СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 5, 2022

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О связи решений абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с дробными степенями операторного коэффициента уравнения
А. В. Глушак 575

Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны
О. М. Джохадзе 591

Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением
Д. П. Емельянов 607

Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве
Н. В. Зайцева 628

Волны Рэлея для эллиптических систем в областях с периодическими границами
С. А. Назаров 638

Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости
А. В. Чернов 656

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О свойствах одной полугруппы операторов, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, возникающим в теории вязкоупругости
Ю. А. Тихонов 669

Об одном классе многомерных интегральных уравнений типа свёртки с выпуклой нелинейностью
Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян 686

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Сходимость в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение
А. С. Бондарев 696

Оптимальные вычислительные агрегаты в задаче дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона и их предельные погрешности
А. Б. Утесов, А. А. Базарханова 703

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений нечётного порядка с осциллирующими коэффициентами
Я. Т. Султанаев, А. Р. Сагитова, Б. И. Марданов 717

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 575–590

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ С ДРОБНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ОПЕРАТОРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. А. В. Глушак

Рассмотрена неполная начальная задача для абстрактного сингулярного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Установлено, что при ослаблении требований на операторный коэффициент рассматриваемого уравнения для построения решений следует использовать дробные степени этого операторного коэффициента. Показано также, что дробная степень операторного коэффициента связывает условие Дирихле и весовое условие Неймана в случае граничной задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

DOI: 10.31857/S0374064122050016, EDN: CAMOUB

Введение. Пусть A – замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. Рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad k > 0. \tag{1}$$

Как следует из результатов работ [1–3], корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \tag{2}$$

при этом если $k \geqslant 1$, то начальное условие $u'(0) = 0$ выполнено автоматически, т.е. снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t = 0$.

Задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A – генератор косинус-оператор-функции $C(t; A)$. (По поводу терминологии см. обзорную работу [4].) Что касается абстрактного уравнения ЭПД (1), то оно встречалось ранее в [5; 6, гл. 1; 7] при различных предположениях об операторе A. В работах автора [1, 2] приведены необходимые и достаточные условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2). В работе [2] они сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda, A)$ оператора A и её весовых производных, а в [1] – в терминах дробной степени резольвенты и её обычных производных. Множество операторов A, при которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а разрешающий оператор этой задачи – через $Y_k(t; A)$ и назовём его операторной функцией Бесселя (ОФБ). ОФБ $Y_k(t; A)$ имеет (см. [1, 2]) экспоненциальный тип при $t \to \infty$ и для неё справедлива оценка

$$\|Y_k(t; A)\| \leqslant \Upsilon e^{\omega t}, \tag{3}$$

где $\Upsilon \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ – вещественные числа.

Если $0 < k < 1$, то корректна также и более общая, чем в (2), постановка начальных условий, а именно:

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} t^k u'(t) = u_1. \tag{4}$$

ОФБ $Y_k(t)$ может быть использована и при решении весовой задачи Коши (1), (4) для уравнения ЭПД. При $u_0, u_1 \in D(A)$ и $A \in G_k \subset G_{2-k}$ единственное решение задачи Коши (1), (4) имеет вид (см. [8])

$$u(t) = Y_k(t; A)u_0 + \frac{t^{1-k}}{1-k}Y_{2-k}(t; A)u_1.$$

Если оператор $A \in G_k$ и $k \geqslant 1,$ то задача (1), (4) корректной не является и, как указано ранее, следует рассматривать задачу (1), (2). Отметим, что исследование корректной разрешимости весовой задачи Коши проведено автором в работе [9]. Естественно возникает вопрос: а можно ли ослабить условия на класс операторов A так, чтобы была разрешима некоторая другая начальная задача для уравнения ЭПД? Ответ на него будет дан в следующем пункте работы.

1. Неполная задача Коши. В работе [10] введена в рассмотрение операторная функция Макдональда, которая позволяет определить решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $t \to \infty,$ и рассмотреть случай так называемой неполной задачи Коши, когда второе начальное условие при $t = 0$ не задаётся именно за счёт стремления решения к нулю при $t \to \infty.$ При этом, как установлено, вид первого начального условия зависит от входящего в уравнение (1) параметра $k > 0.$ Ранее неполная задача Коши для абстрактного волнового уравнения (случай $k = 0$ в уравнении (1)) изучалась в работах [11–16].

Указанное стремление решения к нулю обеспечивается видом оператора $A.$ Будем предполагать, что $A = B^2,$ где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B),$ допускающей оценку

$$\|T(t;B)\| \leqslant \Upsilon e^{-\omega t}, \tag{5}$$

$\Upsilon \geqslant 1,$ $\omega > 0$ – вещественные числа.

С оператором A такого вида задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями вида (2) корректной не является, поскольку, вообще говоря, в этом случае $A = B^2 \notin G_k.$

Пример 1. Примером удовлетворяющей оценке (5) полугруппы является полугруппа

$$T(t;B)u_0(x) = e^{-t}u_0(x+t),$$

допускающая оценку $\|T(t;B)\| \leqslant e^{-t}$ в банаховом пространстве $BU(\mathbb{R})$ ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с sup-нормой и генератором

$$Bu_0(x) = u_0'(x) - u_0(x).$$

Отметим также, что множество генераторов C_0-полугрупп, удовлетворяющих неравенству (5), вместе с каждым оператором B содержит также и дробные степени $B_\alpha = -(-B)^\alpha,$ $0 < \alpha < 1,$ этого оператора (подробнее о функциях от оператора и, в частности, о дробных степенях см. [17, гл. 4, § 14; 18, с. 358; 19, гл. 1, § 5; 20, с. 96]). Действительно, полугруппа, порождённая оператором $B_\alpha,$ имеет вид (см. [18, с. 357–363])

$$T(t;B_\alpha) = \int\limits_0^\infty f_{t,\alpha}(s)T(s;B)\,ds = \int\limits_0^\infty f_{1,\alpha}(s)T(st^{1/\alpha};B)\,ds,$$

где неотрицательная функция $f_{t,\alpha}(s)$ определена равенством

$$f_{t,\alpha}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(sz - tz^\alpha)\,dz, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

$\sigma > 0,$ $t > 0,$ $0 < \alpha < 1,$ и ветвь функции z^α выбрана так, что $\operatorname{Re} z^\alpha > 0$ при $\operatorname{Re} z > 0.$ Функция $f_{t,\alpha}(s)$ при $s > 0$ может быть выражена через функцию типа Райта [21, гл. 1] $f_{t,\alpha}(s) = s^{-1}e^{1,0}_{1,\alpha}(-ts^{-\alpha}),$ где

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)\Gamma(\delta - \beta k)}, \quad \alpha > \max\{0;\beta\}, \quad \mu, z \in \mathbb{C},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Учитывая оценку (5) и равенство (см. формулу (2.2.37) в [21, с. 79])

$$\int_0^\infty s^{-1} e^{1,0}_{1,\alpha}(-s^{-\alpha}) \exp(-\omega s t^{1/\alpha})\, ds = \exp(-\omega^\alpha t),$$

оценим $\|T(t;B_\alpha)\|$. Будем иметь

$$\|T(t;B_\alpha)\| \leqslant \Upsilon \int_0^\infty s^{-1} e^{1,0}_{1,\alpha}(-s^{-\alpha}) \exp(-\omega s t^{1/\alpha})\, ds = \Upsilon \exp(-\omega^\alpha t),$$

следовательно, полугруппа $T(t;B_\alpha)$ удовлетворяет требуемому неравенству вида (5).

Следуя [10], введём в рассмотрение операторную функцию, которая может быть записана и в терминах оператора Эрдейи–Кобера $\mathcal{K}_{\eta,\alpha}$ (см., например, [22, раздел 18.1, формулы (18.3), (18.8)]), в виде

$$M_k(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1} T(ts;B)v_0\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{K}_{1/2-k/2,k/2} T(t;B)v_0, \quad v_0 \in E. \tag{6}$$

Сходимость интеграла в выражении (6) обеспечена условием $k>0$ и оценкой (5).

Если $B\in\mathbb{R}$, $B<0$, то $T(t;B)=e^{Bt}$ и (см. [23, интеграл 2.3.5.4])

$$M_k(t;B) = (-Bt/2)^{1/2-k/2} K_{k/2-1/2}(-Bt), \tag{7}$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда. Поэтому операторная функция $M_k(t;B)$ была названа операторной функцией Макдональда (ОФМ).

Из неравенства (5) и представления (7) вытекает оценка

$$\|M_k(t;B)\| \leqslant \Upsilon t^{1/2-k/2} K_{k/2-1/2}(\omega t), \quad \Upsilon \geqslant 1, \quad \omega > 0,$$

и стремление функции $M_k(t;B)v_0$, $v_0\in E$, к нулю при $t\to\infty$, т.е. равенство

$$\lim_{t\to\infty} \|M_k(t;B)v_0\| = 0. \tag{8}$$

Функция $M_k(t;B)v_0$, $v_0\in D(A)$, удовлетворяет уравнению (1). Использовав обозначение $M_k'(t;B)v_0 = (M_k(t;B)v_0)'$, вычислим производные этой функции. Имеем

$$M_k'(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-1} T(ts;B)Bv_0\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)} \int_1^\infty \frac{d}{ds}(s^2-1)^{k/2} T(ts;B)Bv_0\, ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)} \left((s^2-1)^{k/2} T(ts;B)Bv_0 \big|_1^\infty - t\int_1^\infty (s^2-1)^{k/2} T(ts;B)B^2 v_0\, ds \right) =$$

$$= -\frac{t\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)} \int_1^\infty (s^2-1)^{k/2} T(ts;B)Av_0\, ds,$$

$$M_k''(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int_1^\infty s^2(s^2-1)^{k/2-1} T(ts;B)Av_0\, ds.$$

Подставив найденные производные в левую часть уравнения (1), получим

$$M_k''(t;B)v_0+\frac{k}{t}M_k'(t;B)v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2(s^2-1)^{k/2-1}-(s^2-1)^{k/2})T(ts;B)Av_0\,ds=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Av_0\,ds=AM_k(t;B)v_0, \qquad (9)$$

и, следовательно, функция $M_k(t;B)v_0,\ v_0\in D(A),$ удовлетворяет уравнению (1).

Для введённой ОФМ $M_k(t;B),$ определяющей решение уравнения (1), справедлива формула сдвига решения по параметру. Ранее аналогичная формула, причём только в сторону увеличения индекса для ОФБ $Y_k(t;A),$ была установлена в работах [1, 2] и в более общем виде в [24]. В следующей теореме покажем, что одна из формул сдвига связана с дробными степенями входящего в уравнение (1) генератора полугруппы $B.$

Теорема 1. *Пусть $0<k<m,\ 0<p<k,$ оператор A представим в виде $A=B^2,$ где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B),$ допускающей оценку (5). Тогда и в сторону увеличения, и в сторону уменьшения индекса справедливы формулы сдвига по параметру:*

$$M_m(t;B)v_0=\frac{2}{\Gamma(m/2-k/2)}\int\limits_1^\infty s^k(s^2-1)^{m/2-k/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds,\quad v_0\in E, \qquad (10)$$

$$M_p(t;B)v_0=\frac{2^{p-k+1}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds,\quad v_0\in D((-B)^{k-p+2}). \qquad (11)$$

Доказательство. Формула (10) сдвига решения по параметру с точки зрения дробного исчисления является следствием известной формулы композиции для операторов Эрдейи–Кобера (см. [22, раздел 18.1, формулы (18.3), (18.8), (18.16)]), которая имеет вид

$$\mathcal{K}_{\eta,\alpha}\mathcal{K}_{\eta+\alpha,\beta}u(t)=\mathcal{K}_{\eta,\alpha+\beta}u(t). \qquad (12)$$

Действительно, положив в (12) значения

$$\alpha=\frac{m-k}{2},\quad \beta=\frac{k}{2},\quad \eta=\frac{1-m}{2},$$

получим формулу (10). Отметим также, что непосредственная проверка этой формулы приводится в работе [10].

Чтобы вывести формулу сдвига (11) из формулы (12) для композиции при

$$\alpha=\frac{p-k}{2}<0,\quad \beta=\frac{k}{2},\quad \eta=\frac{1-p}{2},$$

следует осуществить и мотивировать операцию весового дифференцирования, которая скрыта в операторе $\mathcal{K}_{\eta,\alpha}$ при $\alpha<0.$ Проще проверить справедливость этой формулы непосредственно, не используя формулу (12) для композиции.

При доказательстве формулы (11) сдвига решения в сторону уменьшения индекса будет использовано известное представление полугруппы $T(t;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B)=(\lambda I-B)^{-1}$ оператора $B,$ которое на элементах $v_0\in D(B^2)$ при $-\omega<\sigma<0$ имеет вид (см., например, [19, с. 48])

$$T(t;B)v_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda;B)v_0\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\,d\lambda. \qquad (13)$$

Последний интеграл в равенстве (13) сходится абсолютно и равномерно по $t \geqslant 0,$ что обеспечивает законность изменения порядка интегрирования в последующих выкладках.

Учитывая представление (13) и интегралы 2.3.5.4 из [23] и 2.16.3.8 из [25], после элементарных преобразований получаем

$$\frac{2^{p-k+1}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds=$$

$$=\frac{2^{p-k+1}\sqrt{\pi}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2)\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\int\limits_1^\infty(\tau^2-1)^{k/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda ts\tau}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\,d\lambda\,d\tau\,ds=$$

$$=\frac{2^{p-k+1}\sqrt{\pi}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2)\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\int\limits_1^\infty(\tau^2-1)^{k/2-1}e^{\lambda ts\tau}\,d\tau\,d\lambda\,ds=$$

$$=\frac{t^{(k+1)/2-p}(-B)^{k-p}}{2^{k/2-1/2-p}\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s^{3/2-k/2}(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{1/2-k/2}K_{k/2-1/2}(-\lambda ts)R(\lambda;B)v_0\,d\lambda\,ds=\frac{t^{k/2+1/2-p}(-B)^{k-p}}{2^{k/2-1/2-p}\Gamma(k/2-p/2)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-3/2-k/2}R(\lambda;B)^2v_0\int\limits_1^\infty s^{3/2-k/2}(s^2-1)^{k/2-p/2-1}K_{k/2-1/2}(-\lambda ts)\,ds\,d\lambda=$$

$$=\frac{t^{1/2-p/2}(-B)^{k-p}}{2^{1/2-p/2}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{p/2-3/2-k}K_{p/2-1/2}(-t\lambda)R(\lambda;B)B^2v_0\,d\lambda=$$

$$=\frac{(-B)^{k-p}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{p-k-2}\left(\frac{-t\lambda}{2}\right)^{1/2-p/2}K_{p/2-1/2}(-\lambda t)R(\lambda;B)B^2v_0\,d\lambda=$$

$$=(-B)^{k-p}(-B)^{p-k-2}M_p(t;B)B^2v_0=M_p(t;B)v_0.$$

Последние равенства записаны по определению функции от оператора (см. [19, с. 136]) на основании скалярного равенства (7). Таким образом, формула сдвига (11) также установлена.

Следует отметить, что оператор в правой части (11) содержит композицию неограниченного оператора B^{k-p} при $k>p$ и интегрального, поэтому, также как и оператор Эрдейи–Кобера $K_{\eta,\alpha}$ при $\alpha<0,$ является по сути интегро-дифференциальным оператором. Теорема доказана.

Теперь укажем, какому начальному условию при $t=0$ удовлетворяет ОФМ $M_k(t;B).$

Если $0<k<1,$ $v_0\in E,$ то после очевидных преобразований получим

$$\lim_{t\to0}M_k(t;B)v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\lim_{t\to0}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)v_0\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}\,ds,$$

$$v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\frac{\Gamma(k/2)\Gamma(1/2-k/2)}{2\Gamma(1/2)}v_0=\frac{1}{2}\Gamma(1/2-k/2)v_0. \tag{14}$$

Установим далее, что ОФМ может быть использована при решении неполной задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Нас будет интересовать решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0)=u_0, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u''(t)\|=0. \tag{15}$$

В следующей теореме покажем, что в отличие от корректной задачи (1), (4) при $0<k<1$ производная решения задачи (1), (15) связана с дробной степенью входящего в уравнение (1) генератора полугруппы B.

Теорема 2. *Пусть* $0<k<1$, *оператор* A *представим в виде* $A=B^2$, *где* B *– генератор* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$, *допускающей оценку (5), и* $u_0\in D(A)$. *Тогда функция*

$$u(t)=\frac{2}{\Gamma(1/2-k/2)}M_k(t;B)u_0=\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)u_0\,ds \tag{16}$$

является единственным решением неполной задачи Коши (1), (15) и, кроме того, удовлетворяет содержащему дробную степень оператора $(-B)^{1-k}$ *начальному условию вида*

$$\lim_{t\to 0}t^k u'(t)=-\frac{2^k\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2-k/2)}(-B)^{1-k}u_0, \quad u_0\in D(A^2). \tag{17}$$

Доказательство. Из соотношений (8), (9), (14) следует, что определяемая равенством (16) функция $u(t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (15). Осталось доказать единственность этого решения. Заметим, что для этого достаточно двух условий, содержащихся в (15), а именно:

$$u(0)=u_0, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=0.$$

Доказательство единственности решения задачи (1), (15) проведём методом от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,s)=f(M_k(s;B)(u_1(t)-u_2(t))),$$

здесь $f\in E^*$ (E^* – сопряжённое пространство к E), $M_k(s;B)$ – ОФМ, где $t,s\geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению и условиям

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}=\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2}+\frac{k}{s}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}, \quad t,s>0, \tag{18}$$

$$w(0,s)=0, \quad \lim_{t\to\infty}w(t,s)=\lim_{s\to\infty}w(t,s)=0. \tag{19}$$

Интерпретируем функцию $w(t,s)$ как обобщённую функцию и по переменной s применим I-преобразование.

Для скалярных экспоненциально убывающих при $s\to+\infty$ функций I-преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t,\lambda)=\int\limits_0^\infty\sqrt{\lambda s}\,I_p(\lambda s)w(t,s)\,ds,$$

где $p=(k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщённые функции изложено в [26; 27, с. 63], при этом основные функции также являются экспоненциально убывающими при $s\to+\infty$ функциями, что и обеспечивает корректное определение I-преобразования обобщённой функции $w(t,s)$.

Из условий (18), (19) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ в пространстве регулярных обобщённых функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \hat{w}(t,\lambda), \quad t>0, \tag{20}$$

$$\hat{w}(0,\lambda)=0, \quad \lim_{t\to\infty} \hat{w}(t,\lambda)=0. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda) = t^{(1-k)/2}(d_1(\lambda)I_{(k-1)/2}(\lambda t) + d_2(\lambda)K_{(k-1)/2}(\lambda t)).$$

Из второго условия в (21) получаем $d_1(\lambda)=0$, а из первого условия в (21) следует, что $d_2(\lambda)=0$. Поэтому $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\geqslant 0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи (1), (15) установлена.

Докажем справедливость равенства (17). Ранее было установлено, что

$$M_k'(t;B)u_0 = -\frac{t\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\int_1^\infty (s^2-1)^{k/2}T(ts;B)Au_0\,ds. \tag{22}$$

Учитывая представление (13) полугруппы $T(t;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B)$, равенство (22) после изменения порядка интегрирования запишем в виде

$$t^kM_k'(t;B)u_0 = -\frac{t^{k+1}\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2}A^2u_0\int_1^\infty (s^2-1)^{k/2}e^{\lambda ts}\,ds\,d\lambda =$$

$$= -\frac{2^{k/2-1/2}t^{k/2+1/2}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-k/2-5/2}K_{k/2+1/2}(-\lambda t)R(\lambda;B)A^2u_0\,d\lambda, \quad u_0\in D(A^2). \tag{23}$$

При преобразованиях был использован интеграл 2.3.5.4 из работы [23].

В равенстве (23) перейдём к пределу при $t\to 0$. Поскольку в области $K_\nu(z)\neq 0$, $\nu>0$, $\operatorname{Re} z>0$ асимптотика функции Макдональда при $z\to 0$ имеет вид (см. [28, с. 173])

$$K_\nu(z)\sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu}, \tag{24}$$

то по определению дробной степени оператора $-B$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0} t^kM_k'(t)u_0 = -\frac{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-k-3}R(\lambda;B)A^2u_0\,d\lambda =$$

$$= -2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)(-B)^{-k-3}A^2u_0 = -2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)(-B)^{1-k}u_0.$$

Следовательно, определяемая равенством (16) функция $u(t)$ удовлетворяет предельному соотношению (17), которое можно также рассматривать и как представление положительной дробной степени оператора B, и как соотношение, связывающее начальные условия, накладываемые на функцию и её производную. Теорема доказана.

Пример 2. В условиях примера 1, согласно теореме 2, при $0<k<1$ для решения задачи (1), (15), его производной и дробной степени оператора B справедливы представления

$$u(t,x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma((1-k)/2)}\int_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}e^{-ts}u_0(x+ts)\,ds,$$

$$u_t'(t,x)=\frac{2\sqrt{\pi}t^{-k}}{\Gamma(k/2)\Gamma((1-k)/2)}\int\limits_t^\infty \tau(\tau^2-t^2)^{k/2-1}e^{-\tau}(u_0'(x+\tau)-u_0(x+\tau))\,d\tau,$$

$$(-B)^{1-k}u_0(x)=-\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty \tau^{k-1}e^{-\tau}(u_0'(x+\tau)-u_0(x+\tau))\,d\tau.$$

Если же параметр $k\geqslant 1$, то ОФМ $M_k(t;B)$ имеет особенность при $t=0$ (см., например, представление (7)). Поскольку при $k=1$ у ОФМ $M_k(t;B)$ имеется логарифмическая особенность, а при $k>1$ – степенная, то в этом случае удобно задавать весовое начальное условие не для функции, а для производной. Тогда имеем

$$\lim_{t\to 0}t^kM_k'(t;B)v_0=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\pi}t^k}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Bv_0\,ds=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\lim_{t\to 0}\int\limits_t^\infty \tau(\tau^2-t^2)^{k/2-1}T(\tau;B)Bv_0\,d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_0^\infty \tau^{k-1}T(\tau;B)Bv_0\,d\tau=$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma(k/2)}(-B)^{-k}(-B)v_0=-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma(k/2)}(-B)^{1-k}v_0,\quad v_0\in D(A). \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть $k\geqslant 1$, оператор A представим в виде $A=B^2$, где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (5), и $u_1\in D((-B)^{k+1})$. Тогда функция*

$$u(t)=-\frac{\Gamma(k/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}M_k(t;B)(-B)^{k-1}u_1=-\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)(-B)^{k-1}u_1\,ds$$

является единственным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям вида

$$\lim_{t\to 0}t^ku'(t)=u_1,\quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u''(t)\|=0. \tag{26}$$

Требуемое утверждение о разрешимости следует из соотношений (8), (9) и (25), а единственность решения устанавливается аналогично доказательству теоремы 2.

Покажем далее, что вместо весового начального условия в (26) при некотором $\alpha>k-1$ можно задавать нелокальное интегральное условие вида

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}M_k(t;B)v_0\,dt=u_2. \tag{27}$$

Интегральные условия, схожие с условием (27), встречались ранее в ряде работ (см., например, [29, 30]).

Элементарные вычисления позволяют интеграл в левой части (27) записать в виде

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}M_k(t;B)v_0\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)v_0\,ds\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-k}\int\limits_t^\infty (\tau^2-t^2)^{k/2-1}T(\tau;B)v_0\,d\tau\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_0^\infty T(\tau;B)v_0\int\limits_0^\tau t^{\alpha-k}(\tau^2-t^2)^{k/2-1}\,dt\,d\tau=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((\alpha-k+1)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)}\int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1}T(\tau;B)v_0\,d\tau=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)}(-B)^{-\alpha}v_0. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть* $k \geqslant 1$, $\alpha > k-1$, *оператор* A *имеет вид* $A = B^2$, *где* B – *генератор* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$, *допускающей оценку (5), и* $u_2 \in D((-B)^{\alpha+2})$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)} M_k(t;B)(-B)^{-\alpha}u_2 =$$

$$= \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)\Gamma(k)} \int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1} T(ts;B)(-B)^\alpha u_2\, ds$$

является единственным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям вида

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}u(t)\,dt = u_2, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|u'(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|u''(t)\| = 0.$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, требуемое утверждение о разрешимости следует из соотношений (8), (9) и (28).

Единственность решения устанавливается аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, при этом условия (21) для уравнения (20) следует заменить на условия

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\hat{w}(t,\lambda)\,dt = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\hat{w}(t,\lambda) = 0.$$

Теорема доказана.

2. Задача Дирихле. Переходим далее к рассмотрению эллиптического случая для уравнения ЭПД и покажем, что решение задачи Дирихле удовлетворяет также и содержащему дробную степень операторного коэффициента весовому условию Неймана.

Под задачей Дирихле на полуограниченном интервале $t \in (0,\infty)$ будем понимать задачу об отыскании ограниченного решения уравнения

$$w''(t) + \frac{m}{t}w'(t) = -Bw(t), \quad m \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

удовлетворяющего граничному условию Дирихле

$$w(0) = w_0, \quad w_0 \in D(B). \tag{30}$$

Сформулируем в удобном для дальнейшего изложения виде теорему о разрешимости рассматриваемой задачи Дирихле, которая фактически установлена в работе [31].

Теорема 5. *Пусть* $m < 1$ *и оператор* B *является генератором равномерно ограниченной* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$. *Тогда функция*

$$w(t) = \frac{t^{1-m}}{2^{1-m}\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-3/2}\exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right)T(\tau;B)w_0\,d\tau \tag{31}$$

является единственным решением задачи Дирихле (29), (30).

Покажем, что дробная степень входящего в уравнение (29) оператора B связывает условие Дирихле и весовое условие Неймана, накладываемые на определяемое равенством (31) решение задачи Дирихле. При этом, как и в работе [19, с. 151], вначале вместо оператора B следует рассмотреть оператор $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$. Оператор B_ε является генератором уже убывающей полугруппы $T_\varepsilon(t;B_\varepsilon)$, т.е. полугруппы, для которой справедлива оценка

$$\|T_\varepsilon(t;B_\varepsilon)\| \leqslant \Upsilon e^{-\omega t}, \quad \Upsilon \geqslant 1, \quad \omega = \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Затем в установленном для оператора B_ε равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим соответствующее утверждение уже для оператора B. В целях упрощения обозначений далее будем считать, что C_0-полугруппа $T(t;B)$ удовлетворяет оценке (32).

Заменив переменную интегрирования в определяемой равенством (31) функции $w(t)$, запишем представление

$$w(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty s^{m/2-3/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) T\left(\frac{st^2}{4}; B\right) w_0\, ds$$

и вычислим производную. После обратной замены получим

$$w'(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty s^{m/2-3/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) \frac{st}{2} T\left(\frac{st^2}{4}; B\right) w_0\, ds =$$

$$= \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) T(\tau;B) B w_0\, ds. \tag{33}$$

Отметим, что сходимость на бесконечности интеграла в равенстве (33) обеспечена оценкой (32). Учитывая представление (13) полугруппы $T(\tau;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B)$, равенство (33) для $\operatorname{Re}\lambda = \sigma < 0$ и $w_0 \in D(B^3)$ после изменения порядка интегрирования запишем в виде

$$w'(t) = \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda\tau} \frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2} B^3 w_0\, d\lambda\, d\tau =$$

$$= \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2} B^3 w_0 \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(\lambda\tau - \frac{t^2}{4\tau}\right) ds\, d\lambda. \tag{34}$$

Использовав интеграл 2.3.16.1 работы [23], равенство (34) запишем в виде

$$t^m w'(t) = \frac{(2t)^{m/2+1/2}}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (-\lambda)^{-m/4-9/4} K_{m/2+1/2}((-\lambda)^{1/2} t) R(\lambda;B) B^3 w_0\, d\lambda. \tag{35}$$

В равенстве (35) перейдём к пределу при $t \to +0$. Поскольку в области $\operatorname{Re} z > 0$, $K_\nu(z) \neq 0$ асимптотика функции Макдональда при $z \to 0$ имеет вид (24), то по определению дробной степени оператора B для $-1 < m < 1$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (-\lambda)^{-m/2-5/2} R(\lambda;B) B^3 w_0\, d\lambda =$$

$$= \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{-m/2-5/2} R(-\mu;B) (-B)^3 w_0\, d\mu =$$

$$= \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} (-B)^{-m/2-5/2} (-B)^3 w_0 = c(m) (-B)^{1/2-m/2} w_0,$$

где

$$c(m) = \frac{2^m\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}, \quad 0 < 1/2 - m/2 < 1.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Пусть оператор B является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t;B)$, $w_0 \in D(B^3)$ и $-1 < m < 1$. Тогда определяемая равенством (31) функция $w(t)$, являющаяся единственным решением задачи Дирихле (29), (30), удовлетворяет содержащему дробную степень оператора B весовому условию Неймана вида*

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-B)^{1/2-m/2}w_0, \quad c(m) = \frac{2^m\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}. \tag{36}$$

Пример 3. Если оператор B является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы, то оператор $B_\alpha = -(-B)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, также будет генератором такой же полугруппы (см. [19, гл. 1, § 5; 18, с. 358]), и в силу теоремы 6 для решения $w(t)$ задачи Дирихле (29), (30) с оператором B_α при $-1 < m < 1$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-B)^{\alpha(1-m)/2}w_0.$$

Если же оператор $\tilde{B}$ – генератор равномерно ограниченной аналитической в правой полуплоскости полугруппы, то оператор $\tilde{B}_n = (-1)^{n+1}\tilde{B}^n$, $n \in \mathbb{R}$, по теореме Паке [32] порождает такую же полугруппу, поэтому для решения $w(t)$ задачи Дирихле (29), (30) с оператором $\tilde{B}_n$ при $-1 < m < 1$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-\tilde{B})^{n(1-m)/2}w_0.$$

В частности, в качестве операторов B и $\tilde{B}$ можно взять оператор $A \in G_k$, $k > 0$, если он удовлетворяет оценке (3) с постоянной ω, равной нулю (см. [1, 2]).

Пример 4. Для того чтобы привести ещё один конкретный пример, возьмём пространство $E = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, или пространство $E = BU(\mathbb{R})$, а также генератор B и полугруппу $T(t,B)$ следующего вида (см. [18, с. 369; 20, с. 96]):

$$B = \frac{d^2}{dx^2}, \quad T(t,B)w_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{(x-s)^2}{4t}\biggr)w_0(s)\,ds.$$

Установлено, что оператор $B_{1/2} = -(-B)^{1/2}$ является генератором равномерно ограниченной полугруппы и соответственно имеет вид

$$B_{1/2}w_0(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w_0(x-s)-w_0(x)}{s^2+h^2}ds, \quad T(t,B_{1/2})w_0(x) = \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w_0(s)}{t^2+(x-s)^2}ds.$$

Тогда по теореме 6 функция

$$w(t,x) = \frac{t^{1-m}}{2^{1-m}\pi\Gamma(1/2-m/2)}\int_0^\infty \tau^{m/2-1/2}\exp\biggl(-\frac{t^2}{4\tau}\biggr)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w_0(s)\,ds}{\tau^2+(x-s)^2}\,d\tau$$

будет ограниченным решением псевдодифференциального уравнения (оператор $B_{1/2}$ не является оператором дифференцирования d/dx)

$$\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = -B_{1/2}w(t,x), \quad t > 0,$$

удовлетворяющим условиям Дирихле и Неймана

$$w(0,x)=w_0(x),\quad w_0(x)\in D(B)=E\bigcap H^2(\mathbb{R}),$$

$$\lim_{t\to 0}t^m\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}=c(m)(-B_{1/2})^{1/2-m/2}w_0(x)=$$

$$=c(m)((-B)^{1/2})^{1/2-m/2}w_0(x)=c(m)(-B)^{1/4-m/4}w_0(x),\quad -1<m<1.$$

В следующей теореме установим свойство, аналогичное теореме 6, которым обладает решение задачи Дирихле для уравнения

$$w''(t)+\frac{m}{t}w'(t)-b_2^2w(t)=-Aw(t),\quad b_2\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{37}$$

имеющего более общей вид, чем уравнение (29). При этом будем предполагать, что $A\in G_k$, $k>0$, а соответствующая ОФБ $Y_k(t;A)$ имеет экспоненциальный тип при $t\to\infty$ и для неё справедлива оценка (3). Как установлено в работе [33], выполняется и $A-b_1^2\in G_k$, $b_1\in\mathbb{R}$, т.е. задача Коши с условием (2) для уравнения

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)+b_1^2u(t)=Au(t),\quad b_1\in\mathbb{R},\quad t>0,$$

является корректной и для $Y_k(t;A-b_1^2)$ также справедлива оценка вида (3).

Введём следующие обозначения:

$$k>0,\quad b:=\sqrt{b_2^2-b_1^2}>\omega,\quad q:=1+\frac{k-m}{2},\quad c(b,k,m):=\frac{b^q}{2^{q-2}\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2-m/2)}.$$

Теорема 7. *Пусть оператор* $A\in G_k$, $w_0\in D(A)$, $b>\omega$ *и* $-1<m<1$. *Тогда функция*

$$w(t)=c(b,k,m)t^q\int\limits_0^\infty\tau^k(1+\tau^2)^{-q/2}K_q(bt\sqrt{1+\tau^2})Y_k(t\tau;A-b_1^2I)w_0\,d\tau\tag{38}$$

является единственным ограниченным решением задачи Дирихле (37), (30) и удовлетворяет содержащему дробную степень оператора b_2^2I-A *весовому условию Неймана вида*

$$\lim_{t\to 0}t^mw'(t)=\frac{2^m\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}(b_2^2I-A)^{1/2-m/2}w_0-$$

$$-\frac{2^mb^2\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}(b_2^2I-A)^{-1/2-m/2}w_0-2^mb^{2-2m}(b_2^2I-A)^{m/2-1/2}w_0,\quad w_0\in D(A^2).\tag{39}$$

Доказательство. Тот факт, что определяемая равенством (38) функция $w(t)$ является единственным решением задачи Дирихле (37), (30), установлен в работе [31], и нам остаётся доказать справедливость предельного соотношения (39). Учитывая следующие формулы для производных функции Макдональда $K_q(z)$ и ОФБ $Y_k(t;A)$ (см. [1]):

$$(z^qK_q(z))'=-z^qK_{q-1}(z),\quad (Y_k(t;A)w_0)'=\frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t;A)Aw_0,$$

вычислим $w'(t)$. В результате получим

$$w'(t)=-bc(b,k,m)t^q\int\limits_0^\infty\tau^k(1+\tau^2)^{1/2-q/2}K_{q-1}(bt\sqrt{1+\tau^2})Y_k(t\tau;A-b_1^2I)w_0\,d\tau+$$

$$+\frac{c(b,k,m)}{k+1}t^{q+1}\int\limits_0^\infty \tau^{k+2}(1+\tau^2)^{-q/2}K_q(bt\sqrt{1+\tau^2})Y_{k+2}(t\tau;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\,d\tau. \qquad (40)$$

Использовав схему доказательства теоремы 6 и интегральные представления функции Макдональда $K_q(z)$ (см. [28, с. 153]) и ОФБ $Y_k(t;A)w_0$, $w_0\in D(A^2)$ (см. [2]), преобразуем равенство (40) к виду

$$K_q(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^q\int\limits_0^\infty s^{-q-1}\exp\left(-s-\frac{z^2}{4s}\right)ds,$$

$$Y_k(t;A)w_0=\frac{2^{k/2-1/2}\Gamma(k/2+1/2)}{i\pi}t^{1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{3/2-k/2}I_{k/2-1/2}(t\lambda)R(\lambda^2;A)w_0\,d\lambda,\quad \sigma>\omega.$$

После элементарных преобразований будем иметь

$$w'(t)=-\frac{2^{k/2-1/2-q}b^qc(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{i\pi}t^{2q-1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{3/2-k/2}R(\lambda^2;A-b_1^2I)w_0\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-q}\exp\left(-s-\frac{b^2t^2}{4s}\right)\int\limits_0^\infty \tau^{k/2+1/2}\exp\left(-\frac{b^2t^2}{4s}\tau^2\right)I_{k/2-1/2}(t\tau\lambda)\,d\tau\,ds\,d\lambda\,+$$

$$+\frac{2^{k/2-1/2-q}b^qc(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{i\pi(k+1)}t^{2q+1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{1/2-k/2}R(\lambda^2;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-q-1}\exp\left(-s-\frac{b^2t^2}{4s}\right)\int\limits_0^\infty \tau^{k/2+3/2}\exp\left(-\frac{b^2t^2}{4s}\tau^2\right)I_{k/2+1/2}(t\tau\lambda)\,d\tau\,ds\,d\lambda.$$

Вычислим внутренние интегралы в полученном равенстве, использовав формулы 2.15.5.4 из работы [25] и 2.3.16.1 из [23]. В результате получим

$$w'(t)=-\frac{2^{k/2+m/2}b^{-k/2-m/2}c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}t^{-m}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda R(\lambda^2;A-b_1^2I)w_0\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-m/2-1/2}\exp\left(-s\left(1-\frac{\lambda^2}{b^2}\right)-\frac{b^2t^2}{4s}\right)ds\,d\lambda\,+$$

$$+\frac{2^{k/2+m/2+1}b^{-k/2-m/2-2}c(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{2\pi i(k+1)}t^{-m}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda R(\lambda^2;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{m/2-1/2}\exp\left(-s\left(1-\frac{\lambda^2}{b^2}\right)-\frac{b^2t^2}{4s}\right)ds\,d\lambda=$$

$$=-\frac{2^{m+k/2+1/2}b^{-k/2-3m/2+1}c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}t^{-3m/2+1/2}\,\times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/4-1/4} K_{1/2-m/2}(t\sqrt{b^2-\lambda^2}) R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda +$$

$$+\frac{2^{m+k/2+3/2} b^{-k/2+m/2-1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{2\pi i(k+1)} t^{-m/2+1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/4-1/4} K_{m/2+1/2}(t\sqrt{b^2-\lambda^2}) R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda. \tag{41}$$

После умножения равенства (41) на t^m перейдём к пределу при $t\to+0$. Поскольку в области $\operatorname{Re} z>0$, $K_\nu(z)\neq 0$ асимптотика функции Макдональда при $z\to 0$ имеет вид (24), то для значений $-1<m<1$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = -\frac{2^{m+k/2} b^{-k/2-3m/2+1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2-m/2)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda +$$

$$+\frac{2^{k/2+m/2} b^{-k/2+m/2-1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/1+1/2)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda. \tag{42}$$

Пусть γ – парабола, образ проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re}\lambda=\sigma$ при отображении $\mu=\lambda^2$. По определению функции от оператора $(A-b_1^2 I)$ (см. [19, с. 136]) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (b^2-\mu)^{m/2-1/2} R(\mu; A-b_1^2 I) w_0\, d\mu = -\frac{1}{2}(b^2 I-(A-b_1^2 I))^{m/2-1/2} w_0 =$$

$$=-\frac{1}{2}(b_2^2 I-A)^{m/2-1/2} w_0 \tag{43}$$

и аналогично

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (b^2-\mu)^{-m/2-1/2} R(\mu; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\mu =$$

$$=\frac{1}{2}(b_2^2 I-A)^{-m/2-1/2}((b_2^2-b^2)I-A) w_0 =$$

$$=\frac{1}{2}(b_2^2 I-A)^{1/2-m/2} - \frac{1}{2}b^2(b_2^2 I-A)^{-m/2-1/2} w_0. \tag{44}$$

Из равенств (42)–(44) и вытекает справедливость требуемого соотношения (39). Отметим также, что если оператор A такой, что в соотношении (39) можно перейти к пределу при $b \to 0,$ то оно превратится в равенство (36) из теоремы 6. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в частном случае, когда оператор $A \in G_k$ и для ОФБ $Y_k(t; A)$ справедливо неравенство (3) с постоянной $\omega = 0,$ соответствующие результаты о связи решения задачи Дирихле с дробными степенями операторного коэффициента A получены автором ранее в работе [34].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
2. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–599.
3. *Глушак А.В.* Семейство операторных функций Бесселя // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. 2020. Т. 187. С. 36–43.
4. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1990. Т. 28. С. 87–202.
5. *Donaldson J.A.* A singular abstract Cauchy problems // Proc. Nat. Acad. Sci. 1970. V. 66. № 2. P. 269–274.
6. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems. New York, 1976.
7. *Bragg L.R.* Some abstract Cauchy problems in exceptional cases // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 65. № 1. P. 105–112.
8. *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55–56.
9. *Глушак А.В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637.
10. *Глушак А.В.* Операторная функция Макдональда и неполная задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. 2021. Т. 195. С. 35–43.
11. *Balakrishnan A.V.* Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pac. J. Math. 1960. V. 10. P. 419–437.
12. *Fattorini H.O., Radnitz A.* The Cauchy problem with incomplete initial data in Banach spaces // Mich. Math. J. 1971. V. 18. P. 291–320.
13. *Fattorini H.O.* The undetermined Cauchy problem in Banach spaces // Math. Ann. 1973. V. 200. P. 103–112.
14. *Dorroh J.R.* Semigroups of operators and second order Cauchy problems // Semigroup Forum. 1985. V. 31. P. 297–304.
15. *de Laubenfels R.* Second order incomplete expiring Cauchy problems // Semigroup Forum. 1989. V. 39. P. 75–84.
16. *de Laubenfels R.* Existence families, functional calculi and evolution equations // Lect. Not. Math. V. 1570. Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
17. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
18. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
19. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
20. *Голдстейн Д.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
21. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.
22. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
23. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
24. *Глушак А.В.* Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 5. С. 656–665.
25. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.

26. *Koh E.L., Zemanian A.N.* The complex Hankel and I-transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 5. P. 945–957.
27. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
28. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1963.
29. *Прилепко А.М., Тихонов И.В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. Математика. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.
30. *Тихонов И.В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 841–843.
31. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 510–514.
32. *Paquet L.* Équations d'évolution pour opérateurs locaux et équations aux dérivés partielles // C. R. Acad. Sci. 1978. AB286. № 4. P. A215–A218.
33. *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 363–369.
34. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 128–130.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

Поступила в редакцию 10.11.2021 г.
После доработки 13.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 591–606

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

© 2022 г. О. М. Джохадзе

Изучена смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны. Исследованы вопросы единственности, локальной и глобальной разрешимости поставленной задачи в зависимости от характера нелинейностей, присутствующих как в уравнении, так и в граничном условии. Рассмотрены случаи несуществования решения не только в целом, но даже локально, а также когда эта задача имеет взрывное решение.

DOI: 10.31857/S0374064122050028, EDN: CASWYZ

1. Постановка задачи. В плоскости независимых переменных x и t в области $D_T :=$ $:= \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<l,\ \ 0<t<T\}$ рассмотрим смешанную задачу определения решения $u(x,t)$ полулинейного волнового уравнения вида

$$\Box u + g(u) = f(x,t), \quad (x,t)\in D_T, \tag{1.1}$$

удовлетворяющего начальным

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.2}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t)=F[u_t(0,t)]+\alpha(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u_x(l,t)=\beta(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.4}$$

где $g,\ f,\ \varphi,\ \psi,\ F,\ \alpha$ и β – заданные функции своих аргументов, u – искомая действительная функция, а оператор $\Box := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Легко видеть, что при выполнении

$$f\in C^1(\overline{D}_T), \quad g,F\in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\varphi\in C^2([0,l]), \quad \psi\in C^1([0,l]), \quad \alpha,\beta\in C^1([0,T]) \tag{1.5}$$

необходимыми условиями разрешимости задачи (1.1)–(1.4) в классе $C^2(\overline{D}_T)$ являются следующие условия согласования второго порядка:

$$\varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),$$

$$\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g[\varphi(0)]+f(0,0)\}+\alpha'(0),$$

$$\varphi'(l)=\beta(0), \quad \psi'(l)=\beta'(0). \tag{1.6}$$

Отметим, что нелинейное граничное условие вида (1.3), когда функция F зависит только от u, возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины в случае упругого закрепления одного из её концов, когда натяжение не подчиняется линейному закону Гука и является нелинейной функцией смещения [1, с. 41; 2–4], а также при описании процессов в распределённых автоколебательных системах [5, с. 405]. Краевое условие (1.3) возникает, например, когда конец пружины испытывает сопротивление среды, нелинейно зависящее от скорости его движения [1, с. 42]. Задаче (1.1)–(1.4) посвящены многочисленные работы, в которых в основном решения рассматриваются в пространствах типа Соболева. В настоящей работе задача (1.1)–(1.4) исследуется в классической постановке для достаточно широких классов нелинейных функций, присутствующих как в уравнении (1.1), так и в граничном условии (1.3). При этом предлагается другой подход, когда используются представления решения задач Коши, Гурса и Дарбу в разных частях рассматриваемой области.

В п. 2 приведена эквивалентная редукция поставленной задачи к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры. В п. 3 доказана локальная разрешимость задачи по переменной t. В п. 4 при некоторых ограничениях на нелинейные функции g и F получена априорная оценка для классического решения этой задачи. В п. 5 доказана глобальная разрешимость в предположении, что $T \leqslant l$. В п. 6 доказана единственность решения. Наконец, в п. 7 рассмотрены случаи несуществования решения не только в целом, но даже локально, а также когда эта задача имеет взрывное решение.

2. Редукция задачи (1.1)–(1.4) к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры. Далее, с целью избежать трудностей технического характера, ограничимся рассмотрением случая, когда $T = l$, которое будет снято при получении локальной разрешимости и априорной оценки в пп. 3 и 4 соответственно. Пусть $u \in C^2(\overline{D}_l)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.4). Разобьём область D_l, являющуюся квадратом с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,l)$, $B(l,l)$ и $C(l,0)$, на четыре прямоугольных треугольника $\Delta_1 := \Delta OO_1C$, $\Delta_2 := \Delta OO_1A$, $\Delta_3 := \Delta CO_1B$ и $\Delta_4 := \Delta AO_1B$, где точка $O_1(l/2, l/2)$ – центр квадрата D_l. В треугольнике Δ_1 в силу (1.2) и формулы Даламбера, как известно, справедливо равенство [1, с. 59]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau, \quad (x,t) \in \Delta_1. \tag{2.1}$$

Здесь

$$f_1(x,t,s) := f(x,t) - g(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

а $\Omega^1_{x,t}$ – треугольник с вершинами в точках (x,t), $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Как известно, для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции w и характеристического для уравнения (1.1) прямоугольника $PP_1P_2P_3$ из области её определения справедливо равенство [6, с. 173]

$$w(P) = w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} \Box w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{2.3}$$

где P и P_3, а также P_1 и P_2 – противоположные вершины этого прямоугольника, причём ордината точки P больше ординат остальных точек.

Пусть теперь точка $(x,t) \in \Delta_2$. Тогда, положив

$$\mu_1 := u|_{x=0} \tag{2.4}$$

и применив равенство (2.3) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0,t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x,0)$, а равенство (2.1) для точки $P_2(t,x) \in \Delta_1$, с учётом (1.1), (1.2) и (2.1)–(2.4) получим

$$u(x,t) = u(P_1) + u(P_2) - u(P_3) + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \mu_1(t-x) - \varphi(t-x) + \frac{1}{2}[\varphi(t-x) + \varphi(t+x)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{t,x}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau=\mu_1(t-x)+\frac{1}{2}[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_2. \tag{2.5}$$

Здесь $\Omega^2_{x,t}$ – четырёхугольник $P\widetilde{P}_2P_3P_1,$ где точка $\widetilde{P}_2=\widetilde{P}_2(x+t,0).$

Приняв во внимание, что при $(x,t)\in\Delta_2$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f_1\,d\xi\,d\tau=\int\limits_0^{t-x}d\tau\int\limits_{-x+t-\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi+\int\limits_{t-x}^{t}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi, \tag{2.6}$$

в силу (2.5) будем иметь

$$u_x(x,t)=-\mu_1'(t-x)+\frac{1}{2}[\varphi'(t+x)+\varphi'(t-x)+\psi(t+x)+\psi(t-x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-x}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))+f_1(-x+t-\tau,\tau,u(-x+t-\tau,\tau))]\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))-f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau. \tag{2.7}$$

В (2.7) подставим $x=0$ и учтём первое из краевых условий (1.3) для неизвестной функции μ_1 при $0\leqslant t\leqslant l.$ В результате получим равенство

$$\mu_1'(t)+F[\mu_1'(t)]=\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau. \tag{2.8}$$

Предполагая, что

$$sF(s)\geqslant -M_1,\quad M_1:=\mathrm{const}\geqslant 0\quad \text{для любых}\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

и вводя обозначение

$$\Phi(s):=s+F(s),\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.10}$$

очевидно имеем

$$\lim_{s\to\pm\infty}\Phi(s)=\pm\infty. \tag{2.11}$$

При выполнении условия

$$F'(s)\neq -1,\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.12}$$

в силу (2.11) существует обратная к Φ функция $\Phi^{-1}\in C^1(\mathbb{R}).$ Поэтому из равенства (2.8) будем иметь

$$\mu_1'(t)=\Phi^{-1}\left\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\right\},\quad 0\leqslant t\leqslant l,$$

интегрирование которого с учётом начального условия $\mu_1(0)=\varphi(0)$ даёт функцию

$$\mu_1(t)=\int\limits_0^t \Phi^{-1}\biggl\{\varphi'(\tau)+\psi(\tau)-\alpha(\tau)+\int\limits_0^\tau f_1(\tau-\tau_1,\tau_1,u(\tau-\tau_1,\tau_1))\,d\tau_1\biggr\}\,d\tau+\varphi(0),\quad 0\leqslant t\leqslant l. \tag{2.13}$$

Положив теперь

$$\mu_2:=u|_{x=l}, \tag{2.14}$$

с помощью аналогичных рассуждений, приведённых выше при получении равенства (2.5), будем иметь

$$u(x,t)=\mu_2(x+t-l)+\frac12[\varphi(x-t)-\varphi(2l-x-t)]+$$

$$+\frac12\int\limits_{x-t}^{2l-x-t}\psi(\tau)\,d\tau+\frac12\int\limits_{\Omega^3_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_3, \tag{2.15}$$

и

$$u(x,t)=\mu_1(t-x)+\mu_2(x+t-l)-\frac12[\varphi(t-x)+\varphi(2l-t-x)]+$$

$$+\frac12\int\limits_{t-x}^{2l-t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac12\int\limits_{\Omega^4_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_4, \tag{2.16}$$

где $\Omega^3_{x,t}$ – четырёхугольник с вершинами $P^3(x,t)$, $P^3_1(l,x+t-l)$, $P^3_2(x-t,0)$ и $P^3_3(2l-x-t,0)$, а $\Omega^4_{x,t}$ – пятиугольник с вершинами $P^4(x,t)$, $P^4_1(0,t-x)$, $P^4_2(t-x,0)$, $P^4_3(2l-x-t,0)$ и $P^4_4(l,x+t-l)$.

Принимая во внимание, что при $(x,t)\in\Delta_3$

$$\int\limits_{\Omega^3_{x,t}} f_1\,d\xi\,d\tau=\int\limits_0^{x+t-l}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{2l-x-t+\tau}f_1\,d\xi+\int\limits_{x+t-l}^{t}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi,$$

продифференцировав равенство (2.15) по переменной x, при $(x,t)\in\Delta_3$ получаем

$$u_x(x,t)=\mu_2'(x+t-l)+\frac12[\varphi'(x-t)+\varphi'(2l-x-t)]-\frac12[\psi(2l-x-t)+\psi(x-t)]-$$

$$-\frac12\int\limits_0^{x+t-l}[f_1(2l-x-t+\tau,\tau,u(2l-x-t+\tau,\tau))+f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau+$$

$$+\frac12\int\limits_{x+t-l}^{t}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))-f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau.$$

Подставляя полученное выражение при $x=l$ во второе краевое условие (1.4), для неизвестной функции μ_2 получаем выражение

$$\mu_2'(t)+\varphi'(l-t)-\psi(l-t)-\int\limits_0^t f_1(l-t+\tau,\tau,u(l-t+\tau,\tau))\,d\tau=\beta(t),\quad 0\leqslant t\leqslant l. \tag{2.17}$$

При этом в силу (1.2) и (2.14) имеет место равенство

$$\mu_2(0) = \varphi(l). \tag{2.18}$$

Из (2.17), (2.18) следует

$$\mu_2(t) = \varphi(l-t) + \int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau + \int\limits_{l-t}^l \psi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} f_1(l-\tau_1+\tau,\tau,u(l-\tau_1+\tau,\tau))\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant l. \tag{2.19}$$

Замечание 2.1. Из приведённых выше рассуждений следует, что при выполнении условий (2.9) и (2.12) классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_l)$ задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет следующему нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры:

$$u(x,t) = (Au)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_l, \tag{2.20}$$

где оператор A действует по формулам (2.1) при $(x,t) \in \Delta_1$; (2.5) при $(x,t) \in \Delta_2$; (2.15) при $(x,t) \in \Delta_3$; (2.16) при $(x,t) \in \Delta_4$, причём в этих формулах предполагается, что функции μ_1 и μ_2 задаются равенствами (2.13) и (2.19) соответственно. При этом любое решение нелинейного интегрального уравнения (2.20) класса $C(\overline{D}_l)$ будет принадлежать пространству $C^2(\overline{D}_l)$ и удовлетворять задаче (1.1)–(1.4), если для данных этой задачи выполнены условия гладкости (1.5) и согласования второго порядка (1.6).

Замечание 2.2. Из структуры оператора A и замечания 2.1 следует, что этот оператор действует непрерывным образом из пространства $C(\overline{D}_l)$ в пространство $C^1(\overline{D}_l)$. Теперь, приняв во внимание, что вложение пространства $C^1(\overline{D}_l)$ в пространство $C(\overline{D}_l)$ является компактным [7, с. 135], получим, что оператор

$$A : C(\overline{D}_l) \to C(\overline{D}_l)$$

является компактным.

3. Локальная разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 3.1. *Пусть $T \leqslant l$ и выполнены условия (1.5), (1.6), (2.9) и (2.12). Тогда найдётся такое положительное число $T_0 := T_0(f,g,F,\varphi,\psi,\alpha,\beta) \leqslant l$, что при $T \leqslant T_0$ задача (1.1)–(1.4) в области D_T будет иметь хотя бы одно классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$.*

Доказательство. Поскольку доказательство носит стандартный характер, то приведём его в общих чертах. В силу (2.1), (2.5), (2.13), (2.15), (2.16), (2.19) и теоремы Фубини о повторном интегрировании легко видеть, что равенство (2.20) можно записать в виде

$$u(x,t) = (Au)(x,t) = \int\limits_0^t (A_0u)(x,t;\tau)\,d\tau + u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{3.1}$$

где A_0 – ограниченный оператор, действующий в пространстве $C(\overline{D}_T)$, а u_0 – вполне определённая функция из $C(\overline{D}_T)$.

Для фиксированного $r > 0$ положим

$$B_r(u_0) := \{v \in C(\overline{D}_T) : \|v - u_0\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant r\}$$

и

$$M(r) := \sup_{v \in B_r(u_0)} \|A_0 v\|_{C(\overline{D}_T)}, \tag{3.2}$$

причём, исходя из структуры оператора A_0, очевидно, что $M(r) < +\infty$. Тогда для функции $v \in B_r(u_0)$ в силу (3.1) и (3.2) будем иметь

$$|(Av)(x,t) - u_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t |(A_0 v)(x,t;\tau)|\,d\tau \leqslant tM(r), \quad (x,t) \in D_T.$$

Отсюда следует, что при $T \leqslant T_0 := r/M(r)$ непрерывный и компактный оператор A переводит замкнутый выпуклый шар $B_r(u_0)$ в себя. Поэтому согласно теореме Шаудера существует хотя бы одно решение уравнения (2.20) в $B_r(u_0) \subset C(\overline{D}_T)$ и тем самым в силу замечания 2.1 задачи (1.1)–(1.4) – в области D_T. Теорема доказана.

4. Априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.4). Рассмотрим условие

$$(Gg)(s) := \int\limits_0^s g(s_1)\,ds_1 \geqslant -M_2 s^2 - M_3 \quad \text{при всех} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

где $M_i := \mathrm{const} \geqslant 0$, $i = 2,3$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (2.9), (4.1). Тогда для решения $u \in C^2(\overline{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.4) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])} + c_3\|\psi\|_{C([0,l])} + c_4\|\alpha\|_{C^1([0,T])} +$$
$$+ c_5\|\beta\|_{C^1([0,T])} + c_6\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C([0,l])},\|\varphi\|_{C([0,l])}])} + c_7 \tag{4.2}$$

с положительными постоянными $c_i = c_i(M_1, M_2, M_3, l, T)$, $i = \overline{1,7}$, не зависящими от функций u, f, φ, ψ, α и β.

Доказательство. Пусть $u \in C^2(\overline{D}_T)$ является решением задачи (1.1)–(1.4). Умножив обе части равенства (1.1) на $2u_t$ и проинтегрировав по области D_τ, $0 < \tau \leqslant T$, получим

$$\int\limits_{D_\tau} (u_t^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt + 2\int\limits_{D_\tau} [G(g)(u)]_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau} fu_t\,dx\,dt. \tag{4.3}$$

Положим $\omega_\tau : t = \tau$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$; $\Gamma := \Gamma_1 \bigcup \omega_0 \bigcup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 : x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $\Gamma_2 : x = l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ. Легко видеть, что справедливы условия

$$\nu_x|_{\omega_\tau} = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad \nu_x|_{\Gamma_1} = -1, \quad \nu_x|_{\Gamma_2} = 1,$$
$$\nu_t|_{\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2} = 0, \quad \nu_t|_{\omega_0} = -1, \quad \nu_t|_{\omega_\tau} = 1, \quad 0 < \tau \leqslant T. \tag{4.4}$$

Применив интегрирование по частям, с учётом (1.2), (1.4) и (4.4) будем иметь

$$\int\limits_{D_\tau} (u_t^2)_t\,dx\,dt + 2\int\limits_{D_\tau} [(Gg)(u)]_t\,dx\,dt = \int\limits_{\partial D_\tau} u_t^2 \nu_t\,ds + 2\int\limits_{\partial D_\tau} (Gg)(u)\nu_t\,ds =$$

$$= \int\limits_{\omega_\tau} u_t^2\,dx - \int\limits_{\omega_0} \psi^2\,dx + 2\int\limits_{\omega_\tau} (Gg)(u)\,dx - 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx,$$

$$-2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau} [u_x u_{tx} - (u_x u_t)_x]\,dx\,dt = \int\limits_{D_\tau} (u_x^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{\partial D_\tau} u_x u_t \nu_x\,ds =$$

$$= \int\limits_{\partial D_\tau} u_x^2 \nu_t\,ds + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u_x u_t\,dt =$$

$$= \int\limits_{\omega_\tau} u_x^2\,dx - \int\limits_{\omega_0} \varphi'^2\,dx + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt, \tag{4.5}$$

где $\Gamma_{i,\tau} := \Gamma_i \bigcap \{t \leqslant \tau\},\ \ i = 1, 2.$

Равенство (4.3) в силу (4.5) запишем в виде

$$2\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt - \int\limits_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\omega_\tau} (u_x^2 + u_t^2)\,dx + 2\int\limits_{\omega_\tau} (Gg)(u)\,dx - 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx. \tag{4.6}$$

С учётом (1.3) и (2.9) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt = \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} F(u_t)u_t\,dt + \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt \geqslant -M_1\tau + \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt. \tag{4.7}$$

Из (4.6) согласно (4.1) и (4.7) получаем

$$w(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau} (u_x^2 + u_t^2)\,dx \leqslant 2\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt + 2M_1\tau - 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt + 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx + 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx + 2M_2\int\limits_{\omega_\tau} u^2\,dx + 2M_3 l. \tag{4.8}$$

Далее, поскольку в силу (1.2)

$$u(x,\tau) = \varphi(x) + \int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt,$$

то справедлива цепочка неравенств

$$|u(x,\tau)|^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\left(\int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt\right)^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\tau\int\limits_0^\tau u_t^2(x,t)\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\omega_\tau} u^2\,dx \leqslant 2\|\varphi\|^2_{L_2(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau w(t)\,dt, \tag{4.9}$$

где функция w определена в левой части (4.8).

При $(x,t) \in \overline{D}_T,$ проинтегрировав очевидное неравенство

$$|u(x,t)|^2 = |u(\xi,t) + \int\limits_\xi^x u_x(x_1,t)\,dx_1|^2 \leqslant 2|u(\xi,t)|^2 + 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx$$

по переменной $\xi \in [0,l],$ будем иметь

$$|u(x,t)|^2 \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^l |u(\xi,t)|^2\,d\xi + 2lw(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{\omega_t} u^2\,dx + 2lw(t). \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что

$$|u(x,t)|^2 \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t), \quad (x,t)\in \overline{D}_T. \tag{4.11}$$

Положив

$$\widetilde{w}(t) := \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} w(\tau), \tag{4.12}$$

с учётом очевидного неравенства $w\leqslant\widetilde{w}$ из (4.11) получим

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau \widetilde{w}(\sigma)\,d\sigma + 2l\widetilde{w}(\tau), \quad 0\leqslant\tau\leqslant T. \tag{4.13}$$

Далее для любого $\varepsilon>0$ справедлива цепочка неравенств

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt\Bigg| = \Bigg|\alpha(\tau)u(0,\tau) - \alpha(0)u(0,0) - \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha' u\,dt\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha(\tau)u(0,\tau)| + |\alpha(0)\varphi(0)| + \Bigg|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha' u\,dt\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\alpha(0)\varphi(0)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u^2\,dt. \tag{4.14}$$

И аналогично (4.14) имеем

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt\Bigg| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\beta(0)\varphi(l)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt + \frac12\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u^2\,dt. \tag{4.15}$$

В силу (4.11) получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u^2\,dt = \int\limits_0^\tau u^2(0,t)\,dt \leqslant \int\limits_0^\tau \Bigg[4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t)\Bigg]dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau-t)w(t)\,dt + 2l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.16}$$

И аналогично (4.16) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u^2\,dt \leqslant 4\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau-t)w(t)\,dt + 2l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.17}$$

Из (4.14) и (4.16) следует, что

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt\Bigg| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\alpha(0)\varphi(0)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt +$$

$$+ 2\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{2T}{l}\int_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + l\int_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.18}$$

По аналогии с (4.18) из (4.15) и (4.17) имеем

$$\left|\int_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt\right| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\beta(0)\varphi(l)| + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt +$$

$$+ 2\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{2T}{l}\int_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + l\int_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.19}$$

В силу (4.9), (4.18) и (4.19) с учётом очевидных неравенств

$$2\left|\int_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt\right| \leqslant \int_{D_\tau} f^2\,dx\,dt + \int_{D_\tau} u_t^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int_0^\tau \left[\int_{\omega_t} u_t^2\,dx\right]dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int_0^\tau w(t)\,dt,$$

$$\int_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx \leqslant l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}),$$

$$2\int_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx \leqslant 2l\|(G|g|)(|\varphi|)\|_{C(\omega_0)} = 2l\left\|\int_0^{|\varphi|} |g(s_1)|\,ds_1\right\|_{C(\omega_0)} \leqslant$$

$$\leqslant 2l\|\varphi\|_{C(\omega_0)}\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])} \leqslant l(\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])})$$

из (4.8) получим

$$w(\tau) \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int_0^\tau w(t)\,dt + 2M_1T + \frac{1}{2\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + 4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + 2|\alpha(0)\varphi(0)| +$$

$$+ \int_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt + 8T\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{8T}{l}\int_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + 4l\int_0^\tau w(t)\,dt + \frac{1}{2\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} +$$

$$+ 2|\beta(0)\varphi(l)| + \int_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt + l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)} + \|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])}) +$$

$$+ 2M_2\left\{2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int_0^\tau w(t)\,dt\right\} + 2M_3l \leqslant \alpha_1\int_0^\tau w(t)\,dt + 4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + \alpha_2, \tag{4.20}$$

где

$$\alpha_1 := 1 + 4\left(M_2T + \frac{2T^2}{l} + l\right),$$

$$\alpha_2 := lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + 2M_1T + \frac{1}{2\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,T])} + 2|\alpha(0)\varphi(0)| + \|\alpha'\|^2_{L_2([0,T])} +$$

$$+\,8T\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,T])}+2|\beta(0)\varphi(l)|+\|\beta'\|^2_{L_2([0,T])}+$$
$$+\,l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)}+\|\psi\|^2_{C(\omega_0)}+\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+\|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])})+4M_2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+2M_3l. \quad (4.21)$$

Так как величина $\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)}$ относительно переменной τ является неубывающей функцией, применив лемму Гронуолла к неравенству (4.20), получим

$$w(\tau)\leqslant\exp(\alpha_1T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)}+\alpha_2)\leqslant\exp(\alpha_1T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_t)}+\alpha_2),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T. \quad (4.22)$$

В обозначении (4.12) из (4.22) следует

$$\widetilde{w}(t)\leqslant\exp(\alpha_1T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_t)}+\alpha_2),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \quad (4.23)$$

С учётом (4.23) из (4.13), приняв во внимание, что функция $\widetilde{w}$ из (4.12) неубывающая, имеем

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}\tau)}\leqslant4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+2\bigg(\frac{2T\tau}{l}+l\bigg)\widetilde{w}(\tau)\leqslant$$
$$\leqslant4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+2\bigg(\frac{2T^2}{l}+l\bigg)\exp(\alpha_1T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)}+\alpha_2),\quad 0\leqslant\tau\leqslant T. \quad (4.24)$$

Положив

$$\varepsilon=\varepsilon_0:=4\bigg(\frac{2T^2}{l}+l\bigg)\exp(\alpha_1T), \quad (4.25)$$

из (4.24) будем иметь

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}\tau)}\leqslant8\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)}+\varepsilon_0\alpha_2,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T, \quad (4.26)$$

где в выражении (4.21) для α_2 в качестве ε взята величина из (4.25).

Прежде чем из (4.26) при $\tau=T$ получить априорную оценку (4.2) с учётом того, что

$$2(|\alpha(0)\varphi(0)|+|\beta(0)\varphi(l)|)\leqslant\|\alpha\|^2_{C([0,T])}+\|\beta\|^2_{C([0,T])}+2\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)},$$

для величины α_2 из (4.21) будем иметь

$$\alpha_2\leqslant\widetilde{c}_1\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)}+\widetilde{c}_2\|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)}+\widetilde{c}_3\|\psi\|^2_{C(\omega_0)}+\widetilde{c}_4\|\alpha\|^2_{C^1([0,T])}+\widetilde{c}_5\|\beta\|^2_{C^1([0,T])}+$$
$$+\,\widetilde{c}_6\|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])}+\widetilde{c}_7. \quad (4.27)$$

Здесь

$$\widetilde{c}_1:=lT,\quad \widetilde{c}_2:=2(4T+1+(2M_2+1)l),\quad \widetilde{c}_3=\widetilde{c}_6:=l,$$
$$\widetilde{c}_4=\widetilde{c}_5:=2\varepsilon_0+T+1,\quad \widetilde{c}_7:=2(M_1T+M_3l).$$

Теперь, положив

$$c_1:=\sqrt{lT\varepsilon_0},\quad c_2:=\sqrt{8+2\varepsilon_0(4T+1+(2M_2+1)l)},\quad c_3=c_6:=\sqrt{l\varepsilon_0},$$
$$c_4=c_5:=\sqrt{(2\varepsilon_0+T+1)\varepsilon_0},\quad c_7=\sqrt{2(M_1T+M_3l)\varepsilon_0}, \quad (4.28)$$

приняв во внимание (4.26), (4.27) и очевидное неравенство $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|$, получим оценку (4.2). Лемма доказана.

Замечание 4.1. Приведём некоторые классы функций, которые часто встречаются в приложениях и для которых выполнены условия из (2.9) и (4.1):

1) $F(s)=F_0(s)\operatorname{sign}s+as+b$, где $F_0\in C(\mathbb{R})$, $F_0\geqslant0$; $a,b,s\in\mathbb{R}$, $a>0$;

2) $g(s)=g_0(s)\operatorname{sign}s+as+b$, где $g_0\in C(\mathbb{R})$, $g_0\geqslant0$; $a,b,s\in\mathbb{R}$;

3) $g \in C(\mathbb{R})$, $g|_{(-\infty,0)} \in L_1(-\infty,0)$; $g|_{(0,+\infty)} \geqslant 0$ (например, $g(s)=\exp(s)$, $s\in\mathbb{R}$).

5. Глобальная разрешимость задачи (1.1)–(1.4). При $\lambda \in [0,1]$ пусть $u=u_\lambda$ является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры

$$u = \lambda A u, \tag{5.1}$$

где оператор A присутствует в правой части уравнения (2.20), которая при $(x,t)\in\Delta_2$ в силу (2.5), (2.13) действует по формуле

$$(Au)(x,t) = \int\limits_0^{t-x} \Phi^{-1}\Big\{\varphi'(\tau)+\psi(\tau)-\alpha(\tau)+\int\limits_0^{\tau} f_1(\tau-\tau_1,\tau_1,u(\tau-\tau_1,\tau_1))\,d\tau_1\Big\}\,d\tau +$$

$$+\varphi(0)+\frac{1}{2}[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)]+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau. \tag{5.2}$$

В силу (5.1) и (5.2), аналогично тому как из (2.6) было получено равенство (2.7), будем иметь

$$u_x(0,t) = -\lambda\Phi^{-1}\Big\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^{t} f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\Big\} +$$

$$+\lambda\Big\{\varphi'(t)+\psi(t)+\int\limits_0^{t} f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\Big\} \tag{5.3}$$

и

$$u_t(0,t) = \lambda\Phi^{-1}\Big\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^{t} f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\Big\}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) при $\lambda\neq 0$ получим

$$\Phi\Big[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\Big] = \varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^{t} f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau,$$

откуда с учётом (2.10) будем иметь

$$\varphi'(t)+\psi(t)+\int\limits_0^{t} f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau = \Phi\Big[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\Big]+\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}u_t(0,t)+F\Big[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\Big]+\alpha(t). \tag{5.5}$$

Из (5.3)–(5.5) следует, что

$$u_x(0,t) = -u_t(0,t)+\lambda\Big\{\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)+F\Big[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\Big]+\alpha(t)\Big\} = \lambda F\Big[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\Big]+\lambda\alpha(t). \tag{5.6}$$

Легко показать, что функция $u=u_\lambda$, $\lambda\in(0,1]$, в области D_T, $T\leqslant l$, в силу (5.6) и замечания 2.1 является классическим решением следующей смешанной задачи:

$$u_{tt}-u_{xx} = \lambda[-g(u)+f(x,t)], \quad (x,t)\in D_T,$$

$$
\begin{gathered}
u(x,0)=\lambda\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\lambda\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\
u_x(0,t)=\lambda F\left[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\right]+\lambda\alpha(t), \quad u_x(l,t)=\lambda\beta(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

когда данные этой задачи удовлетворяют аналогичным условиям гладкости (1.5) исходной задачи (1.1)–(1.4), а условия согласования имеют вид

$$
\begin{gathered}
\varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),\\
\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g[\lambda\varphi(0)]+f(0,0)\}+\alpha'(0),\\
\varphi'(l)=\beta(0), \quad \psi'(l)=\beta'(0).
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

При этом справедливо и обратное утверждение: классическое решение задачи (5.7) является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения (5.1).

Легко видеть, что условия (5.8) будут выполнены для любого $\lambda\in(0,1]$, если, например,

$$
\begin{gathered}
\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),\\
\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g(0)+f(0,0)\}+\alpha'(0),\\
\varphi'(l)=\beta(0), \quad \psi'(l)=\beta'(0).
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

Замечание 5.1. Легко можно проверить, что аналогичные (2.9), (2.12) и (4.1) условия, которые были достаточны при получении априорной оценки (4.2) для классического решения задачи (1.1)–(1.4), также будут выполнены и для функций $\lambda g(s)$ и $\lambda F(s/\lambda)$, $s\in\mathbb{R}$. Действительно, в силу (2.9), (2.12), (4.1) и $\lambda\in(0,1]$ имеем

$$
\begin{gathered}
s\lambda F(s/\lambda)=\lambda^2\frac{s}{\lambda}F(s/\lambda)\geqslant-\lambda^2M_1\geqslant-M_1;\\
\{\lambda F(s/\lambda)\}'_s=F'(s/\lambda)\neq-1, \quad s\in\mathbb{R};\\
\int\limits_0^s\lambda g(s_1)\,ds_1=\lambda\int\limits_0^s g(s_1)\,ds_1\geqslant-M_2\lambda s^2-M_3\lambda\geqslant-M_2s^2-M_3.
\end{gathered}
$$

Таким образом, при выполнении условий (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9), согласно сказанному выше, при $\lambda\in(0,1]$ непрерывное решение нелинейного интегрального уравнения (5.1) является классическим решением задачи (5.7) и в силу леммы 4.1 удовлетворяет следующей априорной оценке:

$$
\begin{gathered}
\|u_\lambda\|_{C(\overline{D}_T)}\leqslant c_1\lambda\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+c_2\lambda\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\lambda\|\psi\|_{C([0,l])}+c_4\lambda\|\alpha\|_{C^1([0,T])}+\\
+c_5\lambda\|\beta\|_{C^1([0,T])}+c_6\lambda\|g\|_{C([-\lambda\|\varphi\|_{C([0,l])},\lambda\|\varphi\|_{C([0,l])}])}+c_7\leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+\\
+c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\|\psi\|_{C([0,l])}+c_4\|\alpha\|_{C^1([0,T])}+c_5\|\beta\|_{C^1([0,T])}+\\
+c_6\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C([0,l])},\|\varphi\|_{C([0,l])}])}+c_7,
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

где c_i, $i=\overline{1,7}$, – те же постоянные, что и в лемме 4.1, которые были определены в (4.28).

Замечание 5.2. Согласно приведённым выше рассуждениям для непрерывного решения интегрального уравнения (5.1) справедлива априорная оценка (5.10) при $\lambda\in(0,1]$, которая справедлива и при $\lambda=0$, поскольку в этом случае $u_\lambda=u_0=0$.

Таким образом, для решения $u=u_\lambda$ уравнения (5.1) с непрерывным компактным оператором A при любом $\lambda\in[0,1]$ имеет место априорная оценка (5.10), в которой постоянные c_i, $i=\overline{1,7}$, не зависят от λ. Поэтому согласно теореме Лере–Шаудера [8, с. 375] уравнение (5.1) при $\lambda=1$ имеет хотя бы одно решение $u\in C(\overline{D}_T)$, которое в силу приведённых выше рассуждений является также и классическим решением задачи (1.1)–(1.4) при выполнении условий (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9).

Тем самым доказана

Теорема 5.1. *Пусть $T \leqslant l$, имеют место условия (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9). Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет хотя бы одно классическое решение класса $C^2(\overline{D}_T)$.*

6. Единственность решения задачи (1.1)–(1.4) класса $C^2(\overline{D}_T)$.

Теорема 6.1. *Задача (1.1)–(1.4) не может иметь более одного решения класса $C^2(\overline{D}_T)$, если наряду с (1.5) дополнительно потребовать, чтобы выполнялось*

$$F'(s) \geqslant 0 \quad \text{для любых} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Действительно, допустим, что задача (1.1)–(1.4) имеет два возможных различных решения u_1 и u_2 класса $C^2(\overline{D}_T)$. Тогда для их разности $v := u_2 - u_1$ будут справедливы следующие тождества:

$$v_{tt} - v_{xx} + \widetilde{g}(x,t)v = 0, \quad (x,t) \in D_T, \tag{6.2}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6.3}$$

$$v_x(0,t) = \widetilde{F}(t)v_t(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6.4}$$

$$v_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6.5}$$

Здесь

$$\widetilde{g}(x,t) := \int\limits_0^1 g'[u_1(x,t) + \tau(u_2(x,t) - u_1(x,t))]\, d\tau, \tag{6.6}$$

$$\widetilde{F}(t) := \int\limits_0^1 F'[u_{1t}(0,t) + \tau(u_{2t}(0,t) - u_{1t}(0,t))]\, d\tau. \tag{6.7}$$

Умножив обе части равенства (6.2) на $2v_t$ и проинтегрировав по области D_τ, $0 < \tau \leqslant T$, с учётом (6.3), (6.5) аналогично тому, как из (4.3) было получено (4.6), будем иметь

$$0 = 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} v_x v_t\, dt + \int\limits_{\omega_\tau} (v_x^2 + v_t^2)\, dx + 2\int\limits_{D_\tau} \widetilde{g}(x,t) v v_t\, dx\, dt. \tag{6.8}$$

В силу (6.1), (6.4) и (6.7) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} v_x v_t\, dt = \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \widetilde{F}(t) v_t^2\, dt \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Согласно (6.9) из (6.8) получим

$$\widetilde{w}(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau} (v_x^2 + v_t^2)\, dx \leqslant -2\int\limits_{D_\tau} \widetilde{g}(x,t) v v_t\, dx\, dt. \tag{6.10}$$

С учётом (1.5) для непрерывной в $\overline{D}_T$ функции $\widetilde{g}$ из (6.6) существует такое $M = \mathrm{const} \geqslant 0$, что

$$|\widetilde{g}(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех точек} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{6.11}$$

Далее, поскольку в силу (6.3) следует

$$v(x,t) = \int\limits_0^t v_t(x,t')\, dt', \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

то

$$v^2(x,t) = \Bigl(\int\limits_0^t v_t(x,t')\,dt'\Bigr)^2 \leqslant t\int\limits_0^t v_t^2(x,t')\,dt' \leqslant \tau\int\limits_0^\tau v_t^2(x,t')\,dt'$$

и, тем самым, справедливы неравенства

$$\int\limits_{D_\tau} v^2\,dx\,dt \leqslant \tau^2 \int\limits_{D_\tau} v_t^2\,dx\,dt \leqslant T^2 \int\limits_0^\tau \widetilde{w}(t)\,dt, \tag{6.12}$$

где $\widetilde{w}$ определена в левой части (6.10).

Теперь в силу (6.11), (6.12) и очевидного неравенства $2vv_t \leqslant v^2 + v_t^2$ из (6.10) получим

$$\widetilde{w}(\tau) \leqslant M(1+T^2)\int\limits_0^\tau \widetilde{w}(t)\,dt.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла следует, что $\widetilde{w}(\tau) = 0$, $0 < \tau \leqslant T$, и с учётом (6.3) имеем $v = u_2 - u_1 = 0$. Теорема 6.1 доказана.

Из теорем 5.1 и 6.1 вытекает теорема существования и единственности классического решения задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 6.2. *Пусть $T \leqslant l$ и выполнены условия (1.5), (2.9), (2.12), (4.1), (5.9) и (6.1). Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$.*

7. Случаи нарушения разрешимости задачи (1.1)–(1.4).

7.1. Ниже, использовав метод пробных функций [9, с. 10–12], покажем, что нарушение условия (4.1), вообще говоря, может стать причиной отсутствия глобальной разрешимости задачи (1.1)–(1.4).

Действительно, пусть

$$g(s) \geqslant \lambda |s|^p, \quad \lambda > 0, \quad p > 1, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Легко видеть, что при выполнении неравенства (7.1) условие (4.1) будет нарушено.

Умножив обе части уравнения (1.1) на пробную функцию $\chi \in C^2(\overline{D}_T)$ такую, что

$$\chi|_{D_T} > 0, \quad \chi|_{\partial D_T} = \chi_t|_{\partial D_T} = \chi_x|_{\partial D_T} = 0, \tag{7.2}$$

после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{D_T} u\Box\chi\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} g(u)\chi\,dx\,dt = \int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt, \tag{7.3}$$

где $u \in C^2(\overline{D}_T)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.4).

В силу (7.1)–(7.3) имеем

$$\lambda\int\limits_{D_T} |u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{D_T} |u\Box\chi|\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt. \tag{7.4}$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon > 0$

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}b^{p'}, \quad a,b \geqslant 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1,$$

возьмём $a = |u|\chi^{1/p}$, $b = \dfrac{|\Box\chi|}{\chi^{1/p}}$, то с учётом того, что $\dfrac{p'}{p} = p' - 1$, получим

$$|u\Box\chi| = |u|\chi^{1/p}\frac{|\Box\chi|}{\chi^{1/p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{p}|u|^p\chi + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}. \tag{7.5}$$

В силу (7.4) и (7.5) будем иметь

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{p}\right)\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt,$$

откуда при $\varepsilon < \lambda p$ получим

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{p}{(\lambda p - \varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \frac{p}{\lambda p - \varepsilon}\int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt. \tag{7.6}$$

С учётом того, что $p' = p/(p-1)$, $p = p'/(p'-1)$ и

$$\min_{0<\varepsilon<\lambda p}\frac{p}{(\lambda p - \varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}} = \frac{1}{\lambda^{p'}},$$

которое достигается при $\varepsilon = \lambda$, из (7.6) следует, что

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{\lambda^{p'}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \frac{p'}{\lambda}\int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt. \tag{7.7}$$

Ниже будем считать, что наряду с (7.2) выполнено условие

$$\kappa_0 := \int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt < +\infty. \tag{7.8}$$

Простая проверка показывает, что в качестве функции χ, удовлетворяющей условиям (7.2) и (7.8), можно взять, например, функцию

$$\chi(x,t) = [xt(l-x)(T-t)]^n, \quad (x,t) \in D_T,$$

при достаточно большом натуральном n.

Положив

$$f = -\mu f_0, \quad f_0 \geqslant 0, \quad f_0 \not\equiv 0, \quad \mu = \text{const} > 0, \tag{7.9}$$

с учётом (7.8) неравенство (7.7) запишем в виде

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{\kappa_0}{\lambda^{p'}} - \frac{\mu p'}{\lambda}\int\limits_{D_T} f_0\chi\,dx\,dt. \tag{7.10}$$

В силу требований, наложенных на функции χ и f_0, будем иметь

$$0 \leqslant \int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt, \qquad \int\limits_{D_T} f_0\chi\,dx\,dt > 0. \tag{7.11}$$

Поэтому в предположении, что задача (1.1)–(1.4) имеет классическое решение $u(x,t)$ и

$$\mu > \mu_0 := \frac{\kappa_0}{\lambda^{p'-1}p'}\biggl(\int\limits_{D_T} f_0\chi\,dx\,dt\biggr)^{-1}, \tag{7.12}$$

придём к противоречию, поскольку в силу (7.11) левая часть (7.10) будет неотрицательной, а правая часть – отрицательной.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия (7.1), (7.9) и (7.12). Тогда задача (1.1)–(1.4) не имеет классического решения в области* D_T.

7.2. Наряду с теоремой 7.1 о несуществовании решения задачи (1.1)–(1.4) в фиксированной области D_T, как показывают примеры, возможен также случай, когда эта задача не является даже локально разрешимой, а также когда задача (1.1)–(1.4) имеет взрывное решение.

Действительно, в случае, когда $g = 0$, $f = 0$, $F(s) = \operatorname{arctg} s - s$, $s \in \mathbb{R}$, а $|\varphi'(t) + \psi(t) - \alpha(t)| > \pi/2$, $t \in [0,l]$, задача (1.1)–(1.4) не разрешима даже локально. При этом если $|\varphi'(t) + \psi(t) - \alpha(t)| < \pi/2$ в случае $0 \leqslant t < t_0 \leqslant l$ и $|\varphi'(t_0) + \psi(t_0) - \alpha(t_0)| = \pi/2$, то решение этой задачи существует в промежутке $[0,t_0)$, причём в силу формул (2.5), (2.7), (2.8) и (2.16) выполняется

$$\lim_{t\to t_0-0} \|u\|_{C^1(\overline{D}_t)} = \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
2. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 4. С. 121–148.
3. *Kharibegashvili S., Shavlakadze N., Jokhadze O.* On the solvability of a mixed problem with a nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation // J. of Contemporary Math. Anal. 2018. V. 53. № 5. P. 247–259.
4. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О разрешимости смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. заметки. Вып. 108. № 1. С. 137–152.
5. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
6. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
7. *Гильбарг Д., Трудингер Н.С.* Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1993.
9. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

Тбилисский государственный университет
имени И.А. Джавахишвили,
Математический институт имени А.М. Размадзе,
г. Тбилиси, Грузия

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 607–627

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.7

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. Д. П. Емельянов

Применение метода спектрального выделения особенностей для построения решения краевой задачи для нерегулярно вырождающегося эллиптического дифференциального оператора первого порядка с аналитическими коэффициентами в прямоугольнике приводит к необходимости решения последовательности краевых задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими коэффициентами на отрезке с большим параметром при неизвестной функции. Для фундаментальной системы решений этих уравнений и для функций Грина данной последовательности задач получены оценки их поведения при стремлении параметра к бесконечности. Решение краевой задачи для вырождающегося по одной переменной (y) эллиптического дифференциального оператора с аналитическими коэффициентами построено в виде ряда Пуассона – ряда по собственным функциям предельного оператора с аналитическими по y коэффициентами. Данная работа обобщает на случай вырождения первого порядка результаты, ранее полученные для аналогичных уравнений с вырождением второго порядка.

DOI: 10.31857/S037406412205003X, EDN: CBABOB

Введение. Будем рассматривать следующие две краевые задачи для нерегулярно вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ \ 0 < y < b\} \equiv \equiv (0, 1) \times (0, b)$: *задачу* D (согласно терминологии М.В. Келдыша [1])

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = u(x, 0) = 0 \qquad (1)$$

и *задачу* E

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = 0, \quad |u(x, 0)| < +\infty. \qquad (2)$$

Определение. Будем говорить, что некоторая функция $\varphi(y)$, определённая на отрезке $[0, b]$, *принадлежит классу* A, если функция $\varphi(y)$ может быть представлена рядом по целым степеням y, сходящимся в интервале $(-R, R)$ для некоторого $R > b$. Иначе говоря, аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ должно быть аналитической функцией в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Коэффициенты $a(y)$ и $c(y)$ дифференциального оператора считаем принадлежащими классу A. Кроме того, если $a(y) \geqslant 0$ при $y \in [0, b]$, то правая часть уравнения $f(x, y)$ при каждом фиксированном x принадлежит классу A по y и непрерывна по совокупности переменных в $\overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega} = \{x, y\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant b\} \equiv [0, 1] \times [0, b]$.

Однородные задачи указанного вида $(f \equiv 0)$ для области с гладкой границей были поставлены М.В. Келдышем в работах [1; 2, с. 299–301], а также доказаны существование и единственность классических решений. Явного вида решений не было приведено, однако были сформулированы условия корректной разрешимости краевых задач в терминах показателя вырождения m и знаков коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$ уравнений. Из полученных результатов М.В. Келдыша следует, в частности, что решение задачи (2) единственно при $c(0) \geqslant 1$, а решение задачи (1) единственно при $c(0) < 1$.

Эти задачи исследовались и другими авторами. Отметим работы А.И. Янушаускаса [3, гл. 3–5], М.М. Смирнова [4, с. 88–94] $(0 < m < 2)$, Е.И. Моисеева [5, с. 73–88] $(y^m$ – при производной u_{xx}, $m > 0$), В.М. Ивакина [6] $(m > 2)$, И.М. Петрушко [7, 8] $(m = 1)$ и др. Решения задач получены в виде либо интегралов (с помощью метода функций Грина), либо биортогональных рядов, исследовалось асимптотическое поведение решений при $y \to 0$.

В [9; 10; 11 гл. X] предложен новый метод исследования таких задач – метод спектрального выделения особенностей, позволяющий построить решение задачи в виде ряда Пуассона по собственным функциям предельного оператора $(y = 0)$ и указать, каким образом факт вырождения уравнения сказывается на решении и каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи (обобщение теоремы Коши–Ковалевской). В работах [9; 10; 11, гл. X; 12; 13] данным методом была полностью решена задача E, аналогичная (2), но с квадратичным регулярным вырождением.

Цель данной работы – перенести указанные результаты на случай поставленных задач (1) и (2) с линейным вырождением.

Применим метод функции Грина для вспомогательных задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных операторов первого порядка. От задач (1) и (2) переходим к расширенным (регуляризованным) задачам, решение которых ищем в виде ряда Пуассона

$$v(x,y,\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} [\tau_k \varphi_k(y) + \eta_k(y)]\psi_k(x), \tag{3}$$

где φ_k, η_k – аналитические функции, представимые на отрезке $[0, b]$ рядами по степеням y, $\psi_k = \sin(\pi k x)$ – собственные функции “предельного” оператора $L : lw(x) = -w''(x) + a(0)w(x)$, $x \in (0, 1)$, $w(0) = w(1) = 0$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k = -k^2\pi^2 - a(0)$. Расширенные задачи получаются из исходных задач после перехода в пространство бесконечной размерности (по аналогии с методом регуляризации сингулярных возмущений [11]), $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$ – новые независимые переменные, τ_k отвечает своему собственному значению λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ При $\tau_k = (y/b)^r$ или $\tau_k = \ln y$ (конкретный вид τ_k будет указан далее) решение расширенных задач переходит в решение задач (1) и (2). Новые переменные позволяют описать особенности решения, связанные с вырождением эллиптического оператора.

Для нахождения функций φ_k, η_k приходим к необходимости решить серию задач следующего вида в случае постановки задачи D (далее обозначаем неизвестную функцию как $y = y(x)$):

$$\begin{gathered} xy_k''(x) + c(x)y_k'(x) - (a(x) + \pi^2k^2)y_k(x) = f_k(x), \quad x \in (0, b), \\ y_k(0) = y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{4}$$

и в случае постановки задачи E:

$$\begin{gathered} xy_k''(x) + c(x)y_k'(x) - (a(x) + \pi^2k^2)y_k(x) = f_k(x), \quad x \in (0, b), \\ |y_k(0)| < +\infty, \quad y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $f_k(t)$ – коэффициенты спектрального разложения $f(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\psi_k(x)$.

В п. 1 данной работы исследуются задачи (5). Для некоторой серии решений уравнений из задач (5) с нулевой правой частью будет получена асимптотика решений при $k \to +\infty$. На основании этого результата в п. 2 будут получены оценки для функций из фундаментальной системы решений задач (4) и (5), а также их функций Грина. Подобные результаты для функции Грина в самосопряжённом случае для ОДУ без вырождения следуют, например, из результатов [14, гл. I]. Общие результаты для задачи Коши для систем ОДУ без вырождения изложены в книге [15, гл. VI].

В п. 3 методом спектрального выделения особенностей будут построены формальные решения задач (1) и (2) в виде рядов (3) (при соответствующих τ_k). Полученные в п. 2 оценки функций Грина позволят доказать сходимость этих рядов к классическим решениям задач (1) и (2).

Результат работы можно трактовать как обобщение теоремы Коши–Ковалевской на рассмотренные вырождающиеся эллиптические уравнения – предложенная форма решения указывает, каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи.

1. Асимптотическая формула решения задачи Коши для дифференциального уравнения с линейным вырождением. Рассмотрим следующую задачу для дифференциального уравнения с линейным вырождением:

$$
xy_k'' + c(x)y_k' - (a(x) + \pi^2 k^2)y_k = 0, \quad x \in (0, b),
$$
$$
y_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}
$$

В этом разделе мы полагаем, что коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ уравнения являются непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[0, b]$ функциями, при этом производная функции $\bar{c}(x) = (c(x) - c(0))/x$ непрерывна на $(0, b]$ и может иметь интегрируемую особенность в точке 0. Положим, что $a(x) \geqslant 0$, $c(0) \equiv c_0 \geqslant 1$.

Получим равномерную асимптотику последовательности решений $y_k(x)$ данной задачи (6) при $k \to +\infty$. При этом решение полагается априорно существующим и единственным при каждом $k > 0$.

Некоторые аналоги требуемых результатов в случае без вырождения следуют из [14, с. 17, лемма 2.2] или же могут быть получены с использованием теоремы Тихонова [16, § 7]. Наличие вырождения существенно затрудняет доказательство.

В соответствии с методом спектрального выделения особенностей [9; 10; 11, гл. X; 12; 13] рассмотрим вспомогательную задачу

$$
x\bar{y}_k'' + c(0)\bar{y}_k' - \pi^2 k^2 \bar{y}_k = 0, \quad x \in (0, b),
$$
$$
\bar{y}_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

Разложив $\bar{y}_k(x)$ в ряд по степеням x и приравняв коэффициенты при равных степенях x, легко показать [17, с. 51], что

$$
\bar{y}_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\pi k i \sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i \sqrt{x}), \quad k \in \mathbb{N},
$$

где J_α – функция Бесселя первого рода, i – мнимая единица, $\alpha = c_0 - 1$.

Перейдём в задаче (6) к малому параметру $\mu = 1/(\pi k)$ и будем искать её решение в следующем виде:

$$
y(x, \mu) = \bar{y}(x, \mu) \cdot z(x, \mu), \quad \mu > 0,
$$

где $z(x, \mu)$ – новая неизвестная функция, $\bar{y}(x, \mu) = \bar{y}_k(x)$ при $k = 1/\pi\mu$. Подставим данное соотношение в уравнение (6) и поделим полученное выражение на $\bar{y}(x, \mu)$. Введём вспомогательные обозначения

$$
\bar{c}(x) = (c(x) - c_0)/x, \quad R_\mu(x) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{x}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{x}/\mu), \quad \tilde{R}_\mu(x) = \bar{y}'(x, \mu)/\bar{y}(x, \mu).
$$

В силу формул дифференцирования функций Бесселя [17, с. 56] имеет место соотношение $\tilde{R}_\mu(x) = R_\mu(x)/(\mu\sqrt{x})$, и полученную для $z(x, \mu)$ задачу можно записать как

$$
\mu x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\sqrt{x} R_\mu(x) \frac{dz}{dx} + \mu c(x) \frac{dz}{dx} + \bar{c}(x)\sqrt{x} R_\mu(x) z - \mu a(x) z = 0, \quad x \in (0, b),
$$
$$
z(0, \mu) = 1, \quad \mu > 0. \tag{7}
$$

Принимая во внимание тот факт, что $R_\mu(x) \to 1$ при $\mu \to 0 + 0, x > 0$ (см. асимптотики $J_\alpha(ix)$ в [17, с. 222] при $x \to +\infty$), запишем предельную задачу (7) при $\mu = 0$:

$$
2\frac{d\bar{z}}{dx} + \bar{c}(x)\bar{z} = 0, \quad x \in (0, b),
$$
$$
\bar{z}(0) = 1. \tag{8}
$$

Далее докажем, что $z(x,\mu)\to\bar z(x)$ при $\mu\to 0+0$, $x\in(0,b]$. Введём функцию

$$\varphi(x,\mu)=\frac{\mu a(x)-\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)},\quad x\in(0,b],\quad \mu>0.$$

Функция $\varphi(x,\mu)$ определяет начальное значение $z'(x,\mu)$ при $x=0$: $z'(0,\mu)=\varphi(0,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ непрерывна при $(x,\mu)\in[0,b]\times[0,\mu_0]\setminus\{(0,0)\}$ и, вообще говоря, имеет разрыв в точке $(0,0)$. Исследуем её свойства при $(x,\mu)\to(0,0)$. Для начала отметим, что $R_\mu(x)\sim \mathrm{const}\times\sqrt{x}/\mu$ при $(x,\mu)\to(0,0)$, $R_\mu(x)\leqslant 1$, $x\in[0,b]$, $\mu>0$, а $a(x)$ и $\bar c(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми на $(0,b]$, непрерывными и интегрируемыми на $[0,b]$ функциями, $c(0)\geqslant 1$, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$ справедлива цепочка неравенств

$$|\varphi(x,\mu)|\leqslant\left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right|+\left|\frac{\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x)}\right|+\left|\frac{\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right|\leqslant\left|\frac{a(x)}{c(x)}\right|+\left|\frac{\bar c(x)}{2}\right|\leqslant\mathrm{const},$$

т.е. $\varphi(x,\mu)$ ограничена в некоторой окрестности точки $(0,0)$, а значит, и в $[0,b]\times[0,\mu_0]$. Далее, имеем

$$R'_\mu(x)=\frac{1}{\mu\sqrt{x}}\left(1-\mu\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{x}}R_\mu(x)-R^2_\mu(x)\right),\quad |R'_\mu(x)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\mu\sqrt{x}},$$

следовательно, функцию $\varphi'_x(x,\mu)$ можно оценить следующим образом:

$$|\varphi'_x(x,\mu)|\leqslant\left|\frac{\mu a'(x)-\bar c'(x)\sqrt{x}R_\mu(x)-\bar c(x)R_\mu(x)/2\sqrt{x}-\bar c(x)\sqrt{x}R'_\mu(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right|+$$

$$+\left|\frac{(\mu a(x)-\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x))(\mu c'(x)+R_\mu(x)/\sqrt{x}+2\sqrt{x}R'_\mu(x))}{(\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x))^2}\right|.$$

Оценивая данные дроби аналогично $\varphi(x,\mu)$ в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$, получаем неравенство

$$|\varphi'_x(x,\mu)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{x},\quad x\in[0,b],\quad \mu\geqslant 0.$$

Таким образом, функция $x\varphi'_x(x,\mu)$ является ограниченной в прямоугольнике $[0,b]\times[0,\mu_0]$.

Сведём уравнение второго порядка (7) к системе дифференциальных уравнений, положив $w(x,\mu)=z'_x(x,\mu)$:

$$\mu x\frac{dw}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)w+\mu c(x)w+\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z-\mu a(x)z=0,\quad x\in(0,b),$$

$$\frac{dz}{dx}=w,$$

$$z(0,\mu)=1,\quad \mu>0. \tag{9}$$

При этом $w(0,\mu)=\varphi(0,\mu)$. Сделаем в задаче (9) замену неизвестных функций таким образом, чтобы начальные условия стали нулевыми. Пусть

$$z=\hat z+1,\quad w=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat z+\hat w.$$

Тогда задача (9) будет преобразована к виду

$$\mu x\frac{d\hat w}{dx}+\mu x\varphi'_x(x,\mu)+\mu x\varphi'_x(x,0)\hat z+\mu x\varphi(x,0)\frac{d\hat z}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat w+\mu c(x)\hat w+$$

$$+\,\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)\hat z-\mu a(x)\hat z+\hat z\varphi(x,0)(2\sqrt{x}R_\mu(x)+\mu c(x))=0,$$
$$\frac{d\hat z}{dx}=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat z+\hat w,$$
$$\hat z(0,\mu)=\hat w(0,\mu)=0,\quad x\in(0,b),\quad \mu>0.$$

Подставим $d\hat z/dx$ из второго уравнения в первое. Введём для удобства следующие обозначения:

$$A(x)=-x\frac{\bar c(x)}{2}+c(x),\quad B(x)=-x\frac{\bar c'(x)}{2}+x\frac{\bar c^2(x)}{4}-a(x)-\frac{\bar c(x)c(x)}{2},$$
$$D(x)=-\frac{\bar c(x)}{2},\quad \Phi(x,\mu)=-x\varphi_x'(x,\mu)+x\frac{\bar c(x)}{2}\varphi(x,\mu).$$

После подстановки получим окончательный вид задачи (9) в новых неизвестных:

$$\mu x\frac{d\hat w}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat w+\mu A(x)\hat w+\mu B(x)\hat z=\mu\Phi(x,\mu),$$
$$\frac{d\hat z}{dx}=D(x)\hat z+\hat w+\varphi(x,\mu),$$
$$\hat z(0,\mu)=\hat w(0,\mu)=0,\quad x\in(0,b),\quad \mu>0. \tag{10}$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ и $D(x)$ являются непрерывными на $[0,b]$, при этом функция $A(x)$ непрерывно дифференцируема и $A(0)=c(0)$, функции $\Phi(x,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ ограничены в $[0,b]\times[0,\mu_0]$ и интегрируемы по x при любом $\mu\geqslant 0$.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть семейство функций $v_\mu(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A+\varkappa\int\limits_0^x \ln\frac{x}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,b], \tag{11}$$

равномерно по $\mu\in\{\mu\}$; постоянные $A,\varkappa>0$. Тогда существует постоянная $C>0$, не зависящая от μ и x, такая, что справедливы неравенства

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant C,\quad \forall x\in[0,b],\quad \forall\mu\in\{\mu\}.$$

Доказательство. Заменим (11) на более слабое неравенство

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A+\varkappa\int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,b],\quad \mu\in\{\mu\}.$$

Положим

$$V_\mu(x)=\int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi\geqslant 0,\quad V_\mu'(x)=\ln\frac{b}{x}v_\mu(x),\quad V_\mu(0)=0,\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\}.$$

Тогда имеем

$$0\leqslant\frac{V_\mu'(x)}{\ln(b/x)}\leqslant A+\varkappa V_\mu(x),\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\},$$
$$0\leqslant V_\mu'(x)\leqslant A\ln\frac{b}{x}+\varkappa V_\mu(x)\ln\frac{b}{x},\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\}. \tag{12}$$

Рассмотрим задачу

$$\bar V'(x) = A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\bar V(x)\ln\frac{b}{x},$$
$$\bar V(0) = 0, \quad x\in[0,b], \quad \mu\in\{\mu\}. \tag{13}$$

Её решение имеет вид

$$\bar V(x) = \bar V_0(x)\int\limits_0^x \frac{A\ln(b/\xi)}{\bar V_0(\xi)}\,d\xi, \quad \bar V_0(x) = e^{b\varkappa x}\left(\frac{x}{b}\right)^{-\varkappa x}, \quad x\in[0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$

так как $0 < C_0 \leqslant \bar V_0(x) \leqslant C_1,$ очевидно, что $\bar V(x)$ – ограниченная и положительная функция.

Покажем, что $0\leqslant V_\mu(x)\leqslant \bar V(x).$ Действительно, существует функция $\rho_\mu(x)$ такая, что

$$V'_\mu(x) = \rho_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}V_\mu(x)\right), \quad 0\leqslant\rho_\mu(x)\leqslant 1, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\}.$$

Обозначив разность $\bar V(x) - V_\mu(x) = d_\mu(x),$ получим, совместив последнее уравнение и условие (13), следующую задачу:

$$d'_\mu(x) = \bar\rho_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\,\bar V(x)\right) + \rho_\mu(x)\varkappa\ln\frac{b}{x}\,d_\mu(x),$$
$$d_\mu(0) = 0, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$

где $0\leqslant\bar\rho_\mu(x) = 1-\rho_\mu(x)\leqslant 1.$ Последняя задача решается в квадратурах. С учётом свойств коэффициентов уравнения, анализируя полученный интеграл, имеем $d_\mu(x)\geqslant 0,$ что равносильно

$$V_\mu(x)\leqslant\bar V(x)\leqslant\bar C = \mathrm{const}.$$

Выразим $V'_\mu(x)$ через $v_\mu(x),$ подставим данное соотношение и полученную оценку в (12):

$$0\leqslant \ln\frac{b}{x}v_\mu(x)\leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\bar C, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$
$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A+\varkappa\bar C = C, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Рассмотрим задачу*

$$\mu x\frac{d\hat w}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat w + \mu A(x)\hat w + \mu B(x)\hat z(x) = \mu\Phi(x,\mu),$$
$$\hat w(0,\mu) = 0, \quad x\in[0,b], \quad \mu>0, \tag{14}$$

где $\hat z(x)$ – некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда решение (классическое) $\hat w(x)$ задачи (14) существует, единственно, и для любых $x\in[0,b],$ $\mu\in(0,\mu_0]$ справедливы оценки

$$|\hat w(x)|\leqslant W_1 + W_2\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|, \quad |\hat w(x)|\leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x|\hat z(\xi)|\,d\xi, \tag{15}$$

где константы W_1 и W_2 не зависят от $x,$ μ и $\hat z(x).$

Доказательство. I. Найдём решение однородного уравнения (14)

$$\mu x\frac{d\mathring w}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\mathring w + \mu A(x)\mathring w = 0, \quad \frac{d\mathring w}{\mathring w} = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}R_\mu(x) - \frac{A(x)}{x}\right)dx,$$

$$\mathring{w}(x)=\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{2R_\mu(\xi)}{\mu\sqrt{\xi}}\,d\xi\Big)\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{A(\xi)}{\xi}\,d\xi\Big).$$

Введём обозначение

$$P(x,\mu)=-\int\limits_b^x\frac{2R_\mu(\xi)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi.$$

$P(x,\mu)$ при каждом фиксированном $\mu>0$ является непрерывной, монотонно убывающей на $[0,b]$ функцией переменного x.

Разложим $A(x)=c_0+\bar A(x)$. Заметим, что $\bar A(x)/x$ является непрерывной функцией на отрезке $[0,b]$. Тогда

$$\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{A(\xi)}{\xi}\,d\xi\Big)=\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{c_0}{\xi}\,d\xi\Big)\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{\bar A(\xi)}{\xi}\,d\xi\Big)=$$

$$=\exp(c_0\ln b-c_0\ln x)\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{\bar A(\xi)}{\xi}\,d\xi\Big)=x^{-c_0}\hat A(x),$$

где

$$0<C_1\leqslant\hat A(x)=b^{c_0}\exp\Big(-\int\limits_b^x\frac{\bar A(\xi)}{\xi}\,d\xi\Big)\leqslant C_2.$$

Объединив оценки, получим

$$C_1e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0}\leqslant\mathring{w}(x)\leqslant C_2e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0},\quad x\in[0,b],\quad \mu>0.$$

II. Методом вариации произвольной постоянной получим решение задачи (14):

$$\hat w(x)=\mathring{w}(x)\int\limits_0^x\frac{\Phi(\xi,\mu)-B(\xi)\hat z(\xi)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi.$$

Для получения равномерной оценки (15) вынесем максимум модуля $\hat z(x)$ из интеграла. Положим $M=\max\limits_{\substack{\xi\in[0,x]\\ \mu\in[0,\mu_0]}}(|\Phi(\xi,\mu)|,|B(\xi)|)$. В результате будем иметь

$$|\hat w(x)|\leqslant\int\limits_0^x\frac{|\Phi(\xi,\mu)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi+\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|\int\limits_0^x\frac{|B(\xi)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant M\Big(1+\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|\Big)\int\limits_0^x\frac{C_2e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0}}{\xi C_1e^{P(\xi,\mu)/\mu}\xi^{-c_0}}\,d\xi=$$

$$=\frac{MC_2}{C_1}\Big(1+\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|\Big)x^{-c_0}\int\limits_0^x e^{(P(x,\mu)-P(\xi,\mu))/\mu}\xi^{c_0-1}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{MC_2}{C_1}\Big(1+\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|\Big)x^{-c_0}\int\limits_0^x\xi^{c_0-1}\,d\xi=\frac{MC_2}{C_1c_0}\Big(1+\max_{\xi\in[0,x]}|\hat z(\xi)|\Big).$$

Теперь получим интегральную оценку (15). Отметим, что $x\mathring{w}(x)/(\xi\mathring{w}(\xi)) \leqslant C_2/C_1$ при $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Через $\bar{M}$ обозначим величину

$$\bar{M} = \max\biggl(\frac{x\mathring{w}(x)|B(\xi)|}{\xi\mathring{w}(\xi)}\biggr),$$

где максимум берётся по всем значениям $\mu \in [0,\mu_0]$, $x \in [0,b]$, $\xi \in [0,x]$.

Оценим $\hat{w}(x)$ иначе:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi + \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{x\mathring{w}(x)|B(\xi)||\hat{z}(\xi)|}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi \leqslant \frac{MC_2}{C_1c_0} + \bar{M}\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|\,d\xi.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Рассмотрим задачу*

$$\frac{d\hat{z}}{dx} = D(x)\hat{z} + \hat{w}(x) + \varphi(x,\mu),$$
$$\hat{z}(0,\mu) = 0, \quad x \in [0,b], \quad \mu > 0, \tag{16}$$

где $\hat{w}(x)$ – некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда решение (классическое) $\hat{z}(x)$ задачи (16) существует, единственно и для любых $x \in [0,b]$, $\mu \in (0,\mu_0]$ справедлива оценка

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi, \tag{17}$$

где константы Z_1 и Z_2 не зависят от x, μ и выбора $\hat{w}(x)$.

Доказательство. I. Аналогично доказательству леммы 2 найдём решение однородного уравнения

$$\frac{d\mathring{z}}{dx} = D(x)\mathring{z}, \quad 0 < \bar{Z}_1 \leqslant \mathring{z}(x) = \exp\biggl(\int\limits_0^x D(\xi)\,d\xi\biggr) \leqslant \bar{Z}_2.$$

II. Решение задачи (16) имеет вид

$$\hat{z}(x) = \mathring{z}(x)\int\limits_0^x \frac{\hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)}{\mathring{z}(\xi)}\,d\xi.$$

Применив полученные оценки $\mathring{z}(x)$, придём к неравенству

$$|\hat{z}(x)| \leqslant \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}\biggl(\max_{\substack{\xi\in[0,x]\\ \mu\in[0,\mu_0]}} |\varphi(\xi,\mu)| + \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi\biggr),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Решение $\{\hat{z}(x),\hat{w}(x)\}$ системы (10) равномерно ограничено по $x \in [0,b]$, $\mu \in \in [0,\mu_0]$, если оно существует.*

Доказательство. Система (10) является объединением задач (14) и (16). Её решение существует, следовательно, является непрерывным на $[0,b]$ при каждом фиксированном $\mu > 0$. Тогда, применив лемму 2 и второе соотношение (15), а также лемму 3 и соотношение (17), получим

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|\,d\xi, \quad |\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi.$$

Совместим данные неравенства:

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^x \left(W_1 + W_2 \frac{1}{\xi} \int\limits_0^\xi |\hat{z}(\zeta)|\, d\zeta \right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2 \int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)| \int\limits_\zeta^x \frac{1}{\xi}\, d\xi\, d\zeta = Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2 \int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)| \ln \frac{x}{\zeta}\, d\zeta.$$

Таким образом, для $|\hat{z}(x)|$ выполнены все условия леммы 1, следовательно, существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $|\hat{z}(x)| \leqslant C_1$ равномерно по всем $x \in [0, b]$, $\mu \in [0, \mu_0]$.

Использовав первое неравенство (15) леммы 2, оценим $\hat{w}(x)$:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2 \max_{\xi \in [0,x]} |\hat{z}(\xi)| \leqslant W_1 + W_2 C_1 = C_2.$$

Лемма доказана.

Сформулируем и докажем теорему о предельном переходе в задаче (7) при $\mu \to 0+0$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи (7) существует. Тогда найдётся постоянная $M > 0$, не зависящая от μ, такая, что*

$$|z(x,\mu)|, |z'_x(x,\mu)| \leqslant M, \quad |z''_{xx}(x,\mu)| \leqslant M/(\mu x), \quad x \in [0, b], \quad \mu \in (0, \mu_0].$$

Кроме того, решение $z(x,\mu)$ задачи (7) сходится к решению $\bar{z}(x)$ предельной задачи (8) при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [0, b]$. Для любого $\varepsilon \in (0, b)$ $z'_x(x,\mu)$ сходится к $\bar{z}'(x)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [\varepsilon, b]$.

Доказательство. Из леммы 4 следует равномерная ограниченность функций $|\hat{z}(x,\mu)|$ и $|\hat{w}(x,\mu)|$:

$$z(x) = \hat{z}(x) + 1, \quad z'(x) = w(x) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x) + \hat{w}(x),$$

$$z''(x) = w'(x) = -\frac{2\sqrt{x}R_\mu(x)w(x) + \mu c(x)w(x) + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z(x) - \mu a(x)z(x)}{\mu x},$$

из чего, очевидно, следуют оценки теоремы. Кроме того, из этого факта следует предкомпактность множества решений $\{z(x,\mu)\}_{\mu \in (0,\mu_0]}$ в $C[0,b]$, а значит, и $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu \in (0,\mu_0]}$.

В доказательстве леммы 2 было получено интегральное представление для $\hat{w}(x)$:

$$\hat{w}(x) = \mathring{w}(x) \int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)}\, d\xi = \int\limits_0^x \frac{\mathring{w}(x)}{\xi \mathring{w}(\xi)} L(\xi,\mu)\, d\xi,$$

где $|L(x,\mu)| < C_3$ в силу доказанной ограниченности $\hat{z}(x)$.

Применим в данном неравенстве оценки $\mathring{w}(x)$ сверху и снизу из доказательства леммы 2:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_3 \int\limits_0^x \frac{C_2 x^{-c_0} \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi C_1 \xi^{-c_0} \exp(P(\xi,\mu)/\mu)}\, d\xi \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{x \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi \exp(P(\xi,\mu)/\mu)}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(\frac{1}{\mu}(P(x,\mu) - P(\xi,\mu)) \right) d\xi = \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int\limits_\xi^x \frac{2R_\mu(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta \right) d\xi.$$

При достаточно малых μ имеет место оценка снизу $2R_\mu(x) \geqslant x/b$, $x \in [0,b]$. Таким образом,

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \frac{C_3C_2}{C_1\varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_\xi^x \frac{2p\zeta}{b\sqrt{\zeta}}\,d\zeta\right) d\xi = \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{2}{3b\mu}\frac{x^3-\xi^3}{x^{3/2}+\xi^{3/2}}\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{3b^{5/2}\mu}(x-\xi)(x^2+x\xi+\xi^2)\right) d\xi \leqslant \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu}\frac{\varepsilon^2}{3b^{5/2}}(x-\xi)\right) d\xi.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,b)$ и введём величины

$$C_4 = \varepsilon^2/3b^{5/2} \geqslant 0, \quad C_5 = 2pC_3C_2/C_1\varepsilon \geqslant 0.$$

Тогда

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_5 \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{C_4}{\mu}(x-\xi)\right) d\xi \leqslant \mu\frac{C_5}{C_4}\exp\left(-\frac{C_4}{\mu}x\right)\exp\left(\frac{C_4}{\mu}x\right) = C\mu \to 0, \quad \mu \to 0+0,$$

т.е. $\hat{w}(x) \to 0$ равномерно на любом $[\varepsilon,b]$ при $\mu \to 0+0$. Так как функция $\hat{w}(x)$ равномерно ограничена на $[0,b]$, она сходится на нём к 0 в среднем.

Выделим из $\{z(x,\mu)\}_{\mu\in(0,\mu_0]}$ произвольную последовательность с $\mu \to 0+0$, имеющую равномерный предел. Пусть $\hat{z}(x,\mu_l) \to \tilde{z}(x)$ при $\mu_l \to 0+0$. Перейдём от задачи (10) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений и подставим в неё $\hat{z}(x,\mu_l)$ и $\hat{w}(x,\mu_l)$:

$$\int\limits_0^x \mu\xi\frac{d\hat{w}}{dx}(\xi)\,d\xi \equiv \mu x\hat{w}(x) - \int\limits_0^x \mu\hat{w}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x [\mu\Phi(\xi,\mu) - 2\sqrt{\xi}R_\mu(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu A(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu B(\xi)\hat{z}(\xi)]\,d\xi,$$

$$\hat{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\hat{z}(\xi) + \hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)]\,d\xi, \quad x \in [0,b], \quad \mu > 0.$$

Данная система допускает предельный переход при $\mu_l \to 0+0$. Первое уравнение обратится в тождество $0=0$, из второго будет получено

$$\tilde{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\tilde{z}(\xi) + \varphi(\xi,0)]\,d\xi, \quad x \in [0,b]. \tag{18}$$

Решение $\tilde{z}(x)$ этого уравнения существует и единственно.

Таким образом, любая последовательность $\{\hat{z}(x,\mu_l)\}$ при $\mu_l \to 0+0$ имеет единственную в $C[0,b]$ предельную точку $\tilde{z}(x)$, являющуюся решением интегрального уравнения (18). Доказано, что при $\mu \to 0+0$ $\hat{z}(x,\mu) \to \tilde{z}(x)$ равномерно сходится на $[0,b]$, для любого $\varepsilon \in (0,b]$ $\hat{w}(x,\mu) \to 0$ равномерно на $[\varepsilon,b]$. Так как $\varphi(x,0) = -\bar{c}(x)/2 = D(x)$, то уравнение (18) примет вид

$$\tilde{z}(x) = -\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}(\tilde{z}(\xi)+1)\,d\xi, \quad x \in [0,b].$$

Отметим, что при $\mu \to 0+0$ функция $z(x,\mu)$ сходится равномерно к $\bar{\bar{z}}(x) = \tilde{z}(x) - 1$. Тогда

$$\bar{\bar{z}}(x) = 1 - \int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{\bar{z}}(\xi)\,d\xi, \quad x \in [0,b].$$

Продифференцировав это уравнение, получим для функции $\bar{\bar{z}}(x)$ задачу (8), т.е. именно решение (8) $\bar{z}(x)$ является равномерным пределом $z(x,\mu)$:

$$z'(x,\mu) = w(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x,\mu) + \hat{w}(x,\mu) \to \varphi(x,0)(1+\tilde{z}(x)) = -\frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{z}(x) = \bar{z}'(x),$$

указанная сходимость – равномерная на $[\varepsilon, b]$ для любого $b \geqslant \varepsilon > 0$. Теорема полностью доказана.

Приведём следствия теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть решение задачи (6) $y_k(x)$ существует. Тогда*

$$y_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x})\Bigg(\exp\Bigg(-\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi\Bigg) + \bar{o}(1)\Bigg), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,b],$$

при $k \to +\infty$ равномерно на $x \in [0,b]$.

Для доказательства достаточно найти решение задачи (8) $\bar{z}(x)$, применить теорему 1 о равномерной сходимости $z(x,\mu)$ к $\bar{z}(x)$ и вернуться к начальным обозначениям задачи (6).

2. Оценки функций из фундаментальной системы решений и функции Грина.

Теорема 3. *Пусть решение задачи (6) $y_k(x)$ существует. Тогда найдутся не зависящие от $x \in [0,b]$ и $k > 0$ постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что при достаточно больших k и $x \in [0,b]$ имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k(x) \leqslant C_2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{19}$$

$$0 < C_1 k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k'(x) \leqslant C_2 \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{20}$$

$$|y_k''(x)| \leqslant C_2 \frac{k^2}{x} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{21}$$

Доказательство. I. Вновь воспользуемся разложением $y_k(x) = \bar{y}_k(x) z_k(x)$, где $z_k(x) = z(x, \mu = 1/(\pi k))$. При $t \to +\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула [17, с. 222]:

$$J_\alpha(it) = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{t}} e^t \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Применим её к $\bar{y}_k(x)$. Существуют постоянные $A > 0$, $B_1 > 0$ и $B_2 > 0$ такие, что выполнено

$$0 < B_1 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad k\sqrt{x} \geqslant A.$$

При $0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A$ можно выбрать постоянные $B_3 > 0$ и $B_4 > 0$ так, чтобы выполнялось

$$0 < B_3 \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_4, \quad 0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A.$$

Совместив последние неравенства, имеем

$$0 < B_5 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0. \tag{22}$$

Аналогично могут быть оценены производные

$$\bar{y}_k'(x) = -\frac{\pi k i}{\sqrt{x}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{x}),$$

$$0 < B_5 k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k'(x) \leqslant B_6 \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0, \tag{23}$$

$$\bar{y}_k''(x) = -\frac{\pi^2 k^2}{x} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_{\alpha+2}(2\pi k i\sqrt{x}),$$

$$\bar{y}_k''(x) \leqslant B_6 \frac{k^2}{x} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{24}$$

II. В силу теоремы 1 $z_k(x) \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \bar{z}(x)$ – решению задачи (8). Тогда найдётся достаточно большой номер k_0 и постоянные $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ такие, что $0 < D_1 \leqslant z_k(x) \leqslant D_2$; $|z_k'(x)| \leqslant D_2$, $|z_k''(x)| \leqslant D_2 k/x$ при $k \geqslant k_0$. В совокупности с неравенствами (22) эти оценки дают (19):

$$y_k'(x) = \bar{y}_k'(x) z_k(x) + \bar{y}_k(x) z_k'(x).$$

В силу неравенств (22) и (23)

$$|y_k'(x)| \leqslant D_2 B_6 \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} + D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant C_2 \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}},$$

$$|y_k'(x)| \geqslant D_1 B_5 k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} - D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} =$$

$$= k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \left(D_1 B_5 - \frac{D_2 B_6}{k} \right) \geqslant C_1 k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}$$

при $(D_1 B_5 - D_2 B_6/k) \geqslant C_1 > 0$, что выполнено при $k \geqslant k_0$. Оценки (20) доказаны. Аналогично, применив в оценке $y_k''(x)$ неравенства (22), (23) и (24), получим оценку (21):

$$|y_k''(x)| \leqslant D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \left(\frac{k^2}{x} + \frac{2k}{\sqrt{x}} + \frac{k}{x} \right) \leqslant C_2 \frac{k^2}{x} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь изначальные условия на коэффициенты уравнений (1) и (2).

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $a(x)$, $c(x)$ *из класса* A, $a(x) \geqslant 0$ *и* $c(0) \geqslant 1$. *Тогда существует единственное решение задачи (6), также принадлежащее классу* A.

Доказательство данного утверждения мы опустим, так как оно во многом повторяет доказательство теоремы 1 из [13].

Построенные решения $y_k(x)$ задач (9) можно выбрать в качестве элементов фундаментальных систем решений для задач (5), удовлетворяющих левому краевому условию этих задач. Соответственно, теперь будем обозначать их как $Y_k^0(x) \equiv y_k(x)$. Будем называть их первыми элементами фундаментальных систем решений (ФСР) задач (5).

Аналогично далее мы будем рассматривать некоторую последовательность решений последовательности задач

$$xy_k'' + c(x)y_k' - (a(x) + \pi^2 k^2) y_k = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

при $c_0 \geqslant 1$. Решение каждой такой задачи определено не однозначно. Использовав известное следствие формулы Остроградского–Лиувилля, частные решения задач (25) можно представить в следующем виде:

$$Y_k^b(x) = -Y_k^0(x)\int\limits_b^x \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2}\exp\biggl(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr)\,d\xi, \quad x\in(0,b], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{26}$$

Система решений $\{Y_k^0, Y_k^b\}$ является линейно независимой по построению. Поэтому положим функции $Y_k^b(x)$ вторыми элементами ФСР задач (5). По аналогии с $Y_k^0(x)$ получим оценки на систему $Y_k^b(x)$ при $k\to+\infty$.

Теорема 5. *Найдётся не зависящая от $x\in(0,b]$ и k постоянная $C>0$ такая, что при достаточно больших $k\in\mathbb{N}$ и $c(0)>1$ имеют место неравенства*

$$0\leqslant Y_k^b(x)\leqslant C\frac{x^{-c_0+1}}{1+k\sqrt{x}}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b], \tag{27}$$

$$0\leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x)\leqslant Cx^{-c_0}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b], \tag{28}$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right|\leqslant Ckx^{-c_0-1}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b]. \tag{29}$$

При $c(0)=1$ имеют место неравенства

$$0\leqslant Y_k^b(x)\leqslant C\ln\biggl(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\biggr)\frac{1}{1+k\sqrt{x}}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b], \tag{30}$$

$$0\leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x)\leqslant C\ln\biggl(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\biggr)\frac{1}{x}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b], \tag{31}$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right|\leqslant C\frac{k}{x^2}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x\in(0,b]. \tag{32}$$

Здесь $\alpha=c(0)-1$.

Доказательство. Для упрощения выкладок будем использовать символ const для обозначения, возможно, различных положительных постоянных, не зависящих от $x\in(0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$:

$$Y_k^b(x)\leqslant -\mathrm{const}\times Y_k^0(x)\int\limits_b^x \frac{\xi^{-c_0}}{(Y_k^0(\xi))^2}\,d\xi, \quad x\in(0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Применим оценки теоремы 3:

$$Y_k^b(x)\leqslant \mathrm{const}\times\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\int\limits_x^b \xi^{-c_0}\biggl(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}\biggr)^2 d\xi\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\times\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}\int\limits_x^b \xi^{-c_0}e^{4\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})}\biggl(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\biggr)^2 d\xi.$$

Введём новые переменные

$$k\sqrt{x}=t, \quad k\sqrt{\xi}=\tau, \quad \tau-t=\nu.$$

Тогда получим

$$I(k,x)=\int\limits_x^b \xi^{-c_0}e^{4\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})}\left(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\xi=$$

$$=2k^{2\alpha}\int\limits_t^{k\sqrt{b}} \tau^{1-2c_0}e^{-4\pi\nu}\left(\frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\tau.$$

Обозначим ядро интеграла через

$$K(t,\tau)=\tau^{1-2c_0}e^{-4\pi\nu}\left(\frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2\leqslant \mathrm{const}\times\tau^{1-2c_0}e^{-4\pi\nu}\left(\frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\times\tau^{1-2c_0}e^{-4\pi\nu}(1+(\pi\nu)^{2\alpha+1})\leqslant \mathrm{const}\times e^{-4\pi\nu}\tau^{1-2c_0}\leqslant \mathrm{const}\times e^{-4\pi\nu}\nu^{1-2c_0},\quad \tau=t+\nu.$$

В силу данной оценки ядра можем выбрать точку $\gamma>0,$ не зависящую от $t,$ такую, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\tau^{1-2c_0}K(t,\tau)\,d\nu=\int\limits_0^{\gamma}\tau^{1-2c_0}K(t,\tau)\,d\nu+\int\limits_\gamma^{+\infty}\tau^{1-2c_0}K(t,\tau)\,d\nu\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[\int\limits_0^{\gamma}e^{-4\pi\nu}\tau^{1-2c_0}\,d\nu+\gamma^{1-2c_0}\int\limits_\gamma^{+\infty}e^{-4\pi\nu}\,d\nu\right]\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[\int\limits_0^{\gamma}\tau^{1-2c_0}\,d\nu+\frac{\gamma^{1-2c_0}e^{-4\pi\gamma}}{4\pi}\right]\leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{\gamma}\tau^{1-2c_0}\,d\nu.$$

Рассмотрим случай $c_0>1.$ Тогда

$$I(k,x)\leqslant \mathrm{const}\times k^{2\alpha}\int\limits_t^{t+\gamma}\tau^{1-2c_0}d\tau\leqslant \mathrm{const}\times k^{2\alpha}(t^{-2\alpha}-(t+\gamma)^{-2\alpha})=$$

$$=\mathrm{const}\times\left(x^{-\alpha}-\left(\sqrt{x}+\frac{\gamma}{k}\right)^{-2\alpha}\right)=\mathrm{const}\times x^{-\alpha}\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{k\sqrt{x}}\right)^{-2\alpha}\right).$$

Исследовав отдельно случаи больших и малых $k\sqrt{x},$ получим общую оценку

$$I(k,x)\leqslant \mathrm{const}\times\frac{x^{-\alpha}}{1+k\sqrt{x}},$$

которая доказывает неравенство (27). Аналогично при $c_0=1$ получаем оценку

$$I(k,x)\leqslant \mathrm{const}\times\int\limits_t^{t+\gamma}\tau^{-1}d\tau=\mathrm{const}\times\ln\left(1+\frac{\gamma}{k\sqrt{x}}\right)\leqslant \mathrm{const}\times\frac{\ln(2+(k\sqrt{x})^{-1})}{1+k\sqrt{x}},$$

что доказывает неравенство (30):

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x)=\frac{dY_k^0}{dx}(x)\int\limits_b^x\frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2}\exp\left(-\int\limits_b^\xi\frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right)d\xi+\frac{1}{Y_k^0(x)}\exp\left(-\int\limits_b^x\frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right)\leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \times \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} I(k,x) + \text{const} \times x^{-c_0} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}.$$

При $c_0 > 1$ аналогично получаем

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant \text{const} \times \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} \left[x^{-c_0} + \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+k\sqrt{x}} x^{-\alpha} \right] \leqslant \text{const} \times x^{-c_0} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}},$$

при $c_0 = 1$ получаем

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant \text{const} \times \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} \left[\frac{1}{x} + \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{\ln(2+1/k\sqrt{x})}{1+k\sqrt{x}} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \times \frac{\ln(2+1/k\sqrt{x})}{x} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}.$$

Оценки (28) и (31) доказаны. Наконец, дифференцируя определение $Y_k^b(x)$ дважды и производя аналогичные выкладки, имеем

$$\left| \frac{d^2 Y_k^b}{dx^2}(x) \right| \leqslant \text{const} \times x^{-c_0-1} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} + \text{const} \times \frac{k^2}{x} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} I(k,x),$$

и, соответственно, оценки (29) при $c_0 > 1$ и (32) при $c_0 = 1$. Теорема доказана.

Мы получили набор оценок для фундаментальных систем решений задач (5). Получим аналогичные оценки в случае задач (4) при $c(0) < 1$, сведя их к задачам (5).

Будем искать решения уравнений (4) в виде $y_k(x) = x^{1-c_0}\check{y}_k(x)$, где $\check{y}_k(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда

$$y_k'(x) = x^{1-c_0}\check{y}_k'(x) + (1-c_0)x^{-c_0}\check{y}_k(x),$$

$$xy_k''(x) = x^{2-c_0}\check{y}_k''(x) + 2(1-c_0)x^{1-c_0}\check{y}_k'(x) - c_0(1-c_0)x^{-c_0}\check{y}_k(x),$$

$$x\check{y}_k'' + \check{c}(x)\check{y}_k' - (\check{a}(x) + \pi^2 k^2)\check{y}_k = 0, \tag{33}$$

где

$$\check{c}(x) = 2 + c(x) - 2c(0), \quad \check{a}(x) = a(x) + (c_0(1-c_0) - (1-c_0)c(x))x^{-1}.$$

Для уравнений (33) можно поставить краевые задачи вида (5). Выполнены все условия теорем 3–5, а значит можем выбрать описанным выше образом фундаментальные системы решений этих задач, обозначив их $\{\check{Y}_k^0(x), \check{Y}_k^b(x)\}$. Соответственно, функции из фундаментальных систем решений задач (4) имеют вид

$$Y_k^0(x) = x^{1-c_0}\check{Y}_k^0(x), \quad Y_k^b(x) = x^{1-c_0}\check{Y}_k^b(x), \quad x \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\check{c}_0 = 2 + c_0 - 2c_0 = 2 - c_0 > 1$ и, соответственно, мы можем положить в общем случае $\alpha = |c_0 - 1|$. Применив оценки теорем 3 и 5, получена следующая

Теорема 6. *Пусть* $c(0) < 1$. *Тогда существуют не зависящие от* $x \in [0,b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что при достаточно больших* k *имеют место неравенства*

$$0 < C_1 x^{1-c_0} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(x) \leqslant C_2 x^{1-c_0} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x \in [0,b],$$

$$0 < C_1 x^{-c_0} k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \frac{dY_k^0}{dx}(x) \leqslant C_2 x^{-c_0} k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x \in [0,b],$$

$$\left| \frac{d^2 Y_k^0}{dx^2}(x) \right| \leqslant C_2 x^{-1-c_0} k^2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x \in [0,b],$$

$$0 \leqslant Y_k^b(x) \leqslant C_2 \frac{1}{1+k\sqrt{x}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b],$$

$$0 \leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant C_2 \frac{1}{x^{3/2}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b],$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant C_2 \frac{k}{x^{5/2}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b].$$

Для получения оценок функций Грина краевых задач (4) и (5) необходимы оценки определителей Вронского ФСР уравнений этих задач по модулю снизу. Покажем, что существует единая оценка для случаев $c_0 > 1$, $c_0 = 1$ и $c_0 < 1$, которая не зависит от k:

$$w_k(x) = Y_k^0(x) \frac{dY_k^b}{dx}(x) - \frac{dY_k^0}{dx}(x) Y_k^b(x), \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставим в эту формулу выражение (26) функции $Y_k^b(x)$, в результате получим

$$w_k(x) = -\exp\biggl(-\int_b^x \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr), \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7. *Существует не зависящая от $x \in (0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянная W такая, что имеют место неравенства*

$$w_k(x) \leqslant W x^{-c_0} < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,b].$$

Доказательство.

$$w_k(x) = -\exp\biggl(-\int_b^x \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr) = -\exp\biggl(-\int_b^x \frac{c_0}{\zeta}\,d\zeta\biggr)\exp\biggl(-\int_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr) =$$

$$= -\exp\Bigl(-c_0(\ln x - \ln b)\Bigr)\exp\biggl(-\int_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr) = -x^{-c_0}\exp\biggl(c_0 \ln b - \int_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr).$$

Введём обозначение

$$W = -\min_{x\in[0,b]} \exp(c_0 \ln b - \int_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta) < 0$$

и получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Построим функции Грина задач (4) и (5). Будем рассматривать случай произвольного $c(0)$. Используем ранее введённые обозначения $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$ и запишем функции Грина задач (4) и (5) в общем виде:

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} Y_k^0(x)Y_k^b(\xi)(\xi w_k(\xi))^{-1}, & 0 \leqslant x < \xi \leqslant b, \\ Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)(\xi w_k(\xi))^{-1}, & b \geqslant x > \xi > 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Решения задач (4) и (5) соответственно имеют вид

$$Y_k(x) = \int_0^b G_k(x,\xi) f_k(\xi)\,d\xi, \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Теорема 8. *Для любого* $\varepsilon \in (0, b)$ *найдутся постоянные* $C_1 = C_1(\varepsilon)$ *и* C_2, *не зависящая от* ε, *такие, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\int_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant C_2 \frac{1}{1+k\sqrt{x}}\frac{1}{k}, \quad x \in [0,b], \tag{36}$$

$$\int_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant C_1 \frac{1}{k^2}, \quad x \in [\varepsilon,b], \tag{37}$$

$$\int_0^b \left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right| d\xi \leqslant C_1 \frac{1}{k}, \quad x \in [\varepsilon,b]. \tag{38}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (36) применим оценки теорем 3, 5, 6 и 7 к интегралу от функции (34). В случае $c_0 \geqslant 1$, выбрав наихудшую оценку, получим

$$\int_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}} \int_0^x \ln\left(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\right) e^{2\pi k(\sqrt{\xi}-\sqrt{x})} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}\,d\xi +$$

$$+\frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}} \int_x^b \ln\left(2+\frac{1}{k\sqrt{\xi}}\right) e^{2\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})} \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\,d\xi \equiv \frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}}[I_1(k,x,\xi)+I_2(k,x,\xi)].$$

Во втором интеграле $I_2(k,x,\xi)$ применим замену $k\sqrt{x}=t$, $k\sqrt{\xi}=\tau$, $\tau - t = \nu$. Тогда получим

$$I_2(k,x,\xi) = \frac{2}{k^2}\int_t^{k\sqrt{b}} \tau \ln\left(2+\frac{1}{\tau}\right) e^{2\pi(t-\tau)} \frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{k^2} k\sqrt{b} \int_0^{k\sqrt{b}-t} \ln\left(2+\frac{1}{\nu+t}\right) e^{-2\pi\nu} \frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\,d\nu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{k} \int_0^{+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{\nu}\right) e^{-2\pi\nu}(1+(\pi\nu)^{\alpha+1/2})\,d\nu.$$

Так как последний интеграл сходится и не зависит от k, то получаем

$$I_2(k,x,\xi) \leqslant \frac{\mathrm{const}}{k}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_1(k,x,\xi)$ и сделаем в нём замену по формулам $k\sqrt{x}=t$, $k\sqrt{\xi}=\tau$, $\nu = t-\tau$. В результате будем иметь

$$I_1(k,x,\xi) \leqslant \ln\left(2+\frac{1}{t}\right)\frac{2}{k^2}\int_0^t \tau e^{-2\pi(t-\tau)} \frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left(2+\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{const}}{k^2} t \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\nu}(1+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}) d\tau.$$

Заметим, что $t\ln(2+t^{-1})\leqslant \mathrm{const}\times(1+k\sqrt{b})$, а интеграл является сходящимся. Поэтому

$$I_1(k,x,\xi)\leqslant\frac{\mathrm{const}}{k},$$

что доказывает неравенства (36) и (37) при $c_0\geqslant 1$. Случай $c_0<1$ исследуется аналогично:

$$\int_0^b\left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right|d\xi\leqslant \mathrm{const}\times\int_0^x\frac{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}\frac{1}{x}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}\,d\xi+$$

$$+\,\mathrm{const}\times\int_x^b\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\frac{1}{\xi^{3/2}}\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}\,d\xi.$$

Использовав технику, применённую ранее, получим оценку (38):

$$\int_0^b\left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right|d\xi\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon^{3/2}k},\quad x\in[\varepsilon,b].$$

Теорема доказана.

3. Решение задач для эллиптического уравнения. Вернёмся к решению задач (1) и (2). Разложим правую часть $f(x,y)$ уравнений в ряд Фурье

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\Omega.$$

Соответственно, будем искать решения задач (1) и (2) в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}Y_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\bar{\Omega},\tag{39}$$

где $Y_k(y)$ – решения задач (4) и (5) соответственно.

Теорема 9. *Пусть правая часть $f_k(y)$ задач (4) и (5) ограничена по норме в пространстве $C^2[0,b]$. Тогда при $k\in\mathbb{N}$ имеют место соотношения*

$$Y_k(y)=-\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2}+\frac{1}{1+k\sqrt{y}}O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

равномерно по $y\in[0,b]$. Кроме того, для любого $\varepsilon\in(0,b)$ справедливы равенства

$$Y_k(y)=-\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right),\quad Y_k'(y)=-\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2}+O\left(\frac{1}{k^3}\right),\quad Y_k''(y)=O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

равномерно по $y\in[\varepsilon,b]$.

Доказательство данной теоремы осуществляется аналогично доказательству леммы 5 из статьи [13] с учётом доказанной нами теоремы 8.

Теорема 10. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задач (1) и (2) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{\Omega}=[0,1]\times[0,b]$, при каждом фиксированном $y\in(0,b)$ принадлежит классу Гёльдера по x. Тогда классические решения данных задач существуют и выражаются рядом (39), где коэффициенты $Y_k(y)$ определяются формулой (35). Ряд сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω.*

Доказательство данной теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 5 из работы [13] с учётом результатов теоремы 9.

Наконец, построим решения задач (1) и (2) в том случае, когда коэффициенты дифференциального оператора и правая часть являются аналитическими функциями.

Пусть функции $a(y)$, $c(y)$ и $f(x,y)$ принадлежат классу A при каждом фиксированном $x\in[0,1]$. Тогда имеют место следующие разложения в степенные ряды:

$$a(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ny^n,\quad c(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_ny^n,\quad f_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_{kn}y^n,\quad k\in\mathbb{N},$$

радиус сходимости всех рядов не меньше R. Будем искать частное решение уравнений из задач (4) и (5) в виде

$$\eta_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\eta_{kn}^Ay^n+\ln y\sum_{n=0}^{+\infty}\eta_{kn}^Sy^n\equiv\eta_k^{(A)}(y)+\ln y\cdot\eta_k^{(S)}(y). \tag{40}$$

Подставив указанные выше степенные ряды в соответствующие уравнения (4) и (5) и приравняв коэффициенты при y^n, $\ln y\cdot y^n$, получим систему уравнений относительно коэффициентов η_{kn}^A, η_{kn}^S:

$$(n+c_0)(n+1)\eta_{k,n+1}^S+\sum_{m=0}^{n-1}c_{n-m}(m+1)\eta_{k,m+1}^S-\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}\eta_{k,m}^S-\pi^2k^2\eta_{k,n}^S=0,$$

$$[(n+c_0)(n+1)\eta_{k,n+1}^A+(2n+1+c_0)\eta_{k,n+1}^S]+\sum_{m=0}^{n-1}c_{n-m}[(m+1)\eta_{k,m+1}^A+\eta_{k,m+1}^S]-$$

$$-\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n}^A=f_{kn},\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Данная система не определяет $\eta_{k,0}^A$, $\eta_{k,0}^S$. Положим $\eta_{k,0}^A=1$, $\eta_{k,0}^S=0$, что гарантирует ограниченность решения в окрестности точки 0. Остальные коэффициенты рядов могут быть найдены рекуррентно из системы уравнений.

Если $c_0\neq0,-1,-2,\ldots$, то

$$\eta_{k,n}^A=(n(n+c_0-1))^{-1}\Big[f_{k,n-1}+\sum_{m=0}^{n-1}(a_{n-m-1}-mc_{n-m})\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n-1}^A\Big], \tag{41}$$

$$\eta_{k,n}^S=0,\quad k,n\in\mathbb{N}. \tag{42}$$

В случаях $c_0=0,-1,-2,\ldots$ формулы (41) и (42) верны лишь при $n=\overline{1,-c_0}$. Рассмотрим номер $n=1-c_0$. Можно выбрать

$$\eta_{k,n}^S=(2n-1+c_0)^{-1}\Big[f_{k,n-1}+\sum_{m=0}^{n-1}(a_{n-m-1}-mc_{n-m})\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n-1}^A\Big],$$

$$\eta_{k,n}^A=0,\quad k\in\mathbb{N},\quad n=1-c_0.$$

Аналогично при $n=2-c_0,3-c_0,\ldots$ коэффициенты η_{kn}^A, η_{kn}^S корректно выражаются через предыдущие. Таким образом, данная система уравнений разрешима.

Теорема 11. *Пусть функция $f(x,y)$ представима рядом по степеням $x-1/2$ и y, сходящимся при $x\in(-\varepsilon,1+\varepsilon)$, $y\in(-R,R)$ при некотором $\varepsilon>0$. Тогда функции $\eta_k^{(A)}(y)$ и*

$\eta_k^{(S)}(y)$ *из формулы (40) принадлежат классу* A, *а соответствующие им степенные ряды сходятся при* $y \in (-R, R)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6 из статьи [13].

I. Рассмотрим случай $c(0) < 1$. Тогда однородные уравнения (4) имеют по два линейно независимых ограниченных решения. В силу теоремы 4 одно из них имеет вид

$$\varphi_k(y) = y^{1-c_0}\varphi_k^{(A)}(y),$$

а другое можно построить описанным в данной главе методом, положив $f_k(y) \equiv 0$. Оно будет иметь вид

$$\chi_k(y) = \chi_k^{(A)}(y) + \ln y \cdot \chi_k^{(S)}(y),$$

где $\varphi_k^{(A)}(y)$, $\chi_k^{(A)}(y)$ и $\chi_k^{(S)}(y)$ – функции из класса A.

II. Пусть $c(0) \geqslant 1$. Тогда единственное ограниченное решение (с точностью до постоянного множителя) задачи (5) даётся теоремой 4 и имеет вид

$$\varphi_k(y) = \varphi_k^{(A)}(y),$$

где $\varphi_k^{(A)}(y)$ – функция из класса A.

Теорема 12. *Пусть функция* $f(x, y)$ *представима рядом по степеням* $x - 1/2$ *и* y, *сходящимся при* $x \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $y \in (-R, R)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

1. Если $c(0) \geqslant 1$, *то классическое решение задачи (2) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k^{(A)}(y) - \frac{\eta_k^{(A)}(b)}{\varphi_k^{(A)}(b)}\varphi_k^{(A)}(y)\right)\sin(\pi k x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

2. Если $c(0) < 1$ *и* $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$, *то классическое решение задачи (1) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k^{(A)}(y) - \chi_k^{(A)}(y) - \frac{\eta_k^{(A)}(b) - \chi_k^{(A)}(b)}{b^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(b)}y^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(y)\right)\sin(\pi k x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

3. Если $c(0) = 0, -1, -2, \ldots$, *то классическое решение задачи (1) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Bigg(\eta_k^{(A)}(y) + \ln y \cdot \eta_k^{(S)}(y) - \chi_k^{(A)}(y) - \ln y \cdot \chi_k^{(S)}(y) -$$

$$- \frac{\eta_k^{(A)}(b) + \ln b \cdot \eta_k^{(S)}(b) - \chi_k^{(A)}(b) - \ln b \cdot \chi_k^{(S)}(b)}{b^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(b)}y^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(y)\Bigg), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

Указанные ряды сходятся равномерно по $(x, y) \in \overline{\Omega}$ *и допускают двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω, *функции* $\eta_k^{(A)}$, $\eta_k^{(S)}$, $\chi_k^{(A)}$, $\chi_k^{(S)}$, $\varphi_k^{(A)}$ *принадлежат классу* A.

Доказательство. Выражение в скобках в силу наших построений является решением задач (1) и (2) соответственно, т.е. совпадает с функциями (35), а указанные ряды Фурье – с рядами (39), они сходятся к классическому решению в силу теоремы 10. Принадлежность коэффициентов классу A следует из теоремы 11. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.С. Ломову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

Статья опубликована при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М., 1985
3. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, 1979.
4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. *Ивакин В.М.* Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск, 1982. С. 12–21.
7. *Петрушко И.М.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. 1968. Т. 103. С. 181–200.
8. *Петрушко И.М.* О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha(x,y)u_y + \beta(x,y)u_x + \gamma(x,y)u = f(x,y)$ в смешанной области // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 1. С. 123–135.
9. *Ломов И.С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2079–2089.
10. *Ломов И.С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 5. С. 593–596.
11. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
12. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 45–58.
13. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 655–672.
14. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М., 1970.
15. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
17. *Ватсон Дж.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 17.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 628–637

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.929

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. Н. В. Зайцева

Для двух гиперболических дифференциально-разностных уравнений с операторами сдвигов общего вида, действующими по всем пространственным переменным, построены трёхпараметрические семейства решений. Доказаны теоремы, что полученные решения являются классическими при выполнении условия положительности вещественной части символа дифференциально-разностных операторов. Приведены классы уравнений, для которых эти условия выполнены.

DOI: 10.31857/S0374064122050041, EDN: CBCDZS

Введение. В последние годы в приложениях математики широкое распространение получили функционально-дифференциальные уравнения или, иначе, дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Систематическое изучение уравнений с отклоняющимся аргументом было начато в сороковых годах XX в. благодаря приложениям к теории автоматического управления и связано с работами А.Д. Мышкиса [1], Э. Пинни [2], Р. Беллмана и К.Л. Кука [3], Г.А. Каменского [4], Л.Э. Эльсгольца [5], Дж. Хейла [6].

Простыми представителями обыкновенных уравнений с отклоняющимся аргументом могут служить уравнения

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h))$$

и

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u'(t-h)),$$

где $h > 0$ – заданная постоянная величина.

Возникновение таких уравнений обеспечивается элементом задержки в моделируемой системе, в результате действия которого скорость эволюции системы определяется её состоянием не только в текущий момент времени t, но и в предшествующий момент $t-h$.

Появление "запаздывания" h порой приводит не только к количественным, но и к качественным изменениям постановок задач и свойств их решений. Так, в качестве начального условия для уравнений первого порядка задаётся не только значение $u(t_0)$, как для классических уравнений, а все значения искомой функции $u(t)$ при $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0$.

Вопрос об устойчивости систем, описываемых такими уравнениями, решается на основе анализа корней соответствующих характеристических уравнений, которые оказываются не алгебраическими (как для обычных дифференциальных уравнений), а трансцендентными.

Реальные объекты могут описываться функционально-дифференциальными уравнениями и более сложной структуры. В частности, уравнения могут включать не одно, а несколько дискретных запаздываний, а также "распределённое запаздывание", что приводит к изучению интегро-дифференциальных уравнений, которые в линейном случае могут, например, иметь вид

$$u'(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Данные уравнения описывают системы, обладающие памятью.

Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А.Л. Скубачевским [7, 8], В.В. Власовым [9, 10], А.Н. Зарубиным [11, 12], А.Б. Муравником [13–19], А.В. Разгулиным [20], Л.Е. Россовским [21] и другими авторами.

Специальный класс функционально-дифференциальных уравнений составляют дифференциально-разностные уравнения, теория краевых задач для которых продолжает развиваться. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях, большой вклад в разработку и развитие теории для них принадлежит А.Л. Скубачевскому [7, 8].

В неограниченных областях задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучены в значительно меньшей степени. Обширное исследование таких задач представлено в работах А.Б. Муравника [13–19]. В частности, в работах [17–19] рассматриваются краевые задачи для многомерных эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Параболические уравнения с отклонениями по времени (или с переменными запаздываниями) в старших производных были исследованы в работах В.В. Власова [9]. Краевые задачи в ограниченных областях для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А.Л. Скубачевского и Р.В. Шамина [22], А.Л. Скубачевского и А.М. Селицкого [23]. В случае же неограниченной области задачи для таких уравнений были изучены в монографии А.Б. Муравника [13].

В работе А.Н. Зарубина [12] рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения с запаздыванием по времени, встречающимся при математическом моделировании процессов в средах с фрактальной геометрией. В работе В.В. Власова и Д.А. Медведева [10] гиперболические дифференциально-разностные уравнения были исследованы для случая, когда операторы сдвига также действуют по переменной времени.

В настоящее время, насколько нам известно, имеется незначительное число работ, посвящённых изучению гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих сдвиги по пространственной переменной. В работах [24–28] построены семейства классических решений для двумерных гиперболических уравнений, причём сдвиги по единственной пространственной переменной x, изменяющейся на всей вещественной оси, присутствуют либо в потенциалах, либо в старшей производной.

В данной работе в полупространстве $\{(x,t): x\in\mathbb{R}^n,\ \ t>0\}$ исследуется вопрос существования гладких решений двух гиперболических дифференциально-разностных уравнений, первое из которых содержит суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по каждой из пространственных переменных:

$$u_{tt}(x,t)=L_1u\overset{\text{def}}{=}a^2\sum_{j=1}^{n}u_{x_jx_j}(x,t)+\sum_{j=1}^{n}b_ju_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t),\qquad(1)$$

где a, $b_1,\ \ldots,\ b_n$ и $h_1,\ \ldots,\ h_n$ – заданные вещественные числа.

Второе уравнение содержит сумму дифференциальных операторов и операторов сдвига по каждой из пространственных переменных:

$$u_{tt}(x,t)=L_2u\overset{\text{def}}{=}c^2\sum_{j=1}^{n}u_{x_jx_j}(x,t)-\sum_{j=1}^{n}d_ju(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-l_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t),\qquad(2)$$

где c, $d_1,\ \ldots,\ d_n$ и $l_1,\ \ldots,\ l_n$ – заданные вещественные числа.

Определение 1. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* уравнения (1) (уравнения (2)), если в каждой точке полупространства $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ существуют классические, т.е. определённые в смысле пределов отношений конечных разностей, производные u_{tt} и $u_{x_jx_j}$ $(j=\overline{1,n})$, и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1) (соответственно, соотношение (2)).

Определение 2. Будем называть дифференциально-разностный оператор L *положительным*, если вещественная часть символа этого оператора положительна, т.е. выполняется условие $\operatorname{Re}L(\xi)>0$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора $-L_1$ уравнения (1) равна

$$-\operatorname{Re} L_1(\xi) = |\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j).$$

В дальнейшем будем считать оператор $-L_1$ положительным, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j) > 0. \tag{3}$$

Оператор $-L_2$ уравнения (2) также будем считать положительным в дальнейших рассуждениях, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ будет выполняться условие

$$c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j) > 0. \tag{4}$$

1. Построение решений уравнения (1). Для нахождения решений уравнения используем классическую операционную схему [29, § 10], согласно которой применим формально к уравнению (1) преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi\cdot x}\,dx$ по n-мерной переменной x и перейдём к двойственной переменной ξ.

С учётом формул [30, § 9] $F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f]$ и $F_x[f(x-x_0)] = e^{ix_0\cdot\xi}F_x[f]$ получим для нахождения функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\cos(h_j\xi_j) + i\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\sin(h_j\xi_j)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \tag{6}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём следующие обозначения:

$$\alpha(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\cos(h_j\xi_j), \quad \beta(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\sin(h_j\xi_j).$$

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi))\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi))} = \pm i\sqrt{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi)} = \pm i\rho(\xi)e^{i\varphi(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := [(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi))^2 + \beta^2(\xi)]^{1/4}, \tag{7}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)}. \tag{8}$$

Отметим, что при выполнении условия (3) функции (7) и (8) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, так как подкоренное выражение в формуле (7) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (8) не обращается в нуль.

Таким образом, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t) = C_1(\xi)e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i\sin\varphi(\xi)]} + C_2(\xi)e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i\sin\varphi(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ, для определения которых подставим функцию $\widehat{u}(\xi,t)$ в начальные условия (6). Из системы

$$C_1(\xi)+C_2(\xi)=0, \quad C_1(\xi)-C_2(\xi)=\frac{1}{i\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}$$

находим значения констант

$$C_1(\xi)=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}, \quad C_2(\xi)=-\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}.$$

В результате решение задачи (5), (6) определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t)=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}[e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}-e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}]=$$

$$=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}[e^{-t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{it\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}-e^{t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-it\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}]=$$

$$=\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i(t\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i(t\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)+\varphi(\xi))}]=$$

$$=\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}], \tag{9}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi):=\rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi):=\rho(\xi)\cos\varphi(\xi). \tag{10}$$

Применим теперь к равенству (9) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}]e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi.$$

С учётом чётности функций $\alpha(\xi)$, $\rho(\xi)$, $G_2(\xi)$ и нечётности функций $\beta(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $G_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n_-}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi\bigg]=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}-e^{-tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}]\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[2ie^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+2ie^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)]\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)]\,d\xi.$$

Используем полученное представление и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условия (3) функции*

$$F(x,t;\xi):=e^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right),\tag{11}$$

$$H(x,t;\xi):=e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right),\tag{12}$$

где $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле (8),* $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *– равенствами (10), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.*

Доказательство. Подставим сначала функцию (11) непосредственно в уравнение (1). Для этого найдём производные

$$F_{x_j}(x,t;\xi)=\xi_je^{tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right),$$

$$F_{x_jx_j}(x,t;\xi)=-\xi_j^2e^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi)=G_1(\xi)e^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right),$$

$$F_{tt}(x,t;\xi)=[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)]e^{tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+$$
$$+2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right).\tag{13}$$

Найдём теперь значения выражений $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)$. Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (10), то

$$2G_1(\xi)G_2(\xi)=\rho^2(\xi)\sin(2\varphi(\xi)).$$

Из формулы (8) следует, что $|2\varphi(\xi)|<\pi/2,$ а следовательно, $\cos(2\varphi(\xi))>0.$ Тогда справедливы следующие равенства:

$$\sin(2\varphi(\xi))=\frac{\operatorname{tg}\left(2\varphi(\xi)\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}}=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\right)\right]^{-1/2}=$$

$$=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\left[1+\frac{\beta^2(\xi)}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}\right]^{-1/2}=$$

$$=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\left[\frac{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2+\beta^2(\xi)}\right]^{1/2}=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{|a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

В силу выполнения условия (3) из последнего равенства получим

$$\sin(2\varphi(\xi))=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}{\rho^2(\xi)}=\frac{\beta(\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi)=\beta(\xi).\tag{14}$$

При установленном выше неравенстве $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ и выполнении условия (3) найдём теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)] = -\rho^2(\xi)\cos(2\varphi(\xi)) =$$

$$= -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = -\rho^2(\xi)\left[\frac{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2+\beta^2(\xi)}\right]^{1/2} = -a^2|\xi|^2 - \alpha(\xi). \qquad (15)$$

С учётом найденных выражений (14) и (15) функция (13) примет вид

$$F_{tt}(x,t;\xi) = [-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + \beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)]e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим теперь производные F_{tt} и $F_{x_jx_j}$ в уравнение (1):

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2\sum_{j=1}^n F_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \Big[-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) +$$

$$+\beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + a^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)\Big]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= [-\alpha(\xi)\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + \beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= \Big[-\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\cos(h_j\xi_j)\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) +$$

$$+\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\sin(h_j\xi_j)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)\Big]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi-h_j\xi_j)e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n b_jF_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (1) аналогично проверяется, что и функция (12) удовлетворяет ему в классическом смысле. Теорема доказана.

Следствие 1. *При выполнении условия (3) семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi) := Ae^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + Be^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (8), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ – равенствами (10), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров A, B и ξ.

Остаётся пока открытым вопрос: каким именно условиям должны удовлетворять вещественные коэффициенты $a > 0$, $b_1, \ldots, b_n$ и сдвиги $h_1, \ldots, h_n$ уравнения (1), чтобы условие (3) выполнялось для любого n-мерного параметра ξ?

Запишем условие (3) в следующем виде:

$$a^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2) + b_1\cos(h_1\xi_1)\xi_1^2 + b_2\cos(h_2\xi_2)\xi_2^2 + \ldots + b_n\cos(h_n\xi_n)\xi_n^2 > 0.$$

Оно очевидно будет выполняться для любых сдвигов $h_1, \ldots, h_n$ и любых значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему условию:

$$\max_{j=\overline{1,n}}|b_j| < a^2.$$

2. Построение решений уравнения (2). Для нахождения решений уравнения (2) также применим формально к этому уравнению преобразование Фурье по n-мерной переменной x и получим для отыскания функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j) + i\sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j\xi_j)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

к которому, согласно [30, с. 198], добавим два начальных условия:

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \tag{17}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём следующие обозначения:

$$\lambda(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j), \quad \mu(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j\xi_j).$$

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\mu(\xi))\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\mu(\xi))} = \pm i\sqrt{c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\mu(\xi)} = \pm i\delta(\xi)e^{i\psi(\xi)},$$

где

$$\delta(\xi) := [(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi))^2 + \mu^2(\xi)]^{1/4}, \tag{18}$$

$$\psi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)}. \tag{19}$$

Отметим также, что при выполнении условия (4) функции (18) и (19) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Аналогично решению задачи (5), (6) получаем решение задачи (16) и (17):

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2i\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}], \tag{20}$$

где введены обозначения

$$\widetilde{G}_1(\xi) := \delta(\xi)\sin\psi(\xi), \quad \widetilde{G}_2(\xi) := \delta(\xi)\cos\psi(\xi). \tag{21}$$

Применяя к равенству (20) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и учитывая чётность функций $\lambda(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\widetilde{G}_2(\xi)$ и нечётность функций $\mu(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\widetilde{G}_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j в дальнейших преобразованиях, окончательно получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2i\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}]e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi)} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\delta(\xi)}[e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)]\,d\xi.$$

На основании полученного интегрального представления доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условия (4) функции*

$$\widetilde{F}(x,t;\xi) := e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right), \tag{22}$$

$$\widetilde{H}(x,t;\xi) := e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right), \tag{23}$$

где $\psi(\xi)$ определяется по формуле (19), $\widetilde{G}_1(\xi)$ и $\widetilde{G}_2(\xi)$ – равенствами (21), удовлетворяют уравнению (2) в классическом смысле.

Доказательство. Проверим сначала, что функция (23) удовлетворяет уравнению (2). Для этого вычислим производные

$$\widetilde{H}_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

$$\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

$$\widetilde{H}_t(x,t;\xi) = -\widetilde{G}_1(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)+\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = [\widetilde{G}_1^2(\xi)-\widetilde{G}_2^2(\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right) -$$
$$-\,2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right).$$

Аналогично рассуждениям в теореме 1 находятся значения следующих выражений:

$$2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)=\mu(\xi), \quad \widetilde{G}_1^2(\xi)-\widetilde{G}_2^2(\xi) = -c^2|\xi|^2-\lambda(\xi),$$

с учётом которых выражение для $\widetilde{H}_{tt}$ принимает вид

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = [-(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi))\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)-\mu(\xi)\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Подставим теперь непосредственно производные $\widetilde{H}_{tt}$ и $\widetilde{H}_{x_jx_j}$ в уравнение (2):

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi)-c^2\sum_{j=1}^n \widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \Bigl[-(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi))\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)-$$
$$-\mu(\xi)\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)+c^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)\Bigr]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$
$$= -[\lambda(\xi)\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)+\mu(\xi)\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$
$$= -\Bigl[\sum_{j=1}^n d_j\cos(l_j\xi_j)\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^n d_j\sin(l_j\xi_j)\cos\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right)\Bigr]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^n d_j\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi+l_j\xi_j\right)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^n d_j\widetilde{H}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-l_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (2) аналогично проверяется, что и функция (22) удовлетворяет уравнению (2) в классическом смысле. Теорема доказана.

Следствие 2. *При выполнении условия (4) трёхпараметрическое семейство функций*

$$\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)+\widetilde{B}e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

где $\psi(\xi)$ *определяется по формуле (19),* $\widetilde{G}_1(\xi)$ *и* $\widetilde{G}_2(\xi)$ *– равенствами (21), удовлетворяет уравнению (2) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *и* ξ.

Выясним теперь: существуют ли в действительности такие уравнения (2), классические решения которых нами были получены, чтобы условие (4) выполнялось при любом $\xi\in\mathbb{R}^n$? Ответ положительный. Приведём примеры таких уравнений.

Представим условие (4) в следующем виде:

$$(c^2\xi_1^2+d_1\cos(l_1\xi_1))+(c^2\xi_2^2+d_2\cos(l_2\xi_2))+\ldots+(c^2\xi_n^2+d_n\cos(l_n\xi_n))>0.$$

В работе [27] показано, что каждое из n слагаемых в левой части неравенства, записанного выше, будет положительным, если выполняется условие

$$0<d_jl_j^2\leqslant 2c^2,\quad j=\overline{1,n}.$$

В настоящее время вопрос поиска других примеров уравнений (2), для которых выполняется условие (4), остаётся открытым.

Автор признательна А.Б. Муравнику за постановку задачи и ценные советы и А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики Московского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
2. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley; Los Angeles, 1958.
3. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
4. *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1992.
5. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. 1971.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
8. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 2–122.
9. *Власов В.В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.
10. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Совр. математика. Фунд. направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
11. *Зарубин А.Н.* Математические основы теории управляемых систем. Орел, 1997.
12. *Зарубин А.Н.* Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.
13. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
14. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Math. Model. of Natural Phenomena. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.

15. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Мат. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 5. С. 747–762.
16. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 67. P. 1101–1120.
17. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Мат. заметки. 2020. Т. 108. Вып. 5. С. 764–770.
18. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве // Мат. заметки. 2021. Т. 110. Вып. 1. С. 90–98.
19. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
20. *Разгулин А.В.* Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1078–1091.
21. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.
22. *Shamin R.V., Skubachevskii A.L.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equat. 2001. V. 8. P. 407–424.
23. *Селицкий А.М., Скубачевский А.Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 324–347.
24. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
25. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. 2020. Т. 491. № 2. С. 44–46.
26. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.
27. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.
28. *Зайцева Н.В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.
29. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8. Вып. 6 (58). С. 3–54.
30. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 05.11.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 01.12.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 638–655

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.227+517.958:539.3

ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

© 2022 г. С. А. Назаров

Рассмотрены формально самосопряжённые эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных, порождающие формально положительные операторы и обладающие полиномиальным свойством. Найдены достаточные условия, обеспечивающие существование поверхностных волн Рэлея в задаче Неймана на полупространстве с периодической границей. Приведены примеры конкретных задач математической физики, в которых полученные достаточные условия упрощаются или превращаются в критерий, а также изучены не обслуживаемые общими результатами задачи теории пластин и пьезоэлектрики, причём последняя требует серьёзной модификации подхода.

DOI: 10.31857/S0374064122050053, EDN: CBEIJR

1. Постановка задачи. Пусть Ω – область в полупространстве $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (y,z) : y \in \mathbb{R}^{d-1},\ z \in \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)\}$, $d \geqslant 2$, инвариантная относительно целочисленных сдвигов вдоль осей $y_j = x_j$, $j = \overline{1,d-1}$, и бесконечная в направлении оси $z = x_d$, т.е.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : (y+\alpha, z) \in \Omega\} \quad \text{для любых мультииндексов} \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}, \qquad (1)$$

где $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $\{x \in \mathbb{R}^d : z > R\} \subset \Omega$, $R > 0$.

Границу Γ считаем $(d-1)$-мерной и липшицевой. Введём полубесконечную призму $\Pi = \{x \in \Omega : |y_j| < 1/2,\ j = \overline{1,d-1}\}$ с сечением $\omega = (-1/2,1/2)^{d-1}$ (единичный куб в $\mathbb{R}^{d-1}$) и криволинейным, не обязательно связным, основанием $\varpi = \{x \in \Gamma : y \in \omega\}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}(\nabla)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Pi, \qquad (2)$$

$$\mathcal{B}(x,\nabla)u(x) = 0, \quad x \in \varpi, \qquad (3)$$

с условиями квазипериодичности

$$\partial_j^m u_k(x)|_{x_j=1/2} = e^{i\theta_j}\partial_j^m u_k(x)|_{x_j=-1/2}, \quad x|_{x_j=\pm1/2} \in \partial\Pi,$$

$$j = \overline{1,d-1}, \quad k = \overline{1,K}, \quad m = \overline{0,2t_k-1}. \qquad (4)$$

Поясним принятые обозначения. Прежде всего, $\nabla = (\partial_1,\ldots,\partial_{d-1})^{\mathrm{т}}$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и матричный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\nabla) = \overline{\mathcal{M}(-\nabla)}^{\mathrm{т}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla), \qquad (5)$$

формально самосопряжённый. Здесь $^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования, черта означает комплексное сопряжение, $\mathcal{M}(\nabla)$ – матрица однородных дифференциальных операторов с постоянными (комплексными) коэффициентами, у которой элементы имеют порядки $\operatorname{ord}\mathcal{M}_{nk} = t_k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, где $k = \overline{1,K}$, $n = \overline{1,N}$, а также $K, N \in \mathbb{N}$ и $N \geqslant K$. Сама матрица $\mathcal{M}(\nabla)$ является алгебраически комплектной [1, гл. 3], т.е. существует такое число $\rho_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, что для любой строки $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_K)$, у которой элементы $\mathbf{p}_k$ – однородные полиномы степени $\operatorname{ord}\mathbf{p}_k = t_k + \rho$, причём $\rho \geqslant \rho_{\mathcal{M}}$, найдётся полиномиальная строка $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_N)$, удовлетворяющая равенству

$$\mathbf{p}(\xi) = \mathbf{q}(\xi)\mathcal{M}(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \qquad (6)$$

Это требование обеспечивает неравенство Корна [1, § 3.7.4]

$$\|u; H^{\mathbf{t}}(\Xi)\|^2 \leqslant \mathcal{C}_{\Xi,\mathcal{M}}(\|\mathcal{M}(\nabla)u; L^2(\Xi)\|^2 + \|u; L^2(\Xi)\|^2)$$

$$\text{для} \quad u = (u_1, \ldots, u_k)^{\mathrm{T}} \in H^{\mathbf{t}}(\Xi) = H^{t_1}(\Xi) \times \cdots \times H^{t_K}(\Xi), \tag{7}$$

где фигурируют пространство Лебега $L^2(\Xi)$ с натуральным скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\Xi$ и пространство Соболева $H^l(\Xi)$ порядка $l \in \mathbb{N}$, снабжённое стандартной нормой, а $\Xi \in \mathbb{R}^d$ – произвольная область с $(d-1)$-мерной липшицевой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\overline{\Xi} = \Xi \bigcup \partial\Xi$. Разумеется, постоянная Корна $C_{\Xi,\mathcal{M}}$ в неравенстве (7) не зависит от вектор-функции $u \in H^{\mathbf{t}}(\Xi)$. Справедлива формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_\Xi = a(u, v; \Xi) + (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\partial\Xi}, \tag{8}$$

в которой $v = (v_1, \ldots, v_K)^{\mathrm{T}} \in H^{\mathbf{t}}(\Xi)$, $u \in H^{t_\bullet + \mathbf{t}}(\Xi)$ и $t_\bullet = \max\{t_1, \ldots, t_K\}$. Кроме того, $\mathcal{D}(x, \nabla)$ – система Дирихле на $\partial\Xi$, $\operatorname{ord}\mathcal{D}_{pk} \leqslant t_k - 1$ (см., [2, гл. 2, § 2]), а $(T \times K)$-матрица $\mathcal{N}(x, \nabla)$ – оператор краевых условий Неймана (3), причём $T = t_1 + \ldots + t_K$. Предположим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – эрмитовы положительно определённые числовые матрицы с размерами $N \times N$ и $K \times K$ соответственно; тогда полуторалинейная форма

$$a(u, v; \Xi) = (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)u, \mathcal{M}(\nabla)v)_\Xi \tag{9}$$

оказывается эрмитовой и положительной, а вариационная постановка задачи (2)–(4) со спектральным параметром λ и параметром Флоке $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) \in [-\pi, \pi)^{d-1}$

$$a(u, v; \Pi) = \lambda(\mathcal{B}u, v)_\Pi \quad \text{для всех} \quad v \in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{10}$$

осуществляется на пространстве $H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ вектор-функций $u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi)$, для которых выполнены устойчивые $(p = \overline{0, t_k - 1})$ условия квазипериодичности (4) (используем терминологию монографии [2, гл. 2])

$$H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) = \{u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi) : \partial_j^m u_k(x)|_{x_j = 1/2} = e^{i\theta_j}\partial_j^m u_k(x)|_{x_j = -1/2} \quad \text{при} \quad x|_{x_j = \pm 1/2} \in \partial\Pi,$$

$$j = \overline{1, d-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{0, t_k - 1}\}. \tag{11}$$

При этом краевые условия Неймана (3) и естественные $(p = \overline{t_k, 2t_k - 1})$ условия квазипериодичности (3) для гладкого решения $H^{t_\bullet + \mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ восстанавливаются из интегрального тождества (10) при помощи формулы Грина (8) (см., например, [2, гл. 2; 3, гл. 2]).

2. Волны Рэлея. Пусть при каких-то $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1}$ у задачи (9) есть нетривиальное решение $u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi)$. Обычным способом (см., например, монографии [4, 5]) определим вектор-функцию

$$\Omega \ni x \mapsto \mathbf{u}(x) = e^{i(\theta_1[y_1] + \ldots + \theta_{d-1}[y_{d-1}])}u(y_1 - [y_1], \ldots, y_{d-1} - [y_{d-1}], z), \tag{12}$$

где $[b]$ – целая часть числа $b \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что благодаря условиям квазипериодичности, включённым в определение (11), вектор-функция (12) попадает в пространство $H^{\mathbf{t}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi})$. Более того, в п. 4 будет проверено, что $\mathbf{u}$ – функция, бесконечно дифференцируемая внутри области Ω и экспоненциально затухающая при $z \to +\infty$. Таким образом, при дополнительном предположении о гладкости поверхности Γ эта вектор-функция удовлетворяет дифференциальной задаче

$$\mathcal{L}(\nabla)\mathbf{u}(x) = \lambda\mathbf{u}(x), \qquad x \in \Omega,$$

$$\mathcal{B}(x, \nabla)\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{13}$$

и локализована около границы, т.е. обладает всеми свойствами классических волн Рэлея.

Подобные специфические “поверхностные волны” в деформируемых средах были обнаружены впервые лордом Рэлеем [6], а затем в иных вариантах Г. Лэмбом [7] и Р. Стоунли [8]. Сопутствующие физические явления нашли разнообразные применения в сейсмологии и сейсморазведке, в методах неразрушающего контроля приповерхностных повреждений и прочности соединений и многих других прикладных дисциплинах. Поэтому количество опубликованных исследований в этом направлении, выполненных на разных уровнях строгости, огромно – упомянем несколько монографий [9–11] и работ [12–20], а также обзорную статью [21].

Большинство результатов, особенно для векторных задач, например, в теории упругости, получены при помощи аналитических методов в случае прямых границ и вычислительных методов в случае осциллирующих. Далее, как и в [16–18, 20], применяются вариационные методы спектрального анализа, годящиеся для произвольных периодических границ и широкого класса систем дифференциальных уравнений. Вместе с тем при доказательстве существования экспоненциально затухающей при $z \to +\infty$ волны (12) задействованные методы не предоставляют сколь-нибудь точной информации о её строении, т.е. исследование спектральных характеристик найденных рэлеевских волн оставлено за рамками данной работы.

В следующих двух пунктах изучается задача (2)–(4) при $\lambda = 0,$ для которой установлены теоремы 1 и 2, позволяющие сделать выводы о непрерывном спектре задачи (10). В п. 5 (теорема 5) доказываются достаточные условия непустоты дискретного спектра в случае $\theta \neq 0$ (при $\theta = 0$ он заведомо пуст). В п. 6 полученный результат применяется к скалярной и векторным задачам об акустической и упругих средах, а в п. 7 рассматриваются две механические задачи, не охватываемые теоремой 5 и требующие модификации подхода, причём для рассмотренной пьезоэлектрической задачи (п. 7, 5°) результат и способ его вывода существенно отличаются от, например, задачи теории упругости (п. 6, 2°).

3. Полиномиальное свойство и спектр. В пространстве Соболева $H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ введём эквивалентную норму

$$|||u|||_\theta = (a(u,u;\Pi) + (\mathcal{B}u,u)_\Pi)^{1/2}. \tag{14}$$

Требуемая оценка

$$\|u; H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\| \leqslant c_\theta |||u|||_\theta \tag{15}$$

обеспечена применением неравенства Корна (7) в усечённой призме $\Pi(R) = \{x \in \Pi : z < R\}$ и кубах $Q_{R+m} = (R+m, R+m+1) \times (-1/2, 1/2),$ $m \in \mathbb{N}_0.$ Просуммировав эти неравенства, придём к соотношению

$$\|u; H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\|^2 \leqslant \max\{\mathcal{C}_{\Pi(R),\mathcal{M}}, \mathcal{C}_{Q_0,\mathcal{M}}\}(\|\mathcal{M}(\nabla)u; L^2(\Pi)\|^2 + \|u; L^2(\Pi)\|^2)$$

и, наконец, учтём положительную определённость матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в формулах (9) и (14). Неравенство, обратное для (15), очевидно.

Гильбертово пространство (11), снабжённое скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_\theta = a(u,v;\Pi) + (\mathcal{B}u, v)_\Pi, \tag{16}$$

обозначим через $\mathcal{H}_\theta$ и введём в нем положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{T}_\theta$ при помощи формулы

$$\langle \mathcal{T}_\theta u, v\rangle_\theta = (\mathcal{B}u, v)_\Pi \quad \text{при всех} \quad u, v \in \mathcal{H}_\theta. \tag{17}$$

Его норма не превосходит единицы. Благодаря определениям (14) и (16), (17) вариационная задача (10) оказывается эквивалентной абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}_\theta u = \tau u \quad \text{в пространстве } \mathcal{H}_\theta$$

с новым спектральным параметром

$$\tau = (1+\lambda)^{-1}. \tag{18}$$

По спектру $\Sigma_\theta \subset [0,1]$ оператора $\mathcal{T}_\theta$ определяем спектр задачи (10) (или (2)–(4) в случае гладкой границы Γ)

$$\sigma_\theta = \{\lambda : (1+\lambda)^{-1} \in \Sigma_\theta\} \subset \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty). \tag{19}$$

Более того, связь (18) спектральных параметров передает все качества (дискретность, непрерывность и проч.) компонент спектра $\mathcal{T}_\theta$ компонентам спектра σ_θ.

Изучим спектр (19), используя информацию о задаче (10), полученную на основе теории эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность [22, гл. 5; 23, § 3] и полиномиального свойства [23–25] полуторалинейной формы (19):

$$a(u,u;\Xi)=0, \quad u\in H^{\mathbf{t}}(\Xi) \quad \Leftrightarrow \quad u\in \mathcal{P}|_\Xi. \tag{20}$$

Здесь $\mathcal{P}$ – конечномерное подпространство векторных полиномов. По причине алгебраической комплектности матрицы $\mathcal{M}(\nabla)$ справедливо равенство [23; предложение 1.6]

$$\mathcal{P}=\{p=(p_1,\ldots,p_K)^{\mathrm{T}}:\mathcal{M}(\nabla)p(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^d\}. \tag{21}$$

Подчеркнём, что в линеале (21) могут быть и полиномы $p=(p_1,\ldots,p_K)^{\mathrm{T}}$, у которых $\operatorname{ord}p_k\geqslant t_k$ (см. п. 6, 2°).

Высказывание (21) предоставляет много полезных сведений о задаче (10), в частности, следующее утверждение [23; теоремы 1.9, 3.4 и 5.1], пояснения к проверке которого приведено в следующем пункте.

Теорема 1. *При $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\}$ задача*

$$a(u,v;\Pi)=f(v) \quad \textit{для всех} \quad v\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{22}$$

с непрерывным (анти)линейным функционалом $f\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)^*$ имеет единственное решение $u\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ и верна оценка

$$\|u;H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\|\leqslant c_\theta\|f;H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)^*\|,$$

в которой множитель c_θ не зависит от f, но неограниченно возрастает при $\theta\to 0\in\mathbb{R}^{d-1}$.

Теперь выводим первичную информацию о спектре (19), который представим как дизъюнктное объединение существенного σ^e_θ и дискретного σ^d_θ спектров.

Следствие 1. *1) При $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\}$ непрерывный спектр σ^c_θ совпадает с существенным σ^e_θ и приобретает положительную точку отсечки $\lambda^\dagger_\theta$, а значит, дискретный спектр σ^d_θ может появиться только на интервале $(0,\lambda^\dagger_\theta)$.*

2) При $\theta=0$ спектр $\sigma_0=\sigma^e_0=\sigma^c_0$ занимает всю замкнутую положительную полуось $\overline{\mathbb{R}_+}$ и поэтому $\sigma^d_0=\varnothing$.

Доказательство. Поскольку второе слагаемое в левой части интегрального тождества

$$a(u,v;\Pi)-\lambda(\mathcal{B}u,v)_\Pi=f(v) \quad \text{для всех} \quad v\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{23}$$

порождает исчезающее при $\lambda\to 0$ непрерывное возмущение оператора задачи (22), свойство однозначной разрешимости из теоремы 1 передается задаче (23) при $\lambda\in[0,\lambda^\#_\theta)$ и некотором $\lambda^\#_\theta>0$. Согласно общим результатам [26, 27] (см. также [22, гл. 1, § 2 и замечание 3.1.5]) задача (10) не имеет собственных чисел бесконечной кратности, т.е. $\sigma^c_\theta=\sigma^e_\theta$ и, кроме того, σ^c_θ – луч $[\lambda^\dagger_\theta,+\infty)$, т.е. односвязное множество, причём, разумеется, $\lambda^\dagger_\theta\geqslant\lambda^\#_\theta>0$.

По поводу второго утверждения, означающего, что $\lambda^\dagger_0=0$, см. теорему 3.

4. Экспоненциальные и полиномиальные решения; разрешимость задачи при $\boldsymbol{\theta=0}$. Пусть носитель функционала f из правой части интегрального тождества (23) компактный и $\operatorname{supp}f\subset\overline{\Pi(R)}$. Тогда решение $u\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ бесконечно дифференцируемо на множестве $\overline{\Pi\setminus\Pi(R+\delta)}$ при любом $\delta>0$. В самом деле, гладкость внутри призмы $\{x\in\Pi: z>R\}$ обеспечена локальными оценками (см. монографию [2, § 3] и работы [28, 29]) решений эллиптических*) систем. Выберем какой-либо индекс $j\in\{1,\ldots,d-1\}$, для определённости $j=1$, и рассмотрим вектор-функцию

$$\widehat{u}(x)=\begin{cases} u(x) & \text{при} \;\; x_1\in(-1/2,1/2),\\ e^{\pm i\theta_1}u(x_1\mp 1,x') & \text{при} \;\; x_1\mp 1\in(-1/2,1/2),\end{cases}$$

*) Эллиптичность оператора $\mathcal{L}(\nabla)$ вытекает из полиномиального свойства (20); см. [23, гл. 5, § 1].

где $x' = (x_2, \ldots, x_{d-1}) \in (-1/2, 1/2)^{d-2}$ и $x_d > R$. В силу условий квазипериодичности, включённых в определение пространства (11), вектор-функция $\widehat{u}$ попадает в пространство $H^{\mathbf{t}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi_1(R)})$, т.е. упомянутые выше локальные оценки показывают, что она гладкая внутри расширенной призмы $\Pi_{\boxminus}(R) = (-3/2, 3/2) \times (-1/2, 1/2)^{d-2} \times (R, +\infty)$, а значит, в $\Pi(R)$, вплоть до граней $\{\pm 1/2\} \times (-1/2, 1/2)^{d-2} \times (R, +\infty)$. Перебирая по очереди остальные индексы j, приходим к нужному утверждению о гладкости.

Приведём некоторые сведения из теории эллиптических краевых задач в цилиндрических областях [22, гл. 5; 23, § 3; 27]. С задачей (2)–(4) в бесконечном цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$ свяжем операторный пучок

$$\mathbb{R} \ni \mu \mapsto \mathfrak{A}^\lambda_\theta(\mu) = \mathcal{L}(\nabla_y, \mu) - \lambda \mathcal{B} : H^{l+\mathbf{t}}_\theta(\omega) \to H^{l-\mathbf{t}}_\theta(\omega), \tag{24}$$

где $l \geqslant t_\bullet$ и $H^l_\theta(\omega)$ – пространство Соболева функций, подчинённых условиям квазипериодичности на противоположных гранях единичного куба ω

$$\partial^m_j U_k(y)|_{y_j=1/2} = e^{i\theta_j} \partial^m_j U_k(y)|_{y_j=-1/2},$$
$$y|_{y_j=\pm 1/2} \in \partial\omega, \quad j = \overline{1, d-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{0, l-1}. \tag{25}$$

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}(\nabla)$ спектр пучка (24) состоит из нормальных собственных чисел (без конечных точек сгущения), расположенных в объединении полосы $\{\mu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\mu| \leqslant \leqslant \beta^0_\lambda\}$ и двойного угла $\{\mu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\mu| \leqslant \beta^1_\lambda |\operatorname{Im}\mu|\}$, где β^0_λ и β^1_λ – положительные числа (см. [26; 30, гл. 1; 22, гл. 1]). Каждому собственному числу μ отвечает каноническая система жордановых цепочек

$$\{U^{p,q} : p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}\}, \tag{26}$$

которая состоит из собственных $(q = 0)$ и присоединённых $(q > 0)$ векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathfrak{A}^\lambda_\theta(\mu) U^{p,q} = -\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathfrak{A}^\lambda_\theta}{d\mu^j}(\mu) U^{p,q-j}, \quad p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}. \tag{27}$$

При этом $\varkappa^g$ – геометрическая, а $\varkappa^a_1, \ldots, \varkappa^a_{\varkappa^g}$ – частные алгебраические кратности собственного числа μ; $\varkappa^a_1 + \ldots + \varkappa^a_{\varkappa^g}$ – полная его кратность, и уравнения (27) с $q = \varkappa^a_p$ решений не имеют (цепочки непродолжимы). По системе (26) выстраиваются экспоненциальные решения задачи (2)–(4) в цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{U}^{p,q}(y, z) = e^{\mu z} \sum_{j=0}^{q} \frac{z^j}{j!} U^{p,q-j}(y), \quad p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}. \tag{28}$$

Изучим экспоненциальные решения при разных значениях параметра Флоке $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1}$. Начнём со случая $\theta = 0$ и заметим, что среди полиномов из линеала (20) только не зависящие от переменных $y_1, \ldots, y_{d-1}$ удовлетворяют на противоположных гранях призмы Π условиям "чистой" периодичности, в которые превращаются условия (25) при $\theta = 0$.

Лемма 1. *В линеале*

$$\mathcal{P}^0 = \{p \in \mathcal{P} : \textit{полином } p \textit{ зависит только от переменной } z\} \tag{29}$$

можно ввести базис

$$p^{k,q}(z) = \mathbf{e}_k \frac{z^q}{q!}, \quad k = \overline{1, K}, \quad q = \overline{0, t_k - 1}, \tag{30}$$

где $\mathbf{e}_k = (\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{K,k})^{\mathrm{т}}$ *– орт в пространстве* $\mathbb{R}^K$, *а* $\delta_{j,k}$ *– символ Кронекера.*

Доказательство. Обратим внимание на важное свойство: $\partial_z p \in \mathcal{P}$ для всякого векторного полинома $p \in \mathcal{P}$ по причине инвариантности формы (9) относительно сдвигов вдоль оси z. Ввиду строения матричного дифференциального оператора $\mathcal{M}(\nabla)$ (см. п. 1) линейная оболочка полиномов (30) содержится в $\mathcal{P}^0$. Допустим, что в линеале (29) нашелся полином

$$P(z) = \left(a_1\frac{z^{t_1}}{t_1!}, \dots, a_K\frac{z^{t_K}}{t_K!}\right)^{\mathrm{T}}, \quad a = (a_1, \dots, a_K)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^K, \quad |a| = 1. \tag{31}$$

Очевидно, что $\mathcal{M}(\mathbf{e}_d\partial_z) = \mathcal{M}(\mathbf{e}_d)Z(\partial_z)$ при $Z(\zeta) = \operatorname{diag}\{\zeta^{t_1}, \dots, \zeta^{t_K}\}$, т.е.

$$0 = \mathcal{M}(\nabla)P(z) = \mathcal{M}(\mathbf{e}_d)a.$$

Требование (6), применённое к полиному (31), даёт такой векторный полином $\mathbf{q}$, что

$$\xi_d^{\rho_\mathcal{M}}(\overline{a_1}\xi_d^{t_1}, \dots, \overline{a_K}\xi_d^{t_K}) = \mathbf{q}(\xi)\mathcal{M}(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{32}$$

Положим $\xi_1 = \ldots = \xi_{d-1} = 0$ в равенстве (32) и умножим результат справа на $Z(\xi_d)^{-1}a$. В итоге придём к противоречию, доказыващему лемму:

$$\xi_d^{\rho_\mathcal{M}}|a|^2 = \mathbf{q}(\mathbf{e}_d\xi_d)\mathcal{M}(\mathbf{e}_d\xi_d)Z(\xi_d)^{-1}a = \mathbf{q}(\mathbf{e}_d\xi_d)\mathcal{M}(\mathbf{e}_d)a = 0.$$

Следующее утверждение – конкретизация предложения 1 [25] (см. также обзор [23, предложение 3.2]).

Теорема 2. *Существует такое $\gamma_0 > 0$, что у пучка (24) с параметрами $\theta = 0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ и $\lambda = 0$ в полосе $\{\mu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\mu| < \gamma_0\}$ есть только одно собственное число $\mu = 0$ с полной алгебраической кратностью $2T = 2(t_1 + \ldots + t_K)$. Ему отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\mathbf{e}_k, 0, \dots, 0, U^{k,t_k}, \dots, U^{k,2t_k-1}\}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{33}$$

у которых явно указаны первые t_k элементов, а остальные – суть решения уравнений (27) при $\theta = 0$, $\lambda = 0$ и $q = \overline{t_k, 2t_k - 1}$.

Первые t_k элементов жордановой цепочки (33) предоставляют по формуле (28) элементы базиса (30) в линеале (29). Поскольку оператор краевых условий Неймана (3), взятый из формулы Грина (8), представим в виде $\mathcal{N}(x, \nabla) = \mathcal{N}^{\#}(x, \nabla)\mathcal{M}(\nabla)$ с подходящим матричным дифференциальным оператором $\mathcal{N}^{\#}(x, \nabla)$, согласно соотношению (21) справедливы равенства

$$\mathcal{N}(x, \nabla)p^{k,q}(x) = 0, \quad x \in \varpi, \quad k = \overline{1, K}, \quad q = \overline{0, t_k - 1}.$$

Таким образом, полиномы (30) удовлетворяют всей задаче (2)–(4) при $\theta = 0$, что и поясняет очередное утверждение, доказанное в [23, п. 3, § 5] и [25, § 5].

Теорема 3. *Если при некотором $\gamma \in (0, \gamma_0)$ функционал*

$$H_0^{\mathbf{t}}(\Pi) \ni v \mapsto f^\gamma(v) = f(e^{\gamma z}v) \tag{34}$$

оказался непрерывным, то задача (22) с $\theta = 0$ имеет решение $u \in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ в том и только в том случае, когда выполнены T условий ортогональности

$$f(p) = 0 \quad \textit{для любого} \quad p \in \mathcal{P}^0.$$

Кроме того, это решение единственное и для него верны включение $e^{\gamma z}u \in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ и оценка

$$\|e^{\gamma z}u; H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)\| \leqslant c_\gamma\|f^\gamma; H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)^*\|.$$

При этом число $\gamma_0 > 0$ взято из теоремы 2, а множитель c_γ не зависит от функционала (34), но неограниченно возрастает при $\gamma \to +0$.

Переформулируем результат для неоднородной задачи Неймана

$$\mathcal{L}(\nabla)u(x) = f(x), \quad x \in \Pi,$$
$$\mathcal{N}(x, \nabla)u(x) = g(x), \quad x \in \varpi, \tag{35}$$

в случае периодических $(\theta = 0)$ гладких правых частей f, g и торца ϖ. При экспоненциальном затухании вектор-функции f задача (35) с условиями периодичности (4), $\theta = 0$, имеет периодическое гладкое решение $u \in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ тогда и только тогда, когда справедливы условия ортогональности

$$(f, p)_\Pi + (g, \mathcal{D}p)_\varpi = 0 \quad \text{при каждом} \quad p \in \mathcal{P}^0,$$

вытекающие из формулы Грина с пробными вектор-функциями $v \in \mathcal{P}^0$. Вместе с тем, как показывает последнее пояснение в формулировке теоремы 3, предельный переход $\gamma \to +0$ невозможен, и действительно оператор задачи (35), (4), $\theta = 0$, в пространстве $H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ теряет фредгольмовость, так как линеал $\mathcal{P}^0$ содержит по крайней мере все постоянные векторы, из которых нетрудно соорудить сингулярную последовательность Вейля [31, гл. 9, § 1] для оператора $\mathcal{T}_0$ в точке $\tau = 1$, а значит, $\Sigma_0^e = [0, 1]$ и $\sigma_0^c = [0, +\infty)$ согласно связи (18) спектральных параметров τ и λ.

Теорема 1 придает иные свойства оператору $\mathcal{T}_\theta$ при $\theta \neq 0$ – он становится изоморфизмом, что согласуется со следующим утверждением, вытекающим из предложения 3.2 (1) [23], поскольку задача (22) с условиями квазипериодичности остаётся самосопряжённой, но ни один полином из линеала (21) не удовлетворяет названным условиям при $\theta \neq 0$.

Теорема 4. *При $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1} \setminus \{0\}$ найдётся такое положительное число $\gamma(\theta)$, что полоса $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,\mu| < \gamma(\theta)\}$ свободна от спектра пучка $\mu \mapsto \mathfrak{A}_\theta^0(\mu)$. При этом $\gamma(\theta) \to +0$ в случае $\theta \to 0 \in \mathbb{R}^{d-1}$.*

Следствие 2. *При $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1} \setminus \{0\}$ и $|\gamma| < \gamma(\theta)$, где число $\gamma(\theta) > 0$ взято из теоремы 4, решение $u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ задачи (22) с правой частью f, подчинённой требованию (34), удовлетворяет включению $e^{\gamma z}u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ и оценке*

$$\|e^{\gamma z}u; H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\| \leqslant c_\gamma \|f^\gamma; H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)^*\|.$$

Доказательство выводится из теоремы 4 при помощи общих результатов работы [27] (см. также [22, гл. 3 и 5] и [23, § 3]), однако при малом γ может быть получено элементарными средствами. В качестве пробной вектор-функции в интегральном тождестве (22) возьмём произведение $v^\gamma = e^{\gamma z}v \in C_c^\infty(\overline{\Pi})^K \bigcap H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$. Ввиду компактности её носителя можно сделать замену неизвестной $u \mapsto u^\gamma = e^{\gamma z}u$. В результате интегральное тождество принимает вид

$$(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla - \gamma \mathbf{e}_d)u^\gamma, \mathcal{M}(\nabla + \gamma \mathbf{e}_d)v^\gamma)_\Pi = f(v^\gamma). \tag{36}$$

По замыканию формула (36) верна при $v^\gamma \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$, а её левая часть порождает малое, с нормой $O(|\gamma|)$, возмущение оператора задачи (22), а значит, при достаточно малом $|\gamma|$ видоизменённая задача остаётся однозначно разрешимой, что и требовалось проверить. Остаётся отметить, что упрощённый подход не позволяет приблизить весовой показатель γ к критической величине $\gamma(\theta)$.

Поскольку оператор вложения $\mathcal{H}_\theta \subset L^2(\Pi)^K$ некомпактный, это же свойство присуще оператору $\mathcal{T}_\theta$, заданному формулой (18). Следовательно, по теореме 9.2.1 из [31] существенный спектр Σ_θ^e не может состоять из единственной точки $\tau = 0$. Таким образом, найдутся точки $\tau \in (0, 1)$ и $\lambda = \tau^{-1} - 1 > 0$, при которых оператор $\mathcal{T}_\theta - \tau$ и оператор $\mathcal{O}_\theta : H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi) \to$ $\to H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)^*$ задачи (23) теряют фредгольмовость. Пусть $\lambda = \lambda_\theta^\dagger$ – наименьшая из таких точек; она положительна при $\theta \neq 0$ в силу теоремы 1. Согласно теории краевых задач в цилиндрических областях [22, гл. 3 и 5; 27] у пучка (24) с пороговым параметром $\lambda = \lambda_\theta^\dagger$ есть собственное число $\mu = i\zeta$ на мнимой оси, которому отвечает экспоненциальное решение задачи (2)–(4) в цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$

$$w(y, z) = e^{i\zeta z}W(y), \tag{37}$$

где W – соответствующая собственная вектор-функция, удовлетворяющая условиям квазипериодичности (25). Таких собственных чисел может быть несколько – они возникают в результате смещения на мнимую ось из полуплоскостей $\{\mu \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} \mu > 0\}$ собственных чисел пучка $\mathfrak{A}_\theta^\lambda$ при $\lambda \to \lambda_\theta^\dagger - 0$. Хотя бы одно из них остаётся на мнимой оси при $\lambda > \lambda_\theta^\dagger$, так как иначе непрерывный спектр теряет связность (см. [22, гл. 1, § 2] и доказательство следствия 1 [26]). Согласно [32] последнее возможно лишь в том случае, когда у собственного вектора W есть присоединённый W^1, который находится из уравнения (27) при $q = 1$, принимающего вид

$$(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W^1, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)V)_\omega - \lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}W^1, V)_\omega =$$

$$= -(\mathcal{A}\mathcal{M}'(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)V)_\omega - (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}'(\nabla_y, i\zeta)V)_\omega \tag{38}$$

для каждого вектора $V \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\omega)$. Здесь $\mathcal{M}'(\nabla_y, \mu)$ – производная матрицы $\mathcal{M}(\nabla_y, \mu)$ по последнему аргументу. Одно из условий разрешимости уравнения (38) получается подстановкой $V = W$ в его правую часть:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\mathcal{M}'(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W)_\omega = 0. \tag{39}$$

Далее оперируем именно той волной (37), для которой выполнено соотношение (39).

5. Непустота дискретного спектра. Согласно максиминимальному принципу [31, теорема 10.2.2] нижняя грань $-\underline{\Sigma_\theta}$ спектра оператора $-\mathcal{T}_\theta$ (со знаком минус, но полуограниченного снизу) вычисляется по формуле

$$-\underline{\Sigma_\theta} = \inf_{u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}} \frac{-\langle \mathcal{T}_\theta u, u\rangle_\theta}{\langle u, u\rangle_\theta}. \tag{40}$$

При учёте определений (14), (16), (17) и связи (18) спектральных параметров находим, что

$$-\frac{1}{1 + \underline{\sigma_\theta}} = \inf_{u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}} \frac{-(\mathcal{B}u, u)_\Pi}{a(u, u; \Pi) + (\mathcal{B}u, u)_\Pi} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\sigma_\theta} = \inf_{u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}} \frac{a(u, u; \Pi)}{(\mathcal{B}u, u)_\Pi}. \tag{41}$$

Здесь $\underline{\sigma_\theta}$ – нижняя грань спектра задачи (10), которая (грань) попадает на интервал $(0, \lambda_\theta^\dagger)$ и тем самым в дискретный спектр σ_θ^d в том и только в том случае, если существует пробная вектор-функция $\varphi \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$, для которой справедливо неравенство

$$a(\varphi, \varphi; \Pi) - \lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}\varphi, \varphi)_\Pi < 0. \tag{42}$$

Воспользуемся приёмом из работы [33] и при $\theta \neq 0$ положим

$$\varphi^\varepsilon(y, z) = e^{(i\zeta - \varepsilon)z}W(y) + \sqrt{\varepsilon}\psi(x), \tag{43}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\{i\zeta, W\}$ – собственная пара пучка (24) при $\lambda = \lambda_\theta^\dagger$, породившая волну (37) и удовлетворяющая требованию (39), а ψ – вектор-функция из пространства $C_c^\infty(\omega \times \mathbb{R})^K$ с малым носителем вокруг какой-то точки $x^0 \in \varpi$. Имеем

$$(\mathcal{B}\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)_\Pi = (\mathcal{B}(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W + \sqrt{\varepsilon}\psi), e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W + \sqrt{\varepsilon}\psi)_{\Pi(R)} +$$

$$+ \int_R^\infty (\mathcal{B}W, W)_\omega e^{-2\varepsilon z}\, dz = \frac{1}{2\varepsilon}e^{-2\varepsilon R}(\mathcal{B}W, W)_\omega + (\mathcal{B}w, w)_{\Pi(R)} + 2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}(\mathcal{B}w, \psi)_{\Pi(R)} + O(\varepsilon). \tag{44}$$

Аналогично поступим с первым слагаемым из (42):

$$a(\varphi^\varepsilon,\varphi^\varepsilon;\Pi)=(\mathcal{AM}(\nabla)(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi),\mathcal{M}(\nabla)(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi))_{\Pi(R)}+$$

$$+\int\limits_R^\infty(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta-\varepsilon)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta-\varepsilon)W)_\omega e^{-2\varepsilon z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}e^{-2\varepsilon R}(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega+e^{-2\varepsilon R}\operatorname{Re}(\mathcal{AM}'(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega+$$

$$+(\mathcal{AM}(\nabla)w,\mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)}+2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}(\mathcal{AM}(\nabla)w,\mathcal{M}(\nabla)\psi)_{\Pi(R)}+O(\varepsilon). \quad (45)$$

Подставим выражения (45) и (44) в левую часть соотношения (42) с пробной вектор-функцией (43) и заметим, что слагаемые порядка ε^{-1} взаимно уничтожаются по причине равенства

$$(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega=\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}W,W)_\omega, \quad (46)$$

которое выводится интегрированием по частям из уравнения $\mathfrak{A}_\theta^{\lambda_\theta^\dagger}(i\zeta)W=0,$ умноженного скалярно в $L^2(\omega)^K$ на собственный вектор $W.$ Ещё одно упрощение происходит от равенства (39). В результате записываем соотношение (42) в виде

$$I_R^0(w)+2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}I_R^1(w,\psi)<-C\varepsilon \quad (47)$$

с некоторым множителем $C>0$ и ингредиентами

$$I_R^0(w)=a(w,w;\Pi(R))-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}w,w)_{\Pi(R)},$$

$$I_R^1(w,\psi)=a(w,\psi;\Pi(R))-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}w,\psi)_{\Pi(R)}. \quad (48)$$

Размер R подобран так, что $\{x\in\Pi: z>R\}=\omega\times(R,+\infty),$ и величина (48) в силу формулы (46) не изменяется при росте $R.$ Кроме того, ввиду малости носителя вектор-функции ψ и формулы Грина (8) справедливо равенство

$$I_R^1(w,\psi)=(\mathcal{N}w,\mathcal{D}\psi)_\varpi. \quad (49)$$

Подведём итог проделанным выкладкам в основном утверждении данной статьи.

Теорема 5. *Пусть волна (37), построенная по собственной паре* $\{i\zeta,W\}$ *пучка (24) с параметрами* $\lambda=\lambda_\theta^\dagger$ *и* $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\},$ *удовлетворяет соотношению (39). Тогда дискретный спектр* σ_θ^d *задачи (10) (или (2)–(4) в дифференциальной постановке) заведомо не пуст в следующих двух случаях:*

1) величина (49) отрицательна;

2) справедливо равенство $I_R^0(w)=0$ *и вектор-функция* $x\mapsto\mathcal{N}(x,\nabla)w(x)$ *не вырождается хотя бы в одной точке торца* ϖ *полуполосы* $\Pi.$

Доказательство. Утверждение 1 сомнений не вызывает: достаточно взять ε малым, соблюдая тем самым неравенство (47). В утверждении 2 благодаря общим свойствам системы Дирихле (см. [2, гл. 2, § 2]) подбираем точку $x^0\in\varpi,$ для которой $b:=\mathcal{N}(x^0,\nabla)w(x^0)\in\in\mathbb{C}^T\setminus\{0\},$ и такую пробную вектор-функцию $\psi,$ что $b^{\mathrm{T}}\overline{\mathcal{D}(x^0,\nabla)\psi(x^0)}<0.$ В итоге при малом $\varepsilon>0$ вещественная часть величины $I_R^1(w,\psi)$ стала отрицательной, а значит, выполнено неравенство (47), т.е., как и в первом случае, согласно минимальному принципу (40) и (41) получаем, что $\underline{\sigma_\theta}<\lambda_\theta^\dagger$ и $\underline{\sigma_\theta}\in\sigma_\theta^d.$ Именно в этом и требовалось убедиться.

Теорема 5 предоставляет достаточные условия непустоты дискретного спектра задачи (2)–(4) в призме Π при $\theta\neq0$ и существования волн Рэлея (12) в полупространстве Ω с периодической границей Γ (см. формулы (1)). Далее будут приведены конкретные задачи, в которых полученные достаточные условия оказываются полезными.

6. Примеры.

1°. *Скалярный оператор второго порядка.* Воспроизведём результат [33] в чуть более общей постановке. Пусть $K = 1$, $N = d \geqslant 2$, $\mathcal{M}(\nabla) = \nabla$ и $\mathcal{B} = 1$. При помощи аффинного преобразования сведём оператор (11) к виду $-\nabla^{\mathrm{т}} \mathcal{A}^0 \nabla$, где $\mathcal{A}^0$ – диагональная матрица $\operatorname{diag}\{a_1^0, \ldots, a_d^0\}$ и $a_j^0 > 0$. Простое неравенство

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{dV}{dt}(t)\right|^2 dt \geqslant \theta^2 \int\limits_{-1/2}^{1/2} |V(t)|^2\, dt \tag{50}$$

для всех $V \in H^1(-1/2, 1/2)$, $V(1/2) = e^{i\theta} V(-1/2)$, $|\theta| \leqslant \pi$, и формула

$$w(y, z) = e^{i\theta_1 y_1} \times \cdots \times e^{i\theta_{d-1} y_{d-1}}$$

для волны (37) показывают, что, во-первых, $\lambda = a_1^0 \theta_1^2 + \ldots + a_{d-1}^0 \theta_{d-1}^2$ и, во-вторых, величина (48) равна нулю, так как $\overline{\nabla w}^{\mathrm{т}} \mathcal{A}^0 \nabla w - \lambda_\theta^\dagger |w|^2 = 0$. Наконец, $\mathcal{N}(x, \nabla) = n(x)^{\mathrm{т}} \mathcal{A}^0 \nabla$, где n – единичный вектор внешней нормали на торце ϖ. При этом $\mathcal{N}(x, \nabla) w(x) = 0$ почти всюду на ϖ, если ϖ – конечное объединение*) прямого торца $\omega \times \{h_0\}$ и участков (двусторонних) гиперплоскостей $\omega_q \times \{h_q\}$, где $0 \leqslant h_0 \leqslant h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_Q$ и $\overline{\omega_q} \subsetneqq \overline{\omega}$. Кроме того, неравенство (50) убеждает в том, что $\sigma_\theta^d = \varnothing$ для всех $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1}$ при последней геометрии торца.

2°. *Пространственная задача теории упругости.* Пусть $K = d = 3$, $N = 6$ и $\mathcal{B} = \mathbb{I}_3$,

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 & 2^{-1/2}\partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Задача (13) описывает распространение волн в однородном анизотропном упругом пространстве с периодической границей и (вещественной) симметричной и положительно определённой матрицей жёсткости $\mathcal{A}$. Соответствующая квадратичная форма (13) представляет собой удвоенную упругую энергию деформируемого тела Ξ и вырождается на пространстве жёстких смещений

$$\mathcal{P} = \{d(x) b : b \in \mathbb{R}^6\} \tag{52}$$

с линейной матрицей-функцией

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 & 2^{-1/2}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{-1/2}x_1 & 2^{-1/2}x_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Множители $2^{-1/2}$ удобны при матричной записи определяющих соотношений теории упругости [34, гл. 4; 35, гл. 3; 36, гл. 2]: в частности, выполнены равенства $\mathcal{M}(\nabla)\mathcal{M}(x)^{\mathrm{т}} = \mathbb{I}_6$ и $d(\nabla)^{\mathrm{т}} d(x)|_{x=0} = \mathbb{I}_6$, где $\mathbb{I}_m$ – единичная матрица размером $m \times m$. Тот факт, что сечение ω – единичный квадрат, а не прямоугольник, не является ограничительным, так как в теории упругости матричную реализацию операторов системы дифференциальных уравнений (5) и краевых условий

$$\mathcal{N}(x, \nabla) w(x) := \mathcal{M}(n(x))^{\mathrm{т}} \mathcal{A} \mathcal{M}(\nabla) w(x) \tag{54}$$

можно сохранить при аффинном преобразовании координат путём введения нефизических столбцов смещений и напряжений (см., например, статью [37]).

Как уже упоминалось в п. 1, подобные пространственная и плоская (см. пример 3°) задачи востребованы в практической инженерии и потому изучены в значительной степени (см. [9–21]

*) В этом случае граница $\partial\Pi$ не является липшицевой, однако сама призма Π представима как объединение липшицевых областей, и этого свойства достаточно для проведения всех рассуждений.

и многие другие публикации). Приведём лишь несколько следствий теоремы 5, которые могут быть интересны.

Введём скалярную функцию*)

$$\Phi_\theta(w;y)=\overline{\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W(y)}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W(y)-\lambda_\theta^\dagger|W(y)|^2, \tag{55}$$

построенную по волне (37), удовлетворяющей условию (39). Если эта функция аннулируется всюду на квадрате $\omega=(-1/2,1/2)\ni y=(y_1,y_2)$, то величина (48) равна нулю и по теореме 5 поверхностные волны Рэлея (12) существуют в том случае, если вектор нормальных напряжений (54) отличен от нуля в какой-то точке $x^0\in\varpi$. Разумеется, всегда форму торца ϖ можно подобрать так, чтобы требование к нормальным напряжениям (54) было выполнено, так как шестимерный вектор напряжений $\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(x)$ не может полностью выродиться всюду в Π.

Пусть теперь $\pm\Phi_\theta(w;y^\pm)>0$ для каких-то точек $y^\pm\in\omega$; поскольку функция (55) обладает нулевым средним по квадрату ω, оба множества

$$\omega_\theta^\pm=\{y\in\omega:\pm\Phi_\theta(w;y)>0\}$$

не пустые. Теперь нетрудно построить призму Π, для которой выполнено условие $I_R^0(\omega)<0$ из теоремы 5. Это происходит, например, в случае

$$\Pi=(\Pi_0\bigcup\Upsilon_\theta^-)\setminus\Upsilon_\theta^+,\quad \Pi_0=\omega\times\mathbb{R}_+,$$
$$\Upsilon_\theta^\pm=\omega_\theta^\pm\bigcap\{x:y\in\omega,\pm z\geqslant 0\}, \tag{56}$$

так как разность интегралов

$$I_R^0(w)=\int\limits_{\Upsilon_\theta^-}\Phi_\theta(w;y)\,dx-\int\limits_{\Upsilon_\theta^+}\Phi_\theta(w;y)\,dx$$

отрицательна, когда хотя бы одно из множеств (56) не пустое. Если же $\Upsilon_\theta^\pm=\varnothing$ и $\Pi=\Pi_0$ – полуцилиндр с прямым торцом, то $\Omega=\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+$ – полупространство, а соответствующее поле смещений (12) – классическая волна Рэлея (см. [38]).

3°. *Изотропная полуполоса.* Пусть $K=d=2$, $N=3$, $\mathcal{B}=\mathbb{I}_2$ и

$$\mathcal{M}(\nabla)=\begin{pmatrix}\partial_1 & 0\\ 0 & \partial_2\\ 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\lambda} & 0\\ \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$ и $\boldsymbol{\mu}>0$ – постоянные Ламе однородного изотропного упругого тела $\Pi\subset(-1/2,1/2)\times\times\mathbb{R}$ (масштабированием ширина полуполосы сведена к единице). При этом $\theta\in[-\pi,\pi)$ – скаляр и непосредственные вычисления (см., например, [39]) показывают, что $\lambda_\theta^\dagger=\theta^2\boldsymbol{\mu}$ и $\zeta=0$, $W(y)=(0,e^{i\theta y})^{\mathrm{T}}$ в волне (37). Таким образом,

$$\Phi_\theta(w;y)=0\quad\text{и}\quad \mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(y)=(0,0,\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}i\theta e^{i\theta y},$$

$$\mathcal{M}(n(x))^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(y)=n(x)\boldsymbol{\mu}i\theta e^{i\theta y}.$$

Итак, условия 2) теоремы 5 выполнены в полном объёме, т.е. волна Рэлея существует при любых параметре Флоке $\theta\in[-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ и профиле периодической границы Γ изотропной деформируемой полуплоскости Ω.

---

*) Предлагаемые конструкции пригодны и для рассмотренных общих эллиптических систем. Комплексное сопряжение в задачах теории упругости не нужно.

7. Задачи с вырожденной матрицей $\mathcal{B}$ или знакопеременной матрицей $\mathcal{A}$.

4°. *Пластина Кирхгофа.* Пусть $d = 2$, $K = 3$, $N = 6$ и

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\mathrm{т}} & & \mathbb{O}_{2\times 3} & \\ \mathbb{O}_{1\times 3} & 2^{-1/2}\partial_1^2 & \partial_1\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_2^2 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

где $\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)$ – (3×2)-матрица дифференциальных операторов из списка (37), а $\mathbb{O}_{p\times q}$ – нулевая матрица размером $p \times q$. Двумерная задача (13) служит асимптотической моделью колебаний тонкой пространственной пластины (см. [36, гл. 7], публикации [39–43] и многие другие). Кроме того, $u'(x) = (u_1(x), u_1(x))^{\mathrm{т}}$ и $u_3(x)$ – осреднённые по толщине вектор продольных смещений и прогиб пластины соответственно. На рассматриваемых низких частотах кинетическая энергия продольных колебаний в принятой модели пренебрежимо мала, и поэтому $\mathcal{B}$ – диагональная вырожденная матрица $\operatorname{diag}\{0, 0, 1\}$. Отметим, что в среднечастотном диапазоне, наоборот, демпфированы поперечные колебания и в качестве двумерной модели продольных колебаний пластины выступает плоская задача теории упругости из примера 3° (и примера 2°) п. 6. Форма (9) с оператор-матрицей (57) вырождается на пространстве жёстких смещений (52) со следующей линейной матрицей-функцией:

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Различия между матрицами (58) и (53) обусловлены тем, что в теории Кирхгофа полный вектор смещений в тонкой пространственной пластине восстанавливается по формуле

$$(u_1(x_1,x_2) - x_3\partial_1 u_3(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2) - x_3\partial_2 u_3(x_1,x_2), u_3(x_1,x_2))^{\mathrm{т}}.$$

Подставив сюда столбцы матрицы (58), получаем столбцы матрицы (53).

Известно (см., например, [36, гл. 4, § 2]), что в случае однородных и даже слоистых пластин их срединные плоскости можно зафиксировать так, что матрица $\mathcal{A}$ станет блочно-диагональной

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\leftrightarrows} & \mathbb{O}_{3\times 3} \\ \mathbb{O}_{3\times 3} & \mathcal{A}^{\updownarrow} \end{pmatrix},$$

а задача (13) распадётся на статическую $(\lambda = 0)$ плоскую задачу теории упругости и спектральное уравнение четвёртого порядка, в частности, бигармоническое уравнение Софи Жермен [44, § 30] для изотропной пластины; тогда, разумеется, применима теорема 5. Вместе с тем для пластины из композиционного материала матрица $\mathcal{A}$ может быть заполненной целиком, т.е. в системе (2) все уравнения перевязаны.

При вырожденной матрице $\mathcal{B}$ формулы (14) и (16) не задают норму в пространстве $H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$, однако при ненулевом параметре Флоке гильбертово пространство (11) по-прежнему можно снабдить скалярным произведением (14).

Лемма 2. *При $\theta \in [-\pi, 0) \bigcup (0, \pi)$ в качестве нормы в $H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ можно взять выражение $a(u,u;\Pi)^{1/2}$ или $(a(u,u;\Pi) + \|u_3; L^2(\Pi)\|^2)^{1/2}$, где a – квадратичная форма (9) с матрицей (57) дифференциальных операторов первого и второго порядков.*

Доказательство. Только тривиальное жёсткое смещение из линеала (52) с матрицей (58) удовлетворяет условиям квазипериодичности из формулы (11) на сторонах полуполосы Π, а значит, из правых частей неравенств Корна на множествах $\Pi(R)$ и Q_{R+m}, $m \in \mathbb{N}_0$ (см. комментарий к соотношению (15)) можно удалить лебеговы нормы $\|u; L^2(\Pi(R))\|$ и $\|u; L^2(Q_{R+m})\|$ соответственно. Таким образом, справедлива оценка

$$\|u; H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\| \leqslant c_{\Pi,\mathcal{A},\mathcal{M}}\, a(u,u;\Pi)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

5°. *Пьезоэлектрическая задача.* Пусть $d=3,\ K=4,\ N=9$ и $\mathcal{B}=\mathrm{diag}\,\{1,1,1,0\}$,

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\mathrm{т}}=\begin{pmatrix}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\mathrm{т}} & \mathbb{O}_{3\times 3}\\ \mathbb{O}_{1\times 6} & \nabla^{\mathrm{т}}\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}\mathcal{A}^{\mathsf{MM}} & \mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\\ \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} & -\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\end{pmatrix}. \tag{59}$$

Здесь $\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\mathrm{т}}$ – матрица (51), $\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}$ и $\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}$ – (вещественные) симметричные и положительно определённые матрицы, а $\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}=(\mathcal{A}^{\mathsf{EM}})^{\mathrm{т}}$ – (6×3)-матрица без каких-либо особых свойств, но обязательно ненулевая. Кроме того, $u^{\mathsf{M}}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{т}}$ – вектор смещений и u_4 – электрический потенциал. Задача (13) описывает гармонические во времени колебания пьезоэлектрической среды, в которой возможна свободная трансформация упругой энергии в электромагнитную и наоборот, что и объясняет знак минус у нижнего правого (3×3)-блока матрицы $\mathcal{A}$. В средне- и низкочастотных диапазонах спектра, в которых реализуются механические колебания, электромагнитными колебаниями следует пренебречь – поэтому спектральный параметр λ исчезает из нижней строки системы дифференциальных уравнений (2), т.е. $\mathcal{B}_{44}=0$. Детальное разъяснение физической постановки пьезоэлектрической задачи можно найти в [45, 46] и других монографиях. В частности, форма (2) ассоциируется не с общей энергией среды, а с её электрической энтальпией [47].

Матрица $\mathcal{A}$ из (59) не является положительной и, поскольку случай $\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}=\mathbb{O}_{6\times 3}$ неинтересен ввиду исчезновения обсуждаемого пьезоэлектрического эффекта, добиться свойства формальной положительности у оператора (5) какими-либо заменами не удаётся. Поэтому приёмы, использованные в данной работе, не годятся для формально самосопряжённой задачи (2)–(4) с матрицами (59). Однако, следуя [48], сделаем замену неизвестной $u_4\mapsto u^{\mathsf{E}}=iu_4$ и тем самым придадим матрице из дифференциального оператора (5) вид

$$\begin{pmatrix}\mathcal{A}^{\mathsf{MM}} & \mathbb{O}_{6\times 3}\\ \mathbb{O}_{3\times 6} & \mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{6\times 6} & \mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\\ \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} & \mathbb{O}_{3\times 3}\end{pmatrix} \tag{60}$$

с двумя симметричными (9×9)-матрицами. Согласно определениям и заключениям из работы [25] для формы (9) с числовой матрицей (60) и дифференциальным оператором $\mathcal{M}(\nabla)$ из списка (59) сохраняется полиномиальное свойство (20), в котором линеал полиномов имеет вид

$$\mathcal{P}=\{(d(x)b^{\mathsf{M}},b_4)^{\mathrm{т}}: b^{\mathsf{M}}\in\mathbb{C}^6, b_4\in\mathbb{C}\},$$

где фигурирует матрица жёстких механических смещений (53), а также постоянный электрический потенциал. Таким образом, матрица (5) дифференциальных операторов второго порядка эллиптическая, а значит, теорема 1 и следствие 1, происходящие из анализа соответствующей формально самосопряжённой краевой задачи Неймана (2)–(4) в полубесконечной призме, сохраняют силу. Вместе с тем по-прежнему не удаётся определить самосопряжённый оператор $\mathcal{T}_\theta$ формулой (17) и приходится усложнить его конструкцию посредством трюка [48]. Далее имеем дело с чуть более простым случаем $\theta\in[-\pi,\pi)^2\setminus\{0\}$, в котором вспомогательные задачи в Π становятся однозначно разрешимыми. Именно, пусть $\mathcal{J}u^{\mathsf{M}}:=\mathbf{u}_4\in H^1_\theta(\Pi)$ – решение задачи

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla\mathbf{u}_4,\nabla v_4)_\Pi=(\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}},\nabla v_4)_\Pi\quad\text{для всех потенциалов}\quad v_4\in H^1_\theta(\Pi), \tag{61}$$

найденное по вектору смещений $u^{\mathsf{M}}\in H^1_\theta(\Pi)^3$. При этом $H^1_\theta(\Pi)$ – скалярное пространство Соболева с одним условием квазипериодичности на противоположных гранях призмы Π. Как проверено в статьях [48, 49] и нетрудно убедиться непосредственными вычислениями, вариационная формулировка пьезоэлектрической задачи (2)–(4) с исходными матрицами (59) равносильна интегральному тождеству

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}},\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi+$$
$$+(\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{J}\nabla u^{\mathsf{M}},\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi=\lambda(u^{\mathsf{M}},v^{\mathsf{M}})_\Pi\quad\text{для всех}\quad v^{\mathsf{M}}\in H^1_\theta(\Pi)^3, \tag{62}$$

а полуторалинейная эрмитова форма

$$\langle u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}}\rangle = (\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_{\Pi} + (\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{J}\nabla u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_{\Pi} + (u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}})_{\Pi},$$

включающая левую часть тождества (62), оказывается положительно определённой, и её можно взять в качестве скалярного произведения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\theta^{\mathsf{M}} = H_\theta^1(\Pi)^3$. Кроме того, теперь удаётся ввести обладающий нужными свойствами оператор $\mathcal{T}_\theta^{\mathsf{M}}$,

$$\langle \mathcal{T}_\theta^{\mathsf{M}} u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}}\rangle = (u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}})_{\Pi} \quad \text{для всех векторов смещений} \quad u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)^3,$$

и новый спектральный параметр (18).

Всё готово для того, чтобы, как и в п. 5, применить минимальный принцип для вывода достаточных условий непустоты дискретного спектра оператора $\mathcal{T}_\theta^{\mathsf{M}}$, а значит, и изолированных собственных чисел исходной пьезоэлектрической задачи, однако интегро-дифференциальный оператор задачи (62) перестал быть локальным, и это обстоятельство существенно влияет на результат дальнейших вычислений.

Поскольку пучок (24) и его спектр сохраняют указанные в п. 4 свойства, на пороге $\lambda_\theta^\dagger$, положительном при $\theta \neq 0$, имеется волна (37) с ненулевой механической $w^{\mathsf{M}} = (w_1, w_2, w_3)^{\mathrm{T}}$ и какой-то электрической w_4 компонентами. Она удовлетворяет системе уравнений (2) и условиям (4) квазипериодичности, но оставляет невязку в краевом условии Неймана (3) на торце ϖ

$$g(x) = -\mathcal{M}(n(x))^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(x)$$

с четвертой, нижней – электрической, компонентой

$$g_4(x) = -n(x)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}(x) + n(x)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4(x), \tag{63}$$

которую компенсируем при помощи решения $\mathbf{w}_4 \in H_\theta^1(\Pi)$ аналогичной (61) статической (без спектрального параметра) задачи

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla v_4)_{\Pi} = (g_4, v_4)_{\varpi} \quad \text{для всех} \quad v_4 \in H_\theta^1(\Pi). \tag{64}$$

Существование экспоненциально затухающего на бесконечности решения задачи обеспечено теоремой 1 при ненулевом параметре Флоке (если $\theta = 0$, то приходится пользоваться теоремой 3, что усложняет последующий анализ; ср. работы [48, 49]).

Применим минимальный принцип (40) к оператору $\mathcal{T}_\theta^{\mathsf{M}}$ и после похожих на (41) преобразований получим, что

$$-\underline{\Sigma_\theta^{\mathsf{M}}} = \inf_{u^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)^3\setminus\{0\}} \frac{-\langle \mathcal{T}_\theta^{\mathsf{M}} u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{M}}\rangle_\theta}{\langle u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{M}}\rangle_\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\sigma_\theta^{\mathsf{M}}} = \inf_{u^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)^3\setminus\{0\}} \frac{a((u^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}u^{\mathsf{M}}), (u^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}u^{\mathsf{M}}); \Pi)}{\|u^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi)\|^2}.$$

При этом, как и в п. 5, требуется найти пробную вектор-функцию $\varphi^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)^3$, для которой справедливо аналогичное (42) неравенство

$$a((\varphi^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}}), (\varphi^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}}); \Pi) - \lambda_\theta^\dagger \|\varphi^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi)\|^2 < 0. \tag{65}$$

Поскольку электрическая компонента $\mathcal{J}u^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)$ определена по механической компоненте $u^{\mathsf{M}} \in H_\theta^1(\Pi)^3$ как решение задачи (61), конструкция (43) нуждается в изменении. Покажем как выводится достаточное условие, сопоставимое с первым утверждением теоремы 5. Положим

$$\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}(y, z) = \mathcal{E}_R^\varepsilon(z) w^{\mathsf{M}}(y, z), \tag{66}$$

где

$$\mathcal{E}_R^\varepsilon(z) = 1 \quad \text{при} \quad z < R, \quad \mathcal{E}_R^\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon(z-R)} \quad \text{при} \quad z \geqslant R; \quad \partial_z \mathcal{E}_R^\varepsilon(z) = -\varepsilon e^{-\varepsilon(z-R)} X_R(z), \tag{67}$$

а X_R – функция Хевисайда со скачком в точке $z = R$. Подчеркнём, что использование непрерывного кусочно-гладкого затухающего множителя $\mathcal{E}_R^\varepsilon$ возможно потому, что производная $\partial_z\mathcal{E}_R^\varepsilon$ – ограниченная кусочно-гладкая функция и $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, т.е. справедливо включение $\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon} \in H_\theta^1(\Pi)^3$. Электрическую компоненту $\varphi_4^\varepsilon = \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}$ представим в виде

$$\varphi_4^\varepsilon(y,z) = \mathcal{E}_R^\varepsilon(z)w_4(y,z) - \mathbf{w}_4(y,z) + \varepsilon\mathcal{E}_R^\varepsilon(z)w_4'(y,z), \tag{68}$$

где $w = (w^{\mathsf{M}}, w_4)$ – пороговая волна (37), а $\mathbf{w}_4 \in H_\theta^1(\Pi)$ и w_4' – решения задач (64) и

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4', \nabla v_4)_\Pi - \varepsilon(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}X\mathbf{e}_3X_Rw_4', \nabla v_4)_\Pi + \varepsilon(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4', \mathbf{e}_3X_Rv_4)_\Pi =$$
$$= (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\mathbf{e}_3X_Rw_4, \nabla v_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4, \mathbf{e}_3X_Rv_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}(\mathbf{e}_3)X_Rw^{\mathsf{M}}, \nabla v_4)_\Pi +$$
$$+ (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}(\nabla)w^{\mathsf{M}}, \mathbf{e}_3X_Rv_4)_\Pi \quad \text{для всех} \quad v_4 \in H_\theta^1(\Pi)\bigcap C_c^\infty(\overline{\Pi})^K. \tag{69}$$

Лемма 3. *Задача (69) имеет решение*

$$w_4'(y,z) = e^{i\zeta z}W_4'(y) + \widetilde{w}_4'(y,z), \tag{70}$$

где $W_4' \in H_\theta^l(\omega)$ *и* $e^{\gamma z}\widetilde{w}_4' \in H_\theta^1(\Pi)$ *при любых* $l \in \mathbb{N}$ *и* $\gamma \in (0, \gamma(\theta))$.

Доказательство. Поскольку функции на первых позициях в скалярных произведениях из правой части интегрального тождества (69) суть произведения $e^{i\zeta z}F(y)$, нужно принять во внимание асимптотические конструкции [27] (см. также [22, гл. 3, § 3]) и решить скалярное уравнение

$$-(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)W_4' =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}((\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)W_4(y) - (\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)W^{\mathsf{M}}(y)), \quad y \in \omega,$$

с условиями квазипериодичности (25), $m = 0, 1$. Подчеркнём, что амплитудная часть $W = ((W^{\mathsf{M}})^{\mathsf{T}}, W_4)^{\mathsf{T}}$ волны (37) удовлетворяет равенству (преобразованная нижняя строка системы (2))

$$(\nabla_y, i\zeta)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}(\nabla_y, i\zeta)W_4(y) = (\nabla_y, i\zeta)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla_y, i\zeta)W^{\mathsf{M}}(y), \quad y \in \omega,$$

и поэтому правая часть уравнения (70) равномерно ограничена при $\varepsilon \to +0$. В силу теоремы 4 задача (70), (25) однозначно разрешима. Кроме того, оставшийся неучтенным функционал из правой части задачи вида (69) для остатка $\widetilde{w}_4'$ приобрел компактный носитель, а значит, следствие 2 заканчивает проверку леммы, причём ингредиенты представления (69) остаются ограниченными при $\varepsilon \to +0$.

Проверка того факта, что выражение (68) действительно решает задачу (61) с правой частью, построенной по произведению (66), проводится на основе интегральных тождеств (64) и (69) с подходящими пробными функциями.

Повторим выкладки (44), (45) и придём к соотношениям

$$\|\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}; L^2(\Pi)\|^2 = \int\limits_R^\infty \int\limits_\omega e^{-2\varepsilon(z-R)}|W^{\mathsf{M}}(y)|^2\,dy\,dz + \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\|W^{\mathsf{M}}; L^2(\omega)\|^2 + \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 \tag{71}$$

и

$$a((\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}, \varphi_4^\varepsilon), (\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}, \varphi_4^\varepsilon); \Pi) = \int\limits_R^\infty e^{-2\varepsilon(z-R)}((\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W)_\omega +$$
$$+ \varepsilon\, 2\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}\mathcal{M}(e_3)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W)_\omega)\,dz + (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w, \mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)} - (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla\mathbf{w}_4, \nabla\mathbf{w}_4)_\Pi +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,((\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi) + O(\varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W)_\omega + (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w, \mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)} -$$
$$- (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi + 2\,\mathrm{Re}\,(g_4, \mathbf{w}_4)_\varpi + O(\varepsilon). \tag{72}$$

Если преобразование (71) весьма просто (оно привело к равенству благодаря выбору (67) экспоненциальной весовой функции $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z)$), то преобразование (72) достаточно запутано из-за дополнительных слагаемых в определении преобразования (68), поэтому приведём пояснения. Сомножители ε и $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z)$ в последнем слагаемом из (68), а также представление (70), по сути означающее ограниченность решения w_4' задачи (69), демонстрируют, что вклад выражения $\varepsilon\mathcal{E}_R^\varepsilon w_4'$ составляет $O(\varepsilon)$ и им можно пренебречь. Интеграл, содержащий матрицу $-\mathcal{M}(\mathbf{e}_3) = = \partial_\varepsilon \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)$, исчез по причине привычного соглашения (39). Согласно следствию 2 решение $\mathbf{w}_4$ задачи (64) с финитным функционалом в правой части затухает на бесконечности с фиксированной (не зависящей от ε) скоростью $O(e^{-\gamma z})$, $\gamma > 0$, и, следовательно, в скалярных произведениях $(\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}(\nabla)\mathcal{E}_R^\varepsilon w^{\mathsf{M}}, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi$ и подобных ему замена $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z) \mapsto 1$ также порождает допустимую погрешность $O(\varepsilon)$. Кроме того, последний переход в выкладке (72) использует определение (63), а равенство (64) при $v_4 = \mathbf{w}_4$ показывает, что выражение под знаком Re равно $(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi$. Наконец, подстановка выражений (72) и (71) в неравенство (65) с пробной вектор-функцией (66), (68) приводит при учёте равенств (46) и (64) к соотношению

$$\mathbf{I}_R^0(w) < C\varepsilon,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная и

$$\mathbf{I}_R^0(w) = (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w, \mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)} - \lambda_\theta^\dagger \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 + (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi. \tag{73}$$

Теперь рассуждения, сопроводившие проверку теоремы 5, дают следующее утверждение.

Теорема 6. *Если при $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $|\theta_j| \in (0, \pi]$, отрицательно выражение (73), вычисленное для пьезоэлектрической волны (37), которая удовлетворяет задаче (2)–(4) с пороговым параметром $\lambda = \lambda_\theta^\dagger > 0$ и подчинена соотношению (39), то дискретный спектр σ_θ^d задачи (2)–(4) с матрицами (59) не пуст.*

По сравнению с величиной (48), найденной для задачи теории упругости (п. 6, $2°$), величина (73) содержит дополнительное положительное слагаемое

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi, \tag{74}$$

появившееся в результате компенсирования неоднородности (63) в краевом условии (3) при формировании оператора $\mathcal{J}w^{\mathsf{M}}$. Это наблюдение согласуется с физической сущностью пьезоэлектрической задачи: помимо упругой энергии $(\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}})_{\Pi(R)}$ тело $\Pi(R)$ запасает электромагнитную энергию $(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w, \nabla w_4)_{\Pi(R)}$. На первый взгляд кажется, что неравенство $\mathbf{I}_R^0(w) < 0$ – более трудно достижимая цель, чем неравенство $I_R^0(w) < 0$ в “чисто упругой” ситуации, в частности, манипуляции с множествами (56) бесполезны именно из-за слагаемого (74). Вместе с тем сравнить величины $\mathbf{I}_R^0(w)$ и $I_R^0(w)$ не удаётся хотя бы потому, что точки отсечки непрерывного спектра в пьезоэлектрической и упругой задачах никак не связаны. Наконец, опять-таки из-за нелокального оператора $\mathcal{J}$ не удалось применить трюк работы [33] и получить аналог п. 2) теоремы 5 для задачи (2)–(4) с матрицами (59).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nečas J.* Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris-Prague, 1967.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
4. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.

5. *Wilcox C.H.* Scattering theory for diffraction gratings // Appl. Math. Sci. Ser. V. 46. Singapore, 1997.
6. *Rayleigh J.W.S.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. № 253. P. 4–11.
7. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
8. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proc. R. Soc. Lond. A. 1924. V. 106. P. 416–428.
9. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М., 1981.
10. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Y., Nolde E.V.* Dynamics of thin Walled Elastic Bodies. SanDiego, 1997.
11. *Михасев Г.И., Товстик П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М., 2009.
12. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акустический журн. 1960. Т. 6. С. 124–126.
13. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Особенности распределения энергии в тонкой прямоугольной пластине при краевом резонансе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 7. С. 612–616.
14. *Kim J.-Y., Rokhlin S.I.* Surface acoustic wave measurements of small fatigue cracks initiated from a surface cavity // Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P. 1487–1504.
15. *Zakharov D.D., Becker W.* Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. of Sound and Vibration. 2003. V. 261. P. 805–818.
16. *Камоцкий И.В.* О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 1. С. 86–92.
17. *Камоцкий И.В., Киселев А.П.* Энергетический подход к доказательству существования волн Релея в анизотропном упругом полупространстве // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73. № 4. С. 645–654.
18. *Заворохин Г.Л., Назаров А.И.* Об упругих волнах в клине // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. 2010. Т. 380. С. 45–52.
19. *Krushynska A.A.* Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. of Sound and Vibration. 2011. V. 330. P. 1964–1976.
20. *Nazarov A., Nazarov S., Zavorokhin G.* On symmetric wedge mode of an elastic solid // Europ. J. of Appl. Math. 2021. V. 33. № 2. P. 201–223.
21. *Lawrie J., Kaplunov J.* Edge waves and resonance on elastic structures: an overview // Math. Mech. of Solids. 2012. V. 17. № 1. P. 4–16.
22. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
23. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряжённых эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
24. *Назаров С.А.* Самосопряжённые эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы мат. анализа. СПб., 1997. Вып. 16. С. 167–192.
25. *Назаров С.А.* Несамосопряжённые эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. 1997. Т. 249. С. 212–230.
26. *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–160.
27. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
28. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. 2 // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.
29. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса – Л. Ниренберга. 2 // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92. С. 233–297.
30. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. М., 1965.
31. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
32. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
33. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жёсткой периодической решетке // Мат. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 138–140.
34. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
35. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations. Berlin; Heidelberg, 2005.
36. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.

37. *Лангер С., Назаров С.А., Шпековиус-Нойгебауер М.* Аффинные преобразования трёхмерных анизотропных сред и явные формулы для фундаментальных матриц // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47. № 2. С. 95–102.
38. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 771–773.
39. *Шойхет Б.А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 914–924.
40. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and its Applications. V. 27. Amsterdam, 1997.
41. *Dauge M., Djurdjevic I., Faou E., Rössle A.* Eigenmode asymptotics in thin elastic plates // J. de Mathématiques Pures et Appliqués. 1999. V. 78. № 9. P. 925–964.
42. *Назаров С.А.* Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины // Сибирск. мат. журн. 2000. Т. 41. № 4. С. 895–912.
43. *Dauge M., Yosibash Z.* Eigen-frequencies in thin elastic 3-D domains and Reissner–Mindlin plate models // Math. Meth. Appl. Sci. 2002. V. 25. № 1. P. 21–48.
44. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
45. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводящих сред. М., 1988.
46. *Tiersten H.F.* Linear Piezoelectric Plate Vibrations. New York, 1964.
47. *Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D.M., Willis J.R.* Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1992. V. 40. № 4. P. 739–765.
48. *Назаров С.А.* Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // Проблемы мат. анализа. Новосибирск, 2003. Вып. 25. С. 99–188.
49. *Nazarov S.A., Ruotsalainen K.R., Silvola M.* Trapped modes in piezoelectric and elastic waveguides // J. of Elasticity. 2016. V. 124. № 2. P. 193–223.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 656–668

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.988+517.977.56

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ II РОДА: ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И О СОХРАНЕНИИ РАЗРЕШИМОСТИ

© 2022 г. А. В. Чернов

Данная статья продолжает исследования автора по проблеме сохранения разрешимости управляемых операторных уравнений. В качестве предварительного результата (представляющего самостоятельный интерес) для оператора B общего вида, действующего в произвольном банаховом пространстве E, получены новые теоремы о существовании и единственности неподвижной точки. При этом используется известное понятие конусной нормы $\omega : E \to \widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$, вообще говоря, другое банахово пространство, полуупорядоченное по конусу $\widetilde{E}_+$. Указанные теоремы опираются на предположение о выполнении операторного аналога локального условия Липшица относительно конусной нормы ω и обобщают результат А.В. Калинина, С.Ф. Морозова ($\widetilde{E} = E$, $\omega = |\cdot|$). В роли аналога константы Липшица на заданном ограниченном множестве $\Psi \subset E$ выступает зависящий от этого множества линейный ограниченный оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ со спектральным радиусом $\rho(A) < 1$. Кроме того, используются леммы М.А.Красносельского об эквивалентной норме. На базе полученных утверждений доказываются теоремы о локальном и тотальном (по множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого операторного уравнения $x = B(u)[x]$, $x \in E$, где u – управляющий параметр из, вообще говоря, произвольного множества U. Абстрактная теория иллюстрируется примерами управляемого нелинейного операторного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, а также сильно нелинейного псевдопараболического уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064122050065, EDN: CBEQLZ

Введение. В работе получены теоремы о существовании и единственности неподвижной точки, при этом используется известное понятие конусной нормы [1, п. 6.3] $\omega : E \to \widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$, вообще говоря, другое банахово пространство, полуупорядоченное по конусу $\widetilde{E}_+$. Указанные теоремы опираются на предположение о выполнении операторного аналога локального условия Липшица относительно конусной нормы ω и обобщают результат работы [2] ($\widetilde{E} = E$, $\omega = |\cdot|$). В роли аналога константы Липшица на заданном ограниченном множестве $\Psi \subset E$ выступает зависящий от этого множества линейный ограниченный оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ со спектральным радиусом $\rho(A) < 1$. На базе полученных утверждений доказываются теоремы о локальном и тотальном (по множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого операторного уравнения

$$x = B(u)[x], \quad x \in E, \tag{1}$$

где u – управляющий параметр из произвольного множества U. Абстрактная теория иллюстрируется примерами управляемого нелинейного операторного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, частным случаем которого является уравнение вида [3, гл. V, § 1], а также сильно нелинейного псевдопараболического уравнения вида [4].

Неравенство $\rho(A) < 1$ косвенно может указывать на эволюционный (вольтерровый) характер операторов A и B. В этом случае имеет смысл говорить о глобальных решениях управляемого уравнения (1), и соответственно, о локальном и тотальном сохранении его глобальной разрешимости при варьировании управления u. Для локального (в смысле приращения по управлению правой части на фиксированном элементе $x = \overline{x} \in E$) сохранения глобальной разрешимости В.И. Суминым, а вслед за ним и его учениками (А.В. Чернов, И.В. Лисаченко), использовался также термин *устойчивость существования глобального решения* (УСГР).

Проблема УСГР актуальна при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления, в вычислении градиентов функционалов в таких задачах и обосновании соответствующих численных методов оптимизации. В случае отсутствия информации об УСГР при варьировании оптимального управления, в частности, при выводе необходимых условий оптимальности обычно переходят к рассмотрению пар "управление–состояние" (см., например, [5; 6, гл. 2]). В результате уравнение состояния приходится учитывать как дополнительное фазовое ограничение особого типа, а это приводит к определённым техническим сложностям. Укажем метод адаптированного штрафа, предложенный в книге [5, введение, п. 8.3, с. 17], в которой приведён ряд нерешённых задач, т.е. управляемых распределённых систем, для которых не удалось вывести необходимые условия оптимальности с помощью метода адаптированного штрафа. Между тем, в [7, гл. 5, § 2, п. 2] (см. также [8–11; 12, гл. 3, § 1; 13]) представлены некоторые задачи из этого ряда, необходимые условия оптимальности в которых удалось вывести с помощью использования теории УСГР. Дело в том, что при наличии информации об УСГР можно применять альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций только управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа (см., например, [14, 15]). В частности, можно использовать технику параметризации управления для численной оптимизации управляемых распределённых систем (см. [15]). Таким образом, наличие УСГР открывает дополнительное окно возможностей при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления и их численном решении. Об актуальности проблемы УСГР и об истории вопроса см. подробные обзоры в работах [16–21].

Проблема *тотального сохранения глобальной разрешимости*, или, иначе говоря, *тотально глобальной разрешимости* (ТГР) (оба термина использовались автором ранее – см., например, [22, 23]), тоже достаточно актуальна при исследовании различных вопросов теории управления. Об этом, а также об истории вопроса см. детальный обзор в [22]. Говоря совсем коротко, свойство ТГР при наличии ещё и свойства единственности решения управляемой системы актуально по следующим причинам:

1) исходная бесконечномерная задача оптимизации путём конечномерной аппроксимации управления сводится к задаче минимизации функции многих переменных (параметров аппроксимации) на известном множестве простой структуры – *аппроксимирующей задаче* математического программирования, для решения которой можно использовать стандартные методы (и готовые программные комплексы), проблему существования решения в ней можно снимать с помощью классической теоремы Вейерштрасса или её следствий;

2) существенно упрощается выбор начального приближения к оптимуму;

3) можно обоснованно ставить различные игровые задачи, связанные с управляемыми распределёнными системами;

4) за счёт упомянутой выше дискретизации можно применять известные классические и топологические теоремы о разрешимости системы нелинейных уравнений относительно конечного числа неизвестных для исследования поточечной управляемости.

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный (см. на этот счёт показательные примеры в [14; 24; 25, введение, п. 2]). При наличии нелинейности в дифференциальном операторе эта ситуация усугубляется (см., например, [4, 26]).

При исследовании задач управления (помимо простого постулирования глобальной разрешимости управляемой системы для всех допустимых управлений) различными исследователями используются, как правило, некоторые общие (основанные на теоремах Минти–Браудера, Лакса–Мильграма, Шаудера и т.д., см., например, [27]) или специфические результаты о достаточных условиях однозначной глобальной разрешимости для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений конкретного вида с неуправляемой правой частью, нелинейно зависящей от переменной состояния. Условиям глобальной разрешимости указанного типа посвящена достаточно обширная литература (см., например, [4, 26, 28–31]). Между тем, при исследовании глобальной разрешимости начально-краевых задач с нелинейной правой частью, зависящей от управления, имеет смысл использовать информацию о факте и характере этой зависимости. Зачастую наличие глобальной разрешимости или её отсутствие существенно зависит от того насколько широко варьируются управляемые параметры, входящие в нелинейную правую часть уравнения. Во многих ситуациях удаётся доказать, что если, например, система глобально разрешима для некоторого фиксированного управления, то она сохраняет это свойство для всех малых (в том или ином смысле) вариаций этого управления (при том, что для каких-то допустимых управлений глобальной разрешимости может и не быть). Это свойство в совокупности со свойством единственности решения как раз и называется УСГР (или сохранением однозначной глобальной разрешимости).

Ранее при исследовании вопросов УСГР и ТГР управляемых распределённых систем использовалась возможность сведения таких систем к вольтерровому функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций (см. определения вольтерровых операторов и уравнений в [7, 14, 25], обзоры в [16–21]). При этом использовалось продолжение локальных решений вдоль конечной цепочки вольтерровых множеств

$$\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi$$

соответствующих операторов до глобального решения, определённого на множестве Π изменения независимых переменных, на котором определено уравнение (для оператора V, действующего из одного пространства функций, определённых на $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, в другое подобное пространство, множество $H \subset \Pi$ называется вольтерровым, если при отображении V значения на H функций-образов не зависят от значений на $\Pi \setminus H$ функций-прообразов). Такой конечной цепочкой может быть, например, упорядоченная по вложению система временны́х отрезков. Отдельно укажем работу [20], где использовалось сведение к уравнению типа Гаммерштейна в $\mathbf{C}([0,T];X)$ с некоторым банаховым пространством X функций, определённых на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, но использованная методика применима лишь к полулинейным уравнениям. В статье [32] доказан признак тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости эволюционного операторного уравнения первого рода общего вида с управляемой добавочной нелинейностью с решениями в пространстве $\mathbf{C}([0,T];X)$, данная методика применима в том числе и к существенно нелинейным уравнениям в частных производных эволюционного типа. Настоящая статья представляет результаты об УСГР и ТГР управляемых операторных уравнений второго рода "нецепочечного и невольтеррового характера" в том смысле, что вольтерровость оператора правой части не используется, а "цепочечная технология" в доказательствах не применяется. Но разумеется, это никак не препятствует оператору быть вольтерровым и допускать применение "цепочечной технологии".

1. Теоремы о неподвижной точке. Пусть E – банахово пространство (для определённости все пространства считаем вещественными), $\widetilde{E}$ – банахово пространство, полуупорядоченное конусом $\widetilde{E}_+$, т.е. таким множеством в $\widetilde{E}$, которое вместе с любым своим элементом $x \in \widetilde{E}_+$ содержит элемент λx для всякого числа $\lambda \geqslant 0$. Соответствующее отношение порядка обозначим символом $\leqslant$, т.е. запись $x_1 \leqslant x_2$ означает, что $x_2 - x_1 \in \widetilde{E}_+$, запись $x_1 \geqslant x_2$ означает, что $x_1 - x_2 \in \widetilde{E}_+$; $\omega : E \to \widetilde{E}_+$ – отображение, обладающее свойствами:

$\mathbf{W}_1$) $\omega(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;

$\mathbf{W}_2$) $\omega(\lambda x) = |\lambda|\omega(x)$ для любого $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$\mathbf{W}_3$) $\omega(x+y) \leqslant \omega(x) + \omega(y)$ для всех $x, y \in E$.

Далее предполагаем, что $\|x\|_E = \|\omega(x)\|_{\widetilde{E}}$ для каждого $x \in E$. Норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ называется *монотонной*, если $\|x_1\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|x_2\|_{\widetilde{E}}$ для всех $x_1, x_2 \in \widetilde{E}_+$, $x_1 \leqslant x_2$. По терминологии [1, п. 6.3], функция $\omega(\cdot)$ – это, по сути дела, так называемая *конусная норма* (хотя, строго говоря, в [1] конус $\widetilde{E}_+$ предполагался нормальным). Отметим, что идея построения различных обобщений понятия нормы сама по себе далеко не является новой (см. на этот счёт обширную библиографию в [1, п. 6.3]).

Примеры. Если

$$E = L_p^\ell(\Pi) = \underbrace{L_p(\Pi) \times \cdots \times L_p(\Pi)}_{\ell \text{ раз}},$$

то можно считать, что $\widetilde{E} = L_p(\Pi)$, $\omega(x) = |x|$; для $E = \mathbb{C}^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\widetilde{E} = \mathbb{C}(\Omega)$, $\omega(x) = |x| + \sum_{k=1}^n |x'_{t_k}|$; для $E = \mathbb{C}([0,T];X)$: $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0,T]$, $\omega(x)(t) = \|x(t)\|_X$; для $E = L_p([0,T];X)$: $\widetilde{E} = L_p[0,T]$, $\omega(x)(t) = \|x(t)\|_X$.

Для оператора $B : E \to E$ и произвольного множества $\Psi \subset E$ определим следующие операторные классы (допускается, что они могут быть пустыми):

1) $\mathcal{A}(B,\Psi)$ – множество всех *линейных ограниченных операторов* (ЛОО) $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ таких, что спектральный радиус $\rho(A) < 1$ и при этом выполняются неравенства

$$\|A^k\omega(x+y)\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|A^k\omega(x)\|_{\widetilde{E}} + \|A^k\omega(y)\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых} \quad x,y \in E,$$

$$\|A^k\omega(Bx - By)\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|A^{k+1}\omega(x-y)\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых} \quad x,y \in \Psi, \quad k = 0,1,\ldots; \tag{2}$$

2) $\mathcal{A}_+(B,\Psi)$ – множество всех изотонных (в смысле отношения $\leqslant$) ЛОО $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ таких, что спектральный радиус $\rho(A) < 1$ и при этом выполняется неравенство

$$\omega(Bx - By) \leqslant A[\omega(x-y)] \quad \text{при всех} \quad x,y \in \Psi. \tag{3}$$

Отметим, что для случая вещественного банахова пространства $\widetilde{E}$ спектральный радиус ЛОО $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ можно понимать как величину, определённую формулой И.М. Гельфанда

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{4}$$

При этом в случае $\rho(A) < 1$ уравнение вида $(I - A)h = \varphi$, $h \in \widetilde{E}$, имеет единственное решение для любого $\varphi \in \widetilde{E}$. Более того, это решение определяется рядом Неймана

$$h = (I-A)^{-1}\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\varphi.$$

Очевидно, что в случае изотонного оператора A, замкнутости $\widetilde{E}_+$ в $\widetilde{E}$ и функции $\varphi \geqslant 0$ получим $h \geqslant 0$.

Пусть $B : E \to E$ – произвольный оператор. Будем рассматривать операторное уравнение второго рода

$$x = B[x], \quad x \in E. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть норма* $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ *монотонна. Тогда* $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \subset \mathcal{A}(B,\Psi)$.

Доказательство. Действительно, пусть $A \in \mathcal{A}_+(B,\Psi)$. В частности, отсюда следует, что оператор A изотонный и выполняется неравенство (3). Тогда в силу изотонности оператора имеем

$$A^k\omega(Bx - By) \leqslant A^k[A\omega(x-y)] = A^{k+1}\omega(x-y) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \Psi, \quad k = 0,1,\ldots$$

Отсюда, с учётом монотонности нормы, получаем соотношение (2), а значит, $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$. Лемма доказана.

Теорема 1 (о единственности неподвижной точки). *Пусть выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:* $\mathbf{U}_1$) *для любого замкнутого шара* $\Psi \subset E$ *класс* $\mathcal{A}(B,\Psi) \neq \varnothing$; $\mathbf{U}_2$) *норма* $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ *монотонна и для любого замкнутого шара* $\Psi \subset E$ *класс* $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \neq \varnothing$. *Тогда уравнение (5) не может иметь более одного решения в пространстве* E.

Доказательство. С учётом леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда выполнено условие $\mathbf{U}_1$). Предположим, что нашлись два решения $x_i = B[x_i]$, $i = 1,2$. Положим $M = \max_{i=1,2} \|x_i\|_E$, $\Psi = \{x \in E : \|x\|_E \leqslant M\}$. По условию найдётся $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$. В частности, отсюда следует, что $\rho = \rho(A) < 1$. Тогда найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma = \rho + \varepsilon < 1$. Непосредственно из формулы (4) следует существование номера $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такого, что

$\|A^{n_\varepsilon}\upsilon\|_{\widetilde{E}} \leqslant \gamma^{n_\varepsilon}\|\upsilon\|_{\widetilde{E}}$ для всех $\upsilon \in \widetilde{E}$. Положим $\|\upsilon\|'_{\widetilde{E}} = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^k\upsilon\|_{\widetilde{E}}$, $\upsilon \in \widetilde{E}$. Как показано в [33, гл. 2, § 5, п. 2], данная формула определяет в пространтсве $\widetilde{E}$ эквивалентную норму (поэтому полнота пространства при переходе к этой норме сохраняется) и для соответствующей операторной нормы $\|A\|' = \sup\limits_{\|\upsilon\|'_{\widetilde{E}}\leqslant 1}\|A\upsilon\|'_{\widetilde{E}}$ имеем $\|A\|' \leqslant \gamma$. Положим $\|x\|'_E = \|\omega(x)\|'_{\widetilde{E}}$, $x \in E$. Очевидно, что это будет норма в пространстве E, эквивалентная исходной норме $\|x\|_E = \|\omega(x)\|_{\widetilde{E}}$, $x \in E$. Оценим

$$\|Bx_1 - Bx_2\|'_E = \|\omega(Bx_1 - Bx_2)\|'_{\widetilde{E}} = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^k\omega(Bx_1 - Bx_2)\|_{\widetilde{E}}.$$

С учётом $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$ получим

$$\|x_1 - x_2\|'_E = \|Bx_1 - Bx_2\|'_E \leqslant \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^{k+1}\omega(x_1 - x_2)\|_{\widetilde{E}} = \|A\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|'\|\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} \leqslant \gamma\|\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} = \gamma\|x_1 - x_2\|'_E.$$

Следовательно, $(1-\gamma)\|x_1 - x_2\|'_E \leqslant 0$ и, стало быть, $x_1 = x_2$. Теорема доказана.

Теорема 2 (о существовании неподвижной точки). *Пусть $\Psi \subset E$ – замкнутое множество, $\Psi \neq \varnothing$, инвариантное относительно оператора B (т.е. $B : \Psi \to \Psi$). Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:* $\mathbf{E}_1$) $\mathcal{A}(B,\Psi) \neq \varnothing$; $\mathbf{E}_2$) *норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна и $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \neq \varnothing$. Тогда уравнение (5) имеет решение в множестве Ψ.*

Доказательство. Согласно лемме 1 достаточно рассмотреть случай, когда выполнено условие $\mathbf{E}_1$). Выберем произвольно $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$ и определим нормы $\|\cdot\|'_{\widetilde{E}}$, $\|A\|'$, $\|\cdot\|'_E$. Как уже было показано при доказательстве теоремы 1, нормы $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|'_E$ эквивалентны, поэтому полнота пространства E при переходе к норме $\|\cdot\|'_E$ сохраняется. Далее, для произвольно взятых $x_i \in \Psi$, $i = 1, 2$, повторив дословно соответствующий фрагмент доказательства теоремы 1, получаем оценку

$$\|Bx_1 - Bx_2\|'_E \leqslant \gamma\|x_1 - x_2\|'_E$$

при $\gamma \in (0,1)$. Это означает, что оператор B является сжимающим на множестве Ψ относительно нормы $\|\cdot\|'_E$. Следовательно, согласно принципу Каччопполи–Банаха [34, гл. XVI, с. 609], существует единственная неподвижная точка $x = \overline{x} \in \Psi$, т.е. $\overline{x} = B[\overline{x}]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для частного случая $E = \widetilde{E}$, $\omega(x) = |x|$, норма $\|\cdot\|_E$ монотонна, аналоги теорем 1 и 2 при условиях $\mathbf{U}_2$), $\mathbf{E}_2$) были получены в работе [2, леммы 1, 2], поэтому рассмотренное там нестационарное нелинейное кинетическое уравнение переноса нейтрино тоже можно привести как пример применения теорем 1 и 2 для доказательства однозначной глобальной разрешимости.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 можно разделить на две части: первую, относящуюся к условию $\mathbf{E}_1$), и вторую – к условию $\mathbf{E}_2$). Следует отметить, что вторая часть близка к обобщённому принципу сжатых отображений из [1, п. 6.4, теорема 6.2]. Сформулируем его в наших обозначениях, чтобы пояснить характер этой близости.

Пусть $\widetilde{E}$ – банахово пространство, $\widetilde{E}_+$ – нормальный конус (в смысле [1]) в этом пространстве. Множество E называется в [1] *обобщённым метрическим пространством*, если каждой паре элементов $x, y \in E$ поставлен в соответствие элемент $\rho(x,y) \in \widetilde{E}_+$ так, что выполняются три естественные аксиомы (формально записываемые так же, как обычные аксиомы метрики). Аналогично на основе понятия конусной нормы (но опять же для случая нормального конуса $\widetilde{E}_+$ в смысле [1]) определяется *обобщённое нормированное пространство*. Переформулируем [1, п. 6.4, теорема 6.2].

Предложение 1. *Пусть E – обобщённое метрическое пространство с обобщённой метрикой $\rho(\,\cdot\,,\cdot)$, действующей в нормальный конус $\widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, причём E – полное метрическое пространство относительно метрики $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot) = \|\rho(\,\cdot\,,\cdot)\|_{\widetilde{E}}$. Предположим, что $B : E \to E$ удовлетворяет условию $\rho(Bx, By) \leqslant A\rho(x,y)$ для всех $x, y \in E$, где $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ – изотонный ЛОО со спектральным радиусом, меньшим единицы. Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в E, и это решение можно найти методом последовательных приближений, начав с произвольной точки $x_0 \in E$.*

Любое замкнутое непустое множество полного метрического пространства само является полным метрическим пространством с той же метрикой. Поэтому из первого предложения вытекает

Предложение 2. *Пусть E – обобщённое нормированное пространство с конусной нормой $\omega(\cdot)$, действующей в нормальный конус $\widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, причём E является полным метрическим пространством относительно метрики $\rho_*(x,y) = \|\omega(x-y)\|_{\widetilde{E}} = \|x-y\|_E$; $\Psi \subset E$ – непусто и замкнуто. Предположим, что $B : \Psi \to \Psi$ удовлетворяет условию (3), где $A : \widetilde{E} \to \to \widetilde{E}$ – изотонный ЛОО, $\rho(A) < 1$. Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в Ψ, и это решение можно найти методом последовательных приближений, начав с произвольной точки $x_0 \in \Psi$.*

Замечание 3. Отличие условий второго предложения и второй части теоремы 2 в следующем: в предложении $\widetilde{E}_+$ – нормальный конус в смысле [1] в банаховом пространстве $\widetilde{E}$. Конус по [1] – множество, состоящее из лучей, исходящих из нуля в $\widetilde{E}$ таких, что если $x \in \in \widetilde{E}_+$, $(-x) \in \widetilde{E}_+$, то $x = 0$. Его нормальность [1, п. 3.3, с. 49] равносильна существованию константы $M > 0$ такой, что

$$\|x_1\|_{\widetilde{E}} \leqslant M\|x_2\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых элементов} \quad x_1, x_2 \in \widetilde{E}_+, \quad x_1 \leqslant x_2. \tag{6}$$

Во второй части теоремы 2 $\widetilde{E}_+$ – множество, состоящее из лучей, выходящих из нуля в $\widetilde{E}$, а норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна, т.е. имеет место оценка (6) при $M = 1$. Между тем из работы [1, п. 6.4] не понятно, как может быть выполнено неравенство треугольника для метрики $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot)$ (см. предложения 1, 2) в случае, когда (6) выполняется лишь при $M > 1$. Видимо, использование слова “метрика” по отношению к $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot)$ подразумевает, что $M \leqslant 1$. Вообще говоря, нам не известно содержательных примеров нормального конуса с $M > 1$.

2. Об УСГР управляемого операторного уравнения второго рода. Пусть U – произвольное множество управляющих параметров. Рассмотрим управляемый аналог уравнения (5):

$$x = B(u)[x], \quad x \in E; \quad u \in U. \tag{7}$$

Далее будем считать, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна, а конус $\widetilde{E}_+$ замкнут в пространстве $\widetilde{E}$.

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

$\mathbf{S}_1$) *множество $\{x \in E : \omega(x) \leqslant h\}$ замкнуто в E для всех $h \in \widetilde{E}_+$;*

$\mathbf{S}_2$) *для $u = \overline{u} \in U$ уравнение (7) имеет решение $x = \overline{x} \in E$;*

$\mathbf{S}_3$) *существует число $\sigma > 0$ такое, что для множества $\Psi_\sigma = \{x \in E : \|x\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \sigma\}$ имеем $\Phi_\sigma = \bigcap_{u \in U} \mathcal{A}_+(B(u), \Psi_\sigma) \neq \varnothing$.*

Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$, $C > 0$ такие, что для каждого $u \in U$, удовлетворяющего неравенству $\|d_u\|_{\widetilde{E}} = \|B(u)\overline{x} - B(\overline{u})\overline{x}\|_E \leqslant \varepsilon$, где $d_u = \omega[B(u)\overline{x} - B(\overline{u})\overline{x}]$, уравнение (7) имеет решение $x = x_u \in E$. Более того, найдётся элемент $h_u \in \widetilde{E}_+$, обеспечивающий оценки $\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$, $\omega(x - \overline{x}) \leqslant h_u$, и, следовательно, $\|x - \overline{x}\|_E = \|\omega(x - \overline{x})\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$.

Доказательство. Выберем произвольно $A \in \Phi_\sigma$. Так как $\rho(A) < 1$, то для любого $u \in U$ уравнение

$$(I - A)h = d_u, \quad h \in \widetilde{E},$$

имеет единственное решение $h = h_u = (I - A)^{-1}d_u$. Поскольку $d_u \geqslant 0$, а оператор A изотонный, то выполняется неравенство $h_u \geqslant 0$. Определим число $\varepsilon > 0$ из условия $\|(I-A)^{-1}\|\varepsilon \leqslant \sigma$.

Обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ множество всех $u \in U$ таких, что $\|d_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant \varepsilon$. Таким образом, для любых $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ имеем

$$\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\varepsilon \leqslant \sigma, \quad C = \|(I-A)^{-1}\|.$$

Выберем произвольно $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ и определим множество $\Psi = \{x \in E : \omega(x-\overline{x}) \leqslant h_u\}$. Согласно условию $\mathbf{S}_1)$ это множество замкнуто и, очевидно, не пусто, так как $\overline{x} \in \Psi$. Кроме того, в силу монотонности нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ для всякого $x \in \Psi$ справедлива оценка

$$\|x-\overline{x}\|_E = \|\omega(x-\overline{x})\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant \sigma \Rightarrow \|x\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \|x-\overline{x}\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \sigma.$$

Стало быть, $\Psi \subset \Psi_\sigma$. И по построению $A \in \mathcal{A}_+(B(u),\Psi_\sigma)$. Следовательно, $A \in \mathcal{A}_+(B(u),\Psi)$. Покажем, что $B = B(u) : \Psi \to \Psi$. Выберем произвольно $x \in \Psi$ и в силу неравенства (3) из определения класса $\mathcal{A}_+(B(u),\Psi)$, а также очевидного вложения $\overline{x} \in \Psi$, оценим

$$\omega(Bx-\overline{x}) = \omega[B(u)x - B(\overline{u})\overline{x}] \leqslant \omega[B(u)x - B(u)\overline{x}] + d_u \leqslant A[\omega(x-\overline{x})] + d_u \leqslant A[h_u] + d_u = h_u.$$

Таким образом, $Bx \in \Psi$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. Теорема доказана.

3. О ТГР управляемого операторного уравнения второго рода. Рассмотрим вновь уравнение (7). Так же, как и в предыдущем пункте, считаем, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна. Будем предполагать, что существует изотонный оператор $F : \widetilde{E}_+ \to \widetilde{E}_+$, мажорирующий семейство операторов $B(u)$, $u \in U$, в следующем смысле: $\omega(B(u)x) \leqslant F[\omega(x)]$ для всех $x \in E$, $u \in U$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

$\mathbf{T}_1)$ *существует элемент $h \in \widetilde{E}_+$, удовлетворяющий мажорантному неравенству*

$$F[h] \leqslant h;$$

$\mathbf{T}_2)$ *множество $\Psi_h = \{x \in E : \omega(x) \leqslant h\}$ замкнуто в пространстве E;*

$\mathbf{T}_3)$ *$\mathcal{A}_+(B(u),\Psi_h) \neq \varnothing$ для всех $u \in U$.*

Тогда уравнение (7) имеет решение $x = x_u \in \Psi_h$ для любых $u \in U$. Более того, $\|x_u\|_E \leqslant \|h\|_{\widetilde{E}}$ для всех $u \in U$.

Доказательство. Выберем произвольно управление $u \in U$ и обозначим $B = B(u)$. В соответствии с теоремой 2 достаточно установить, что $B : \Psi_h \to \Psi_h$. Выберем произвольно $x \in \Psi_h$ и оценим: $\omega(Bx) \leqslant F[\omega(x)] \leqslant F[h] \leqslant h$, т.е. $Bx \in \Psi_h$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. Оценка нормы $\|x_u\|_E \leqslant \|h\|_{\widetilde{E}}$ получается очевидным образом из оценки $\omega(x_u) \leqslant h$ и монотонности нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$. Теорема доказана.

4. Пример: управляемое нелинейное операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. Пусть X – банахово пространство, $a \in X$ – заданный элемент, $u \in U$ – управление. По аналогии с [3, гл. V, § 1] рассмотрим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f[u](t,\varphi(t)), \quad t \in (0,T], \quad \varphi(0) = a, \quad \varphi \in \mathbb{C}^1([0,T];X). \tag{8}$$

Примем $E = \mathbb{C}([0,T];X)$. В случае, когда правая часть уравнения принадлежит классу E для всех $\varphi \in E$, задача (8) равносильна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера)

$$\varphi(t) = a + \int_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds, \quad t \in [0,T], \quad \varphi \in E. \tag{9}$$

Для уравнения (9) будем рассматривать правые части, удовлетворяющие более слабому требованию, и введём понятие п.в.-решения исходной задачи. Назовём функцию $\varphi(t)$ со значениями в X абсолютно непрерывной, если для неё существуют $b \in X$ и $z \in L_1([0,T];X)$ такие, что выполняется равенство $\varphi(t)=b+\int_0^t z(s)\,ds$ для любого $t\in[0,T]$. Как известно (см. работу [3, гл. IV, § 1, теорема 1.7]), в этом случае для п.в. $t\in[0,T]$ существует производная $\varphi'(t)=z(t)$. Соответствующий класс функций обозначим $\mathbb{AC}([0,T];X)$. Из [3, гл. IV, § 1, теорема 1.6], а также из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. $\mathbb{AC}([0,T];X)\subset\mathbb{C}([0,T];X)$. *Более того, пространство* $\mathbb{AC}([0,T];X)$ *является банаховым относительно нормы* $\|\varphi\|_{\mathbb{AC}([0,T];X)}=\|\varphi\|_{\mathbb{C}([0,T];X)}+\|\varphi'\|_{L_1([0,T];X)}$.

Далее будем предполагать, что правая часть уравнения f удовлетворяет следующим условиям:

$\mathbf{F}_1$) для всех $u\in U$, $\varphi\in E$ отображение $t\in[0,T]\to f[u](t,\varphi(t))$ принадлежит классу $L_1([0,T];X)$;

$\mathbf{F}_2$) существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M):[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u\in U$, $\varphi,\psi\in E$, $\|\varphi\|_E$, $\|\psi\|_E\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|f[u](t,\varphi(t))-f[u](t,\psi(t))\|_X\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\varphi(t)-\psi(t)\|_X$.

Решение уравнения (9) будем искать в классе E. В силу сделанных предположений и леммы 2 всякое решение класса E на самом деле будет принадлежать классу $\mathbb{AC}([0,T];X)$. Это и есть п.в.-решение исходной задачи (8). Положим $\widetilde{E}=\mathbb{C}[0,T]$, $\omega(\varphi)=\omega(\varphi)(t)=\|\varphi(t)\|_X$. Очевидно, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна. Теперь уравнение (9) можно записать в виде

$$\varphi=B(u)[\varphi],\quad \varphi\in E,\quad u\in U;\quad B(u)[\varphi](t)\equiv a+\int\limits_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds,\quad t\in[0,T].$$

Теорема 5 (о локальной разрешимости). *Для любого управления* $u\in U$ *и числа* $M>\|a\|_X$ *найдётся число* $T=T(M,u)>0$ *такое, что на отрезке* $[0,T]$ *уравнение (9) имеет решение* $\varphi\in E$.

Доказательство. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдётся число $T=T(M,u)>0$ такое, что

$$\|a\|_X+M\gamma+\int\limits_0^T\|f[u](t,0)\|_X\,dt<M,\quad \gamma=\int\limits_0^T\mathcal{N}(t,M)\,dt<1.$$

Обозначим $\Psi=\{\varphi\in E:\|\varphi\|_E\leqslant M\}$, $f=f[u]$, $B=B(u)$. Выберем произвольно функцию $\varphi\in\Psi$ и оценим

$$\|B[\varphi](t)\|_X\leqslant\|a\|_X+\int\limits_0^T\|f(t,\varphi(t))-f(t,0)\|_X\,dt+\int\limits_0^T\|f(t,0)\|_X\,dt\leqslant\|a\|_X+M\gamma+\int\limits_0^T\|f[u](t,0)\|_X\,dt,$$

откуда следует $\|B[\varphi](t)\|_X<M$, и таким образом, $B\varphi\in\Psi$. Теперь для произвольных φ, $\psi\in\Psi$ оценим

$$\|(B\varphi)(t)-(B\psi)(t)\|_X\leqslant\int\limits_0^T\|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))\|_X\,dt\leqslant\gamma\|\varphi-\psi\|_E.$$

Следовательно, $\|B\varphi-B\psi\|_E\leqslant\gamma\|\varphi-\psi\|_E$, что означает, что оператор B является сжимающим на множестве Ψ, стало быть, имеет на нём единственную неподвижную точку. Теорема доказана.

Понятно, что на самом деле горизонт T существования решения может быть существенно больше той оценки, которая устанавливается при доказательстве теоремы 5. Более того, очевидно, что при увеличении M указанная оценка T будет уменьшаться. Кроме того, он будет зависеть от управления. Поэтому актуальным является вопрос об УСГР.

Для произвольно фиксированного числа $M > 0$ рассмотрим оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$, определяемый формулой

$$A[v](t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, M)v(s)\,ds, \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0, T], \quad v \in \widetilde{E}.$$

Лемма 3. *Спектральный радиус* $\rho(A) = 0$.

Доказательство. Если бы $\mathcal{N}(s, M) = \mathcal{N}(M)$, то этот факт можно было бы тривиально получить из формулы (4). При наличии зависимости от s её применение затрудняется. Вместе с тем нетрудно заметить, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $v \in \widetilde{E}$, $\|v\|_{\widetilde{E}} \leqslant 1$, имеем $\|A^k v\|_{\widetilde{E}} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} |(A^k v)(t)| = \|A^k v\|_{L_\infty[0,T]}$. С другой стороны, учитывая непрерывное вложение $\widetilde{E} \subset L_\infty[0, T]$, получаем

$$\sup\{\|A^k v\|_{\widetilde{E}} : v \in \widetilde{E}, \ \ \|v\|_{\widetilde{E}} \leqslant 1\} = \sup\{\|A_\infty^k v\|_{L_\infty} : v \in \widetilde{E}, \ \ \|v\|_{L_\infty} \leqslant 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\{\|A_\infty^k v\|_{L_\infty} : v \in L_\infty[0, T], \ \ \|v\|_{L_\infty} \leqslant 1\},$$

т.е. $\|A^k\| \leqslant \|A_\infty^k\|$, и стало быть, $\rho(A) \leqslant \rho(A_\infty)$. Здесь A_∞ – естественное расширение оператора A до оператора $L_\infty[0, T] \to L_\infty[0, T]$. Таким образом, достаточно доказать, что $\rho(A_\infty) = 0$. Поскольку $L_\infty[0, T]$ – банахово идеальное пространство, здесь можно использовать критерий [35, теорема 2], в соответствии с которым достаточно, чтобы оператор A_∞ обладал для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой. Напомним, что измеримое множество $H \subset [0, T]$ называется вольтерровым для оператора A_∞, если $P_H A_\infty P_H = P_H A_\infty$ (здесь P_H – это оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества H). Для любого $k \in \mathbb{N}$ всякий кортеж $\{H_0, \ldots, H_k\}$ вольтерровых множеств называется вольтерровой δ-цепочкой оператора A, если выполняются условия:

$$\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = [0, T]; \quad \|P_h A_\infty P_h\| \leqslant \delta \quad \text{для каждого} \quad h = H_i \setminus H_{i-1}, \quad i = \overline{1, k}.$$

В нашем случае можно взять $H_i = [0; t_i]$, $i = \overline{1, k}$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для $h = (t_{i-1}; t_i]$ имеем $A_\infty[\chi_h](t) \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t, M)\,dt \leqslant \delta$, если мелкость разбиения $\max\limits_{i=\overline{1,k}} |t_i - t_{i-1}|$ достаточно мала. Таким образом, оператор A_∞ обладает вольтерровой δ-цепочкой для любого $\delta > 0$. Следовательно, $\rho(A_\infty) = 0$. Лемма доказана.

Продолжив считать число $M > 0$ фиксированным, обозначим $\Psi = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E \leqslant M\}$.

Лемма 4. *Для любых функций* φ, $\psi \in \Psi$, $u \in U$, $B = B(u)$ *справедлива оценка*

$$\omega(B\varphi - B\psi) \leqslant A[\omega(\varphi - \psi)].$$

Доказательство. Для $f = f[u]$ и п.в. $t \in [0, T]$ имеем

$$\|(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|f(s, \varphi) - f(s, \psi)\|\,ds \leqslant \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, M)\|\varphi(s) - \psi(s)\|_X\,ds = A[\omega(\varphi - \psi)](t).$$

Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 получаем, что для любого замкнутого ограниченного шара Ψ и любых $u \in U$ класс $\mathcal{A}_+(B(u), \Psi) \neq \varnothing$. Поэтому, согласно теореме 1, уравнение (9) не может иметь более одного решения в E. Более того, очевидно также, что для любого замкнутого ограниченного шара Ψ пересечение $\bigcap_{u\in U} \mathcal{A}_+(B(u), \Psi) \neq \varnothing$, так как содержит оператор A указанного вида. Кроме того, для всякого $h \in \widetilde{E} = \mathbb{C}[0, T]$, $h \geqslant 0$, множество $\{\varphi \in E : \omega(\varphi) \leqslant h\}$, очевидно, замкнуто в $E = \mathbb{C}([0,T];X)$, так как функция $\omega(\varphi)(t) = \|\varphi(t)\|_X$ непрерывна, а всякое нестрогое поточечное неравенство для последовательности непрерывных функций сохраняется и для предельной функции. Поэтому непосредственно из теоремы 3 вытекает

Теорема 6 (об УСГР). *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). *Предположим, что для управления* $u = \overline{u} \in U$ *уравнение (9) имеет решение* $\varphi = \overline{\varphi} \in E$. *Тогда найдутся числа* $\varepsilon > 0$, $C > 0$ *такие, что для всякого* $u \in U$, *удовлетворяющего неравенству* $\|d_u\|_{\widetilde{E}} = \|B(u)\overline{\varphi} - B(\overline{u})\overline{\varphi}\|_E \leqslant \varepsilon$, *где* $d_u = \omega[B(u)\overline{\varphi} - B(\overline{u})\overline{\varphi}]$, *уравнение (9) имеет, и притом единственное, решение* $\varphi = \varphi_u \in E$. *Более того, найдётся функция* $h_u \in \widetilde{E}_+$ *такая, что* $\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$, $\omega(\varphi - \overline{\varphi}) \leqslant h_u$ *и, следовательно,* $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_E = \|\omega(\varphi - \overline{\varphi})\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$.

Чтобы сформулировать теорему о ТГР, сделаем дополнительно следующие предположения:

$\mathbf{F}_3$) существует функция $\mathcal{N}_1(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, измеримая по $t \in [0,T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ и такая, что $\|f[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(\,\cdot\,,h(\cdot)) \in L_1[0,T]$ для любых $u \in U$, $h \in \widetilde{E}_+$, $\varphi \in E$, $\|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$;

$\mathbf{F}_4$) существует $g \in \mathbb{AC}[0,T]$ – решение уравнения

$$\|a\|_X + \int\limits_0^t \mathcal{N}_1(s,g(s))\,ds = g(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Непосредственно из теоремы 4 вытекает

Теорема 7 (о ТГР). *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_4$). *Тогда для всех* $u \in U$ *уравнение (9) имеет единственное решение* $\varphi = \varphi_u \in E$ *и, более того, справедлива оценка*

$$\|\varphi_u(\cdot)\|_X \leqslant g.$$

5. Пример: сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа. К уравнению (9) могут быть сведены многие эволюционные системы, связанные с сильно нелинейными дифференциальными уравнениями псевдопараболического типа. Следуя [4] рассмотрим начально-краевую задачу, связанную с (сначала неуправляемым) уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11}$$

где $q_i > 0$, $i = 1,2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $n \geqslant 1$. Для получения необходимых оценок в статье [4] предполагается дополнительно, что $q_i \leqslant 4/(n-2)$ при $n \geqslant 3$, $q_1 \geqslant 1$. Как показано в статье [4] задача (11) возникает при исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии (в частности, в полупроводниках). Обозначим $X = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $X^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ – сопряжённое пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобка двойственности между пространствами X и X^*, $E = \mathbb{C}([0,T];X)$, $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0,T]$, $E^* = \mathbb{C}([0,T];X^*)$. Для $\varphi_0 \in X$ решение задачи (11) понимается в сильном обобщённом смысле и ищется в пространстве $\mathbb{C}^1([0,T];X)$. Следуя работе [4], положим

$$J(\varphi) = Q + (q_1+1)|\varphi|^{q_1} I : X \to X^*, \quad F\varphi = |\varphi|^{q_2}\varphi, \quad F : X \to X^*, \quad G\varphi = [J(\varphi)]^{-1}[-Q\varphi + F\varphi],$$

где $Q\varphi = -\Delta\varphi$, $Q : X \to X^*$ – оператор Лапласа (с точностью до знака), понимаемый в сильном обобщённом смысле:

$$\langle Q\varphi,\psi\rangle = (\nabla\varphi,\nabla\psi)_{L_2} = \int\limits_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx, \quad \varphi,\psi \in X.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, отсюда легко получаем оценку

$$\|Q\varphi_1 - Q\varphi_2\|_{X^*} \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для всех $\varphi_i \in X$, $i = 1,2$. Как показано в [4], справедливы следующие факты:

1) $G : X \to X,\ \ G : E \to E$;

2) задача (11) сводится к уравнению $\varphi = \widetilde{B}\varphi,\ \ \varphi \in E,$ где $(\widetilde{B}\varphi)(t) = \varphi_0 + \int_0^t (G\varphi)(s)\,ds$, $t \in [0,T]$;

3) $\|J(\varphi)^{-1}z_1 - J(\varphi)^{-1}z_2\|_X \leqslant \|z_1 - z_2\|_{X^*}$ для всех $\varphi \in X,\ \ z_1, z_2 \in X^*$;

4) $\|J(\varphi_1)^{-1} - J(\varphi_2)^{-1}\| \leqslant \mu_1(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для каждых $\varphi_i \in X,\ \ \|\varphi_i\|_X \leqslant M,\ \ i = 1,2$;

5) $\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_{X^*} \leqslant \mu_2(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для любых $\varphi_i \in X,\ \ \|\varphi_i\|_X \leqslant M,\ \ i = 1,2$.

Стало быть, для $\widetilde{\mathcal{N}}(M) = \mu_1(M)M[1 + \mu_2(M)] + 1 + \mu_2(M)$ имеем

$$\|(G\varphi_1)(t) - (G\varphi_2)(t)\|_X \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}(M)\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_X \quad \text{при всех} \quad \varphi_i \in E, \quad \|\varphi_i\|_E \leqslant M, \quad i = 1,2.$$

В [4] для задачи (11) доказаны единственность решения и локальная разрешимость, а при условии $q_1 \geqslant q_2$ – глобальная разрешимость; при условии $q_1 < q_2$ установлено существование максимального по времени решения и получена оценка сверху для времени разрушения решения. Глобальная разрешимость доказана также при условии достаточной малости нормы $\|\varphi_0\|_X$.

Пусть теперь для каждого управления $u \in U$ определён оператор

$$g[u](t,\varphi) : [0,T] \times X \to X^*, \quad g[u](\,\cdot\,,\cdot) : E \to E^*,$$

удовлетворяющий оценке

$$\|g[u](t,\varphi_1) - g[u](t,\varphi_2)\|_{X^*} \leqslant \widehat{\mathcal{N}}(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для каждого $t \in [0,T]$, где $\varphi_i \in X,\ \ \|\varphi_i\|_X \leqslant M,\ \ i = 1,2,$ при некоторой неубывающей функции $\widehat{\mathcal{N}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим управляемый аналог задачи (11):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = g[u](t,\varphi), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

в физическом смысле предполагающий наличие дополнительных управляемых источников тока свободных электронов. Аналогично (11) задача (12) может быть записана в виде уравнения

$$\varphi = B(u)[\varphi], \quad \varphi \in E; \quad (B(u)\varphi)(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $f[u](s,\varphi) = J(\varphi)^{-1}[-Q\varphi + F\varphi - g[u](s,\varphi)]$. Из наших построений следует, что условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) п. 4 выполнены. Поэтому справедлива соответствующая конкретизация теорем 5 и 6. Прежде чем сформулировать условия ТГР, заметим, что в работе [4] показано

$$\|(G\varphi)(t)\|_X \leqslant \|\varphi(t)\|_X + \|(F\varphi)(t)\|_{X^*} \leqslant C\|\varphi(t)\|_X^{q_2+1} + \|\varphi(t)\|_X \quad \text{для любых } t \in [0,T], \quad \varphi \in E.$$

Предположим дополнительно, что существует функция $\mathcal{N}_0(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, измеримая по $t \in [0,T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ и такая, что для любых $u \in U,\ \ h \in \widetilde{E}_+,\ \ \varphi \in E$, $\|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$ выполняется

$$\|g[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_{X^*} \leqslant \mathcal{N}_0(\,\cdot\,,h(\cdot)) \in L_1[0,T].$$

Положим

$$\mathcal{N}_1(t,M) = CM^{q_2+1} + M + \mathcal{N}_0(t,M).$$

Тогда при $u \in U,\ \ h \in \widetilde{E}_+,\ \ \varphi \in E,\ \ \|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$ будем иметь оценку

$$\|f[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_{X^*} \leqslant \mathcal{N}_1(\,\cdot\,,h(\cdot)).$$

При сделанных предположениях теорема 7 конкретизируется следующим образом.

Теорема 8 (о ТГР). *Пусть существует $g \in \mathbb{AC}[0,T]$ – решение уравнения (10) при $a = \varphi_0$ и принятых нами X и $\mathcal{N}_1(\,\cdot\,,\cdot)$. Тогда для всех $u \in U$ уравнение (13) имеет единственное решение $\varphi = \varphi_u \in E$ и, более того, $\|\varphi_u(\cdot)\|_X \leqslant g$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
2. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Задача Коши для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения переноса // Мат. заметки. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 677–686.
3. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
4. *Корпусов М.О.* Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 678–685.
5. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределёнными системами. М., 1987.
6. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
7. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределёнными системами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1998.
8. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. I // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145–155.
9. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. II // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198–204.
10. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. III // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164–174.
11. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493–495.
12. *Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2000.
13. *Чернов А.В.* О преодолении сингулярности распределённых систем управления // Тр. Третьей Всерос. науч. конф. “Мат. моделирование и краевые задачи”. Самара, 2006. Ч. 2. С. 171–174.
14. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределённых задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
15. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределённых оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.
16. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
17. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределённых систем // Тр. Междунар. конф. “Динамика систем и процессы управления”, посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г.). Екатеринбург, 2015. С. 293–300.
18. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243.
19. *Sumin V.I.* Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51. № 32. P. 759–764.
20. *Chernov A.V.* Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation // Comput. Math. and Math. Phys. 2018. V. 58. № 12. P. 2018–2030.
21. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
22. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94.
23. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.
24. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
25. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами. Ч. I. Нижний Новгород, 1992.

26. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Совр. математика и её приложения. 2006. Т. 40. С. 3–138.
27. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications // Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010.
28. *Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y.* On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Math. Ann. 1993. V. 296. № 2. P. 215–234.
29. *Lu G.* Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem // Nonlin. Anal., Theory Methods Appl. 1995. V. 24. № 8. P. 1193–1206.
30. *Tersenov A.* The Dirichlet problem for second order semilinear elliptic and parabolic equations // Differ. Equat. Appl. 2009. V. 1. № 3. P. 393–411.
31. *Saito H.* Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity $L_p - L_q$ class // J. Differ. Equat. 2018. V. 264. № 3. P. 1475–1520.
32. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74.
33. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М., 1962.
34. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
35. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского,
Нижегородский государственный технический
университет имени Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.
После доработки 17.05.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 669–685

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+517.984.5

О СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМОЙ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩИМ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2022 г. Ю. А. Тихонов

Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины при неотрицательных значениях времени в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются интегро-дифференциальным уравнением с условиями шарнирного закрепления на концах и начальными условиями. Решение этого уравнения может быть записано посредством полугруппы операторов. В данной работе установлено, что указанное уравнение порождает аналитическую в некотором угле правой полуплоскости полугруппу.

DOI: 10.31857/S0374064122050077, EDN: CBHGSS

Введение. Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ при $t \geqslant 0$ в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются уравнением, рассмотренным в работе [1]:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + \int\limits_0^t \frac{dK(t-s)}{dt}\frac{\partial^4 u(s,x)}{\partial x^4}\,ds = 0, \qquad (1)$$

где $t > 0$, $0 < x < 1$. Параметр α положителен и пропорционален внутреннему трению Кельвина–Фойгта (см. монографию [2, гл. 2]), $g(x)$ – гладкая ограниченная вещественная функция, пропорциональная неоднородной силе натяжения. Функция $K(t)$ задаётся интегралом Лебега–Стилтьеса

$$K(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu(\tau) \qquad (2)$$

с неубывающей, непрерывной справа функцией μ такой, что $\operatorname{supp} d\mu \subset [d_0, +\infty]$, $d_0 > 0$. При этом справедливо условие

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1. \qquad (3)$$

Краевые условия для уравнения (1) задаются в предположении шарнирного закрепления концов трубы:

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0. \qquad (4)$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1. \qquad (5)$$

Уравнение (1) с краевыми (4) и начальными (5) условиями запишем в операторном виде, рассмотрев сепарабельное гильбертово пространство $H = L_2[0,1]$ и операторы A и C, действующие как

$$Ay(x) = \frac{d^4 y(x)}{dx^4}, \quad Cy(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}(x)\right),$$

на функциях $y(x) \in \mathrm{Dom}\,(A) = \{y : y \in W_2^4[0,1],\ \ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}$. Неизвестную функцию $u(t,x)$ рассматриваем как вектор-функцию $u(t)$ со значениями в пространстве H, а начальные условия φ_0 и φ_1 – как некоторые векторы в H. Исходная задача в введённых обозначениях принимает следующий вид:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A\frac{du(t)}{dt} + (A+C)u(t) + \int\limits_0^t \frac{dK(t-s)}{dt}Au(s)\,ds = 0, \tag{6}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1. \tag{7}$$

Задача Коши (6), (7) возникает, например, в задачах вязкоупругости и теплопроводности. Если положим $\alpha = 0$ и $C = 0$, то получим уравнение Гуртина–Пипкина (см. [3]), описывающее процесс распространения тепла в средах с памятью. Изучению уравнения Гуртина–Пипкина посвящено большое количество работ, в том числе зарубежных. Прежде всего отметим здесь работы В.В. Власова с соавторами. В статьях [4, 5] для частного случая ядра свёртки (2), являющегося рядом из убывающих экспонент, установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведён спектральный анализ оператор-функции, которая является символом уравнения (6), получена асимптотика невещественных точек спектра и локализация вещественных кластеров, на основе чего получено представление решения в виде ряда из экспонент. Развитие указанных результатов на случай интегральных ядер проведено в работе [6]. Перечисленные результаты изложены в монографии [7, гл. 3]. Наиболее общий случай, включающий ненулевой оператор C, а также ещё одно дополнительное слагаемое типа вольтерровой свёртки с ядром аналогичным (2), изучен авторами в [8, 9]. В [10] исследована задача (6), (7) с наиболее общими ядрами свёртки – ядрами Работнова. Наконец, в работе Н.А. Раутиан [11] задача (6), (7) исследована с помощью полугруппового подхода, наиболее близкого к тому, который будет использован в настоящей работе. Кроме того, для случая $\alpha > 0$ получены результаты о корректной разрешимости задачи (6), (7) (см. [4, 5]).

Операторные модели типа Гуртина–Пипкина с нулевым параметром α с некоммутирующими операторными слагаемыми изучались также в работах других авторов.

В работах [12] и [13] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. В [14] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина.

В монографии [15] и в [16, 17] разработан подход к решению задачи (6), (7) с позиции теории полугрупп, где для случая, когда $\alpha = 0$ и $C = 0$, но для более общего вида ядер $K(t)$, установлен вид генератора полугруппы и доказано, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой.

Модели типа (6), (7) с компактным носителем интегральных ядер могут быть получены из операторных моделей вязкоупругих жидкостей, рассматриваемых в работах Д.А. Закоры [18–20], в которых построена экспоненциально устойчивая сжимающая полугруппа, на основе чего получены результаты о классической разрешимости уравнений, а также об асимптотическом поведении этих решений. Отметим, что в настоящей работе использованы методы, близкие к тем, что применялись в указанных работах Д.А. Закоры.

Абстрактное интегро-дифференциальное уравнение типа (6) с дополнительными операторными слагаемыми возникает при изучении флаттера. Исследование указанного уравнения представлено в статьях [21, 22].

Спектральный анализ оператор-функции, в которой $\alpha > 0$, $C = 0$, приведён в работах [23, 24], где установлена локализация спектра соответствующей оператор-функции, а также изучен вопрос о конечности числа вещественных точек в спектре.

Оператор-функция, являющаяся символом уравнения вида (6) с нулевым интегральным ядром, исследовалась в статьях [25] и [26]. В них получена классификация точек спектра положительного, отрицательного и нейтрального типов для оператора, являющегося “линеаризацией” этой оператор-функции, исследован вопрос базисности Рисса его собственных функций.

Наконец, аналогичная оператор-функция, включающая в себя интегральное слагаемое, изучалась в работе [27]. В ней установлено, что спектр оператор-функции в правой полуплоскости состоит из конечного числа характеристических точек, равному с учётом кратности количеству отрицательных собственных значений оператора

$$(1-K(0))A+C.$$

Целью настоящей работы является исследование свойств полугруппы операторов, порождаемой задачей (6), (7), а также доказательство аналитичности этой полугруппы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим для абстрактного интегро-дифференциального уравнения задачу (6), (7) в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Ядро вольтерровой свёртки имеет вид (2) и удовлетворяет условию (3) в нуле.

Предположим, что операторы A и C удовлетворяют следующим условиям:

(A) оператор A – самосопряжённый и положительно определённый: $A=A^*$, $A\geqslant aI$, где $a>0$; обратный к нему оператор A^{-1} является компактным;

(B) оператор C – симметричный, A – компактный в смысле Като [28, с. 247];

(C) $\|A^{-1/2}CA^{-1/2}\|<1-K(0)$.

По условию (C) сделаем замечание: оператор CA^{-1} ограничен в пространстве H, а следовательно, и $A^{-1}C$ ограничен в $H_1:=\{h\in \mathrm{Dom}\,(A), \|h\|_1:=\|Ah\|\}$ и имеет ограниченное замыкание в H, из чего следует, что оператор $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ по теореме об интерполяции (см. [29, гл. I, теорема 5.1]) имеет ограниченное замыкание в H . Таким образом, условие (C) корректно.

Задачу Коши для уравнения второго порядка (6), (7) запишем в виде задачи Коши для системы уравнений первого порядка. Прежде всего заметим, что из условий (B) и (C) следует, что оператор $(1-K(0))I+\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}$ ограниченный, самосопряжённый и положительно определённый*). Пусть

$$\tilde{B}:=(\overline{(1-K(0))I+A^{-1/2}CA^{-1/2}})^{1/2}. \tag{8}$$

Введём новую неизвестную функцию $\rho(t)$ и рассмотрим систему

$$\frac{du(t)}{dt}+\alpha Au(t)+A^{1/2}\tilde{B}\rho(t)+\int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds=0,$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt}=\tilde{B}A^{1/2}u(t). \tag{9}$$

Далее введём функцию

$$v(t,\tau):=\int\limits_0^t\frac{e^{-\tau(t-s)}}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(s)\,ds.$$

Добавим уравнение

$$\frac{dv(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(t)-\tau v(t,\tau)$$

к системе (9) и подставим $v(t,\tau)$ в первое уравнение этой системы. Обозначив

$$\rho_0:=\tilde{B}^{-1}A^{-1/2}(\alpha Au_0+u_1),$$

получим задачу

$$\frac{du}{dt}(t)+A^{1/2}\Big(\alpha A^{1/2}u(t)+\tilde{B}\rho(t)+\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}v(t,\tau)\,d\mu(\tau)\Big)=0,$$

*) Здесь и далее через $\overline{T}$ обозначается замыкание оператора T.

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \tilde{B}A^{1/2}u(t),$$
$$\frac{dv}{dt}(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(t) - \tau v(t,\tau) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad v(0,\tau) \equiv 0. \tag{11}$$

Если формально продифференцируем по t первое уравнение в (10) и исключим переменные $\rho(t)$ и $v(t,\tau)$, то получим уравнение (6).

В данной работе мы покажем, что решение задачи (10), (11) может быть представлено посредством полугруппы операторов. Более того, будет установлено, что эта полугруппа является аналитической.

Отметим, что вопросы разрешимости задач (6), (7) и (10), (11) и эквивалентность этих вопросов требуют отдельного обоснования, находящегося за рамками настоящей работы.

2. Определение генератора полугруппы. На множестве $\mathbb{R}_+$ можно ввести неотрицательную меру

$$\nu(A) := \int\limits_A d\mu(\tau), \tag{12}$$

где $A \subset \mathbb{R}_+$ – борелевское множество. Интеграл (12) понимается в смысле Лебега–Стилтьеса. Рассмотрим теперь семейство гильбертовых пространств $H(\tau) := H$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, которое образует ν-измеримое поле (см. [29, п. 2.3]). Пространство

$$L_2(H,\mu) := \int\limits_0^{+\infty} H(\tau)\, d\mu(\tau)$$

является пространством ν-почти всюду определённых измеримых (в сильном смысле) функций $f : \mathbb{R}_+ \to H$ таких, что выполняется условие

$$\|f\|^2_{L_2(H,\mu)} = \int\limits_0^{+\infty} \|f(\tau)\|^2_H\, d\mu(\tau) < +\infty.$$

Пространство $L_2(H,\mu)$ является сепарабельным гильбертовым (см. [30, с. 148]). Далее норма и скалярное произведение в пространстве H будут обозначаться $\|\cdot\|$ и $(\cdot\,,\cdot)$ соответственно, а в пространстве $L_2(H,\mu)$ как $\|\cdot\|_2$ и $(\cdot\,,\cdot)_2$.

Рассмотрим операторы S, S^* и Γ, действующие в пространствах

$$S : H \to L_2(H,\mu),$$

$$S^* : L_2(H,\mu) \to H,$$

$$\Gamma : \mathrm{Dom}\,(\Gamma) \subset L_2(H,\mu) \to L_2(H,\mu)$$

по следующим правилам:

$$Sh(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\tau}}h, \quad h \in H,$$

$$S^*f := \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} f(\tau)\, d\mu(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu),$$

$$\Gamma f(\tau) := \tau f(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu).$$

Отметим при этом, что операторы S и S^* являются ограниченными, что следует из неравенств

$$\|Sh\|_2^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\|h\|^2}{\tau}\, d\mu(\tau) < \|h\|^2,$$

$$\|S^* f\|^2 = \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right\|^2 \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \|f\|^2\, d\mu(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \|f\|_2^2,$$

а также являются взаимно сопряжёнными:

$$(Sh, f)_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (h, f(\tau))\, d\mu(\tau) = \left(h, \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right) = (h, S^* f).$$

Оператор Γ – самосопряжённый, как оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве [31, п. 54], при этом является положительно определённым в пространстве $L_2(H, \mu)$ ввиду того, что носитель меры ν отделён от 0.

Определим пространство $\mathbb{H} := H \bigoplus H \bigoplus L_2(H, \mu)$ со скалярным произведением

$$(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\mathbb{H}} := (\,\cdot\,,\cdot\,) + (\,\cdot\,,\cdot\,) + (\,\cdot\,,\cdot\,)_2,$$

индуцирующим евклидову норму, относительно которой $\mathbb{H}$ полно. Таким образом, $\mathbb{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим действующий в пространстве $\mathbb{H}$ оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\tilde{B} & -S^* \\ \tilde{B} & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{13}$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A}) = \{(u, \rho, v)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{H} : v \in \mathrm{Dom}\,(\Gamma), \quad (-\alpha A^{1/2} u - \tilde{B}\rho - S^* v) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})\}.$$

Лемма 2.1. *Множество* $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ *всюду плотно в* $\mathbb{H}$. *При этом оператор* $\mathcal{A}$ *является замкнутым и диссипативным.*

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов вида $(u, \rho, \tilde{v})^{\mathrm{T}}$, где $u \in \mathrm{Dom}\,(A)$, $\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, $\tilde{v}(\tau)$ – кусочно-постоянная функция, принимающая значения в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, и $\tilde{v}(\tau) \equiv 0$ вне некоторого компакта $\mathbb{R}_+$, где нуль – элемент H. Заметим, что $V \subset \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$. Действительно, $\tilde{B}^2 = (1 - K(0))I + A^{-1/2} C A^{-1/2}$ на $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $\tilde{B}\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ при $\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ в силу обратимости $\tilde{B}$. Далее, выполняется условие

$$\int\limits_0^{+\infty} \|\tau \tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) = \int\limits_K \|\tau \tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) < +\infty,$$

где K – компакт в $\mathbb{R}_+$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\left\| A^{1/2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right\| \leqslant \left(\int\limits_0^{+\infty} \|A^{1/2} \tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \|A^{1/2} v_i\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

где v_i – различные ненулевые значения функции $\tilde{v}(\tau)$ в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Множество V всюду плотно в пространстве $\mathbb{H}$. Действительно, $\mathrm{Dom}\,(A)$ и $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ плотны в H в силу самосопряжённости оператора A. Кусочно-постоянные функции с компактным носителем плотны в $L_2(H,\mu)$. Ввиду плотности $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ в H эти функции могут быть приближены к функциями вида $\tilde{v}(\tau)$ со значениями в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Следовательно, $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathbb{H}$. Первое утверждение леммы доказано.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ такую, что $x_n \to x \in \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}x_n \to y \in \mathbb{H}$ при $n \to +\infty$. По определению замкнутости линейного оператора нужно показать, что $x \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ и $y = \mathcal{A}x$.

Поскольку $x_n \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$, то $x_n = (u_n, \rho_n, v_n)^{\mathrm{T}}$, где $v_n \in \mathrm{Dom}\,(\Gamma)$ и $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, откуда следует, что $u_n \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Пусть $x = (u,\rho,v)^{\mathrm{T}}$, причём очевидно, что $u_n \to u$, $\rho_n \to \rho$ в H и $v_n \to v$ в $L_2(H,\mu)$ при $n \to +\infty$. Подействуем оператором $\mathcal{A}$ на вектор x_n:

$$\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u_n \\ \rho_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \\ \tilde{B}A^{1/2}u_n \\ SA^{1/2}u_n - \Gamma v_n \end{pmatrix} \to y := \begin{pmatrix} y_u \\ y_\rho \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $\tilde{B}A^{1/2}u_n \to y_\rho$, следовательно, $A^{1/2}u_n \to \tilde{B}^{-1}y_\rho$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$ $u \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $A^{1/2}u = \tilde{B}^{-1}y_\rho$, следовательно, $y_\rho = \tilde{B}A^{1/2}u$.

Далее, ввиду ограниченности S $SA^{1/2}u_n \to SA^{1/2}u$, следовательно, $\Gamma v_n \to (y_v - SA^{1/2}u) \in L_2(H,\mu)$ при $n \to +\infty$. Оператор Γ самосопряжён в $L_2(H,\mu)$, следовательно, замкнут, отсюда следует, что $\Gamma v = SA^{1/2}u - y_v$, т.е. $y_v = SA^{1/2}u - \Gamma v$.

Наконец, $A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to y_u$, при этом $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to (-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$ имеем $(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $y_u = A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$. Замкнутость оператора $\mathcal{A}$ доказана.

Как и в работе [32, лемма 2], проверяется непосредственно, что $\mathcal{A}$ является диссипативным оператором, т.е. выполняется $\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}h,h)_{\mathbb{H}} \leqslant 0$ для любого $h \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$. Тем самым лемма полностью доказана.

3. Основной результат. Основной результат данной работы есть обобщение результатов работы [32, теоремы 1 и 2] на случай, когда ядро вольтерровой свёртки $K(t)$ является интегралом Стилтьеса.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие (3) и условия (A)–(C), тогда оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Более того, эта полугруппа является аналитической.*

Доказательство теоремы 3.1 сводится к проверке условий двух классических теорем теории полугрупп (см. [33, с. 83]), формулировки которых приводим в следующем пункте для полноты изложения.

4. Теоремы о генераторе полугруппы.

Теорема 4.1 (Люмьера–Филлипса). *Пусть $\mathcal{A}$ – диссипативный оператор (т.е. для любого элемента $h \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ имеет место неравенство $\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}h,h)_{\mathbb{H}} \leqslant 0$) с плотной областью определения, тогда замыкание $\tilde{\mathcal{A}}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда область значений $\mathrm{Ran}\,(\mathcal{A} - \lambda I)$ оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ всюду плотна для некоторого $\lambda > 0$.*

Для доказательства аналитичности полугруппы, генератором которой является оператор $\mathcal{A}$, мы воспользуемся известным критерием аналитичности (см. [33, теорема 4.6]). Обозначим множество

$$\Lambda_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi/2 + \delta\}. \tag{14}$$

Теорема 4.2 (критерий аналитичности полугруппы). *Линейный оператор $\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы тогда и только тогда, когда существует число $\delta \in (0,\pi/2)$ такое, что*

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \Lambda_\delta \backslash \{0\},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся значение* $M_\varepsilon \geqslant 1$ *такое, что выполняется неравенство*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$$

для всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \overline{\Lambda_{\delta-\varepsilon}}$.

Символом $\rho(\mathcal{A})$ здесь и далее обозначено резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Далее мы установим, что $\Lambda_\delta \subset \rho(\mathcal{A})$. Кроме того, мы получим оценку нормы резольвенты $R(\lambda, \mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ во множестве Λ_δ.

5. Доказательство основных результатов. Ход рассуждений при доказательстве приведённых результатов во многом аналогичен доказательству результатов работы [32], поскольку общий вид оператора $\mathcal{A}$ (см. (13)) и свойства операторных коэффициентов аналогичны, однако в данном случае следует уточнить ряд моментов, в которых используется явный вид функции $K(t)$.

5.1. Переход от оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ к голоморфной в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, d_0]$ оператор-функции. Пусть оператор-функция $L(\lambda)$ определена равенством

$$L(\lambda) := \lambda^2 + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A,$$

где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $-K'(t)$, аналитически продолженное в левую полуплоскость, за исключением полуоси $(-\infty, -d_0)$, определяемое по формуле

$$\hat{K}(\lambda) = \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}.$$

Рассмотрим также оператор-функцию $\tilde{L}(\lambda)$, определённую равенством

$$\tilde{L}(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} + \tilde{B}^2 + (\alpha\lambda + K(0) - \hat{K}(\lambda))I.$$

Заметим, что в области $\operatorname{Dom}(A^{1/2})$ справедливо равенство

$$\tilde{L}(\lambda) = A^{-1/2} L(\lambda) A^{-1/2}$$

в силу (8).

Далее введём операторные матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathcal{B}_1(\lambda) := \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathcal{B}_2(\lambda) := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1} S & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\tilde{L}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\tilde{B}T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} I & T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{B}T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$.

Следующее утверждение доказано в работе [32, лемма 3].

Лемма 5.1. *Пусть* $\lambda \notin (-\infty, -d_0)$, $\lambda \neq 0$. *Тогда справедливо разложение*

$$\mathcal{A} - \lambda I = \mathcal{A}_0 \mathcal{B}_1(\lambda) \tilde{\mathcal{A}}(\lambda) \mathcal{B}_2(\lambda) \mathcal{A}_0, \tag{22}$$

где операторные матрицы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_1$, $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)$, $\mathcal{B}_2$ *определены равенствами (15)–(18). Кроме того, справедливо разложение*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \mathcal{B}_1 \tilde{\mathcal{A}} \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_0, \tag{23}$$

где операторные матрицы $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\tilde{\mathcal{A}}$ *определены равенствами (19)–(21).*

Из разложения (22) следует

Теорема 5.1. *Пусть* $\lambda \notin (-\infty, d_0) \bigcup \{0\}$, *тогда оператор* $\mathcal{A} - \lambda I$ *и оператор-функция* $\tilde{L}(\lambda)$ *непрерывно обратимы одновременно.*

Доказательство. Заметим, что при λ из условия теоремы операторы $\mathcal{B}_1(\lambda)$ и $\mathcal{B}_2(\lambda)$ принадлежат $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. При этом легко проверить, что обратные матрицы имеют вид

$$\mathcal{B}_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & -S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ (\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}_0$ обратим ввиду обратимости $A^{-1/2}$. Таким образом, оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)$ при λ из условия теоремы. Обратимость же последнего эквивалентна обратимости $\tilde{L}(\lambda)$. Теорема доказана.

Отметим ещё одно важное свойство $\mathcal{A}$, следующее из разложения (23).

Теорема 5.2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *непрерывно обратим.*

Доказательство. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ ограничены и

$$\mathcal{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & -S^*\Gamma^{-1} \\ \tilde{B}T^{-1} & I & -\tilde{B}T^{-1}S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Gamma^{-1}S & -\Gamma^{-1}ST^{-1}\tilde{B} & I \end{pmatrix}.$$

Из разложения (23) следует, что $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, для обратимости которого, в свою очередь, требуется обратимость $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$ и

$\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$. Оператор T – ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый. Далее отметим, что

$$\|\tilde{B}h\| = \|((1-K(0))h + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}h)^{1/2}\| \geqslant (1-K(0) - \|\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\|)^{1/2}\|h\|$$

для всех $h \in H$, откуда следует, что $\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$ – ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый оператор. Тем самым $\tilde{\mathcal{A}}$, а значит и $\mathcal{A}$, непрерывно обратим. Теорема доказана.

Теорема 5.1 позволяет свести изучение спектра оператора $\mathcal{A}$ к изучению спектра оператор-функции $\tilde{L}(\lambda)$.

В следующем пункте представлены основные результаты, касающиеся локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$, а также оценки нормы её резольвенты $L^{-1}(\lambda)$. Показано, что спектр $L(\lambda)$ содержится вне некоторого угла в левой полуплоскости, из чего следует аналогичный факт для оператор-функции $\tilde{L}(\lambda)$, а следовательно, и для оператора $\mathcal{A}$.

5.2. Локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Покажем, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ содержится в области $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda_\delta}$, где Λ_δ определена в (14). Полученные здесь результаты являются обобщениями результатов работы [24], в которой ядро вольтерровой свёртки было представимо в виде ряда из экспонент.

Для полноты изложения приведём определение понятия спектра оператор-функции.

Определение. *Резольвентным множеством* $\rho(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество точек в $\lambda\in\mathbb{C}$ такое, что оператор $L^{-1}(\lambda)$ определён и ограничен.

Спектром оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L) = \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

Для исследования спектра оператор-функции $L(\lambda)$ нам потребуется следующая

Лемма 5.2. *Спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0\}\bigcup\{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$ *состоит из собственных чисел конечной кратности.*

Доказательство. Имеем

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A = (\lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + (1+\alpha\lambda - \hat{K}(\lambda))I)A.$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + (1+\alpha\lambda - \hat{K}(\lambda))I.$$

Оператор $L(\lambda)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $\tilde{L}(\lambda)$ ввиду обратимости оператора A. Заметим, что если λ не является корнем уравнения

$$1+\alpha\lambda = \hat{K}(\lambda), \tag{24}$$

то оператор $\tilde{L}(\lambda)$ фредгольмова типа, а значит, если $\tilde{L}(\lambda)$ необратим, то λ – собственное число конечной кратности.

Далее, все корни уравнения (24) вещественны. Действительно, если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$, то выражения в левой и правой частях равенства (24) принимают значения в разных полуплоскостях, т.е. выполняется неравенство

$$\mathrm{Im}\,(1+\alpha\lambda)\,\mathrm{Im}\,\hat{K}(\lambda) < 0.$$

Пусть $\lambda \geqslant 0$, тогда

$$1 - \hat{K}(\lambda) + \alpha\lambda \geqslant 1 - K(0) + \alpha\lambda > 0.$$

Таким образом, уравнение (24) не имеет неотрицательных корней. Это простое замечание завершает доказательство леммы.

Получим, что если $\lambda \notin (-\infty, 0)$ – точка спектра оператор-функции $L(\lambda)$, то существует вектор $h \in \mathrm{Dom}\,(L(\lambda)) = \mathrm{Dom}\,(A)$ такой, что $L(\lambda)h = 0$, тем самым λ является корнем уравнения вида

$$l(\lambda) := \lambda^2 + \alpha a\lambda + K(0)a + b - a\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda} = 0,$$

где $b := (((1-K(0))A + C)h, h) > 0$.

Лемма 5.3. *Функция $l(\lambda)$ не имеет корней в замкнутой правой полуплоскости.*

Доказательство. Если $\lambda \geqslant 0$, то
$$l(\lambda) > 0$$
в силу неравенства (3). Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то
$$\operatorname{Im} l(\lambda) = 2\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Im}\lambda + \alpha a\operatorname{Im}\lambda + a\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda\, d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0$$
только в случае, когда
$$\operatorname{Re}\lambda < -\frac{\alpha a}{2} - \int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} < 0.$$
Тем самым лемма доказана.

Из лемм 5.2 и 5.3 следует

Теорема 5.3. *Оператор-функция $L(\lambda)$ не имеет точек спектра в замкнутой правой полуплоскости.*

Далее мы покажем, что невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ локализуется в левой полуплоскости внутри некоторого угла $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda_\delta}$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Для этого рассмотрим оператор-функцию
$$L_0(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + (1 - \hat{K}(\lambda))A.$$
Оператор A – самосопряжённый с компактным обратным, следовательно, векторы $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такие, что
$$Ae_n = a_n e_n, \quad 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \to +\infty,$$
образуют ортонормированный базис пространства H.

Обозначим через
$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n.e_n) = \lambda^2 + \alpha\lambda a_n + (1 - \hat{K}(\lambda))a_n \tag{25}$$
проекции оператор-функции $L_0(\lambda)$ на собственные подпространства, причём (см. [7, гл. 3])
$$\sigma(L_0) = \overline{\bigcup_n \{\lambda \in \mathbb{C} : l_n(\lambda) = 0\}}. \tag{26}$$
Укажем область локализации нулей функций $l_n(\lambda)$. Результаты, которые приводятся ниже, есть обобщение теоремы 1 работы [24] на случай ядер вольтерровой свёртки, представимых в виде интегралов Лебега–Стилтьеса. Обозначим область
$$D_\delta := \overline{\Lambda_\delta} \bigcup \left\{\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\frac{\alpha a_1}{2}, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0\right\}.$$

Лемма 5.4. *Функция $l_n(\lambda)$, определённая равенством (25), для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет не более двух невещественных корней, причём эти корни комплексно сопряженные. Если выполнено условие (3), то существует число $\delta \in (0, \pi/2)$ такое, что $l_n(\lambda)$ не имеет корней в области D_δ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Очевидно, что все невещественные корни образуют пары комплексно-сопряжённых корней в силу равенства $l_n(\overline{\lambda}) = \overline{l_n(\lambda)}$. Тот факт, что таких пар не более одной, установлен в работе [23]. Его доказательство опирается на модификацию известной теоремы Шварца–Пика [34, гл. 4, п. 70, теорема 3] для верхней полуплоскости, применённой к функции $\varphi_n(\lambda)$ такой, что
$$\varphi_n(\lambda) = \varphi(-\alpha a_n\lambda - a_n + K(\lambda)a_n),$$

где $\varphi^2(\lambda) = \lambda$. При этом в качестве φ выбирается ветвь, переводящая $\{0 < \arg\lambda < 2\pi\}$ в верхнюю полуплоскость.

Пусть выполнено условие (3). Заметим, что все вещественные корни функции $l_n(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости. Действительно, $l_n(x)$ монотонно возрастает на $(-d_0, +\infty)$, причём $l_n(0) > 0$ для любого n, следовательно, в замкнутой правой полуплоскости нет вещественных корней у функции $l_n(\lambda)$.

Пусть теперь $\lambda = x + iy$, $y > 0$ и $l_n(\lambda) = 0$, тогда

$$\operatorname{Im} l_n(\lambda) = 2xy + \alpha a_n y + a_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{y\,d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0,$$

откуда найдём

$$x = -\frac{\alpha a_n}{2} - a_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2}.$$

Тем самым получаем оценку вещественных частей комплексно-сопряжённых корней функции $l_n(\lambda)$:

$$x < -\frac{\alpha a_n}{2} < -\frac{\alpha a_1}{2}.$$

Далее запишем

$$l_n(\lambda) = f_n(\lambda) - a_n\hat{K}(\lambda),$$

где $f_n(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a_n\lambda + a_n$.

Нам потребуется оценка $f_n(\lambda)$ при $\lambda \in \overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha a_1/2\}$:

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| > \frac{\alpha^2 a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta),$$

которая устанавливается следующим образом:

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+iy)^2}{a_n} + \alpha(x+iy) + 1\right| \geqslant |x+iy|^2 \left|\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{(x+iy)^2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant (x^2+y^2)\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2}\right)\right| = \alpha|y| + \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha|\lambda|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \sin(2(\pi/2-\delta)) = \alpha|\lambda|\cos\delta + \sin(2\delta) > \frac{\alpha^2 a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta).$$

Оценим функцию $\hat{K}(\lambda)$ в области $\overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda < -\alpha a_1/2\}$:

$$|\hat{K}(x+iy)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau+x+iy}\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} = \int\limits_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} + \int\limits_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|}.$$

Для первого слагаемого в правой части последнего равенства справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} < \frac{1}{|y|}\int\limits_0^{2|x|} d\mu(\tau) < \frac{1}{|y|}\int\limits_0^{2|x|} 2|x|\frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \frac{2|x|}{|y|}.$$

Если $\lambda = x + iy \in \overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha a_1/2\}$, то

$$\frac{2|x|}{|y|} = \left|\frac{2\cos(\arg\lambda)}{\sin(\arg\lambda)}\right| \leqslant 2\frac{\cos(\pi/2-\delta)}{\sin(\pi/2-\delta)} = 2\operatorname{tg}\delta.$$

Для второго слагаемого в силу неравенств $|\tau + x + iy| > \tau - |x| > \tau/2$ при $\tau > 2|x|$ имеем оценку

$$\int\limits_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|} < 2 \int\limits_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 2.$$

Последнее неравенство вытекает из условия (3).

Заметим, что если справедливо неравенство

$$\frac{\alpha^2 a_1}{2} \operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta) > 2\operatorname{tg}\delta + 2, \tag{27}$$

то $|f_n(x+iy)/a_n| > |\hat{K}(x+iy)|$ на границе области $\Lambda_\delta \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda < -\alpha a_1/2\}$. Следовательно, по теореме Руше функция $l_n(\lambda)$ имеет столько же нулей, сколько и функция $f_n(\lambda)$ в этой области. Функция

$$g(\delta) = \frac{\alpha^2 a_1}{2} \operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta) - 2\operatorname{tg}\delta - 2$$

монотонно убывает и имеет единственный корень δ_0 на интервале $(0, \pi/2)$. Таким образом, при $\delta \in (0, \delta_0)$ неравенство (27) верно, и для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $l_n(\lambda)$ не имеет корней в $\overline{\Lambda_\delta}$. Лемма доказана.

По результатам леммы 5.4 вместе с соотношением (26) формулируется следующая

Теорема 5.4. *Пусть выполнено условие (3), тогда существует $\delta \in (0, \pi/2)$ такое, что $D_\delta \subset \rho(L_0)$.*

Далее нам потребуются некоторые оценки резольвенты оператор-функции $L_0(\lambda)$ в D_δ. Обозначим

$$D_{R,\delta} := D_\delta \bigcap \{|\lambda| \geqslant R\}.$$

Лемма 5.5. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся такие числа $R > 0$ и $\delta \in \in (0, \pi/2)$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in D_{R,\delta}$ будет справедлива следующая оценка:*

$$|l_n(\lambda)| > M a_n |\lambda|, \tag{28}$$

где M – положительная постоянная, зависящая только от выбора R и δ.

Доказательство. Зафиксируем значение $\delta \in (0, \pi/2)$, при котором выполнены условия леммы 5.4. Справедливо выражение

$$|l_n(\lambda)| = \left|\lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n(1 - K(0)) + a_n\lambda \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\right| \geqslant$$

$$\geqslant |\lambda| \left|\alpha a_n + \lambda + \frac{1 - K(0)}{|\lambda|} a_n\right| - a_n|\lambda| \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|}.$$

Поскольку для $\lambda \in \overline{\Lambda}_\delta \backslash 0$ выполняется неравенство $|\tau + \lambda| \geqslant |\lambda|\cos\delta$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|} < \frac{1}{|\lambda|\cos\delta}.$$

Далее имеем

$$|\alpha a_n + \lambda| \geqslant |\lambda| \left|\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha a_n}{\lambda} + 1\right)\right| = \frac{\alpha a_n |\operatorname{Im}\lambda|}{|\lambda|} \geqslant \alpha a_n \cos\delta.$$

Таким образом, получаем оценку

$$|l_n(\lambda)| > \alpha a_n|\lambda|\biggl(\cos\delta - \frac{1-K(0)}{\alpha|\lambda|} - \frac{1}{|\lambda|\cos\delta}\biggr).$$

При достаточно большом $R>0$ оценка (28) в $D_{R,\delta}$ доказана. Лемма доказана.

Перейдём теперь к оценке $L_0^{-1}(\lambda)$ в $D_{R,\delta}$.

Теорема 5.5. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся числа $R>0$ и $\delta\in(0,\pi/2)$ такие, что в области $D_{R,\delta}$ справедливы следующие оценки:*

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_1}{|\lambda|}, \tag{29}$$

$$\|L_0^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|^2}. \tag{30}$$

Постоянные M_1 и M_2 зависят только от выбора δ и R.

Доказательство. Выберем $\delta\in(0,\pi/2)$, для которого выполняются условия теоремы 5.4. Оценка (29) следует из леммы 5.5 и равенства

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| = \sup_n\biggl|\frac{a_n}{l_n(\lambda)}\biggr|.$$

Докажем оценку (30). Запишем $L_0(\lambda)$ в виде

$$L_0(\lambda) = \lambda(\alpha A+\lambda I)\biggl(I + \biggl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\biggr)(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\biggr).$$

Покажем, что существует $R>0$ такое, что для любого $\lambda\in D_{R,\delta}$ выполняется неравенство

$$\biggl\|\biggl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\biggr)(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\biggr\| < 1. \tag{31}$$

Справедливо равенство

$$\|(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|\,\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda, \sigma(A^{-1}))}.$$

Если $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$, то $\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda,\sigma(A^{-1}))\geqslant\alpha/|\lambda|$. В противном случае

$$\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda,\sigma(A^{-1}))\geqslant\biggl|\mathrm{Im}\,\frac{\alpha}{\lambda}\biggr|\geqslant\frac{\alpha|\mathrm{Im}\,\lambda|}{|\lambda|^2}=\frac{\alpha\cos\delta}{|\lambda|}$$

для $\lambda\in\overline{\Lambda_\delta}\backslash 0$. Отсюда следует, что

$$\|(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\| < \frac{|\lambda|}{|\lambda|\alpha} = \frac{1}{\alpha}. \tag{32}$$

При $\lambda\in\overline{\Lambda_\delta}\backslash 0$ справедливо неравенство $|\tau+\lambda|\geqslant|\lambda|\cos\delta$, из которого получаем оценку

$$\biggl|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\biggr| \leqslant \frac{1}{|\lambda\cos\delta|}K(0) < \frac{1}{|\lambda|\cos\delta}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, что существует $R > 0$ такое, что для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$ выполнено условие (31) и оператор

$$I + \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\right)(\alpha I + \lambda A^{-1})^{-1}$$

непрерывно обратим. Для $h \in \mathrm{Dom}\,(A)$, $\|h\| = 1$ оценим снизу $\|(\alpha A + \lambda I)h\|$, т.е. покажем, что

$$\|(\alpha A + \lambda I)h\| \geqslant m|\lambda| \tag{34}$$

для $\lambda \in \overline{\Lambda}_\delta$. Здесь m – положительная постоянная, зависящая только от δ. Имеем

$$\|(\alpha A + \lambda I)h\|^2 = ((\alpha A + \lambda I)h, (\alpha A + \lambda I)h) = \|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + |\lambda|^2.$$

Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, то неравенство (34), очевидно, верно. Иначе, если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$, $\lambda \in \overline{\Lambda}_\delta$, то можно записать

$$\|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + |\lambda|^2 = \|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + (|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2) =$$

$$= \|(\alpha A + \mathrm{Re}\,\lambda)h\|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 = |\lambda|^2 \cos^2 \delta.$$

Из (34) с учётом обратимости оператора

$$I + \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\right)(\alpha I + \lambda A^{-1})^{-1}$$

получим оценку (30) для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$.

Из теорем 5.4 и 5.5 вытекает следующий результат о спектре оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 5.6. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся $\delta \in (0, \pi/2)$, $R > 0$ такие, что $D_{R,\delta} \subset \rho(L)$. Более того, $\sigma(L) \bigcap \{|\mathrm{Im}\,\lambda| \neq 0\} \subset \{\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha a_1/2\}$, и при этом в области $D_{R,\delta}$ справедливы оценки*

$$\|AL^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_1}{|\lambda|},$$

$$\|L^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|^2}. \tag{35}$$

Постоянные M_1 и M_2 зависят только от выбора δ и R.

Доказательство. Зафиксируем $\delta \in (0, \pi/2)$, при котором выполнены условия теоремы 5.4. Заметим, что

$$L(\lambda) = L_0(\lambda) + C = (I + CL_0^{-1}(\lambda))L_0(\lambda).$$

Далее, в силу ограниченности оператора CA^{-1} выполняется неравенство

$$\|CL_0^{-1}(\lambda)\| < M\|AL_0^{-1}(\lambda)\|.$$

С учётом оценки (29) найдётся число $R > 0$ такое, что для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$ справедливо условие

$$\|CL_0^{-1}(\lambda)\| < 1.$$

Значит, для таких λ непрерывная обратимость $L(\lambda)$ эквивалентна непрерывной обратимости $L_0(\lambda)$. Оценка $\|AL^{-1}(\lambda)\|$ следует теперь из непрерывной обратимости $I + CL_0^{-1}$ для $\lambda \in D_{R,\delta}$ и неравенства (29) в области $D_{R,\delta}$.

В силу леммы 5.2 если λ такое, что $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(L)$, то λ – собственное число конечной кратности оператор-функции $L(\lambda)$, следовательно, существует $h \in \mathrm{Dom}\,(L(\lambda)) = \mathrm{Dom}\,(A)$, для которого выполняется равенство

$$(L(\lambda)h, h) = \lambda^2 + \alpha\lambda(Ah, h) + (Ch, h) + (Ah, h) - \hat{K}(\lambda)(Ah, h) = 0.$$

Заметим, что при $|\operatorname{Im}\lambda| \neq 0$ справедливо выражение

$$2\operatorname{Re}\lambda + \alpha(Ah,h) + \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda < -\frac{\alpha a_1}{2}.$$

Наконец, оценка (35) вытекает из равенства

$$L(\lambda) = (I + CL_0^{-1}(\lambda))L_0(\lambda),$$

обратимости $I + CL_0^{-1}(\lambda)$ в $D_{R,\delta}$ и оценки (30). Теорема доказана.

Из теоремы 5.6 следует, что для указанного в условии теоремы δ найдётся $\tilde\delta \in [\delta, \pi/2)$ такое, что $\sigma(L) \bigcap \overline{\Lambda}_{\tilde\delta} = \varnothing$.

5.3. Доказательство теоремы 3.1. Заметим, прежде всего, что справедливо следующее

Предложение. *Найдётся* $\tilde\delta \in (0, \pi/2)$ *такая, что* $\sigma(\tilde L) \bigcap \overline{\Lambda}_{\tilde\delta} = \varnothing$.

Доказательство. Действительно, из теоремы 5.6 это справедливо для $\sigma(L)$. Далее, в области $\operatorname{Dom}(A^{1/2})$ выполняется

$$\tilde L^{-1}(\lambda) = A^{1/2} L^{-1}(\lambda) A^{1/2},$$

значит, $\operatorname{Dom}(A^{1/2}) \subseteq \operatorname{Dom}(\tilde L^{-1}(\lambda))$ при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde\delta}$. В силу этого и замкнутости оператора $\tilde L(\lambda)$ получаем $\operatorname{Dom}(\tilde L^{-1}(\lambda)) = H$, откуда с учётом замкнутости немедленно вытекает непрерывная обратимость.

Проверим выполнение условий теоремы 4.1 для оператора $\mathcal{A}$ (см. (13)), тем самым докажем, что этот оператор является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Действительно, по лемме 2.1 оператор $\mathcal{A}$ является диссипативным. Далее, из теорем 5.1, 5.2 и 5.3 и предложения следует, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет точек спектра при $\lambda > 0$, а следовательно, $\operatorname{Ran}(\mathcal{A} - \lambda I) = \operatorname{Dom}((\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}) = H$. Тем самым условия теоремы 4.1 выполнены и $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы.

Теперь перейдём к проверке условий теоремы 4.2. Из теорем 5.1, 5.2 и 5.6 следует, что спектр $\mathcal{A}$ содержится в $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda}_{\tilde\delta}$, $\tilde\delta \in (0, \pi/2)$. Осталось проверить, что выполняется оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \frac{M}{|\lambda|}. \tag{36}$$

Далее рассмотрим разложение (22) оператора $\mathcal{A} - \lambda I$. Запишем с его помощью явный вид резольвенты

$$R(\lambda,\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}\tilde B & I & 0 \\ (\Gamma+\lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\lambda\tilde L^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\lambda}I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma+\lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\lambda}\tilde B & -S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и подействуем ей на произвольный $(u, \rho, v)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{H}$:

$$R(\lambda,\mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ \rho \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde u \\ \tilde\rho \\ \tilde v \end{pmatrix},$$

где
$$\tilde{u} = -(\lambda A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}u - A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{B}\rho - \lambda A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1}v),$$
$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\lambda}(\tilde{B}A^{1/2}\tilde{u} - \rho), \quad \tilde{v} = (\Gamma+\lambda I)^{-1}(SA^{1/2}\tilde{u} - v).$$

Для проверки оценки (36) достаточно доказать, что выполняются неравенства
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|^2}, \tag{37}$$
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\| \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|}, \tag{38}$$
$$\|(\Gamma+\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M_3}{|\lambda|}, \tag{39}$$
где $M_1, M_2, M_3 > 0$. Неравенство (37) следует из равенства $A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2} = L^{-1}(\lambda)$ и теоремы 5.6, а неравенство (38) – из условий
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\| = \|\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\| = \|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)\| < M\|AL^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|}.$$
Последнее неравенство доказано в теореме 5.6.

Оценка
$$\|\Gamma+\lambda I\| \leqslant \frac{1}{\cos(\tilde{\delta}|\lambda|)}$$
выполняется при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$. Таким образом, неравенства (37)–(39) доказаны, а вместе с ними и теорема 3.1.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также всем участникам семинара под его руководством за полезные обсуждения и ценные советы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пивоварчик В.Н.* Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1987. № 3. С. 68–71.
2. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
3. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
4. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 62. С. 53–71.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена // Тр. Моск. мат. о-ва. 2014. Т. 75. № 2. С. 219–243.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 62. С. 53–71.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.

10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
11. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.
12. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
13. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. 2005. V. 52. P. 143–165.
14. *Rivera J.E.M., Naso M.G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // Asympt. Anal. 2006. V. 49. P. 189–204.
15. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Boston, 2012.
16. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. for Rational Mech. and Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
17. *Fabrizio M., Giorgi C., Pata V.* A new approach to equations with memory // Arch. for Rational Mech. and Anal. 2010. V. 198. P. 189–232.
18. *Закора Д.А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 5. С. 702–719.
19. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 61. С. 41–66.
20. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Максвелла // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. Совр. математика. Фунд. направления. 2017. Т. 63. № 2. С. 247–265.
21. *Davydov A.V.* Asymptotics of the spectrum of an integro-differential equation, arising in the study of the flutter of a viscoelastic plate // Rus. J. of Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 188–197.
22. *Davydov A.V.* Spectral analysis of integrodifferential operators arising in the study of flutter of a viscoelastic plate // Moscow Univ. Math. Bull. 2020. V. 75. № 2. P. 65–71.
23. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
24. *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1663–1677.
25. *Lancaster P., Shkalikov A.* Damped vibrations of beams and related spectral problems // Canad. Appl. Math. Quart. 1994. V. 2. № 1. P. 45–90.
26. *Шкаликов А.А., Гринив Р.О.* О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // Мат. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 2. С. 114–131.
27. *Милославский А.И.* О спектре неустойчивости операторного пучка // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 4. С. 88–94.
28. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
29. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
30. *Гельфанд И.М., Виленкин М.Я.* Обобщенные функции. М., 1961.
31. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1977.
32. *Тихонов Ю.А.* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 808–822.
33. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations. New York, 1999.
34. *Каратеодори К.* Конформное отображение. М., 1934.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 05.10.2021 г.
После доработки 04.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 686–695

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2022 г. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследован класс многомерных интегральных уравнений типа свёртки с монотонной и выпуклой нелинейностью. Данный класс уравнений имеет применения в теории p-адических открыто-замкнутых струн и в математической теории пространственно-временного распространения пандемии. Доказана теорема существования неотрицательного, нетривиального, ограниченного и непрерывного решения. Установлена интегральная асимптотика построенного решения. В специальном классе неотрицательных и ограниченных функций доказана теорема единственности. Приведены прикладные примеры указанных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122050089, EDN: CBIGTS

Введение. Настоящая работа посвящена вопросам существования и единственности, а также исследованию интегральной асимптотики решения для следующего n-мерного интегрального уравнения с монотонной и выпуклой нелинейностью:

$$Q(f(x_1,\ldots,x_n)) = \lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n},\quad \mathbb{R}:=(-\infty,+\infty),\quad n\geqslant 1, \tag{1}$$

относительно искомой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

В уравнении (1) функция λ определена на множестве $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $1-\lambda\in C(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 1$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

2) существуют непрерывные и монотонно возрастающие на множестве $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$ функции $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$ со свойствами

$$0<\varepsilon_j\leqslant\lambda_j(u)\leqslant 1,\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad \lim_{u\to+\infty}\lambda_j(u)=1,\quad 1-\lambda_j\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad j=\overline{1,n},$$

причём такие, что имеет место двойное неравенство

$$\max\{\lambda_1(|x_1|),\ldots,\lambda_n(|x_n|)\}\leqslant\lambda(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Относительно ядра K предполагается выполнение ограничений:

I) $K\in C_M(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$, $K(z_1,\ldots,z_n)\geqslant 0$, $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(z_1,\ldots,z_n)\,dz_1\ldots dz_n = 1,$$

где $C_M(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^n$;

II) $K(z_1,\ldots,z_n)$ – чётная функция по каждому аргументу:

$$K(z_1,\ldots,z_n)=K(|z_1|,\ldots,|z_n|);$$

III) при каждом фиксированном $(z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ функция $K(z_1,\ldots,z_n)$ монотонно убывает по z_j на множестве $\mathbb{R}^+$, $j=\overline{1,n}$;

IV) сходятся следующие интегралы:

$$\int\limits_0^\infty uW_j(u)\,du<+\infty,\quad j=\overline{1,n},$$

где

$$W_j(u):=\int\limits_{-\infty}^\infty\cdots\int\limits_{-\infty}^\infty K(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n\,|_{x_j=u},\quad u\in\mathbb{R},\quad j=\overline{1,n},\tag{3}$$

а шапка над dx_j выражения $dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n$ означает, что интегрирование ведётся по всем переменным, кроме x_j.

Нелинейность $Q(u)$ – это непрерывная нечётная функция на множестве $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами (рис. 1):

a) существует число $\eta>0$ такое, что $Q(\eta)=\eta$ и $Q(u)$ монотонно возрастает на отрезке $[-\eta,\eta]$;

b) $Q(u)$ строго выпукла вниз на отрезке $[0,\eta]$;

c) уравнение $Q(u)=\varepsilon^2u$ имеет положительный корень ξ, где $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}\in(0,1)$.

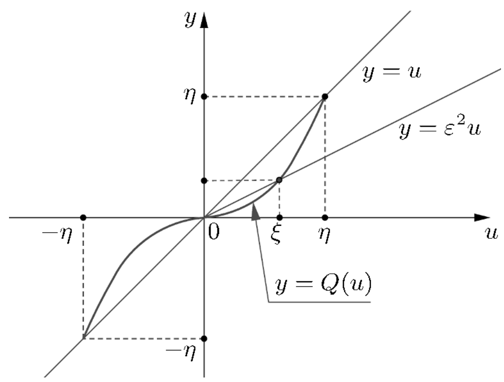

Рис. 1. График функции $y=Q(u)$.

Уравнение (1) встречается в различных областях современного естествознания. В частности, такие уравнения возникают в теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (в рамках известной модели Дикмана–Капера) (см. работы [1–5]). Следует отметить, что соответствующий одномерный аналог уравнения (1) имеет приложения в теории переноса излучения в спектральных линиях и в кинетической теории газов (см. [6–8]). В одномерном случае $(n=1)$ уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [1, 2, 9–12], где в основном обсуждались вопросы существования, асимптотического поведения и единственности ограниченного решения. Соответствующее двумерное $(n=2)$ уравнение (1) изучалось в статье авторов [13] в случае, когда ядро K, помимо условий I)–IV), удовлетворяет следующему дополнительному ограничению:

$$K(A)+K(C)\geqslant K(B)+K(D),$$

где $A=(x-x',y-y')$, $B=(x+x',y-y')$, $C=(x+x',y+y')$, $D=(x-x',y+y')$, $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^+$.

В данной работе доказана конструктивная теорема существования нетривиального знакопеременного ограниченного решения.

Ниже докажем существование нетривиального неотрицательного ограниченного и непрерывного решения f, более того, установим интегральную асимптотику $\eta-f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ и с помощью этого результата докажем теорему единственности решения в специальном классе ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, приведём прикладные примеры функций λ, K и Q, удовлетворяющих всем условиям сформулированных и доказанных теорем.

1. Существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения.

1.1. О вспомогательных одномерных нелинейных интегральных уравнениях на всей прямой. Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие одномерные нелинейные интегральные уравнения на всей прямой:

$$Q(\varphi_i(x))=\lambda_i(|x|)\int\limits_{-\infty}^\infty W_i(x-t)\varphi_i(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R},\quad i=\overline{1,n},\tag{4}$$

относительно искомых измеримых и вещественнозначных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, где ядра $W_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, задаются посредством формулы (3), а функции λ_i, $i=\overline{1,n}$, определяются в условии 2). Из результатов работы [10] следует, что уравнения (4) имеют нечётные монотонно возрастающие непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ решения $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, причём

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_i(x)=\pm\eta,\quad \eta\pm\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^{\mp}),\quad i=\overline{1,n},$$

$$\xi(1-e^{-p_ix})\leqslant\varphi_i(x)\leqslant\eta,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=\overline{1,n},\tag{5}$$

где ξ – единственный положительный корень уравнения $Q(u)=\varepsilon^2u$ (см. условие c)), а числа $\{p_i\}_{i=1}^n$ – единственные положительные решения следующих характеристических уравнений (рис. 2):

$$\int\limits_0^\infty W_i(x)e^{-px}\,dx=\frac{\varepsilon}{2},\quad i=\overline{1,n}.$$

С использованием теоремы 3 из работы [14] несложно проверить также, что если для некоторого натурального $m>1$ выполняется условие

$$\int\limits_0^\infty x^mW_i(x)\,dx<+\infty,\quad i=\overline{1,n},$$

то $x^{m-1}(\eta\pm\varphi_i)\in L_1(\mathbb{R}^{\mp})$, $i=\overline{1,n}$.

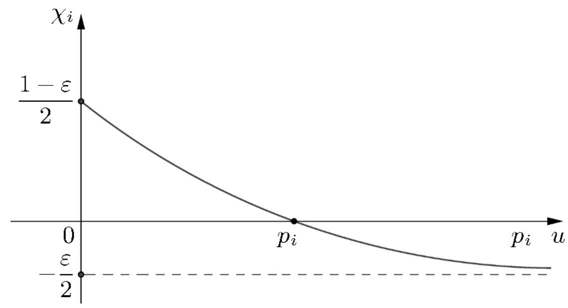

Рис. 2. График функции $\chi_i(u):=\int\limits_0^\infty W_i(x)\times$ $\times\, e^{-ux}\,dx-\varepsilon/2$, $u\geqslant0$, $i=\overline{1,n}$.

1.2. Последовательные приближения для уравнения (1). Введём следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))=\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)f_m(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$f_0(x_1,\ldots,x_n)\equiv\eta,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad m=0,1,2,\ldots\tag{6}$$

Учитывая условия 1), 2), I) и a), индукцией по m несложно доказать, что имеют место следующие свойства:

A) $f_m\in C(\mathbb{R}^n)$, $m=0,1,2,\ldots$

B) $f_m(x_1,\ldots,x_n)$ монотонно не возрастают по $m,(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

В силу выпуклости вниз функции $Q(u)$, неравенства (2), соотношений (3), (4) и неравенства Йенсена (см. [15, с. 254]), индукцией также можно получить оценку снизу для функций $f_m(x_1,\ldots,x_n)$:

C) $f_m(x_1,\ldots,x_n)\geqslant n^{-1}\sum_{j=1}^n|\varphi_j(x_j)|$, $m=0,1,2,\ldots$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Следовательно, из A), B) и C) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $m\to\infty$: $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$. Воспользовавшись предельной теоремой Б. Леви (см. [16, с. 303]), можно убедиться, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ является решением уравнения (1). Из свойств B) и C) получаем также следующую двустороннюю оценку для функции f:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(x_j)| \leqslant f(x_1,\ldots,x_n)\leqslant \eta\lambda(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Учитывая нечётность функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ на множестве $\mathbb{R}$, оценок (5) и (7), приходим к следующему неравенству снизу для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n)\geqslant \xi\left(1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{-p_j|x_j|}\right),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Так как свёртка ограниченных и суммируемых функций представляет непрерывную функцию (см. [17]), то в силу условия 1) из уравнения (1) заключаем, что $f\in C(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, сходимость последовательности непрерывных функций $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ к предельной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ равномерна на каждом компакте из $\mathbb{R}^n$.

На основе изложенного выше приходим к следующему результату:

Теорема 1. *При условиях 1), 2), I)–IV) и a)–c) уравнение (1) обладает неотрицательным, нетривиальным, ограниченным и непрерывным на множестве* $\mathbb{R}^n$ *решением* $f(x_1,\ldots,x_n)$. *Более того, для решения* f *имеют место оценки (7) и (8).*

2. Интегральная асимптотика решения. Справедлива следующая

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 решение уравнения (1), являющееся поточечным пределом последовательных приближений (6), обладает следующей интегральной асимптотикой:* $\eta - f\in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Введём следующие подмножества множества $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}_j := \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_j|\leqslant 1\},\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

С учётом оценки (5), свойств A), B) и C) для последовательности $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ в силу обозначений (9) будем иметь

$$0<\delta_i := \frac{\xi}{n}(1-e^{-p_i})\leqslant f_m(x_1,\ldots,x_n), \tag{10}$$

где $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_i$, $m=0,1,2,\ldots$, $i=\overline{1,n}$. С другой стороны, из выпуклости вниз функции Q на отрезке $[0,\eta]$ немедленно приходим к оценкам (рис. 3)

$$0\leqslant Q(u)\leqslant u,\quad u\in[0,\eta], \tag{11}$$

$$\eta-Q(u)\geqslant\frac{\eta-Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}(\eta-u),\quad u\in[\delta_i,\eta],\quad i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где числа $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ определяются по формуле (10), причём справедливы неравенства

$$0<\delta_i<\xi<\eta,\quad i=\overline{1,n}.$$

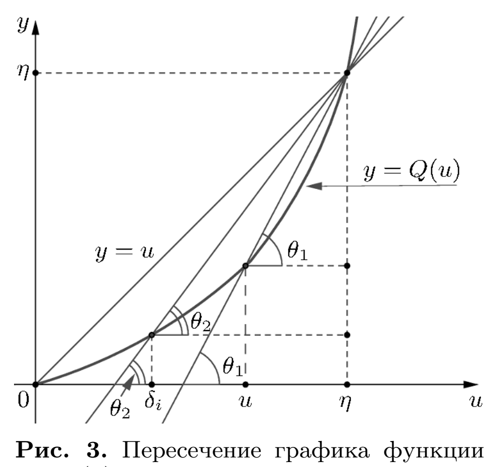

Рис. 3. Пересечение графика функции $y=Q(u)$ с прямой

$$y=\frac{\eta-Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}u+\eta\frac{Q(\delta_i)-\delta_i}{\eta-\delta_i}.$$

Сначала индукцией докажем, что

$$\eta - f_m\in L_1(\mathbb{R}^n),\quad m=0,1,2,\ldots$$

Действительно, при $m=0$ данное включение очевидно. Предположив, что $\eta - f_m \in L_1(\mathbb{R}^n)$ при некотором $m\in\mathbb{N}$, записав итерации (6) в виде

$$\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)) = \eta(1-\lambda(x_1,\ldots,x_n)) +$$

$$+\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)(\eta - f_m(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$f_0(x_1,\ldots,x_n)\equiv\eta,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

и при этом учитывая условия 1), 2), I) и a), из (13) получаем, что

$$0\leqslant \eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

В силу неравенства (11) и свойств B), C) приходим к неравенству

$$0\leqslant \eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant \eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Из (14) и (15) заключаем, что $\eta - f_{m+1}\in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Проинтегрируем обе части (13) по $(x_1,\ldots,x_n)$ на $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)))\,dx_1\ldots dx_n = \eta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1-\lambda(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)(\eta - f_m(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\,dx_1\ldots dx_n. \tag{16}$$

Использовав теорему Фубини (см. [16, с. 317]), свойство B) и неравенство (2), из равенства (16) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \eta\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - f_{m+1}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n. \tag{17}$$

С учётом (11) и (12) из неравенства (17) приходим к следующей оценке:

$$\frac{\eta - Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \eta\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n,\quad i=\overline{1,n},$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant \frac{\eta(\eta-\delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)},\quad i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Оценим интегралы $\int_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n$. В силу обозначения (9) и оценки (18) будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\underset{\uparrow i}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\underset{\uparrow 1}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\underset{\uparrow i}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\underset{\uparrow i}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_1} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\underset{\uparrow 1}{-1}}^{1} \int\limits_{\underset{\uparrow 2}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\underset{\uparrow i}{-1}}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_1} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_1} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_2} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_1} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta\left(\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta-\delta_i}{\delta_i - Q(\delta_i)} + 2^n\right).$$

Итак, для $\int_{\mathcal{B}_i} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n$ получаем следующую оценку сверху:

$$\int\limits_{\mathcal{B}_i} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant \eta\left(\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta-\delta_i}{\delta_i - Q(\delta_i)} + 2^n\right), \quad i = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Из оценок (18) и (19) сразу следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta \left(\frac{(\eta - \delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)} + \|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta - \delta_j}{\delta_j - Q(\delta_j)} + 2^n \right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Следовательно, согласно теореме Б. Леви (см. [16, с. 303]) $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и для предельной функции f имеет место неравенство сверху

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta \left(\frac{(\eta - \delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)} + \|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta - \delta_j}{\delta_j - Q(\delta_j)} + 2^n \right), \quad i = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Теорема доказана.

Замечание. Из полученной оценки (20), в частности, следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta \left(\frac{(\eta - \delta^*)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta^* - Q(\delta^*)} + n\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \frac{\eta - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta} - Q(\tilde{\delta})} + 2^n \right), \tag{21}$$

где $\delta^* := \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, $\tilde{\delta} := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$.

Действительно, если мы докажем, что функция

$$\chi(u) := \frac{\eta - u}{u - Q(u)}$$

монотонно невозрастающая на интервале $(0, \eta)$, то из (20) сразу получим оценку (21). Пусть $u_1, u_2 \in (0, \eta)$, $u_1 > u_2$, – произвольные элементы. Тогда, в силу монотонности и выпуклости функции Q, будем иметь

$$\chi(u_1) - \chi(u_2) =$$

$$= \frac{\eta(u_2 - u_1) + (\eta - u_2)Q(u_1) - (\eta - u_1)Q(u_2)}{(u_1 - Q(u_1))(u_2 - Q(u_2))} \leqslant 0,$$

так как (рис. 4)

$$\frac{Q(u_1)}{Q(u_2)} = \frac{u_1 - c_0}{u_2 - c_0} < \frac{\eta - u_1}{\eta - u_2}.$$

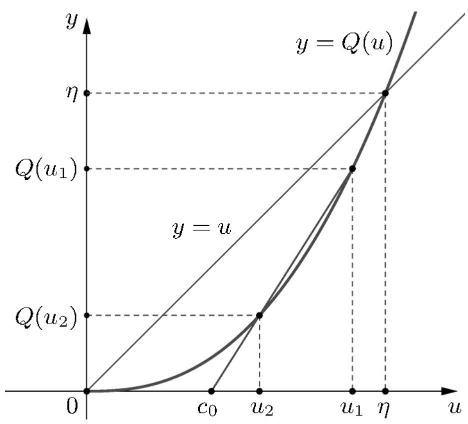

Рис. 4. Пересечение графика функции $y = Q(u)$ с прямой

$$y = \frac{Q(u_1) - Q(u_2)}{u_1 - u_2} u + \frac{Q(u_2)u_1 - Q(u_1)u_2}{u_1 - u_2}.$$

3. О единственности решения уравнения (1). Имеет место следующая

Теорема 3. *При условиях теоремы 1 уравнение (1) в классе ограниченных на* $\mathbb{R}^n$ *и положительных на* $\mathbb{R}^n \setminus (0, \ldots, 0)$ *функций*

$$\mathfrak{M} := \{f \in M(\mathbb{R}^n) : f(x_1, \ldots, x_n) > 0, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (0, \ldots, 0), \quad \eta - f \in L_1(\mathbb{R}^n)\}$$

не может иметь более одного решения. Здесь $M(\mathbb{R}^n)$ *– пространство ограниченных функций на множестве* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть уравнение (1) имеет два разных решения f и $\tilde{f}$ из класса $\mathfrak{M}$. Так как $f,\tilde{f}\in M(\mathbb{R}^n)$, $\lambda\in C(\mathbb{R}^n)$, $K\in L_1(\mathbb{R}^n)$ и свёртка ограниченных и суммируемых функций является непрерывной функцией, то из (1) получаем, что $f,\tilde{f}\in C(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $f(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, то существует точка $\mathrm{x}_0:=$ $:=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ такая, что $f(\mathrm{x}_0)\neq\tilde{f}(\mathrm{x}_0)$. В силу непрерывности функций f и $\tilde{f}$ на $\mathbb{R}^n$ существует окрестность $U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$ точки $\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$ такая, что $f(\mathrm{x})\neq\tilde{f}(\mathrm{x})$, $\mathrm{x}\in U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$. Не умаляя общности, можно считать, что $(0,\ldots,0)\notin U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$.

Введём в рассмотрение измеримое множество $E:=\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n:f(\mathrm{x})\neq\tilde{f}(\mathrm{x}),\ \ f,\tilde{f}\in\mathfrak{M}\}$. Очевидно, что $U_{\mathrm{x}_0}(\delta)\subset E$ и, следовательно, $\operatorname{mes}E\geqslant\operatorname{mes}(U_{\mathrm{x}_0}(\delta))>0$.

Оценим теперь следующую разность:

$$|Q(f(x_1,\ldots,x_n))-Q(\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n))|\leqslant\lambda(x_1,\ldots,x_n)\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)|f(t_1,\ldots,t_n)-\tilde{f}(t_1,\ldots,t_n)|\,dt_1\ldots dt_n,\quad(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.\qquad(22)$$

Так как $f,\tilde{f}\in\mathfrak{M}$, то очевидно, что $f-\tilde{f}\in L_1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу условий $I)$ и 2) правая часть неравенства (22) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$. Умножим обе части (22) на ограниченную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)/\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ и проинтегрируем полученное неравенство по $(x_1,\ldots,x_n)$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие $II)$ и неравенство (2), согласно теореме Фубини (см. [16, с. 317]) приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|Q(f(x_1,\ldots,x_n))-Q(\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n))|f(x_1,\ldots,x_n)/\lambda(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)|f(t_1,\ldots,t_n)-\tilde{f}(t_1,\ldots,t_n)|\,dt_1\ldots dt_n\,dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(t_1,\ldots,t_n)-\tilde{f}(t_1,\ldots,t_n)|\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t_1-x_1,\ldots,t_n-x_n)f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\,dt_1\ldots dt_n=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(t_1,\ldots,t_n)-\tilde{f}(t_1,\ldots,t_n)|Q(t_1,\ldots,t_n)/\lambda(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n$$

или к аналогичному неравенству

$$\mathcal{J}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\lambda(x_1,\ldots,x_n)}(|Q(f(x_1,\ldots,x_n))-Q(\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n))|f(x_1,\ldots,x_n)-$$
$$-|f(x_1,\ldots,x_n)-\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n)|Q(f(x_1,\ldots,x_n)))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant0.$$

Из свойств $a)$, $b)$ функции Q немедленно следует, что

$$\mathcal{J}=\int\limits_{E}\frac{1}{\lambda(x_1,\ldots,x_n)}f(x_1,\ldots,x_n)|f(x_1,\ldots,x_n)-\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n)|\times$$
$$\times\left(\frac{|Q(f(x_1,\ldots,x_n))-Q(\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n))|}{|f(x_1,\ldots,x_n)-\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n)|}-\frac{Q(f(x_1,\ldots,x_n))}{f(x_1,\ldots,x_n)}\right)dx_1\ldots dx_n\leqslant0.$$

Далее, используя легко проверяемое неравенство

$$\frac{|Q(f(x_1,\ldots,x_n))-Q(\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n))|}{|f(x_1,\ldots,x_n)-\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n)|}>\frac{Q(f(x_1,\ldots,x_n))}{f(x_1,\ldots,x_n)},\quad(x_1,\ldots,x_n)\in E$$

(вытекающее из выпуклости вниз функции Q), приходим к противоречию. Следовательно, $f(x_1,\ldots,x_n)=\tilde f(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

4. Примеры функций $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{Q}$. Приведём несколько примеров функций λ, K и Q, имеющих и прикладной, и теоретический интерес.

Примеры функции $\boldsymbol{\lambda}$. Приведём примеры функций $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$. Прямой проверкой можно убедиться, что функции $\lambda_j(u)=1-(1-\varepsilon_j)e^{-u}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в условии 2). Тогда примером для $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ может служить функция

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=1-re^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где $r:=\min\{1-\varepsilon_1,\ldots,1-\varepsilon_n\}$.

Действительно, во-первых, очевидно, что

$$1-\lambda\in C(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n),\quad \lambda(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 1,\quad \lambda(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Проверим левую часть неравенства (2). Имеем

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 1-(1-\varepsilon_j)e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)}\geqslant 1-(1-\varepsilon_j)e^{-|x_j|},\quad j=\overline{1,n}.$$

Следовательно,

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)\geqslant \max\{1-(1-\varepsilon_1)e^{-|x_1|},\ldots,1-(1-\varepsilon_n)e^{-|x_n|}\},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Отметим, что если в качестве функций $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$ выбрать частные примеры $\lambda_j(u)=1-$ $-(1-\varepsilon_j)e^{-u^2}$, $j=\overline{1,n}$, то функция $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ может иметь следующую структуру:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=1-re^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Примеры ядра $\boldsymbol{K}$. В приложениях часто встречаются следующие частные примеры ядра K (см. работы [1–5]):

$k_1)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=\pi^{-n/2}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

$k_2)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=2^{-n}e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

$k_3)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=\int_a^b e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)s}G(s)\,ds$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, где $G(s)$ – положительная непрерывная функция на интервале $[a,b)$, $0<a<b\leqslant+\infty$, причём

$$\int\limits_a^b\frac{G(s)}{s^n}\,ds=\frac{1}{2^n}.$$

Несложно проверить, что для примеров $k_1)$–$k_3)$ автоматически выполняются все условия $I)$–$IV)$.

Примеры нелинейности $\boldsymbol{Q}$. Примерами нелинейности Q могут служить функции:

$q_1)$ $Q(u)=u^p$, $u\in\mathbb{R}$, где $p>2$ – нечётное число;

$q_2)$ $Q(u)=au^p+(1-a)u$, $u\in\mathbb{R}$, где $a\in(0,1]$ – числовой (физический) параметр, $p>2$ – нечётное число;

$q_3)$ $Q(u)=\begin{cases}\ln\dfrac{\gamma}{\gamma-u}, & \text{если}\ \ u\geqslant 0,\\ \ln\dfrac{\gamma+u}{\gamma}, & \text{если}\ \ u<0,\end{cases}$ где $\gamma>1$ – числовой параметр.

Отметим, что уравнения с нелинейностями $q_1)$, $q_2)$ и с ядром вида $k_1)$ встречаются в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн (см. [1–3]), а с нелинейностями вида $q_3)$, $q_1)$ (с ядрами $k_2)$, $k_3)$) – в математической биологии и в кинетической теории газов (см. [4, 5, 7, 8]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения (проект 21T-1A047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
2. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 172–193.
3. *Brekke L., Freund P.G.O., Olson M., Witten E.* Non-archimedean string dynamics // Nucl. Phys. B. V. 302. № 3. P. 365–402.
4. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
5. *Diekmann O., Kaper H.G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlin. Anal. 1978. V. 2. № 6. P. 721–737.
6. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
7. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and its Applications. New York, 1988.
8. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
9. *Diekmann O.* Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // J. of Differ. Equat. 1979. V. 33. № 1. P. 58–73.
10. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн // Тр. Моск. мат. о-ва. 2018. Т. 79. № 1. С. 117–132.
11. *Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S.* Integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and difference kernel // J. of Math. Sci. 2021. V. 255. № 6. P. 790–804.
12. *Владимиров В.С.* О решениях p-адических струнных уравнений // Журн. теор. и мат. физики. 2011. Т. 167. № 2. С. 163–170.
13. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа свертки // Тр. Моск. мат. о-ва. 2021. Т. 82. № 2. С. 313–327.
14. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 188–206.
15. *Зорич В.А.* Математический анализ. Т. 1. М., 1981.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.

Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 21.04.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 696–702

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.954+517.988.8

СХОДИМОСТЬ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА СО СХЕМОЙ КРАНКА–НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

 А. С. Бондарев

В сепарабельном гильбертовом пространстве гладко разрешимое линейное вариационное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближённо проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени – с использованием схемы Кранка–Николсон. В работе установлены эффективные по времени и по пространству оценки в сильных нормах погрешности приближённых решений. Эти оценки позволяют получить скорость сходимости погрешности по времени к нулю вплоть до второго порядка. Кроме того, оценки погрешности учитывают аппроксимационные свойства проекционных подпространств, что проиллюстрировано на подпространствах типа конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064122050090, EDN: CBQGWG

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u,v)$. Пусть для $u, v \in V$ выполняются условия

$$|a(u,v)| \leqslant \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где α и μ – положительные числа. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что $(Au, v) = a(u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) – скалярное произведение в пространстве H [1, гл. 2].

Рассмотрим в V' на отрезке $[0,T]$ параболическую задачу

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщённом смысле. В монографии [2, с. 289] показано, что для заданного $f \in L_2(0,T;V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$ задачи (2), называемое слабым решением.

Далее будем считать, что выполнены условия гладкой разрешимости, т.е. справедлива следующая теорема (см. работу [3]).

Теорема 1.1. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно, а форма $a(u,v)$ удовлетворяет требованиям (1). Пусть функция $t \to f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0,T;V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$, причём справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \leqslant C\biggl(\int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\biggr).$$

В настоящей работе задача (2) решается полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием метода Галёркина по пространству и схемы Кранка–Николсон по времени. Обратим внимание, что в похожей ситуации сходимость проекционно-разностного метода в более слабых, чем в настоящей работе, нормах изучалась в [4, 5]. В работе [4] была установлена среднеквадратичная оценка погрешности приближённых решений. В статье [5] оценка погрешности для уравнения задачи (2) получена в энергетической норме. В данной работе в предположениях гладкой разрешимости задачи (2) получены оценки в сильных нормах погрешности приближённого решения.

Заметим, что в случае когда для уравнения задачи (2) рассматривается задача Коши оценки в сильных нормах погрешности для проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон по времени были установлены в работе [6].

Перейдём к описанию приближённой задачи. Пусть V_h, где h – положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\|_V = 1$. Отметим, что справедливо неравенство $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в работе [7], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h'$, причём для $u \in V'$ справедливо условие $\|\overline{P_h}u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'}$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in V$ важное соотношение $(\overline{P_h}u, v) = (u, P_h v)$, полученное в работе [8].

Для построения приближённых решений возьмём равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k = \overline{1, N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P_h}A(u_k^h + u_{k-1}^h)/2 = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \tag{3}$$

где $\tau N = T$, $t_k = k\tau$, $u_k^h \in V_h$, элементы $f_k^h \in V_h$ определим позже.

Однозначная разрешимость задачи (3) установлена в работе [4].

Далее будем предполагать, что форма $a(u, v)$ является симметричной, т.е. $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V : (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Очевидно, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны.

Приведём необходимую в дальнейшем оценку из работы [9] для $u \in V$:

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \leqslant \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} \leqslant \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V, \tag{4}$$

где $Q_h(A)$ – ортопроектор в $V(A)$ на V_h, а Q_h – ортопроектор в V на V_h.

Лемма 1.1. *Для решения $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3) справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 \tau \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_H^2 \tau. \tag{5}$$

Доказательство. Умножим уравнение задачи (3) скалярно в пространстве H на $(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}$:

$$\|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 + (2\tau)^{-1}(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h) = (f_k^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}). \tag{6}$$

Рассмотрим второе слагаемое в выражении (6):

$$(2\tau)^{-1}(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h) = (2\tau)^{-1}(a(u_k^h, u_k^h) - a(u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + 2i \operatorname{Im} a(u_{k-1}^h, u_k^h)), \tag{7}$$

где i – мнимая единица.

Возьмём от равенства (6) удвоенную вещественную часть. Учитывая (7), получаем

$$2\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}a(u_k^h,u_k^h)-\tau^{-1}a(u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)=2\,\mathrm{Re}\,(f_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}).$$

Оценим правую часть последнего равенства:

$$2\,\mathrm{Re}\,(f_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1})\leqslant\|f_k^h\|_H^2+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2.$$

Тогда

$$\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}a(u_k^h,u_k^h)-\tau^{-1}a(u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)\leqslant\|f_k^h\|_H^2.$$

Умножим на τ и просуммируем последние неравенства по $k=\overline{1,N}$. Учитывая периодическое условие, получаем необходимую оценку (5). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для решения* $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ *задачи (3) справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant C\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_H^2. \tag{8}$$

Доказательство. В работе [9] для произвольных $v_h^k\in V_h$, где $k=\overline{0,N}$ и $N\tau=T$, получена оценка

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v_k^h\|_V^2\leqslant K\Bigg[\sum_{k=1}^N\Big(\|\overline{P_h}Av_{k-1}^h\|_H^2+\|\overline{P_h}Av_k^h\|_H^2\Big)\tau+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{v_k^h-v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\Bigg]. \tag{9}$$

По решению $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ задачи (3) определим элемент $u_{-1}^h=u_{N-1}^h$. Положим $v_k^h=(u_k^h+{}$ ${}+u_{k-1}^h)/2$ для $k=\overline{1,N}$ и соответственно получим $v_0^h=(u_0^h+u_{-1}^h)/2=(u_N^h+u_{N-1}^h)/2=v_N^h$. К элементам v_k^h применим оценку (9):

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant K\Bigg[\sum_{k=1}^N\bigg(\left\|\overline{P_h}A\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2+\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\bigg)\tau+{}$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\bigg(\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}-\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\bigg)\tau^{-1}\right\|_H^2\tau\Bigg]. \tag{10}$$

Так как $(u_0^h+u_{-1}^h)/2=(u_N^h+u_{N-1}^h)/2$, то справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^N\left\|\overline{P_h}A\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2\tau=\sum_{k=1}^N\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau.$$

Из задачи (3) следует выполнение неравенства

$$\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\leqslant2\|f_k^h\|_H^2\tau+2\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N\left\|\bigg(\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}-\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\bigg)\tau^{-1}\right\|_H^2\tau\leqslant\frac12\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\frac12\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_{k-1}^h-u_{k-2}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Здесь $(u_0^h-u_{-1}^h)\tau^{-1}=(u_N^h-u_{N-1}^h)\tau^{-1}$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_{k-1}^h-u_{k-2}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau=\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

В результате из неравенства (10) получается оценка

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant C\left\{\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_H^2\tau+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right\}.$$

Оценка леммы (8) следует теперь из соотношения (5). Лемма доказана.

2. Оценки погрешности. Положим далее $f_k^h=\overline{P_h}[f(t_k)+f(t_{k-1})]/2.$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия гладкой разрешимости задачи (2) и форма $a(u,v)$ обладает свойством симметричности. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), а $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (3). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\|(I-Q_h(A))u'(t)\|_H^2\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\right].\tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $z_k^h=Q_h(A)u(t_k)-u_k^h.$ Из задач (2) и (3) получим

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P_h}A\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}=\overline{P_h}AQ_h(A)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+Q_h(A)\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-f_k^h.\tag{12}$$

Воспользуемся равенством (14) из работы [6]: $\overline{P_h}Au=\overline{P_h}AQ_h(A)u,$ справедливым для всех $u\in V.$

Из уравнений (2) и задания f_k^h следует, что

$$f_k^h=P_h[u'(t_k)+u'(t_{k-1})]/2+\overline{P_h}A[u(t_k)+u(t_{k-1})]/2.$$

Тогда формула (12) преобразуется к виду

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P_h}A\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}=Q_h(A)\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-P_h\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}=$$

$$=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt.\tag{13}$$

Применим к соотношению (13) оценки (5) и (8). В результате получим

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\right].\tag{14}$$

Заметим, что

$$\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2},$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}=\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt.$$

Отсюда имеем

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\right\|_V^2+$$

$$+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_V^2+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$

$$+\int\limits_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt.$$

Из последнего неравенства с учётом соотношений (4) и (14) следует оценка (11). Теорема доказана.

Приведём оценки погрешности, следующие из неравенства (11) с порядком сходимости по времени и по пространству. Введём в рассмотрение множество $D(A)=\{u\in V: Au\in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A)\subset E\subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E\leqslant\delta\|Av\|_H\quad(v\in D(A)),\tag{15}$$

где $\delta\geqslant 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства $H=L_2(\Omega)$, $V=\mathring{W}_2^1(\Omega)$, $V'=W_2^{-1}(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\bigcap\mathring{W}_2^1(\Omega)$ [2, с. 275]. Если же на границе области Ω задаётся условие Неймана, то пространства следующие: $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$ [2, с. 276].

Пусть подпространства V_h обладают аппроксимационным свойством

$$\|(I-Q_h)v\|_V\leqslant rh\|v\|_E\quad(v\in E),\tag{16}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов [10, гл. 3]. Здесь $r>0$ и не зависит от v и h. В простейшем одномерном случае, когда $V=W_2^1(a,b)$ либо $V=\mathring{W}_2^1(a,b)$, а пространство $H=L_2(a,b)$, в качестве подпространств V_h могут быть взяты подпространства кусочно-линейных на $[a,b]$ функций [10, с. 100–103].

В работе [11] показано, что из условий (15) и (16) для $v\in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна–Нитше)

$$\|[I-Q_h(A)]v\|_H\leqslant r\mu\delta^{-1}h\|(I-Q_h)v\|_V.\tag{17}$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и условие (15). Пусть решение* $u(t)$ *задачи (2) такое, что* $u \in C([0,T],E)$. *Пусть подпространства* V_h *обладают свойством (16).*

Тогда в случае $u'' \in L_p(0,T;H)$ *для значений* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$
$$\leqslant C\left[\tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2\right)\right]. \tag{18}$$

Если же решение $u(t)$ *задачи (2) таково, что* $u''' \in L_p(0,T;H)$ *для* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$
$$\leqslant C\left[\tau^{5-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2\right)\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (2.11) из работы [12]:

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u''(t)\,dt. \tag{20}$$

Из неравенства $|2t-t_{k-1}-t_k| \leqslant \tau$ для $t \in [t_{k-1},t_k]$ получим

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\leqslant\frac{\tau^{3-2/p}}{4}\left(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{21}$$

Обоснование оценки третьего слагаемого в левой части неравенства (18) проводится как в работе [9, теорема 3]. Теперь оценка (18) следует из условия (11) с учётом неравенств (16), (17) и (21).

Из равенства

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt=\frac{1}{8}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2]u'''(t)\,dt,$$

полученного из выражения (20) путём интегрирования по частям, и оценки $|\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2| \leqslant \tau^2$ для $t \in [t_{k-1},t_k]$ следует неравенство

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\leqslant\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\left(\int\limits_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p},$$

что вместе с оценками (16) и (17) доказывает неравенство (19). Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
3. *Бондарев А.С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2015. № 4. С. 78–88.
4. *Бондарев А.С.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2017. Т. 46. № 6 (255). С. 72–79.
5. *Бондарев А.С., Смагин В.В.* Решение вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение проекционно-разностным методом со схемой Кранка–Николсон по времени // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 761–770.
6. *Смагин В.В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка–Николсон // Мат. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 913–923.
7. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.
8. *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 143–160.
9. *Бондарев А.С.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2018. № 2. С. 129–139.
10. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
11. *Смагин В.В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Математика. 1996. № 3. С. 50–57.
12. *Смагин В.В.* Проекционно-разностный метод со схемой Кранка–Николсон по времени приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 116–126.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.2018 г.
После доработки 14.10.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 703–716

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+519.651+517.956.32

ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АГРЕГАТЫ В ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА И ИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

© 2022 г. А. Б. Утесов, А. А. Базарханова

Указан конкретный вычислительный агрегат, реализующий точный порядок погрешности, возникающей при дискретизации решения уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях, принадлежащих многомерным 1-периодическим классам Никольского. Найдена предельная погрешность указанного оптимального вычислительного агрегата.

DOI: 10.31857/S0374064122050107, EDN: CBUUGO

1. Постановка задачи дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона. Пусть символом $u(x,t;f_1,f_2)$ обозначено классическое решение уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \quad (0 \leqslant t < +\infty, \quad x = (x_1,\ldots,x_s) \in \mathbb{R}^s) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x). \tag{2}$$

Решение $u(x,t;f_1,f_2)$ описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы, равной единице (см., например, [1, с. 54]).

Задача дискретизации бесконечного объекта (в нашем случае решения $u(x,t;f_1,f_2)$, представимого кратным рядом (см. приведённую ниже лемму 1)) состоит в его приближении простым (в некотором смысле) конечным объектом и в указании точности предложенного приближения.

Впервые задача дискретизации решений была рассмотрена Н.М. Коробовым для уравнения Пуассона [2, с. 185–190]. Далее эта задача изучалась в работах [3] и [4, § 10.5, с. 217] для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности соответственно. Следует отметить статью С.А. Смоляка [5], в которой был предложен метод построения оптимальных вычислительных агрегатов в задачах численного интегрирования, восстановления функций и дискретизации решений уравнения в частных производных. Впоследствии метод Смоляка и его различные применения стали объектами изучения многих математиков (см., например, [6–8]). Отметим также работу [9], содержащую ряд результатов, полученных при дискретизации решений классических уравнений математической физики, в частности, решений уравнения Клейна–Гордона в рамках постановки “Компьютерный (вычислительный) поперечник” (подробную информацию об этой постановке можно найти, например, в [10]).

В данной работе дискретизация решений $u(x,t;f_1,f_2)$ производится вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях f_1 и f_2, и находится предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата.

Следуя работам [11–13], сформулируем задачу дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях.

Пусть даны целые числа $N_1 \geqslant 1$ и $N_2 \geqslant 1$, классы F_1 и F_2 функций, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно, нормированное пространство Y функций, заданных на Ω_Y, и пусть

$N = N_1 + N_2$. Числовая информация $l^{(N_1,N_2)} = (l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2))$ объёма N о начальных условиях $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$ снимается с функционалов

$$l_1^{(1)} : F_1 \mapsto \mathbb{C}, \quad \ldots, \quad l_1^{(N_1)} : F_1 \mapsto \mathbb{C} \quad \text{и} \quad l_2^{(1)} : F_2 \mapsto \mathbb{C}, \quad \ldots, \quad l_2^{(N_2)} : F_2 \mapsto \mathbb{C}.$$

Пусть также дана функция $\varphi_N(z_1, \ldots, z_N; y) : \mathbb{C}^N \times \Omega_Y \mapsto \mathbb{C}$ – алгоритм переработки числовой информации $l^{(N_1,N_2)}$ о начальных условиях $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$ такая, что при всяком фиксированном $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ как функция от y принадлежит пространству Y. Далее, через $\{\varphi_N\}_Y$ будем обозначать множество функций φ_N, удовлетворяющих всем перечисленным выше условиям, через $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)$ – вычислительный агрегат дискретизации, действующий по правилу $\varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)$, а через $D_{(N_1,N_2)}$ – множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)$.

Для заданных F_1, F_2, Y и $D_N = \bigcup_{\substack{N_1+N_2=N \\ N_1,N_2=1,2,\ldots}} D_{(N_1,N_2)}$ положим

$$\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y = \min_{N_1+N_2=N} \inf_{(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y,$$

где

$$\delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y =$$
$$= \sup_{(f_1,f_2) \in F_1 \times F_2} \|u(\cdot\,; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_Y.$$

Всюду ниже для любого числа A и положительного числа B запись $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ будет означать существование постоянной $C(\alpha, \beta, \ldots) > 0$ такой, что $|A| \leqslant C(\alpha, \beta, \ldots)B$, а для положительных чисел A и B одновременное выполнение соотношений $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ и $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A$ записывается в виде $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} B$.

В рамках приведённых обозначений и определений задача дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях, заключается в установлении точного порядка величины $\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y$ (т.е. в нахождении положительной последовательности $\{\psi_N\}_{N \geqslant 1}$, удовлетворяющей соотношению $\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \psi_N$, здесь в качестве $\alpha, \beta, \ldots$ берутся параметры классов F_1, F_2 и пространства Y) и в указании такого вычислительного агрегата

$$(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N) \equiv \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1), \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1), \bar{l}_2^{(1)}(f_2), \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2); \cdot),$$

для которого $\delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), F_1, F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \psi_N$ (в этом случае говорят, что вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$ реализует точный порядок дискретизации).

2. Определения оптимального вычислительного агрегата и его предельной погрешности.

Определение 1. Вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$, реализующий точный порядок погрешности дискретизации, называется *оптимальным вычислительным агрегатом.*

В работе [14] было дано определение предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}^{(N)}(f); \cdot)$ в задаче дискретизации решений $u(t, x; f)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (0 \leqslant t < +\infty, \quad x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s)$$

с начальным условием $u(0, x; f) = f(x)$. Здесь сформулируем определение предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$, строящегося по двум точным числовым информациям $(\bar{l}_1^{(1)}(f_1), \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1))$ и $(\bar{l}_2^{(1)}(f_2), \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2))$, полученным от начальных условий f_1 и f_2.

Определение 2. *Предельной погрешностью* оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N)$ называется пара $(\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2})$ положительных последовательностей $\{\overline{\varepsilon}_{N_1}\}$ и $\{\overline{\varepsilon}_{N_2}\}$ таких, что, во-первых, для всех $N_1\in\mathbb{N}$, $N_2\in\mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y \succ\prec \delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y, \tag{3}$$

где

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y =$$

$$= \sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\ \sup_{\substack{z_1^{(1)},\dots,z_1^{(N_1)}\\ z_2^{(1)},\dots,z_2^{(N_2)}}} \{\|u(\cdot\,;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(z_1^{(1)},\dots,z_1^{(N_1)},z_2^{(1)},\dots,z_2^{(N_2)};\cdot)\|_Y :$$

$$|z_1^{(1)}-\bar{l}_1^{(1)}(f_1)|<\overline{\varepsilon}_{N_1},\dots,|z_1^{(N_1)}-\bar{l}_1^{(N_1)}|<\overline{\varepsilon}_{N_1},|z_2^{(1)}-\bar{l}_2^{(1)}(f_1)|<\overline{\varepsilon}_{N_2},\dots,|z_2^{(N_2)}-\bar{l}_2^{(N_2)}|<\overline{\varepsilon}_{N_2}\} =$$

$$= \sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\ \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \dots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \dots,\ |\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}} \|u(\cdot\,;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1)+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\dots$$

$$\dots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1)+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\bar{l}_2^{(1)}(f_2)+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2},\dots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2)+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2};\cdot)\|_Y,$$

во-вторых, справедливо равенство

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}} \frac{\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1},\eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y}{\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y} = +\infty \tag{4}$$

для всех сколь угодно медленно возрастающих к $+\infty$ положительных последовательностей $\{\eta_{N_1}\}$ и $\{\eta_{N_2}\}$.

Соотношение (3) означает, что при вычислении значений оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1),\dots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1),\bar{l}_2^{(1)}(f_2),\dots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2);\cdot)$ числовые информации $\bar{l}_1^{(\tau)}(f_1)$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\bar{l}_2^{(\nu)}(f_2)$, $\nu=\overline{1,N_2}$, можно заменить неточными значениями $z_1^{(\tau)}$ и $z_2^{(\nu)}$ такими, что $|z_1^{(\tau)}-\bar{l}_1^{(\tau)}(f)|<\overline{\varepsilon}_{N_1}$ $(\tau=\overline{1,N_1})$ и $|z_2^{(\nu)}-\bar{l}_2^{(\nu)}(f)|<\overline{\varepsilon}_{N_2}$ $(\nu=\overline{1,N_2})$ соответственно, сохранив при этом точный порядок погрешности оптимальной дискретизации. Выполнение же равенства (4) означает неулучшаемость порядков погрешностей $\overline{\varepsilon}_{N_1}$ и $\overline{\varepsilon}_{N_2}$, так как сколь угодно медленное возрастание к бесконечности величин $\overline{\varepsilon}_{N_1}$ и $\overline{\varepsilon}_{N_2}$ нарушает точный порядок погрешности дискретизации.

3. Необходимые обозначения и определения для формулировки полученных результатов. В дальнейшем через $|E|$ будем обозначать количество элементов конечного множества E. Как обычно, $[a]$ – целая часть числа a. Для упрощения записи будем использовать обозначение

$$\rho_m(t)=\frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}},$$

где $m\in\mathbb{Z}^s$, $t\geqslant 0$.

Пусть $s=1,2,\dots$ и r – положительное число. Класс Никольского $H_2^r(0,1)^s$ по определению состоит из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(m)$, $m\in\mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\sup_{j=0,1,2,\dots} 2^{2jr}\sum_{[2^{j-1}]\leqslant\|m\|<2^j}|\hat{f}(m)|^2\leqslant 1,$$

где $m=(m_1,\dots,m_s)\in\mathbb{Z}^s$ и $\|m\|=\max\limits_{j=\overline{1,s}}|m_j|$.

Ниже нам понадобится класс Соболева $W_2^r(0,1)^s$, состоящий из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat f(m)$, $m\in\mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\|f\|_{W_2^r}\equiv\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}(\widetilde m_1^{2r}+\ldots+\widetilde m_s^{2r})\leqslant 1,$$

где $\widetilde m=\max\{1;|m_j|\}$ для каждого $j=\overline{1,s}$.

Нормированное пространство $L^{2,\infty}\equiv L^{2,\infty}((0,1)^s\times[0;+\infty])$ определяется как линейное пространство всех функций $g:\mathbb{R}^s\times[0;+\infty)\to\mathbb{C}$ таких, что для каждого $t\geqslant 0$ функция $g_t(x)=g(x,t)$ как функция аргумента $x\in\mathbb{R}^s$ является измеримой, 1-периодической по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{2,\infty}}\equiv\sup_{t\geqslant 0}\|g(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,1)^s}<+\infty.$$

Символом $\Phi_{(N_1,N_2)}$ обозначается множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$ с функционалами $l_1^{(1)}(f_1)=\hat f_1(m_1^{(1)})$, $\ldots$, $l_1^{(N_1)}(f_1)=\hat f_1(m_1^{(N_1)})$, $l_2^{(1)}(f_2)=\hat f_2(m_2^{(1)})$, $\ldots$, $l_2^{(N_2)}(f_2)=\hat f_2(m_2^{(N_2)})$ и функцией $\varphi_N\in\{\varphi_N\}_Y$, а символом $L_{(N_1,N_2)}$ – множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$ с линейными функционалами $l_1^{(1)}:F_1\to\mathbb{C}$, $\ldots$, $l_1^{(N_1)}:F_1\to\mathbb{C}$, $l_2^{(1)}:F_2\to\mathbb{C}$, $\ldots$, $l_2^{(N_2)}:F_2\to\mathbb{C}$ и функцией $\varphi_N\in\{\varphi_N\}_Y$.

Конкретизировав в $\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y$ множество D_N, классы F_1 и F_2, пространство Y, получим различные задачи дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона, а также задачи нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата.

В статьях [15, 16] при $D_N=L_N$, $F_1=H_2^{r_1}(0,1)^s$, $F_2=H_2^{r_2}(0,1)^s$ и $D_N=\Phi_N$, $F_1=W_2^{r_1}(0,1)^s$, $F_2=W_2^{r_2}(0,1)^s$, где $L_N=\bigcup_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}}L_{(N_1,N_2)}$ и $\Phi_N=\bigcup_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}}\Phi_{(N_1,N_2)}$ соответственно, были установлены точные порядки погрешности дискретизации, но не были указаны конкретные вычислительные агрегаты, построенные по числовым информациям объёма N и реализующие точные порядки.

В настоящей работе при конкретизации из [15] доказана оптимальность некоторого вычислительного агрегата $(\bar l^{(N_1,N_2)},\overline\varphi_N)$ и найдена его предельная погрешность.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть даны целое положительное число s, положительные числа $r_1>2+s/2$, $r_2>1+s/2$ и пусть для каждого целого $K_i\geqslant 1$, $i\in\{1,2\}:N_i\equiv N_i(K_i)=(2K_i+1)^s$. Тогда для любого $N\equiv N(K_1,K_2)=N_1+N_2$ имеют место соотношения*

$$\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\delta_N((\bar l^{(\bar N_1,\bar N_2)},\overline\varphi_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\frac{1}{N^{\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}},\tag{5}$$

здесь вычислительный агрегат $(\bar l^{(\bar N_1,\bar N_2)},\overline\varphi_N)$ состоит из функционалов $\bar l_1^{(1)}(f_1)=\hat f_1(\overline m_1^{(1)})$, $\ldots$, $\bar l_1^{(\bar N_1)}(f_1)=\hat f_1(\overline m_1^{(\bar N_1)})$, $\bar l_2^{(1)}(f_2)=\hat f_2(\overline m_2^{(1)})$, $\ldots$, $\bar l_2^{(\bar N_2)}(f_2)=\hat f_2(\overline m_2^{(\bar N_2)})$ и функции

$$\overline\varphi_N(z_1^{(1)},\ldots,z_1^{(\bar N_1)},z_2^{(1)},\ldots,z_2^{(\bar N_2)};x,t)=$$

$$=\sum_{\tau=1}^{\bar N_1}z_1^{(\tau)}\rho'_{\overline m_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline m_1^{(\tau)},x)\}+\sum_{\nu=1}^{\bar N_2}z_2^{(\nu)}\rho_{\overline m_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline m_2^{(\nu)},x)\},$$

где целые положительные числа $\bar N_1$ и $\bar N_2$ такие, что

$$\min_{N_1+N_2=N}\left(\frac{1}{N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}\right)=\frac{1}{\bar N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{\bar N_2^{(r_2+1)/s}},$$

$\{\overline{m}_i^{(1)},\ldots,\overline{m}_i^{(\bar N_i)}\}$, $i\in\{1,2\}$, – *некоторое упорядочение множества* $A_i=\{m\in\mathbb{Z}^s:\|m\|\leqslant\leqslant\bar K_i\}$, $i\in\{1,2\}$.

Далее, для краткости, символы $\bar N_1$ и $\bar N_2$ заменим соответственно на N_1 и N_2.

Теорема 2. *Пусть даны целое положительное число* s, *положительные числа* $r_1>2+s/2$, $r_2>1+s/2$ *и пусть для каждого целого* $K_i\geqslant 1$, $i\in\{1,2\}$, *выполняется* $N_i\equiv N_i(K_i)=(2K_i+1)^s$.

Тогда пара $(\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2})$ *с компонентами* $\overline{\varepsilon}_{N_1}=(N_1^{r_1/s+1/2})^{-1}$ *и*

$$\overline{\varepsilon}_{N_2}=\begin{cases}(N_2^{r_2+1})^{-1}, & \textit{если}\quad s=1,\\ (N_2^{(r_2+1)/2}(\ln N_2)^{1/2})^{-1}, & \textit{если}\quad s=2,\\ (N_2^{r_2/s+1/2})^{-1}, & \textit{если}\quad s>2\end{cases}$$

является предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата $(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N)$ *из теоремы 1, т.е. имеет место соотношение*

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\succ\prec\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}},\tag{6}$$

и для любых сколь угодно медленно возрастающих к $+\infty$ *положительных последовательностей* $\{\eta_{N_1}\}$ *и* $\{\eta_{N_2}\}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{K_1\to\infty\\K_2\to\infty}}\frac{\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1},\eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}}=+\infty.\tag{7}$$

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см. [15, § 2, лемма 1]). *Пусть даны целое положительное число* s, *положительные числа* r_1 *и* r_2 *такие, что* $r_1>2+s/2$ *и* $r_2>1+s/2$. *Тогда для каждой пары* (f_1,f_2) *функций* $f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s$, $f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s$ *ряд*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}(\hat f_1(m)\rho_m'(t)+\hat f_2(m)\rho_m(t))\exp\{2\pi i(m,x)\}$$

сходится абсолютно и является решением уравнения Клейна–Гордона (1) с начальными условиями (2).

Лемма 2 (см. [15, § 2, лемма 3]). *Пусть даны положительные числа* α_1, α_2, c_1 *и* c_2. *Тогда для каждого* $N=2,3,\ldots$ *верно соотношение*

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\N_1\geqslant1,N_2\geqslant1}}(c_1N_1^{-\alpha_1}+c_2N_2^{-\alpha_2})\underset{\alpha_1,\alpha_2,c_1,c_2}{\succ\prec}N^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2\}}.$$

Лемма 3. *Пусть* $p=2,3,\ldots$ *и* $B_p=\{m\in\mathbb{Z}^s:1\leqslant\|m\|\leqslant p\}$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{m\in B_P}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}1, & \textit{если}\quad s=1,\\ \ln p, & \textit{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \textit{если}\quad s>2.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $s=1$. Тогда

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}=2\sum_{m_1=1}^{p}\frac{1}{m_1^2}.$$

Поэтому, согласно неравенству

$$\sum_{m_1=1}\frac{1}{m_1^2}\geqslant\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx,$$

имеем
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\geqslant 2\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx=2(1-1/(p+1))\geqslant\frac{4}{3}. \tag{8}$$

Так как
$$\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\geqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{p^2},$$
то
$$1+\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\geqslant\sum_{m_1=1}^{p}\frac{1}{m_1^2},$$
откуда получим цепочку неравенств
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\leqslant 2\biggl(1+\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\biggr)\leqslant 4.$$
Следовательно, в силу (8) при $s=1$ имеет место соотношение
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\succ\prec}1. \tag{9}$$

Перейдём к случаю $s\geqslant 2$. Рассмотрим множества
$$M_p=\{x\in\mathbb{R}^s: 1\leqslant x_1\leqslant p,\ \ldots,\ 1\leqslant x_s\leqslant p\},$$
$$U_p=\{x\in\mathbb{R}^s: x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_s\geqslant 0,\ 1\leqslant x_1^2+\ldots+x_s^2\leqslant sp^2\},$$
$$T_p=\{x\in\mathbb{R}^s: x_1\geqslant 1,\ \ldots,\ x_s\geqslant 1,\ (x_1-1)^2+\ldots+(x_s-1)^2\leqslant(p-1)^2\}.$$

Поскольку $T_p\subset M_p\subset U_p$, то
$$\int\limits_{T_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\leqslant\int\limits_{M_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\leqslant\int\limits_{U_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}. \tag{10}$$

Перейдём к сферическим (полярным в случае $s=2$) координатам в интегралах, рассматриваемых на множествах T_p и U_p, и соответственно получим
$$\int\limits_{T_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2\end{cases}\quad\text{и}\quad\int\limits_{U_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2,\end{cases}$$
откуда, согласно (10), вытекает соотношение
$$\int\limits_{M_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2.\end{cases} \tag{11}$$

Так как

$$\int\limits_{M_p} \frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \sum_{m_1=1}^{p}\cdots\sum_{m_s=1}^{p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \quad \text{и} \tag{12}$$

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \left(\sum_{\tau=1}^{s-1}C_s^\tau \sum_{\substack{1\leqslant m_{\tau+1}\\ \ldots\\ m_s\leqslant p}} \frac{1}{m_{\tau+1}^2+\ldots+m_s^2} + \sum_{m_1=1}^{p}\cdots\sum_{m_s=1}^{p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\right),$$

то в силу (9), (11) и (12) имеем

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \begin{cases}\ln p, & \text{если} \quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если} \quad s>2.\end{cases}$$

Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Сначала оценим величину $\delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}$ сверху. Так как

$$\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1),\bar{l}_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2);x,t) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{N_1}\hat{f}_1(\overline{m}_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)},x)\} + \sum_{\nu=1}^{N_2}\hat{f}_2(\overline{m}_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)},x)\} =$$

$$= \sum_{m\in A_1}\hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in A_2}\hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\},$$

то в силу леммы 1 запишем равенство

$$u(x,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1),\bar{l}_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2);x,t) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1}\hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2}\hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\}. \tag{13}$$

Обозначим через l_i, $i\in\{1,2\}$, некоторое целое число, удовлетворяющее неравенствам $2^{l_i}\leqslant K_i<2^{l_i+1}$. Тогда для всех $m\in\mathbb{Z}^s$ таких, что $\|m\|\leqslant 2^{l_i}$, при $f_i\in H_2^{r_i}(0,1)^s$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_i}}|\hat{f}_i(m)|^2\right)^{1/2} \underset{s,r_i}{\ll} \frac{1}{N_i^{r_i/s}}, \quad i\in\{1,2\}. \tag{14}$$

Действительно, учитывая очевидные соотношения $N_1^{1/s}\underset{s}{\succ\prec}K_1, N_2^{1/s}\underset{s}{\succ\prec}K_2$, для каждого $i\in\{1,2\}$ получим

$$\left(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_i}}|\hat{f}_i(m)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat{f}_i(m)|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}2^{-2\tau r_i}\cdot 2^{2\tau r_i}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat{f}_i(m)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{\tau=l_i+1,l_i+2,\ldots}\left\{2^{2\tau r_i}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat{f}_i(m)|^2\right\}\right)^{1/2}\left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}2^{-2\tau r_i}\right)^{1/2} \underset{s,r_i}{\ll} \frac{1}{N_i^{r_i/s}}.$$

Так как

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat f_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} = \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} |\hat f_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{\|m\|>K_1} |\hat f_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_1}} |\hat f_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\Big)^{1/2}$$

и $|\rho'_m(t)|\leqslant 1$ для всех $m\in\mathbb{Z}^s$, то

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat f_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \leqslant \Big(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_1}} |\hat f_1(m)|^2\Big)^{1/2},$$

откуда в силу (14) следует оценка сверху для L^2-нормы первой суммы правой части равенства (13):

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat f_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \underset{s,r_1}{\ll} \frac{1}{N_1^{r_1/s}}. \tag{15}$$

Теперь оценим L^2-норму второй суммы правой части (13) сверху. Из равенств Парсеваля

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat f_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} = \Big(\sum_{\|m\|>K_2} |\hat f_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\Big)^{1/2}$$

с учётом неравенства $2^{l_2}\leqslant K_2$ имеем

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat f_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \leqslant \Big(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat f_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\Big)^{1/2}. \tag{16}$$

Поскольку

$$|\rho_m(t)| = \left|\frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{m_1^2+\ldots+m_s^2}} \leqslant \frac{1}{\|m\|} \leqslant \frac{1}{2^{l_2}}$$

для всех $\|m\|\geqslant 2^{l_2}$, то

$$\Big(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat f_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^{l_2}}\Big(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat f_2(m)|^2\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Вследствие неравенств (16), (17), (14) и $2^{l_2}\underset{s}{\gg} N_2^{1/s}$ получаем

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat f_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \underset{s,r_2}{\ll} \frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{18}$$

При любом $t\geqslant 0$ из (13), (15) и (18) следует неравенство

$$\|u(\,\cdot\,,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar l_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar l_1^{(N_1)}(f_1),\bar l_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar l_2^{(N_2)}(f_2);\,\cdot\,,t)\|_{L^2} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} \frac{1}{N_1^{r_1/s}} + \frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}},$$

откуда, поскольку переменная t и упорядоченная пара (f_1, f_2) произвольны, в силу определения пространства $L^{2,\infty}$ и леммы 2 заключаем, что

$$\delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \tag{19}$$

В статье [15, теорема 4] установлено соотношение

$$\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg} N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \tag{20}$$

Наконец, сопоставив неравенства $\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \leqslant \delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}$, (19) и (20), получим соотношения (5). Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Доказательство проведём для случая $s > 2$ (в случаях $s = 1$ и $s = 2$ доказательство теоремы 2 проводится аналогично).

Так как для произвольно заданных чисел $\gamma_1^{(1)}, \ \ldots, \ \gamma_1^{(N_1)}, \ \gamma_2^{(1)}, \ \ldots, \ \gamma_2^{(N_2)}$ таких, что

$$|\gamma_1^{(1)}| \leqslant 1, \quad \ldots, \quad |\gamma_1^{(N_1)}| \leqslant 1, \quad |\gamma_2^{(1)}| \leqslant 1, \quad \ldots, \quad |\gamma_2^{(N_2)}| \leqslant 1,$$

имеет место равенство

$$\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \bar{l}_2^{(1)}(f_2) + \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}, \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}; x, t) =$$
$$= \sum_{m\in A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} +$$
$$+ \overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}\gamma_1^{(\tau)}\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, x)\} + \overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}\gamma_2^{(\nu)}\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)}, x)\},$$

то в силу леммы 1 справедливо выражение

$$u(x,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \bar{l}_2^{(1)}(f_2) +$$
$$+ \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}, \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}; x, t) =$$
$$= \sum_{\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} +$$
$$+ \overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, x)\} +$$
$$+ \overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)}, x)\}. \tag{21}$$

Оценим L^2-норму третьей суммы правой части (21) сверху. Так как

$$\left\|\overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau,\cdot)})\}\right\|_{L^2} = \overline{\varepsilon}_{N_1}\left(\sum_{\tau=1}^{N_1}|\gamma_1^{(\tau)}|^2|\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)|^2\right)^{1/2},$$

то согласно равенствам $\overline{\varepsilon}_{N_1} = 1/N_1^{r_1/s+1/2}$ и $(\sum_{\tau=1}^{N_1} 1)^{1/2} = \sqrt{N_1}$ получим

$$\left\|\overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, \cdot\,)\}\right\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{N_1^{r_1/s}}. \tag{22}$$

Оценим L^2-норму четвертой суммы правой части (21) сверху:

$$\Big\|\overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\tau)},\cdot\,)\}\Big\|_{L^2}=\overline{\varepsilon}_{N_2}\bigg(\sum_{\nu=1}^{N_2}|\gamma_2^{(\nu)}|^2|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2\bigg)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\varepsilon}_{N_2}\bigg(\sum_{\nu=1}^{N_2}|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2\bigg)^{1/2}. \qquad (23)$$

Теперь используем лемму 3:

$$\sum_{\nu=1}^{N_2}|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2=\sum_{m\in A_2}|\rho_m(t)|^2=|\rho_0(t)|^2+\sum_{m\in A_2\setminus\{0\}}|\rho_m(t)|^2\leqslant 1+\sum_{m\in B_{K_2}}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\ll}N_2^{(s-2)/s}.$$

Следовательно, продолжив неравенство (23), будем иметь оценку сверху для L^2-нормы четвертой суммы правой части (21):

$$\Big\|\overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)},\cdot\,)\}\Big\|_{L^2}\underset{s,r_2}{\ll}\frac{1}{N_2^{r_2/s+1/2}}N_2^{(s-2)/(2s)}\underset{s,r_2}{\ll}\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \qquad (24)$$

При фиксированном $t\geqslant 0$ из (15), (18), (21), (22) и (24) следует неравенство

$$\|u(\cdot\,,t;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(\overline{l}_1^{(1)}(f_1)+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\ldots,\overline{l}_1^{(N_1)}(f_1)+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{l}_2^{(1)}(f_2)+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2},\ldots$$

$$\ldots,\overline{l}_2^{(N_2)}(f_2)+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2};\cdot\,,t)\|_{L^2}\underset{s,r_1,r_2}{\ll}\frac{1}{N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}},$$

откуда в силу определения пространства $L^{2,\infty}$ и леммы 2 имеем

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\underset{s,r_1,r_2}{\ll}N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \qquad (25)$$

Поскольку $\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\leqslant\delta_N((\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\leqslant$

$$\leqslant\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}},$$

то вследствие неравенств (20) и (25) получим соотношение (6).

Далее убедимся в справедливости (7). Для каждого $K_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,2\}$, определим множество

$$G_{K_j}=\{m\in\mathbb{Z}^s:[N_j^{1/s}\beta_{K_j}^{-1/r_j}]\leqslant\|m\|\leqslant 5\cdot[N_j^{1/s}\beta_{K_j}^{-1/r_j}]\},$$

где $\beta_{K_j}=\min\{\eta_{N_j},\ln N_j\}$, $j\in\{1,2\}$.

Так как $\lim\limits_{K_j\to+\infty}\beta_{K_j}=+\infty$, то существует номер $K_j^{(0)}$ такой, что для всех $K_j\geqslant K_j^{(0)}$ имеет место неравенство

$$\beta_{K_j}\geqslant 1,\quad j\in\{1,2\}. \qquad (26)$$

При каждом $K_j\geqslant K_j^{(0)}$ для функций

$$h_{K_j}(x)=\frac{\beta_{K_j}N_j^{-r_j/s-1/2}}{\sqrt{s\cdot 11^s}\cdot 5^{r_j}}\sum_{m\in G_{K_j}}\exp\{2\pi i(m,x)\}$$

из проверяемого неравенства $|G_{K_j}| \leqslant 11^s N_j \beta_{K_j}^{-s/r_j}$ и условий (26) получим цепочку неравенств

$$\|h_{K_j}\|_{W_2^{r_j}} = \sum_{m\in G_{K_j}} \beta_{K_j}^2 N_j^{-2r_j/s-1} \frac{\widetilde{m}_1^{2r_j}+\ldots+\widetilde{m}_s^{2r_j}}{s\cdot 11^s\cdot 5^{2r_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{K_j}^2 N_j^{-2r_j/s-1}\frac{1}{s\cdot 11^s\cdot 5^{2r_j}} s(5N_j^{1/s}\beta_{K_j}^{-1/r_j})^{2r_j}|G_{K_j}| \leqslant \beta_{K_j}^{-s/r_j} \leqslant 1.$$

С учётом $|G_{K_j}| \geqslant N_j\beta_{K_j}^{-s/r_j}$ оценим L^2-норму функции h_{K_j}, $j\in\{1,2\}$ снизу:

$$\|h_{K_j}\|_{L^2} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{\beta_{K_j}}{N_j^{r_j/s}\sqrt{N_j}}|G_{K_j}|^{1/2} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{\beta_{K_j}}{N^{r_j/s}\sqrt{N_j}}\sqrt{N_j}\beta_{K_j}^{-s/(2r_j)} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{1}{N^{r_j/s}}\beta_{K_j}^{(2r_j-s)/(2r_j)}. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим N-мерные векторы

$$(\overline{\alpha}_1^{(1)},\ldots,\overline{\alpha}_1^{(N_1)},\overline{\alpha}_2^{(1)},\ldots,\overline{\alpha}_2^{(N_2)}),\quad (\tilde{\alpha}_1^{(1)},\ldots,\tilde{\alpha}_1^{(N_1)},\tilde{\alpha}_2^{(1)},\ldots,\tilde{\alpha}_2^{(N_2)}),$$

$$(\overline{\omega}_1^{(1)},\ldots,\overline{\omega}_1^{(N_1)},\overline{\omega}_2^{(1)},\ldots,\overline{\omega}_2^{(N_2)}),\quad (\widetilde{\omega}_1^{(1)},\ldots,\widetilde{\omega}_1^{(N_1)},\widetilde{\omega}_2^{(1)},\ldots,\widetilde{\omega}_2^{(N_2)})$$

с компонентами, определёнными равенствами:

1) $\overline{\alpha}_1^{(\tau)} = -\dfrac{\hat{h}_{K_1}(m_1^{(\tau)})}{\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}}$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\overline{\alpha}_2^{(\nu)}=0$, $\nu=\overline{1,N_2}$;

2) $\tilde{\alpha}_1^{(\tau)} = -\dfrac{(-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(\tau)})}{\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}}$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\tilde{\alpha}_2^{(\nu)}=0$, $\nu=\overline{1,N_2}$;

3) $\overline{\omega}_1^{(\tau)}=0$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\overline{\omega}_2^{(\nu)} = -\dfrac{\hat{h}_{K_2}(m_2^{(\nu)})}{\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}}$, $\nu=\overline{1,N_2}$;

4) $\widetilde{\omega}_1^{(\tau)}=0$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\widetilde{\omega}_2^{(\nu)} = -\dfrac{(-\hat{h}_{K_2})(m_2^{(\nu)})}{\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}}$, $\nu=\overline{1,N_2}$.

Так как все компоненты указанных выше векторов по модулю не превосходят единицы и при всех значениях $\tau=\overline{1,N_1}$, $\nu=\overline{1,N_2}$ имеют место равенства

$$\hat{h}_{K_1}(m_1^{(\tau)})+\overline{\alpha}_1^{(\tau)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}=0,\quad (-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(\tau)})+\tilde{\alpha}_1^{(\tau)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}=0,$$

$$\hat{h}_{K_2}(m_2^{(\nu)})+\overline{\omega}_2^{(\nu)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}=0,\quad (-\hat{h}_{K_2})(m_2^{(\nu)})+\widetilde{\omega}_2^{(\nu)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}=0,$$

то для всякого вычислительного агрегата $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)\in\Phi_{(N_1,N_2)}$, в силу известного вложения $W_2^r(0,1)^s\subset H_2^r(0,1)^s$ (см., например, [17, с. 230]), имеем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}} \sup_{t\geqslant 0}\|u(\cdot\,;t;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(\hat{f}_1(m_1^{(1)})+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots$$

$$\ldots,\hat{f}_1(m_1^{(N_1)})+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\hat{f}_2(m_2^{(1)})+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots,\hat{f}_2(m_2^{(N_2)})+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot\,,t)\|_{L^2}\geqslant$$

$$\geqslant\max\{\|u(\,\cdot\,,0;h_{K_1},0)-\varphi_N(\hat{h}_{K_1}(m_1^{(1)})+\overline{\alpha}_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots$$

$$\ldots,\hat{h}_{K_1}(m_1^{(N_1)})+\overline{\alpha}_1^{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_2};\cdot\,,0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,0;(-h_{K_1}),0)-\varphi_N((-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(1)})+$$

$$+\tilde{\alpha}_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots,(-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(N_1)})+\tilde{\alpha}_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_2};\cdot\,,0)\|_{L^2}\}=$$

$$= \max\{\|u(\,\cdot\,,0;h_{K_1},0)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,0;(-h_{K_1}),0)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,0)\|_{L^2}\}\geqslant$$
$$\geqslant \|u(\,\cdot\,,0;h_{K_1},0)\|_{L^2}\geqslant\Bigg(\sum_{m\in H_{K_1}}|\hat h_{K_1}(m)|^2|\rho'_m(0)|^2\Bigg)^{1/2}=\|h_{K_1}\|_{L^2}.$$

Следовательно, в силу (27) получаем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}}\ \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ldots,|\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}}\|u(\cdot\,;f_1,f_2)-$$
$$-\overline{\varphi}_N(\hat f_1(m_1^{(1)})+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots,\hat f_1(m_1^{(N_1)})+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\hat f_2(m_2^{(1)})+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots$$
$$\ldots,\hat f_2(m_2^{(N_2)})+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot)\|_{L^{2,\infty}}\underset{s,r_1}{\gg}\frac{1}{N_1^{r_1/s}}\beta_{K_1}^{(2r_1-s)/(2r_1)}. \tag{28}$$

Пусть $t_0=\beta_{K_2}^{1/r_2}/(15\pi\sqrt{s}N_2^{1/s})$. Тогда для всех $m\in G_{K_2}$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{15\sqrt{s}}\leqslant t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\leqslant 1,$$

откуда следует

$$\sin\Big(t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\Big)\geqslant\sin\frac{1}{15\sqrt{s}},\quad m\in G_{K_2}. \tag{29}$$

В силу равенства Парсеваля с учётом (27) и (29) имеем

$$\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})\|_{L^2}=\Bigg(\sum_{m\in G_{K_2}}|\hat h_{K_2}(m)|^2|\rho_m(t_0)|^2\Bigg)^{1/2}=$$
$$=\Bigg(\sum_{m\in G_{K_2}}|\hat h_{K_2}(m)|^2\frac{\sin^2(t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1})}{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\Bigg)^{1/2}\underset{s,r_2}{\gg}$$
$$\underset{s,r_2}{\gg}\frac{\beta_{K_2}^{1/r_2}}{N_2^{1/s}}\|h_{K_2}\|_{L^2}\underset{s,r_2}{\gg}\frac{\beta_{K_2}^{(2r_2-s)/(2r_2)+1/r_2}}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{30}$$

Поскольку

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}}\ \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}}\ \sup_{t\geqslant 0}\|u(\,\cdot\,,t;f_1,f_2)-\varphi_N(\hat f_1(m_1^{(1)})+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots$$
$$\ldots,\hat f_1(m_1^{(N_1)})+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\hat f_2(m_2^{(1)})+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots,\hat f_2(m_2^{(N_2)})+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot\,,t)\|_{L^2}\geqslant$$
$$\geqslant\max\{\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})-\varphi_N(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_1},\hat h_{K_2}(m_2^{(1)})+\overline{\omega}_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots$$
$$\ldots,\hat h_{K_2}(m_2^{(N_2)})+\overline{\omega}_2^{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2};\cdot\,,t_0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,t_0;0,(-h_{K_2}))-\varphi_N(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_1},(-\hat h_{K_2})(m_2^{(1)})+$$
$$+\widetilde{\omega}_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots,(-\hat h_{K_2})(m_2^{(N_2)})+\widetilde{\omega}_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot\,,t_0)\|_{L^2}\}=$$
$$=\max\{\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,t_0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,t_0;0,(-h_{K_2}))-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,t_0)\|_{L^2}\}\geqslant$$
$$\geqslant\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})\|_{L^2},$$

то, приняв во внимание (30), получаем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1 \\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma(N_2)_2|\leqslant 1}} \|u(\cdot\,; f_1, f_2) - \varphi_N(\hat f_1(m_1^{(1)}) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}, \ldots$$

$$\ldots, \hat f_1(m_1^{(N_1)}) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}, \hat f_2(m_2^{(1)}) + \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}, \ldots, \hat f_2(m_2^{(N_2)}) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}; \cdot)\|_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_2}{\gg} \frac{\beta_{K_2}^{(2r_2-s)/(2r_2)+1/r_2}}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{31}$$

Из неравенств (28) и (31) следует

$$\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}), (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\gg} (N_1^{-r_1/s} + N_2^{-(r_2+1)/s}) \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\}, \tag{32}$$

где $\theta_1 = (2r_1 - s)/(2r_1)$, $\theta_2 = (2r_2 - s)/(2r_2) + 1/r_2$.

Поскольку $\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} (N_1^{-r_1/s} + N_2^{-(r_2+1)/s})$, то с учётом (32) имеем

$$\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}), (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\gg} \delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\},$$

отсюда, в силу равенства $\lim\limits_{\substack{K_1\to\infty \\ K_2\to\infty}} \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\} = +\infty$, вытекает соотношение (7). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
2. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М., 1963.
3. *Жилейкин Я.М.* О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155. № 5. С. 999–1002.
4. *Loo Keng Hua, Yang Wang.* Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg; New York, 1981.
5. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
6. *Sickel W., Ullrich T.* The Smolyak's algorithm, sampling, on spars grids and function spaces of dominating mixed smoothness // East J. Approx. 2007. V. 13. № 4. P. 287–425.
7. *Naurizbayev N.,Temirgaliyev N.* An exact order of discrepancy of the Smolyak grid and some general conclusions in the theory of numerical integration // Found. Comput. Math. 2012. V. 12. P. 139–172.
8. *Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.* О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журн. вычислит. математики. и мат. физики. 2013. Т. 13. № 7. С. 1082–1093.
9. *Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К.* Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестн. Евразийск. нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2019. Т. 126. № 1. С. 8–51.
10. *Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.* Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. С. 89–97.
11. *Абикенова Ш.К.,Темиргалиев Н.* О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1201–1204.

12. *Абикенова Ш.К., Утесов А.Б., Темиргалиев Н.* О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщённых классов Соболева // Мат. заметки. 2012. Т. 91. № 3. С. 459–463.
13. *Абикенова Ш.К.* Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0,1)^s$, $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ и E_s^r: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Астана, 2010.
14. *Утесов А.Б., Базарханова А.А.* Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1705–1714.
15. *Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 4. С. 491–506.
16. *Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е.* Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье // Совр. проблемы математики. 2013. Вып. 17. Математика и информатика. 2. К 75-летию со дня рождения А.А. Карацубы. С. 179–207.
17. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

Актюбинский региональный университет
им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан,
Назарбаев университет,
г. Нур-Султан, Казахстан

Поступила в редакцию 24.01.2022 г.
После доработки 25.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 717–720

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. **Я. Т. Султанаев, А. Р. Сагитова, Б. И. Марданов**

Исследуется асимптотическое поведение решений обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения произвольного нечётного порядка. При этом потенциал в уравнении может быть либо быстро осциллирующей функцией, либо обобщённой функцией. С помощью специальных квазипроизводных уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка, которая приводится к L-диагональному виду последовательным применением преобразований Хаусдорфа.

DOI: 10.31857/S0374064122050119, EDN: CBWEDY

Введение. Рассмотрим уравнение

$$iy^{(2n-1)}(x)+q(x)y(x)=i\lambda y,\quad x\in[x_0,+\infty),\tag{1}$$

для которого исследуем асимптотическое поведение фундаментальной системы его решений при $x\to+\infty$. Отметим, что если функция $q(x)$ суммируема на бесконечности, то она не влияет на асимптотику решений (см. [1, с. 316]). Основная цель – выделить новый широкий класс функций $q(x)$, не влияющих на асимптотику решений уравнения (1). При этом будет предложен новый подход к построению асимптотических формул для решений, состоящий в переходе от уравнения (1) к уравнению в квазипроизводных, рассматриваемому в статье [2], которое заменяется эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Затем к этой системе применяется преобразование Хаусдорфа (см. [3]), причём это преобразование применяется до тех пор, пока не получится L-диагональная система, асимптотика которой хорошо известна [1]. Отметим, что аналогичные вопросы для уравнения чётного порядка с помощью иных методов изучались в работах [4] и [5]. Итак, будем рассматривать уравнение (1) при следующих условиях на функцию $q(x)$: пусть $q(x)=q_3'''(x)$, $q_1(x)=q_3''(x)$, $q_2(x)=q_3'(x)$, $q_3(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}[x_0,+\infty)$. Если $q(x)$ – обобщённая функция, то производные понимаются в смысле теории распределения. Запишем уравнение (1) в виде

$$y^{(2n-1)}-iq(x)y=\lambda y,$$

откуда получим уравнение

$$(y^{(2n-2)}-iq_1(x)y)'+iq_1(x)y'=\lambda y.\tag{2}$$

Введём в рассмотрение вектор-функцию

$$z=\begin{pmatrix} y\\ y'\\ y''\\ \vdots\\ y^{(2n-3)}\\ y^{(2n-2)}-iq_1y\end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2) будет эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -iq_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\lambda & iq_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} z. \tag{3}$$

Введём постоянные матрицы

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

в результате чего матрица коэффициентов $A_0(x;\lambda)$ в системе (3) запишется в виде $A_0 = L_0 + iq_1(x)D$.

С помощью замены

$$z(x;\lambda) = e^{iq_2(x)D}u(x;\lambda)$$

представим систему (3) в виде

$$\frac{d}{dx}u\big(x;\lambda\big) = e^{-iq_2(x)D}L_0e^{iq_2(x)D}u(x;\lambda).$$

Воспользуемся тождеством Хаусдорфа и получим

$$e^{-iq_2(x)D}L_0e^{iq_2(x)D} = L_0 - iq_2(x)[L_0,D] - \frac{1}{2!}q_2^2(x)[[L_0,D],D] + \frac{1}{3!}iq_2^3(x)[[[L_0,D],D],D] + \ldots,$$

где $[A,B] = AB - BA$. Обозначим первый из коммутаторов через L_{01}, второй – L_{02} и т.д.

С помощью вычислений найдём

$$L_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{0k} = 0, \quad \forall k > 1.$$

Таким образом, имеем систему

$$\frac{d}{dx}u(x;\lambda) = (L_0 - iq_2(x)L_{01})u(x;\lambda). \tag{4}$$

Далее, положив

$$u(x;\lambda) = e^{iq_3(x)L_{01}}v(x;\lambda),$$

получим следующую систему:

$$\frac{d}{dx}v(x;\lambda) = e^{-iq_3(x)L_{01}}L_0e^{iq_3(x)L_{01}}v(x;\lambda).$$

Согласно тождеству Хаусдорфа

$$e^{-iq_3(x)L_{01}}L_0e^{iq_3(x)L_{01}} = L_0 - iq_3(x)[L_0,L_{01}] - \frac{1}{2!}q_3^2(x)[[L_0,L_{01}],L_{01}] + $$
$$+ \frac{1}{3!}iq_3^3(x)[[[L_0,L_{01}],L_{01}],L_{01}] + \ldots$$

В результате вычисления будем иметь

$$K_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{0m} = 0, \quad \forall m > 1.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\frac{d}{dx} v(x;\lambda) = (L_0 - iq_3(x)K_{01})v(x;\lambda). \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (4) и (5) имеют одинаковый вид

$$w'(x;\lambda) = (L_0 + G)w(x;\lambda), \tag{6}$$

где L_0 – постоянная матрица. Следовательно, если матрица G суммируема на бесконечности, то она не будет влиять на главный член асимптотики решений системы уравнений (6), что равносильно тому, что и функция $q(x)$ не будет влиять на асимптотику решений уравнения (1). Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть $q_2(x)$ или $q_3(x)$ – комплекснозначные локально интегрируемые на промежутке $[x_0, +\infty)$ функции. Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) при больших x ведет себя в главном как фундаментальная система решений укороченного уравнения $iy^{(2n-1)}(x) = i\lambda y(x)$, если либо $q_2(x) \in L[x_0, +\infty)$, либо $q_3(x) \in L[x_0, +\infty)$.*

Пример 1. Пусть функция $q_2(x)$ выражается через $q(x)$ в виде двойного несобственного интеграла, а $q_3(x)$ – в виде тройного интеграла, которые рассматриваются в смысле условной сходимости. Если $q(x) = x^\alpha \sin e^x$, то несложные выкладки с помощью интегрирования по частям показывают, что $q(x)$ не влияет на главный член асимптотики решений уравнения (1) при любом значении α. Если $q(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, то случай $\alpha < -1$ неинтересный, так как $q(x)$ будет суммируемой функцией на бесконечности. Если же $\alpha \geqslant -1$, то $q_3(x)$ суммируема на бесконечности при $\beta > \alpha/3 + 4/3$, а $q_2(x)$ суммируема на бесконечности при значениях $\beta > \alpha/2 + 3/2$. Сравнивая два последних неравенства, получаем, что для $\alpha \geqslant -1$ $q(x)$ не влияет на главный член асимптотики решений уравнения (1), если $\beta > \alpha/3 + 4/3$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$iy'''(x) + \delta'(x)y(x) = i\lambda y(x).$$

В данном случае $q(x) = \delta'(x)$, $q_1(x) = \delta(x)$, $q_2(x) = \Theta(x)$, $q_2^2(x) = q_2^3(x) = \Theta(x)$. Система (4), записанная для данного примера, будет иметь матрицу, элементы которой являются кусочно-постоянными функциями, а значит, допускает существование явного решения $u(x;\lambda)$, которое мы не будем приводить в силу громоздкости выкладок, и в результате получим

$$z(x;\lambda) = e^{i\Theta(x)D}u(x;\lambda).$$

Замечание. В работе [6] изучена асимптотика решений уравнения (1) для случаев производной третьего и пятого порядков. Показано, что для уравнений третьего порядка ряд Хаусдорфа не обрывается, но легко суммируется в силу циклического характера его членов. Для уравнения пятого порядка ряд Хаусдорфа обрывается на втором члене. Полученный результат относится к уравнениям произвольного нечётного порядка. Для уравнений порядка не менее семи ряд Хаусдорфа обрывается на первом члене.

Исследование Я.Т. Султанаева выполнено при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP08856104) и финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2019-1621).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary value problem and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Math. Surveys and Monographs. 1999. V. 61. P. 1–60.
3. *Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2015. Т. 7. № 3. С. 9–15.
4. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Мат. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 788–793.
5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 11. С. 129–166.
6. *Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с осциллирующими коэффициентами // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 6. С. 938–943.

Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа,
Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступила в редакцию 28.03.2022 г.
После доработки 28.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.