5.9}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T)\sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T)\cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T. \tag{5.11}$$

Управляющий момент, соответствующий решению модифицированной задачи оптимального поворота КА, определяется из (1.2), (5.1), (5.5), (5.6) по формуле

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1\sin g + f_1 g_1\cos g) + \mathbf{i}_2(u_1\cos g - f_1 g_1\sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + \\ + [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1\sin g + \mathbf{i}_2 f_1\cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K}, \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1\sin g + \mathbf{i}_2 f_1\cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})].\end{gathered} \tag{5.12}$$

Ограничение на модуль вектора $\mathbf{M}$ выражается через $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ по (2.1):

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{(\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}})^2 + 2(\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]) + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]^2} \le 1. \tag{5.13}$$

Учитывая (5.7), компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ имеют явный вид:

$$\begin{gathered}\omega_1 = f_1\sin g\cos\alpha_2 - g_1\sin\alpha_2, \\ \omega_2 = f_1(\sin g\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos g\cos\alpha_1) + g_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2, \\ \omega_3 = f_1(\sin g\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos g\sin\alpha_1) + g_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2,\end{gathered} \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered}\dot{\omega}_1 = (u_1\sin g + f_1 g_1\cos g)\cos\alpha_2 - u_2\sin\alpha_2, \\ \dot{\omega}_2 = u_1(\sin g\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos g\cos\alpha_1) + \\ + f_1 g_1(\cos g\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin g\cos\alpha_1) + u_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2, \\ \dot{\omega}_3 = u_1(\sin g\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos g\sin\alpha_1) + \\ + f_1 g_1(\cos g\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin g\sin\alpha_1) + u_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2.\end{gathered} \tag{5.15}$$

Чтобы выполнить условие (5.13) на управляющие параметры u_1, u_2 системы (5.6), наложим ограничение

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \le u_*, \tag{5.16}$$

где величина u_* $(0 < u_* < 1)$ выбирается из требования выполнения условия (5.13).

Тогда для управляемой системы (5.6) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать как приближенное (квазиоптимальное) решение исходной задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (2.1). Требуется найти оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$, удовлетворяющие ограничению (5.16), которые за минимальный промежуток времени переводят управляемую систему (5.6) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \tag{5.17}$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \tag{5.18}$$

и удовлетворяющие соотношениям (5.9)–(5.11), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению.

Соотношения (5.9)–(5.11) можно переписать в виде

$$\mathbf{i}_1 f_1(0)\sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0)\cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{5.19}$$

$$\mathbf{i}_1 f_1(T)\sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T)\cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{5.20}$$

$$\mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2. \tag{5.21}$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального поворота КА.

6. Решение задачи с помощью принципа максимума. Функция Гамильтона–Понтрягина для управляемой системы (5.6) в случае задачи быстродействия имеет вид

$$H = -1 + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2, \tag{6.1}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot\psi_1 = 0, \quad \dot\psi_2 = 0, \quad \dot\psi_3 = -\psi_1, \quad \dot\psi_4 = -\psi_2. \tag{6.2}$$

Общее решение уравнений (6.2), содержащее произвольные постоянные $c_1,\ldots,c_4$, имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \tag{6.3}$$

Из условия максимума для функции Гамильтона–Понтрягина (6.1) с учетом ограничения (5.16) определяется оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_1 &= u_*(-c_1 t + c_3)/\sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}, \\ u_2 &= u_*(-c_2 t + c_4)/\sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

После подстановки (6.4) в систему уравнений (5.6) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных $c_1,\ldots,c_8$:

$$\begin{gathered} f = -c_1 u_*\{(t/2 - A/2 - Bc_2/c_1)F(t) + B[B/2 + (t-A)c_2/c_1]\ln(t - A + F(t))\}/C + c_5 t + c_6, \\ g = -c_2 u_*\{(t/2 - A/2 + Bc_1/c_2)F(t) - B[-B/2 + (t-A)c_1/c_2]\ln(t - A + F(t))\}/C + c_7 t + c_8, \\ f_1 = -c_1 u_*[F(t) + B\ln(t - A + F(t))c_2/c_1]/C + c_5, \\ g_1 = -c_2 u_*[F(t) - B\ln(t - A + F(t))c_1/c_2]/C + c_7, \\ A = (c_1 c_3 + c_2 c_4)/C^2, \quad B = (c_1 c_4 - c_2 c_3)/(c_1^2 + c_2^2), \quad C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad F(t) = \sqrt{(t-A)^2 + B^2}. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Так как c_6 входит в функцию f как аддитивная постоянная, то из формулы (5.4) видно, что эта постоянная не оказывает влияние; по этой причине постоянную c_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1,\ldots,c_5$, $c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ и времени T служит девять уравнений из системы (5.19)–(5.21) (отметим, что в кватернионном уравнении (5.21) независимыми являются только три уравнения в скалярной форме из-за нормированности кватерниона $\mathbf{\Lambda}$) и условие равенства нулю функции Гамильтона–Понтрягина (6.1) при $t = T$. Если формулы (6.5) подставить в (5.3), (5.4), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории КА. Эти выражения определят оптимальный по быстродействию поворот КА в классе обобщенных конических движений. Формула (5.12) с учетом (6.4), (6.5) найдет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального поворота КА, тем самым, решена полностью.

Следует отметить, что решения для управляющих параметров u_1, u_2 и фазовых координат f, g, f_1, g_1, которые определяются соотношениями (6.4), (6.5), при условии, что $c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0$, соответствуют непрерывным управляющим параметрам u_1, u_2 и, следовательно, непрерывным управляющим моментам $\mathbf{M}$, согласно (5.12). Если $c_1 c_4 - c_2 c_3 = 0$, то допускаются разрывные решения для управляющих параметров u_1, u_2 и управляющих моментов $\mathbf{M}$. В последнем случае для c_1, c_2, c_3, c_4 выполняется соотношение

$$c_3/c_1 = c_4/c_2 = t_*. \tag{6.6}$$

Тогда выражения (6.4) для управляющих параметров представляются в виде кусочно-постоянных функций

$$\begin{aligned} u_1 &= -c_1 u_* \operatorname{sign}(t - t_*)/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \\ u_2 &= -c_2 u_* \operatorname{sign}(t - t_*)/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Из формул (6.7) следует, что если t_* будет располагаться внутри отрезка времени $[0, T]$, то оптимальное управление будет состоять из двух этапов, на каждом из которых управляющие параметры сохраняют постоянные значения. В противном случае оптимальное управление будет состоять из одного этапа с постоянными значениями управляющих параметров. Решение для фазовых координат с учетом (6.7) будет определяться полиномами первой и второй степени по t:

$$
\begin{gathered}
f = -c_1 u_*(t-t_*)^2 \operatorname{sign}(t-t_*)/2C + c_5(t-t_*) + c_6, \\
g = -c_2 u_*(t-t_*)^2 \operatorname{sign}(t-t_*)/2C + c_7(t-t_*) + c_8, \\
f_1 = -c_1 u_*(t-t_*)\operatorname{sign}(t-t_*)/C + c_5 = -c_1 u_* \left|t-t_*\right|/C + c_5, \\
g_1 = -c_2 u_*(t-t_*)\operatorname{sign}(t-t_*)/C + c_7 = -c_2 u_* \left|t-t_*\right|/C + c_7, \quad C = \sqrt{c_1^2+c_2^2}.
\end{gathered} \tag{6.8}
$$

Решение (6.8) построено с учетом непрерывности фазовых координат в точке разрыва управляющих параметров при $t = t_*$. Отметим, что постоянная c_6 может быть положена равной нулю, а c_1 – равной +1 или –1 (так как формулы (6.7), (6.8) можно привести к виду, в котором c_2, c_3, c_4 будут присутствовать в виде отношений этих величин к c_1). Следовательно, выражения (6.7), (6.8) содержат пять произвольных постоянных c_2, c_5, c_7, c_8, t_*. Для определения постоянных c_2, c_5, c_7, c_8, t_* и неизвестных величин T, α_1, α_2 служат девять скалярных соотношений (5.19)–(5.21). Из них следует, что решения задачи с разрывом управляющих параметров u_1, u_2 будут возникать только при определенной связи между заданными величинами $\boldsymbol{\Lambda}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\Lambda}_T$, $\boldsymbol{\omega}_T$. Если произвольным образом менять величины $c_2, c_5, c_7, c_8, t_*, T, \alpha_1, \alpha_2$, то из соотношений (5.19)–(5.21) может быть получено множество значений $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\Lambda}_T$, $\boldsymbol{\omega}_T$, при которых возможно решение задачи оптимального разворота с разрывом управляющих параметров u_1, u_2 и, следовательно, с разрывным управляющим моментом $\mathbf{M}$.

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ($I_1 = I_2 = I_3$) квадрат модуля безразмерного управляющего момента традиционной задачи выражается по (5.12), (5.14), (5.15) через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$
\mathbf{M}^2 = u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2. \tag{6.9}
$$

Если в задаче оптимального по быстродействию поворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ положить параллельными $\operatorname{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T)$ (плоский эйлеров поворот КА), то решения задач в традиционной и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение традиционной задачи оптимального поворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений [10]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (6.9) обращается в нуль и модуль вектора $\mathbf{M}$ в модифицированной задаче постоянен (равен величине ограничения).

При решении традиционной задачи оптимального поворота КА из условия максимума для функции Гамильтона–Понтрягина следует, согласно (3.6), что $\left|\mathbf{M}\right| \equiv 1$. В модифицированной задаче быстродействия также из условия максимума для функции Гамильтона–Понтрягина, согласно (6.4), имеем $\sqrt{u_1^2+u_2^2} = u_*$, где u_* определяется из условия, чтобы вычисленный управляющий момент удовлетворял условию $\left|\mathbf{M}\right| \le 1$. Управляющий момент, полученный при квазиоптимальном решении задачи, может не удовлетворять условию $\left|\mathbf{M}\right| \equiv 1$. По этой причине время движения в квазиоптимальной задаче может немного отличаться от времени решения традиционной задачи.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального по быстродействию поворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольно заданных граничных условиях в классе обобщенных конических движений в безразмерных переменных.

Ш а г 1. По заданным граничным условиям по угловому положению $\boldsymbol{\Lambda}_0$, $\boldsymbol{\Lambda}_T$ (1.4), угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ (1.5) из формул (5.7), (5.8), девяти скалярных уравнений системы (5.19)–(5.21) и условия равенства нулю выражения (6.1) при $t = T$ с учетом (6.3)–(6.5) определяются девять неизвестных постоянных задачи $c_1, \ldots, c_5$, c_7, c_8, α_1, α_2 и время T, а также строятся функции f, f_1, g, g_1.

Ш а г 2. Используя формулы (5.7), находим компоненты кватерниона $\mathbf{K}$.

Таблица 3

Постоянные	КА				
	Тело 1	Тело 2	Тело 3	Тело 4	Тело 5
c_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
c_2	−1.03798	−1.04032	−1.04032	−0.97083	−0.96543
c_3	0.67161	0.67114	0.67114	0.68530	0.68641
c_4	−0.70520	−0.70617	−0.70617	−0.67693	−0.67460
c_5	0.01875	0.01877	0.01877	0.01837	0.01835
c_7	−0.73653	−0.73683	−0.73683	−0.72792	−0.72725
c_8	−0.73932	−0.73947	−0.73947	−0.79459	−0.73418
α_1	−0.04218	−0.04218	−0.04218	−0.04218	−0.04218
α_2	−0.22280	−0.22280	-0.22280	−0.22280	−0.22280
u_*	0.99450	0.99570	0.99570	0.96050	0.95780

Таблица 4

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1 (τ_1)	0.80452	0.36763	−0.37817	0.27309	−0.02646	−0.02650	−0.55603
Тело 2 (τ_2)	0.80453	0.36761	−0.37817	0.27309	−0.02645	−0.02655	−0.55654
Тело 3 (τ_3)	0.80453	0.36761	−0.37817	0.27309	−0.02645	−0.02655	−0.55654
Тело 4 (τ_4)	0.80424	0.36816	−0.37822	0.27313	−0.02681	−0.02529	−0.54140
Тело 5 (τ_5)	0.80422	0.36820	−0.37823	0.27313	−0.02684	−0.02519	−0.54021

Ш а г 3. По формуле (5.3)

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости твердого тела.

Ш а г 4. По формуле (5.4)

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

Ш а г 5. Используя формулу (5.12), вычисляется вектор управляющего момента КА.

7. Численные примеры. В данном разделе рассматриваются сравнительные результаты численных решений традиционной и модифицированной задач оптимального по быстродействию поворота КА. Для модифицированной задачи выполнялись расчеты по аналитическому алгоритму разд. 6. Значения постоянных α_1, α_2, $c_1, \ldots, c_5, c_7, c_8$, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, и ограничивающей модуль управления величины u_* для разворотов тел 1–5 с граничными условиями (4.7)–(4.9) приведены в табл. 3.

Время быстродействия модифицированной задачи T_k, где $k = \overline{1,5}$, означает номер тела, в каждом из случаев составило:

$$T_1 = 0.8982, \quad T_2 = 0.8977, \quad T_3 = 0.8977, \quad T_4 = 0.9148, \quad T_5 = 0.9162.$$

Решения традиционной (разд. 4) и модифицированной задач оказались близки. Для примера в табл. 4 приведем значения компонент кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ для КА в промежуточных точках τ_k интервалов времени движения $[0, T_k]$ при решении задачи разворота с граничными условиями (4.7)–(4.9) в модифицированной постановке. Точки τ_k выбирались максимально

Таблица 5

t	$M_1^{традиц}$	$M_2^{традиц}$	$M_3^{традиц}$	t	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.65603	0.48884	−0.57503	0	−0.63762	0.51267	−0.57285
t_1	−0.70530	0.41389	−0.57554	τ_1	−0.72143	0.38795	−0.56710
$T_1^{опт}$	0.78625	−0.29616	0.54230	T_1	0.84240	−0.07923	0.52813

Таблица 6

t	$M_1^{традиц}$	$M_2^{традиц}$	$M_3^{традиц}$	t	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.66476	0.57169	−0.48090	0	−0.63803	0.51278	−0.51437
t_2	−0.72876	0.48752	−0.48086	τ_2	−0.71825	0.46267	−0.44870
$T_2^{опт}$	0.82962	−0.32708	0.45249	T_2	0.83165	−0.09390	0.41841

Таблица 7

t	$M_1^{традиц}$	$M_2^{традиц}$	$M_3^{традиц}$	t	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.66247	0.64225	−0.38554	0	−0.63803	0.51278	−0.51437
t_3	−0.74532	0.54519	−0.38375	τ_3	−0.69743	0.52222	−0.32400
$T_3^{опт}$	0.86416	−0.34931	0.36223	T_3	0.80104	−0.10551	0.30229

Таблица 8

t	$M_1^{традиц}$	$M_2^{традиц}$	$M_3^{традиц}$	t	$M_1^{модиф}$	$M_2^{модиф}$	$M_3^{модиф}$
0	−0.12849	0.57345	−0.80910	0	−0.14290	0.60640	−0.78220
t_4	−0.17884	0.53974	−0.82261	τ_4	−0.16535	0.42109	−0.67304
$T_4^{опт}$	0.20885	−0.56190	0.80041	T_4	0.19680	−0.08921	0.60627

близкими к рассмотренным ранее в традиционной задаче точкам t_k (насколько позволяет программа численной реализации алгоритма с переменным шагом вычисления по времени t)

$$\tau_1 = 0.4491, \quad \tau_2 = 0.4488, \quad \tau_3 = 0.4488, \quad \tau_4 = 0.4574, \quad \tau_5 = 0.4581.$$

В табл. 5–8 рассмотрим значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в промежуточных точках при решении традиционной ($\mathbf{M}^{традиц}$) и модифицированной ($\mathbf{M}^{модиф}$) задач для тел 1–4.

Для тела 4 (МКС) на рис. 1 представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, векторной части кватерниона ориентации $\Lambda_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, и компонент вектора управляющего момента $M_i\,(t)$, $i = \overline{1,3}$, в модифицированной задаче оптимального поворота при произвольных заданных граничных условиях (4.7)–(4.9).

Проводились расчеты по решению задач поворотов КА в модифицированной постановке из положения покоя в положение покоя с граничными условиями (4.7), (4.8), (4.10). При этом значения постоянных величин модифицированной задачи для тел 1, 4, 5 указаны в табл. 9. Время быстродействия модифицированной задачи T в каждом из случаев составило:

$$T_1 = 1.3928, \quad T_4 = 1.5747, \quad T_5 = 1.5419.$$

Решения традиционной и модифицированной задач опять же оказались близкими. В табл. 10 приведем значения компонент кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ для тел 1, 4, 5 в промежуточных точках τ_k^0 интервалов времени движения $[0, T_k]$ при решении модифицированной задачи поворота из

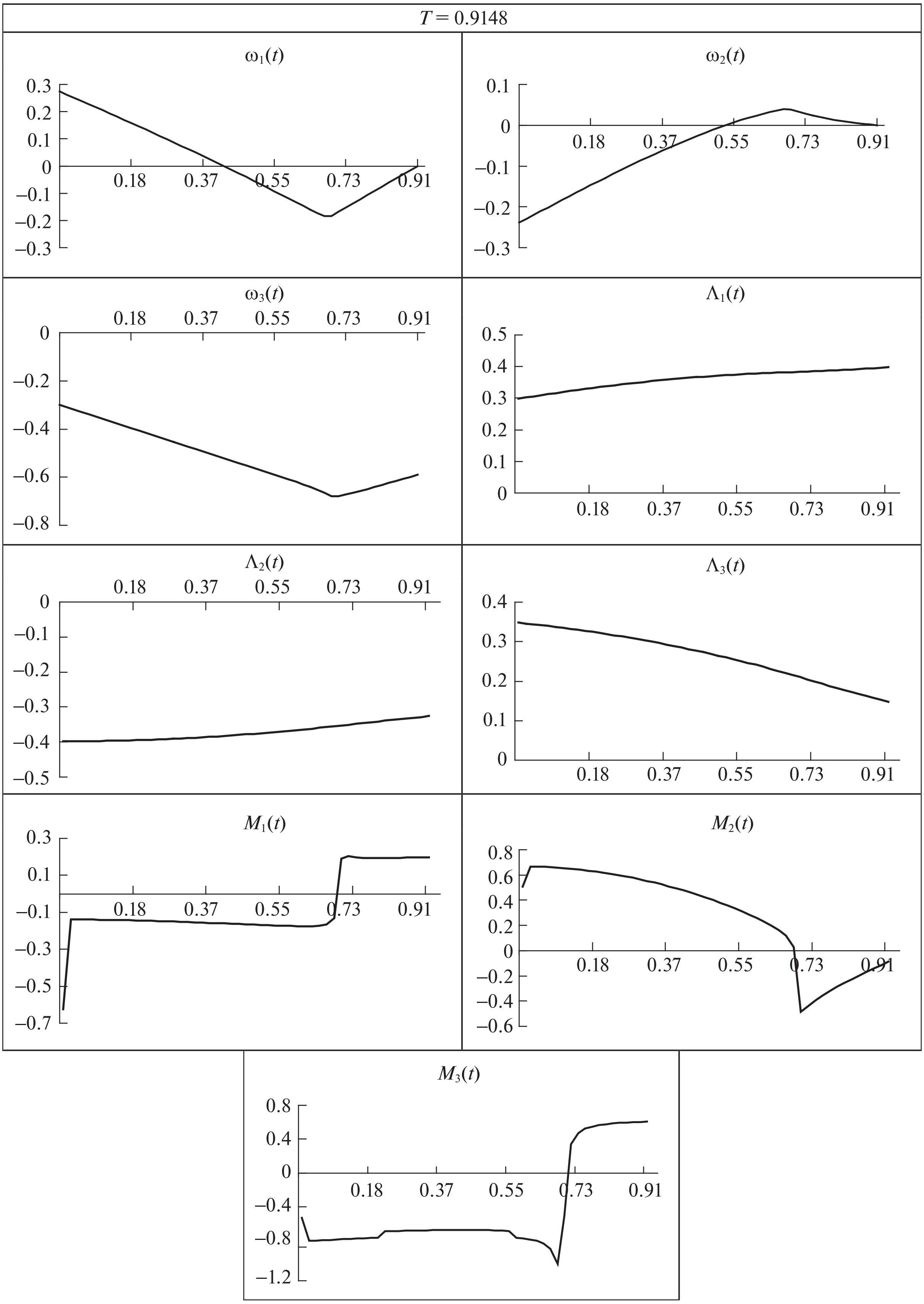

Рис. 1. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях

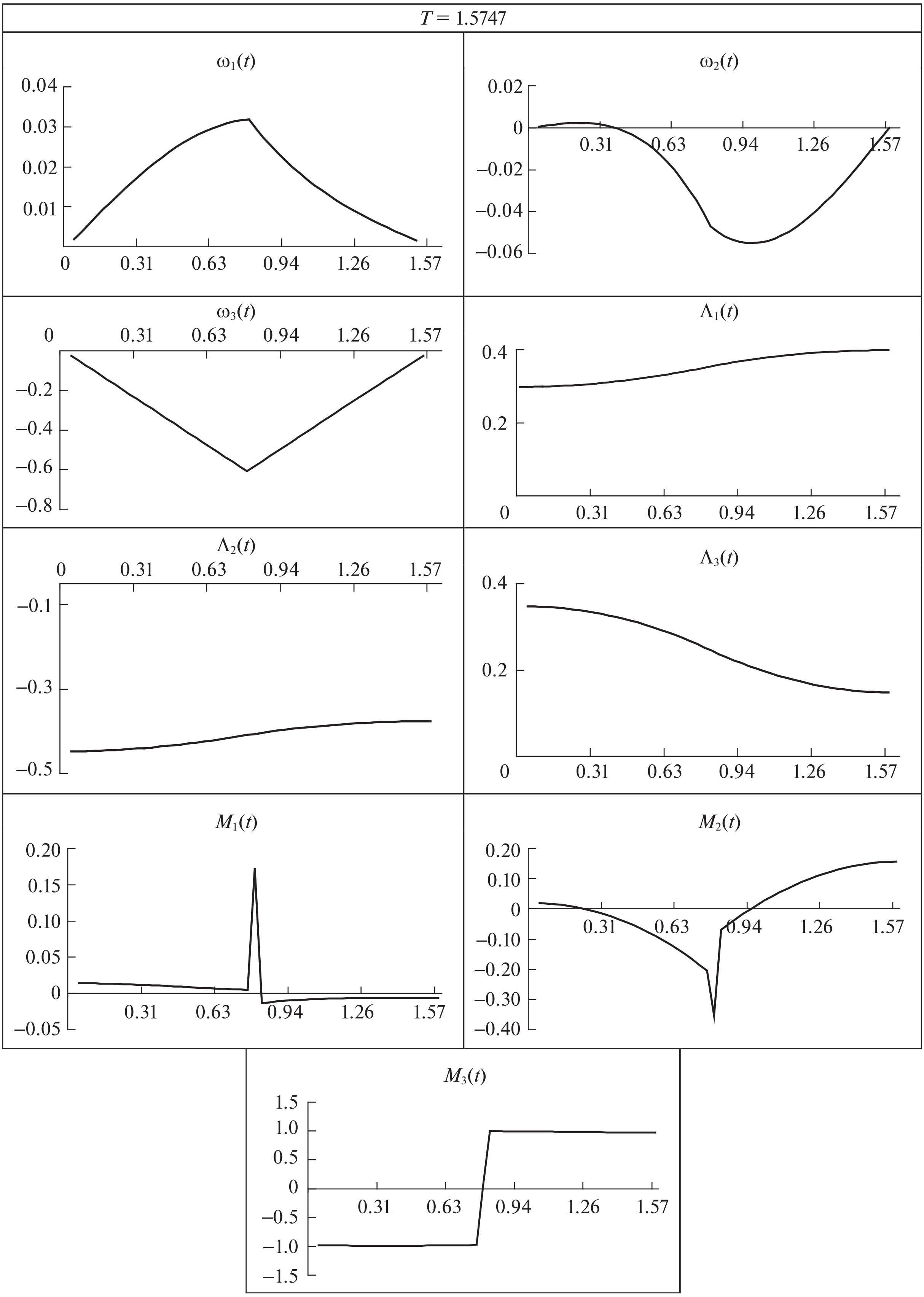

Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при повороте из положения покоя в положение покоя

Таблица 9

Постоянные	КА		
	Тело 1	Тело 4	Тело 5
c_1	1.0	1.0	1.0
c_2	−0.31037	−0.54929	−0.058406
c_3	0.69640	0.78734	0.77096
c_4	−0.21614	−0.43247	−0.45029
c_5	0.65875	0.53523	0.53857
c_7	−0.20446	−0.29399	−0.20446
c_8	−1.13081	−0.84609	−0.31456
α_1	0.36003	0.50562	0.46559
α_2	1.30935	1.07055	1.05114
u_*	0.99045	0.77560	0.80900

Таблица 10

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1 (τ_k^0)	0.83228	0.36140	−0.35278	0.22855	0.02987	−0.05517	−0.60373
Тело 4 (τ_k^0)	0.82742	0.35058	−0.35897	0.25222	0.03185	−0.04695	−0.60802
Тело 5 (τ_k^0)	0.82750	0.35052	−0.35880	0.25227	0.03263	−0.04792	−0.62100

положения покоя в положение покоя. Точки τ_k^0 взяты максимально близкими к рассмотренным ранее в традиционной задаче промежуточным точкам t_k^0:

$$\tau_1^0 = 0.7800, \quad t_4^0 = 0.7873, \quad t_5^0 = 0.7710.$$

Для тела 4 на рис. 2 представлены графики решения модифицированной задачи поворота МКС из положения покоя в положение покоя с граничными условиями (4.7), (4.8), (4.10).

Отметим, что кватернион ориентации КА $\mathbf{\Lambda}(t)$ может быть двузначным [1], т.е. $\mathbf{\Lambda}$ и $-\mathbf{\Lambda}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение. Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известные аналитические решения задачи оптимальной переориентации сферически-симметричного КА в классе плоских эйлеровых поворотов [1].

Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики твердого тела могут быть обобщены на случай управления КА при наличии в постановке задачи различных возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2.
3. *Петров Б.Н., Боднер В.А., Алексеев К.Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 6.
4. *Левский М.В.* Ограниченное квадратично оптимальное управление разворотом космического аппарата за фиксированное время // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1.

5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4.
6. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3.
9. *Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 2.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2.
12. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3.
13. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2.
14. *Акуленко Л.Д., Лилов Л.К.* Синтез квазиоптимальной системы переориентации и стабилизации КА // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 2.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
16. *Li. F., Bainum P.M.* Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V. 13. № 1.
17. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2002.
18. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Intern. J. Control. 1978. V. 27. № 4.
19. *Молоденков А.В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 4, с. 157–176

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.735.33.016

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЭТАПА НАБОРА ВЫСОТЫ В ЗАДАЧЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ САМОЛЕТОВ ГРАЖДАНСКОЙ И ВОЕННО-ТРАНСПОРТНОЙ АВИАЦИИ[1]

© 2021 г. А. А. Голубева[a,]*, С. С. Кананадзе[a,], Н. В. Куланов[a,]*****

[a] *ФНЦ ФГУП “ГосНИИ АС”, НИУ МАИ, Москва, Россия*

**e-mail: aagolubeva@2100.gosniias.ru*

***e-mail: kananadze@ya.ru*

****e-mail: nvkulanov@2100.gosniias.ru*

Поступила в редакцию 16.05.2019 г.
После доработки 24.12.2020 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Решение задачи формирования высотно-скоростного профиля полета самолетов гражданской и военно-транспортной авиации на этапе набора высоты и оптимизации по экономическому критерию проводится с использованием динамической модели движения центра масс в вертикальной плоскости. В модели учитывается изменение массы самолета и систематическая составляющая скорости ветра. Аэродинамические характеристики самолета и его вес, а также высотно-скоростные характеристики и дроссельные характеристики двигателей приближены к современному типовому среднемагистральному самолету. Для заданного сценария набора высоты найдены оптимальные и квазиоптимальные законы управления на этапе разгона. Проведена оценка влияния параметров сценария на значения основных критериев оптимизации. Получены зависимости оптимальных значений скорости набора высоты от индекса стоимости и найден диапазон его вариабельности.

DOI: 10.31857/S0002338821040065

Введение. Одним из главных направлений развития бортового оборудования современных самолетов гражданской и военно-транспортной авиации является создание автоматизированных систем самолетовождения (ССВ). Эти системы должны обеспечивать безопасность полета путем снижения нагрузки на экипаж и повышение экономических показателей за счет использования в их алгоритмическом обеспечении аэродинамических характеристик конкретного воздушного судна (ВС) и его двигателей, а также более полного учета состояния атмосферы и других эксплуатационных факторов.

Помимо технического совершенства элементов ССВ и прогрессивных способов ее архитектурных решений, возможности ССВ определяются совершенством ее программно-алгоритмического обеспечения (ПМО), которое является “мозгом” любой системы. Поэтому разработка методов решения основных функциональных задач ССВ и реализация их в бортовом ПМО – одно из важных направлений создания современных комплексов бортового оборудования ВС всех типов.

К числу основных функциональных задач ССВ относятся так называемые задачи горизонтальной и вертикальной навигации. Первая из них известна и решается практически с момента возникновения авиации и к настоящему времени реализуется во всех современных ВС. Вторая же является логическим развитием так называемой топливно-временной задачи, которую приходилось решать штурману ВС при подготовке к очередному полету и в процессе его выполнения. При исключении штурмана и других членов из состава экипажа ВС их функции были возложены на ССВ, что в значительной степени определило задачи вертикальной навигации и, соб-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00079).

ственно, породило термин “вертикальная навигация”. В понятие вертикальной навигации входит решение следующих задач:

– построение (оптимального или близкого к нему) высотно-скоростного профиля полета ВС по *экономическому критерию* с учетом ограничений со стороны системы управления воздушным движением;

– формирование в бортовую систему управления (БСУ) воздействий, обеспечивающих движение ВС в вертикальной плоскости по построенному высотно-скоростному профилю;

– определение прогнозных значений отдельных параметров полета ВС от текущего положения до других заданных точек маршрута.

Решение всех задач должно проводиться непрерывно вдоль принятого плана полета при заданных аэродинамических характеристиках ВС, характеристиках его двигателя, а также заданном состоянии атмосферы. Кроме того, при решении задач вертикальной навигации необходимо учитывать требования и ограничения, сформулированные в различных руководящих документах (например, в Руководстве по летной эксплуатации (РЛЭ) конкретного ВС), а также определяемые авиакомпанией и системой управления воздушным движением.

Центральное место среди указанных задач занимает первая задача, так как ее решение служит основой для решения двух других. Критерием качества для самолетов гражданской авиации обычно служит определяемый авиакомпанией (АК) экономический критерий в виде стоимости конкретного полета. Он является линейной комбинацией стоимости затраченного топлива и времени полета, связанных так называемым “индексом стоимости”. Для военно-транспортной авиации в качестве критериев могут выступать время или затраченное топливо как частные случаи критерия стоимости. Важнейшим условием решения этой задачи служит требование *выполнения заданного в РЛЭ сценария* этапа набора высоты.

Различные подходы к построению оптимального управления ВС на этапе набора высоты рассматривались в ряде организаций и опубликованы, например, в работах [1–6]. В общей массе публикаций наибольшее внимание, как правило, уделялось вопросу скороподъемности для самолетов с высокой тяговооруженностью, наиболее полное решение которого получено в работах центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). Вопросам же оптимизации полета ВС с типовыми характеристиками гражданской и военно-транспортной авиации в отечественной литературе уделялось меньше внимания. К ним относятся, например, работы [1, 4, 6].

Один из них базируется на концепции о наискорейшем наборе удельной механической энергии в рамках энергетического подхода, вероятно, впервые предложенного в [7]. Методы решения задачи предполагают построение профиля наилучшей энергетической скороподъемности и формирование траекторий выхода на этот профиль и схода с него. Такой подход продемонстрирован в работе [5]. Формально он может использоваться, как утверждает автор, и для оптимизации по другим критериям, в частности по критерию стоимости.

Однако здесь дело не в формальной стороне получения решения. Проблема состоит в возможности практической реализации в ССВ-методов, основанных на “отслеживании” тех или других опорных траекторий. Дело в том, что управление современными ВС осуществляется с помощью БСУ, которые разрабатываются для строго определенного набора режимов работы, для которых обеспечиваются необходимые условия устойчивости и безопасности полета. Попытки использования БСУ для “отслеживания” некоторого другого режима могут привести к непредсказуемым последствиям. В любом случае этот вопрос подлежит дополнительному исследованию, результатом которого должен быть вывод о возможности реализации такого режима. Поэтому решения, предполагающие построение некоторого опорного профиля и его отслеживание без согласования с режимами работы БСУ, нельзя считать приемлемыми для бортовой реализации на гражданских ВС. Они могут применяться для оценки потенциальных возможностей того или другого ВС и, после дополнительных исследований должны найти отражение в РЛЭ конкретных ВС. После чего можно говорить о возможности их реализации.

В настоящее время более приемлемым подходом к оптимизации этапа набора высоты для гражданских ВС является *оптимизация в рамках задаваемого РЛЭ сценария набора высоты*. Сценарий определяет возможные режимы полета ВС на этапе набора высоты, которые согласованы с возможностями БСУ и не могут привести к неожиданным результатам. Такой подход используется в работе [8], где сделана попытка построения алгоритмов для всего множества предусмотренных в сценариях возможных режимов полета гражданских ВС. Однако материалы этой публикации не позволяют получить для конкретного ВС какой либо высотно-скоростной профиль.

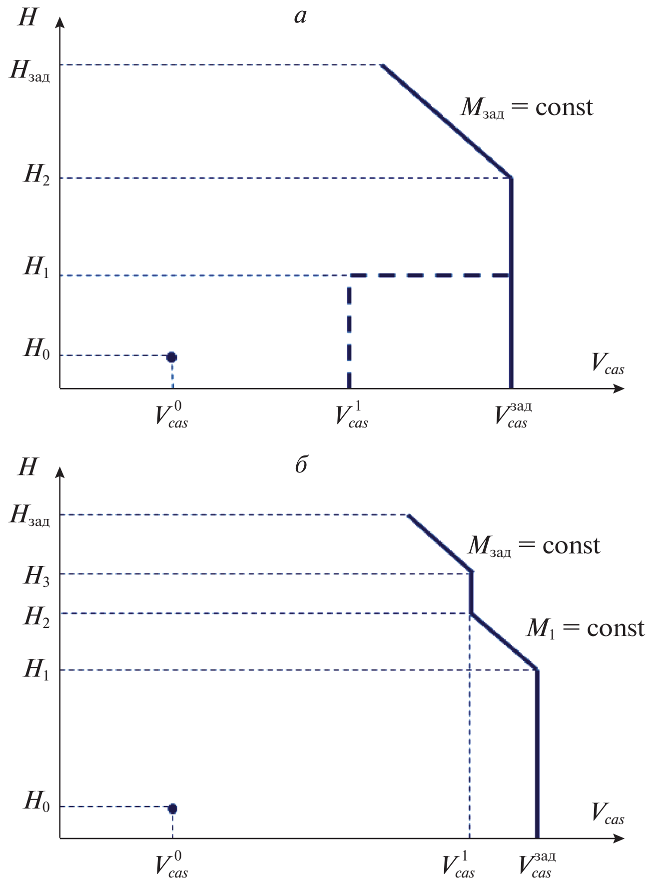

Рис. 1

Суть дела в том, что там априори принимается линейная форма зависимости искомых параметров высотно-скоростного профиля от независимых факторов. При этом коэффициенты весов отдельных слагаемых зависят от конкретного ВС, получение которых является самостоятельной проблемой с неизвестными путями решения.

Целью данной работы является разработка методической основы решения задачи оптимизации этапа набора высоты в проблеме вертикальной навигации ВС гражданской и военно-транспортной авиации. Предлагаемый подход к решению задачи основывается на использовании заданного в РЛЭ сценария выполнения этапа набора высоты. При этом под сценарием понимается совокупность взаимосвязанных режимов полета, обеспечивающих выход ВС в заданные конечные условия. В качестве режимов полета в рассмотрение принимаются только те, которые предусмотрены в РЛЭ и реализуются БСУ. В этих предположениях оптимизация этапа набора высоты сводится к выбору оптимальных значений параметров полета, характеризующих каждый режим. Все конкретные расчеты проведены для типичного средне-магистрального ВС с характеристиками, близкими к SSJ-100.

1. Сценарии этапа набора высоты. Этап набора высоты предполагает вывод ВС из начального положения, определяемого значениями начальной высоты $H = H_0$ и приборной скорости (этим термином будем называть индикаторную земную скорость V_{cas}) $V_{cas} = V_{cas}^0$, в заданное конечное, определяемого высотой $H = H_{зад}$ и числом Маха $M = M_{зад}$.

Обычно сценарий этапа набора высоты задается в виде профиля полета, т.е. функции высоты от дальности, либо зависимостями приборной скорости и числа Маха от высоты. Типичные примеры таких зависимостей для второго случая показаны на рис. 1. Каждому ВС соответствует один из этих видов.

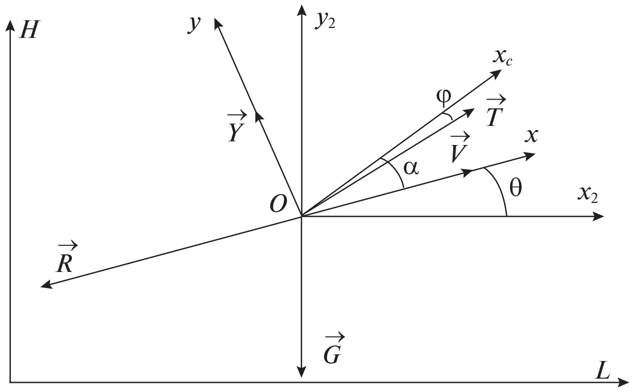

Рис. 2

На этих рисунках точка H_0, V_{cas}^0 определяется окончанием этапа взлет и соответствует началу этапа набора высоты. Рисунки 1, *а* и *б* отражают два различных варианта зависимостей: $V_{cas} = V_{cas}(H)$ и $M = M(H)$. На первом из них набор высоты осуществляется с одной парой значений $V_{cas} = V_{cas}^{\text{зад}}$, $M = M_{\text{зад}}$, а на втором – две пары значений: $V_{cas} = V_{cas}^1$, $M = M_3$ и $V_{cas} = V_{cas}^{\text{зад}}$ и $M = M_1$. Помимо скоростей V_{cas}^1, $V_{cas}^{\text{зад}}$ и чисел Маха M_1 и $M_{\text{зад}}$ в сценарии отражаются возможные ограничения на приборную скорость, показанные на рис. 1, *а* штрихпунктиром.

В соответствие со сценарием (рис. 1, *а*) набор высоты происходит следующим образом:

1. После завершения этапа взлет на высоте H_0 и скорости V_{cas}^0, ВС разгоняется до заданного значения $V_{cas}^{\text{зад}}$. В процессе этого разгона должно выполняться ограничение $V_{cas} < V_{cas}^1$ на высотах $H < H_1$. Это ограничение связано с желанием уменьшить отрицательное воздействие на окружающую среду. По этой причине оно не всегда является обязательным и может отсутствовать, в частности, при выполнении полетов военно-транспортной авиации при решении специальных задач. Этот участок полета называется участком разгона.

2. Далее со скоростью $V_{cas}^{\text{зад}}$ проходит набор высоты до некоторого значения H_2, при котором значение числа M становится равным заданному $M_{\text{зад}}$.

3. С этим значением числа M полет продолжается до выхода ВС на заданную высоту $H_{\text{зад}}$, где заканчивается этап набора высоты.

Аналогично описывается сценарий для рис. 1, *б*.

В обоих из них присутствует один или два участка разгона. В руководствах по эксплуатации ВС обычно не определяется режим полета ВС на участке разгона. Это может быть разгон на постоянной высоте или разгон с набором высоты. В последнем случае возникает вопрос: а как набирать высоту: с постоянным углом тангажа, с постоянной вертикальной скоростью или выдерживанием какого-то другого параметра полета? Длительность этого участка и влияние его на принятые критерии оценки этапа набора высоты могут быть различны в зависимости от используемого на нем закона управления ВС. Поэтому формирование оптимального закона управления на участке разгона является составной частью общей задачи оптимизации этапа набора высоты. Заметим, что в соответствии со сценарием процесс набора высоты проводится при фиксированном положении органов управления двигателями. Обычно это один из возможных номинальных режимов работы двигателя.

2. Модель движения ВС. Ввиду незначительной (200–250 км) протяженности этапа набора высоты, в качестве модели движения ВС при решении задачи формирования высотно-скоростного профиля полета ВС будем использовать модель движения его центра масс в плоско-параллельном гравитационном поле с учетом изменения массы и горизонтальной составляющей скорости ветра. Заметим, что именно эти два фактора часто не принимаются во внимание при решении задачи.

Схема систем координат и сил, действующих на центр масс ВС, показана на рис. 2. В данном случае в качестве основной принята скоростная система координат с осями Ox, Oy. Неподвижная система координат, связанная с Землей, определена осями L, H.

На этом рисунке приняты следующие обозначения: $\bar{V}$ – вектор воздушной скорости центра масс ВС; $\bar{R}$ – вектор аэродинамической силы лобового сопротивления; $\bar{Y}$ – вектор аэродинамической подъемной силы; $\bar{G}$ – вектор силы тяжести; $\bar{T}$ – вектор силы тяги двигателей; Ox_c – вектор продольной оси ВС; Ox_2, Oy_2 – связанные с центром масс оси, параллельные осям L, H; α, θ, φ – угол атаки, наклона траектории и установки двигателя относительно связанной оси соответственно.

Уравнения модели движения центра масс ВС, получающиеся из представленной на рис. 2 схемы, (с учетом горизонтальной составляющей скорости ветра и изменения массы ВС), имеют вид

$$
\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} &= T\cos\alpha_T - R - mg\sin\theta + q_{\text{с}}(V + U_{\text{в}}\cos\theta),\\
mV\frac{d\theta}{dt} &= T\sin\alpha_T + Y - mg\cos\theta - q_{\text{с}}U_{\text{в}}\sin\theta,\\
\frac{dH}{dt} &= V\sin\theta,\\
\frac{dL}{dt} &= V\cos\theta + U_{\text{в}},\\
\frac{dm}{dt} &= -q_{\text{с}},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\alpha_T = \alpha - \varphi$; m – текущее значение массы ВС; g – ускорение силы тяжести; $q_{\text{с}}$ – секундный расход топлива; $U_{\text{в}}$ – горизонтальная составляющая вектора скорости ветра; H, L – геометрическая высота и дальность в системе координат H, L.

Входящие в систему уравнений (2.1) силы определяются соотношениями:

$$
\begin{aligned}
R &= C_X S\frac{\rho V^2}{2} = 0.7C_X SM^2 p,\\
Y &= C_Y S\frac{\rho V^2}{2} = 0.7C_Y SM^2 p,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где C_X, C_Y – коэффициенты соответствующих аэродинамических сил; S – характерная площадь крыла ВС; ρ – плотности воздуха; p – давление воздуха.

Аэродинамические коэффициенты C_X, C_Y в общем случае являются функциями большого числа переменных, однако в траекторных задачах принято использовать балансировочные значения этих коэффициентов в виде функций $C_X = C_X(\alpha, M, Fl)$, $C_Y = C_Y(\alpha, M, Fl)$, где Fl – параметр, определяющий конфигурацию крыла.

Входящие в уравнения (2.1) сила тяги T и секундный расход топлива $q_{\text{с}}$ обычно задаются таблицами или графиками:

$$
\begin{aligned}
T &= T(\delta, H_{\text{б}}, M, \Delta T^0),\\
q_{\text{с}} &= q_{\text{с}}(\delta, H_{\text{б}}, M, \Delta T^0),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где M – число Маха; δ – эквивалент тяги, в качестве которого могут использоваться обороты турбины или компрессора высокого или низкого давления, положение рычагов управления двигателем и др.; ΔT^0 – отклонение температуры наружного воздуха от стандартного значения; $H_{\text{б}}$ – барометрическая высота.

Из анализа соотношений (2.1)–(2.3) видно, что при известных (таблицы, графики, аналитические выражения и т.д.) зависимостях $C_X = C_X(\alpha, M, Fl)$, $C_Y = C_Y(\alpha, M, Fl)$, $T = T(\delta, H_{\text{б}}, M, \Delta T^0)$, $q_{\text{с}} = q_{\text{с}}(\delta, H_{\text{б}}, M, \Delta T^0)$ система уравнений (2.1) однозначно определяет динамику изменения фазовых переменных H, L, V, θ, m при заданных $\alpha(\xi)$, $\delta(\xi)$, где ξ – какой-либо скалярный параметр, например время t или дальность L. Функции

$$
\alpha = \alpha(\xi), \quad \delta = \delta(\xi)
\tag{2.4}
$$

являются в данном случае функциями управления или управляющими функциями, на которые наложены ограничения:

$$\begin{gathered}\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max},\\ \delta_{\min} \le \delta \le \delta_{\max}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

С целью приближенного учета динамики изменения угла атаки α, можно дополнить систему (2.1) динамическим оператором (2.6) в виде колебательного звена с параметрами T_2, ξ, которые определяются либо при обработке результатов летных экспериментов, либо по результатам моделирования с использованием подробных моделей движения ВС вокруг центра масс:

$$(T_2^2 p^2 + 2T_2\xi p + 1) = \alpha_{\text{зад}}, \tag{2.6}$$

где α, $\alpha_{\text{зад}}$ – текущее и заданное значения угла атаки.

Такое расширение модели позволяет провести оценку влияния динамических запаздываний формирования угла атаки α на результаты моделирования. При этом управляющим параметром вместо α становится $\alpha_{\text{зад}}$.

Заметим, что отличительной особенностью рассматриваемой модели является ее ориентация на существующие в настоящее время формы получения исходной информации по аэродинамическим характеристикам ВС и двигателей. Эта исходная информация при реализации модели приводится к виду аналитических соотношений, позволяющему получать производные по основным переменным, что необходимо при использовании различных методов оптимизации. В частности, как показали исследования, зависимости для C_X и C_Y с высокой степенью точности на достаточно больших интервалах изменения угла атаки и числа M могу быть представлены в виде полинома:

$$C_{x/y} = A_0(M) + A_1(M)\alpha + A_2(M)\alpha^2 + A_3(M)\alpha^3,$$

где

$$A_I(M) = \sum_{j=0}^{2} B(I,J)M^J, \quad I = 0, 1, 2, 3,$$

здесь $B(I, J)$ – матрица постоянных коэффициентов для рассматриваемого диапазона переменных.

Аналогичные выражения используются для тяги T и часового расхода $q_{\text{с}}$. Как показали исследования, такой способ аппроксимации исходных данных позволяет получить достаточную степень гладкости правых частей системы (2.1), что необходимо для реализации предлагаемой методики и при разработке модели для бортового вычислителя.

3. Критерии оптимизации. В настоящее время в качестве основного критерия при формировании вертикального профиля полета ВС принимаются прямые эксплуатационные расходы C, которые складываются из стоимости затраченного топлива и стоимости времени полета. АК заинтересована в минимизации C и поэтому требует, чтобы вычислительная система ВС обеспечила в каждом конкретном полете реализацию траектории с минимизацией по данному критерию. При этом в стоимости времени учитывается множество факторов, к которым относятся стоимость погрузо-разгрузочных работ, аэронавигационного сопровождения полета ВС, аренды и амортизации ВС, различных регламентных работ, зарплата и страховка экипажа и др. В соответствии со сказанным имеем

$$C = \int_0^{t_k} (q_{\text{т}} C_{\text{т}} + C_t)dt, \tag{3.1}$$

где $q_{\text{т}}$ – расход топлива в единицу времени, $C_{\text{т}}$, C_t – стоимость единицы топлива и времени соответственно, t_k – длительность участка набора высоты. АК для каждого маршрута полета известны значения $C_{\text{т}}$ и C_t, которые могут значительно отличаться для разных маршрутов. Так как в каждом конкретном полете $C_{\text{т}} = \text{const}$, то в качестве критерия вместо (3.1) можно принять значение $I_C = C/C_{\text{т}}$, тогда

$$I_C = I_{\text{т}} + CI\, I_t, \tag{3.2}$$

где $I_т$ – расход топлива на набор высоты; I_t – время набора высоты; $CI = C_t/C_т$ – индекс стоимости (CostIndex). В некоторых случаях интерес может представлять дальность этапа набора высоты, которую обозначим через I_L. Возможна постановка задачи оптимизации критерия стоимости при заданной дальности I_L набора высоты. Эти постановки в данной работе не рассматриваются. Здесь значения I_L служат только для приближенной оценки дальности исследуемого этапа.

4. Формальная постановка задачи. *Для объекта управления, описываемого уравнениями* (2.1)–(2.3), при заданном векторе параметров $\overline{P}_c(m_0, CI, U_в, \Delta P_0, \Delta T_0)$ (где m_0 – масса ВС в начале этапа набора высоты; CI – индекс стоимости, $U_в$ – продольная составляющая скорости ветра; ΔP_0 – отклонение давления от стандартного значения; ΔT_0 – отклонение температуры от стандартного значения), заданном ограничении (2.5) на управления и ограничении (4.1) на фазовые координаты

$$\dot{H}(t) \geq 0, \quad V_{cas} \leq \hat{V}_{cas}(H) \tag{4.1}$$

найти управление (2.4), *доставляющее минимальное значение функционалу* (3.2) *и переводящее объект управления из начальных условий* $H = H_0$, $V_{cas} = V_{cas}^0$ *в конечное* $H = H_{зад}$, $M = M_{зад}$ *с выполнением сценария полета.*

При такой постановке задача относится к классу задач, решение которых формально можно получить с использованием принципа максимума Понтрягина. Однако известные сложности ее решения, связанные с необходимостью решения краевой задачи, в сочетании с ограничениями на фазовые координаты (4.1) делают проведение такого решения достаточно проблематичным.

Конструктивный способ решения этой задачи можно получить путем сведения ее к параметрической оптимизации. Это оказывается возможным, так как в описании сценария режимы полета задаются постоянными значениями соответствующих параметров. Единственным участком, на котором в сценарии не определен режим полета, является участок разгона. Поэтому если удастся на этом участке получить оптимальное управление в виде значения некоторого параметра, то задача сведется к задаче параметрической оптимизации.

5. Построение управления на участке разгона. 5.1. Оптимальное управление. На этом участке полета ВС должно перейти из начального положения с координатами H_0 и V_{cas}^0 (рис. 1, *а*) на линию $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$ с выполнением (для гражданских ВС) или без выполнения (для военно-транспортных ВС) заданного ограничения на скорость. В соответствии со сценарием положение органа управления двигателем на всем этапе набор высоты сохраняется постоянным, т.е. $\delta = \delta_0 = \text{const}$, и подлежит выбору, а управление углом атаки $\alpha = \alpha(t)$ограничено сверху и снизу значениями $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$. Для поиска оптимального управления на этом участке можно использовать формализм принципа максимума. Однако ввиду достаточной кратковременности этого участка, а поэтому малого влияния на значения функционала (3.2), выберем прямой метод оптимизации, основанный на разложении решения по некоторому ортонормированному базису. Для преодоления специфических проблем, связанных с применением полиномиального базиса при заданном ограничении на управление $\alpha = \alpha(t)$, целесообразно использовать ортонормированный базис, построенный на конечных элементах (финитных функциях). Простейшим классом финитных функций по терминологии работы [9] является блочно-импульсная функция (БИФ) в виде полиномиального импульсного сплайна Лежандра 0-й степени:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i = [t_{i-1}, t_i), \\ 0, & t \notin \Delta_i, \end{cases}$$

построенная на сетке временных отсчетов:

$$t_i = t_0 + i\Delta t = \frac{(t_k - t_0)}{k}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Как отмечено в [6], БИФ позволяет получить высокое качество приближения функций для задач с ограничениями на управляющие воздействия в классе кусочно-непрерывных функций, что имеет место в рассматриваемом случае.

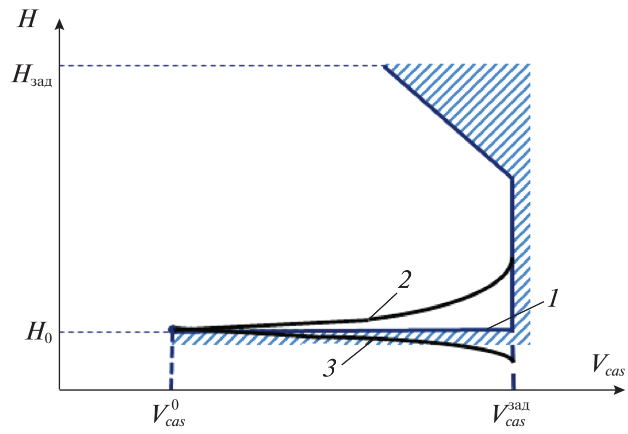

Рис. 3. Траектории для управления: *1* – $\alpha_1(t)$, *2* – $\alpha_2(t)$, *3* – $\alpha_3(t)$

Используя БИФ, представим управляющую функцию $\alpha(t)$ в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0(t) + \Delta\alpha(t), \quad \Delta\alpha(t) = \sum_{i=1}^{k} \Delta\alpha_i \phi_i(t), \tag{5.1}$$

где $\Delta\alpha_i$, $i = \overline{1,k}$, – некоторые числа, $\alpha_0(t)$ – заданная функция (в частном случае может отсутствовать).

Таким образом, получили кусочно-непрерывную аппроксимацию функции $\alpha(t)$ определяемую значениями $\Delta\alpha_i$ и функцией $\alpha_0(t)$. При заданной из каких-либо соображений функции $\alpha_0(t)$ задача поиска оптимального управления $\alpha(t) = \alpha^*(t)$ сводится к задаче математического программирования, связанного с оптимизацией критерия (3.2) по множеству значений $\Delta\alpha_i$. В этом случае *при заданной функции* $\alpha_0(t)$ *критерий* (3.2) *становится не функционалом от функции* $\alpha(t)$, *а функцией от k переменных* $\Delta\alpha_i$.

При такой постановке функция $\alpha_0(t)$ может рассматриваться как первое приближение при поиске оптимального управления $\alpha^*(t)$ при $\Delta\alpha_i = 0$. Единственным условием, которое следует наложить на функцию $\alpha_0(t)$, является то, что соответствующая ей фазовая траектория должна удовлетворять начальному и конечному условиям задачи и всем фазовым ограничениям.

В данном случае функцию $\alpha_0(t)$ выберем из следующих соображений. Известно, что в задаче на достижение максимального значения динамического потолка разгон ВС на начальном этапе должен проходить не на постоянной высоте, а с некоторым уменьшением ее. Но в нашей задаче, в силу первого ограничения (4.1), снижение высоты не допускается. Эти два обстоятельства позволяют *предположить*, что в рассматриваемой задаче оптимальная траектория лежит на границе $H(t) = H_0$. Этой траектории, обозначенной на рис. 3 символом *1*, соответствует управление $\alpha(t) = \alpha_1(t)$. Именно это управление, обеспечивающее полет на постоянной высоте $H = H_0$, примем в качестве $\alpha_0(t)$. Заметим, что при моделировании траекторий, обеспечивающих движения ВС с заданными значениями высоты, приборной скорости, числа Маха и других параметров, мы используем результаты работы [10].

То обстоятельство, что траектория, порождаемая управлением $\alpha_0(t)$, лежит на нижней границе фазовой области, приводит к ограничениям на область определения значений $\Delta\alpha_i$. Как можно видеть из системы уравнений (2.1), уменьшение угла атаки α приводит к уменьшению угла наклона траектории и, если траектория лежит на границе, нарушению первого ограничения (4.1). Поэтому для $\Delta\alpha_i$ получаем условие

$$0 \le \Delta\alpha_i \le \alpha_{\max} - \alpha_0(t_i), \quad i = \overline{1,k}, \tag{5.2}$$

которое говорит о том, что при данном выборе управления $\alpha_0(t)$ все значения $\Delta\alpha_i$ должны быть больше или равны нулю. Таким образом, все условия для поиска оптимальных значений $\Delta\alpha_i$

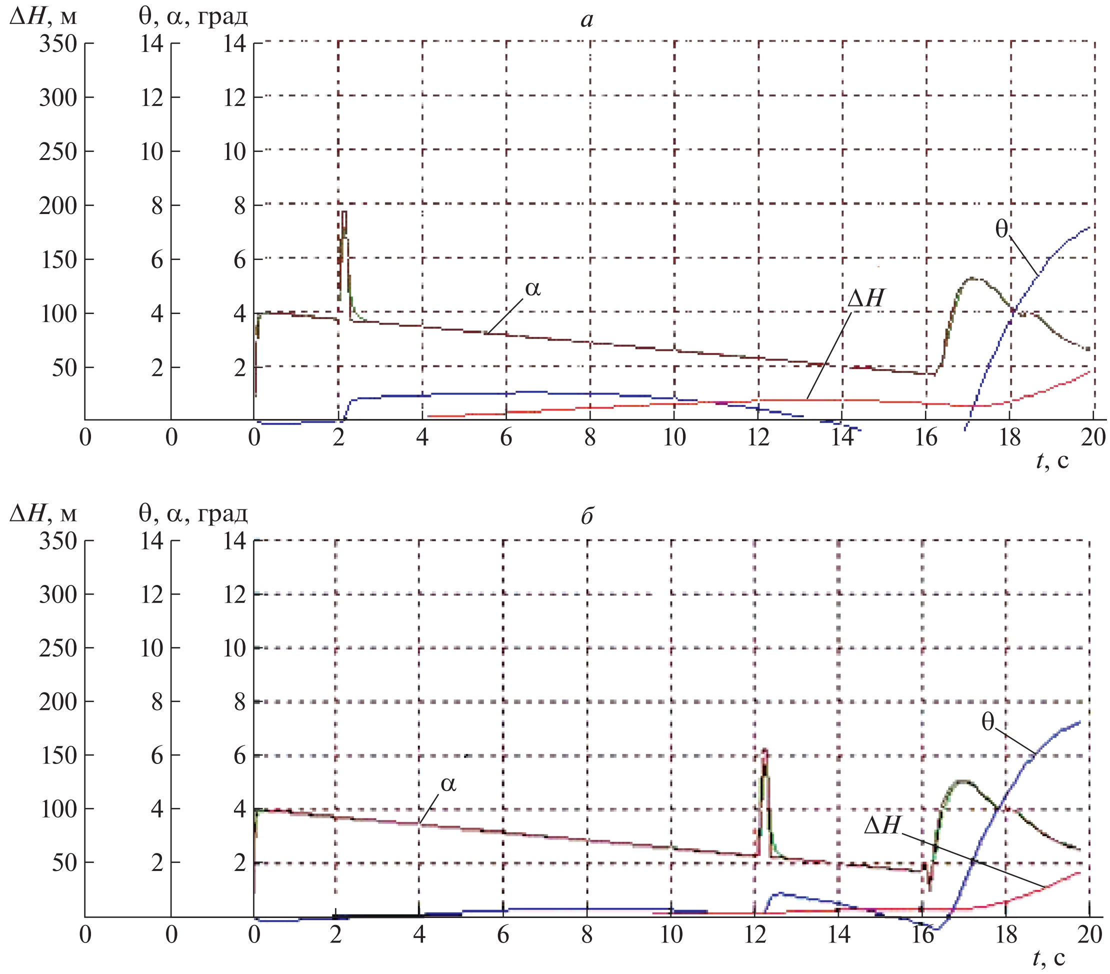

Рис. 4

определены и задача свелась к использованию известных методов поиска значений $\Delta\alpha_i^*$, доставляющих минимальное значение критерию (3.2), *как функции k переменных*.

Однако прежде чем формально использовать эти методы, заметим следующее. Все численные методы математического программирования в задачах оптимизации функции k переменных базируются на вычислении приращений функции вдоль каждой из координат. Для получения таких приращений необходимо задаться значениями $\Delta\alpha_i$ и проинтегрировать системы уравнений (2.1)–(2.3) при управлении $\alpha(t) = \alpha_0(t) + \Delta\alpha_i\phi_i(t)$ и $\alpha(t) = \alpha_0(t)$. Здесь слагаемое $\Delta\alpha_i\phi_i(t)$ можно рассматривать как некоторый импульс управления в момент t_i длительностью Δt. Типичный вид этих импульсов и поведения управления, а так же фазовых координат для двух моментов приложения импульсов $t_i = 2$ с, $t_i = 12$ с и $\Delta\alpha_i = 4°$ показан на рис. 4. Конкретная величина приращения ($\Delta\alpha_i = 4°$) здесь не имеет значения. Должно выполняться только условие (5.2) и должны проявиться заметные изменения значений критерия (3.2) и других критериев.

Как можно видеть, реакция системы на импульс управления в обоих случаях одинакова и проявляется прежде всего в появлении угла наклона траектории θ и последующему сходу траектории с ограничения. В рассматриваемом примере весь процесс разгона происходит на интервале времени порядка 16 с, после чего начинается режим отработки заданного значения $V_{cas} = V_{cas}^{\text{зад}}$.

Выполнение таких расчетов для всех моментов времени

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_k - t_0}{k}, \quad i = \overline{1, k},$$

Таблица 1

t	0	2	4	6	8	10	12
ΔI_C	0.038	0.033	0.031	0.020	0.019	0.023	0.006
$\Delta I_т$	0.047	0.040	0.035	0.023	0.018	0.018	0.004
ΔI_t	0.007	0.007	0.008	0.005	0.007	0.011	0.003
ΔI_L	–12.181	–10.855	–8.867	–7.078	–4.623	–2.049	–1.288

Таблица 2

t	0	2	4	6	8	10	12
ΔI_C	0.073	0.071	0.077	0.051	0.040	0.030	0.005
$\Delta I_т$	0.075	0.071	0.072	0.049	0.037	0.025	0.019
ΔI_t	0.023	0.023	0.029	0.018	0.016	0.013	0.012
ΔI_L	–11.657	–10.569	–8.235	–7.265	–5.149	–3.090	–1.061

Таблица 3

t	0	2	4	6	8	10	12
ΔI_C	–0.028	–0.034	–0.042	–0.040	–0.024	–0.019	–0.011
$\Delta I_т$	–0.007	–0.015	–0.023	–0.025	–0.017	–0.013	–0.008
ΔI_t	–0.023	–0.024	–0.026	–0.023	–0.013	–0.010	–0.005
ΔI_L	–12.736	–11.099	–9.641	–7.315	–4.445	–2.627	–1.117

при $\Delta t = 0.2$ с не вызывает каких-либо трудностей, и результаты их для значений времени $t = 0$, 2, ..., 12 показаны в табл. 1. Здесь в каждой строке, соответствующей одному из критериев I_C, $I_т$, I_t, I_L, для указанных моментов времени приведены приращения ΔI_C, $\Delta I_т$, ΔI_t, ΔI_L критериев как разностей между рассчитанными значениями критериев при $\Delta\alpha_i = 4°$ и $\Delta\alpha_i = 0$. Причем значения критериев при $\Delta\alpha_i = 0$ соответствуют движению ВС на постоянной высоте $H = H_0$.

Как видно из представленных материалов, для критериев I_C, $I_т$, I_t имеют место положительные приращения для всех t_i. Это говорит о том, что *положительные значения импульсов управления* в любой момент времени, *приводящие к сходу траектории с ограничения*, увеличивают значения критериев I_C, $I_т$, I_t. При этом, как показывают исследования, зависимость значений приращений от величины импульса монотонна. Поэтому при любом методе численного поиска оптимальных значений $\Delta\alpha_i^*$ для критериев I_C, $I_т$, I_t окажется, что $\Delta\alpha_i^* = 0$ и использовать какие-либо вычислительные методы поиска $\Delta\alpha_i^*$ здесь не имеет смысла.

В последней строке табл. 1 показаны приращения критерия I_L (длина участка набора высоты) при положительном значении импульса управления. Как видно, все они отрицательные, поэтому сход траектории с ограничения здесь приводит к уменьшению длины участка разгона. Оптимальное управление для этого критерия следует искать с использованием какого-либо метода поиска. Так как в задаче вертикальной навигации данный критерий не является основным, дальнейшее рассмотрение этого случая не входит в рамки данной работы.

Интересно посмотреть, какие результаты получатся, если в качестве функции $\alpha_0(t)$ принять отличные от $\alpha_1(t)$ функции, например $\alpha_2(t)$ (траектория *2* на рис. 3 проходит выше ограничения) или $\alpha_3(t)$ (траектория *3* лежит ниже ограничения). Приращения функционалов для траекторий *2* и *3* показаны в табл. 2, 3.

Как можно видеть из таблиц, при положительном импульсе управления приращения функционалов I_C, $I_т$, I_t положительны на траектории *2* и отрицательны на траектории *3*. Это говорит о том, что для уменьшения значений функционалов I_C, $I_т$, I_t необходимо уменьшить значения угла

Таблица 4

Критерий	Оптимальный	Один участок	Три участка
I_C	1806.4	1806.8	1892.5
$I_т$	979.7	980.3	1010.2
I_t	1153.3	1153.3	1218.4
I_L	238.62	238.3	239.28

атаки $\alpha(t)$ на траекториях *2*, а значит, опустить эту траекторию в сторону ограничения, а траекторию *3* поднять к ограничению. Отсюда следует вывод, что *для критериев стоимости, затрат топлива и времени набора высоты оптимальным на участках разгона будет движение на постоянной высоте.*

Разгон на постоянной высоте, являясь оптимальным, может приводить к чрезмерному воздействию шума двигателей на окружающую среду, что будет иметь место на участке разгона от V_{cas}^0 до V_{cas}^1 для гражданских ВС и на участке от V_{cas}^0 до $V_{cas}^{зад}$ для военно-транспортных ВС. Поэтому для этих участков может появиться необходимость в нахождении некоторых других управлений, близких к оптимальному по значениям критериев I_C, $I_т$, I_t, но уменьшающие это воздействие. Будем считать, что управление, при котором значение критерия на участке разгона превышает оптимальное не более чем 0.5%, является квазиоптимальным.

5.2. Квазиоптимальные управления на участке разгона. Эти управления будем искать среди типичных для БСУ законов управления. К ним относится: выдерживание заданного угла тангажа $\vartheta(t) = \text{const}$, вертикальной скорости $V_y(t) = \text{const}$, угла наклона траектории $\theta(t) = \text{const}$ и постоянных значений проекций перегрузки на различные оси координат. Выбор постоянных значений параметров управления обусловлен тем, что такие законы наиболее просто и с большей точностью реализуются в БСУ, а участок разгона достаточно мал по сравнению длительностью всего этапа набора высоты (более 20 мин).

Исследование законов отработки постоянных значений угла тангажа, угла наклона траектории и вертикальной скорости показало, что при каждом из них характер поведения траекторий имеет вид, показанный на рис. 5.

При проведении этих расчетов принималось, что заданное значение $V_{cas}^{зад} = 280kt$, где скорость измеряется в узлах (kt).

На рис. 5, *а* показаны фазовые траектории для трех значений угла тангажа: $\vartheta(t) = \text{const} = 7, 7.5$ и 8°. Как можно видеть, такой закон управления обеспечивает выход траектории на заданное значение $V_{cas} = V_{cas}^{зад} = 180kt$ только при $\vartheta(t) \le 7.5°$. При этом к концу этапа разгона высота траектории увеличивается не более чем на 1 км. При $\vartheta(t) > 7.5°$ траектория не достигает заданного значения $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$ и приборная скорость начинает уменьшаться, что не допускается сценарием. Такая ситуация характеризуется как срыв траектории набора высоты. Аналогичная картина имеет место и при законе управления $\theta(t) = \text{const}$. По этим причинам такие законы управления могут использоваться только в тех случаях, когда не требуется значительного повышения высоты траектории на участке разгона и гарантируется монотонное изменение приборной скорости.

На рис. 5, *б* показаны фазовые траектории при управлении на участке разгона по закону $V_y(t) = \text{const}$ для значений вертикальной скорости 12.0, 12.65, 13.0, 13.5 и 14 м/с. Как можно видеть, здесь траектории проходят существенно выше, чем в предыдущем случае. Но и здесь тоже существует предельное значение $V_y = 12.65$ м/с, при превышении которого происходит срыв траектории. Однако этот закон управления может использоваться для гражданских ВС на первом участке разгона от V_{cas}^0 до V_{cas}^1. Получающаяся при этом фазовая траектория имеет вид, показанный на рис. 6, *а*.

Здесь начальный участок разгона проходит с законом управления $V_y = \text{const} = 13.5$ м/с, а при достижении высоты ограничения $H_1 = 3000$ м продолжается разгон на постоянной высоте $H = H_1$ до выхода на заданную скорость $V_{cas} = V_{cas}^{зад} = 280kt$.

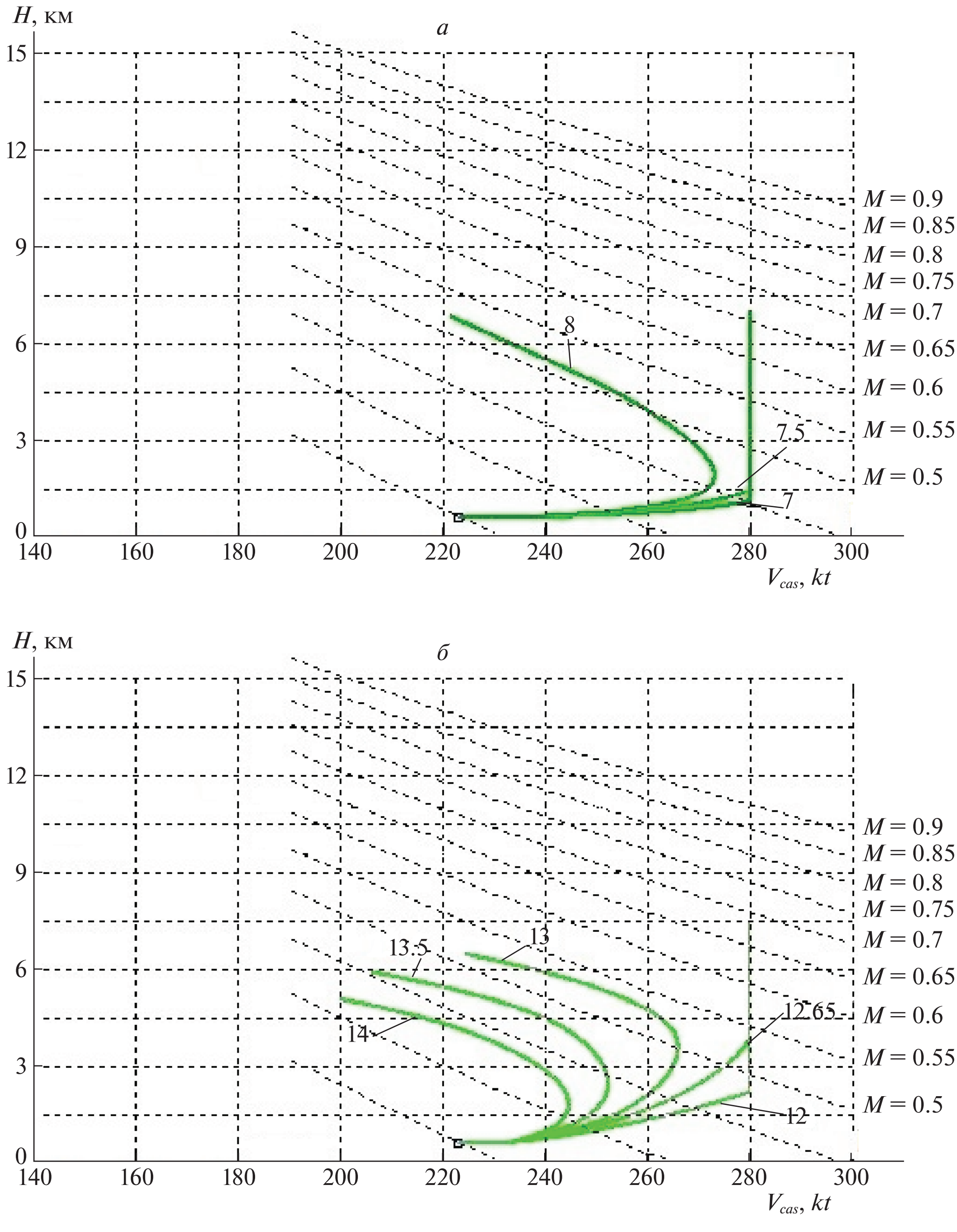

Рис. 5

Используя законы управления $\vartheta(t) = \mathrm{const}$, $\theta(t) = \mathrm{const}$ и $V_y(t) = \mathrm{const}$, можно построить участок разгона, состоящий из нескольких следующих друг за другом участков набора высоты и горизонтального полета. Пример получающейся при этом траектории с тремя участками набора высоты показан на рис. 6, *б*. Однако, как показывают расчеты (табл. 4), такие ступенчатые наборы высоты увеличивают значения критериев.

Естественно возникает вопрос, а как все эти законы управления соотносятся с оптимальным по критериям качества? Как следует из сказанного в разд. 5.1 оптимальная траектория набора высоты при учете ограничений имеет вид, показанный на рис. 7. Она состоит из следующих участков:

– разгон на постоянной высоте $H = H_0$ от скорости $V_{cas} = V_{cas}^0$ до $V_{cas} = V_{cas}^1$;

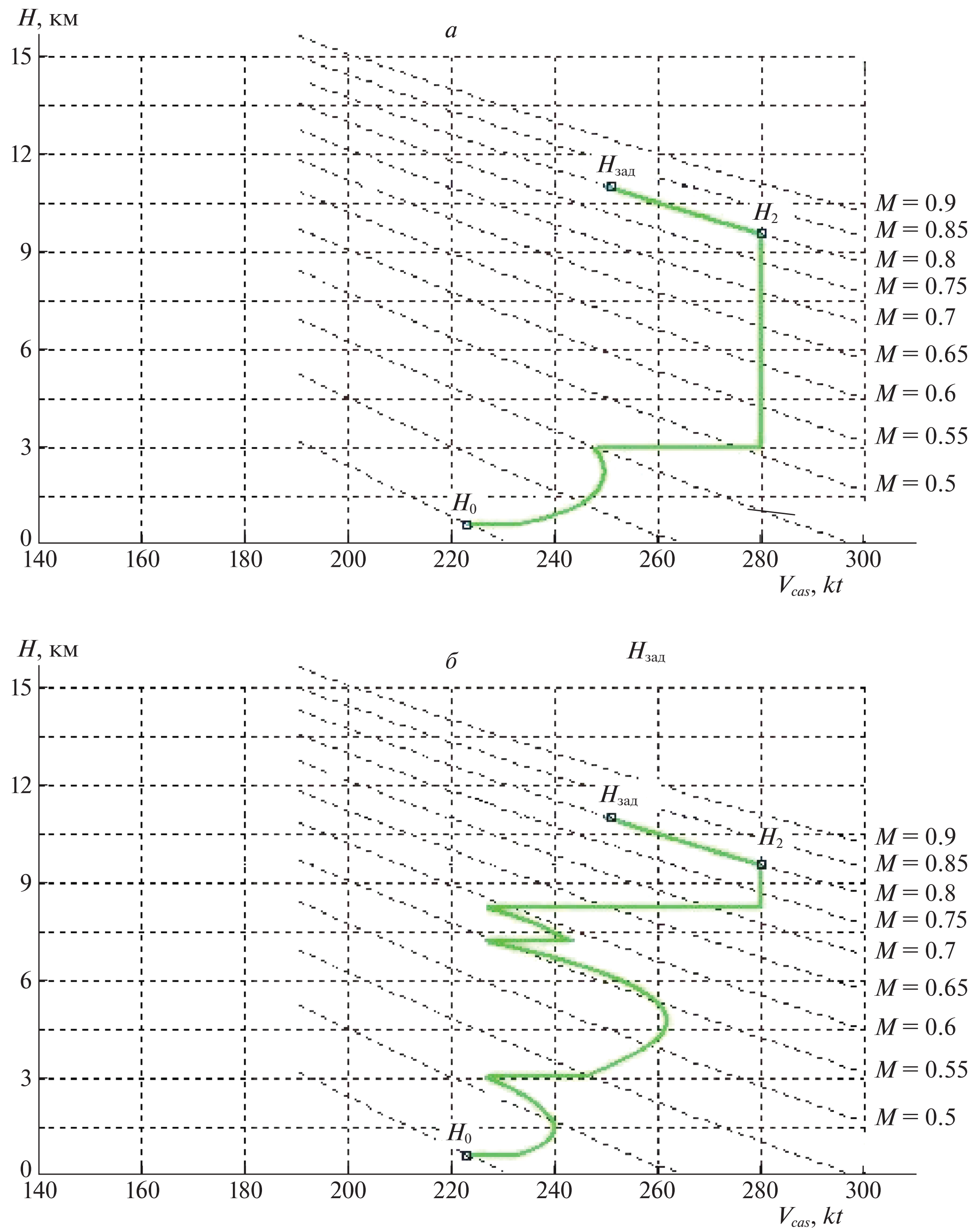

Рис. 6

– набор высоты $H = H_1$ с постоянной скоростью $V_{cas} = V_{cas}^1$;

– разгон на высоте $H = H_1$ до скорости $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$;

– набор высоты $H = H_2$ с постоянной скоростью $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$;

– набор заданной высоты $H = H_{зад}$ с постоянным значением числа M.

Результаты сравнения этой оптимальной траектории с траекториями, использующими один (рис. 6, *а*) и три (рис. 6, *б*) участка разгона скорости с законом управления $V_y(t) = \text{const}$, показан в табл. 4.

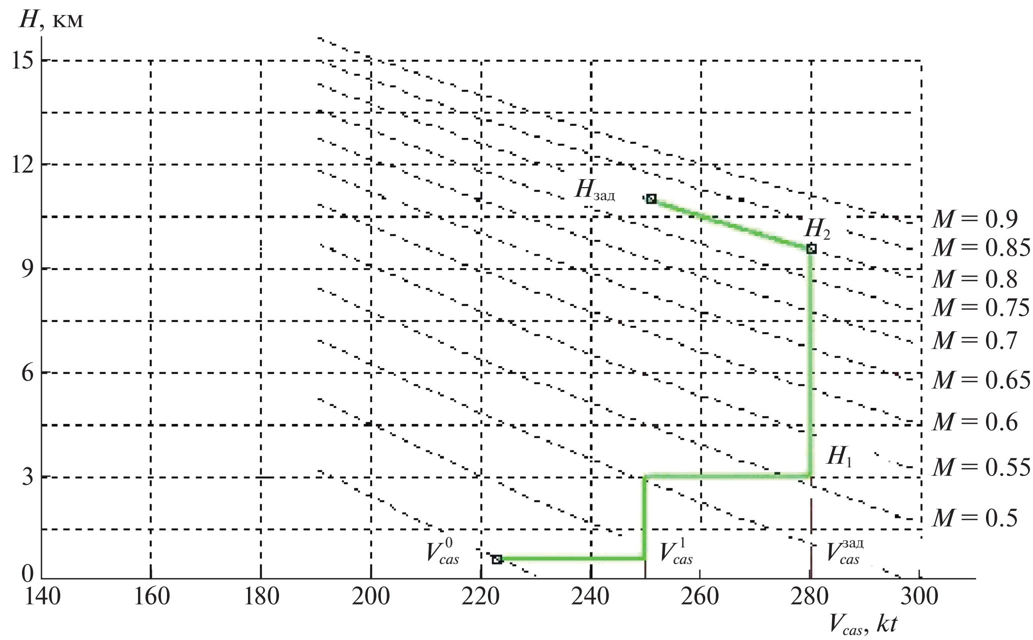

Рис. 7

Как видно из этих материалов, такое управление для принятых в расчете условий для всех критериев практически (с точностью менее 0.05%) не отличается от оптимального управления, поэтому является квазиоптимальным. Кроме того, ступенчатый набор высоты с применением режима $V_y(t) = \mathrm{const}$ дает значительный проигрыш по всем критериям по сравнению с одноступенчатым. Аналогичные результаты получаются и при использовании законов управления $\vartheta(t) = \mathrm{const}$ и $\theta(t) = \mathrm{const}$.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующий вывод. Первый участок разгона от V_{cas}^0 до V_{cas}^1 может выполняться с помощью закона управления $V_y(t) = V_y^*$ с одним участком набора высоты $H = H_1$. При этом конкретные значения V_y^* должны определяться из условия, что траектория в конце участка $V_{cas}^0 \le V_{cas} \le V_{cas}^1$ проходит через точку (V_{cas}^1, H_1). Заметим, что такие траектории обладают по сравнению с оптимальными тем преимуществом, что они состоят из одного участка, в то время как оптимальная траектория состоит из двух участков: стабилизация высоты $H = H_0$ и набор высоты $H = H_1$ на скорости $V_{cas} = V_{cas}^1$.

Этот закон управления может использоваться на гражданских ВС, когда на этапе разгона задано ограничение на воздушную скорость. При отсутствии такого ограничения, что, как правило, имеет место в военно-транспортной авиации, этот закон, так же, как и другие рассмотренные, не обеспечивает необходимого увеличения высоты в процессе разгона (рис. 6), поэтому такие законы управления не являются квазиоптимальными.

Как показывают исследования, существует класс управлений, при котором обеспечивается любое заданное повышение траектории разгона на всем участке приборных скоростей от начальной $V_{cas} = V_{cas}^0$ до конечной $V_{cas} = V_{cas}^{зад}$. Такими являются управления с постоянным значением производной от приборной скорости V_{cas}, т.е. с постоянным темпом изменения приборной скорости. Учитывая связь между воздушной и приборной скоростями, получаем, что производная по V_{cas} имеет вид $\dot{V}_{cas} = \dot{V}K + V\dot{K}$, где

$$K = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}},$$

$$\dot{K} = K/2\left(1 - \frac{g}{Ra_0}\right)\frac{a_0}{T}V\sin\theta,$$

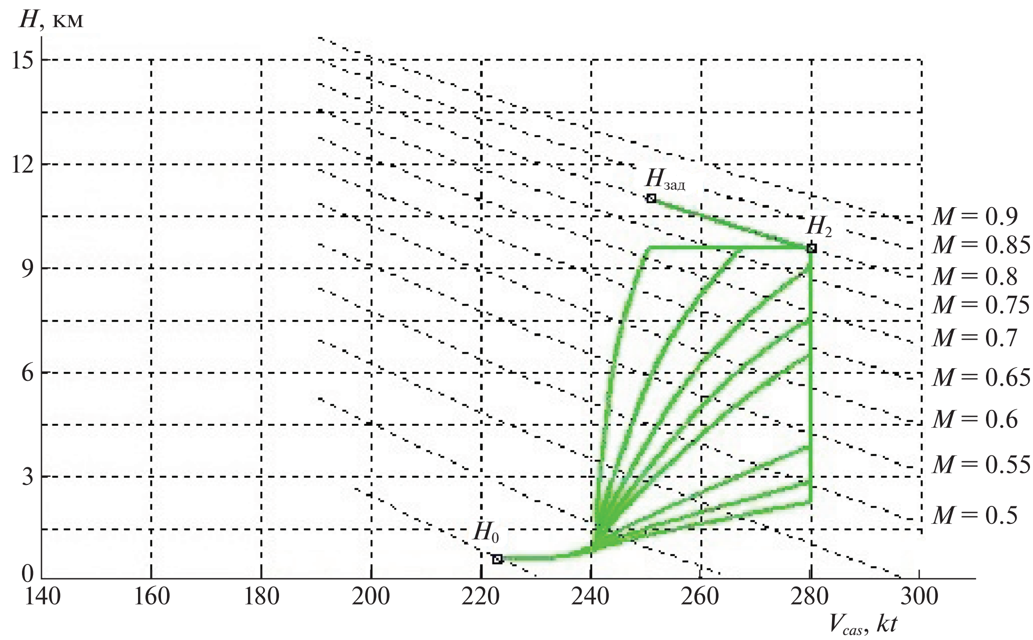

Рис. 8

a_0 – температурный градиент атмосферы; R – универсальная газовая постоянная; T – температура воздуха, K; ρ, ρ_0 – плотность воздуха на высоте и на уровне моря.

Виды траекторий, получающихся при использовании закона $\dot{V}_{cas} = dd = \text{const}$ для значений dd в диапазоне 0.2–0.01, показаны на рис. 8.

Здесь увеличение dd происходит по часовой стрелке, так что самая правая траектория соответствует $dd = 0.2$, а на самой левой $dd = 0.01$. Такой характер поведения траекторий при данном законе управления имеет очевидное физическое объяснение. Для этого достаточно вспомнить закон сохранения энергии. В данном случае энергия сгораемого в двигателе топлива расходуется на:

– преодоление силы сопротивления воздуха;

– увеличение кинетической энергии, зависящей от воздушной скорости;

– увеличение потенциальной энергии, определяемой увеличением высоты.

Задавая в качестве управления значение $dd = \text{const}$, мы фактически ограничиваем темп нарастания кинетической энергии. Чем меньше мы выбираем значение dd, тем меньше энергии тратится на увеличение кинетической энергии, а значит, тем больше энергии идет на увеличение потенциальной энергии, т.е. увеличение высоты, и наоборот.

Значения критериев I_C, кг, $I_т$, кг, I_t, с и I_L, км для различных значений dd приведены в табл. 5.

Первый столбец в этой таблице соответствует оптимальному разгону ВС на постоянной высоте. Сравнивая данные этого столбца с другими, можно видеть, что закон управления

Таблица 5

dd	Оптимальный	0.2	0.15	0.1	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
I_C	1794.7	1798.2	1800.56	1805.33	1820.17	1830.13	1851.54	1902.39	1965.47
$I_т$	974.7	976.46	977.5	979.45	984.91	988.48	995.98	1014.06	1056.69
I_t	1144.9	1147.22	1148.89	1152.37	1163.56	1171.14	1187.56	1226.35	1274.35
I_L	239.786	238.865	238.647	238.338	237.497	237.408	238	241.654	246.646

с $dd \geq 0.10$ в пределах нескольких килограммов топлива и нескольких секунд времени равноценен оптимальному. Однако его положительное отличие от оптимального заключается в том, что разгон ВС проходит одновременно с набором высоты и выводит ВС в режим полета с $V_{cas} = 280$ *kt* на $H \geq 3000$ м. Поэтому управления с $dd \geq 0.10$ будем считать квазиоптимальными, так как они по значениям критериев близки к оптимальному (с точностью нескольких килограммов топлива и нескольких секунд времени) и обеспечивают существенное повышение высоты полета на этапе разгона.

Заметим, что управление $\dot{V}_{cas} = dd = \text{const}$ можно использовать и на участке разгона до $V_{cas} = V^1_{cas}$. Для этого требуется найти такое значение $dd = dd^*$ при котором траектория проходит через точку $V_{cas} = 250$ *kt*, H = 3000 м. Как можно определить по рис. 8, такое $dd^* \approx 0.045$. При этом, как показывают расчеты, критерии I_C, $I_т$, I_t и I_L принимают значения $I_C = 1808$, $I_т = 980.9$, $I_t = 1154$, $I_L = 238.35$.

Сравнивая значения этих критериев с соответствующими значениями второго столбца табл. 4 для закона управления $V_y = \text{const}$ видим, что они практически совпадают и с принятой точностью получения решения (менее 0.5%) эквивалентны оптимальным значениям. Учитывая такую универсальность управления $\dot{V}_{cas} = dd^*$, в дальнейших расчетах будем использовать его на участке разгона.

6. Варьируемые параметры сценария и влияние их на критерии. Проведенное рассмотрение позволило определить управление на участке разгона и, таким образом, завершить параметрическое описание сценария движения ВС на этапе набора высоты. Вектор параметров, однозначно определяющих траекторию (или высотно-скоростной профиль) полета при заданном значении высоты набора $H_{зад}$ и числа $M_{зад}$, включает в себя:

– значение δ положения органа управления двигателями;

– значение dd темпа изменения приборной скорости на этапе разгона;

– значение приборной скорости набора высоты $V^{зад}_{cas}$.

Они образуют в рамках заданного сценария полета вектор варьируемых параметров $\overline{\text{P}}_0 = \overline{\text{P}}_0(\delta, dd, V^{зад}_{cas})$, однозначно определяющий траекторию набора высоты. Однако, не все компоненты этого вектора являются независимыми. В действительности значение $dd = dd^*$, рассчитанное с учетом или без учета ограничения на скорость в процессе разгона, зависит от тяги двигателей, а следовательно, от δ. Поэтому вектор $\overline{\text{P}}_0$ содержит только две независимые компоненты (δ и $V^{зад}_{cas}$) и задача оптимизации стоимости полета фактически сводится к оптимизации критерия I_C по значениям этих компонент.

Учитывая, что критерий I_C является линейной комбинацией критериев $I_т$ и It, рассмотрим зависимость этих частных критериев от значений δ и $V^{зад}_{cas}$.

Результаты расчетов значений критериев $I_т$ и I_t, как функций δ при фиксированном $V^{зад}_{cas} = 280$ *kt* для взлетных весов воздушного судна $G_1 = 33$ т, и $G_3 = 45$ т, показаны на рис. 9.

Как видно из этих рисунков, оба критерия монотонно убывают с возрастанием δ. Аналогичная картина имеет место при любом $V^{зад}_{cas}$ в диапазоне $260\ kt \leq V^{зад}_{cas} \leq 300\ kt$. Поэтому *оптимальным режимом работы двигателя на этапе набора высоты* является номинальный режим, обычно рекомендованный в РЛЭ.

Результаты расчетов значений критериев $I_т$ и I_t как функций $V^{зад}_{cas}$ при фиксированных $M_з = 0.8$ и $\delta = 0.85$ для взлетных весов ВС $G_1 = 29$ т, $G_2 = 37$ т и $G_3 = 45$ т показаны на рис. 10.

Анализ результатов расчетов на рис.9 позволяет сделать следующие выводы:

1. Оптимальным выбором значения $V^{зад}_{cas}$ можно обеспечить экономию топлива до 4% и времени – до 8%.

2. С увеличением веса ВС оптимальное значение $V^{зад}_{cas}$ возрастает и при некотором значении веса принимает предельно допустимое максимальное значение.

3. Оптимальные значения $V^{зад}_{cas} = V^{opt}_{cas}$ различны для различных критериев.

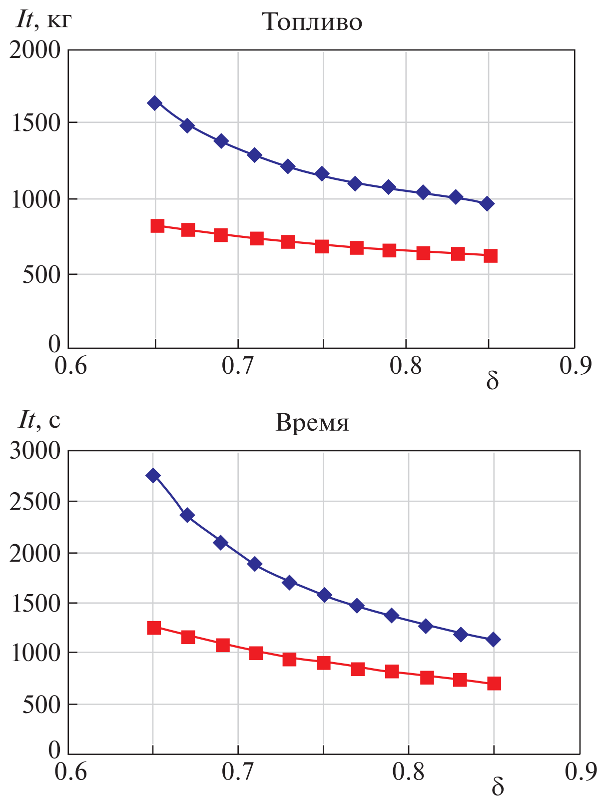

Рис. 9. Критерии I_c и I_t для разных весов: G1 – красная линия, G3 – синяя линия

4. Разница в оптимальных значениях V_{cas}^{opt} для различных критериев возрастает при уменьшении веса ВС.

Тот факт, что оптимальные значения V_{cas}^{opt} для критериев расхода топлива и времени различаются, свидетельствует о том, что оптимальное значение $V_{cas}^{зад}$ для критерия стоимости, как из линейной комбинации, будет зависеть от индекса стоимости.

7. Оптимизация скорости набора высоты для заданного значения CostIndex. Для нахождения оптимальных значений скорости набора высоты по критерию стоимости запишем (3.2) в виде

$$I_C(V_{cas}, CI) = I_т(V_{cas}) + CI\, I_t(V_{cas}). \tag{7.1}$$

Как видно из рис. 10, зависимости критериев $I_Т$ и I_t от V_{cas} достаточно хорошо аппроксимируется параболами второго порядка, т.е.

$$I_т(V_{cas}) \approx a_{2т}V_{cas}^2 + a_{1т}V_{cas} + a_{0т},$$
$$I_t(V_{cas}) \approx a_{2t}V_{cas}^2 + a_{1t}V_{cas} + a_{0т}.$$

В этом случае критерий стоимости I_C принимает вид

$$I_C(V_{cas}, CI) = a_2 V_{cas}{}^2 + a_1 V_{cas} + a_0, \tag{7.2}$$

где

$$a_2 = a_{2т} + CIa_{2t}; \quad a_1 = a_{1т} + CIa_{1t}; \quad a_0 = a_{0т} + CIa_{0t}.$$

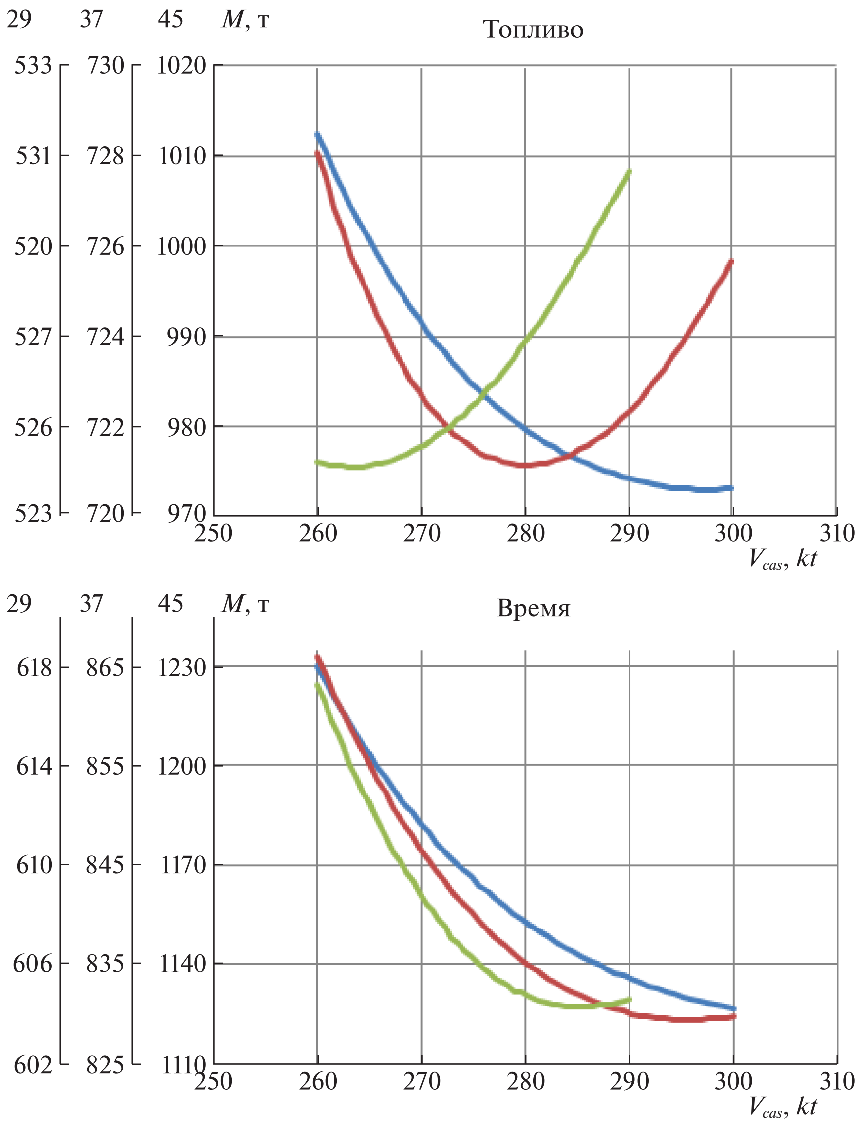

Рис. 10. Критерии I_c и I_t для разных весов: G1 – зеленая линия, G2 – красная линия, G3 – синяя линия

Поэтому оптимальное значение $V_{cas}^{зад} = V_{cas}^{opt}$ для заданного критерия стоимости I_C определяется соотношением $V_{cas}^{opt} = -0.5a_1/a_2$.

Проведенные по этим соотношениям расчеты оптимальных значений V_{cas}^{opt} для различных значений CI и веса ВС приведены на рис. 11.

На рис. 11, *а* показана зависимость оптимальной скорости V_{cas}^{opt} набора высоты от CI для нескольких значений веса ВС. Из этих зависимостей следует, что влияние индекса стоимости на оптимальное значение V_{cas}^{opt} проявляется в достаточно ограниченном диапазоне значений CI. Вариабельные значения CI лежат в диапазоне 0–5(6) кг/с. При этом очевидна тенденция снижения оптимальных скоростей набора высоты с уменьшением веса данного ВС.

Рисунок 11, *б* позволяет при заданной массе ВС и номинальном режиме работы двигателя для любого значения CI определить оптимальное значение скорости V_{cas}^{opt}, что прежде всего интересует АК при формировании сценария вылета ВС.

Таким образом оптимизация этапа набора высоты по значениям параметров сценария завершена.

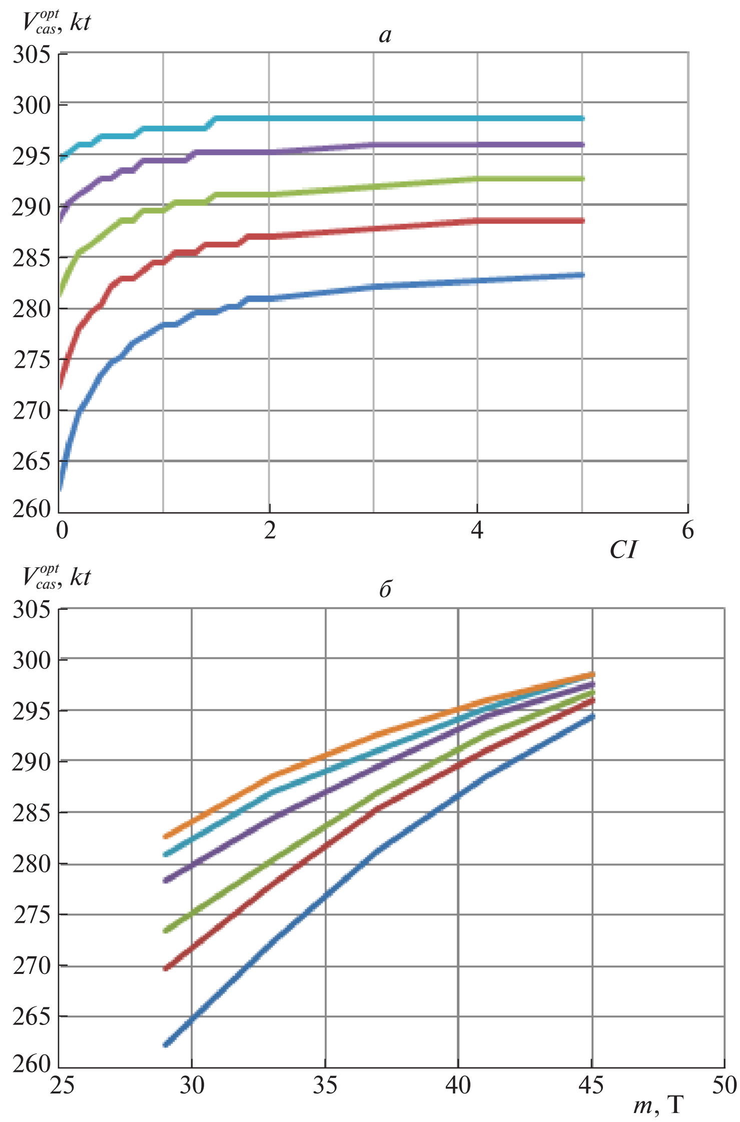

Рис. 11. Оптимальные значения V_{cas}^{opt}: *а* – для разных весов: 29 т – синяя линия, 33 т – красная, 37 т – зеленая, 41 т – фиолетовая, 45 т – голубая; *б* – для разных *CI*: 0 – синяя линия, 0.2 – красная, 0.4 – зеленая, 1 – фиолетовая, 2 – голубая, 4 – оранжевая

Заключение. Предложенная методика оптимизации этапа набора высоты базируется на использовании уравнений движения центра масс ВС с учетом изменения массы и горизонтальной составляющей скорости ветра. Исходная информация по аэродинамике ВС и характеристикам двигателя, получаемая в табличном виде, приводится к специальному виду полиномов, который обеспечивает непрерывность и дифференцируемость правых частей уравнений необходимое число раз. Вид таких моделей исходных данных универсален и применим к любым ВС гражданской и военно-транспортной авиации.

Методика основана на математическом моделировании процессов набора высоты и обладает следующими отличительными свойствами:

– использует специально разработанный программный комплекс для проведения работ по решению задач вертикальной навигации методами математического моделирования, кратко описанного в работе [11];

– применение предельно полных уравнений движения ВС и реальных аэродинамических характеристик конкретных ВС и характеристик их двигателей;

– использование типового сценария, предусмотренного в РЛЭ конкретного ВС;

– формирование законов управления углом атаки при реализации заданных режимов полета в соответствии с результатами работы [10];

– обеспечивает возможность проведения экспериментов при большом количестве реализаций с последующей оперативной обработкой результатов.

Все расчеты в работе были проведены в условиях стандартной атмосферы при отсутствии ветра. Однако указанные особенности методики в совокупности со свойствами математической модели движения ВС позволяют получить для любого заданного вектора внешних условий $\overline{P}_C(m_0, CI, U_{\mathbf{B}}, \Delta P_0, \Delta T_0)$ обоснованные решения следующих задач:

– оптимизировать законы управления ВС на участке разгона с учетом заданных ограничений на фазовый вектор;

– построить квазиоптимальные управления, согласованные с режимами работы бортовой системы управления и требованиями экологической безопасности;

– определить множество параметров, по которым следует проводить оптимизацию траектории набора высоты;

– провести параметрические исследования и найти диапазон вариабельных значений индекса стоимости (рис. 11, *а*);

– получить в табличном или графическом виде номограммы оптимальных значений приборной скорости набора высоты для различных значений индекса стоимости во всем диапазоне весов заданного ВС (рис. 11, *б*).

Результаты работы формируют методическую основу для разработки бортовых алгоритмов системы самолетовождения и позволяют на этапе предполетной подготовки определить оптимальный режим набора высоты при конкретном векторе внешних условий $\overline{P}_C(m_0, CI, U_{\mathbf{B}}, \Delta P_0, \Delta T_0)$, что составляет их практическую ценность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скрипниченко С.Ю.* Оптимизация режимов полета самолета по экономическим критериям: М.: Машиностроение, 1988.
2. *Федоров Л.П.* Определение оптимального режима работы двигателя при выборе наивыгоднейшей траектории набора высоты самолета // Тр. ЦАГИ. 1969. Вып. 1132.
3. *Прокопец Н.Б., Савельев А.В.* Приближенный синтез управления самолетом для набора высоты с заданной конечной скоростью за минимальное время // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т. XVI. № 4.
4. *Кубланов М.С.* Выбор оптимальных режимов набора высоты и снижения самолета с учетом ограничений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев: КНИГА, 1988.
5. *Гревцов Н.М.* Синтез алгоритмов управления траекторией самолета при наборе высоты и снижении за минимальное время // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1.
6. *Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю.* Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке разгона-набора высоты // Инженерный журнал: Наука и инновации. 2013. Вып. 12.
7. *Остославский И.В., Лебедев А.А.* О расчете подъема высокоскоростного самолета // Техника воздушного флота. 1946. № 8, 9.
8. *Скрипниченко С.Ю.* Базовые алгоритмы наивыгоднейших режимов полета // Научный вестник МГТУ ГА. 2005. № 86 (4).
9. *Пупков К.А., Егупов Н.Д., Лукашенко Ю.Л. и др.* Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров // М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
10. *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3.
11. *Голубева А.А., Куланов Н.В.* Методика выбора значений параметров этапа взлет самолетов гражданской, военно-транспортной авиации и беспилотных летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6.