

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 57, номер 9, 2021

---

---

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

|                                                                                                                                                                     |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| О продолжении решения линеаризованной стационарной системы уравнений Навье–Стокса<br><i>Т. Ишанкулов, Ф. Т. Ишанкулов</i>                                           | 1153 |
| О единственности решения коэффициентной обратной задачи для уравнения Гельмгольца в бесфазной пространственно непереопределённой постановке<br><i>М. Ю. Кокурин</i> | 1164 |
| О построении функции Римана–Адамара для уравнения Бианки четвёртого порядка<br><i>А. Н. Миронов, Ю. О. Яковлева</i>                                                 | 1170 |
| Исследование спектра поверхностных волн открытого неоднородного прямоугольного диэлектрического волновода<br><i>Е. Ю. Смолькин</i>                                  | 1177 |
| Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта<br><i>А. С. Устюжанинова</i>                                                                     | 1191 |
| Задача Неймана–Трикоми для уравнения смешанного типа с сильным вырождением<br><i>Р. С. Хайруллин</i>                                                                | 1203 |

---

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

|                                                                                                                                                               |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части<br><i>С. Н. Асхабов</i>                                                  | 1210 |
| Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии<br><i>У. Д. Дурдыев</i>                                                               | 1220 |
| Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле<br><i>Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров</i>                            | 1230 |
| Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах<br><i>В. Ф. Пивень</i>                                                            | 1238 |
| О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стильтьеса<br><i>Н. А. Раутиан</i> | 1255 |
| Объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени для решения нестационарных задач акустики<br><i>А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченко</i>   | 1273 |
| О разрешимости одного гиперсингулярного интегрального уравнения на поверхности с изотермическими координатами<br><i>А. В. Сетуха</i>                          | 1280 |

---

---



## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ  
ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ  
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2021 г. Т. Ишанкулов, Ф. Т. Ишанкулов

Методом функции Карлемана установлен критерий разрешимости задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса в многомерном пространстве и построено её регуляризованное решение.

DOI: 10.31857/S0374064121090016

**1. Введение.** В данной работе рассматривается задача продолжения решения линеаризованной стационарной системы уравнений Навье–Стокса (л.с.с.у. Н–С) в пространственную ограниченную область по значениям вектора скорости и вектора напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши для этой системы.

Доказательство приведённой в п. 3 работы формулы продолжения, представляющей собой решение задачи Коши, основывается на методе, предложенном Т. Карлеманом [1] и обобщённом в работах [2–5]. В качестве следствия этой формулы продолжения получен критерий разрешимости задачи Коши, который является аналогом теоремы Фока–Куни [6] для л.с.с.у. Н–С. В п. 4 строится регуляризация решения задачи Коши. В п. 2 дано построение матрицы Карлемана. Для л.с.с.у. Н–С регуляризация и разрешимость задачи Коши в трёхмерном случае рассматривались в работах [7, 8], а задача Коши на плоскости – в работе [9].

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – точки  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ );  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ,  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ;  $s = |x' - y'|^2$ ,  $r^2 = s + (x_n - y_n)^2$ ;  $\tau = \operatorname{tg}(\pi/(2\rho))$ ,  $\rho < 1$ ;  $K_\rho = \{y : |y'| < \tau y_n, y_n > 0\}$ ,  $\partial K_\rho = \{y : |y'| = \tau y_n\}$ ,  $\overline{K}_\rho = K_\rho \cup \partial K_\rho$ ;  $\omega_n$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ;  $D_\rho$  – односвязная область с границей  $\partial D_\rho$ , состоящей из части поверхности конуса  $\partial K_\rho$  и гладкого куска  $S$  поверхности, лежащего внутри конуса  $\overline{K}_\rho$ . В случае  $\rho = 1$  получаем, что  $K_1$  – полупространство  $y_n > 0$  и  $\partial K_1$  – плоскость  $y_n = 0$ , тогда  $D_1$  – односвязная ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с границей, состоящей из части плоскости  $y_n = 0$  и гладкого куска  $S$  поверхности, лежащего в полупространстве  $y_n > 0$ .

Л.с.с.у. Н–С в пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$\nu \Delta \vec{v}(x) - \operatorname{grad} p(x) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}(x) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$  – вектор скорости, компоненты которого определены в области  $D_\rho$  и принадлежат классу  $C^2(D_\rho)$ , функция  $p(x)$  – давление – принадлежит классу  $C^1(D_\rho)$ , постоянная  $\nu$  – коэффициент вязкости,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Будем следовать обозначениям из монографии [10]. Введём оператор напряжения

$$T(\vec{v}(y), p(y)) = \|T_{kj}(\vec{v}(y), p(y))\|_{n \times n},$$

$$T_{kj}(\vec{v}(y), p(y)) = -\delta_{kj}p(y) + \nu \left( \frac{\partial v_k(y)}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_k} \right), \quad k, j = \overline{1, n},$$

$\delta_{kj}$  – символ Кронекера.

Множество пар  $(\vec{v}(x), p(x))$ , где  $\vec{v}(x) \in C^2(D_\rho) \cap C^1(\overline{D}_\rho)$  и  $p(x) \in C^1(D_\rho) \cap C(\overline{D}_\rho)$ , удовлетворяющих в области  $D_\rho$  системе (1.1), обозначим через  $N(D_\rho)$ . Пару  $(\vec{v}, p) \in N(D_\rho)$  назовём *регулярным решением* системы (1.1) в области  $D_\rho$ .

**Задача А.** Известны данные Коши решения системы (1.1) на поверхности  $S$ :

$$\vec{v}(y) = \vec{f}(y), \quad y \in S, \quad (1.2)$$

$$T(\vec{v}(y), p(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S, \quad (1.3)$$

где  $\vec{N}(y) = (N_1(y), \dots, N_n(y))$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$  в точке  $y$ ,  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$  – заданные непрерывные вектор-функции. Требуется восстановить вектор-функцию  $\vec{v}(x)$  и функцию  $p(x)$  в области  $D_\rho$ , исходя из заданных  $\vec{f}$ ,  $\vec{h}$ .

**Задача Б.** Указать условия, которым должны удовлетворять непрерывные вектор-функции  $\vec{f}(y)$  и  $\vec{h}(y)$ ,  $y \in S$ , чтобы существовало решение задачи Коши (1.1)–(1.3).

Единственность решения задачи А следует из общей теоремы Хольмгрена [11, с. 49]. Однако задача А некорректна, так как её решение: 1) существует не для любых данных и 2) не зависит непрерывно от данных Коши на поверхности  $S$ . Поэтому условие разрешимости не может быть описано в терминах линейно непрерывных функционалов. Если поверхность  $S$  и вектор-функции  $\vec{f}$ ,  $\vec{h}$  вещественно аналитические, то, согласно теореме Коши–Ковалевской [11, с. 24], решение задачи Коши (1.1)–(1.3) существует в окрестности поверхности  $S$ . Однако нас интересует глобальная разрешимость этой задачи.

Некорректность задачи Коши (1.1)–(1.3) показывает следующий пример, аналогичный примеру Адамара [12, с. 39].

**Пример.** Пусть  $S$  – кусок плоскости  $x_3 = 0$  в  $\mathbb{R}^3$  и

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{1}{\nu k^3} (kx_1 \cos(kx_1) + \sin(kx_1)) \sin(kx_2) \operatorname{sh}(\sqrt{2}kx_3),$$

$$u_2^{(k)}(x) = \frac{x_1}{\nu k^2} \sin(kx_1) \cos(kx_3) \operatorname{sh}(\sqrt{2}kx_3), \quad u_3^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{2}x_1}{\nu k^2} \sin(kx_1) \sin(kx_2) \operatorname{ch}(\sqrt{2}kx_3),$$

$$p^{(k)}(x) = \frac{2}{k^2} \cos(kx_1) \sin(kx_2) \operatorname{sh}(\sqrt{2}kx_3), \quad k = 1, 2, \dots$$

Несложно убедиться, что при каждом  $k$  пара  $(\vec{u}^{(k)}, p^{(k)}(x))$ , составленная из вектор-функции  $\vec{u}^{(k)}(x) = (u_1^{(k)}(x), u_2^{(k)}(x), u_3^{(k)}(x))$  и скалярной функции  $p^{(k)}(x)$ , удовлетворяет л.с.с.у. Н–С в  $\mathbb{R}^3$ . Кроме того, при  $x_3 = 0$  справедливы оценки

$$|\vec{u}^{(k)}(x)| \leq \frac{\operatorname{const}}{\nu k^2}, \quad |T(\vec{u}^{(k)}(x), p^{(k)}(x))\vec{N}(x)| \leq \frac{\operatorname{const}}{k}.$$

Однако в каждой точке  $x \in D_1$  с  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ ,  $x_3 > 0$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{u}^{(k)}(x)| = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)}(x) = \infty.$$

**2. Конструкция фундаментального решения.** При исследовании задач А и Б используем подходящее фундаментальное решение системы (1.1). Доказываемые ниже формулы продолжения, представляющие собой решение задач А и Б, основаны на методе функции Карлемана, разработанном М.М. Лаврентьевым [2]. При построении матрицы Карлемана используем функцию Карлемана для уравнения Лапласа, построенную Ш.Я. Ярмухамедовым [3]. Следуя [2], приводим определение матрицы Карлемана.

**Определение.** “Матрицей” Карлемана задачи (1.1)–(1.3) называется пара  $(G, \vec{r})$ , состоящая из  $(n \times n)$ -матрицы  $G = (G_k^m)$  и вектор-функции  $\vec{r} = (r^1, \dots, r^n)$ , зависящих от точек  $x \in D_\rho$ ,  $y \in \overline{D}_\rho$  и числового параметра  $\sigma > 0$  и удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) для каждой точки  $x \in D_\rho$  справедливы представления

$$\begin{aligned} G_k^m(x, y, \sigma) &= u_k^m(x - y) + g_k^m(x, y, \sigma), \quad k, m = \overline{1, n}, \\ r^m(x, y, \sigma) &= q^m(x - y) + g^m(x, y, \sigma), \quad m = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где пара  $(\vec{u}^m, q^m)$  – основное сингулярное решение системы (1.1),  $\vec{u}^m = (u_1^m, \dots, u_n^m)$ , а пара  $(\vec{g}^m, g^m)$ , составленная из вектор-функции  $\vec{g}^m = (g_1^m, \dots, g_n^m)$  и функции  $g^m$ , является решением по переменной  $y$  всюду в области  $D_\rho$  сопряжённой л.с.с.у. Н–С

$$\nu \Delta_y \vec{g}^m + \text{grad}_y g^m = 0, \quad \text{div}_y \vec{g}^m = 0;$$

2) для каждой точки  $x \in D_\rho$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\rho \setminus S} (|G_k^m(x, y, \sigma)| + |T'_{ij}(\vec{G}^m(x, y, \sigma), r^m(x, y, \sigma))_y|) dS_y &\leq \varepsilon_1(\sigma, x), \\ \int_{\partial D_\rho \setminus S} \left( |r^m(x, y, \sigma)| + \left| \frac{\partial r^m(x, y, \sigma)}{\partial x_k} \right| \right) dS_y &\leq \varepsilon_2(\sigma, x), \quad i, j, k, m = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_l(\sigma, x)$  – некоторые функции, стремящиеся к нулю в каждой точке  $x \in D_\rho$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $l = 1, 2$ ,

$$T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y = \delta_{ij} r^m + \nu \left( \frac{\partial G_i^m}{\partial y_j} + \frac{\partial G_j^m}{\partial y_i} \right).$$

Отметим, что если в приведённом определении вектор-функция  $\vec{g}^m$  и функция  $g^m$  зависят от разности  $x - y$ , то требование, чтобы пара  $(\vec{g}^m, g^m)$  удовлетворяла по  $y$  всюду в области  $D_\rho$  сопряжённой л.с.с.у. Н–С, равносильно тому, что эти функции по переменной  $x$  удовлетворяют уравнениям (1.1). “Матрица” Карлемана для задачи Коши (1.1)–(1.3) играет такую же роль, какую играет матрица Грина в первой краевой задаче для системы (1.1).

Переходим к построению “матрицы” Карлемана. Матрицу  $(G_k^m)$  и вектор  $\vec{r}$  определим равенствами

$$\begin{aligned} G_k^m(x - y, \sigma) &= -\frac{1}{2\nu} \left( \delta_{km} \Phi(x - y, \sigma) + (x_m - y_m) \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi(x - y, \sigma) \right), \\ r^m(x - y, \sigma) &= -\frac{\partial}{\partial y_m} \Phi(x - y, \sigma), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Phi$  – функция Карлемана для уравнения Лапласа, которая определяется следующим образом:

если  $n = 2l + 1$ ,  $l \geq 1$ , то

$$a_m \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \int_0^\infty \text{Im} \left( \frac{E_\rho(\sigma w)}{w} \right) \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_n - x_n; \quad (2.4)$$

если  $n = 2l$ ,  $l \geq 2$ , то

$$a_m \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}} \text{Im} \left( \frac{E_\rho(\sigma w_1)}{\sqrt{s} w_1} \right), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_n - x_n, \quad (2.5)$$

$$a_n = \begin{cases} (-1)^l 2^{-1} (l-2)! (n-2) \omega_n, & n = 2l, \quad l \geq 2, \\ (-1)^l 2^{-1} (2l-3)!! (n-2) \pi \omega_n, & n = 2l+1, \quad l \geq 1, \end{cases} \quad (2.5a)$$

$i$  – мнимая единица,  $E_\rho(w)$  – целая функция Миттаг-Лёффлера.

В работе [3] доказаны следующие две леммы.

**Лемма 2.1.** Функция  $\Phi$ , определённая формулами (2.4), (2.5), представима в виде

$$\Phi(x - y, \sigma) = \frac{r^{2-n}}{\omega_n (n-2)} + \gamma(x - y, \sigma), \quad (2.6)$$

где  $\gamma$  – гармоническая функция по переменной  $y$ , включая  $y = x$ .

**Лемма 2.2.** Пусть  $E$  – компакт в  $K_\rho$ ,  $\delta$  – расстояние от  $E$  до  $\partial K_\rho$ . Тогда для  $n \geq 3$ ,  $\sigma \geq 0$  при  $x \in E$ ,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus K_\rho$  справедливы неравенства

$$|\Phi(x-y, \sigma)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi(x-y, \sigma) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi(x-y, \sigma) \right| \leq \frac{C_1(\rho, \delta, n)r}{1 + \sigma\delta}, \quad k, j = \overline{1, n}, \quad (2.7)$$

$$\left| \frac{\partial \Phi(x-y, \sigma)}{\partial \sigma} \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial y_k} \Phi(x-y, \sigma) \right| + \left| \frac{\partial^3}{\partial \sigma \partial x_j \partial y_k} \Phi(x-y, \sigma) \right| \leq \frac{C_2(\rho, \delta, n)r}{1 + \sigma^2 \delta^2}, \quad k, j = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

где постоянные  $C_j$  не зависят от  $x$ ,  $y$  и  $\sigma$ .

Воспользовавшись этими утверждениями, докажем, что справедлива

**Лемма 2.3.** Пара  $((G_k^m), \vec{r})$ , состоящая из матрицы  $(G_k^m)$  и вектора  $\vec{r}$ , определённых равенствами (2.3)–(2.5), является “матрицей” Карлемана для задачи (1.1)–(1.3).

**Доказательство.** В силу равенств (2.3)–(2.6) имеем

$$\begin{aligned} G_k^m(x-y, \sigma) &= -\frac{1}{8\pi\nu} \left( \delta_{km} \left( \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + \gamma(x-y, \sigma) \right) + (x_m - y_m) \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + \gamma(x-y, \sigma) \right) \right) = \\ &= u_k^m(x-y) + g_k^m(x, y, \sigma), \\ r^m(x-y, \sigma) &= -\frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + \gamma(x-y, \sigma) \right) = q^m(x-y) + g^m(x, y, \sigma). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами Лоренца

$$\begin{aligned} u_k^m(x-y) &= -\frac{1}{2\nu\omega_n(n-2)} (\delta_{km} r^{2-n} + (n-2)(x_k - y_k)(x_j - y_j) r^{-n}), \\ q^m(x-y) &= -\frac{1}{\omega_n} (x_m - y_m) r^{-n} \end{aligned}$$

для основного сингулярного решения  $((u_k^m), q^m)$  в многомерном пространстве. В трёхмерном пространстве формулы Лоренца приведены в [10, с. 70].

Докажем, что при каждом  $m = \overline{1, n}$  пара  $(\vec{g}^m, g^m)$ , состоящая из вектор-функции  $\vec{g}^m$  с компонентами

$$g_k^m(x-y, \sigma) = -\frac{1}{2\nu} \left[ \delta_{km} \gamma(x-y, \sigma) + (x_m - y_m) \frac{\partial}{\partial y_k} \gamma(x-y, \sigma) \right], \quad k = \overline{1, n},$$

и функции  $g^m(x-y, \sigma) = -\frac{\partial}{\partial y_m} \gamma(x-y, \sigma)$ , удовлетворяет по переменной  $y$  в каждой ограниченной области пространства  $\mathbb{R}^n$ , включая точку  $y = x$ , сопряжённой л.с.с.у. Н-С. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k^m}{\partial y_k} &= -\frac{1}{2\nu} \left( \delta_{km} \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} - \delta_{km} \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} + (x_m - y_m) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_k^2} \right) = \frac{x_m - y_m}{2\nu} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_k^2}, \\ \frac{\partial g_k^m}{\partial y_i} &= -\frac{1}{2\nu} \left( \delta_{km} \frac{\partial \gamma}{\partial y_i} - \delta_{im} \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} + (x_m - y_m) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_k \partial y_i} \right), \\ \frac{\partial^2 g_k^m}{\partial y_i^2} &= -\frac{1}{2\nu} \left( \delta_{km} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_i^2} - 2\delta_{im} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_k \partial y_i} + (x_m - y_m) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_i^2} \right), \\ \frac{\partial g^m}{\partial y_k} &= -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_m \partial y_k}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу гармоничности функции  $\gamma$  следует, что функции  $g_k^m$ ,  $k = \overline{1, n}$ , и  $g^m$  удовлетворяют сопряжённой л.с.с.у. Н-С, т.е.

$$\nu \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_k^m}{\partial y_i^2} + \frac{\partial g^m}{\partial y_k} = 0.$$

Следовательно, для функций  $G_k^m$  и  $r^m$  имеют место представления (2.1), где функции  $g_k^m$ ,  $k = \overline{1, n}$ , и  $g^m$  удовлетворяют по переменной  $y$  сопряжённой системе Навье–Стокса, включая точку  $y = x$ . Из формул (2.3)–(2.5) и неравенства (2.8) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\rho \setminus S} (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|) ds_y &\leq \frac{A_1(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma\delta}, \\ \int_{\partial D_\rho \setminus S} \left( |r^m| + \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y &\leq \frac{A_1(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma\delta}, \quad x \in E. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, неравенства (2.2) выполняются с  $\varepsilon_l(x, \sigma) \leq \frac{A_1(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma\delta}$ ,  $x \in E$ ,  $l = 1, 2$ .

Лемма доказана.

**3. Формула Карлемана.** Из леммы 2.3 вытекает, что для регулярного решения  $(\vec{v}, p) \in N(D_\rho)$  системы (1.1) в области  $D_\rho$ , справедливы следующие интегральные формулы Грина [10, с. 72]:

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \int_{\partial D_\rho} \sum_{i,j=1}^n (T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y v_i(y) N_j(y) - \vec{G}^m T_{ij}(\vec{v}, p) N_j) ds_y, \quad m = \overline{1, n}, \\ p(x) &= - \int_{\partial D_\rho} \sum_{m,j=1}^n \left( r^m T_{mj}(\vec{v}, p) N_j(y) + 2\nu \frac{\partial r^m}{\partial x_j} v_m N_j(y) \right) ds_y, \quad x \in D_\rho, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где в  $T'_{ij}(\vec{u}^m, q)_y$  индекс  $y$  показывает, что дифференцирование в  $T'_{ij}$  ведётся по  $y$ , для упрощения записи аргументы в подынтегральных функциях опущены.

Положим

$$\begin{aligned} v_m^\sigma(x) &= \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y f_i(y) N_j(y) - G_i^m h_j(y) \right) ds_y, \quad m = \overline{1, n}, \\ p^\sigma(x) &= - \int_S \sum_{m=1}^n \left( r^m h_m(y) + 2\nu f_m \sum_{j=1}^n \frac{\partial r^m}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $(\vec{v}, p) \in N(D_\rho)$  и  $\vec{v}(y) = \vec{f}(y)$ ,  $T(\vec{v}(y), p(y)) = \vec{h}(y)$ ,  $y \in S$ , где  $\vec{f}(y)$  и  $\vec{h}(y)$  – заданные вектор-функции классов  $C^1(S)$  и  $C(S)$  соответственно. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y f_i(y) N_j(y) - G_i^m h_j(y) \right) ds_y, \quad m = \overline{1, n}, \\ p(x) &= - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S \sum_{i=1}^n \left( r^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial r^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y, \quad x \in D_\rho, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$u$

$$v_m(x) = \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{u}^m, q^m)_y f_i(y) N_j(y) - u_i^m h_j(y) \right) ds_y + \int_0^\infty F^m(x, \sigma) d\sigma, \quad m = \overline{1, n},$$

$$p(x) = - \int_S \sum_{i=1}^n \left( q^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y - \int_0^\infty P(x, \sigma) d\sigma, \quad x \in D_\rho, \quad (3.4)$$

$2de$

$$T'_{ij}(\vec{u}^m, q^m) = \delta_{ij} q^m + \nu \left( \frac{\partial u_i^m}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^m}{\partial y_i} \right),$$

$$F^m(x, \sigma) = \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{\Omega}^m, R^m)_y f_i(y) N_j(y) - \Omega_i^m h_j(y) \right) ds_y,$$

$$P(x, \sigma) = - \int_S \sum_{i=1}^n \left( R^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial R^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y, \quad (3.5)$$

$$\Omega_i^m(x - y, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} G_i^m(x - y, \sigma), \quad R^i(x - y, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} r^m(x - y, \sigma), \quad m = \overline{1, n}. \quad (3.5a)$$

**Доказательство.** В силу формул (3.1) и (3.2) получаем

$$v_m(x) - v_m^\sigma(x) = \int_{\partial D_\rho \setminus S} \sum_{i,j=1}^n (T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y v_i(y) N_j(y) - G_i^m T_{ij}(\vec{v}, p) N_j(y)) ds_y,$$

$$p(x) - p^\sigma(x) = - \int_{\partial D_\rho \setminus S} \sum_{m,j=1}^n \left( r^m T_{mj}(\vec{v}, p) N_j(y) + 2\nu \frac{\partial r^m}{\partial x_j} v_m N_j(y) \right) ds_y. \quad (3.6)$$

Из оценок (2.9) и представлений (3.6) следует, что для любого компактного множества  $E \in D_\rho$  и  $x \in E$  выполняются оценки

$$|v_m^\sigma(x) - v_m(x)| \leq c \frac{A_1(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma \delta}, \quad |p^\sigma(x) - p(x)| \leq c \frac{A_1(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma \delta},$$

где  $c = \text{const}$ , из которых и вытекает справедливость формул (3.3).

Покажем эквивалентность формул (3.3) и (3.4). Вследствие равенств (3.5a) запишем формулы (3.4) в виде

$$v_m(x) = \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{u}^m, q^m)_y f_i(y) N_j(y) - u_i^m h_j(y) \right) ds_y +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \int_S \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y f_i(y) N_j(y) - G_i^m h_j(y) \right) ds_y \right\} d\sigma,$$

$$p(x) = - \int_S \sum_{i=1}^n \left( q^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y -$$

$$- \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \int_S \sum_{i=1}^n \left( r^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial r^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y \right\} d\sigma. \quad (3.7)$$

Так как на основании формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = \Phi(\infty) - \Phi(0),$$

то представления (3.7) приводят к формулам (3.3). Теорема доказана.

Формулы (3.3) и (3.4) представляют собой аналог формулы Карлемана для л.с.с.у. Н–С и дают решение задачи А.

Переходя к рассмотрению задачи Б, обозначим через  $S_0$  поверхность  $S$ , из которой удалён край.

**Теорема 3.2.** Пусть  $S \in C^2$ ,  $\vec{f}(y) \in C^1(S_0) \cap L(S)$ ,  $\vec{h}(y) \in C(S_0) \cap L(S)$ . Для того чтобы существовала пара  $(\vec{v}, p)$ , где

$$\vec{v} \in C^2(D_\rho) \cap C^1(D_\rho \cup S_0) \cap L(S), \quad p \in C^1(D_\rho) \cap C(D_\rho \cup S_0) \cap L(S),$$

удовлетворяющая в области  $D_\rho$  л.с.с.у. Н–С, такая, что

$$\vec{v}(y) = \vec{f}(y), \quad T(\vec{v}(y), p(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S_0,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in D_\rho$  сходились несобственные интегралы (равномерно на компактах из  $K_\rho$ ):

$$\left| \int_0^{\infty} F^m(x, \sigma) d\sigma \right| < \infty, \quad \left| \int_0^{\infty} P(x, \sigma) d\sigma \right| < \infty. \quad (3.8)$$

Если условия (3.8) выполнены, то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (3.3) и (3.4).

**Доказательство. Необходимость.** Пусть вектор-функция  $\vec{v}$  и функция  $p$ , указанные в формулировке теоремы, существуют. Пусть компакт  $E$  и число  $\varepsilon > 0$  таковы, что  $E \subset \overline{K}_\rho^{2\varepsilon} \subset \overline{K}_\rho^\varepsilon \subset K_\rho$ , где  $\overline{K}_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| \leq \tau(y_n - \varepsilon), y_n \geq \varepsilon\}$ . Из леммы 2.2 следует, что при  $y \in \mathbb{R}^n \setminus K_\rho^\varepsilon$  и  $x \in E$  для функции  $\Phi(x - y, \sigma)$  справедливы оценки (2.7), (2.8), в которых  $\delta \geq \varepsilon\tau$ . Обозначим  $S_\varepsilon = \overline{K}_\rho^\varepsilon \cap S$ , при этом часть  $S_\varepsilon \subset S$  в объединении с частью  $T_\varepsilon$  поверхности конуса  $\partial K_\rho^\varepsilon$  представляет собой замкнутую кусочно-гладкую поверхность  $S_\varepsilon \cup T_\varepsilon$ , являющуюся границей односвязной ограниченной области. Интегралы в правой части формул (3.5) представимы в виде суммы двух интегралов согласно разбиению  $S = S_\varepsilon \cup (S \setminus S_\varepsilon)$ .

Так как функция  $\partial\Phi(x - y, \sigma)/\partial\sigma$  является регулярной гармонической, то из леммы 2.3 вытекает, что пара, состоящая из матрицы  $(\Omega_i^m)$  и вектора  $\vec{R}$ , определённых равенствами (3.5а), является регулярным решением системы (1.1) во всём пространстве. В силу формулы Грина для л.с.с.у. Н–С интегралы по части  $S_\varepsilon$  равны интегралам по  $T_\varepsilon$ . При  $y \in T_\varepsilon$ ,  $x \in E$  для элементов матрицы  $(\Omega_i^m)$  и функции  $R^m$  справедливы неравенства (2.8) и продолженные функции  $\vec{v}(y)$ ,  $p(y)$  вместе со своими частными производными ограничены постоянным числом, зависящим от  $\varepsilon$ .

Имеют место неравенства

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T'_{ij}(\Omega_i^m, R^m)_y f_i(y) N_j(y) - \Omega_i^m h_i(y) \right) ds_y \right| \leq \frac{\text{const}}{1 + \delta^2 \sigma^2}, \quad m = \overline{1, n},$$

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left( R^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial R^i}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y \right| \leq \frac{\text{const}}{1 + \delta^2 \sigma^2}$$

с постоянной, зависящей от  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и диаметра области  $D_\rho$ . Так как  $|y| \leq \tau(y_n - \varepsilon)$ ,  $y_n \geq \varepsilon$ , когда  $y \in S \setminus S_\varepsilon$  и  $x \in E$ , и по условию  $\vec{f}(y), \vec{h}(y) \in C(S_0) \cap L(S)$ , то последние неравенства сохраняются (с другими постоянными) и для модуля интегралов по части  $S \setminus S_\varepsilon$ . Отсюда следует условие (3.8).

**Достаточность.** Пусть для вектор-функций  $\vec{f} \in C^1(S_0) \cap L(S)$ ,  $\vec{h} \in C(S_0) \cap L(S)$  выполняется условие (3.8). Покажем, что существует пара  $(\vec{v}, p)$ , удовлетворяющая в области  $D_\rho$  системе (1.1),  $\vec{v} \in C^2(D_\rho) \cap C^1(D_\rho \cup S_0) \cap L(S)$ ,  $p \in C^1(D_\rho) \cap C(D_\rho \cup S_0) \cap L(S)$  такая, что  $\vec{v}(y) = \vec{f}(y)$ ,  $T(\vec{v}(y), p(y))N(y) = \vec{h}(y)$ ,  $y \in S_0$ .

Рассмотрим вектор-функцию  $\vec{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$  и функцию  $p(x)$ , определяемые двумя эквивалентными формулами (3.3) или (3.4). Интегралы в первых слагаемых в правой части формул (3.4) являются интегралами типа Коши–Грина для л.с.с.у. Н–С. Эти интегралы задают две пары функций  $(\vec{v}^-(x), p^-(x))$ ,  $(\vec{v}^+(x), p^+(x))$ , из которых первая является решением системы (1.1) в области  $D_\rho$ , а вторая пара удовлетворяет уравнениям (1.1) в области  $K_\rho \setminus \overline{D}_\rho$ . Из теории гидродинамических потенциалов [10, с. 78] следует, что при  $y \in S_0$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} [\vec{v}^-(y)]_{\text{int}} - [\vec{v}^+(y)]_{\text{ext}} &= \vec{f}(y), \\ [T(\vec{v}^-(y), p^-(y))\vec{N}(y)]_{\text{int}} - [T(\vec{v}^+(y), p^+(y))\vec{N}(y)]_{\text{ext}} &= \vec{h}(y), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где через  $[\vec{v}^-(y)]_{\text{int}}$  и  $[\vec{v}^+(y)]_{\text{ext}}$  обозначены предельные значения вектор-функций  $\vec{v}^-(x)$  и  $\vec{v}^+(x)$  соответственно при  $x \rightarrow y$  ( $x \in D_\rho$ ) и  $x \rightarrow y$  ( $x \in K_\rho \setminus \overline{D}_\rho$ ). Такой же смысл имеют обозначения во втором из равенств в (3.9).

Функция  $\partial\Phi(x-y, \sigma)/\partial\sigma$  является по переменной  $x$  регулярной гармонической функцией во всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Повторяя доказательство леммы 2.3, нетрудно показать, что пара, состоящая из матрицы  $(\Omega_i^m)$  и вектора  $\vec{R}$ , является регулярным решением системы (1.1) во всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В силу условий (3.8) отсюда следует, что вторые слагаемые в формулах (3.4) удовлетворяют уравнениям (1.1) в области  $K_\rho$ .

Итак, правая часть формул (3.4) задаёт две пары функций  $(\vec{V}^-, P^-)$  и  $(\vec{V}^+, P^+)$ , которые соответственно в областях  $D_\rho$  и  $K_\rho \setminus \overline{D}_\rho$  удовлетворяют уравнениям (1.1). При  $y \in S_0$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\vec{V}^-(y))_{\text{int}} - (\vec{V}^+(y))_{\text{ext}} &= \vec{f}(y), \\ [T(\vec{V}^-(y), P^-(y))\vec{N}(y)]_{\text{int}} - [T(\vec{V}^+(y), P^+(y))\vec{N}(y)]_{\text{ext}} &= \vec{h}(y), \end{aligned} \quad (3.9a)$$

причём если одна из этих пар непрерывна в соответствующей области вплоть до  $S_0$  вместе с напряжением, то другая также обладает этим свойством.

Если  $x_n > \max_{y \in S} y_n = x_n^0$ ,  $x \in K_\rho$ , то  $y_n - x_n < 0$  и из свойств функции Миттаг-Лёффлера вытекает, что для функции  $\Phi(x-y, \sigma)$  и её производных справедливы неравенства (2.7). Отсюда следует, что “матрица” Карлемана, определяемая равенствами (2.3)–(2.5), при  $x_n > x_n^0$ ,  $x \in K_\rho$ , удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned} \int_S (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|) ds_y &\leq \frac{A_2(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma\delta}, \\ \int_S \left( |r^m| + \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y &\leq \frac{A_3(\rho, \delta, n)}{1 + \sigma\delta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В силу формул (3.3), которые эквивалентны формулам (3.4), и неравенств (3.10) заключаем, что при  $x_n > \max_{y \in S} y_n$ ,  $x \in K_\rho$ , имеют место следующие равенства:

$$\vec{V}^+(x) = 0, \quad P^+(x) = 0, \quad T(\vec{V}^+(x), P^+(x)) = 0. \quad (3.11)$$

Так как пара  $(\vec{V}^+(x), P^+(x))$  удовлетворяет системе уравнений (1.1) в области  $K_\rho \setminus \overline{D}_\rho$ , то вектор-функция  $\vec{V}^+(x)$  и функция  $P^+(x)$  являются вещественно-аналитическими в этой области. В силу свойства единственности аналитического продолжения [13, с. 147] из равенств (3.11) вытекают тождества

$$\vec{V}^+(x) \equiv 0, \quad P^+(x) \equiv 0, \quad T(\vec{V}^+(x), P^+(x)) \equiv 0, \quad x \in K_\rho \setminus \overline{D}_\rho,$$

из которых следует, что

$$\vec{V}^+(y) \equiv 0, \quad P^+(y) \equiv 0, \quad T(\vec{V}^+(y), P^+(y))\vec{N}(y) \equiv 0, \quad y \in S_0.$$

Отсюда в силу равенств (3.9а) получаем

$$\vec{V}^-(y) = \vec{f}(y), \quad T(\vec{V}^-(y), P^-(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S_0. \quad (3.12)$$

Теперь вследствие равенств (3.14) для завершения доказательства достаточности в качестве искомой пары  $(\vec{v}, p)$  нужно взять пару  $(\vec{V}^-, P^-)$ . Теорема доказана.

**4. Регуляризация.** Проведём регуляризацию решения задачи Коши (задача А) для области  $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ . Матрица Карлемана для области  $D_1$  определяется равенствами (2.3), в которых функция  $\Phi$  определяется следующим образом:

если  $n = 2l + 1$ ,  $l \geq 1$ , то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left( \frac{\exp(\sigma w)}{w} \right) \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_n - x_n, \quad (4.1)$$

если  $n = 2l$ ,  $l \geq 2$ , то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}} \operatorname{Im} \left( \frac{\exp(\sigma w_1)}{\sqrt{s} w_1} \right), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_n - x_n, \quad (4.2)$$

постоянная  $a_n$  определяется формулой (2.5а). Функцию  $\Phi(x - y, \sigma)$  после отделения мнимой части можно записать в следующем виде:

если  $n = 2l + 1$ ,  $l \geq 1$ , то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \exp(\sigma y_n - \sigma x_n) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \left( -\frac{1}{u^2 + r^2} \cos \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} + \frac{y_n - x_n}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \sin \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} \right) du, \quad (4.1a)$$

если  $n = 2l$ ,  $l \geq 2$ , то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \exp(\sigma y_n - \sigma x_n) \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}} \left( \frac{1}{r^2} \left( \cos \sigma \alpha + \frac{y_n - x_n}{\sigma} \sin \sigma \alpha \right) \right). \quad (4.2a)$$

Как следует из леммы 2.3, для функций  $G_k^m$  и  $r^m$ , определённых равенствами (2.3), (4.1), (4.2), имеют место представления (2.1), в которых функции  $g_k^m$  и  $g^m$  удовлетворяют по переменной  $y$  сопряжённой л.с.с.у. Н-С во всём пространстве, включая точку  $y = x$ . Поэтому функции  $G_k^m$ ,  $r^m$  и их производные оцениваются через  $|x - y|^{-k}$  по порядку также, как и компоненты основного сингулярного решения. Для матрицы Грина и её производных такие оценки в трёхмерном пространстве приведены в [11, с. 88]. Из формул (2.3), (4.1), (4.2), (2.6) получаем неравенства

$$\int_{\partial D_1 \setminus S} (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|) ds_y \leq cc_1(x) \psi_n(\sigma) \exp(-\sigma x_n),$$

$$\int_{\partial D_1 \setminus S} \left( |r^m| + \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y \leq cc_2(x) \psi_n(\sigma) \exp(-\sigma x_n), \quad x \in D_1, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \int_S (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|) ds_y &\leq cc_1(x) \psi_n(\sigma) \exp(\sigma x_n^0 - \sigma x_n), \\ \int_S \left( |r^m| + \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y &\leq cc_2(x) \psi_n(\sigma) \exp(\sigma x_n^0 - \sigma x_n), \quad x \in D_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\psi_n(\sigma) = \begin{cases} \sigma^l, & n = 2l, \\ \sigma^{l+1}, & n = 2l + 1, \end{cases} \quad c = \text{const}, \quad c_k(x) = \int_{\partial D_1} \frac{ds_y}{|x - y|^{k+n-2}}.$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $(\vec{v}, p) \in N(D_1)$  и  $\vec{v}(y) = \vec{f}(y)$ ,  $T(\vec{v}(y), p(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y)$ , где  $\vec{f}(y)$  и  $\vec{h}(y)$  – заданные вектор-функции классов  $C^1(S)$  и  $C(S)$  соответственно. Пусть вместо  $\vec{f}(y)$  и  $\vec{h}(y)$  заданы их приближения – вектор-функции  $\vec{f}^\delta(y)$  и  $\vec{g}^\delta(y)$  класса  $C(S)$  соответственно, такие, что

$$\max_{\bar{S}} |f_k(y) - f_k^\delta(y)| + \max_{\bar{S}} |h_k(y) - h_k^\delta(y)| \leq \delta, \quad k = \overline{1, n},$$

где  $\delta \in (0, 1)$ , и определены функции

$$\begin{aligned} v_m^{\sigma\delta}(x) &= \int_S \sum_{i,j=1}^n T'_{ik}(\vec{G}^m, r)_y f_i^\delta(y) N_k(y) ds_y - \int_S \sum_{i=1}^n G_i^m h_i^\delta(y) ds_y, \quad m = \overline{1, n}, \\ p^{\sigma\delta}(x) &= - \int_S \sum_{m=1}^n \left( r^m h_m^\delta + 2\nu f_m^\delta \sum_{j=1}^n \frac{\partial r^m}{\partial x_j} N_j(y) \right) ds_y, \quad x \in D_1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\sigma = (-\ln \delta)/x_n^0$ .

Если  $|v_i(y)| + |T_{ij}(\vec{v}(y), p(y))| \leq 1$ ,  $y \in \partial D_1/S$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , то при любом  $x \in D_1$  справедливы неравенства

$$|v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x)| \leq Ac_1(x) \delta^{x_n/x_n^0} \psi_n(-\ln \delta), \quad |p^{\sigma\delta}(x) - p(x)| \leq Ac_2(x) \delta^{x_n/x_n^0} \psi_n(-\ln \delta).$$

**Доказательство.** Из формул (3.1) и определения (4.5) для любого  $x \in D_1$  вытекают равенства

$$\begin{aligned} v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x) &= \int_S \sum_{i,j=1}^n T'_{ik}(\vec{G}^m, r^m)_y (f_i^\delta(y) - f_i(y)) N_j(y) ds_y - \\ &- \int_S \sum_{i=1}^n G_i^m (h_i^\delta(y) - h_i(y)) ds_y + \int_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{i,j=1}^n (G_i^m T'_{ij}(\vec{v}, p) N_j(y) - T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y v_i(y) N_j(y)) ds_y, \\ p^{\sigma\delta}(x) - p(x) &= - \int_S \sum_{m=1}^n r^m (h_m^\delta(y) - h_m(y)) ds_y - 2\nu \int_S \sum_{m,j=1}^n \frac{\partial r^m}{\partial x_j} N_j(y) (f_m^\delta(y) - f_m(y)) ds_y + \\ &+ \int_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{m,j=1}^n \left( r^m T_{mk}(\vec{v}, p) N_j(y) + 2\nu \frac{\partial r^m}{\partial x_j} v_m(y) N_j(y) \right) ds_y. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 |v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x)| &\leq \delta \int_S \sum_{i=1}^n \left( |G_i^m| + \sum_{j=1}^n |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y| \right) ds_y + \\
 &+ \int_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{i=1}^n \left( |G_i^m| + \sum_{j=1}^n |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y| \right) ds_y, \\
 |p^{\sigma\delta}(x) - p(x)| &\leq \delta \int_S \sum_{i=1}^n \left( |r^m| + 2\nu \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y + \\
 &+ \int_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{i=1}^n \left( |r^m| + 2\nu \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \right| \right) ds_y, \quad x \in D_1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

В силу неравенств (4.3), (4.4) и (4.6) справедливы оценки

$$|v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x)| \leq c_1(x) \psi_n(\sigma) (1 + \delta \exp(\sigma x_n^0)) \exp(-\sigma x_n),$$

$$|p^{\sigma\delta}(x) - p(x)| \leq c_2(x) \psi_n(\sigma) (1 + \exp(\sigma x_n^0)) \exp(-\sigma x_n), \quad x \in D_1,$$

из которых, так как  $\sigma = (-\ln \delta)/x_n^0$ , следует утверждение теоремы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. Ярмухамедов Ш. Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 33. № 3. С. 702–719.
4. Шлапунов А.А. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 3. 205–215.
5. Tarkhanov N.N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. Berlin, 1995.
6. Фок В.А., Кунц Ф.М. О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 6. С. 1195–1198.
7. Ишанкулов Т. О задаче Коши для линейной стационарной системы Навье–Стокса // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1089–1097.
8. Ишанкулов Т. О продолжении решения линейной стационарной системы уравнений Навье–Стокса // Докл. АН РУз. 2007. № 3. С. 4–8.
9. Арбузов Э.В. Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 6. С. 727–730.
10. Ладженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
11. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
12. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
13. Берс Л., Джон Ф., Шефтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.

Самаркандский государственный университет,  
Узбекистан

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.  
После доработки 16.03.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22+517.983.54

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В БЕСФАЗНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2021 г. М. Ю. Кокурин

Устанавливается единственность решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца, в которой разыскивается коэффициент рефракции, описывающий свойства ограниченной неоднородности волновой среды. Исходными данными для определения искомого коэффициента служат модули решений, соответствующих либо точечным источникам, сосредоточенным на отрезке, либо источникам, распределённым сферически симметрично с центрами на отрезке. Измерения волнового поля производятся в плоской области, не пересекающей область локализации неоднородности.

DOI: 10.31857/S0374064121090028

**1. Постановка задачи.** Основным объектом изучения в работе является обратная задача рассеяния для обобщённого уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 n(x) u(x) = -\delta(x - q), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

дополненного условием излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x|. \quad (2)$$

Здесь  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $k$  – волновое число, которое в постановке задачи принимает положительные значения,  $q \in \mathbb{R}^3$ . Предполагается, что коэффициент рефракции  $n(x)$  тождественно равен единице при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  и принадлежит классу  $L_\infty(\Omega)$ , где  $\Omega$  – заданная ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ . Решение задачи (1), (2) описывает скалярное гармоническое по времени волновое поле  $U(x, t) = \operatorname{Re}(e^{-ikt} u(x))$  в неоднородной среде, инициированное точечным гармоническим по времени источником и характеризуемое комплексной амплитудой  $u(x)$ .

Классическая постановка обратной задачи рассеяния для системы (1), (2) состоит в восстановлении функции  $n(x)$ ,  $x \in \Omega$ , по известным значениям решения  $u = u(x; q, k)$  задачи (1), (2) при  $x \in D_q$ ,  $q \in Q$ ,  $k \in [k_1, k_2]$  для подходящих множеств  $\{D_q\}_{q \in Q}$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^3$  и выбранных значений  $0 < k_1 \leq k_2$ . Здесь  $D_q$  – множество детекторов рассеянного волнового поля, инициированного источником в точке  $x = q$ ,  $Q$  – множество точечных зондирующих источников. Обычно предполагается, что  $(Q \cup (\bigcup_{q \in Q} D_q)) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ , т.е. что зондируемая область  $\Omega$  недоступна для непосредственных измерений. Обратной задаче рассеяния в такой и близких постановках при различных способах выбора множеств источников и детекторов посвящено значительное число публикаций (см. монографии [1, 2] и приведённую в них библиографию).

Часто в качестве входных данных обратной задачи выступает амплитуда рассеяния в дальней зоне, представляющая собой главный член асимптотики  $u(x; q, k)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . При этом источником волнового поля может быть также приходящая плоская волна. Неоднократно отмечалось, что для многих прикладных постановок экспериментальное измерение комплексной величины  $u(x; q, k)$ , подразумевающее получение как модуля (амплитуды)  $|u(x; q, k)|$ , так и фазы  $\arg u(x; q, k)$  волнового поля, является весьма ограничительным требованием. Во многих случаях экспериментально доступно измерение лишь амплитуды рассеянного неоднородностью сигнала, т.е. значение  $|u(x; q, k)|$ . В связи с этим ниже, следуя [3–8], рассмотрим именно

задачу реконструкции функции  $n(x)$ ,  $x \in \Omega$ , по известной амплитуде  $|u(x; q, k)|$  волнового поля, где  $x \in D_q$ ,  $q \in Q$ ,  $k \in [k_1, k_2]$ ,  $0 < k_1 < k_2$ . Нас интересует возможность однозначного восстановления этой функции при наличии указанных данных.

Коэффициентным обратным задачам в такой постановке в последнее время уделяется растущее внимание. Характерная их особенность заключается в том, что при наличии полной информации о  $u(x; q, k)$  для  $x \in D_q$ ,  $q \in Q$ ,  $k \in [k_1, k_2]$  теоремы единственности, как правило, известны, см. [1, 2]. При этом часто можно обойтись данными рассеяния с единственным значением волнового числа  $k = k_1 = k_2$ . Непосредственный способ доказательства единственности в бесфазных обратных задачах сводится к восстановлению фазы  $\arg u(x; q, k)$  волнового поля по заданной величине  $|u(x; q, k)|$  с последующим применением указанных теорем единственности (см., например, [3, 4]). В перечисленных и других известных работах выполняются равенства  $\dim D_q = \dim Q = 2$ . Таким образом, размерность пространственного носителя данных  $\{(x, q) : x \in D_q, q \in Q\}$  равна четырём и превышает  $\dim D = 3$  размерность носителя зондируемой неоднородности. В этом смысле исследуемая постановка обратной задачи является *пространственно переопределённой*.

В настоящей заметке используется альтернативный подход, состоящий в аналитическом продолжении функции  $|u(x; q, k)|^2$  по комплексному параметру  $k$  в окрестность значения  $k = 0$ . Предельная функция  $u(x; q, 0)$  является вещественнозначной, что снимает необходимость решения вспомогательной проблемы восстановления фазы. Одновременно показывается, что размерность носителя пространственных данных обратной задачи может быть понижена до трёх, что устраняет упомянутую выше пространственную переопределённость. Формулировке и доказательству этого результата посвящён п. 2. В п. 3 аналогичный результат устанавливается для уравнения вида (1), правая часть которого описывает распределённый сферически симметричный источник.

**2. Сосредоточенный источник.** Уточним постановку рассматриваемой в работе обратной задачи и сформулируем основной результат, относящийся к уравнению (1). Как известно [2, § 8.2], задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = k^2 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k)(n(x') - 1)u(x') dx' + \Phi(x - q; k), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\Phi(x; k) = e^{ik|x|}/(4\pi|x|)$ .

При условии  $n \in L_{\infty}(\Omega)$  интегральный оператор в правой части уравнения (3) вполне непрерывен в пространстве  $L_2(\Omega)$  для любого  $k \in \mathbb{C}$  [9, с. 158], при этом правая часть (3) аналитически зависит от параметра  $k$ . Как и в [2, теоремы 8.4, 8.7], устанавливается, что задача (3) (а значит, и (1), (2)) однозначно разрешима для всех вещественных  $k \geq 0$  и для комплексных  $k$ , у которых  $|k| \leq \delta$  с достаточно малым  $\delta > 0$ . При этом  $u(\cdot; q, k) \in H^2(\Omega')$  для любой области  $\Omega'$ , не содержащей точки  $q$  [10, с. 177; 11, с. 229]. Из теоремы о голоморфных семействах фредгольмовых операторов [2, § 8.5; 12, с. 141] следует, что функция  $u(x; q, k)$  при  $x \neq q$  голоморфно продолжима по  $k$  в окрестность положительной вещественной полуоси. Поэтому при  $x \neq q$  функция

$$|u(x; q, k)|^2 = \operatorname{Re}^2 u(x; q, k) + \operatorname{Im}^2 u(x; q, k)$$

вещественно аналитична по  $k > -\delta$ .

Обозначим  $\Pi = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{L} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$  и предположим, что замыкание  $\overline{\Omega}$  не пересекает плоскость  $\Pi$  и прямую  $\mathcal{L}$ . Пусть также  $\mathcal{D}$  – замкнутая область в  $\Pi$ ,  $\mathcal{I}$  – отрезок положительной длины, лежащий на  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ . Рассмотрим обратную задачу, которую назовём задачей  $P1$  и которая заключается в восстановлении функции  $n \in L_{\infty}(\Omega)$  по набору данных

$$\{|u(x; q, k)| : x \in \mathcal{D}, q \in \mathcal{I}, k \in [k_1, k_2]\}, \quad (4)$$

где  $0 < k_1 < k_2$ . Для того чтобы подчеркнуть зависимость решения  $u(x; q, k)$  задачи (1), (2) ещё и от функции  $n$ , для него будем использовать обозначение  $u_n(x; q, k)$ .

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [13] и в более общем виде в [14].

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ , замыкание которой не пересекает прямую  $\mathcal{L}$ . Тогда линейные комбинации функций семейства

$$\{u(x)/|x-z| : z \in \mathcal{L}; \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \Delta u = 0 \text{ в } \Omega\}$$

плотны в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Единственность решения обратной задачи P1 устанавливает

**Теорема 2.** Если для некоторых функций  $n_1, n_2 \in L_\infty(\Omega)$  выполняется равенство

$$|u_{n_1}(x; q, k)| = |u_{n_2}(x; q, k)| \quad \text{для всех } x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I} \text{ и } k \in [k_1, k_2], \quad (5)$$

то  $n_1 = n_2$  п.в. на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Введём обозначение  $\xi_n(x) = n(x) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Тогда, согласно принятым предположениям,  $\xi_n(x) \equiv 0$  для  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ . Запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = -k^2 \xi_n(x) u(x) - \delta(x - q). \quad (6)$$

Решение  $u(x) = u_n(x; q, k)$  задачи (6), (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_n(x; q, k) = k^2 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \xi_n(x') u_n(x'; q, k) dx' + \Phi(x - q; k), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (7)$$

из которого следуют равенства

$$\begin{aligned} u_n(x; q, k) &= k^2 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \xi_n(x') \times \\ &\times \left( k^2 \int_{\Omega} \Phi(x' - x''; k) \xi_n(x'') u_n(x''; q, k) dx'' + \Phi(x' - q; k) \right) dx' + \Phi(x - q; k) = \\ &= k^2 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \Phi(x' - q; k) \xi_n(x') dx' + \\ &+ k^4 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \xi_n(x') \int_{\Omega} \Phi(x' - x''; k) \xi_n(x'') u_n(x''; q, k) dx'' dx' + \Phi(x - q; k). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь тождеством  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , получаем, что для всех  $x \in \mathcal{D}$ ,  $q \in \mathcal{I}$  и  $k \geq 0$  справедливо асимптотическое при  $k \rightarrow 0$  соотношение

$$\begin{aligned} |u_n(x; q, k)|^2 &= |\Phi(x - q; k)|^2 + \\ &+ 2k^2 \operatorname{Re} \left( \overline{\Phi(x - q; k)} \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \Phi(x' - q; k) \xi_n(x') dx' \right) + O(k^4). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что при  $x \in \mathcal{D}$ ,  $q \in \mathcal{I}$  справедливо равенство

$$\operatorname{Re} \left( \overline{\Phi(x - q; 0)} \int_{\Omega} \Phi(x - x'; 0) \Phi(x' - q; 0) \xi_n(x') dx' \right) = h_n(x, q),$$

где

$$h_n(x, q) = \lim_{k \rightarrow 0} (2k^2)^{-1} (|u_n(x; q, k)|^2 - |\Phi(x - q; k)|^2). \quad (9)$$

Заметим, что функция  $\Phi(x - y; 0) = (4\pi|x - y|)^{-1}$  вещественнозначная. Поэтому вещественнозначная функция  $\xi_n$  удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\int_{\Omega} \frac{\xi_n(x')}{|x - x'||x' - q|} dx' = 64\pi^3|x - q|h_n(x, q), \quad x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}.$$

Таким образом, если выполняется равенство (5), то

$$\int_{\Omega} \frac{\xi_{n_j}(x')}{|x - x'||x' - q|} dx' = 64\pi^3|x - q|h_{n_j}(x, q), \quad x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}; \quad j = 1, 2.$$

Так как функция  $|u(x; q, k)|^2$  вещественно аналитична по  $k > -\delta$ , её задание при  $k \in [k_1, k_2]$  однозначно определяет значение  $|u(x; q, k)|^2$ ,  $x \in \mathcal{D}$ ,  $q \in \mathcal{I}$ , при всех  $k > -\delta$ . Поэтому из (5) и (9) следует, что  $h_{n_1}(x, q) = h_{n_2}(x, q)$  при  $x \in \mathcal{D}$ ,  $q \in \mathcal{I}$ . Следовательно,

$$\int_{\Omega} \frac{\xi_{n_1}(x') - \xi_{n_2}(x')}{|x - x'||x' - q|} dx' = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}. \quad (10)$$

Далее, поскольку функция в левой части равенства (10) вещественно аналитична по  $x \in \Pi$  и  $q \in \mathcal{L}$ , то это равенство продолжается по аналитичности на все  $x \in \Pi$ ,  $q \in \mathcal{L}$ .

Заметим, что семейство  $\{|x - x'|^{-1} : x \in \Pi\}$  полно в классе всех регулярных гармонических в  $\Omega$  функций (см., например, [15]). Поэтому из (10) вытекает, что

$$\int_{\Omega} \frac{u(x')(n_1(x') - n_2(x'))}{|x' - q|} dx' = 0 \quad (11)$$

для всех точек  $q \in \mathcal{L}$  и всех функций  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , для которых  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ . Вследствие равенства (11) и теоремы 1 получаем  $n_1 = n_2$  п.в. в  $\Omega$ . Теорема доказана.

Обратимся теперь к случаю, когда зондирующее волновое поле возбуждается распределённым источником.

**3. Распределённый источник.** В этом пункте вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = -\varphi_{\varepsilon}(|x - q|), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (12)$$

правая часть которого описывает распределённый сферически симметричный источник с центром в точке  $q$ . Будем считать, что  $\varphi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}(r)$ ,  $r \geq 0$ , — непрерывная функция и что  $\varphi_{\varepsilon}(r) = 0$  при  $r \geq \varepsilon > 0$ . Обозначим  $O_{\varepsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x| \leq \varepsilon\}$ . Как и выше, считаем, что детекторы сосредоточены в замкнутой области  $\mathcal{D} \subset \Pi$ , плоскость  $\Pi$  и прямая  $\mathcal{L}$  не пересекают  $\overline{\Omega}$ . Будем предполагать, что  $q \in \mathcal{I}$ , где  $\mathcal{I}$  — отрезок прямой  $\mathcal{L}$ , и

$$\left( \bigcup_{q \in \mathcal{I}} O_{\varepsilon}(q) \right) \cap (\overline{\Omega} \cup \mathcal{D}) = \emptyset. \quad (13)$$

Условие (13) означает, что носители  $O_{\varepsilon}(q)$  зондирующих волновых полей лежат вне исследуемой области  $\Omega$  и не пересекают область детекторов  $\mathcal{D}$ .

Рассмотрим обратную задачу, которую назовём задачей  $P2$  и которая заключается в восстановлении функции  $n \in L_{\infty}(\Omega)$  по набору данных (4), где теперь  $u(x; q, k)$  — решение уравнения (12) с условием излучения (2). Следующая теорема утверждает единственность решения задачи  $P2$ .

**Теорема 3.** Пусть имеет место условие (13) и  $A(\varphi_{\varepsilon}) \neq 0$ , где

$$A(\varphi_{\varepsilon}) = 4\pi \int_0^{\varepsilon} r^2 \varphi_{\varepsilon}(r) dr.$$

Если для некоторых функций  $n_1, n_2 \in L_\infty(\Omega)$  выполняется равенство

$$|u_{n_1}(x; q, k)| = |u_{n_2}(x; q, k)| \quad \text{для всех } x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I} \text{ и } k \in [k_1, k_2],$$

то  $n_1 = n_2$  п.в. на  $\Omega$ .

**Доказательство** в основном повторяет приведённые выше рассуждения. В условиях теоремы вместо равенства (7) имеем

$$\begin{aligned} u_n(x; q, k) &= k^2 \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \xi_n(x') u_n(x'; q, k) dx' + \\ &+ \int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x - x'; k) \varphi_\varepsilon(|x' - q|) dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Воспользовавшись равенством (14), вместо (8) для  $x \in \mathcal{D}$ ,  $q \in \mathcal{I}$  получаем соотношение

$$\begin{aligned} |u_n(x; q, k)|^2 &= \left| \int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x - x'; k) \varphi_\varepsilon(|x' - q|) dx' \right|^2 + 2k^2 \operatorname{Re} \left( \overline{\int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x - x'; k) \varphi_\varepsilon(|x' - q|) dx'} \times \right. \\ &\times \left. \int_{\Omega} \Phi(x - x'; k) \xi_n(x') \int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x' - x''; k) \varphi_\varepsilon(|x'' - q|) dx'' dx' \right) + O(k^4). \end{aligned}$$

Следовательно, для функции

$$h_{\varepsilon, n}(x, q) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2k^2} \left( |u_n(x; q, k)|^2 - \left| \int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x - x'; k) \varphi_\varepsilon(|x' - q|) dx' \right|^2 \right)$$

имеет место представление

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon, n}(x, q) &= \operatorname{Re} \left( \overline{\int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x - x'; 0) \varphi_\varepsilon(|x' - q|) dx'} \times \right. \\ &\times \left. \int_{\Omega} \Phi(x - x'; 0) \xi_n(x') \int_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x' - x''; 0) \varphi_\varepsilon(|x'' - q|) dx'' dx' \right) = \\ &= \frac{1}{64\pi^3} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi_\varepsilon(|x' - q|)}{|x - x'|} dx' \cdot \int_{\Omega} \frac{\xi_n(x')}{|x - x'|} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi_\varepsilon(|x'' - q|)}{|x' - x''|} dx'' dx'. \end{aligned} \quad (16)$$

Непосредственное интегрирование с использованием условия (13) даёт равенство

$$\int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi_\varepsilon(|x' - q|)}{|x - x'|} dx' = \frac{A(\varphi_\varepsilon)}{|x - q|}, \quad x \in \mathcal{D} \cup \overline{\Omega}. \quad (17)$$

Из представлений (16) и (17) вытекает равенство

$$\int_{\Omega} \frac{\xi_n(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = \frac{64\pi^3}{A^2(\varphi_\varepsilon)} |x - q| h_{\varepsilon, n}(x, q), \quad x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}.$$

Теперь доказательство завершается так же, как и в теореме 2. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в (4) в качестве пространственного носителя данных используется трёхмерное многообразие  $\mathcal{D} \times \mathcal{I}$ . В предшествующих работах [3–6] теоремы единственности устанавливались для обратных задач с пространственными носителями данных вида  $\{(x, q) : x \in O_\varepsilon(q), q \in S\}$ ,  $\{(x, q) : x, q \in S\}$ , размерность которых не менее четырёх (здесь  $S$  – замкнутая поверхность, содержащая внутри  $\bar{\Omega}$ ). Для линейризованного варианта обратной задачи (1), (2) с  $n = \tilde{n}^2 \geq 0$  и пространственным носителем данных  $\{(x, q) : x, q \in S\}$  аналогичный теореме 2 результат установлен в [5]. При этом налагается структурное условие регулярности метрики  $d\tau = \tilde{n}(x)|dx|$  и условие гладкости  $\tilde{n} \in C^{15}(\mathbb{R}^3)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20085).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
2. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Berlin, 1998.
3. *Klibanov M. V.* Phaseless inverse scattering problems in three dimensions // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. № 2. P. 392–410.
4. *Klibanov M. V.* Uniqueness of two phaseless non-overdetermined inverse acoustic problems in 3-d // Appl. Anal. 2014. V. 93. № 6. P. 1135–1149.
5. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Reconstruction procedures for two inverse scattering problems without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76. № 1. P. 178–196.
6. *Романов В.Г.* Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
7. *Романов В.Г.* Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
8. *Novikov R. G.* Explicit formulas and global uniqueness for phaseless inverse scattering in multidimensions // J. Geom. Anal. 2016. V. 26. № 1. P. 346–359.
9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
10. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
11. *Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
12. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982.
13. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
14. *Кокурин М.Ю.* Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 255–264.
15. *Kokurin M. Yu.* On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. № 1. P. 125–140.

Марийский государственный университет,  
г. Йошкар-Ола

Поступила в редакцию 13.04.2021 г.  
После доработки 05.06.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ РИМАНА–АДАМАРА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. Н. Миронов, Ю. О. Яковлева

Для линейного уравнения четвёртого порядка с четырьмя независимыми переменными, имеющего доминирующую производную, которая не содержит кратного дифференцирования ни по одной из независимых переменных – уравнения Бианки четвёртого порядка – приводятся постановка задачи Дарбу и определение функции Римана–Адамара. Получены достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты этого уравнения, чтобы его функция Римана–Адамара допускала построение в явном виде в терминах гипергеометрических функций.

DOI: 10.31857/S037406412109003X

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными представляет значительный интерес и рассматривалась многими авторами [1, с. 228–233; 2–4]. Естественным обобщением этого уравнения являются уравнения Бианки. В статье [5] для уравнения Бианки третьего порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, определена функция Римана–Адамара задачи Дарбу и построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара. В работе [6] для одного класса уравнений Бианки третьего порядка функция Римана–Адамара построена в явном виде.

Уравнение Бианки четвёртого и высших порядков рассматривалось, в частности, в работах [7–14]. В статье [14] для этого уравнения предложен вариант метода Римана–Адамара для задачи Дарбу и определена соответствующая функция Римана–Адамара.

**1. Определение функции Римана–Адамара.** Уравнением Бианки четвёртого порядка называют линейное уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv D^\alpha u + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta(x, y, z, t) D^\beta u = f(x, y, z, t), \quad (1)$$

где мультииндекс  $\alpha$  равен  $(1, 1, 1, 1)$ , отношение  $\beta < \alpha$  для мультииндексов означает, что мультииндекс  $\beta$  получен из мультииндекса  $\alpha$  уменьшением по крайней мере одной из компонент.

Определим класс функций  $C^{(k, l, m, n)}$  следующим образом: функция  $u$  принадлежит классу  $C^{(k_1, k_2, k_3, k_4)}$ , если существуют непрерывные производные  $\partial^{r_1+r_2+r_3+r_4} u / \partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3} \partial t^{r_4}$  ( $r_i = \overline{0, k_i}$ ). Решение уравнения (1) класса  $C^{(1, 1, 1, 1)}$  назовём *регулярным*. Пусть  $D$  – область, ограниченная плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y_0 > 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z_0 > 0$ ,  $t = x$ ,  $t = t_0 > 0$ . Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям  $a_{ijkl} \in C^{(i, j, k, l)}(\overline{D})$ . Обозначим через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $S$  грани многогранника  $D$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $t = x$  соответственно.

**Задача Дарбу.** В области  $D$  найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z, t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z, t), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x, y, t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x, y, z),$$

где  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и  $\psi$  – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\varphi_1 \in C^{(1, 1, 1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1, 1, 1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1, 1, 1)}(\overline{Z}), \quad \psi \in C^{(1, 1, 1)}(\overline{S})$$

и условия согласования

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, 0, t) &= \varphi_3(0, y, t), & \varphi_1(0, z, t) &= \varphi_2(0, z, t), & \varphi_2(x, 0, t) &= \varphi_3(x, 0, t), \\ \varphi_1(y, z, 0) &= \psi(0, y, z), & \varphi_2(x, z, x) &= \psi(x, 0, z), & \varphi_3(x, y, x) &= \psi(x, y, 0). \end{aligned}$$

Возьмём внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ . Она определяет область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $x = 0$ ,  $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $y = \eta$ ,  $z = 0$ ,  $z = \zeta$ ,  $t = \tau$ ,  $t = x$ . Очевидно, многогранник  $D_P$  можно разбить на две части: многогранник  $D^1$ , который ограничен плоскостями  $x = 0$ ,  $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $y = \eta$ ,  $z = 0$ ,  $z = \zeta$ ,  $t = \tau$ ,  $t = \xi$ , и многогранник  $D^2$ , который ограничен плоскостями  $x = 0$ ,  $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $y = \eta$ ,  $z = 0$ ,  $z = \zeta$ ,  $t = \xi$ ,  $t = x$ .

Функция Римана–Адамара задачи Дарбу  $H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$  [14] имеет вид

$$H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \begin{cases} R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^1, \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^2, \end{cases}$$

где  $R$  – функция Римана для уравнения (1), а функция  $V$  определяется ниже.

В работе [14] определены конструкции (функции)  $A_{ijkl}$ ,  $A_{ijkl}^-$ ,  $A_{ijkl}^+$ ; выражения для тех из них, которые встречаются далее, будут приведены. Конструкции  $A_{ijkl}$  записываются через коэффициенты уравнения (1) и функцию  $H$ , в конструкции  $A_{ijkl}^-$  функция  $H$  заменяется на  $V$ , а в конструкции  $A_{ijkl}^+$  – на  $R$ .

Будем обозначать пересечение границы области  $D_P$  с гиперплоскостью  $x = \xi$  через  $D_{P[x=\xi]}$ , с плоскостями  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  через  $D_{P[x=\xi, y=\eta]}$  и т.п. Аналогичный смысл имеют обозначения  $D_{[y=\eta]}^2$  и т.п.

Потребуем, чтобы функция  $V$  удовлетворяла следующими девяти условиям, которыми она определяется однозначно [14].

1°. В области  $D_{P[x=t]}$  функция  $V$  равна тождественно нулю.

2°. Скачок функции  $A_{1000}(x, \eta, \zeta, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$  при  $t = \xi$  равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1000}](x, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1000}^+(x, \eta, \zeta, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1000}^-(x, \eta, \zeta, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0,$$

где  $A_{1000}^+ := R_x - a_{0111}R$ ,  $A_{1000}^- := V_x - a_{0111}V$ .

3°. В области  $D_{P[y=\eta, z=\zeta]}$  функция  $V$  удовлетворяет уравнению

$$A_{1001}^- := V_{xt} - (a_{1110}V)_x - (a_{0111}V)_t + a_{0110}V = 0.$$

Тогда функция  $V$  в плоской области  $D_{P[y=\eta, z=\zeta]}$  определена как решение задачи Дарбу для этого уравнения. Решение такой двумерной задачи Дарбу существует и единственно.

4°. Скачок функции  $A_{1100}(x, y, \zeta, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$  на плоской области  $D_{P[z=\zeta, t=\xi]}$  равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1100}](x, y, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1100}^+(x, y, \zeta, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1100}^-(x, y, \zeta, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0,$$

где

$$A_{1100}^+ := R_{xy} - (a_{1011}R)_x - (a_{0111}R)_y + a_{0011}R, \quad A_{1100}^- := V_{xy} - (a_{1011}V)_x - (a_{0111}V)_y + a_{0011}V.$$

5°. Скачок функции  $A_{1010}(x, \eta, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$  на плоской области  $D_{P[y=\eta, t=\xi]}$  равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1010}](x, \eta, z, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1010}^+(x, \eta, z, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1010}^-(x, \eta, z, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0,$$

где

$$A_{1010}^+ := R_{xz} - (a_{1101}R)_x - (a_{0111}R)_z + a_{0101}R, \quad A_{1010}^- := V_{xz} - (a_{1101}V)_x - (a_{0111}V)_z + a_{0101}V.$$

6°. В области  $D_{P[y=\eta]}$  функция  $V$  удовлетворяет уравнению

$$A_{1011}^- := V_{xzt} - (a_{1110}V)_{xz} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{zt} + (a_{1110}V)_x + (a_{0110}V)_z + (a_{0101}V)_t - a_{0100}V = 0.$$

Для нахождения функции  $V$  получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с уже известными граничными условиями. Решение задачи Дарбу существует и единственно.

7°. Аналогично, в области  $D_{P[z=\zeta]}$  функция  $V$  удовлетворяет уравнению

$$A_{1101}^- := V_{xyt} - (a_{1110}V)_{xy} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{yt} + (a_{1010}V)_x + (a_{0110}V)_y + (a_{0011}V)_t - a_{0010}V = 0.$$

8°. Скачок функции  $A_{1110}(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$  на трёхмерной области  $D_{P[t=\xi]}$  равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1110}](x, y, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1110}^+(x, y, z, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1110}^-(x, y, z, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0,$$

где

$$A_{1110}^+ := R_{xyz} - (a_{1101}R)_{xy} - (a_{1011}R)_{xz} - (a_{0111}R)_{yz} + (a_{1001}R)_x + (a_{0101}R)_y + (a_{0011}R)_z - a_{0001}R,$$

$$A_{1110}^- := V_{xyz} - (a_{1101}V)_{xy} - (a_{1011}V)_{xz} - (a_{0111}V)_{yz} + (a_{1001}V)_x + (a_{0101}V)_y + (a_{0011}V)_z - a_{0001}V.$$

9°. Функция  $V$  в области  $D^2$  удовлетворяет сопряжённому к (1) уравнению

$$\begin{aligned} L^*(u) \equiv & V_{xyzt} - (a_{1110}V)_{xyz} - (a_{1101}V)_{xyt} - (a_{0111}V)_{yzt} - (a_{1011}V)_{xzt} + \\ & + (a_{1100}V)_{xy} + (a_{0110}V)_{yz} + (a_{1010}V)_{xz} + (a_{0101}V)_{yt} + (a_{0011}V)_{zt} + \\ & - (a_{1000}V)_x - (a_{0100}V)_y - (a_{0010}V)_z - (a_{0001}V)_t + a_{0000}V = 0, \end{aligned}$$

при этом условия на областях  $D_{[y=\eta]}^2$ ,  $D_{[z=\zeta]}^2$ ,  $D_{[t=\xi]}^2$ ,  $D_{[x=t]}^2$  уже известны в силу выполнения предыдущих условий 1°–8°. Таким образом, функция Римана–Адамара определена, существует и единственна в  $\overline{D_P}$  [14].

**2. Построение функции Римана–Адамара в явном виде.** Метод построения решения задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара основывается на методе Римана и свойствах функции Римана.

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) однородное уравнение

$$L(u) \equiv D^\alpha u + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta(x, y, z, t) D^\beta u = 0. \quad (2)$$

Далее нам потребуются конструкции (функции), введённые в работе [9]:

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= (a_{0111})_y + a_{1011}a_{0111} - a_{0011}, & h_{1,3} &= (a_{0111})_z + a_{1101}a_{0111} - a_{0101}, \\ h_{1,4} &= (a_{0111})_t + a_{1110}a_{0111} - a_{0110}, & h_{2,3} &= (a_{1011})_z + a_{1101}a_{1011} - a_{1001}, \\ h_{2,4} &= (a_{1011})_t + a_{1110}a_{1011} - a_{1010}, & h_{3,4} &= (a_{1101})_t + a_{1110}a_{1101} - a_{1100}, \\ h_{12,4} &= (a_{0011})_t + a_{1110}a_{0011} - a_{0010}, & h_{13,4} &= (a_{0101})_t + a_{1110}a_{0101} - a_{0100}, \\ h_{23,4} &= (a_{1001})_t + a_{1110}a_{1001} - a_{1000}, & h_{12,3} &= (a_{0011})_z + a_{1101}a_{0011} - a_{0001}, \\ h_{123,4} &= (a_{0001})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000}. \end{aligned}$$

Эти конструкции используются в [9, 13] для записи условий факторизации уравнения (2) и в формулировке достаточных условий, обеспечивающих возможность построения функции Римана в явном виде.

Совокупность преобразований эквивалентности для уравнения (2) имеет вид

$$\bar{x}_i = \alpha_i(x_i), \quad i = \overline{1, 4}, \quad u = \lambda(x, y, z, t)\bar{u}. \quad (3)$$

Два уравнения вида (2) называются *эквивалентными по функции* [15, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (3), в которых  $\alpha_i(x_i) = x_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Все инварианты Лапласа для уравнения (2) найдены в работе [16] (см. также [17, формулы (5)]). В [17] доказана следующая

**Теорема 1.** *Два уравнения вида (2) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа.*

В работе [13] доказана

**Теорема 2.** *Если для уравнения (2) выполняются условия*

$$h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0, \\ h_{123,4} = \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t) \quad (4)$$

и существует непрерывно дифференцируемая функция  $G(x, y, z, t)$  такая, что

$$a_{1110} = G'_t, \quad a_{1101} = G'_z, \quad a_{1011} = G'_y, \quad a_{0111} = G'_x, \quad (5)$$

то функция Римана для этого уравнения строится в явном виде и даётся формулой

$$R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = {}_0F_3(1, 1, 1; \omega) \exp \left\{ \int_{\xi}^x a_{0111}(\alpha, y, z, t) d\alpha + \int_{\eta}^y a_{1011}(\xi, \beta, z, t) d\beta + \right. \\ \left. + \int_{\zeta}^z a_{1101}(\xi, \eta, \gamma, t) d\gamma + \int_{\tau}^t a_{1110}(\xi, \eta, \zeta, \delta) d\delta \right\},$$

в которой  ${}_0F_3(1, 1, 1; \omega)$  – обобщённая гипергеометрическая функция [18, с. 183], а

$$\omega = \int_{\xi}^x \varphi(\alpha) d\alpha \int_{\eta}^y \psi(\beta) d\beta \int_{\zeta}^z \theta(\gamma) d\gamma \int_{\tau}^t \chi(\delta) d\delta.$$

Уравнение

$$L_1(\bar{u}) \equiv D^{\alpha} \bar{u} + \sum_{\beta < \alpha} b_{\beta}(x, y, z, t) D^{\beta} \bar{u} = 0$$

переходит в эквивалентное ему по функции уравнение (2) при преобразовании  $u = \lambda \bar{u}$ , здесь

$$\lambda = \exp \left\{ \int (a_{0111} - b_{0111}) dx + (a_{1011} - b_{1011}) dy + (a_{1101} - b_{1101}) dz + (a_{1110} - b_{1110}) dt \right\},$$

где криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что инварианты Лапласа уравнения (2) при условиях (4), (5) и уравнения

$$u_{1xyzt} - \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t)u_1 = 0 \quad (6)$$

совпадают, т.е. эти уравнения эквивалентны по функции с множителем

$$\lambda = \lambda_1 = \exp \left\{ \int a_{0111} dx + a_{1011} dy + a_{1101} dz + a_{1110} dt \right\}.$$

Действительно, рассмотрим для иллюстрации этого факта два инварианта Лапласа  $H_1$  и  $H_2$  для уравнения (2):

$$H_1 = (a_{0111})_{yz} + a_{1100}a_{0111} + a_{1010}a_{1011} + a_{0011}a_{1101} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0111} - a_{0001},$$

$$H_2 = (a_{0111})_{yzt} + a_{1000}a_{0111} + a_{0100}a_{1011} + a_{0010}a_{1101} + a_{0001}a_{1110} + a_{1100}a_{0011} + a_{1010}a_{0101} +$$

$$+ a_{1001}a_{0110} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0011} - 2a_{0111}a_{1101}a_{0101} - 2a_{0111}a_{1110}a_{1001} - \\ - 2a_{1011}a_{1101}a_{0110} - 2a_{1011}a_{1110}a_{0101} - 2a_{1101}a_{1110}a_{0011} + 6a_{0111}a_{1011}a_{1101}a_{1110} - a_{0000}.$$

Преобразуем сначала инвариант  $H_1$  с учётом условий (4), (5), имеем

$$H_1 = (a_{0111})_{yz} + a_{0111}(a_{1001} - a_{1011}a_{1101}) + a_{1011}(a_{0101} - a_{0111}a_{1101}) + a_{0011}a_{1011} - a_{0001} = \\ = (a_{0111})_{yz} + a_{0111}(a_{1011})_z + a_{1011}(a_{0111})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} = \\ = ((a_{0111})_y + a_{0111}a_{1011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} = (a_{0011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} = h_{12,3} \equiv 0.$$

Используя доказанное тождество  $H_1 \equiv 0$ , преобразуем инвариант  $H_2$ :

$$H_2 = (a_{0111})_{yzt} + a_{0111}(a_{1000} - a_{1110}a_{1001}) + a_{1001}(a_{0110} - a_{0111}a_{1110}) + \\ + a_{1011}(a_{0100} - a_{1110}a_{0101}) + a_{0101}(a_{1010} - a_{1011}a_{1110}) + a_{1101}(a_{0010} - a_{1110}a_{0011}) + \\ + a_{0011}(a_{1100} - a_{1101}a_{1110}) - 2a_{0111}a_{1011}(a_{1100} - a_{1101}a_{1110}) - \\ - 2a_{0111}a_{1101}(a_{1010} - a_{1011}a_{1110}) - 2a_{1011}a_{1101}(a_{0110} - a_{0111}a_{1110}) + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} = \\ = (a_{0111})_{yzt} + ((a_{0111})_t a_{1001} + a_{0111}(a_{1001})_t) + ((a_{1011})_t a_{0101} + a_{1011}(a_{0101})_t) + \\ + ((a_{1101})_t a_{0011} + a_{1101}(a_{0011})_t) + -2a_{0111}a_{1011}(a_{1101})_t - 2a_{0111}a_{1101}(a_{1011})_t - \\ - 2a_{1011}a_{1101}(a_{0111})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} = \\ = ((a_{0111})_{yz} + a_{1100}a_{0111} + a_{1010}a_{1011} + a_{0011}a_{1101} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0111})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} = \\ = (a_{0001})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} = h_{123,4} = \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t).$$

Очевидно, что полученные значения инвариантов уравнения (2) совпадают с соответствующими инвариантами Лапласа уравнения (6).

Сопряжённое к (6) уравнение

$$v_{1xyzt} - \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t)v_1 = 0 \quad (7)$$

эквивалентно сопряжённому к (2) уравнению с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (4), (5). Очевидно, что соответствующее преобразование имеет вид

$$v = \lambda_2 v_1, \quad \lambda_2 = \exp \left\{ - \int a_{0111} dx + a_{1011} dy + a_{1101} dz + a_{1110} dt \right\}.$$

Таким образом, в теореме 2 фактически построена функция Римана для класса эквивалентных по функции уравнений, одним из представителей этого класса является уравнение (6).

Сформулируем теперь достаточные условия на коэффициенты уравнения (2), обеспечивающие построение функции Римана–Адамара в явном виде.

**Теорема 3.** Если для уравнения (2) выполняются условия (4), (5), то функция Римана–Адамара даётся формулой

$$H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \begin{cases} R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^1, \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^2, \end{cases}$$

здесь

$$R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) {}_0F_3(1, 1, 1; \omega), \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) ({}_0F_3(1, 1, 1; \omega) - {}_0F_3(1, 1, 1; \rho)), \\ E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \exp \left\{ \int_{\xi}^x a_{0111}(\alpha, y, z, t) d\alpha + \int_{\eta}^y a_{1011}(\xi, \beta, z, t) d\beta + \right. \\ \left. + \int_{\zeta}^z a_{1101}(\xi, \eta, \gamma, t) d\gamma + \int_{\tau}^t a_{1110}(\xi, \eta, \zeta, \delta) d\delta \right\},$$

где

$$\omega = \int_{\xi}^x \varphi(\alpha) d\alpha \int_{\eta}^y \psi(\beta) d\beta \int_{\zeta}^z \theta(\gamma) d\gamma \int_{\tau}^t \chi(\delta) d\delta, \quad \rho = \int_{\xi}^t \varphi(\alpha) d\alpha \int_{\eta}^y \psi(\beta) d\beta \int_{\zeta}^z \varphi(\gamma) d\gamma \int_{\tau}^x \chi(\delta) d\delta.$$

**Доказательство.** Обозначим

$$F_1(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = {}_0F_2(1, 1, 1; \omega), \quad F_2(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = {}_0F_2(1, 1, 1; \rho),$$

$$V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)(F_1(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) - F_2(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)).$$

Отметим, что при  $y = \eta$  или при  $z = \zeta$  выполняются тождества  $\omega = \rho \equiv 0$ , следовательно,

$$\begin{aligned} F_1(x, \eta, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) &= F_2(x, \eta, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \\ &= F_1(x, y, \zeta, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = F_2(x, y, \zeta, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдём к проверке условий 1°–9°, определяющих функцию Римана–Адамара.

Выполнение условия 1° очевидно.

Условие 2° принимает вид

$$(V_x - a_{0111}V)(x, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) = (R_x - a_{0111}R)(x, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau).$$

Проверяем его непосредственным вычислением с учётом тождеств (8).

Условие 3°

$$A_{1001}^- = V_{xt} - (a_{1110}V)_x - (a_{0111}V)_t + a_{0110}V = 0$$

при  $y = \eta$ ,  $z = \zeta$  выполняется, поскольку  $V = 0$  при таких  $t$  и  $z$  в силу (8).

Условие 4° (оно имеет место при  $z = \zeta$  и  $t = \xi$ ) принимает вид

$$\begin{aligned} (E(F_1 - F_2))_{xy} - (a_{1011}(E(F_1 - F_2)))_x - (a_{0111}(E(F_1 - F_2)))_y + \\ + a_{0011}(E(F_1 - F_2)) = (EF_1)_{xy} - (a_{1011}EF_1)_x - (a_{0111}EF_1)_y + a_{0011}EF_1, \end{aligned}$$

т.е. равносильно

$$(EF_2)_{xy} - (a_{1011}EF_2)_x - (a_{0111}EF_2)_y + a_{0011}EF_2 = 0.$$

Так как  $F_2|_{t=\xi} \equiv 1$ , получаем

$$(E)_{xy} - (a_{1011}E)_x - (a_{0111}E)_y + a_{0011}E = 0,$$

$$(a_{0111}E)_y - (a_{0111}E)_y - (a_{1011})_xE - a_{1011}a_{0111}E + a_{0011}E = 0.$$

Последнее соотношение является тождеством в силу (4), (5), поскольку  $(a_{1011})_x + a_{1011}a_{0111} - a_{0011} \equiv 0$ .

Аналогично, в силу (4), (5) выполняется условие 5°, так как  $(a_{1101})_x + a_{1101}a_{0111} - a_{0101} \equiv 0$ .

Условие 6°

$$V_{xzt} - (a_{1110}V)_{xz} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{zt} + (a_{1100}V)_x + (a_{0110}V)_z + (a_{0101}V)_t - a_{0100}V = 0$$

при  $y = \eta$  справедливо, поскольку  $V|_{y=\eta} \equiv 0$  в силу (8).

Аналогично, условие 7°

$$V_{xyt} - (a_{1110}V)_{xy} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{yt} + (a_{1010}V)_x + (a_{0110}V)_y + (a_{0011}V)_t - a_{0010}V = 0$$

при  $z = \zeta$  выполняется, так как  $V|_{z=\zeta} \equiv 0$  в силу (8).

Как и в случае 4° условие 8° на гиперплоскости  $t = \xi$  с учётом тождества  $F_2|_{t=\xi} \equiv 1$  принимает вид

$$\begin{aligned} (((a_{1011})_z + a_{1011}a_{1101} - a_{1001})E)_x - (((a_{0111})_z + a_{1101}a_{0111} - a_{0101})E)_y - \\ - ((a_{0011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001})E = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что данное равенство выполняется тождественно в силу (4).

Далее, очевидно, что функции  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют уравнению (7). Тогда их разность также удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, функция  $E(F_1 - F_2)$  является решением эквивалентного по функции уравнения с множителем  $\lambda = E$ , т.е. удовлетворяет уравнению, сопряжённому к уравнению (2) с условиями (4), (5). Условие 9° выполняется. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
4. Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С. Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
5. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 63–70.
6. Миронов А.Н. О построении функции Римана–Адамара для трехмерного уравнения Бианки // Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 76–82.
7. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1429–1430.
8. Севастьянов В.А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1706–1707.
9. Миронов А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1698–1701.
10. Уткина Е.А. К общему случаю задачи Гурса // Изв. вузов. Математика. 2005. № 8. С. 57–62.
11. Миронов А.Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в  $\mathbb{R}^n$  // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 584–594.
12. Миронов А.Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 27–32.
13. Кощеева О.А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в  $n$ -мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 40–46.
14. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 349–363.
15. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
16. Миронов А.Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1144–1149.
17. Миронов А.Н. О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1572–1581.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.

Елабужский институт (филиал)  
Казанского (Приволжского) федерального университета,  
Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 31.03.2021 г.  
После доработки 31.03.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:621.372.8+517.984.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН  
ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

© 2021 г. Е. Ю. Смолькин

Рассматривается задача о поверхностных волнах регулярной открытой неоднородной волноведущей структуры прямоугольного сечения. Эта задача сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Для нахождения решения использована вариационная формулировка задачи. Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Характеристические числа задачи соответствуют постоянным распространения волновода.

DOI: 10.31857/S0374064121090041

**Введение.** Важный класс существенно векторных электродинамических задач составляют задачи о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах. При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами. При этом на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. В простейших задачах спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого самосопряжённого оператора. Однако при анализе достаточно сложных моделей спектральный параметр входит уже не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причём нелинейным образом. Задача становится несамосопряжённой [1–3].

Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным использовать метод операторных пучков. После того как исходная краевая задача сведена к изучению некоторого операторного пучка, для изучения его спектральных свойств можно применять аппарат функционального анализ (см. [2–4]). В работах [1–5] в целом построена теория распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) волноводах: доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении (локализации) характеристических чисел на комплексной плоскости, а также доказан ряд теорем о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединённых векторов задачи в специальных пространствах.

Открытые (неэкранированные) волноведущие структуры исследовались рядом авторов [1, 6, 7]. Однако для таких структур достаточно полной теории распространения волн не построено. В этом случае задача становится значительно сложнее (в силу некомпактности соответствующих операторов из-за неограниченности области). В статье рассматриваются именно открытые структуры – случай неограниченной внешней области. Первые результаты по исследованию этой задачи получены недавно в работах [8–11].

Указанные трудности удаётся преодолеть при помощи введения фиктивной внешней области – внешности круга – и представления решения в этой области через функцию Грина. Это приводит к тому, что в вариационном соотношении появляется оператор следа (на границе фиктивной области), сложным нелинейным образом зависящий от спектрального параметра. Поэтому в данном случае нужно анализировать уже не операторный пучок (как в [5]), а оператор-функцию. Тем не менее удаётся достаточно подробно изучить свойства оператор-функции и получить результаты о её спектре. В статье доказывается дискретность спектра задачи о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры.

Отметим, что в работе рассматриваются лишь волны, убывающие на удалении от волновода (удовлетворяющие соответствующим условиям на бесконечности). Другие типы волн не рассматриваются.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим трёхмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_c \varepsilon_0 \equiv \text{const}$  и магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_c \mu_0 \equiv \text{const}$ , где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а  $\varepsilon_c \geq 1$  и  $\mu_c \geq 1$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma_1$ . Рассмотрим область  $\Omega_0 \subset Q$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma_0$  такую, что  $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$ . Обозначим  $\Omega_1 := Q \setminus \overline{\Omega_0}$ .

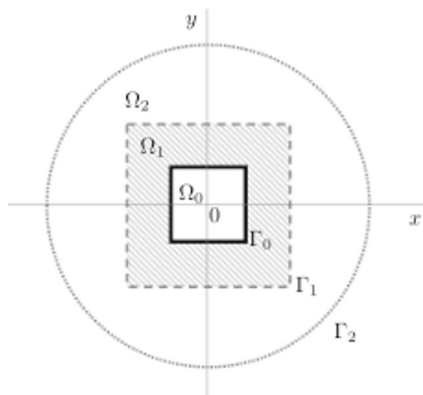


Рисунок. Геометрия задачи.

Будем рассматривать математическую модель регулярной (вдоль оси  $Oz$ ) открытой волноведущей структуры  $W$ , поперечное сечение которой плоскостью  $z = \text{const}$  представляет собой двухсвязную область  $\Omega_1$  с границами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Волновод заполнен неоднородным изотропным материалом с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon(\rho, \varphi)$ ,  $\text{Im} \varepsilon = 0$ , и  $\mu(\rho, \varphi)$ ,  $\text{Im} \mu = 0$ , соответственно. Мы также предполагаем, что  $\varepsilon(\rho, \varphi), \mu(\rho, \varphi) \in C^1(\overline{\Omega_1})$  и  $\min \varepsilon > \varepsilon_c$ ,  $\min \mu > \mu_c$ . Границы  $\Gamma_0$  – проекция поверхности идеально проводящего бесконечно тонкого экрана,  $\Gamma_1$  – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков.

Выберем  $r > 0$  так, чтобы выполнялось включение  $B_r := \{x = (\rho, \varphi) : \rho < r\} \supset \overline{Q}$ . Введём в рассмотрение область  $\Omega_2 := B_r \setminus \overline{Q}$ ; обозначим  $\Gamma_2 := \{x : \rho = r\}$  (рисунок).

Диэлектрическая и магнитная проницаемости во всём пространстве имеют вид  $\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}$  и  $\mu_0 \tilde{\mu}$ , где

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(x), & x \in \Omega_1, \\ \varepsilon_c, & x \in \Omega_2, \\ \varepsilon_c, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2), \end{cases} \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu(x), & x \in \Omega_1, \\ \mu_c, & x \in \Omega_2, \\ \mu_c, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2). \end{cases}$$

Будем рассматривать монохроматические волны

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(\mathbf{E}_\rho, \mathbf{E}_\varphi, \mathbf{E}_z)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(\mathbf{H}_\rho, \mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_z)^T,$$

где  $\omega$  – частота.

Задача об электромагнитных поверхностных волнах, распространяющихся в неоднородном волноводе прямоугольного сечения, состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\tilde{\mu}\mathbf{H}, \quad (1)$$

причём должны быть удовлетворены следующие условия: обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\tau|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2)$$

непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$[E_\tau]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [H_\tau]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [E_\tau]|_{\Gamma_2} = 0, \quad [H_\tau]|_{\Gamma_2} = 0, \quad (3)$$

ограниченность энергии поля в любом конечном объёме волновода

$$\int_V (\tilde{\varepsilon}|\mathbf{E}|^2 + \tilde{\mu}|\mathbf{H}|^2) dX < \infty, \quad (4)$$

а также условие излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как  $O(1/\rho)$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Здесь  $X = (\rho, \varphi, z)$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3$  – любой конечный объём. Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Осуществлён переход к безразмерным величинам [5]:  $k_0 x \rightarrow x$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma/k_0$ ,  $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , где  $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$  (временной множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду опущен).

Будем искать решение системы (1) в виде бегущей волны [12, 13], т.е. с зависимостью  $e^{i\gamma z}$  от координаты  $z$ , вдоль которой структура регулярна:

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z},$$

$$H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z},$$

где  $\gamma$  – постоянная распространения (неизвестный спектральный параметр задачи).

Задача о поверхностных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра  $\gamma$  – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Принята следующая классификация волн [12–15] по параметру  $\gamma$ :

- 1) *распространяющаяся* волна, если  $\text{Im } \gamma = 0$ ;
- 2) *затухающая* волна, если  $\text{Re } \gamma = 0$ ;
- 3) *комплексная* волна, если  $\text{Re } \gamma \text{Im } \gamma \neq 0$ .

Мы будем рассматривать комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - i\gamma H_\varphi &= -i\tilde{\varepsilon} E_\rho, & i\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= -i\tilde{\varepsilon} E_\varphi, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} &= -i\tilde{\varepsilon} E_z, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - i\gamma E_\varphi &= i\tilde{\mu} H_\rho, & i\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} &= i\tilde{\mu} H_\varphi, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} &= i\tilde{\mu} H_z \end{aligned} \quad (5)$$

и, выразив функции  $E_\rho$ ,  $H_\rho$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\varphi$  через  $E_z$  и  $H_z$  из 1, 2, 4 и 5-го уравнений системы (5), получим

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{i}{\tilde{\kappa}^2} \left( \gamma \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \tilde{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right), & H_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{i}{\tilde{\kappa}^2} \left( \gamma \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \tilde{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right), \\ E_\varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{i}{\tilde{\kappa}^2} \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \rho \tilde{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right), & H_\varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{i}{\tilde{\kappa}^2} \left( \gamma \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \rho \tilde{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{\kappa}^2 = \gamma^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}$ .

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:  $\Pi(\rho, \varphi) := E_z(\rho, \varphi)$ ,  $\Phi(\rho, \varphi) := H_z(\rho, \varphi)$ .

Тем самым задача сводится к нахождению функций  $\Pi$  и  $\Phi$  – продольных компонент электрического и магнитного полей.

Для продольных компонент  $\Pi$  и  $\Phi$  поля имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие  $\gamma \in \mathbb{C}$ , при которых существуют нетривиальные решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Pi &:= \Delta\Pi - \tilde{\kappa}^2\Pi = -\left( \frac{\nabla\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{\nabla\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} \right) \nabla\Pi - \frac{\gamma}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\kappa}^2} J\left( \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}, \Phi \right), \\ \mathcal{L}\Phi &:= \Delta\Phi - \tilde{\kappa}^2\Phi = -\left( \frac{\nabla\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} + \frac{\nabla\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} \right) \nabla\Phi + \frac{\gamma}{\tilde{\mu}\tilde{\kappa}^2} J\left( \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}, \Pi \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$J(u, v) := \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \rho},$$

удовлетворяющие краевым условиям на  $\Gamma_0$ :

$$\Pi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad (8)$$

условиям сопряжения на  $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} [\Pi]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_1} = 0, \\ \gamma \left[ \frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right] \Big|_{\Gamma_1} - \left[ \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \gamma \left[ \frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] \Big|_{\Gamma_1} + \left[ \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

условиям сопряжения на  $\Gamma_2$ :

$$[\Pi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right] \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (10)$$

условию ограниченности энергии:

$$\int_{\Omega} (|\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + |\Pi|^2 + |\Phi|^2) dx < \infty, \quad (11)$$

где  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_1$ , и условию излучения на бесконечности:

$$\Pi(\rho, \varphi) = O(1/\rho), \quad \Phi(\rho, \varphi) = O(1/\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty \text{ равномерно по } \varphi. \quad (12)$$

Зная продольные компоненты  $\Pi$  и  $\Phi$  поля, его поперечные составляющие находим по формулам (6). Определённое так поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет всем условиям (1)–(4). Эквивалентность перехода к задаче (7)–(12) нарушается лишь при  $\gamma^2 = \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}$ ; в этом случае требуется отдельное рассмотрение системы (1).

**2. Вариационная формулировка.** Будем искать решения  $\Pi$  и  $\Phi$  задачи (7)–(12) в пространствах Соболева

$$H_0^1(\Omega) = \{f : f \in H^1(\Omega), \quad f|_{\Gamma_0} = 0\} \quad \text{и} \quad H^1(\Omega)$$

соответственно; скалярное произведение и норма в них задаются равенствами

$$(f, g)_1 = \int_{\Omega} (\nabla f \nabla \bar{g} + f \bar{g}) dx, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1.$$

Здесь мы используем обозначение для пространства Соболева  $H_0^1(\Omega)$ , не совпадающее со стандартным: в нашем случае  $f|_{\Gamma_0} = 0$ , но, вообще говоря  $f|_{\Gamma_1} \neq 0$ .

Дадим другую, вариационную, формулировку задачи (7)–(12). Умножим уравнения (7) на произвольные пробные функции  $u \in H_0^1(\Omega)$  и  $v \in H^1(\Omega)$  соответственно, считая их пока непрерывно дифференцируемыми в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , и применим формулу Грина [16, с. 329] отдельно для каждой области (возможность применения формулы Грина обоснована в [5]). Тогда с учётом граничного условия (8) будем иметь

$$\int_{\Omega_1} \frac{\varepsilon \bar{u}}{\kappa^2} \mathcal{L} \Pi dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon \bar{u}}{\kappa^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} d\tau - \int_{\Omega_1} \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx - \int_{\Omega_1} \frac{\bar{u}}{\kappa^2} \left( \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi dx - \int_{\Omega_1} \varepsilon \Pi \bar{u} dx$$

и

$$\int_{\Omega_1} \frac{\mu \bar{v}}{\kappa^2} \mathcal{L} \Phi dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\mu \bar{v}}{\kappa^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} d\tau - \int_{\Omega_1} \frac{\mu}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx - \int_{\Omega_1} \frac{\bar{v}}{\kappa^2} \left( \nabla \mu + \frac{\mu}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi dx - \int_{\Omega_1} \mu \Phi \bar{v} dx,$$

где  $\kappa^2 = \gamma^2 - \varepsilon \mu$ .

Принимая во внимания правые части уравнений системы (7), получаем

$$\int_{\Omega_1} \frac{\varepsilon \bar{u}}{\kappa^2} \mathcal{L}\Pi \, dx = - \int_{\Omega_1} \frac{\bar{u}}{\kappa^2} \left( \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi \, dx - \int_{\Omega_1} \frac{\gamma \bar{u}}{\kappa^4} J(\varepsilon \mu, \Phi) \, dx$$

и

$$\int_{\Omega_1} \frac{\mu \bar{v}}{\kappa^2} \mathcal{L}\Phi \, dx = - \int_{\Omega_1} \frac{\bar{v}}{\kappa^2} \left( \nabla \mu + \frac{\mu}{\kappa^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi \, dx + \int_{\Omega_1} \frac{\gamma \bar{v}}{\kappa^4} J(\varepsilon \mu, \Pi) \, dx.$$

Таким образом, приходим к равенствам

$$\int_{\Omega_1} \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} \, dx + \int_{\Omega_1} \varepsilon \Pi \bar{u} \, dx - \int_{\Omega_1} \frac{\gamma \bar{u}}{\kappa^4} J(\varepsilon \mu, \Phi) \, dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon \bar{u}}{\kappa^2} \bar{u} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau \quad (13)$$

и

$$\int_{\Omega_1} \frac{\mu}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} \, dx + \int_{\Omega_1} \mu \Phi \bar{v} \, dx + \int_{\Omega_1} \frac{\gamma \bar{v}}{\kappa^4} J(\varepsilon \mu, \Pi) \, dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\mu \bar{v}}{\kappa^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau. \quad (14)$$

Аналогично, для области  $\Omega_2$  выполняются равенства

$$- \int_{\Omega_2} \frac{1}{\kappa_0^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} \, dx - \int_{\Omega_2} \Pi \bar{u} \, dx + \int_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c \bar{u}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} \, d\tau = \int_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon_c \bar{u}}{\kappa_0^2} \bar{u} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau \quad (15)$$

и

$$- \int_{\Omega_2} \frac{1}{\kappa_0^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} \, dx - \int_{\Omega_2} \Phi \bar{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \frac{\mu_c \bar{v}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} \, d\tau = \int_{\Gamma_1} \frac{\mu_c \bar{v}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau, \quad (16)$$

где  $\kappa_0^2 = \gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c$ .

В силу условий сопряжения (9) из равенств (13), (15) и равенств (14), (16) соответственно следует, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon \Pi \bar{u} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} \, dx - \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{u}}{\kappa^4} J(\tilde{\varepsilon} \mu, \Phi) \, dx + \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau - \int_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c \bar{u}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} \, d\tau = 0$$

и

$$\int_{\Omega} \mu \Phi \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\mu}}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{v}}{\kappa^4} J(\tilde{\varepsilon} \mu, \Pi) \, dx - \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau - \int_{\Gamma_2} \frac{\mu_c \bar{v}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} \, d\tau = 0.$$

Так как граница  $\Gamma_2$  – окружность с радиусом  $r$ , последние формулы, можно записать следующим образом:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c \bar{u}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \, dl = \int_{\Omega} \varepsilon \Pi \bar{u} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} \, dx - \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{u}}{\kappa^4} J(\tilde{\varepsilon} \mu, \Phi) \, dx + \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau$$

и

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\mu_c \bar{v}}{\kappa_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \, dl = \int_{\Omega} \mu \Phi \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\mu}}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{v}}{\kappa^4} J(\tilde{\varepsilon} \mu, \Pi) \, dx - \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} \Big|_{\Gamma_1} \, d\tau.$$

Вне области  $\Omega_2$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mu} = 1$ . Тогда система (7) примет вид

$$\mathcal{L}\Pi := \Delta \Pi - \kappa_0^2 \Pi = 0, \quad \mathcal{L}\Phi := \Delta \Phi - \kappa_0^2 \Phi = 0. \quad (17)$$

Функция Грина  $G$  внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (17) во внешности окружности  $\Gamma_2$  определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\mathcal{L}G = -\frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{\rho}, \quad \rho_0 > r;$$

$$G(x, x_0)|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$G(x, x_0) = O(1/\rho) \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Здесь  $G(x, x_0) = G(x_0, x)$ ,  $x = (\rho, \varphi)$  и  $x_0 = (\rho_0, \varphi_0)$ .

Имеем [17, с. 203] в смысле распределений

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m(\varphi - \varphi_0)),$$

где в качестве основного пространства берётся пространство  $C_0^\infty(-\pi, \pi)$  бесконечно дифференцируемых функций, определённых на интервале  $(-\pi, \pi)$  и обращающихся в нуль в окрестности его концов. Тогда функция Грина  $G(x, x_0)$  примет вид

$$G(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho, \rho_0) \cos(m(\varphi - \varphi_0)),$$

где  $G_m(\rho, \rho_0)$  – функция Грина следующей краевой задачи:

$$\mathcal{L}_m G_m := \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG_m}{d\rho} \right) - \left( \frac{m^2}{\rho^2} + k_2^2 \right) G_m = -\frac{\delta(\rho - \rho_0)}{2\pi\rho}, \quad \rho_0 \geq r;$$

$$G_m(r, \rho_0) = 0,$$

$$G_m(\rho, \rho_0) = O(1/\rho) \quad \text{равномерно по } m \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

Нетрудно проверить, что функция Грина  $G_m$  имеет вид

$$G_m(\rho, \rho_0) = \begin{cases} \frac{K_m(\kappa_0\rho_0)}{K_m(\kappa_0r)} (I_m(\kappa_0r)K_m(\kappa_0\rho) - I_m(\kappa_0\rho)K_m(\kappa_0r)), & r \leq \rho < \rho_0, \\ \frac{K_m(\kappa_0\rho)}{K_m(\kappa_0r)} (I_m(\kappa_0\rho_0)K_m(\kappa_0r) - I_m(\kappa_0r)K_m(\kappa_0\rho_0)), & r \leq \rho_0 < \rho, \end{cases}$$

где функция  $K_m$  – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда), функция  $I_m$  – модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) [18, с. 198].

В силу условия на бесконечности выбираем следующую ветвь корня:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{|\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c|} + \operatorname{Re}(\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c) + \\ &\quad + i \operatorname{sign} \operatorname{Im}(\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c) \sqrt{|\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c| - \operatorname{Re}(\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_c)}). \end{aligned}$$

Функция  $\kappa_0(\gamma)$  является аналитической [16] в области  $\mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ , где  $\Lambda_0 := \{\gamma : \operatorname{Im} \gamma^2 = 0, \gamma^2 \leq \varepsilon_c \mu_c\}$ .

Окончательно получаем

$$G(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\kappa_0\rho_0)}{K_m(\kappa_0r)} (I_m(\kappa_0r)K_m(\kappa_0\rho) - I_m(\kappa_0\rho)K_m(\kappa_0r)) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), & r \leq \rho < \rho_0, \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\kappa_0\rho)}{K_m(\kappa_0r)} (I_m(\kappa_0\rho_0)K_m(\kappa_0r) - I_m(\kappa_0r)K_m(\kappa_0\rho_0)) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), & r \leq \rho_0 < \rho. \end{cases}$$

Вследствие второй формулы Грина справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r} (u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u) dx = r \int_0^{2\pi} \left( u \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r} d\varphi.$$

Далее, пусть  $v = G$ , тогда будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r} (u\mathcal{L}G - G\mathcal{L}u) dx = r \int_0^{2\pi} u \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r} d\varphi.$$

Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r} (u\mathcal{L}G - G\mathcal{L}u) dx = -u(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_r.$$

Окончательно получаем

$$u(x_0) = -r \int_0^{2\pi} u(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r} d\varphi, \quad x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_r, \quad (18)$$

где

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r} = -\frac{1}{2\pi r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\kappa_0 \rho_0)}{K_m(\kappa_0 r)} \cos[m(\varphi - \varphi_0)]. \quad (19)$$

Учитывая теорему о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя на границе [16, с. 115] и используя равенство (18), определим на границе  $\Gamma_2$  значение нормальной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_0} \Big|_{\rho_0=r} = -r \int_0^{2\pi} u(x) \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho_0 \partial \rho} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi,$$

причём

$$\frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho_0 \partial \rho} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} = -\frac{\kappa_0}{2\pi r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} \cos(m(\varphi - \varphi_0)). \quad (20)$$

Сходимость рядов (19) и (20) понимается в смысле распределений [17, с. 203].

Далее, переставив переменные  $x$  и  $x_0$  местами, домножив на тестовые функции  $u$  и  $v$  и взяв интегралы  $\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \bar{v} dl$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \bar{u} dl &= -r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \Pi(x_0) \bar{u}(x) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0. \\ \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \bar{v} dl &= -r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \Phi(x_0) \bar{v}(x) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условиями сопряжения (10), будем иметь

$$\begin{aligned} & -\frac{r^2}{\kappa_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = \\ & = \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx - \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{u}}{\kappa^4} J(\tilde{\varepsilon} \mu, \Phi) dx + \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \Big|_{\Gamma_1} d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{r^2}{\kappa_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = \\
& = \int_{\Omega} \tilde{\mu} \Phi \bar{v} dx + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma \bar{v}}{\tilde{\kappa}^4} J(\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}, \Pi) dx - \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa_0^2 \kappa^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} \Big|_{\Gamma_1} d\tau.
\end{aligned}$$

Складывая последние выражения и домножая на  $\gamma^2$ , получаем *вариационное соотношение*

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 \int_{\Omega} (\tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx + \int_{\Omega} (\tilde{\varepsilon} \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \tilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx - \int_{\Omega} (\tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\varepsilon} \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \tilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx - \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\tilde{\kappa}^4} (\tilde{\mu} \bar{v} J(\tilde{\mu}, \Pi) - \tilde{\varepsilon} \bar{u} J(\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}, \Phi)) dx - \int_{\Gamma_1} \gamma^3 \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa^2 \kappa_0^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \right) \Big|_{\Gamma_1} d\tau + \\
& + r^2 \frac{\gamma^2}{\kappa_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} (\varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

Вариационное соотношение (21) получено для гладких функций  $u$  и  $v$ . Соотношение (21) распространяется на любые функции  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$  по непрерывности, поскольку непрерывность соответствующих форм будет доказана в следующем пункте.

**Определение.** Пару функций  $\Pi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\Phi \in H^1(\Omega)$ , ( $\|\Pi\|_1 + \|\Phi\|_1 \neq 0$ ) будем называть *собственным вектором* задачи (7)–(12), отвечающим характеристическому числу (х.ч.)  $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ , если при  $\gamma = \gamma_0$  вариационное соотношение (21) выполнено для любых  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$ .

**3. Задача о спектре оператор-функции.** Пусть  $H = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  – декартово произведение гильбертовых пространств со стандартным скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \quad u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega), \quad u_2, v_2 \in H^1(\Omega).$$

Тогда интегралы, входящие в соотношение (21), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем  $\mathbb{C}$  от аргументов  $\mathbf{u} = (\Pi, \Phi)^T$ ,  $\mathbf{v} = (u, v)^T$ , заданные на  $H$ . Каждая полуторалинейная форма  $t(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ , задаёт [19, с. 67] линейный оператор  $T : H \rightarrow H$  по формуле

$$t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (T\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H.$$

Оператор  $T$  ограничен, если форма ограничена:  $|t(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ . Линейность оператора следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|T\mathbf{u}\|^2 = t(\mathbf{u}, T\mathbf{u}) \leq C \|\mathbf{u}\| \|T\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими линейные операторы:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx = (K\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H,$$

$$k_{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\varepsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx = (K_{\gamma}(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H,$$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\
a_{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \frac{\widetilde{\varepsilon} \widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2} (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \widetilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon \Pi \bar{u} + \mu \Phi \bar{v}) dx = (A_{\gamma}(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\
b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\kappa^4} (\bar{v} J(\widetilde{\mu}, \Pi) - \widetilde{\varepsilon} \bar{u} J(\widetilde{\varepsilon} \widetilde{\mu}, \Phi)) dx = (B(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\
s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Gamma_1} \gamma \frac{\varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c}{\kappa^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \right) \Big|_{\Gamma_1} d\tau = (S(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\
p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi, \varphi_0) (\varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \\
&\quad + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = (P(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\
F(\varphi, \varphi_0) &:= r^2 \frac{\gamma^2}{\kappa_0^2} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}}.
\end{aligned}$$

Известно [16, с. 428], что функция Грина  $G(x, x_0)$  имеет логарифмическую особенность, которую можно выделить. Тогда аналогично [20, с. 61] находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho_0 \partial \rho} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} &= -\frac{\kappa_0}{2\pi r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} \cos(m(\varphi - \varphi_0)) = \\
&= \frac{\kappa_0}{\pi r} \frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{\kappa_0}{\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} \cos(m(\varphi - \varphi_0)) = \\
&= \frac{\kappa_0}{\pi r} \frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{1}{\pi r^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \kappa_0 r \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m \right) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) + \frac{1}{\pi r^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \cos(m(\varphi - \varphi_0)) = \\
&= \frac{\kappa_0}{\pi r} \frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{1}{\pi r^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \kappa_0 r \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m \right) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) - \frac{1}{\pi r^2} \frac{1}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)}.
\end{aligned}$$

Для общего члена последнего ряда имеем

$$\kappa_0 r \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m = O(1/m) \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

а значит, ряд сходится условно при  $\varphi \neq \varphi_0$ .

Оператор  $P(\gamma)$  представим как сумму компактного и гиперсингулярного операторов

$$P(\gamma) = K_P + P_G, \quad (22)$$

где

$$k_P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{\kappa_0 r}{\pi} \frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x) \right) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \kappa_0 r \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m \right) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) (\varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = \\
& = (K_P(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H
\end{aligned}$$

и

$$P_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = (P_G \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H.$$

Так как функции  $\Pi, u, \Phi, v \in H^1(\Omega)$ , то следы этих функций на  $\Gamma_2$  принадлежат пространству  $H^{1/2}(\Gamma_2)$  [21, с. 59]. Гиперсингулярный оператор  $P_G : H^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2)$  ограничен [22, с. 19]. В силу антидуального спаривания пространств  $H^{1/2}(\Gamma_2)$  и  $H^{-1/2}(\Gamma_2)$  [23, с. 258] получаем, что полуторалинейная форма  $p_G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ограничена в  $H$ . Далее, учитывая скорость убывания коэффициентов ряда для  $k_P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , заключаем, что этот ряд определяет интегральный оператор с логарифмической особенностью ядра и оператор  $K_P : H^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_2)$  будет компактным. Таким образом, оператор-функция  $P(\gamma) : H \rightarrow H$  ограничена.

Ограниченность форм  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  и  $a_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  очевидна, а форм  $k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  и  $k_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  следует из неравенства Пуанкаре [21, с. 59]. Ограниченность форм  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  и  $s(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  установлена в [10].

Теперь вариационную задачу (21) можно записать в операторном виде

$$(N(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H,$$

или равносильно

$$\begin{aligned}
N(\gamma) \mathbf{u} &= 0, \quad N(\gamma) : H \rightarrow H, \\
N(\gamma) &:= \gamma^2 K + A - K + A_\gamma - K_\gamma + B - S + P.
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение (23) – операторная запись вариационного соотношения (21). Характеристические числа и собственные векторы оператор-функции  $N$  совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами задачи (7)–(10) при  $\gamma^2 \neq \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}$ .

**4. Свойства оператор-функции.** Приведём следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию  $N(\gamma)$  (доказательства в [5, 10]).

**Лемма 1.** Операторы  $K$  и  $K_\gamma$  компактные. Оператор  $K$  положительно определён и для его собственных чисел верна асимптотика

$$\lambda_n(K) = O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Лемма 2.** Ограниченный оператор  $A : H \rightarrow H$  является положительно определённым:  $A \geq I$ .

**Лемма 3.** Оператор  $B_\gamma$  компактен. Оператор-функция  $B_\gamma(\gamma)$  голоморфна в области  $\mathbb{C} \setminus \Lambda_B$ , где

$$\Lambda_B := \left\{ \gamma : \operatorname{Im} \gamma = 0, \quad |\gamma| = \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}, \quad \min_{x \in \Omega_1} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)} \leq |\gamma| \leq \max_{x \in \Omega_1} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)} \right\}.$$

Обозначим через  $\varrho(N)$  резольвентное множество оператор-функции  $N(\gamma)$ , т.е. совокупность тех  $\gamma \in \mathbb{C}$ , при которых оператор  $N(\gamma)$  имеет ограниченный обратный. Спектр оператор-функции  $N(\gamma)$  будем обозначать через  $\sigma(N)$ , т.е.  $\sigma(N) = \mathbb{C} \setminus \varrho(N)$ .

**Лемма 4.** Существует  $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$  такое, что оператор  $N(\tilde{\gamma})$  непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество  $\varrho(N)$  оператор-функции  $N(\gamma)$  не пусто;  $\varrho(N) \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Пусть  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$  и  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим следующую оператор-функцию:

$$N(\gamma) = N_1(\gamma) + N_2(\gamma),$$

где  $N_1(\gamma) = \gamma^2 K + A - K + \gamma P_0$  и  $N_2(\gamma) = A_\gamma - K_\gamma + B - S + P(\gamma) - \gamma P_0$ , а оператор  $P_0 : H \rightarrow H$  определяется полуторалинейной формой

$$p_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m(\varphi - \varphi_0)) d\varphi \times \\ \times \int_0^{2\pi} (\varepsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi_0 = (P_0 \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H.$$

Известно [17, с. 203], что (в смысле распределений)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\phi) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi l) = 2\pi \delta(\phi),$$

где  $\phi = |\varphi - \varphi_0|$ ,  $0 \leq |\phi| \leq \pi$  и в качестве основного пространства берётся, как и в п. 2, пространство  $C_0^\infty(-\pi, \pi)$ . Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m(\varphi - \varphi_0)) = 2\pi \delta(\varphi - \varphi_0).$$

Тогда оператор  $P_0$  определяется формой

$$(P_0 \mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\pi \int_0^{2\pi} (\varepsilon_c \Pi(x) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x) \bar{v}(x)) \Big|_{\rho=r} d\varphi \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H.$$

Очевидно, что  $(P_0 \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\pi \int_0^{2\pi} (\varepsilon_c |\Pi(x)|^2 + \mu_c |\Phi(x)|^2) \Big|_{\rho=r} d\varphi > 0$  при  $\|\mathbf{u}\| \neq 0$ . Так как следы функций  $\Pi$ ,  $u$ ,  $\Phi$ ,  $v$  на  $\Gamma_2$  принадлежат пространству  $H^{1/2}(\Gamma_2)$ , заключаем, что оператор  $P_0 : H \rightarrow H$  ограничен.

Принимая во внимание асимптотику функций  $K_m$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$  [18, с. 198], имеем

$$F(\varphi, \varphi_0) \sim \gamma + O(1/\gamma)$$

и, следовательно,

$$\|P(\gamma) - \gamma P_0\| = O(1/\gamma) \quad \text{при } \gamma \rightarrow +\infty.$$

Тогда оператор-функцию  $N(\gamma)$  можно рассматривать как возмущение операторного пучка  $N_1$  оператор-функцией  $N_2$  при больших  $\gamma$ .

Из свойств операторов  $K$  и  $A$  вытекает, что найдётся такое большое  $\tilde{\gamma} > 0$ , при котором для любого  $\mathbf{u}$  справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} (N_1(\tilde{\gamma}) \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \tilde{\gamma}^2 (K \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (A \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (K \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \tilde{\gamma} (P_0 \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \|\mathbf{u}\|^2.$$

Поэтому  $\tilde{\gamma} \in \varrho(N_1)$ , где  $\varrho(N_1)$  – резольвентное множество пучка  $N_1$ . Причём, используя лемму 7.1 из [24, с. 309], имеем оценку  $\|N_1^{-1}(\tilde{\gamma})\| \leq 1$ . Выберем  $\tilde{\gamma}$  так, чтобы  $\|N_2(\tilde{\gamma})\| < 1$ . Получаем, что существует и ограничен оператор

$$(N_1(\tilde{\gamma}) + N_2(\tilde{\gamma}))^{-1} = (I + N_1^{-1}(\tilde{\gamma}) N_2(\tilde{\gamma})) N_1^{-1}(\tilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

**Замечание.** В дальнейшем нам понадобится продолжение функций  $\varepsilon(x)$  и  $\mu(x)$  в  $\Omega_2$  с сохранением гладкости. Так как  $\varepsilon, \mu \in C^1(\bar{\Omega}_1)$ , такое продолжение легко осуществить [25, с. 122]. При этом сохраним старые обозначения за продолженными функциями  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Поскольку соотношение (21) справедливо для любых  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$ , введём пробные функции  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  такие, что  $\bar{u} = \eta^{-1}\bar{u}$ ,  $\bar{v} = \eta^{-1}\bar{v}$ , где  $\eta = \gamma^2\chi - \epsilon$ ,  $\chi = (\epsilon\mu - \epsilon_c\mu_c)^{-1} > 0$ ,  $\epsilon = \epsilon\mu(\epsilon\mu - \epsilon_c\mu_c)^{-1} > 0$ . Очевидно, что так определённые функции  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  принадлежат тем же пространствам, что и исходные функции  $u$  и  $v$ .

Соотношение (21) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta \kappa_0^2 (1 - \tilde{\kappa}^{-2}) (\tilde{\epsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx + \int_{\Omega} \eta \frac{\kappa_0^2}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\epsilon} \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \tilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \epsilon \Pi \bar{u} + \mu \Phi \bar{v}) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\kappa_0^2}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\epsilon} \bar{u} \nabla \Pi \nabla \eta + \tilde{\mu} \bar{v} \nabla \Phi \nabla \eta) dx + \int_{\Omega} \gamma \eta \frac{\kappa_0^2}{\tilde{\kappa}^4} (\tilde{\mu} \bar{v} J(\tilde{\mu}, \Pi) - \tilde{\epsilon} \bar{u} J(\tilde{\epsilon} \tilde{\mu}, \Phi)) dx - \gamma \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \right) \Big|_{\Gamma_1} d\tau + \\ & + r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G(x, x_0)}{\partial \rho \partial \rho_0} \eta (\epsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Имеем следующие ограниченные операторы:

$$\begin{aligned} \tilde{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \eta \kappa_0^2 (1 - \tilde{\kappa}^{-2}) (\tilde{\epsilon} \Pi \bar{u} + \tilde{\mu} \Phi \bar{v}) dx = (\tilde{K}(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{a}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \chi (\tilde{\epsilon} \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \tilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \epsilon \Pi \bar{u} + \mu \Phi \bar{v}) dx = (\tilde{A}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{a}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} (\tilde{\epsilon} \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \tilde{\mu} \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \epsilon \Pi \bar{u} + \mu \Phi \bar{v}) dx = (\tilde{A}_2 \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \bar{u} \right) \Big|_{\Gamma_1} d\tau = (\tilde{S} \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \frac{\kappa_0^2}{\tilde{\kappa}^2} ((\tilde{\epsilon} \bar{u} \nabla \Pi \nabla \eta + \tilde{\mu} \bar{v} \nabla \Phi \nabla \eta) + \\ & + \frac{\gamma \eta}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{\mu} \bar{v} J(\tilde{\mu}, \Pi) - \tilde{\epsilon} \bar{u} J(\tilde{\epsilon} \tilde{\mu}, \Phi))) dx = (\tilde{B}(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{k}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\kappa_0 r}{\pi} \frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta (\epsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta \sum_{m=1}^{\infty} \left( \kappa_0 r \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m \right) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] (\epsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)) \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = \\ & = (\tilde{K}_p(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H, \\ \tilde{p}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi \frac{\epsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = (\tilde{P}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H \end{aligned}$$

и

$$\tilde{p}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon \frac{\epsilon_c \Pi(x_0) \bar{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0) \bar{v}(x)}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)} \Big|_{\substack{\rho=r \\ \rho_0=r}} d\varphi d\varphi_0 = (\tilde{P}_2 \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in H,$$

здесь  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c \mu_c \epsilon \mu \tilde{\epsilon}^{-1} \tilde{\mu}^{-1}$ .

Таким образом, мы получили следующую оператор-функцию:

$$\begin{aligned}\tilde{N}(\gamma)\mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u} \in H, \quad \tilde{N}(\gamma) : H \rightarrow H, \\ \tilde{N}(\gamma) &:= \tilde{K} + \tilde{K}_P + \tilde{B} + \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{P}_1) - \gamma\tilde{S} - (\tilde{A}_2 + \tilde{P}_2).\end{aligned}\quad (25)$$

Уравнение (25) – операторная запись вариационного соотношения (24). Спектры оператор-функций  $N$  и  $\tilde{N}$  совпадают:  $\sigma(N(\gamma)) = \sigma(\tilde{N}(\gamma))$ . Операторы  $\tilde{K}(\gamma)$ ,  $\tilde{B}(\gamma)$ ,  $\tilde{K}_P(\gamma)$ ,  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  сохраняют все свойства операторов  $K$ ,  $B(\gamma)$ ,  $K_P(\gamma)$  и  $A$ , перечисленные в леммах 1–3.

Справедливы следующие леммы [5, 11].

**Лемма 5.** Оператор  $\tilde{S}$  самосопряжён,  $\tilde{S} = \tilde{S}^*$ , и имеют место неравенства

$$-\frac{1}{2}I \leq \tilde{S} \leq \frac{1}{2}I. \quad (26)$$

**Лемма 6.** Операторы  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$  положительные,  $\tilde{P}_1 > 0$ ,  $\tilde{P}_2 > 0$ .

**Теорема 1.** Оператор-функция  $\tilde{N}(\gamma) : H \rightarrow H$  является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области  $\Lambda := \mathbb{C} \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_0 \cup \Lambda_F)$ , где  $\Lambda_F := \{\gamma : \operatorname{Im} \gamma = 0, \gamma_* \leq |\gamma| \leq \gamma^*\}$ , а

$$\gamma_* = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 + 4(\max_{x \in \Omega} \varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c)^{-2}}}{2(\|\tilde{A}_1\| + \|\tilde{P}_1\|)}, \quad \gamma^* = \frac{1/2 + \sqrt{1/4 + 4(\|\tilde{A}_2\| + \|\tilde{P}_2\|)(\|\tilde{A}_1\| + \|\tilde{P}_1\|)}}{2(\max_{x \in \Omega} \varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c)^{-1}}.$$

**Доказательство.** В области  $\mathbb{C} \setminus \Lambda_0$  функция

$$\kappa_0 \frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} = -\kappa_0 \frac{K_{m+1}(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + \frac{m}{r}$$

является аналитической (как функция от  $\gamma$ ). Так как  $\operatorname{Re} \kappa_0 > 0$ , функции  $K_m(\kappa_0 r)$  не имеют нулей [18, с. 198]. Принимая во внимание лемму 3, получаем, что в области  $\mathbb{C} \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_0)$  оператор-функция  $\tilde{N}(\gamma)$  является аналитической.

Запишем оператор-функцию  $\tilde{N}(\gamma)$  следующим образом:  $\tilde{N}(\gamma) := \tilde{N}_K(\gamma) + \tilde{N}_0(\gamma)$ , где  $\tilde{N}_K(\gamma) = \tilde{K} + \tilde{K}_P + \tilde{B}$  и  $\tilde{N}_0(\gamma) = \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{P}_1) - \gamma\tilde{S} - (\tilde{A}_2 + \tilde{P}_2)$ .

Покажем, что оператор  $\tilde{N}_0(\gamma)$  является обратимым. Пусть  $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ ,  $\gamma'' \neq 0$ , тогда

$$\frac{1}{\gamma''} \operatorname{Im} \left( \frac{N_0(\gamma)}{\gamma} \right) = \tilde{A}_1 + \frac{\tilde{A}_2}{|\gamma|^2} \geq I.$$

Далее, пусть  $\operatorname{Im} \gamma = 0$ . Для квадратичной формы  $(N_0(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{u})$  рассмотрим уравнение

$$(N_0(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = ((\gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{P}_1) - \gamma\tilde{S} - (\tilde{A}_2 + \tilde{P}_2))\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Выражая из этого уравнения  $(\tilde{S}\mathbf{u}, \mathbf{u})$  и принимая во внимание оценку (26), получаем двойное неравенство

$$-\frac{1}{2}I \leq \frac{1}{\gamma}(\tilde{A}_2 + \tilde{P}_2) - \gamma(\tilde{A}_1 + \tilde{P}_1) \leq \frac{1}{2}I. \quad (27)$$

Решая неравенства (27) относительно  $\gamma$ , получаем, что вне множества  $\gamma_* \leq |\gamma| \leq \gamma^*$  оператор  $N_0(\gamma)$  положительно или отрицательно определён и поэтому непрерывно обратим [24, с. 37], и, следовательно, оператор-функция  $\tilde{N}(\gamma)$  является фредгольмовой как сумма обратимого  $\tilde{N}_0(\gamma)$  и компактного  $\tilde{N}_K(\gamma)$  операторов. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Спектр оператор-функции  $N(\gamma) : H \rightarrow H$  является дискретным в  $\Lambda$ , т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте  $I_0 \subset \Lambda$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [24].

**Заключение.** Доказаны теоремы о дискретности спектра на поверхностных волнах регулярной открытой неоднородной волноведущей структуры прямоугольного сечения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-31-70010).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М., 1989.
2. Смирнов Ю.Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 140–147.
3. Смирнов Ю.Г. Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 3. С. 597–599.
4. Делицин А.Л. Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитоэлектрическим заполнением // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 629–633.
5. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.
6. Ложечко В.В., Шестопалов Ю.В. О задачах возбуждения открытых цилиндрических резонаторов с нерегулярной границей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 1. С. 71–82.
7. Даутов Р.З., Карчевский Е.М. Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории. Казань, 2009.
8. Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1298–1309.
9. Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 6. С. 1–4.
10. Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю. Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1196–1206.
11. Smirnov Y., Smolkin E. Mathematical theory of normal waves in an open metal-dielectric regular waveguide of arbitrary cross section // Math. Model. and Anal. 2020. V. 25. № 3. P. 391–408.
12. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М., 1984.
13. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М., 1987.
14. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М., 1988.
15. Маркузе Д. Оптические волноводы. М., 1974.
16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1981.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2004.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.
19. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
20. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G., Chernokozhin E.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. Holland, 2000.
21. Adams R.A. Sobolev Spaces. New York, 1975.
22. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М., 1996.
23. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
24. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
25. Хирш М. Дифференциальная топология. М., 1979.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.

После доработки 04.03.2021 г.

Принята к публикации 08.06.2021 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.958:532.5

РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ  
ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ  
КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА

© 2021 г. А. С. Устюжанинова

Доказывается существование равномерных минимального траекторного и глобального аттракторов для слабых решений неавтономной модифицированной модели Кельвина–Фойгта.

DOI: 10.31857/S0374064121090053

**Введение.** При изучении динамики систем особое значение имеют свойства, сохраняющиеся при длительной эволюции системы. При этом естественно возникает понятие аттрактора как множества в фазовом пространстве системы, к которому в том или ином смысле стремятся с течением времени все её траектории, начинающиеся в некоторой окрестности этого множества. Все основные свойства динамики изучаемой системы определяются её аттрактором.

М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым в работе [1] построена теория равномерных аттракторов семейства трансляционно инвариантных пространств траекторий. С помощью этой теории установлено существование аттракторов у неавтономной трёхмерной системы Навье–Стокса. При этом требование инвариантности пространства траекторий существенно сужает область применимости теории трансляционно инвариантных траекторных пространств к моделям гидродинамики. От этого требования удалось освободиться в работе [2], в которой построена теория равномерных аттракторов для неинвариантных пространств траекторий. Попутно в [2] удалось освободиться также и от некоторых дополнительных ограничений работы [1]: снято требование полноты метрического пространства для пространства символов системы и требование замкнутости пространства траекторий. Изложение теории равномерных аттракторов для неинвариантных пространств траекторий и примеры приложения этой теории к конкретным моделям гидродинамики можно найти в работах [3, 4].

Опишем модель, для которой в данной работе будут исследованы вопросы существования минимального равномерного траекторного и равномерного глобального аттракторов.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) – ограниченная область с достаточно гладкой границей (например, границей класса  $C^3$ ). Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \kappa \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

В этой системе  $v(x, t)$  – вектор скорости частиц жидкости в точке  $x$  в момент  $t$ ;  $p(x, t)$  – давление жидкости в точке  $x$  в момент  $t$ ;  $f(x, t)$  – плотность внешних сил. Константы  $\nu > 0$  и  $\kappa > 0$  характеризуют вязкость жидкости и время релаксации соответственно. Искомыми являются функции  $v$  и  $p$ .

Система уравнений (1), (2) впервые получена в работе [5] и нашла экспериментальное подтверждение в исследованиях [6, 7] течений слабоконцентрированных водных полимерных растворов.

Рассмотрим для системы (1), (2) начально-краевую задачу с начальным

$$v|_{t=0} = a \quad (3)$$

и с граничным

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

условиями.

Исследование разрешимости начально-краевой задачи (1)–(4) начато А.П. Осколковым в работах [8, 9]. Однако в своей статье [10] он отметил, что доказательства его результатов содержат ошибки и ему не удалось методом Фаеда–Галёркина доказать существование решений задачи (1)–(4).

Существование слабого решения задачи (1)–(4) на конечном отрезке  $[0, T]$  доказано в работе [11] (также отметим статьи [12, 13], посвящённые задачам оптимизации для рассматриваемой модели). После этого для автономной модифицированной модели Кельвина–Фойгта в работе [14], основываясь на теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий, было установлено существование траекторного и глобального аттракторов. Использование данного подхода обусловлено отсутствием теоремы единственности для слабых решений начально-краевой задачи (1)–(4). Отметим, что для сильных решений рассматриваемой задачи имеет место теорема единственности [9], но их существование не доказано до сих пор.

Следующим важным вопросом является изучение предельного поведения решений системы (1)–(4) при правой части, зависящей от времени. Такие системы называют неавтономными, и именно такие системы зачастую возникают в приложениях, где важен вопрос описания их предельного поведения. В данной работе для неавтономной системы (1)–(4) доказываются существование равномерного минимального траекторного и равномерного глобального аттракторов.

**1. Основные определения и необходимые обозначения.** Через  $E$  и  $E_0$  обозначаем банаховы пространства, причём будем считать, что пространство  $E$  рефлексивно и непрерывно вложено в пространство  $E_0$ . Обозначим через  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  линейное пространство непрерывных функций, определённых на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в  $E_0$ . В дальнейшем  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  рассматриваем как метрическое пространство с метрикой равномерной сходимости на конечных отрезках, а именно, последовательность  $(u_m) \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$  сходится к функции  $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0)$  тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к  $u$  равномерно на каждом отрезке, содержащемся в  $\mathbb{R}_+$ . Очевидно, что метрическое пространство  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  полно.

Пусть  $\Pi_M$  ( $M \geq 0$ ) – оператор сужения на отрезок  $[0, M]$  функций, заданных на  $\mathbb{R}_+$ . Из определения сходимости в  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  следует, что оператор  $\Pi_M$  непрерывно отображает  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  в  $C([0, M], E_0)$ .

**Лемма 1.** Для того чтобы множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$  являлось относительно компактным в  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы при любом  $M > 0$  множество  $\Pi_M P$  было относительно компактно в  $C([0, M], E_0)$ .

Через  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  обозначим линейное пространство, состоящее из классов совпадающих почти всюду функций  $u$ , определённых на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в  $E$ , для которых найдётся число  $\alpha_u$  такое, что  $\|u(t)\|_E \leq \alpha_u$  при почти всех  $t$  (такие функции называются существенно ограниченными). Норма в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  задаётся формулой

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E,$$

здесь  $\operatorname{vrai\,sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$  – это нижняя грань множества  $\{\sup \|u(t)\|_E : t \in \mathbb{R}_+ \setminus M\}$ , где  $M$  пробегает все подмножества в  $\mathbb{R}_+$ , имеющие нулевую меру. Для всякой функции  $u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  при почти всех  $t \geq 0$  имеет место неравенство  $\|u(t)\|_E \leq \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)}$ . Пространство  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ , снабжённое указанной нормой, является банаховым (см. [15, с. 309]).

**Определение 1.** Пусть  $J$  – конечный или бесконечный интервал вещественной оси,  $\bar{J}$  – его замыкание и  $Y$  – банахово пространство. Функция  $u : \bar{J} \rightarrow Y$  называется слабо непрерывной, если из того, что  $t_n \rightarrow t$ ,  $t_n \in \bar{J}$ , следует, что  $u(t_n) \rightarrow u(t)$  слабо в  $Y$ .

Множество слабо непрерывных функций  $u : \bar{J} \rightarrow Y$  будем обозначать через  $C_w(\bar{J}, Y)$ .

Также нам потребуется следующая теорема (см., например, [16, с. 211]).

**Теорема 1.** Пусть  $E$  и  $E_0$  – два банаховых пространства таких, что  $E \subset E_0$ , причём вложение непрерывно. Если функция  $v$  принадлежит пространству  $L_\infty(0, T; E)$  и непрерывна как функция со значениями в  $E_0$ , то  $v$  слабо непрерывна как функция со значениями в  $E$ , т.е.  $v \in C_w([0, T], E)$ .

Следовательно, функции, принадлежащие классу  $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ , слабо непрерывны со значениями в  $E$ , а их значения принадлежат пространству  $E$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Для каждого  $h \geq 0$  определим оператор сдвига  $T(h)$ , который функции  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , ставит в соответствие функцию  $f(t+h)$ ,  $t \geq 0$ , т.е.  $(T(h)f)(t) = f(t+h)$ . Очевидно, что имеет место тождество  $T(h_1)T(h_2) = T(h_1+h_2)$  для всех  $h_1, h_2 \geq 0$ , а также что  $T(0)$  – тождественный оператор.

**2. Основные определения теории равномерных аттракторов.** Приведём основные понятия теории равномерных аттракторов [3, 4].

Рассмотрим абстрактное неавтономное эволюционное дифференциальное уравнение

$$u'(t) = A_{\sigma(t)}(u(t)), \quad u(t) \in E, \quad (5)$$

где  $\sigma$  – некоторый функциональный параметр, который будем называть *символом уравнения* (5). Далее предполагаем, что  $\sigma$  принадлежит некоторому множеству параметров  $\Sigma$ , которое будем называть *пространством символов*. Обычно  $\Sigma$  – это подмножество некоторого пространства зависящих от времени функций. В приложениях функция  $\sigma$  обычно состоит из всех зависящих от времени коэффициентов и правых частей рассматриваемого уравнения. Предположим, что для каждого  $\sigma \in \Sigma$  задано непустое множество  $\mathcal{H}_\sigma^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  решений (в каком-либо смысле, например, сильных, слабых и т.п.) уравнения (5), определённых на полуоси. Множества  $\mathcal{H}_\sigma^+$  будем называть *траекторными пространствами*, а их элементы – *траекториями*. Рассмотрим также *объединённое траекторное пространство*  $\mathcal{H}_\Sigma^+ = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{H}_\sigma^+$ . Отметим, что поскольку каждое  $\mathcal{H}_\sigma^+$  непусто, то и  $\mathcal{H}_\Sigma^+$  непусто.

**Определение 2.** Множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  называется *равномерно* (относительно  $\sigma \in \Sigma$ ) *притягивающим* (для уравнения (5)), если для всякого множества  $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ , ограниченного в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ , выполняется условие  $\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ .

**Определение 3.** Множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  называется *равномерно поглощающим*, если для всякого множества  $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ , ограниченного в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ , существует  $h \geq 0$  такое, что при всех  $t \geq h$  имеет место включение  $T(t)B \subset P$ .

Любое равномерно поглощающее множество является равномерно притягивающим.

**Определение 4.** Множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  называется *равномерным траекторным полуаттрактором* (для уравнения (5)), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) множество  $P$  компактно в  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  и ограничено в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ ;
- (ii) имеет место включение  $T(h)P \subset P$  для всех  $h \geq 0$ ;
- (iii) множество  $P$  является равномерно притягивающим.

**Определение 5.** Множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  называется *равномерным* (относительно  $\sigma \in \Sigma$ ) *траекторным аттрактором* (для уравнения (5)), если оно удовлетворяет условиям (i), (iii) определения 3, а также условию

- (ii') имеет место равенство  $T(h)P = P$  для всех  $h \geq 0$ .

**Определение 6.** Минимальным равномерным траекторным аттрактором пространства траекторий  $\mathcal{H}_\Sigma^+$  называется наименьший по включению равномерный траекторный аттрактор.

**Определение 7.** Множество  $\mathcal{A} \subset E$  называется *равномерным* (относительно  $\sigma \in \Sigma$ ) *глобальным аттрактором* (в  $E_0$ ) для уравнения (5), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (a) множество  $\mathcal{A}$  компактно в  $E_0$  и ограничено в  $E$ ;
- (b) для всякого ограниченного в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  множества  $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$  выполняется условие притягивания

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty;$$

- (c) множество  $\mathcal{A}$  является наименьшим по включению множеством, удовлетворяющим условиям (a) и (b).

**Замечание 1.** Если семейство траекторных пространств имеет минимальный равномерный траекторный аттрактор или равномерный глобальный аттрактор, то он единственный.

**Замечание 2.** Пространство символов  $\Sigma$ , вообще говоря, может состоять даже из одного элемента  $\sigma_*$ , соответствующего рассматриваемому уравнению. Однако в приложениях теории чтобы оправдать слово “равномерный” обычно предполагают, что  $\Sigma \supset \Sigma_0$ , где  $\Sigma_0 = \{T(h)\sigma_* : h \geq 0\}$ .

**Замечание 3.** Минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор зависят от выбора множества  $\Sigma$ . Если для двух пространств символов имеет место включение  $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ , то такое же включение имеет место и для соответствующих им минимальных равномерных траекторных аттракторов  $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{U}_{\Sigma_2}$  и для равномерных глобальных аттракторов  $\mathcal{A}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{A}_{\Sigma_2}$ . Более того, при расширении пространства символов возможны случаи, когда равномерных аттракторов не существует. Подробный пример описан в [3, замечание 4.3.3].

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если равномерный траекторный полуаттрактор  $P$  для уравнения (5) существует, то существует и минимальный равномерный траекторный аттрактор  $\mathcal{U}$  для уравнения (5).

**Теорема 3.** Если существует минимальный равномерный траекторный аттрактор  $\mathcal{U}$  для уравнения (5), то существует и равномерный глобальный аттрактор  $\mathcal{A}$  для уравнения (5).

Приведём ещё одно утверждение (см. [3, с. 90]), которое нам понадобится при доказательстве основного результата работы.

**Лемма 2.** Пусть  $P$  – относительно компактное в  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ , ограниченное в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  притягивающее (соответственно поглощающее) множество для уравнения (5). Тогда его замыкание  $\bar{P}$  в пространстве  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  является компактным в  $C(\mathbb{R}_+; E_0)$  и ограниченным в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$  притягивающим (соответственно поглощающим) множеством для уравнения (5). Если, кроме того, имеет место включение  $T(h)P \subset P$  при всех  $h \geq 0$ , то  $\bar{P}$  – полуаттрактор.

**3. Необходимые обозначения.** Через  $C_0^\infty(\Omega)^n$  обозначим линейное пространство функций  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  класса  $C^\infty$  с компактным носителем. Пусть  $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}$ . Определим пространства  $V^0$  и  $V^1$  как пополнения пространства  $\mathcal{V}$  по нормам  $L_2(\Omega)^n$  и  $H^1(\Omega)^n$  соответственно,  $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$ .

Пусть  $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$  – проектор Лере. Напомним, что в силу разложения Вейля  $L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$ , где  $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla v : v \in H^1(\Omega)\}$ . Рассмотрим в пространстве  $\mathcal{V}$  оператор  $A = -\pi\Delta$ , который продолжается в пространство  $V^0$  до замкнутого оператора и является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным (см., например, [17, 18]). Область определения оператора  $A$  совпадает с  $V^2$ . В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов собственные функции  $\{e_j\}$  оператора  $A$  образуют ортонормированный базис в  $V^0$ .

Обозначим через  $E_\infty$  множество конечных линейных комбинаций, составленных из собственных функций  $e_j$ . Пусть  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$  – собственные значения оператора  $A$  ( $\lambda_k$  отвечает функции  $e_k$ ). Определим пространство  $V^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , как пополнение пространства  $E_\infty$  по норме  $\|v\|_{V^\alpha} = (\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha |v_k|^2)^{1/2}$ .

В [19, 20] показано, что указанные нормы в пространствах  $V^1$ ,  $V^2$ ,  $V^3$  эквивалентны следующим:  $\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2}v\|_{V^0}$ ,  $\|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}$ ,  $\|v\|_{V^3} = \|A^{3/2}v\|_{V^0}$ .

Для определения слабого решения на отрезке введём пространства

$$W_1[0, T] = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^2), \quad v' \in L_2(0, T; V^1)\}$$

и

$$W_2[0, T] = \{v : v \in C([0, T], V^3), \quad v' \in L_2(0, T; V^3)\}$$

с соответствующими нормами

$$\|v\|_{W_1[0, T]} = \|v\|_{L_\infty(0, T; V^2)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^1)} \quad \text{и} \quad \|v\|_{W_2[0, T]} = \|v\|_{C([0, T], V^3)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^3)}.$$

Для определения слабого решения на полуоси  $\mathbb{R}_+$  задачи (1)–(4) нам понадобится пространство  $W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ , состоящее из функций, определённых на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в  $V^2$ , таких, что их ограничение на любой отрезок  $[0, T]$  принадлежит пространству  $W_1[0, T]$ . Через  $W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  обозначим пространство, состоящее из функций класса  $C(\mathbb{R}_+; V^3)$  таких, что их ограничение на любой отрезок  $[0, T]$  принадлежит пространству  $W_2[0, T]$ . Введём также пространство  $\mathcal{X}$ , состоящее из всех тех элементов пространства  $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$ , для которых конечна норма  $\|\varphi\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t \geq 0} \|\varphi\|_{L_2(t, t+1; V^0)}$ .

**4. Слабая постановка задачи и аппроксимация.** Предполагаем, что  $a \in V^2$ ,  $f \in \mathcal{X}$ . Дадим определение слабого решения задачи (1)–(4) на конечном отрезке и на полуоси.

**Определение 8.** Слабым решением задачи (1)–(4) на отрезке  $[0, T]$  называется функция  $v \in W_1[0, T]$ , которая удовлетворяет при почти всех  $t \in [0, T]$  и для любого  $\varphi \in V^1$  тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \\ & + \kappa \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi \, dx + \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \end{aligned} \quad (6)$$

и начальному условию

$$v(0) = a. \quad (7)$$

Здесь и ниже символ “:” обозначает покомпонентное произведение матриц.

**Определение 9.** Слабым решением задачи (1)–(4) на полуоси  $\mathbb{R}_+$  будем называть функцию  $v \in W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  такую, что при каждом  $T > 0$  её ограничение на отрезок  $[0, T]$  является слабым решением задачи (1)–(4) на отрезке  $[0, T]$ .

Непрерывные вложения  $V^1 \subset V^0$  и  $V^2 \subset V^1$  соответствуют неравенствам

$$\|u\|_{V^0} \leq K_0 \|u\|_{V^1}, \quad u \in V^1, \quad \text{и} \quad \|u\|_{V^1} \leq K_1 \|u\|_{V^2}, \quad u \in V^2. \quad (8)$$

Определим постоянную

$$\alpha = \frac{\nu \kappa}{K_0^2 K_1^2 + 2\kappa K_1^2 + \kappa^2} = \frac{\nu \kappa}{K_2}, \quad (9)$$

где  $K_2 = K_0^2 K_1^2 + 2\kappa K_1^2 + \kappa^2$ .

Введём операторы при помощи следующих формул:

$$A : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \, dx \quad \text{для всех } u, \varphi \in V^1;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \quad \text{для всех } u \in L_4(\Omega)^n \text{ и } \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^2 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \quad \text{для всех } u \in V^2 \text{ и } \varphi \in V^1;$$

$$J : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi \, dx \quad \text{для всех } u, \varphi \in V^1.$$

Тогда вопрос о существовании слабых решений начально-краевой задачи (1)–(4) эквивалентен вопросу о существовании удовлетворяющего начальному условию (7) решения  $v \in W_1[0, T]$  операторного уравнения

$$(J + \kappa A)v' - B_1(v) + \kappa B_2(v) + \nu Av = f. \quad (10)$$

Рассмотрим также аппроксимационное операторное уравнение

$$(J + \kappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2)v' + \nu Av - B_1(v) + \kappa B_2(v) = f \quad (11)$$

с начальным условием  $v(0) = a$ ,  $a \in V^3$ . Здесь  $\varepsilon \in (0, 1]$ , а оператор  $A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$  определяется следующим образом:

$$\langle A^2 u, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla \varphi \, dx \quad \text{для всех } u \in V^3 \text{ и } \varphi \in V^1.$$

**Определение 10.** Решением уравнения (11) на отрезке  $[0, T]$  будем называть функцию  $v \in W_2[0, T]$ , для которой равенство (11) выполнено в  $L_2(0, T; V^{-1})$ . Решением уравнения (11) на полуоси  $\mathbb{R}_+$  назовём функцию  $v \in W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  такую, что при каждом  $T > 0$  её ограничение на отрезок  $[0, T]$  является решением уравнения (11) на этом отрезке.

Приведём нужную нам в дальнейшем теорему Обена–Дубинского–Симона [21].

**Теорема 4.** Пусть  $X \subset E \subset Y$  – банаховы пространства, причём вложение  $X \subset E$  вполне непрерывно, а вложение  $E \subset Y$  непрерывно. Пусть  $F \subset L_p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , и для любого  $f \in F$  его обобщённая производная в пространстве  $D'(0, T; Y)$  принадлежит пространству  $L_r(0, T; Y)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ . Пусть, кроме того, множество  $F$  ограничено в  $L_p(0, T; X)$ , а множество  $\{f' : f \in F\}$  ограничено в  $L_r(0, T; Y)$ . Тогда при  $p < \infty$  множество  $F$  относительно компактно в  $L_p(0, T; E)$ , а при  $p = \infty$  и  $r > 1$  множество  $F$  относительно компактно в  $C([0, T], E)$ .

Приведём необходимые нам свойства введённых выше операторов [11, 13].

**Лемма 3.** Справедливы следующие утверждения.

1. Оператор  $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$  непрерывен и имеет место оценка

$$\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leq \|u(t)\|_{V^1} \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (12)$$

2. Оператор  $B_1 : L_2(0, T; L_4(\Omega)^n) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$  непрерывен и имеет место оценка

$$\|B_1(u)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_1 \|u(t)\|_{L_4(\Omega)^n}^2 \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (13)$$

3. Оператор  $B_2 : L_2(0, T; V^2) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$  непрерывен и имеет место оценка

$$\|B_2(u)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_2 \|u(t)\|_{V^2}^2 \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (14)$$

4. Для любой функции  $u \in L_2(0, T; V^3)$  справедлива оценка

$$\|A^2 u(t)\|_{V^{-1}} \leq \|u(t)\|_{V^3} \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (15)$$

5. Для любой функции  $u \in L_2(0, T; V^1)$  справедливо оценка

$$\kappa \|v(t)\|_{V^1} \leq \|(\kappa A + J)v(t)\|_{V^{-1}} \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (16)$$

6. При каждом  $t \in [0, T]$  оператор  $(J + \kappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2) : L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$  является линейным и непрерывным, и для него имеет место оценка

$$\varepsilon e^{-\alpha t} \|u(t)\|_{V^3} \leq \|(J + \kappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2)u(t)\|_{V^{-1}} \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (17)$$

**5. Оценки решений.** Для доказательства существования равномерных аттракторов рассматриваемой модели нам потребуются оценки специального вида.

**Лемма 4.** Пусть  $v$  – решение уравнения (11) на отрезке  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , при некотором  $\varepsilon > 0$ . Тогда на любом отрезке  $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$  выполняется оценка

$$\kappa \|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)} \leq 1 + e^{-\alpha \tau} (K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \kappa \|v(0)\|_{V^3}^2) + 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \frac{e^{2\alpha}}{e^{\alpha} - 1} \|f\|_{\mathcal{X}}^2. \quad (18)$$

**Доказательство.** Скалярно умножив левую и правую части уравнения (11) на функцию  $\varphi = (J + \kappa A)v$ , получим

$$\begin{aligned} \langle (J + \kappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2)v', (J + \kappa A)v \rangle + \langle \nu Av, (J + \kappa A)v \rangle - \langle B_1(v), (J + \kappa Au) \rangle + \\ + \kappa \langle B_2(v), (J + \kappa A)v \rangle = \langle f, (J + \kappa A)v \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразуем первое слагаемое в (19) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle (J + \kappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2)v', (J + \kappa A)v \rangle &= \int_{\Omega} v'v \, dx - \kappa \int_{\Omega} v' \Delta v \, dx + \kappa \int_{\Omega} \nabla v' : \nabla v \, dx - \\ &- \kappa^2 \int_{\Omega} \nabla v' : \nabla \Delta v \, dx - \varepsilon e^{-\alpha t} \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla v \, dx + \varepsilon e^{-\alpha t} \kappa \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \Delta v \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \kappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon e^{-\alpha t} + \kappa^2}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon e^{-\alpha t} \kappa}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^3}^2. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \langle \nu Av, (J + \kappa A)v \rangle &= \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx - \nu \kappa \int_{\Omega} \nabla v : \nabla (\Delta v) \, dx = \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx + \nu \kappa \int_{\Omega} \Delta v \Delta v \, dx = \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + \nu \kappa \|v(t)\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Для двух последних слагаемых в левой части равенства (19) получаем

$$\begin{aligned} -\langle B_1(v), (J + \kappa A)v \rangle + \kappa \langle B_2(v), (J + \kappa A)v \rangle &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial (v - \kappa \Delta v)_j}{\partial x_i} \, dx + \\ + \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \Delta v_j \frac{\partial (v - \kappa \Delta v)_j}{\partial x_i} \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} (v - \kappa \Delta v)_j (v - \kappa \Delta v)_j \, dx = 0. \end{aligned}$$

Оценим правую часть равенства (19) сверху:

$$\begin{aligned} \langle f, (J + \kappa A)v \rangle &\leq \|f(t)\|_{V^0} \|v(t)\|_{V^0} + \kappa \|f(t)\|_{V^0} \|Av(t)\|_{V^0} \leq \\ &\leq \|v(t)\|_{V^2} (C_3 \|f(t)\|_{V^0} + \kappa \|f(t)\|_{V^0}) \leq \frac{\nu \kappa}{2} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \frac{(C_3^2 + \kappa^2)}{\nu \kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и умножая получившееся неравенство на 2, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + 2\kappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^1}^2 + (\varepsilon e^{-\alpha t} + \kappa^2) \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \kappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^3}^2 + 2\nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + \\ + \nu \kappa \|v(t)\|_{V^2}^2 \leq 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим на  $V^2$  вспомогательную норму  $\|u\|^2 = \|u\|_{V^0}^2 + 2\kappa \|u\|_{V^1}^2 + \kappa^2 \|u\|_{V^2}^2$ , эквивалентную норме  $\|\cdot\|_{V^2}$ . В самом деле, из неравенств (8) следует двойная оценка

$$\kappa^2 \|u\|_{V^2}^2 \leq \|u\|^2 \leq (K_0^2 K_1^2 + 2\kappa K_1^2 + \kappa^2) \|u\|_{V^2}^2. \quad (21)$$

В силу правой оценки в (21) и обозначения (9) получаем

$$\nu\kappa\|u(t)\|_{V^2}^2 \geq \frac{\nu\kappa}{(K_0^2 K_1^2 + 2\kappa K_1^2 + \kappa^2)} \|u(t)\|^2 = \alpha \|u(t)\|^2. \quad (22)$$

Вследствие неравенства (20), определения вспомогательной нормы, оценки (22) и того, что  $2\nu\|v(t)\|_{V^1}^2 \geq 0$ , справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^2}^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \kappa \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^3}^2 + \alpha\|v(t)\|^2 \leq 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Выполним подстановку  $v(t) = \bar{v}(t)e^{-\alpha t/2}$  в первом и последнем слагаемых левой части последнего неравенства:

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)e^{-\alpha t/2}\|^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^2}^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \kappa \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^3}^2 + \alpha\|\bar{v}(t)e^{-\alpha t/2}\|^2 \leq 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Приводя здесь подобные слагаемые, приходим к оценке

$$e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \left( \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^2}^2 + \kappa \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^3}^2 \right) \leq 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2,$$

умножив на  $e^{\alpha t}$  обе части которой, получаем

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon \left( \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^2}^2 + \kappa \frac{d}{dt}\|v(t)\|_{V^3}^2 \right) \leq 2e^{\alpha t} \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по  $t$  от 0 до  $\tau \in [0, T]$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \|\bar{v}(\tau)\|^2 + \varepsilon\|v(\tau)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\kappa\|v(\tau)\|_{V^3}^2 \leq \\ & \leq \|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\kappa\|v(0)\|_{V^3}^2 + 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \int_0^\tau e^{\alpha s} \|f(s)\|_{V^0}^2 ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как (см. [3, с. 186]) для любой скалярной функции  $\phi(s)$  и числа  $a > 1$  верно неравенство

$$\int_0^t a^s \phi(s) ds \leq \frac{a^{t+2}}{a-1} \sup_{s \in [0, t-1]} \int_s^{s+1} |\phi(\xi)| d\xi,$$

то вследствие (23) получаем

$$\begin{aligned} & \|\bar{v}(\tau)\|^2 + \varepsilon\|v(\tau)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\kappa\|v(\tau)\|_{V^3}^2 \leq \\ & \leq \|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\kappa\|v(0)\|_{V^3}^2 + 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \frac{e^{\alpha(\tau+2)}}{e^\alpha - 1} \sup_{s \in [0, \tau-1]} \int_s^{\tau+1} \|f(\xi)\|_{V^0}^2 d\xi. \end{aligned}$$

Умножим это неравенство на  $e^{-\alpha\tau}$  и, вспоминая, что  $\bar{v}(\tau) = e^{\alpha\tau/2}v(\tau)$  согласно использованной выше подстановке, найдём, что

$$\begin{aligned} & \|v(\tau)\|^2 + e^{-\alpha\tau} \varepsilon\|v(\tau)\|_{V^2}^2 + e^{-\alpha\tau} \varepsilon\kappa\|v(\tau)\|_{V^3}^2 \leq \\ & \leq e^{-\alpha\tau} (\|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\kappa\|v(0)\|_{V^3}^2) + 2 \frac{C_3^2 + \kappa^2}{\nu\kappa} \frac{e^{2\alpha}}{e^\alpha - 1} \|f\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned}$$

Оставляя в левой части полученного неравенства только первое слагаемое и учитывая определение вспомогательной нормы и оценку (21), будем иметь

$$\varkappa^2 \|v(\tau)\|_{V^2}^2 \leq e^{-\alpha\tau} (K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \varkappa \|v(0)\|_{V^3}^2) + 2 \frac{C_3^2 + \varkappa^2}{\nu \varkappa} \frac{e^{2\alpha}}{e^\alpha - 1} \|f\|_{\mathcal{X}}^2.$$

Отсюда, переходя к супремуму по отрезку  $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$ , получаем

$$\varkappa^2 \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^2)}^2 \leq e^{-\alpha\tau} (K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \varkappa \|v(0)\|_{V^3}^2) + 2 \frac{C_3^2 + \varkappa^2}{\nu \varkappa} \frac{e^{2\alpha}}{e^\alpha - 1} \|f\|_{\mathcal{X}}^2, \quad (24)$$

откуда, поскольку  $b \leq 1 + b^2$  для всех  $b \in \mathbb{R}$ , следует неравенство (18). Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть  $v$  – решение уравнения (11) на отрезке  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , при некотором  $\varepsilon > 0$ . Тогда для любого отрезка  $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$  имеет место неравенство

$$\varkappa \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} \leq C_8 (1 + e^{-\alpha\tau} (K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \varkappa \|v(0)\|_{V^3}^2) + \|f\|_{\mathcal{X}}^2). \quad (25)$$

**Доказательство.** Так как функция  $v$  удовлетворяет уравнению (11), то

$$\|(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2) v'(t)\|_{V^{-1}} = \|-\nu A v(t) + B_1(v)(t) - \varkappa B_2(v)(t) + f(t)\|_{V^{-1}}.$$

С учётом неравенств (12)–(14), а также непрерывности вложений  $V^2 \subset L_4(\Omega)^n$ ,  $V^2 \subset V^1$  и  $V^0 \subset V^{-1}$  получаем, что

$$\begin{aligned} & \|-\nu A v(t) + B_1(v)(t) - \varkappa B_2(v)(t) + f(t)\|_{V^{-1}} \leq \\ & \leq C_5 \nu \|v(t)\|_{V^2} + C_1 C_4^2 \|v(t)\|_{V^2}^2 + \varkappa C_2 \|v(t)\|_{V^2}^2 + C_6 \|f(t)\|_{V^0} \leq C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}). \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2) v'(t)\|_{V^{-1}} \leq C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}), \quad (26)$$

из которого в силу оценки (17) следует, что

$$\varepsilon e^{-\alpha t} \|v'(t)\|_{V^3} \leq C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (27)$$

Аналогично, используя неравенства (15), (26) и (27), имеем

$$\begin{aligned} & \|(J + \varkappa A) v'(t)\|_{V^{-1}} = \|-\varepsilon e^{-\alpha t} A^2 v'(t) - \nu A v(t) + B_1(v)(t) - \varkappa B_2(v)(t) + f(t)\|_{V^{-1}} \leq \\ & \leq \varepsilon e^{-\alpha t} \|v'(t)\|_{V^3} + C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}) \leq 2C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу оценки (16) получаем

$$\varkappa \|v'(t)\|_{V^1} \leq 2C_7 (1 + \|v(t)\|_{V^2}^2 + \|f(t)\|_{V^0}) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T]. \quad (28)$$

Возведём обе части неравенства (28) в квадрат и проинтегрируем по  $t$  от  $\tau$  до  $\tau + 1$ :

$$\varkappa^2 \int_{\tau}^{\tau+1} \|v'(s)\|_{V^1}^2 ds \leq 4C_7^2 \int_{\tau}^{\tau+1} (1 + \|v(s)\|_{V^2}^2 + \|f(s)\|_{V^0})^2 ds.$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень, в силу неравенства Минковского имеем

$$\varkappa \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} \leq 2C_7 \left( \int_{\tau}^{\tau+1} (1 + \|v(s)\|_{V^2}^2 + \|f(s)\|_{V^0})^2 ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2C_7 \left( \left( \int_{\tau}^{\tau+1} 1 \, ds \right)^{1/2} + \left( \int_{\tau}^{\tau+1} \|v(s)\|_{V^2}^4 \, ds \right)^{1/2} + \left( \int_{\tau}^{\tau+1} \|f(s)\|_{V^0}^2 \, ds \right)^{1/2} \right) \leq \\ &\leq 2C_7 (1 + \sup_{s \in [\tau, \tau+1]} \|v(s)\|_{V^2}^2 + \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^0)}) \leq 2C_7 (1 + \|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)}^2 + \|f\|_{\mathcal{X}}). \end{aligned}$$

Оценивая теперь  $\|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)}^2$  при помощи неравенства (24) и приводя подобные слагаемые, приходим к требуемому неравенству (25). Лемма доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $f \in \mathcal{X}$ ,  $a \in V^3$ . Тогда уравнение (11) имеет решение  $v \in W_2[0, T]$  на отрезке  $[0, T]$  ( $T > 0$ ) и на любом отрезке  $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)} \leq \\ &\leq C_9 (1 + e^{-\alpha\tau} (K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon \kappa \|v(0)\|_{V^3}^2) + \|f\|_{\mathcal{X}}^2). \end{aligned} \quad (29)$$

**Доказательство.** Существование решения уравнения (11) при  $f \in L_2(0, T; V^0)$ ,  $a \in V^3$  на отрезке  $[0, T]$  ( $T > 0$ ) доказано в работе [11]. Неравенство (29) непосредственно следует из оценок (18) и (25). Теорема доказана.

Нам также понадобятся следующие теоремы о существовании решений на полуоси.

**Теорема 6.** При любом  $a \in V^3$  задача (11), (7) имеет решение  $v \in W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$ .

**Теорема 7.** При любом  $a \in V^2$  задача (10), (7) имеет решение  $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ , удовлетворяющее при всех  $\tau \geq 0$  оценке

$$\|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)} \leq C_{10} (1 + e^{-\alpha\tau} K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2), \quad (30)$$

где  $C_{10} = C_9 (1 + \|f\|_{\mathcal{X}}^2)$ .

Доказательство разрешимости задач (11), (7) и (10), (7) на полуоси  $\mathbb{R}_+$  можно найти в работе [14]. Оценка (30) получается из неравенства (29) при предельном переходе в задаче (11), (7) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с учётом того, что для любой последовательности  $x_n$  слабо (\*-слабо) сходящейся к  $x$  в банаховом пространстве  $X$  имеет место неравенство  $\|x\|_X \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ .

**6. Равномерные аттракторы.** В качестве пространства символов  $\Sigma$  системы (1), (2) для фиксированного  $f \in \mathcal{X}$  выберем произвольное множество  $\Sigma \subset \mathcal{X}$ , содержащее функцию  $f$ , для элементов которого выполняется неравенство  $\|\sigma\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$ ,  $\sigma \in \Sigma$ . Отметим, что множество  $\Sigma$  может быть выбрано и другим образом. Например,  $\Sigma = \{f\}$  или  $\Sigma = \{T(t)f : t \geq 0\}$ , или  $\Sigma$  является замыканием множества  $\{T(t)f : t \geq 0\}$  в сильной (слабой) топологии пространства  $\mathcal{X}$ . Важно упомянуть, что в каждом из этих вариантов пространств символов будут получаться различные равномерные аттракторы. При этом выбранный нами случай носит наиболее общий характер.

Определим семейство траекторных пространств  $\{\mathcal{H}_{\sigma}^+ : \sigma \in \Sigma\}$ .

**Определение 11.** Пространство траекторий  $\mathcal{H}_{\sigma}^+$  системы (1), (2), соответствующее символу  $\sigma \in \Sigma$ , — это множество функций  $v$ , для которых выполняются следующие условия:

- (i)  $v \in L_{\infty}(\mathbb{R}_+; V^2)$ ,  $v' \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V^1)$ ;
- (ii) функция  $v$  удовлетворяет при почти всех  $t \in \mathbb{R}_+$  операторному равенству

$$(J + \kappa A)v' - B_1(v) + \kappa B_2(v) + \nu A v = \sigma; \quad (31)$$

- (iii) при всех  $\tau \geq 0$  для функции  $v$  справедлива оценка

$$\|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^2)} \leq C_{10} (1 + e^{-\alpha\tau} K_2 \|v\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}_+; V^2)}^2). \quad (32)$$

Чтобы данное определение пространства траекторий было корректным, нужно убедиться, что множество  $\mathcal{H}_{\sigma}^+$  непусто, и проверить включение  $\mathcal{H}_{\sigma}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; V^2)$ .

Включение  $\mathcal{H}_{\sigma}^+ \subset L_{\infty}(\mathbb{R}_+; V^2)$  непосредственно вытекает из определения пространства траекторий. Чтобы доказать непрерывность траекторий, воспользуемся теоремой 4 для тройки

пространств  $V^2 \subset V^1 \subset V^1$ . Из оценки (32) следует, что если  $v$  – некоторая траектория, то на произвольном отрезке  $[0, T]$  имеем  $\Pi_T v \in L_\infty(0, T; V^2)$ ,  $\Pi_T v' \in L_2(0, T; V^1)$ , поэтому из теоремы 4 следует, что  $\Pi_T v$  принадлежит пространству  $C([0, T], V^1)$ . Это верно при любом  $T$ , поэтому  $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1)$ , что и требовалось.

**Теорема 8.** Пусть  $\sigma \in \Sigma$  – некоторый символ. Тогда для любого  $a \in V^2$  существует траектория  $v \in \mathcal{H}_\sigma^+$ , для которой  $v(0) = a$ .

**Доказательство.** Теорема 7 утверждает, что для любых  $a \in V^2$  и  $f \in \mathcal{X}$  (в том числе и для  $\sigma$ ) существует решение  $v \in W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  задачи (10), (7). Таким образом, по определению пространства  $W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  функция  $v$  принадлежит  $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ ,  $v' \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1)$  (следовательно,  $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1)$ ) и удовлетворяет (31).

Осталось проверить выполнимость оценки (32). Так как  $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ , то по теореме 1 функция  $v$  принадлежит пространству  $C_w(\mathbb{R}_+; V^2)$ . Поэтому для любого  $t \in \mathbb{R}_+$  определено значение  $v(t) \in V^2$  и, следовательно,  $\|v(t)\|_{V^2} \leq \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)}$ . Отсюда, поскольку  $v$  удовлетворяет оценке (30), и следует оценка (32). Теорема доказана.

Из теоремы 8 вытекает, что пространство  $\mathcal{H}_\sigma^+$  не только непусто, но и “достаточно богато”, а именно, для любого  $a \in V^2$  существует выходящая из него траектория  $v \in \mathcal{H}_\sigma^+$ .

Перейдём к теоремам существования аттракторов.

**Теорема 9.** Существует минимальный равномерный траекторный аттрактор  $\mathcal{U}$  семейства траекторных пространств  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$  системы (1), (2).

**Доказательство.** В силу теоремы 2 для доказательства достаточно построить полуаттрактор семейства пространств  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$ .

Рассмотрим множество  $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множество  $P$  состоит из функций  $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ ;
- 2) для функций  $v$  при всех  $\tau \geq 0$  выполняется неравенство

$$\|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^2)} \leq (1 + K_2)C_{10}. \quad (33)$$

Так как при каждом  $h \geq 0$  оператор  $T(h) : C(\mathbb{R}_+; V^1) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V^1)$  непрерывен, то  $T(t)P \subset P$  при  $t \geq 0$ . Следовательно, множество  $P$  трансляционно инвариантно.

Покажем, что  $P$  относительно компактно в  $C(\mathbb{R}_+; V^1)$ . В силу леммы 1 достаточно показать, что множество  $\Pi_T P$  относительно компактно в  $C([0, T], V^1)$  для любого  $T > 0$ . Из неравенства (33) вытекает, что множество  $\Pi_T P$  ограничено в  $L_\infty(0, T; V^2)$  при любом  $T > 0$ , а множество  $\{v' : v \in \Pi_T P\}$  ограничено в  $L_2(0, T; V^1)$ . Вследствие теоремы 4 получаем, что  $\Pi_T P$  относительно компактно в  $C([0, T], V^1)$ . Так как  $T$  произвольно, то по лемме 1 множество  $P$  относительно компактно в  $C(\mathbb{R}_+; V^1)$ .

Покажем, что  $P$  является равномерно поглощающим множеством. Пусть множество  $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$  ограничено в  $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$  и  $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)} \leq R$  для  $v \in B$ . Пусть число  $t_B \geq 0$  такое, что  $R^2 e^{-\alpha t_B} \leq 1$ . Согласно оценке (32) для  $h \geq t_B$  и  $\tau \geq 0$  имеем

$$\begin{aligned} \|T(h)v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|T(h)v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^2)} &= \|v'\|_{L_2(\tau+h, \tau+h+1; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(\tau+h, \tau+h+1; V^2)} \leq \\ &\leq C_{10}(1 + e^{-\alpha(\tau+h)} K_2 \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)}^2) \leq C_{10}(1 + K_2 R^2 e^{-\alpha h} e^{-\alpha \tau}) \leq C_{10}(1 + K_2). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (33) выполняется для функции  $T(h)v$  при всех  $\tau \geq 0$ . Следовательно,  $T(h)B \subset P$  при  $h \geq t_B$  и  $P$  – поглощающее множество.

Согласно лемме 2 замыкание  $\bar{P}$  множества  $P$  в пространстве  $C(\mathbb{R}_+; V^1)$  является траекторным полуаттрактором объединённого пространства траекторий  $\mathcal{H}_\Sigma^+$ , т.е. семейства  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$ . По теореме 2 отсюда следует существование минимального равномерного траекторного аттрактора  $\mathcal{U}$ . Теорема доказана.

**Теорема 10.** Существует равномерный глобальный аттрактор  $\mathcal{A}$  семейства траекторных пространств  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$  системы (1), (2).

**Доказательство.** По теореме 9 существует минимальный равномерный траекторный аттрактор  $\mathcal{U}$  семейства траекторных пространств  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$  системы (1), (2). Тогда в силу

теоремы 3 существует равномерный глобальный аттрактор  $\mathcal{A}$  семейства траекторных пространств  $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$  системы (1), (2). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00051) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZGU-2020-0035).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 9. № 76. P. 913–964.
2. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 325. P. 438–458.
3. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin, 2008.
4. *Звягин В.Г., Кондратьев С.К.* Аттракторы уравнений неьютоновской гидродинамики // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 5 (419). С. 81–156.
5. *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809–812.
6. *Амфилохий В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С.* Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленинград. ордена Ленина кораблестроительного ин-та. 1975. Т. 96. С. 3–9.
7. *Амфилохий В.Б., Павловский В.А.* Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах // Тр. Ленинград. ордена Ленина кораблестроительного ин-та. 1976. Т. 104. С. 3–5.
8. *Осколков А.П.* О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 145–160.
9. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136.
10. *Осколков А.П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 128–157.
11. *Турбин М.В., Устюжанинова А.С.* Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров // Изв. вузов. Математика. 2019. № 8. С. 62–78.
12. *Плотников П.И., Турбин М.В., Устюжанинова А.С.* Теорема существования слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для модифицированной модели Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров // Докл. РАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 133–136.
13. *Ustiuzhaninova A., Turbin M.* Feedback control problem for modified Kelvin–Voigt model // J. of Dynam. and Contr. Systems. 2021. DOI: 10.1007/s10883-021-09539-0.
14. *Устюжанинова А.С., Турбин М.В.* Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24. № 1. С. 126–138.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 2004.
16. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
17. *Солонников В.А.* Оценка тензоров Грина для некоторых граничных задач // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 5. С. 988–991.
18. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
19. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.
20. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
21. *Simon J.* Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$  // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. № 146. С. 65–96.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.

После доработки 11.05.2021 г.

Принята к публикации 08.06.2021 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА НЕЙМАНА–ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2021 г. Р. С. Хайруллин

Для уравнения  $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u = 0$  с параметром  $\alpha \leq -1/2$ , заданного в смешанной области, лежащей в правой полуплоскости и ограниченной полуосью  $y \geq 0$  и характеристикой  $x = 2\sqrt{-y}$ , рассматривается задача Неймана–Трикоми, в которой на полуоси задаются значения нормальной производной искомой функции, на характеристике – значения самой функции, а на особой линии – условия склеивания. Решение ищется в классе функций, имеющих на бесконечности особенности порядка не выше заданного. Получены достаточные условия на входные данные задачи, при выполнении которых она однозначно разрешима. Доказательство проводится методом интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121090065

**1. Постановка задачи.** Начало исследованиям краевых задач для уравнений смешанного типа положено работой Ф. Трикоми [1]. Позднее подобные задачи широко изучались для разных уравнений, главным образом для уравнений со слабым вырождением. Для уравнений же с сильным вырождением такие задачи исследованы гораздо хуже: для них имеются только отдельные разрозненные результаты (см., например, [2–15]).

В работах автора [12; 15, с. 117] рассматривалась задача Трикоми для уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0, \quad \alpha \leq -1/2, \quad (1)$$

в смешанной области  $D$ , эллиптическая часть которой  $D_1$  совпадает с первым квадрантом, а гиперболическая часть  $D_2$  представляет собой криволинейный угол, ограниченный характеристиками  $x - 2\sqrt{-y} = 0$  и  $y = 0$ .

В данной статье для уравнения (1) в указанной области исследуется задача Неймана–Трикоми.

Через  $n$  и  $m$  обозначим натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$-1/2 < \alpha + n = \alpha_0 \leq 1/2 \quad \text{и} \quad 0 < 2\alpha + m - 1 = \delta \leq 1.$$

Очевидно, что  $m = 2n + 2$ ,  $\delta = 2\alpha_0 + 1$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и  $m = 2n + 1$ ,  $\delta = 2\alpha_0$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ .

**Задача NT $_{\alpha}$ .** В области  $D$  найти функцию  $u(x, y)$  со свойствами:

1) функция  $u(x, y)$  принадлежит классу

$$C(D \cup \{(0, y) : y > 0\} \cup \{(x, y) : x - 2\sqrt{-y} = 0\}) \cap C^1(D_1 \cup \{(0, y) : y > 0\});$$

2) для  $(x, y) \in D_1$  имеют место соотношения

$$u = o(R^{2-2\alpha}), \quad u_x = o(R^{1-2\alpha}), \quad u_y = o(R^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

где  $R^2 = x^2 + 4y$ ;

3) функция  $u(x, y)$  принадлежит классу  $C^2(D_1 \cup D_2)$  и удовлетворяет уравнению (1) в  $D_1 \cup D_2$ ;

4) существуют пределы ( $i = 1, 2$ )

$$\nu_i(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x, y) \in D_i}} |y|^\alpha (u(x, y) - A_\alpha(x, y, \tau))_y, \quad x > 0, \quad (3)$$

и выполняется условие склеивания

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad x > 0, \quad (4)$$

здесь принято обозначение

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \geq 0, \quad (5)$$

а функция  $A_\alpha(x, y, \tau)$  определяется формулами

$$A_\alpha(x, y, \tau) = \sum_{s=1}^{[m/2]} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s y^s}{(\alpha)_s s!}, \quad \alpha \neq -n,$$

$$A_\alpha(x, y, \tau) = \sum_{s=1}^n \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s y^s}{(\alpha)_s s!} - \frac{\tau^{(2n+2)}(x)y^{n+1}}{n!(n+1)!} \left( \ln |y| - \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{s} \right), \quad \alpha = -n,$$

$[\cdot]$  – целая часть числа,  $(\alpha)_s$  – символ Похгаммера;

5) функция  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$u_x(0, y) = \varphi(y), \quad y > 0, \quad (6)$$

$$u(x, y) \big|_{x=2\sqrt{-y}=0} = \omega(x), \quad x \geq 0, \quad (7)$$

где  $\varphi(y)$  и  $\omega(x)$  – заданные функции.

На функции  $\varphi(y)$  и  $\omega(x)$  наложим следующие условия.

**Условие 1.** Функция  $\varphi(y)$  принадлежит классу  $C[0, +\infty)$  и имеет представления

$$\varphi(y) = \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\varphi^{\{s\}}(0)}{s!} y^s + \varphi_0(y) y^\epsilon \quad \text{при } y \rightarrow 0,$$

$$\varphi(y) = \varphi_\infty(y) y^\chi \quad \text{при } y \rightarrow +\infty,$$

где  $\epsilon > (-1 - 2\alpha)/4$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и  $\epsilon > (-2\alpha - n)/2$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ ;  $\chi < -\alpha/2$ , если  $n$  – чётное, и  $\chi < (1 - \delta + n)/2$ , если  $n$  – нечётное;  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_\infty(x)$  – ограниченные функции;  $\varphi^{\{s\}}(0)$  – разностные производные порядка  $s$  в точке 0.

**Условие 2.** Функция  $\omega(x)$  принадлежит классу  $C^n[0, +\infty) \cap C^{n+1, \gamma}(0, +\infty)$ ,  $\gamma > 1/2 - \alpha_0$ ; её производная  $\omega^{(n+1)}(x)$  может иметь особенность при  $x = 0$  только порядка ниже  $\min(1/2 + \alpha_0, \delta)$ , и при  $x \rightarrow +\infty$  справедливо представление

$$\omega^{(n+1)}(x) = \omega_\infty(x) x^\beta,$$

где  $\beta < -\alpha_0$ , если  $n$  – чётное, и  $\beta < 1 - \delta$ , если  $n$  – нечётное,  $\omega_\infty(x)$  – ограниченная функция.

**Условие 3.** Выполняются условия сопряжения

$$(-1)^s \varphi^{\{s\}}(0) (\alpha - 1/2)_{2s+1} = \omega^{(2s+1)}(0) (\alpha - 1/2)_{s+1}, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}.$$

Обозначим каждую из частей равенства (4) через  $\nu(x)$  и потребуем, чтобы функции  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  удовлетворяли следующим условиям.

**Условие 4.** Функция  $\tau(x)$  принадлежит классу  $C^n[0, +\infty) \cap C^{m, \lambda}(0, +\infty)$ ,  $\lambda > 1 - \delta$ ; её производная  $\tau^{(n+1)}(x)$  может иметь при  $x = 0$  особенность только порядка ниже  $\min(1/2 + \alpha_0, \delta)$ , и при  $x \rightarrow +\infty$  справедливо представление

$$\tau^{(n+1)}(x) = \tau_\infty(x) x^\theta,$$

где  $\theta < -\alpha_0$ , если  $n$  – чётное, и  $\theta < 1 - \delta$ , если  $n$  – нечётное,  $\tau_\infty(x)$  – ограниченная функция.

**Условие 5.** Функция  $\nu(x)$  принадлежит классу  $C(0, +\infty)$  и может иметь особенность при  $x = 0$  только порядка ниже  $3/2 - \alpha$ .

Задачу  $NT_\alpha$  исследуем методом интегральных уравнений. При этом важную роль играют основные соотношения между функциями  $\tau$  и  $\nu$ , полученные из эллиптической  $D_1$  и гиперболической  $D_2$  подобластей.

**2. Основное соотношение из гиперболической подобласти.** В гиперболической подобласти  $D_2$  задача совпадает с задачей Трикоми. Для вывода соотношения используется представление решения задачи Коши с начальными условиями вида (5) и (3), из которого с учётом краевого условия (7) вытекает справедливость следующих утверждений (см., например, [15, с. 25, 26, 157]).

**Теорема 1.** Основное соотношение между  $\tau$  и  $\nu$  из гиперболической подобласти имеет вид

$$\Gamma(1 - \alpha)\nu(x) = (-1)^n \Gamma(\alpha) \tau^{(n)}(x) - \Omega_\alpha(x, \omega^{(n+1)}) \quad \text{при } \alpha_0 = 1/2; \quad (8)$$

$$\Gamma(1 - \alpha)\nu(x) = \frac{2}{n!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \int_0^x \tau^{(n+1)}(\xi) \ln(x - \xi) d\xi - \Omega_\alpha(x, \omega^{(n+1)}) \quad \text{при } \alpha_0 = 0; \quad (9)$$

$$\Gamma(1 - \alpha)\nu(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\delta)} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \int_0^x \tau^{(n+1)}(\sigma) (x - \sigma)^{\delta-1} d\sigma - \Omega_\alpha(x, \omega^{(n+1)}) \quad \text{при } \delta < 1, \quad (10)$$

где

$$\Omega_\alpha(x, \omega^{(n+1)}) = \frac{(-1)^n 2^{1-2\alpha-n} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha_0 + 1/2)} x^{\alpha-1/2} \frac{d}{dx} \int_0^x \omega^{(n+1)}(\sigma/2) (x - \sigma)^{\alpha_0-1/2} d\sigma.$$

**Теорема 2.** Имеют место равенства

$$\tau^{(s)}(0) = \omega^{(s)}(0) 2^{-s} (2\alpha - 1)_s / (\alpha - 1/2)_s, \quad s = \overline{0, n}.$$

**Лемма 1.** Пусть функция  $\omega(x)$  удовлетворяет условию 2. Тогда функция  $\Omega_\alpha(x, \omega^{(n+1)})$  может иметь при  $x = 0$  особенность только порядка ниже  $\min\{3/2 - \alpha, m - n\}$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  имеет нуль порядка выше  $1 - \alpha$ , если  $n$  – чётное, и порядка выше  $m - n - 1$ , если  $n$  – нечётное.

**3. Смешанная задача для первого квадранта.** Для вывода основного соотношения из эллиптической подобласти воспользуемся решением смешанной задачи для уравнения (1) в первом квадранте с краевыми условиями (5), (6) в классе функций, удовлетворяющих на бесконечности условиям (2). Его построим методом функции Грина. Фундаментальное решение уравнения (1) найдено в работе [4], оно имеет вид

$$q(x, y; x_0, y_0) = k y_0^{1-\alpha} (r_1^2)^{\alpha-3/2} F\left(\frac{3}{2} - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha, 3 - 2\alpha, 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right), \quad (11)$$

где

$$r^2 = (x - x_0)^2 + 4(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})^2, \quad r_1^2 = (x - x_0)^2 + 4(\sqrt{y} + \sqrt{y_0})^2, \quad k = \Gamma^2(3/2 - \alpha) 4^{2-2\alpha} / \pi \Gamma(3 - 2\alpha).$$

Функция (11) по переменным  $(x, y)$  является решением уравнения

$$v_{xx} + y v_{yy} + (2 - \alpha) v_y = 0, \quad (12)$$

а по переменным  $(x_0, y_0)$  – решением уравнения (1), при  $(x, y) = (x_0, y_0)$  она имеет логарифмическую особенность.

**Определение.** Функция  $G(x, y; x_0, y_0)$  называется *функцией Грина* смешанной задачи (2), (5), (6) для уравнения (1), если она обладает следующими свойствами:

1) для неё имеет место представление

$$G(x, y; x_0, y_0) = q(x, y; x_0, y_0) + u_0(x, y; x_0, y_0),$$

где  $u_0(x, y; x_0, y_0)$  – регулярное решение уравнения (1) по переменным  $(x_0, y_0)$  и уравнения (12) по переменным  $(x, y)$  при  $(x, y) \in D_1$ ,  $(x_0, y_0) \in D_1$ ;

2) она удовлетворяет краевым условиям  $((x_0, y_0) \in D_1)$

$$|G(x, 0; x_0, y_0)| < +\infty,$$

$$G_x(x, y; x_0, y_0) = O(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0, \quad y > 0;$$

3) для неё выполняются соотношения на бесконечности

$$G = O(R^{2\alpha-3}), \quad G_x = O(R^{2\alpha-4}), \quad G_y = O(R^{2\alpha-5}) \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty,$$

где  $R^2 = x^2 + 4y$ ,  $(x, y) \in D_1$ ,  $(x_0, y_0) \in D_1$ .

Методом точечных источников доказывается

**Лемма 2.** *Функция Грина имеет вид*

$$G(x, y; x_0, y_0) = q(x, y; x_0, y_0) + q(-x, y; x_0, y_0).$$

Имеет место

**Теорема 3.** *Смешанная задача (1), (2), (5), (6) имеет единственное решение*

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(3/2 - \alpha)y^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \alpha)4^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \tau(\xi) \left( ((\xi - x)^2 + 4y)^{\alpha-3/2} + ((\xi + x)^2 + 4y)^{\alpha-3/2} \right) d\xi - \\ & - \frac{2\Gamma(3/2 - \alpha)y^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2 - \alpha)4^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\eta)}{(x^2 + 4(\sqrt{\eta} + \sqrt{y})^2)^{3/2-\alpha}} \times \\ & \times F\left(\frac{3}{2} - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha, 3 - 2\alpha, \frac{16\sqrt{\eta y}}{x^2 + 4(\sqrt{\eta} + \sqrt{y})^2}\right) d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

**4. Основное соотношение из эллиптической подобласти.** Воспользовавшись формулой (13), получим основное соотношение между функциями  $\tau$  и  $\nu$  из эллиптической подобласти  $D_1$ . Зафиксируем какое-либо  $x > 0$  и выберем  $a$  из условия  $a > x$ . Затем, подставив функцию (13) в предельное соотношение (3), придём к следующему утверждению.

**Теорема 4.** *Основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид*

$$\begin{aligned} \Gamma(1 - \alpha)\nu(x) = & \frac{\Gamma(3/2 - \alpha)(1 - \alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}(2\alpha - 2)_{m+1}} \left( \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \int_0^x \tau^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^{\delta-1} d\xi - \right. \\ & - (-1)^m \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \int_x^a \tau^{(n+1)}(\xi)(\xi - x)^{\delta-1} d\xi + (-1)^m(\delta - 1) \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} \int_a^{+\infty} \tau^{(n+1)}(\xi)(\xi - x)^{\delta-2} d\xi - \\ & \left. - (-1)^n(\delta - 1) \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} \int_0^{+\infty} \tau^{(n+1)}(\xi)(\xi + x)^{\delta-2} d\xi \right) - \Phi_\alpha(x, \varphi) \quad \text{при} \quad \delta < 1, \quad (14) \\ \Gamma(1 - \alpha)\nu(x) = & \frac{\Gamma(3/2 - \alpha)(1 - \alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}m!} \left( (-1)^m \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \int_0^x \tau^{(n+1)}(\xi) \ln(x - \xi) d\xi - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \int_x^a \tau^{(n+1)}(\xi) \ln(\xi - x) d\xi + \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} \int_a^{+\infty} \frac{\tau^{(n+1)}(\xi) d\xi}{\xi - x} - \\
& - (-1)^{m-n} \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{(n+1)}(\xi) d\xi}{\xi + x} \Big) - \Phi_\alpha(x, \varphi) \quad \text{при } \delta = 1,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\Phi_\alpha(x, \varphi) = \frac{2\Gamma(3/2 - \alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\eta) d\eta}{(x^2 + 4\eta)^{3/2-\alpha}} - \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{2\Gamma(1/2 - \alpha - s) \varphi^{\{s\}}(0) x^{2\alpha+2s-1}}{\sqrt{\pi}4^{\alpha+s}}.$$

**Теорема 5.** *Имеют место равенства*

$$\tau^{(2s+1)}(0) = (-1)^s (\alpha)_s \varphi^{\{s\}}(0), \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}.$$

Рассмотрим поведение функции  $\Phi_\alpha(x, \varphi)$  в концевых точках.

Справедлива

**Лемма 3.** *Функция  $\Phi_\alpha(x, \varphi)$  может иметь при  $x = 0$  особенность только порядка ниже  $3/2 - \alpha$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и порядка ниже  $n+1$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  имеет нуль порядка выше  $1 - \alpha$ , если  $n$  – чётное, и порядка выше  $m - n - 1$ , если  $n$  – нечётное.*

**5. Вывод интегрального уравнения и решение задачи.** Перейдём к выводу интегрального уравнения и его исследованию. Из соотношений (8)–(10), (14), (15) получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) \mu(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\xi - x} - \frac{(-1)^{m-n}}{\xi + x} \right) \mu(\xi) d\xi = F'_\alpha(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s x^s, \tag{16}$$

где  $c_s$  – произвольные постоянные,

$$\mu(x) = x^{\delta-1} \tau^{(n+1)}(x), \tag{17}$$

$$F_\alpha(x) = \frac{(-1)^{m-n-1} \Gamma(1 - \alpha)}{\pi(m - n - 2)!} \int_x^{+\infty} (\Omega_\alpha(\sigma, \omega^{(n+1)}) - \Phi_\alpha(\sigma, \varphi)) (\sigma - x)^{m-n-2} d\sigma, \tag{18}$$

$$F'_\alpha(x) = \frac{x^{\delta-1}}{\Gamma(1 - \delta)} \int_0^x F_\alpha(\sigma) (x - \sigma)^{-\delta} d\sigma \quad \text{при } \delta < 1, \tag{19}$$

$$F'_\alpha(x) = F_\alpha(x) \quad \text{при } \delta = 1. \tag{20}$$

Исследуем поведение функций  $\mu(x)$  и  $F'_\alpha(x)$  в концевых точках.

**Лемма 4.** *Функция  $F'_\alpha(x)$  может иметь при  $x = 0$  особенность только порядка ниже  $1/2 - \alpha_0$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и порядка ниже 1, если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  имеет нуль, если  $n$  – нечётное, и нуль порядка выше  $1 - \delta + \alpha_0$ , если  $n$  – чётное.*

**Доказательство** следует из лемм 1, 3 с учётом обозначений (18)–(20).

Из равенства (17) следует, что функция  $\mu(x)$  должна иметь аналогичное условию 4 поведение в соответствующих точках.

Приступим к решению интегрального уравнения (16). Пусть  $m - n$  нечётное. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) \mu(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\xi - x} + \frac{1}{\xi + x} \right) \mu(\xi) d\xi = F'_\alpha(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s x^s.$$

Выполним замену

$$\eta = x^2, \quad \sigma = \xi^2 \quad (21)$$

и обозначим

$$\rho(\eta) = \mu(x), \quad g(\eta) = F'_\alpha(x).$$

В результате уравнение запишется следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\rho(\eta) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{\sigma - \eta} = g(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s \eta^{s/2}. \quad (22)$$

Для разрешимости уравнения (22) его правая часть должна обращаться на бесконечности в нуль [16, с. 491]. Поэтому все  $c_s$  должны равняться нулю.

Выполняя замену [16, с. 490]

$$\eta = \frac{t}{1-t}, \quad \sigma = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \rho(\eta) = v(t)(1-t), \quad g(\eta) = w(t)(1-t), \quad (23)$$

приведём уравнение (22) к виду

$$v(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = w(t). \quad (24)$$

Функция  $w(t)$  может иметь особенность при  $t = 0$  только порядка ниже  $1/4 - \alpha_0/2$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и порядка ниже  $1/2$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ , а при  $t = 1$  — ниже 1, если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и ниже  $1/2 + \alpha_0/2$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ . Аналогичные особенности допускаются у функции  $v(t)$ .

Отметим, что решения уравнения (24), неограниченные при  $t = 0$ , имеют в этой точке особенность порядка  $(1 - \alpha_0)/2$ , а решения, неограниченные при  $t = 1$ , имеют в этой точке особенность порядка  $(1 + \alpha_0)/2$ . Следовательно, мы должны использовать формулу решения, ограниченного при  $t = 0$  в случае  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$  и ограниченного при  $t = 1$  в случае  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ . Эти решения единственны [15, с. 16].

Пусть  $m - n$  — чётное. Тогда уравнение (16) примет вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\mu(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi + x}\right) \mu(\xi) d\xi = F'_\alpha(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s x^s.$$

Снова выполним замену. Для этого воспользуемся формулами (21) и обозначениями

$$\rho(\eta) = \frac{\mu(x)}{x}, \quad g(\eta) = \frac{F'_\alpha(x)}{x}.$$

В результате получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\rho(\eta) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{\sigma - \eta} = g(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s \eta^{(s-1)/2}.$$

В данном случае от суммы остаётся только одно слагаемое — при  $s = 0$ . После замены (23) уравнение запишется следующим образом:

$$v(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = w(t) + \frac{c_0}{\sqrt{t(1-t)}}. \quad (25)$$

Функция  $w(t)$  может иметь при  $t = 0$  особенность только порядка ниже  $3/4 - \alpha_0/2$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и порядка ниже 1, если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ , а при  $t = 1$  – ниже  $1/2 + \alpha_0/2$ , если  $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ , и ниже  $1/2$ , если  $0 < \alpha_0 \leq 1/2$ . Аналогичные особенности допускаются у функции  $v(t)$ . Следовательно, необходимо использовать формулу решения, ограниченного при  $t = 1$ . Причём  $c_0 = 0$ , так как в противном случае у функции  $v(t)$  при  $t = 1$  получается особенность порядка  $1/2$ , чего быть не может. Поэтому найденное решение уравнения (25) единственно.

Далее решение исходной задачи строится стандартным образом.

Итак, доказана

**Теорема 6.** Задача  $NT_\alpha$  при выполнении условий 1–3 имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условиям 4, 5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tricomi F.* Sulle equazione lineari alle derivate di secondo ordine, di tipo misto // *Rendiconti, Atti dell'Accad. Naz. del Lincei*. 1923. Ser. 5. V. 14. P. 134–247.
2. *Кароль И.Л.* К теории уравнений смешанного типа // *Докл. АН СССР*. 1953. Т. 88. № 3. С. 397–400.
3. *Кароль И.Л.* Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // *Докл. АН СССР*. 1955. Т. 101. № 5. С. 793–796.
4. *Кароль И.Л.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа // *Вестн. Ленинград. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия*. 1956. Т. 1. № 1. С. 177–181.
5. *Кароль И.Л.* К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // *Мат. сб.* 1956. Т. 38 (80). № 3. С. 261–283.
6. *Исамухамедов С.С.* О краевой задаче типа Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго рода // *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*. 1975. № 5. С. 28–37.
7. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // *Динамика сплошной среды*. 1976. Вып. 26. С. 134–141.
8. *Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // *Сердика Българ. мат. списание*. 1977 (1978). Т. 3. № 3. С. 181–188.
9. *Крикунов Ю.М.* Аналог задачи Трикоми для уравнения  $u_{xx} + uu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$  // *Изв. вузов. Математика*. 1982. № 1. С. 26–32.
10. *Салтыкова Н.М., Смирнов М.М.* Об одной краевой задаче типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области // *Вестн. Ленинград. гос. ун-та*. 1985. № 1. С. 43–49.
11. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области // *Дифференц. уравнения*. 1990. Т. 26. № 8. С. 1396–1407.
12. *Хайруллин Р.С.* К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // *Сиб. мат. журн.* 1994. Т. 35. № 4. С. 927–936.
13. *Хайруллин Р.С.* Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода // *Изв. вузов. Математика*. 2002. № 4. С. 59–63.
14. *Хайруллин Р.С.* О задаче типа Геллерстедта для уравнения второго рода // *Изв. вузов. Математика*. 2005. № 10. С. 72–77.
15. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения второго рода в неограниченных областях. Казань, 2016.
16. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Казанский государственный  
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 11.02.2020 г.  
После доработки 05.05.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

## ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

© 2021 г. С. Н. Асхабов

Получены точные априорные оценки решения интегрального уравнения с суммарным ядром, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Используя эти оценки, методом весовых метрик доказана глобальная теорема существования и единственности решения в конусе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений, и найдена оценка скорости сходимости этих приближений к точному решению. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064121090077

**Введение.** Среди “именных” линейных интегральных уравнений хорошо известно уравнение Фокса. Это уравнение относится к классу уравнений с суммарным ядром, т.е. ядром, зависящим от суммы независимой переменной и переменной интегрирования, и его решение в замкнутой форме с помощью преобразования Фурье приведено в монографии [1, с. 421]. Уравнения с суммарным ядром приводят [2, с. 84] после применения преобразования Фурье к так называемым краевым задачам со сдвигом, а в некоторых частных случаях заменой переменных сводят к линейным интегральным уравнениям типа свёртки [3, с. 19]. Как отмечено в работе [4], линейные интегральные уравнения с суммарным ядром, в отличие от соответствующих уравнений с разностным ядром, изучены сравнительно мало.

Нелинейные интегральные уравнения с суммарным ядром тесно связаны с уравнениями типа свёртки, и их теория в настоящее время находится в стадии становления. Опубликовано не так много работ, в которых рассматриваются нелинейные интегральные уравнения с чисто суммарными ядрами (см., например, справочник [3, пп. 5 и 6] и приведённый в нём список литературы), при этом наиболее полно изучено уравнение Чандрасекхара с суммарным ядром и отрицательной степенной нелинейностью, возникающее в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением (см., например, [5, 6]).

Отметим, что имеющиеся к настоящему времени теория линейных и теория нелинейных интегральных уравнений с суммарным ядром отличаются друг от друга как по методам исследования, так и по характеру полученных результатов. В частности, нелинейные однородные уравнения могут иметь нетривиальные решения, в то время как соответствующие линейные уравнения имеют лишь нулевое (тривиальное) решение [7, с. 211]. Известно [7, с. 160] также, что исследование возникающих при решении некоторых задач гидроаэродинамики, популяционной генетики и других областей естествознания нелинейных интегральных уравнений типа свёртки с симметричными переменными пределами интегрирования приводит к уравнениям с суммарными ядрами и системам нелинейных вольтерровских уравнений типа свёртки (подробнее см. [7–9]). При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные непрерывные решения таких уравнений.

В данной работе в классе

$$Q_+ = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$$

мы изучаем нелинейное интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x+t)u(t) dt + f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

где  $u(x)$  – искомое решение,  $\alpha$  – параметр, а ядро  $k(x)$  и неоднородность  $f(x)$  удовлетворяют условиям:

$$k \in C[0, \infty), \quad k(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } \int_0^\delta k(t) dt > 0 \text{ для любого } \delta > 0, \quad (2)$$

$$f \in C[0, \infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } f(0) \geq 0. \quad (3)$$

Отметим, что класс  $Q_+$  представляет собой конус в линейном пространстве  $C[0, \infty)$ , поэтому в дальнейшем иногда будем называть его конусом  $Q_+$ .

Цель данной работы доказать, что уравнение (1) имеет единственное решение в классе  $Q_+$ , а также показать, что это решение можно найти методом последовательных приближений и получить оценку скорости сходимости этих приближений к точному решению. Исследование основано на методе весовых метрик (аналог метода Белицкого [10, с. 218]), позволяющем установить глобальную теорему существования и единственности решения уравнения (1) в классе  $Q_+$ . При этом важную роль играют полученные в работе точные априорные оценки решения уравнения (1), а также то, что при построении метрики, в отличие от случая соответствующих уравнений с разностным ядром, в качестве весовой функции берётся не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1) в классе  $Q_+$ .

**1. Свойства неотрицательных решений.** При доказательстве различных неравенств далее будут использоваться следующие две простые леммы.

**Лемма 1.** Если  $a(x)$  и  $b(x)$  – неотрицательные неубывающие функции, определённые на полуоси  $[0, \infty)$ , то при всех  $x \geq 0$  имеет место неравенство

$$\int_0^x a(x+t)b(t) dt \leq \int_0^x (2a(2t) - a(t))b(t) dt. \quad (4)$$

**Доказательство.** Имеем

$$\int_0^x a(x+t)b(t) dt = \int_x^{2x} a(t)b(t-x) dt \leq \int_x^{2x} a(t)b\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

в силу очевидного неравенства  $t-x \leq t/2$ , если  $t \leq 2x$ , и того, что функция  $b$  не убывает, а функция  $a$  неотрицательна. Поэтому неравенство (4) является следствием неравенства

$$c(x) \equiv \int_x^{2x} a(t)b\left(\frac{t}{2}\right) dt - \int_0^x (2a(2t) - a(t))b(t) dt \leq 0 \quad \text{для любого } x \geq 0.$$

Но последнее неравенство верно, поскольку для почти всех по мере Лебега  $x \in [0, \infty)$  получаем оценку

$$c'(x) = a(2x)b(x) - a(x)b\left(\frac{x}{2}\right) - (2a(2x) - a(x))b(x) = (a(x) - a(2x))b(x) - a(x)b\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$$

вследствие того, что функция  $a$  не убывает, а функции  $a$  и  $b$  неотрицательны. Следовательно, функция  $c$  не возрастает, а значит,  $c(x) \leq c(0) = 0$ . Лемма доказана.

Заметим, что если  $a(x) = \text{const}$  или  $b(x) = \text{const}$ , то неравенство (4) обращается в равенство. В частности, справедлива

**Лемма 2.** Если функция  $a(x)$  локально интегрируема на  $[0, \infty)$ , то

$$\int_0^x a(x+t) dt = \int_0^x (2a(2t) - a(t)) dt \quad \text{при всех } x \geq 0. \quad (5)$$

**Доказательство.** Запишем доказываемое равенство в виде

$$\int_0^x a(x+t) dt = 2 \int_0^x a(2t) dt - \int_0^x a(s) ds. \quad (6)$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (6), достаточно сделать замены  $x+t=s$  в левой части и  $2t=s$  в первом интеграле правой части этого равенства. В результате получим очевидное равенство

$$\int_x^{2x} a(s) ds = \int_0^{2x} a(s) ds - \int_0^x a(s) ds.$$

Лемма доказана.

Важные в дальнейшем оценки возможных решений уравнения (1) в конусе  $Q_+$  даёт

**Теорема 1.** Если выполнены условия (2), (3) и  $u(x) \in Q_+$  является решением уравнения (1), то функция  $u(x)$  не убывает на  $[0, \infty)$  и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} F_+(x) &\equiv \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(2t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \\ &\leq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x). \end{aligned} \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть  $u(x) \in Q_+$  – решение уравнения (1). Тогда при любых  $x_1, x_2 \in [0, \infty)$  таких, что  $x_1 < x_2$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) &= \int_0^{x_2} k(x_2+t)u(t) dt - \int_0^{x_1} k(x_1+t)u(t) dt + f(x_2) - f(x_1) = \\ &= \int_0^{x_1} [k(x_2+t) - k(x_1+t)]u(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} k(x_2+t)u(t) dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку функции  $k(x)$ ,  $f(x)$  и  $u(x)$  неотрицательны и в силу условий (2), (3) функции  $k(x)$  и  $f(x)$  не убывают на  $[0, \infty)$ . Значит,  $u^\alpha(x_2) \geq u^\alpha(x_1)$ , т.е.  $u(x)$  не убывает на  $[0, \infty)$ .

Покажем, что  $u(x) \geq F_+(x)$ . Так как функция  $k(x)$  не убывает, а функция  $u(x)$  неотрицательна, то из уравнения (1) следует, что

$$u^\alpha(x) \geq \int_0^x k(2t)u(t) dt + f(x) \quad \text{для любого } x > 0,$$

откуда

$$u(x) \geq \left( \int_0^x k(2t)u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x > 0.$$

Так как (см., например, [7, теорема 17.8])  $\int_0^x f'(t) dt \leq f(x) - f(0)$ , то

$$u(x) \geq \left( \int_0^x k(2t)u(t) dt + \int_0^x f'(t) dt + f(0) \right)^{1/\alpha} = \left( \int_0^x (k(2t)u(t) + f'(t)) dt + f(0) \right)^{1/\alpha}. \quad (8)$$

В силу теоремы Лебега (см. [7, теорема 17.7]) функция  $f(x)$  почти всюду на  $[0, \infty)$  дифференцируема, поэтому из оценки (8) вытекает, что для почти всех  $t \in [0, \infty)$  выполняется неравенство

$$k(2t)u(t) + f'(t) \geq k(2t) \left( \int_0^t (k(2s)u(s) + f'(s)) ds + f(0) \right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда

$$\left( \int_0^t (k(2s)u(s) + f'(s)) ds + f(0) \right)^{-1/\alpha} (k(2t)u(t) + f'(t)) \geq k(2t).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до  $x$ , с учётом, что

$$d \left( \int_0^t (k(2s)u(s) + f'(s)) ds + f(0) \right) = (k(2t)u(t) + f'(t)) dt,$$

получаем

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \left( \left( \int_0^x (k(2s)u(s) + f'(s)) ds + f(0) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - (f(0))^{(\alpha-1)/\alpha} \right) \geq \int_0^x k(2t) dt,$$

или

$$\left( \int_0^x (k(2t)u(t) + f'(t)) dt + f(0) \right)^{1/\alpha} \geq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(2t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Из этой оценки и неравенства (8) непосредственно следует, что  $u(x) \geq F_+(x)$ .

Докажем, что  $u(x) \leq G_+(x)$ . Так как функции  $k(x)$  и  $u(x)$  не убывают на  $[0, \infty)$ , то из уравнения (1), воспользовавшись леммой 1, получаем

$$u(x) \leq \left( \int_0^x (2k(2t) - k(t))u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x > 0. \quad (9)$$

Обозначим  $h(x) = 2k(2x) - k(x)$ , тогда из оценки (9) следует, что для почти всех  $t \in [0, \infty)$  выполняется неравенство

$$h(t)u(t) + f'(t) \leq h(t) \left( \int_0^t h(s)u(s) ds + f(t) \right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^t h(s)u(s) ds + f(t) \right)^{-1/\alpha} (h(t)u(t) + f'(t)) \leq \\ & \leq h(t) + f'(t) \left( \int_0^t h(s)u(s) ds + f(t) \right)^{-1/\alpha} = h(t) + I(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$I(t) \equiv f'(t) \left( \int_0^t h(s)u(s) ds + f(t) \right)^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int_0^x I(t) dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} (f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)) \quad \text{для любого } x > 0. \quad (11)$$

В силу условия (3) возможны только три случая: либо  $f(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, \infty)$ , либо существует  $x_0 > 0$  такое, что  $f(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, x_0]$  и  $f(x) > 0$  при  $x > x_0$ , либо  $f(x) > 0$  при всех  $x > 0$ . Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Если  $f(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, \infty)$ , то неравенство (11) очевидно и обращается в тождество, так как при  $x > 0$  выполняются соотношения  $h(x) > 0$ ,  $u(x) > 0$  и  $f'(x) \equiv 0$ .

Если же существует  $x_0 > 0$  такое, что  $f(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, x_0]$  и  $f(x) > 0$  при  $x > x_0$ , то  $\int_0^x I(t) dt = 0$  при любом  $x \in [0, x_0]$  и, значит, неравенство (11) выполняется при  $x \in [0, x_0]$ , обращаясь в тождество, а при  $x > x_0$  с учётом того, что  $f(x_0) = f(0) = 0$  и что функция  $f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$  не убывает, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x I(t) dt &= \int_{x_0}^x I(t) dt \leq \int_{x_0}^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{x_0}^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]' dt \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} (f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)), \end{aligned}$$

в силу [7, теорема 17.8], т.е. неравенство (11) выполняется и при любом  $x > x_0$ .

Если, наконец,  $f(x) > 0$  при всех  $x > 0$ , то аналогично получаем

$$\int_0^x I(t) dt \leq \int_0^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t) dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} (f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)).$$

Итак, неравенство (11) доказано во всех трёх случаях.

Интегрируя неравенство (10) в пределах от 0 до  $x$ , с учётом неравенства (11) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[ \left( \int_0^x h(s) u(s) ds + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right] &\leq \\ &\leq \int_0^x h(t) dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} (f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)), \end{aligned}$$

т.е.

$$\left( \int_0^x h(t) u(t) dt + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x h(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x).$$

Следовательно, для правой части неравенства (9) справедлива оценка

$$\left( \int_0^x h(t) u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \leq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x h(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)},$$

учитывая которую, получаем

$$u(x) \leq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x (2k(2t) - k(t)) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)},$$

или в силу леммы 2

$$u(x) \leq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если  $k(x) = C_1 = \text{const} > 0$  и  $f(x) = C_2 = \text{const} \geq 0$ , то нижняя и верхняя априорные оценки (7) совпадают:

$$F_+(x) \equiv G_+(x) \equiv \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} C_1 x + C_2^{(\alpha-1)/\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)},$$

и, как несложно проверить, являются решением интегрального уравнения (1) с  $k(x) = C_1$  и  $f(x) = C_2$ . Значит, в определённом смысле неравенства (7) неумлучшаемы.

**2. Теорема существования и единственности.** Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$u = T_+ u, \quad \text{где} \quad (T_+ u)(x) = \left( \int_0^x k(x+t) u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что решение уравнения  $u = T_+ u$  естественно разыскивать в следующем классе функций:

$$P^+ = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \text{ и } F_+(x) \leq u(x) \leq G_+(x)\},$$

где функции  $F_+(x)$  и  $G_+(x)$  определены в (7).

Далее будем предполагать, что неоднородность  $f(x)$  абсолютно непрерывна на  $[0, \infty)$ , т.е. представима в виде

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0), \quad x \in [0, \infty). \quad (12)$$

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия (2), (3) и (12). Тогда оператор  $T_+$  переводит класс  $P^+$  в себя.

**Доказательство.** Пусть  $u \in P^+$  – произвольная функция. Нужно доказать, что тогда и  $T_+ u \in P^+$ , т.е.  $T_+ u \in C[0, \infty)$  и  $F_+(x) \leq (T_+ u)(x) \leq G_+(x)$ .

То, что  $T_+ u \in C[0, \infty)$ , очевидно (см. [11, с. 288]).

Покажем, что  $(T_+ u)(x) \geq F_+(x)$ . Так как  $u(x) \geq F_+(x)$ , а функции  $k(x)$  и  $f(x)$  не убывают, то

$$\begin{aligned} [(T_+ u)(x)]^\alpha &= \int_0^x k(x+t) u(t) dt + f(x) \geq \int_0^x k(2t) F_+(t) dt + f(0) = \\ &= \int_0^x k(2t) \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t k(2s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} dt + f(0) = \\ &= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t k(2s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Big|_0^x + f(0) = \\ &= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(2s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv F_+^\alpha(x), \end{aligned}$$

т.е.  $(T_+ u)(x) \geq F_+(x)$ .

Покажем, что  $(T_+u)(x) \leq G_+(x)$ . Так как  $u(x) \leq G_+(x)$  и функции  $k(x)$ ,  $G_+(x)$  не убывают на  $[0, \infty)$ , то в силу неравенства (4) и условия (12) имеем

$$\begin{aligned} [(T_+u)(x)]^\alpha &\leq \int_0^x k(x+t)G_+(t) dt + f(x) \leq \int_0^x [2k(2t) - k(t)]G_+(t) dt + f(x) = \\ &= \int_0^x ([2k(2t) - k(t)]G_+(t) + f'(t)) dt + f(0) = \int_0^x G_+(t) \left( 2k(2t) - k(t) + \frac{f'(t)}{G_+(t)} \right) dt + f(0) \leq \\ &\leq \int_0^x G_+(t) \left( 2k(2t) - k(t) + \frac{f'(t)}{f^{1/\alpha}(t)} \right) dt + f(0) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^x \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t (2k(2s) - k(s)) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} \times \\ &\quad \times d \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t (2k(2s) - k(s)) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right) + f(0) = \\ &= \left( \int_0^x \frac{\alpha-1}{\alpha} (2k(2s) - k(s)) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} - (f^{(\alpha-1)/\alpha}(0))^{\alpha/(\alpha-1)} + f(0) = \\ &= \left( \int_0^x \frac{\alpha-1}{\alpha} (2k(2t) - k(t)) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv G_+^\alpha(x), \end{aligned}$$

т.е.  $(T_+u)(x) \leq G_+(x)$  — что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Выберем произвольно и зафиксируем число  $b > 0$ . Рассмотрим класс функций

$$P_b^+ = \{u(x) : u \in C[0, b] \text{ и } F_+(x) \leq u(x) \leq G_+(x)\}.$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает

**Следствие.** При выполнении условий (2), (3) и (12) оператор  $T_+$  отображает класс  $P_b^+$  в себя.

Введём в классе  $P_b^+$  метрику  $\varrho_b$ , положив

$$\varrho_b^+(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{G_+(x)}$$

для любых  $u, v \in P_b^+$ .

Заметим, что в отличие от [7, §§ 17–19] и [12], где изучаются уравнения вида (1) с разностным ядром, в данной метрике в качестве весовой функции используется не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1).

Аналогично лемме 4 из [12] доказывается

**Лемма 4.** Множество  $P_b^+$  с метрикой  $\varrho_b^+$  образует полное метрическое пространство.

Для доказательства основной теоремы 2 нам понадобится дополнительное условие:

$$q \equiv \sup_{0 < x \leq b} \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right) \left( (\alpha-1) \int_0^x k(2t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} < 1. \quad (13)$$

**Теорема 2.** Если  $\alpha > 1$  и выполнены условия (2), (3), (12), (13), то уравнение (1) в конусе  $Q_+$  имеет единственное решение  $u^*(x)$  ( $u^* \in P_b^+$ ). Это решение можно найти в метрическом пространстве  $P_b^+$  методом последовательных приближений по формуле  $u_n = T_+ u_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , со сходимостью по метрике  $\varrho_b^+$ . При этом справедлива оценка скорости сходимости:

$$\varrho_b^+(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \varrho_b^+(T u_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где число  $q < 1$  определено в условии (13), а  $u_0(x) \in P_b^+$  – начальное приближение (произвольная функция).

**Доказательство.** Запишем уравнение (1) в операторном виде:  $u = T_+ u$ . Покажем сначала, что это уравнение имеет единственное решение в пространстве  $P_b^+$ . Для этого в силу леммы 4 и следствия 1 достаточно доказать, что оператор  $T_+$  является сжимающим. Воспользуемся теоремой Лагранжа (формулой конечных приращений), согласно которой при любых  $z_1 > 0$  и  $z_2 > 0$  справедливо равенство

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Theta^{(1-\alpha)/\alpha} (z_1 - z_2),$$

где  $\Theta > 0$  – некоторое число, лежащее между  $z_1$  и  $z_2$ . Поэтому, если  $z_1 \geq z_0$  и  $z_2 \geq z_0$ , где  $z_0 > 0$ , то  $\Theta > z_0$  и, значит,

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}. \quad (14)$$

Пусть  $u, v \in P_b^+$  и  $x \in (0, b]$ . Тогда в силу неравенства (14), в котором роль  $z_0$  играет  $F_+^\alpha(x)$ , для любых  $u, v \in P_b^+$  и любого  $x \in (0, b]$ , последовательно получаем

$$\begin{aligned} |(T_+ u)(x) - (T_+ v)(x)| &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) |u(t) - v(t)| dt \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(2t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} = \\ &= \left( (\alpha-1) \int_0^x k(2t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \int_0^x k(x+t) G_+(t) \frac{|u(t) - v(t)|}{G_+(t)} dt \leq \\ &\leq \varrho_b^+(u, v) \left( (\alpha-1) \int_0^x k(2t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \int_0^x k(x+t) G_+(t) dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} |(T_+ u)(x) - (T_+ v)(x)| &\leq \int_0^x k(x+t) \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t k(t+s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt \times \\ &\times \left( (\alpha-1) \int_0^x k(2t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \varrho_b^+(u, v). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, в силу неравенства (4) и равенства (5) имеем

$$\int_0^x k(x+t) \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t k(t+s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^x (2k(2t) - k(t)) \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t k(t+s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt = \\
&= \int_0^x (2k(2t) - k(t)) \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t (2k(2s) - k(s)) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt = \\
&= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x (2k(2t) - k(t)) \left( \int_0^t (2k(2s) - k(s)) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt \leq \\
&\leq \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x (2k(2t) - k(t) + f^{-1/\alpha}(t) f'(t)) \times \\
&\times \left( \int_0^t (2k(2s) - k(s)) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right)^{1/(\alpha-1)} dt = \\
&= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left( \left( \int_0^x (2k(2s) - k(s)) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right) = G_+^\alpha(x) - f(0) \leq G_+^\alpha(x).
\end{aligned}$$

Учитывая полученную оценку в неравенстве (15), приходим при всех  $x \in (0, b]$  к неравенству

$$\frac{|(T_+u)(x) - (T_+v)(x)|}{G_+(x)} \leq G_+^{\alpha-1}(x) \left( (\alpha-1) \int_0^x k(2t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \varrho_b^+(u, v),$$

которое в силу условия (13) означает, что

$$\varrho_b^+(T_+u, T_+v) \leq q \varrho_b^+(u, v)$$

для любых  $u, v \in P_b^+$ , т.е. оператор  $T_+$  является сжимающим.

Утверждение теоремы о единственности решения  $u^*(x)$  в конусе  $Q_+$  доказывается точно так же, как и в теореме 3 [12]. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает, что однородные уравнения, соответствующие нелинейному уравнению (1), могут иметь нетривиальные решения. В этом состоит принципиальное отличие нелинейных уравнений от соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными и разностными ядрами (подробнее см. [7, гл. IV]).

**Замечание.** Условие (13) может выполняться при любом  $\alpha > 1$ . Например, при  $f(x) \equiv 0$  для степенных ядер  $k(x) = Ax^r$ , где  $A > 0$ ,  $r \geq 0$ , оно заведомо выполняется при любом  $\alpha > 2 - 2^{-r}$ .

В заключение отметим, что, следуя работам [13–15], аналогично можно исследовать дискретные аналоги уравнения (1) в различных пространствах числовых последовательностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-41-200001) и в рамках выполнения государственного задания по проекту “Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи” (Соглашение № 075-03-2021-071 от 29.12.2020).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
2. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
3. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.
4. *Антипов В.Г.* Особое интегральное уравнение с суммарным ядром // Изв. вузов. Математика. 1959. № 6. С. 9–13.
5. *Какичев В.А., Рогожин В.С.* Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1264–1270.
6. *Измаилов А.Ф.* 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90–117.
7. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М., 2009.
8. *Okrasinski W.* On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Annal. Polon. Math. 1980. V. 37. № 3. P. 223–229.
9. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., 1969.
11. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л., 1951.
12. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.
13. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1777–1784.
14. *Askhabov S.N., Karapetian N.K.* Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in complex spaces // J. of Integral Equat. and Math. Phys. 1992. V. 1. № 1. P. 44–66.
15. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Докл. РАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1015–1018.

Чеченский государственный университет  
им. А.А. Кадырова, г. Грозный,  
Чеченский государственный педагогический  
университет, г. Грозный

Поступила в редакцию 12.04.2021 г.  
После доработки 07.06.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

## ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА РЕАКЦИИ В ДРОБНОМ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ

© 2021 г. У. Д. Дурдиев

Для дробного уравнения диффузии с коэффициентом реакции, зависящим только от первых двух компонент пространственного переменного  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  и от времени  $t \geq 0$ , рассматривается обратная задача по определению этого коэффициента в предположении, что для решения уравнения известно начальное значение при  $t = 0$  и в качестве дополнительного условия – граничное значение при  $x_3 = 0$ . Так поставленная обратная задача сводится к эквивалентным ей интегральным уравнениям, для доказательства существования решения которых применяется принцип сжимающих отображений. Доказаны теоремы локального существования и глобальной единственности. Получена также оценка устойчивости решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121090089

**Введение.** В настоящее время дробно-дифференциальные уравнения вызывают значительный интерес как в самой математике, так и в прикладных областях. Эти уравнения используются при моделировании многих физических и химических процессов, в частности, процессов массопереноса в средах с фрактальными свойствами (см., например, [1–6]). В работах [7–9] приведён ряд интересных особенностей уравнений дробной субдиффузии, свидетельствующих об определённом сходстве этих уравнений с параболическими дифференциальными уравнениями второго порядка.

Прямые задачи для уравнений дробной диффузии, такие как начальные и начально-краевые задачи, подробно изучались в [1–4] (см. также ссылки в них). В отличие от прямых задач, результатов по обратным задачам для уравнений дробного порядка сравнительно мало. Обратные задачи по определению коэффициента, который зависел только от пространственных переменных, для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка исследовались в работах [10, 11]. В настоящей работе искомая функция зависит не только от пространственных, но и от временной переменной. Отметим также, что обратные задачи по определению функции источника для уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования изучались в [12–14].

Обратные задачи для классических дифференциальных уравнений теплопроводности изучены достаточно широко. В литературе чаще всего встречаются линейные задачи по определению источника и нелинейные коэффициентные обратные задачи с различными типами условий переопределения (см., например, [15–19] и литературу в них). В этих работах исследуются однозначная разрешимость задач и устойчивость решения, а также построение численного решения таких задач. В работах [20–23] рассматривались задачи по восстановлению памяти для параболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с интегральным членом типа свёртки. В [24] доказано, что если в этих уравнениях свёрточное ядро выбрано в виде специальной функции Миттаг-Лёффлера, то рассматриваемые уравнения эквивалентны уравнениям аномальной диффузии.

Основными результатами данной работы являются теоремы локального существования, глобальной единственности, а также оценка устойчивости решения задачи об определении коэффициента реакции в диффузионном уравнении дробного порядка по времени.

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующее диффузионное уравнение дробного порядка:

$$({}^C \mathcal{D}_t^\alpha u)(x, t) - \Delta_x u(x, t) + q(x', t)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+,$$

при условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

где  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, x_2, x_3$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$ , а  ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$  – регуляризованная дробная производная по  $t$  (производная Гerasимова–Капуто),  $0 < \alpha < 1$ , т.е.

$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$

а  $f(x, t)$  и  $\varphi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции. Функцию  $q$  в уравнении (1) называем *коэффициентом реакции*; предполагаем, что она является также достаточно гладкой.

**Обратная задача.** Требуется определить функцию  $q(x', t)$ ,  $x' \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , – коэффициент реакции в уравнении (1), если решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию

$$u|_{x_3=0} = g(x', t), \quad x' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

где  $g(x', t)$  – заданная достаточно гладкая функция.

Назовём функцию  $u(x, t)$  *классическим решением* задачи Коши (1), (2), если она:

- (а) дважды непрерывно дифференцируема по  $x$  для каждого  $t > 0$ ;
- (б) при каждом  $x \in \mathbb{R}^3$  непрерывна по  $t$  на  $[0, T]$ , а её дробный интеграл

$$({}^I_{0+}^\alpha u)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

непрерывно дифференцируем по  $t \in \mathbb{R}_+$ ;

- (с) удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Пусть  $u(x, t)$  – классическое решение задачи Коши (1), (2) и, как отмечено выше,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x', t)$  – достаточно гладкие функции. Преобразуем обратную задачу (1)–(3). Для этого обозначим вторую производную функции  $u(x, t)$  по переменной  $x_3$  через  $v(x, t)$ , т.е.  $v(x, t) := u_{x_3 x_3}(x, t)$ . Дифференцируя равенства (1) и (2) дважды по  $x_3$ , приходим к следующей задаче:

$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha v)(x, t) - \Delta_x v(x, t) + q(x', t)v(x, t) = f_{x_3 x_3}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

$$v|_{t=0} = \varphi_{x_3 x_3}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

т.е. к задаче вида (1), (2).

Чтобы найти дополнительное условие для функции  $v(x, t)$ , заметим, что третий член лапласиана в уравнении (1) равен  $v(x, t)$ . Полагая  $x_3 = 0$  в уравнении (1) и используя равенство (3), получаем

$$v|_{x_3=0} = ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha g)(x', t) - \Delta_{x'} g(x', t) + q(x', t)g(x', t) - f(x', 0, t), \quad (6)$$

$$x' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

При выполнении условия согласования  $\varphi(x', 0) = g(x', 0)$  из (4)–(6) несложно вывести равенства (1)–(3).

Для заданных функций  $q(x', t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  и числа  $\alpha \in (0, 1)$  задачу определения решения задачи Коши (4) и (5) назовём *прямой задачей*.

Через  $\Phi_T := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T\}$  обозначим слой толщиной  $T$ , где  $T > 0$  – фиксированное число, которое может быть любым.

Пусть  $C^{\alpha, m}(\Phi_T)$  – класс  $m$  раз непрерывно дифференцируемых по переменной  $x \in \mathbb{R}^3$  и непрерывных по  $t$  функций, для которых дробный интеграл  $I_{0+}^\alpha$  порядка  $\alpha$  непрерывно дифференцируем по  $t$  на  $[0, T]$ . Пусть  $l$  – нецелое положительное число,  $l \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ , а  $n \in \mathbb{N}$ . Через  $C([0, T], H^l(\mathbb{R}^n))$  обозначим класс непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций со значениями в  $H^l(\mathbb{R}^n)$ , где  $H^l(\mathbb{R}^n)$  – пространство функций  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих непрерывные

частные производные по порядку  $[l]$  включительно (здесь  $[\cdot]$  – целая часть числа), таких, что конечна величина [25, с. 15–16]

$$|\varphi|^l = \sum_{([l])} \sup_{\substack{|x^1 - x^2| \leq \rho_0 \\ x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n}} \frac{|D_x^{[l]} \varphi(x^1) - D_x^{[l]} \varphi(x^2)|}{|x^1 - x^2|^\alpha} + \sum_{j=0}^{[l]} \sum_{(j)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D_x^j \varphi(x)|,$$

где  $\rho_0$  – некоторое фиксированное положительное число (которое можно выбрать любым),  $\alpha = l - [l]$ , а  $\sum_{(j)}$  – сумма по всем мультииндексам длины  $j$ , в частности,  $\sum_{([l])}$  – сумма по всем мультииндексам длины  $[l]$ . Норму в  $H^l(\mathbb{R}^n)$  значения функции  $\phi(t, x) \in C([0, T], H^l(\mathbb{R}^n))$  при фиксированном  $t \in [0, T]$  обозначим через  $|\phi|^l(t)$ . Такое же обозначение используем и для функций, зависящих только от переменной  $x$ . Норма функции  $\phi(t, x) \in C([0, T], H^l(\mathbb{R}^n))$  определяется равенством

$$\|\phi\|^l := \max_{t \in [0, T]} |\phi|^l(t).$$

В дальнейшем мы рассматриваем пространства  $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^3))$ ,  $C([0, T], H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$  и  $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ , где  $\alpha \in (0, 1)$ .

**1. Исследование прямой задачи (4), (5).** В работе [9] найдено представление решения с помощью фундаментального решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u)(x, t) - Bu(x, t) &= F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где

$$B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$$

– равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными непрерывными вещественными коэффициентами. В случае  $B \equiv \Delta$ , где  $\Delta$  –  $n$ -мерный лапласиан, для любой ограниченной непрерывной функции  $u_0(x)$  (локально непрерывной по Гёльдеру, если  $n > 1$ ) и любой ограниченной непрерывной по обоим переменным  $x$ ,  $t$  и локально непрерывной по Гёльдеру по  $x$  функции  $F(x, t)$  это решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \pi^{-n/2} |x|^{-n} H_{1,2}^{2,0} \left[ \frac{1}{4} t^{-\alpha} |x|^2 \right]_{(n/2,1),(1,1)}^{(1,\alpha)}, \\ Y(x, t) &= \pi^{-n/2} |x|^{-n} t^{\alpha-1} H_{1,2}^{2,0} \left[ \frac{1}{4} t^{-\alpha} |x|^2 \right]_{(n/2,1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}, \end{aligned}$$

где через  $H$  обозначена  $H$ -функция Фокса [26, с. 2–6]. Фактически функция  $Y(x, t)$  является производной Римана–Лиувилля от  $Z(x, t)$  относительно  $t$  порядка  $1 - \alpha$  (если  $x \neq 0$ , то  $Z(x, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ; производная Римана–Лиувилля в этом случае совпадает с производной Герасимова–Капуто, т.е.  $Y(x, t) = ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha Z)(x, t)$ ) [9].

Вводя в уравнении (4) обозначение  $f_{x_3 x_3}(x, t) - q(x', t)v(x, t) =: F(x, t)$ , для прямой задачи (4), (5) при  $n = 3$  вследствие представления (7) получаем интегральное уравнение для определения функции  $v(x, t)$ :

$$v(x, t) = v_0(x, t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) q(\xi_1, \xi_2, \tau) v(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (8)$$

где

$$v_0(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} Z(x - \xi, t) \varphi_{\xi_3 \xi_3}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) f_{\xi_3 \xi_3}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (9)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Справедлива

**Лемма.** Если  $q(x, t) \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}))$ ,  $f(x, t) \in C([0, T], H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3))$ ,  $\varphi(x) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3)$ , то существует единственное решение интегрального уравнения (8) такое, что  $v(x, t) \in C^{1-\alpha, 2}(\Phi_T)$ , где  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся методом последовательных приближений и рассмотрим последовательность  $(v_n(x, t))$  функций, определив их рекуррентно формулами

$$v_n(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) q(x', \tau) v_{n-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где функция  $v_0(x, t)$  задана равенством (9). Далее нам понадобятся оценки функций  $Z(t, x)$ ,  $Y(t, x)$  и некоторых их производных. Пусть  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  – мультииндекс  $n$ -го порядка,  $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  – его длина и

$$D_x^m u = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad D_x^0 u = u.$$

Для функций  $Z(x, t)$  и  $Y(t, x)$  и их производных справедливы следующие оценки [9]:

а) если  $|x|^2 \geq t^\alpha$ , то

$$|D_x^m Z(x, t)| \leq C t^{-\alpha(3+m)/2} e^{-\mu_m t^{-\alpha/(2-\alpha)} |x|^{2/(2-\alpha)}}$$

при  $n = 3$ ,  $|m| \leq 3$ ;

$$|^C \mathcal{D}_t^\alpha Z(x, t)| \leq C t^{-5\alpha/2} e^{-\mu_n t^{-\alpha/(2-\alpha)} |x|^{2/(2-\alpha)}} \quad (11)$$

при  $n = 3$ ;

б) если  $|x|^2 < t^\alpha$ ,  $x \neq 0$ , то

$$|D_x^m Z(x, t)| \leq C t^{-\alpha} |x|^{-1-m}, \quad |m| \leq 3,$$

при  $n = 3$ ,  $m \neq 0$ ;

$$|Z(x, t)| \leq C t^{-\alpha} |x|^{-1}, \quad |m| \leq 3, \quad (12)$$

при  $n = 3$ ;

с) если  $|x|^2 < t^\alpha$ ,  $x \neq 0$ , то

$$|^C \mathcal{D}_t^\alpha Z(x, t)| \leq C t^{-2\alpha} |x|^{-1}$$

при  $n = 3$ ;

д) если  $|x|^2 \geq t^\alpha$ , то

$$|D_x^m Y(x, t)| \leq C t^{-1+\alpha-\alpha(3+m)/2} e^{-\mu_m t^{-\alpha/(2-\alpha)} |x|^{2/(2-\alpha)}}, \quad |m| \leq 3, \quad (13)$$

при  $n = 3$ ;

е) если  $|x|^2 < t^\alpha$ ,  $x \neq 0$ ,  $n = 3$ , то

$$|Y(x, t)| \leq C t^{-1-\alpha/2}, \quad |D_x Y(x, t)| \leq C t^{-\alpha-1},$$

$$|D_x^m Y(x, t)| \leq C t^{-\alpha-1} |x|^{-1}, \quad |m| = 2, \quad (14)$$

$$|D_x^m Y(x, t)| \leq C t^{-\alpha-1} |x|^{-2}, \quad |m| = 3; \quad (15)$$

в этих оценках  $\mu_0 := (2-\alpha)\alpha^{\alpha/(2-\alpha)}$ , в качестве  $\mu_m$  можно взять любое положительное число, меньшее  $\mu_0$ , через  $C$  обозначена положительная постоянная, значение которой в разных оценках, вообще говоря, различно.

Из построения функции  $Z(x, t)$  следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} Z(\xi, t) d\xi = 1; \quad (16)$$

кроме того, как показано в [9],

$$\int_{\mathbb{R}^3} Y(\xi, t) d\xi = C_0 t^{\alpha-1}, \quad t \in (0, T], \quad (17)$$

здесь постоянная  $C_0$  зависит только от  $\alpha$ .

Положим  $d_0 := \|q\|^\alpha$ ,  $\varphi_0 := |\varphi|^{\alpha+2}$  и  $f_0 := \|f\|^{\alpha+2}$ . Используя определение (10) и равенства (16), (17), оценим модуль функции  $v_n(x, t)$  в области  $\Phi_T$  следующим образом:

$$\begin{aligned} |v_0(x, t)| &\leq \varphi_0 + C_0 f_0 \frac{T^\alpha}{\alpha} =: \lambda_0, \\ |v_1(x, t)| &\leq C_0 d_0 \lambda_0 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = C_0 d_0 \lambda_0 \frac{t^\alpha}{\alpha} = \lambda_0 \frac{C_0 d_0 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha, \\ |v_2(x, t)| &\leq \lambda_0 (C_0 d_0 \Gamma(\alpha))^2 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\tau^\alpha d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \lambda_0 \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+\alpha)} I_{0+}^\alpha t^\alpha, \end{aligned}$$

где  $I_{0+}^\alpha t^\alpha$  – дробный интеграл Римана–Лиувилля от степенной функции  $t^\alpha$  и  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера. Нетрудно убедиться [27, с. 15], что справедливо равенство

$$I_{0+}^\alpha t^{n\alpha} = \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)} t^{(1+n)\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

воспользовавшись которым, продолжим оценку функции  $v_2(x, t)$ :

$$|v_2(x, t)| \leq \lambda_0 \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+\alpha)} I_{0+}^\alpha t^\alpha = \lambda_0 \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha}.$$

Аналогичным образом для произвольного  $n = 0, 1, 2, \dots$  получаем

$$|v_n(x, t)| \leq \lambda_0 \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(1+n\alpha)} t^{n\alpha}.$$

Из приведённых выше оценок следует, что ряд  $v(x, t) = \sum_{n=0}^\infty v_n(x, t)$  сходится равномерно в области  $\Phi_T$ , так как в этой области его можно мажорировать сходящимся числовым рядом

$$\lambda_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Это означает, что имеет место следующая оценка решения интегрального уравнения (8):

$$|v(x, t)| \leq \lambda_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} = \lambda_0 E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha), \quad (x, t) \in \Phi_T, \quad (18)$$

где  $E_\alpha(\cdot)$  – функция Миттаг-Лёффлера неотрицательного вещественного аргумента [27, с. 40–45].

Далее заметим, что при выполнении условий леммы функция  $v_0(x, t)$  принадлежит пространству  $C^2(\mathbb{R}^n)$  при каждом фиксированном  $t > 0$ . Для доказательства этого факта, фиксируя  $x^0 \in \mathbb{R}^3$ , разобьём область интегрирования  $\mathbb{R}^3$  в представлении (9) на два множества:  $\Omega_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi - x^0| \geq t^\alpha\}$  и  $\Omega_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1$ . Тогда функцию  $v_0(x, t)$  можно представить в виде суммы двух слагаемых:  $v_0^1(x, t) + v_0^2(x, t)$  (функция  $v_0^i(x, t)$  определяется правой частью равенства (9) с заменой в нём  $\mathbb{R}^3$  на  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ ).

Если точка  $x$  лежит в малой окрестности точки  $x^0$ , а  $\xi \in \Omega_1$ , то величина  $|x - \xi|$  отделена от нуля. Таким образом, чтобы вычислять  $\partial^2 v_0^1(x, t)/\partial x_j^2$  можно дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$v_0^1(x, t) = \int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 Z(x - \xi, t)}{\partial x_j^2} \varphi_{\xi_3 \xi_3}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 Y(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_j^2} f_{\xi_3 \xi_3}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$j = 1, 2, 3$ , т.е.  $v_0^1(x, t) \in C^2(\Omega_1)$ .

Для вычисления  $\partial^2 v_0^2(x, t)/\partial x_j^2$  заметим, что оценки (11), (12), (14), (15) для функций  $Z(x - \xi, t)$  и  $Y(x - \xi, t - \tau)$  содержат особенности вида  $|x - \xi|^{-k}$  с показателем  $k > 0$ . Следовательно, такими особенностями будут обладать интегралы по  $\Omega_2$  в оценках функций  $\partial v_0^2(x, t)/\partial x_j$  и  $\partial^2 v_0^2(x, t)/\partial x_j^2$ . Из теории ньютоновского потенциала следует, что несобственные интегралы, имеющие такие особенности, сходятся равномерно по  $x$  и определяют непрерывную в  $\Omega_2$  функцию, если только  $k$  меньше, чем число измерений области  $\Omega_2$ , т.е.  $k < 3$  [28, с. 335]. В силу этого и локальной гёльдеровости функций  $\varphi_{x_3 x_3}$ ,  $f_{x_3 x_3}$  по  $x$  производные  $\partial v_0^2(x, t)/\partial x_j$  и  $\partial^2 v_0^2(x, t)/\partial x_j^2$  являются непрерывными в  $\Omega_2$  функциями. Таким образом,  $v_0(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Так как функции  $Z(x - \xi, t)$  и  $Y(x - \xi, t - \tau)$  удовлетворяют однородному уравнению, соответствующему уравнению (4), то  $\mathcal{D}^\alpha v_0(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Следовательно,  $v_0(x, t) \in C^{1-\alpha, 2}(\Phi_T)$ . В силу определения (10) нетрудно видеть, что таким свойством обладают все  $v_j(x, t)$ . Тогда из общей теории интегральных уравнений следует включение  $v(x, t) \in C^{1-\alpha, 2}(\Phi_T)$ , т.е. функция  $v(x, t)$  является классическим решением задачи Коши (4), (5).

Обозначим теперь через  $\tilde{v}(x, t)$  решение исходного интегрального уравнения (8), в котором функции  $q$ ,  $f_{x_3 x_3}$  и  $\varphi_{x_3 x_3}$  заменены на возмущённые функции  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{f}_{x_3 x_3}$  и  $\tilde{\varphi}_{x_3 x_3}$  соответственно, т.е. уравнения

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) \tilde{q}(x', \tau) \tilde{v}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (19)$$

где

$$\tilde{v}_0(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} Z(x - \xi, t) \tilde{\varphi}_{\xi_3 \xi_3}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) \tilde{f}_{\xi_3 \xi_3}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (20)$$

Найдём оценку нормы разности между решением  $v(x, t)$  уравнения (8) и решением  $\tilde{v}(x, t)$  уравнения (19). Составляя разность  $v - \tilde{v}$  с помощью уравнений (8) и (19), для неё получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} v(x, t) - \tilde{v}(x, t) &= v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) (q(x', \tau) - \tilde{q}(x', \tau)) v(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) \tilde{q}(x', \tau) (v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

откуда выводится следующее линейное интегральное неравенство для  $|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|$ :

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq |v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| + \lambda_0 C_0 \frac{T^\alpha}{\alpha} E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) \|q - \tilde{q}\|^\alpha + \\ + \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) |v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)| d\xi d\tau, \quad (21)$$

где  $\tilde{q}_0 := \|\tilde{q}\|^\alpha$ . Из равенств (9) и (20) вытекает оценка

$$|v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| \leq \|\varphi_{x_3 x_3} - \tilde{\varphi}_{x_3 x_3}\| + C_0 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|f_{x_3 x_3} - \tilde{f}_{x_3 x_3}\|^\alpha.$$

Пусть  $\sigma = \sigma(\alpha, T, d_0, \tilde{q}_0, \varphi_0, f_0) = \max\{1, \tilde{q}_0, C_0 T^\alpha / \alpha, \lambda_0 C_0 T^\alpha / \alpha E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)\}$ . Применив метод последовательных приближений к неравенству (21):

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_0 \leq \sigma (\|\varphi_{x_3 x_3} - \tilde{\varphi}_{x_3 x_3}\|^\alpha + \|f_{x_3 x_3} - \tilde{f}_{x_3 x_3}\|^\alpha + \|q - \tilde{q}\|^\alpha), \\ |v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_n \leq \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi, t - \tau) |v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)|_{n-1} d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots,$$

приходим к оценке

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq \sigma \lambda_0 E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) (\|\varphi_{x_3 x_3} - \tilde{\varphi}_{x_3 x_3}\|^\alpha + \|f_{x_3 x_3} - \tilde{f}_{x_3 x_3}\|^\alpha + \|q - \tilde{q}\|^\alpha), \quad (22)$$

представляющей собой оценку устойчивости решения задачи Коши (4), (5). Единственность решения этой задачи следует также из оценки (21).

Оценкой (21) мы воспользуемся и в следующем пункте работы.

**2. Исследование обратной задачи (4)–(6).** Положив в уравнении (8) и определении (9)  $x_3 = 0$  и используя дополнительное условие (6), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения коэффициента  $q(x', t)$ :

$$q(x', t) = \\ = q_0(x', t) - \frac{1}{g(x', t)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \xi_3, t - \tau) q(\xi_1, \xi_2, \tau) v(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau, \quad (23)$$

где

$$q_0(x', t) := \frac{1}{g(x', t)} \left[ f(x', 0, t) + \Delta_{x'} g(x', t) - ({}^C \mathcal{D}_t^\alpha g)(x', t) + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Z(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \xi_3, t) \varphi_{\xi_3 \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x - \xi_1, x - \xi_2, \xi_3, t - \tau) f_{\xi_3 \xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau \right].$$

Введём оператор  $A$ , определяя его действие правой частью уравнения (23), т.е.

$$A[q](x', t) = \\ = q_0(x', t) - \frac{1}{g(x', t)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Y(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \xi_3, t - \tau) q(\xi_1, \xi_2, \tau) v(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau. \quad (24)$$

Тогда уравнение (23) запишется в более компактном виде

$$q(x', t) = A[q](x', t).$$

Пусть  $q_{00} := \|q_0\|^\alpha$ . Зафиксируем число  $\rho > 0$  и рассмотрим шар

$$B_T^\alpha(q_0, \rho) := \{q(x', t) : q(x', t) \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2)), \|q - q_0\|^\alpha \leq \rho\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

**Теорема 1.** Если  $f(x, t) \in C([0, T], H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3))$ ,  $\varphi(x) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $g(x', t) \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ ,  $\|g(x', t)\|^\alpha \geq g_0 > 0$ ,  $g(x', 0, 0) = \varphi(x', 0, 0)$ , то существует такое число  $T^* \in (0, T]$ , что обратная задача (1)–(3) имеет единственное решение  $q(x', t) \in C([0, T^*], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ .

**Доказательство.** Сначала докажем, что при достаточно малом  $T > 0$  оператор  $A$  переводит шар  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$  в себя; т.е. из условия  $q(x', t) \in B_T^\alpha(q_0, \rho)$  следует, что  $A[q](x', t) \in B_T^\alpha(q_0, \rho)$ . Действительно, для любой функции  $q(x', t) \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$  функция  $A[q](x', t)$ , вычисленная по формуле (24), принадлежит классу  $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ . Более того, для нормы разности функций  $A[q]$  и  $q_0$ , воспользовавшись оценкой (18), получаем

$$\|A[q] - q_0\|^\alpha \leq \frac{C_0 d_0 \lambda_0}{\alpha g_0} T^\alpha E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha). \quad (25)$$

Заметим, что функция, стоящая в правой части оценки (25), монотонно возрастает с ростом  $T$  и что из принадлежности функции  $q(x', t)$  шару  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$  вытекает неравенство  $\|q\|^\alpha \leq \rho + q_{00}$ . Следовательно, оценка (25) останется верной, если в ней заменить  $\|q\|^\alpha$  выражением  $\rho + q_{00}$ . Выполняя эти замены, приходим к оценке

$$\|A[q] - q_0\|^\alpha \leq \frac{C_0 \lambda_0 (\rho + q_{00})}{\alpha g_0} T^\alpha E_\alpha((\rho + q_{00}) C_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha).$$

Пусть  $T_1$  – положительный корень уравнения

$$\frac{C_0 \lambda_0 (\rho + q_{00})}{\alpha g_0} T^\alpha E_\alpha((\rho + q_{00}) C_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) = \rho.$$

Тогда при  $T \in [0, T_1]$  очевидно включение  $A[q](x', t) \in B_T^\alpha(q_0, \rho)$ .

Теперь рассмотрим две функции  $q(x', t)$  и  $\tilde{q}(x', t)$ , принадлежащие шару  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$ , и оценим расстояние между их образами  $A[q](x', t)$  и  $A[\tilde{q}](x', t)$  в пространстве  $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ . Функция  $\tilde{v}(x, t)$ , соответствующая коэффициенту  $\tilde{q}(x', t)$ , удовлетворяет интегральному уравнению (19) с функциями  $\varphi_{x_3 x_3} = \tilde{\varphi}_{x_3 x_3}$  и  $f_{x_3 x_3} = \tilde{f}_{x_3 x_3}$ . Составив разность  $A[q](x', t) - A[\tilde{q}](x', t)$  с помощью уравнений (8), (19) и затем оценив её норму, получим

$$\|A[q](x', t) - A[\tilde{q}](x', t)\|^\alpha \leq \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha g_0} [\|v\| \|q - \tilde{q}\|^\alpha + \|q\|^\alpha \|v - \tilde{v}\|].$$

Используя неравенство (18) и оценку (22) с  $\varphi_{x_3 x_3} = \tilde{\varphi}_{x_3 x_3}$  и  $f_{x_3 x_3} = \tilde{f}_{x_3 x_3}$ , продолжим предыдущее неравенство в виде

$$\|A[q](x', t) - A[\tilde{q}](x', t)\|^\alpha \leq \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha g_0} \lambda_0 E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) (1 + \sigma \tilde{q}_0) \|q - \tilde{q}\|^\alpha. \quad (26)$$

Функции  $q(x', t)$  и  $\tilde{q}(x', t)$  принадлежат шару  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$ , поэтому норма  $\|\cdot\|^\alpha$  каждой из них не превосходит  $\rho + q_{00}$ . Отметим, что функция в правой части неравенства (26) при множителе  $\|q - \tilde{q}\|^\alpha$  монотонно возрастает с ростом  $\|q\|^\alpha$ ,  $\|\tilde{q}\|^\alpha$  и  $T$ .

Следовательно оценка (26), если заменить в ней (в том числе в  $\sigma$ )  $\|q\|^\alpha$  и  $\|\tilde{q}\|^\alpha$  на  $\rho + q_{00}$ , останется верной. Таким образом, имеем

$$\|A[q](x', t) - A[\tilde{q}](x', t)\|^\alpha \leq \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha g_0} \lambda_0 E_\alpha((\rho + q_{00}) C_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) (1 + \sigma(\rho + q_{00})) \|q - \tilde{q}\|^\alpha.$$

Пусть  $T_2$  – положительный корень уравнения

$$r(T) := \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha q_0} \lambda_0 E_\alpha((\rho + q_{00}) C_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha) (1 + \sigma(\rho + q_{00})) = 1.$$

Тогда при  $T \in [0, T_2]$  расстояние между функциями  $A[q](x', t)$  и  $A[\tilde{q}](x', t)$  в функциональном пространстве  $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$  не превышает расстояния между функциями  $q(x', t)$  и  $\tilde{q}(x', t)$ , умноженного на  $r(T) < 1$ . Следовательно, если мы выберем  $T^* = \min(T_1, T_2)$ , то  $A$  будет оператором сжатия в шаре  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$ . Поэтому, согласно теореме Банаха, оператор  $A$  имеет единственную неподвижную точку в шаре  $B_T^\alpha(q_0, \rho)$ ; т.е. существует единственное решение уравнения (24). Теорема доказана.

Пусть  $T$  – какое-либо положительное число. Рассмотрим множество  $\Omega(\gamma_0)$  ( $\gamma_0 > 0$  – некоторое фиксированное число) функций  $(f, \varphi, g)$ , для которых выполнены все условия теоремы 1 и  $\max\{\|f\|^{\alpha+2}, \|\varphi\|^{\alpha+2}, \|g\|^\alpha\} \leq \gamma_0$ . Через  $Q(\gamma_1)$  обозначим класс функций  $q(x', t) \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ , удовлетворяющих неравенству  $\|q\|^\alpha \leq \gamma_1$  с некоторым фиксированным положительным числом  $\gamma_0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(f, \varphi, g) \in \Omega(\gamma_0)$ ,  $(\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{g}) \in \Omega(\gamma_0)$  и  $(q, \tilde{q}) \in Q(\gamma_1)$ . Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\|q - \tilde{q}\|^\alpha \leq c(\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha), \quad (27)$$

где постоянная  $c$  зависит только от  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ .

**Доказательство.** Используя уравнение (23), запишем уравнение для  $\tilde{q}(x', t)$  и составим разность  $q(x', t) - \tilde{q}(x', t)$ . Затем, оценивая это выражение и используя неравенства (18), (22), получаем неравенство

$$|q - \tilde{q}|^\alpha(t) \leq c_0(\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha) + c_1 \int_0^t |q - \tilde{q}|^\alpha(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (28)$$

постоянные  $c_0$  и  $c_1$  в котором зависят от тех же констант, что и  $c$ . Отсюда в силу неравенства Гронуолла получаем оценку

$$|q - \tilde{q}|^\alpha(t) \leq c_0 \exp(c_1 t) (\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha), \quad t \in [0, T],$$

из которой в свою очередь следует нужная оценка (27) с постоянной  $c = c_0 \exp(c_1 t)$ .

Из теоремы 2 очевидно вытекает единственность решения обратной задачи.

**Теорема 3.** Пусть функции  $q(x', t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x', t)$  и  $\tilde{q}(x', t)$ ,  $\tilde{f}(x, t)$ ,  $\tilde{\varphi}(x)$ ,  $\tilde{g}(x', t)$  удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 2. Тогда, если  $f = \tilde{f}$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi}$ ,  $g = \tilde{g}$  при  $(x, t) \in \Phi_T$ , имеет место равенство  $q(x', t) = \tilde{q}(x', t)$ ,  $x' \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, T]$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in an elastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento. 1971. V. 1. № 2. P. 161–198.
2. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л., 1986.
3. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri and F. Mainar. New York, 1997. P. 223–276.
4. Gorenflo R., Rutman R. On ultraslow and intermediate processes // Transform Methods and Special Functions / Eds. P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova. Sofia, 1994. Science Culture Technology. Singapore, 1995. P. 61–81.
5. Mainardi F. Fractional relaxation and fractional diffusion equations, mathematical aspects // Proc. of the 12th IMACS World Congress / Ed. W.F. Ames. Georgia Tech Atlanta. 1994. V. 1. P. 329–332.

6. *Mainardi F.* Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics // *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / Eds. A. Carpinteri and F. Mainardi. New York, 1997. P. 291–348.
7. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // *Дифференц. уравнения*. 1986. Т. 25. № 8. С. 1359–1368.
8. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // *Дифференц. уравнения*. 1990. Т. 26. № 4. С. 485–492.
9. *Eidelman S.D., Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // *J. Differ. Equat.* 2004. V. 199. P. 211–255.
10. *Miller L., Yamamoto M.* Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation // *Inverse Problems*. 2013. V. 29. № 7. P. 075013.
11. *Bondarenko A.N., Ivaschenko D.S.* Numerical methods for solving inverse problems for time fractional diffusion equation with variable coefficient // *J. Inverse Ill-Posed Problems*. 2009. V. 17. P. 419–440.
12. *Xiong T.X., Zhou Q., Hon C.Y.* An inverse problem for fractional diffusion equation in 2-dimensional case: stability analysis and regularization // *J. Math. Anal. and Appl.* 2012. V. 393. P. 185–199.
13. *Xiong X., Guo H., Liu X.* An inverse problem for a fractional diffusion equation // *J. Comput. and Appl. Math.* 2012. V. 236. P. 4474–4484.
14. *Kirane M., Malik S.A., Al-Gwaiz M.A.* An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2013. V. 36. P. 1056–1069.
15. *Romanov V.G.* An inverse problem for a layered film on a substrate // *Eurasian J. Math. and Comput. Appl.* 2016. V. 4. № 3. P. 29–38.
16. *Karupiah K., Kim J.K., Balachandran K.* Parameter identification of an integro-differential equation // *Nonlin. Func. Anal. and Appl.* 2015. V. 20. № 2. P. 169–185.
17. *Ivanchoy M., Vlasov V.* Inverse problem for a two dimensional strongly degenerate heat equation // *Electronic J. Differ. Equat.* 2018. V. 77. P. 1–17.
18. *Huntul M.J., Lesnic D., Hussein M.S.* Reconstruction of time-dependent coefficients from heat moments // *Appl. Math. and Comput.* 2017. V. 301. P. 233–253.
19. *Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M.I., Kerimov N.B.* Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions // *Appl. Math. and Comput.* 2019. V. 346. P. 800–815.
20. *Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш.* Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // *Дифференц. уравнения*. 2014. Т. 50. № 1. С. 110–116.
21. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation // *Methods of Func. Anal. and Topology*. 2019. V. 25. № 3. P. 219–226.
22. *Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж.* Задача определения тепловой памяти проводящей среды // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56. № 6. С. 796–807.
23. *Durdiev D.K., Nuriddinov J.Z.* On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal conductivity // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*. 2020. Т. 30. № 4. С. 572–584.
24. *Durdiev D.K., Shishkina E.L., Sitnik S.M.* The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // *arXiv:2009.10594v1 [math. CA]*. 20 Sept. 2020.
25. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. С. 736.
26. *Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.* The  $H$ -function. Theory and Application. Berlin; Heidelberg, 2010.
27. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differential equations // *North-Holland Mathematical Studies*. Amsterdam, 2006.
28. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.

Бухарский государственный университет,  
Узбекистан

Поступила в редакцию 25.01.2021 г.  
После доработки 07.04.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958:535.42

## СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПРОНИЦАЕМОМ ТЕЛЕ

© 2021 г. Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров

Исследуется линейная система интегральных уравнений первого рода, возникающая в задаче о дифракции волн на локальном проницаемом теле. Установлена эквивалентность системы и исходной граничной задачи дифракции. Доказаны существование и единственность решения системы и диссипативность её матричного оператора. Рассмотрены вопросы существования неизлучающих токов и их связь со свойствами матричного оператора системы.

DOI: 10.31857/S0374064121090090

**Введение.** При построении вычислительных алгоритмов для решения задач рассеяния акустических и электромагнитных волн на локальных проницаемых телах метод интегральных уравнений зарекомендовал себя как достаточно эффективный [1, 2]. До сих пор актуальной остаётся задача поиска таких подходов в методе интегральных уравнений, которые приводили бы к построению численных схем с хорошими вычислительными свойствами и характеристиками. При этом рассматриваются системы интегральных уравнений как первого рода, так и второго [3, 4]. Использование систем уравнений второго рода формально представляется более предпочтительным, поскольку при реализации численной схемы они позволяют обходиться относительно простыми вычислительными средствами. Однако такие системы оказываются малоэффективными при рассмотрении, например, тонких пластин [5]: система уравнений Фредгольма второго рода Мюллера–Купрадзе в случае тонких тел зачастую оказывается вырожденной [3, 6]. В случае проницаемых тел применение систем уравнений первого рода является более подходящим, особенно, если учесть, что такие системы позволяют описывать наличие различных инородных включений внутри самих тел [4].

В настоящей работе для задачи дифракции плоской волны на прозрачном трёхмерном рассеивателе с использованием техники метода нулевого поля [7, 8] получена система интегральных уравнений первого рода. Доказана её однозначная разрешимость и эквивалентность исходной граничной задаче дифракции. Подробно исследованы свойства матричного оператора системы, установлена его диссипативность. При доказательстве, наряду с исходной задачей дифракции, рассматривается также “сопряжённая” задача, т.е. задача, в которой характеристики внешней и внутренней среды меняются местами.

В последнее время наблюдается значительное возрастание интереса к поиску рассеивателей, обладающих минимальной рассеянной энергией. В этом случае в качестве объектов предлагается использовать небольшие сферы с экстремально высокими значениями волнового числа [9]. В рамках этой тематики рассматриваются так называемые ананополи – источники, излучение которых концентрируется вблизи них и не распространяется на бесконечность. Все эти вопросы непосредственно примыкают к проблеме существования неизлучающих токов и невидимого рассеивателя. Показано, что существование подобных токов связано с потерей диссипативности матричного оператора линейной системы интегральных уравнений первого рода. Установлены необходимые и достаточные условия их существования, а также их связь с “невидимым” рассеивателем [10].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о дифракции поля плоской волны  $u^0$  на локальном проницаемом препятствии  $D_i$  в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченном гладкой замкнутой поверхностью  $\partial D_i \in C^{(2,\nu)}$ . Обозначим  $D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_i$ . Пусть математическая постановка граничной задачи имеет вид

$$\Delta u_{e,i}(M) + k_{e,i}^2 u_{e,i}(M) = 0, \quad M \in D_{e,i},$$

$$u_i(Q) - u_e(Q) = u^0(Q), \quad \frac{\partial u_i(Q)}{\partial n} - \frac{\partial u_e(Q)}{\partial n} = \frac{\partial u^0(Q)}{\partial n}, \quad Q \in \partial D_i,$$

$$\frac{\partial u_e(M)}{\partial r} - ik_e u_e(M) = o(r^{-1}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где  $k_{e,i}$  – волновые числа в областях  $D_{e,i}$  соответственно,  $u_i$  – полное поле в  $D_i$ ,  $u_e$  – рассеянное поле в  $D_e$ ,  $n$  – нормаль к  $\partial D_e$ , внешняя к области  $D_e$ , а  $r = |M|$ . Здесь и далее для сокращения записи мы придерживаемся следующего соглашения. Наличие в некотором выражении или соотношении пары нижних индексов “i, e” означает, что рассматриваются два таких выражения или соотношения: одно с нижним индексом “i” вместо “i, e”, а другое – с нижним индексом “e”. Не ограничивая общности, будем считать, что  $\text{Im } k_e = 0$ ,  $\text{Im } k_i \geq 0$ . Как известно, поставленная задача сопряжения (1) имеет единственное классическое решение [2, с. 112–115]  $u_{e,i} \in C^{(2)}(D_e \cup D_i) \cap C^{(1)}((D_e \cup \partial D_i) \cup \overline{D_i})$ .

**2. Система интегральных уравнений.** К решению граничной задачи дифракции (1) существуют различные подходы, такие как переход к системе интегральных уравнений второго рода Мюллера–Купрадзе [5], метод нулевого поля [8, с. 35–38] и другие. Вместе с тем для граничной задачи (1) можно получить систему интегральных уравнений первого рода, которая обладает рядом особенностей. Для построения такой системы применим к решению  $u_e$  задачи (1) формулу Грина [8, с. 32–34] в  $D_e$ , помещая точку наблюдения в  $D_i$ , и к решению  $u_i$  этой задачи формулу Грина в  $D_i$ , помещая точку наблюдения в  $D_e$ . В результате приходим к следующим соотношениям:

$$0 = \int_{\partial D_i} \{ \partial_P \Psi_e(M, P) u_e(P) - \Psi_e(M, P) \partial_P u_e(P) \} d\sigma_P, \quad M \in D_i, \quad (2)$$

$$0 = \int_{\partial D_i} \{ \Psi_i(M, P) \partial u_i(P) - \partial_P \Psi_i(M, P) u_i(P) \} d\sigma_P, \quad M \in D_e, \quad (3)$$

здесь  $\Psi_{e,i}(M, P) = i(4\pi)^{-1} h_0^{(1)}(k_{e,i} R_{MP})$  – фундаментальные решения уравнений Гельмгольца,  $h_0^{(1)}$  – сферическая функция Ханкеля, удовлетворяющая условию излучения,  $R_{MP} = |M - P|$ , для краткости записи введено обозначение  $\partial_P = \partial/\partial n_P$ . Полученные соотношения (2), (3) известны как соотношения метода нулевого поля [7].

Так как плоская волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца с волновым числом  $k_e$  всюду в  $D_i$  и непрерывна вместе с производными в  $\overline{D_i}$ , то, используя для её представления в  $D_i$  третью формулу Грина [2, с. 113] и прибавляя полученное соотношение к (2), получаем

$$\int_{\partial D_i} \{ \partial_P \Psi_e(M, P) u_i(P) - \Psi_e(M, P) \partial u_i(P) \} d\sigma_P = u_0(M), \quad M \in D_i. \quad (4)$$

В равенстве (4) учтены граничные условия (1) на  $\partial D_i$ .

Преобразуем соотношения (3) и (4), при этом будем существенно учитывать свойства потенциалов простого и двойного слоёв [2, с. 57–68]. Устремляя в (3) точку  $M$ , расположенную снаружи области  $D_i$ , к поверхности  $\partial D_i$  ( $D_e \ni M \rightarrow Q \in \partial D_i$ ) и одновременно в (4) точку  $M$ , расположенную внутри области  $D_i$ , к поверхности  $\partial D_i$  ( $D_i \ni M \rightarrow Q \in \partial D_i$ ) и вычитая затем полученные соотношения на поверхности  $\partial D_i$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_i} \{ [\partial_P \Psi_e(Q, P) + \partial_P \Psi_i(Q, P)] u_i(P) - \\ & - [\Psi_e(Q, P) + \Psi_i(Q, P)] \partial u_i(P) \} d\sigma_P = u_0(Q), \quad Q \in \partial D_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично предыдущему, беря теперь производную по внешней нормали от правой части (3) и левой части (4) и устремляя точки к поверхности  $\partial D_i$ , получаем, используя для потенциала двойного слоя  $W(M)$ , следующее свойство [2, с. 66]:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left[ \frac{\partial}{\partial n} W(Q + hn_Q) - \frac{\partial}{\partial n} W(Q - hn_Q) \right] = 0.$$

Вычитая полученные соотношения друг из друга, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \partial_Q \int_{\partial D_i} \{ [\partial_P \Psi_e(Q, P) + \partial_P \Psi_i(Q, P)] u_i(P) - \\ - [\Psi_e(Q, P) + \Psi_i(Q, P)] \partial u_i(P) \} d\sigma_P = \partial_Q u_0(Q), \quad Q \in \partial D_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Введём в рассмотрение следующие восемь интегральных операторов:

$$\begin{aligned} S_{e,i} \alpha &= \int_{\partial D_i} \Psi_{e,i}(Q, P) \alpha(P) d\sigma_P, & K_{e,i} \alpha &= \int_{\partial D_i} \partial_P \Psi_{e,i}(Q, P) \alpha(P) d\sigma_P, \\ K'_{e,i} \alpha &= \partial_Q \int_{\partial D_i} \Psi_{e,i}(Q, P) \alpha(P) d\sigma_P, & T_{e,i} \alpha &= \partial_Q \int_{\partial D_i} \partial_P \Psi_{e,i}(Q, P) \alpha(P) d\sigma_P, \end{aligned}$$

здесь  $K'$  представляет собой оператор, сопряжённый к оператору  $K$  по отношению к билинейной форме

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\partial D_i} \alpha(P) \beta(P) d\sigma_P.$$

Систему уравнений (5), (6) запишем в операторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} (S_e + S_i) & -(K_e + K_i) \\ -(K'_e + K'_i) & (T_e + T_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0 \\ \partial u_0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где введены обозначения  $\alpha = \partial u_i$ ,  $\beta = u_i$ . Исследуем полученную систему (7).

Рассмотрим подробнее свойства операторов, составляющих матричный оператор в (7):

- 1) операторы  $S_{e,i}$ ,  $K_{e,i}$  и сопряжённые операторы  $K'_{e,i}$  представляют собой псевдодифференциальные операторы (ПДО) порядка  $-1$  [11];
- 2) операторы  $T_{e,i}$  являются ПДО порядка  $+1$  [11];
- 3) для этих операторов имеют место следующие фундаментальные соотношения [2, с. 101–102]:

$$S^{-1} = -T(E - 0.5K)^{-1}(E + 0.5K)^{-1}, \quad (8)$$

$$T^{-1} = -S(E - 0.5K')^{-1}(E + 0.5K')^{-1}. \quad (9)$$

**Теорема 1.** В классе  $H = C^{(1,\nu)}(\partial D_i) \times C^{(1,\nu)}(\partial D_i)$  вектор-функций система интегральных уравнений (7) эквивалентна исходной граничной задаче (1).

**Доказательство.** 1. Покажем сначала, что однородная система уравнений (7) имеет только тривиальное решение.

Пусть существует нетривиальное решение  $\gamma = \{\alpha, \beta\}$  однородной системы (7). Покажем, что оно принадлежит классу  $H$ . Для этого воспользуемся приёмом регуляризации [6]. Выберем значения  $k_e = k_0$  таким образом, чтобы  $\ker T_0 = \{0\}$  и  $\ker S_0 = \{0\}$ . Используем в качестве эквивалентного регуляризатора [12] системы (7) матричный оператор  $\begin{bmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix}$ .

В результате получим матричную систему второго рода следующего вида:

$$\gamma - A\gamma = 0, \quad A = \begin{bmatrix} N' & B \\ L & N \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Используя базовые соотношения (8), (9), несложно установить следующее: операторы  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}'$  являются операторами порядка  $-1$ , оператор  $\mathbf{L}$  имеет порядок  $-2$ , а оператор  $\mathbf{B}$  – порядок  $0$ . Система (10) эквивалентна системе (7) и представляет собой систему с квазикompактным матричным оператором [12]  $\mathbf{A}$ , поскольку нетрудно непосредственно установить, что оператор  $\mathbf{A}^2$  компактен. Используя свойство гладкости решений (10) для правой части из  $H$ , получаем, что  $\gamma \in H$  [12].

Установим теперь, что  $\gamma = \mathbf{0}$ . Предположим противное:  $\gamma \neq \mathbf{0}$ . Тогда построим поля  $U_{e,i}$ , задав их формулами

$$U_e(M) = \int_{\partial D_i} \{\Psi_e(M, P)\beta(P) - \partial_P \Psi_e(M, P)\alpha(P)\} d\sigma_P, \quad M \in D_e, \quad (11)$$

$$U_i(M) = \int_{\partial D_i} \{\partial_P \Psi_i(M, P)\alpha(P) - \Psi_i(M, P)\beta(P)\} d\sigma_P, \quad M \in D_i. \quad (12)$$

Построенные поля  $U_{e,i}$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и условию излучения граничной задачи (1). Покажем, что на поверхности  $\partial D_i$  выполняются условия сопряжения.

Устремляя в соотношении (11) точку  $M$ , расположенную снаружи области  $D_i$ , к поверхности  $\partial D_i$  ( $D_e \ni M \rightarrow Q \in \partial D_i$ ) и одновременно в соотношении (12) точку  $M$ , расположенную внутри области  $D_i$ , к поверхности  $\partial D_i$  ( $D_i \ni M \rightarrow Q \in \partial D_i$ ) и учитывая свойства поверхностных потенциалов, получаем

$$U_e(Q) = -\frac{1}{2}\alpha(Q) + \int_{\partial D_i} \{\Psi_e(Q, P)\beta(P) - \partial_P \Psi_e(Q, P)\alpha(P)\} d\sigma_P, \quad Q \in \partial D_i,$$

$$U_i(Q) = -\frac{1}{2}\alpha(Q) + \int_{\partial D_i} \{\partial_P \Psi_i(Q, P)\alpha(P) - \Psi_i(Q, P)\beta(P)\} d\sigma_P, \quad Q \in \partial D_i.$$

Сравнивая последние соотношения и учитывая первую строку в (7), убеждаемся, что  $U_e(Q) = U_i(Q)$ ,  $Q \in \partial D_i$ . Аналогично показывается, что  $\partial U_e(Q) = \partial U_i(Q)$ ,  $Q \in \partial D_i$ . Таким образом, построенные на основе решения  $\gamma = \{\alpha, \beta\}$  системы поля (11), (12) являются решением однородной граничной задачи (1). Так как однородная задача (1) имеет только тривиальное решение, то тем самым установлено, что  $\gamma = \mathbf{0}$ .

2. Покажем теперь, что система (7) эквивалентна граничной задаче (1).

Пусть существует классическое решение граничной задачи (1). Покажем, что его граничные значения  $\{u_i, \partial u_i\}$  принадлежат пространству  $H$  и удовлетворяют системе (7). Для доказательства последнего утверждения достаточно воспользоваться представлением для решения задачи (1) вида (11), (12) и перейти к системе интегральных уравнений второго рода на поверхности  $\partial D_i$ , эквивалентной граничной задаче (1) [2, с. 114]. В силу гладкости поверхности и аналитичности правых частей  $u_0, \partial u_0$  можно использовать свойство резольвенты Фредгольма для матричного оператора [12]. Отсюда и следует нужный результат:  $\{u_i, \partial u_i\} \in H$ .

Таким образом, установлено, что решение задачи (1) обладает нужной гладкостью на границе  $\partial D_i$ . Из способа получения системы (7) очевидно, что любое решение (1) также является решением системы (7), так как эта система получена непосредственным применением формул Грина к решению задачи (1). Теорема доказана.

**3. Диссипативность матричного оператора.** Введём в рассмотрение билинейную форму в пространстве комплексных функций

$$(\alpha, \beta) = \int_{\partial D_i} \alpha(P)\beta^*(P) d\sigma_P,$$

где индекс звездочка обозначает комплексное сопряжение.

**Теорема 2.** Матричный оператор  $\mathbf{B}$  системы (7) является диссипативным [11], т.е.

$$\operatorname{Im}(\mathbf{B}\gamma, \gamma) > 0 \quad \text{для всех } \gamma \in H, \quad \gamma \neq 0.$$

Запишем подробно выражение  $(\mathbf{B}\gamma, \gamma)$ , используя систему (7); получаем

$$(\mathbf{B}\gamma, \gamma) = ((\mathbf{S}_e + \mathbf{S}_i)\alpha, \alpha) - ((\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_i)\beta, \alpha) - ((\mathbf{K}'_e + \mathbf{K}'_i)\alpha, \beta) + ((\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_i)\beta, \beta). \quad (13)$$

Как и выше, докажем некоторые вспомогательные утверждения.

1. Для любых  $\gamma = \{\alpha, \beta\} \in H$  справедливо энергетическое соотношение

$$\operatorname{Im}(\mathbf{B}\gamma, \gamma) = \begin{cases} \int_{D_i} \operatorname{Im} k_i^2 |U_i|^2 d\tau + \int_{D_e} \operatorname{Im} k_i^2 |\bar{U}_i|^2 d\tau + k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2, & \operatorname{Im} k_i \geq 0, \\ k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2 + k_e \|F_i\|_{L_2(\Theta)}^2, & \operatorname{Im} k_i = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U_{e,i}(M) = \pm \int_{\partial D_i} \{\Psi_{e,i}(M, P)\beta(P) - \partial_P \Psi_{e,i}(M, P)\alpha(P)\} d\sigma_P, \quad \Delta U_{e,i} + k_{e,i}^2 U_{e,i} = 0, \quad M \in D_{e,i}, \quad (15)$$

$$\bar{U}_{i,e}(M) = \pm \int_{\partial D_i} \{\Psi_{i,e}(M, P)\beta(P) - \partial_P \Psi_{i,e}(M, P)\alpha(P)\} d\sigma_P, \quad \Delta \bar{U}_{e,i} + k_{e,i}^2 \bar{U}_{e,i} = 0, \quad M \in D_{i,e}, \quad (16)$$

а  $F_{e,i}$  – диаграммы направленности рассеянного поля, определяемые следующим образом:

$$U_e = \frac{e^{ik_e r}}{r} F_e(\theta, \varphi) + o(r^{-1}), \quad \text{если } r \rightarrow \infty,$$

$$\bar{U}_i = \frac{e^{ik_i r}}{r} F_i(\theta, \varphi) + o(r^{-1}), \quad \text{если } \operatorname{Im} k_i^2 = 0,$$

$\Theta = \{0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Подчеркнём, что поле  $\bar{U}_{i,e}(M)$  является решением уравнения Гельмгольца, соответствующего “сопряжённой” задаче, т.е. задаче, в которой внешняя среда описывается волновым числом  $k_i$ , а внутренняя – числом  $k_e$ .

**Доказательство.** Применяя вторую формулу Грина к полю  $U_{e,i}$  и  $U_{e,i}^*$  (см. (15)) последовательно в областях  $D_e$  и  $D_i$ , получаем

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D_i} \{\partial U_i U_i^* - \partial U_e U_e^*\} d\sigma = \int_{D_i} \operatorname{Im} k_i^2 |U_i|^2 d\tau + k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2. \quad (17)$$

Действуя аналогичным образом для поля  $\bar{U}_{e,i}$  (см. (16)), будем иметь

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D_i} \{\partial \bar{U}_i \bar{U}_i^* - \partial \bar{U}_e \bar{U}_e^*\} d\sigma = \begin{cases} \int_{D_e} \operatorname{Im} k_i^2 |\bar{U}_i|^2 d\tau, & \text{если } \operatorname{Im} k_i^2 > 0, \\ k_e \|F_i\|_{L_2(\Theta)}^2, & \text{если } \operatorname{Im} k_i^2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

При выводе соотношения (17) было учтено, что в случае  $\operatorname{Im} k_i^2 > 0$  выполняется соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \partial \bar{U}_i \bar{U}_i^* d\sigma = 0,$$

где  $\Sigma_R$  – сфера радиуса  $R$ .

Так как  $\gamma \in H$ , то вследствие представления для полей (15) получаем для предельных значений полей  $U_{e,i}$  и их нормальных производных на поверхности  $\partial D_i$  соотношения

$$\begin{aligned} U_e &= 0.5\alpha + S_e\beta - K_e\alpha, & U_i &= 0.5\alpha - S_i\beta + K_i\alpha, \\ \partial U_e &= 0.5\beta + K'_e\beta - T_e\alpha, & \partial U_i &= 0.5\beta - K'_i\beta + T_i\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Основываясь на соотношениях (19) на поверхности  $\partial D_i$ , запишем равенство (17) в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \int_{\partial D_i} \{ \partial U_i U_i^* - \partial U_e U_e^* \} d\sigma = \\ &= (0.5\beta - K'_i\beta + T_i\alpha, 0.5\alpha - S_i\beta + K_i\alpha) - (0.5\beta + K'_e\beta - T_e\alpha, 0.5\alpha + S_e\beta - K_e\alpha) = \\ &= 0.5[(T_e + T_i)\alpha, \alpha] - ((K'_e + K'_i)\beta, \alpha) + (\beta, (K_e + K_i)\alpha) - (\beta, (S_e + S_i)\beta) + \\ &+ (K'_i\beta - T_i\alpha, S_i\beta - K_i\alpha) - (K'_e\beta - T_e\alpha, S_e\beta - K_e\alpha). \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично для предельных значений полей  $\bar{U}_{e,i}$  и их нормальных производных на  $\partial D_i$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= 0.5\alpha + S_i\beta - K_i\alpha, & \bar{U}_e &= 0.5\alpha - S_e\beta + K_e\alpha, \\ \partial \bar{U}_i &= 0.5\beta + K'_i\beta - T_i\alpha, & \partial \bar{U}_e &= 0.5\beta - K'_e\beta + T_e\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись полученными соотношениями, преобразуем интеграл (18) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \int_{\partial D_i} \{ \partial \bar{U}_e \bar{U}_e^* - \partial \bar{U}_i \bar{U}_i^* \} d\sigma = \\ &= (0.5\beta - K'_e\beta + T_e\alpha, 0.5\alpha - S_e\beta + K_e\alpha) - (0.5\beta + K'_i\beta - T_i\alpha, 0.5\alpha + S_i\beta - K_i\alpha) = \\ &= 0.5[(T_e + T_i)\alpha, \alpha] - ((K'_e + K'_i)\beta, \alpha) + (\beta, (K_e + K_i)\alpha) - (\beta, (S_e + S_i)\alpha) + \\ &+ (K'_e\beta - T_e\alpha, S_e\beta - K_e\alpha) - (K'_i\beta - T_i\alpha, S_i\beta - K_i\alpha). \end{aligned} \quad (22)$$

Видим, что в правых частях равенства (20) и равенства (22) первые четыре слагаемых совпадают друг с другом соответственно. Два же последних слагаемых отличаются только знаком, именно желание избавиться от этих “перекрёстных” членов и привело к необходимости рассмотрения “сопряжённой” задачи. Складывая полученные соотношения (20) и (22), беря от суммы мнимую часть и учитывая соотношения (17), (18), получаем окончательно

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \{ ((T_e + T_i)\alpha, \alpha) - ((K'_e + K'_i)\beta, \alpha) - ((K_e + K_i)\alpha, \beta) + ((S_e + S_i)\beta, \beta) \} = \\ &= \begin{cases} \int_{D_i} \operatorname{Im} k_i^2 |U_i|^2 d\tau + \int_{D_e} \operatorname{Im} k_i^2 |\bar{U}_i|^2 d\tau + k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2, & \text{если } \operatorname{Im} k_i^2 > 0, \\ k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2 + k_e \|F_i\|_{L_2(\Theta)}^2, & \text{если } \operatorname{Im} k_i^2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая левую часть соотношения (23) и правую часть соотношения (13), видим, что соотношение (23) после замены в нём  $\alpha$  на  $\beta$  и  $\beta$  на  $\alpha$  совпадает с соотношением (14). Теорема доказана.

**4. Неизлучающие токи.** Как отмечалось во введении, в последнее время возрос интерес исследователей к формированию рассеивателей с минимальной энергией рассеяния. В частности, в качестве таких объектов рассматриваются небольшие сферы с очень высоким значением волнового числа  $k_i$  [9]. Это вопрос непосредственно примыкает к проблеме существования неизлучающих токов внутри тела [13] и невидимого рассеивателя [10].

Необходимо предварительно сделать следующие пояснения. Предположим, что рассматривается граничная задача дифракции (1). Рассеянное поле  $u_e$  во внешнем пространстве  $D_e$  может быть представлено как через его граничные значения на поверхности  $\partial D_i$  вида (15), так и через объёмный “ток” внутри области  $D_i$ . Для этого применяют третью формулу Грина

в  $D_i$  к  $u_i$  и  $\Psi_e$ , помещая при этом точку наблюдения в область  $D_e$ . Складывая полученные соотношения, получаем представление для рассеянного поля, выражающееся через объёмный ток  $J(P) = (k_i^2 - k_e^2)u_i(P)$ , именно,

$$u_e(M) = \int_{\partial D_i} (k_i^2 - k_e^2) \Psi_e(M, P) u_i(P) d\tau_P, \quad M \in D_e. \quad (24)$$

Неизлучающим током  $J(P)$  называют функцию, при которой объёмный потенциал (24) обращается в нуль, т.е.  $\int_{\partial D_i} \Psi_e(M, P) J(P) d\tau_P \equiv 0$ ,  $M \in D_e$ , тем самым обнуляя рассеянное поле во внешней области.

Само существование неизлучающих токов, распределённых в объёме  $D_i$ , не является чем-то исключительным. Так, в работе [13] показано, что любую функцию из  $C^{(2)}(D_i) \cap C(\overline{D_i})$  можно превратить в неизлучающий ток  $D_e$ . В нашем же случае мы стремимся установить существование неизлучающих токов в граничной задаче (1). Для этого дадим следующее

**Определение.** Назовём вектор-функцию  $\gamma = \{\alpha, \beta\} \in H$ ,  $\gamma \neq 0$ , неизлучающим током, если для неё имеет место равенство

$$\operatorname{Im}(\mathbf{B}\gamma, \gamma) = 0. \quad (25)$$

Отметим, что существование неизлучающего тока в данном случае не означает, что  $\mathbf{B}\gamma = 0$ , так как из последнего соотношения в силу полученных выше результатов сразу следует, что  $\gamma = 0$ .

**Теорема 3.** *Необходимым и достаточным условием существования неизлучающих токов является существование нетривиальных решений следующей внутренней задачи Дирихле:*

$$\begin{aligned} (\Delta + k_i^2)(\Delta + k_e^2)w(M) &= 0, \quad M \in D_i, \\ w(P) = \frac{\partial}{\partial n_P} w(P) &= 0, \quad P \in \partial D_i. \end{aligned} \quad (26)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть существует вектор-функция  $\gamma \in H$ ,  $\gamma \neq 0$ , такая, что выполняется равенство (25). Построим поля  $U_{e,i}$  и  $\overline{U}_{e,i}$  согласно равенствам (15) и (16) соответственно. Предположим, что  $\operatorname{Im} k_i^2 > 0$ , тогда в силу (14) получим

$$\begin{aligned} U_i(M) &\equiv 0, \quad M \in D_i, \\ \overline{U}_i(M) &\equiv 0, \quad U_e(M) \equiv 0, \quad M \in D_e. \end{aligned}$$

Последнее тождество вытекает из условия  $\|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2 = 0$ . Так как диаграмма направленности равна нулю, то и поле во внешней области равно нулю в силу леммы Реллиха [2, с. 86]. Тогда, используя соотношения (19) и (21), получаем, что на поверхности  $\partial D_i$  выполняются равенства

$$0.5\alpha - S_i\beta + K_i\alpha = 0, \quad 0.5\beta - K_i\beta + T_i\alpha = 0, \quad 0.5\alpha + S_i\beta - K_i\alpha = 0, \quad 0.5\beta + K_i\beta - T_i\alpha = 0,$$

из которых очевидно следует, что  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , т.е.  $\gamma = 0$ . Таким образом, в случае существования неизлучающих токов необходимо, чтобы  $\operatorname{Im} k_i^2 = 0$ . Тогда соотношение (14) принимает вид  $\operatorname{Im}(\mathbf{B}\gamma, \gamma) = k_e \|F_e\|_{L_2(\Theta)}^2 + k_e \|F_i\|_{L_2(\Theta)}^2$ . Откуда в силу (25) и леммы Реллиха получаем

$$\overline{U}_i(M) \equiv 0, \quad U_e(M) \equiv 0, \quad M \in D_e. \quad (27)$$

Из тождеств (27) на основании соотношений (19), (21) для предельных значений функций  $U_i$  и  $\overline{U}_e$  и их нормальных производных на  $\partial D_i$  вытекают равенства

$$U_i(P) = \overline{U}_e(P) = \alpha(P), \quad \partial U_i(P) = \partial \overline{U}_e(P) = \beta(P), \quad P \in \partial D_i. \quad (28)$$

Так как определённые формулами (15) и (16) функции  $U_i$  и  $\overline{U}_e$  удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца в  $D_i$ , то легко видеть, что их разность  $w = U_i - \overline{U}_e$  с учётом граничных условий (28) является нетривиальным решением граничной задачи (26). Необходимость установлена.

**Достаточность.** Пусть существует нетривиальное решение задачи (26). Заметим, что оно может существовать лишь при условии  $\text{Im } k_i^2 = 0$  [10]. Тогда, следуя [10] и используя решение  $w$  этой задачи, зададим внутри области  $D_i$  функции  $\bar{U}_e$  и  $U_i$  равенствами

$$\bar{U}_e = \frac{\Delta w + k_i^2 w}{k_e^2 - k_i^2} \quad \text{и} \quad U_i = \frac{\Delta w + k_e^2 w}{k_e^2 - k_i^2}. \quad (29)$$

Из равенств (29) следует, что  $w = \bar{U}_e - U_i$ . Используя свойства гладкости решения и граничные условия задачи (26), получаем

$$\Delta \bar{U}_e + k_e^2 \bar{U}_e = 0, \quad \Delta U_i + k_i^2 U_i = 0 \quad \text{в} \quad D_i, \\ U_i(P) = \bar{U}_e(P) = \xi(P), \quad \partial U_i(P) = \partial \bar{U}_e(P) = \zeta(P), \quad P \in \partial D_i, \quad (30)$$

и  $\eta = \{\xi, \zeta\} \in H$ . Теперь, воспользовавшись представлениями для полей (15) и (16), определим в  $D_e$  поля  $U_e$  и  $\bar{U}_i$ . Далее, учитывая соотношения для предельных значений на  $\partial D_i$  и граничные условия из (30), приходим к тождествам (27), которые служат эквивалентной формулировкой существования неизлучающих токов в силу (24). Достаточность установлена. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ по соглашению № 075-15-2019-1621.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
3. *Martin P.A., Ola P.* Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle // Proc. Roy. Soc. 1993. V. 123. P. 185–208.
4. *Захаров Е.В., Сетуха А.В.* Метод граничных интегральных уравнений в задаче дифракции монохроматической электромагнитной волны на системе идеально проводящих и кусочно-однородных диэлектрических объектов // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1187–1200.
5. *Еремин Ю.А.* Интегральные представления для полей в трёхмерных задачах дифракции на пронизываемых телах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1182–1186.
6. *Купрадзе В.Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. Вып. 2. С. 59–107.
7. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г., Скобелев С.П.* Метод нулевого поля в задачах дифракции волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1490–1494.
8. *Doicu A., Eremiu Yu., Wriedt T.* Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. San Diego, 2000. P. 18–38.
9. *Tribelsky M.I., Miroshnichenko A.E.* Giant in-particle field concentration and fano resonances at light scattering by high-refractive index particles // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 053837.
10. *Еремин Ю.А.* К проблеме существования невидимого рассеивателя в теории дифракции // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 684–687.
11. *Агранович М.С.* Спектральные свойства задач дифракции // Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М., 1977. С. 289–416.
12. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техн. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. М., 1988. Т. 27. С. 131–228.
13. *Алексеев В.Г., Чеботарев А.Ю.* Обратные задачи акустического потенциала // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 8. С. 1189–1199.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 28.03.2021 г.  
После доработки 28.03.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958:532+517.968.23

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ИСТОЧНИКАМИ НА ГРАНИЦАХ

© 2021 г. В. Ф. Пивень

Для трёхмерных фильтрационных течений в неоднородной среде ставятся и исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения с усложнёнными граничными условиями, содержащими сингулярные функции. Источники течения являются произвольными дискретными и располагаются как на границах, так и вне границ. Когда границы моделируются каноническими поверхностями (плоскость и сфера), решения задач представлены в конечном виде. В случае произвольных замкнутых гладких граничных поверхностей с расположенным на них точечным стоком (источником) использован обобщённый потенциал двойного слоя, что позволило редуцировать задачу сопряжения и вторую краевую задачу к сингулярному и гиперсингулярному интегральным уравнениям соответственно. Исследованные задачи – математические модели трёхмерных фильтрационных процессов в неоднородных средах, представляющие интерес, например, для практики разработки природных нефтеносных (водоносных) пластов грунта.

DOI: 10.31857/S0374064121090107

**Введение.** В аэродинамике и теории фильтрации исследуются возникающие на практике задачи, которые характеризуются сингулярными (негладкими) граничными условиями. Трёх- и двумерные задачи обтекания непроницаемых поверхностей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока и протекания воздуха через щели обтекаемых поверхностей исследуются в работах [1, с. 164; 2, 3]. Поставленная в них задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщённым краевым условием редуцируется к сингулярному (гиперсингулярному) интегральному уравнению, которое решается численным методом дискретных особенностей.

Ряд двумерных задач фильтрации в однородной среде (грунте) с источниками на непроницаемых границах, являющихся отрезком прямой или окружностью, изучен в работах [4, с. 87; 5, 6]. В статье [7] исследованы двумерные первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения с источниками течения, которые характеризуются сингулярностями (изолированными особыми точками логарифмического типа и полюсами), расположенными на границах и вне границ. Задачи решены в конечном виде в случае канонических границ (прямая и окружность), а в общем случае произвольных гладких границ редуцированы к сингулярным интегральным уравнениям. В настоящей работе аналогичный подход используется для исследования трёхмерных граничных задач фильтрации в неоднородной, вообще говоря, среде с обобщёнными (усложнёнными) граничными условиями, которые характеризуют источники течения, расположенные на произвольных гладких граничных поверхностях, а также вне этих поверхностей.

**1. Постановка задач.** Рассмотрим трёхмерное стационарное течение несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Течение характеризуем скоростью фильтрации  $\vec{v}$  и обобщённым потенциалом  $\varphi$ , которые как функции точки  $M$  пространства удовлетворяют записанным в безразмерных величинах [8, с. 10] обобщённому закону Дарси

$$\vec{v} = K \nabla \varphi \quad \left( \varphi = -\frac{p + \rho \Pi}{\mu} \right) \quad (1.1)$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $K = K(M) > 0$  – коэффициент проницаемости (проницаемость) среды, он моделируется непрерывно дифференцируемой функцией,  $p$  – давление,  $\mu$  и  $\rho$  – вязкость и плотность жидкости соответственно,  $\Pi$  – потенциал массовых сил,  $\nabla$  – оператор Гамильтона.

Из уравнений (1.1) и (1.2) следует, что обобщённый потенциал  $\varphi(M)$  удовлетворяет всюду в области  $D$  течения, за исключением его сингулярностей (изолированных особых точек), уравнению эллиптического типа

$$\nabla \cdot [K(M)\nabla\varphi(M)] = 0, \quad M \in D. \quad (1.3)$$

В частности, если среда однородная ( $K = \text{const}$ ), то уравнение (1.3) представляет собой уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi(M) = 0, \quad M \in D; \quad (1.3')$$

его решение  $\varphi(M)$  – потенциал – гармоническая в области  $D$  функция координат.

Запишем условия для обобщённого потенциала  $\varphi(M)$  на границах, которые моделируются гладкими поверхностями. Пусть на границе  $\sigma_1$  области  $D$  задан обобщённый потенциал  $\varphi(M)$  (давление  $p(M)$  и потенциал  $\Pi(M)$ ). Тогда выполняется условие

$$\varphi^+(M) = \alpha_1(M), \quad M \in \sigma_1, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_1(M)$  – непрерывная функция. Здесь и далее знаком “+” (знаком “–”) обозначается предельное значение функции при подходе со стороны (противоположной стороны) орта нормали к границе. Считаем, что орт нормали  $\vec{n}_M$ ,  $M \in \sigma_1$ , направлен внутрь области  $D$ . В случае напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы ( $|\rho|\nabla\Pi| \ll |\nabla p|$ ), а давление  $p$  на границе  $\sigma_1$  можно принять постоянным,  $\varphi^+(M) = \text{const}$ ,  $M \in \sigma_1$ , и, следовательно, условие (1.4) принимает вид

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_1. \quad (1.4')$$

Если область  $D$  имеет непроницаемую для жидкости границу  $\sigma_2$ , то, согласно закону (1.1), нормальная составляющая скорости  $v_n = K(M)\partial\varphi(M)/\partial n_M$  равна нулю,  $M \in \sigma_2$ . Тогда, учитывая, что  $K(M) \neq 0$ ,  $M \in \sigma_2$ , имеем условие непротекания

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2. \quad (1.5)$$

Течение в области  $D$  среды проницаемости  $K(M)$  может быть ограничено сингулярной поверхностью  $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ , на которой  $K(M) = \infty$ ,  $M \in \sigma_{01}$ , и/или  $K(M) = 0$ ,  $M \in \sigma_{02}$ . Тогда, согласно закону (1.1), должны выполняться условия

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left(K(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \quad (1.6)$$

Пусть поверхность  $\Gamma$  – граница сопряжения областей  $D_1$  и  $D_2$  ( $D = D_1 \cup D_2$ ), проницаемости сред которых равны  $K_1(M)$  и  $K_2(M)$  соответственно, причём  $K_\nu(M) = k_\nu K(M)$  ( $k_\nu = \text{const}$ ,  $\nu = 1, 2$ ). Течение в областях  $D_1$  и  $D_2$  характеризуют обобщённые потенциалы  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$ . На границе  $\Gamma$  имеем вытекающие из закона (1.1) условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения)

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), \quad k_1\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_2\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma, \quad (1.7)$$

в которых считаем, что орт нормали  $\vec{n}_M$ ,  $M \in \Gamma$ , направлен в область  $D_1$ .

Пусть течение вызвано произвольно заданными источниками в среде проницаемости  $K(M)$  и характеризуется сингулярностями (изолированными особыми точками) обобщённого потенциала  $\varphi_0(M)$ . Потенциал удовлетворяет уравнению (1.3) всюду в области  $D$  течения, за исключением его особых точек, и является гладкой функцией вне них. Представим  $\varphi_0(M)$  в виде

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M),$$

где сингулярности функции  $f_0(M)$  расположены только на некоторых заданных гладких поверхностях, а функции  $f(M)$  – вне этих поверхностей. Учтём источники течения. Обобщённый потенциал  $\varphi(M)$  в случае, когда заданная поверхность – это граница  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  области  $D$  течения, имеет вид

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \varphi_*(M) = f_0(M) + f(M) + \varphi_*(M), \quad M \in D, \quad (1.8)$$

а в случае, когда заданная поверхность – это граница  $\Gamma$  сопряжения областей  $D_1$  и  $D_2$  ( $D = D_1 \cup D_2$ ) среды с проницаемостями  $K_1(M)$  и  $K_2(M)$  соответственно ( $K_\nu = k_\nu K(M)$ ,  $k_\nu = \text{const}$ ), – вид

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu}(\varphi_0(M) + \varphi_*(M)) = \frac{1}{k_\nu}(f_0(M) + f(M) + \varphi_*(M)), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (1.9)$$

Здесь  $\varphi_*(M)$  – обобщённый потенциал возмущений, обусловленных каждой границей  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\Gamma$ .

Учитывая представления (1.8) и (1.9), запишем для обобщённого потенциала  $\varphi_*(M)$  граничные условия (1.4)–(1.7), а также условия в бесконечности в случае неограниченной области  $D$ . Условия (1.4) и (1.4') принимают соответственно вид

$$\varphi_*^+(M) = \alpha_1(M) - f_0(M) - f(M), \quad M \in \sigma_1, \quad (1.10)$$

$$\varphi_*^+(M) = -f_0(M) - f(M), \quad M \in \sigma_1, \quad (1.10')$$

а условия (1.5) – вид

$$\left( \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^+ = -\frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M} - \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2. \quad (1.11)$$

Пусть функции  $f_0(M)$  и  $f(M)$  удовлетворяют условиям (1.6). Тогда имеем

$$\varphi_*^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left( K(M) \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \quad (1.12)$$

Полагая, что на границе  $\Gamma$  выполняются равенства

$$f_0^+(M) = f_0^-(M) = f_0(M), \quad f^+(M) = f^-(M) = f(M),$$

$$\left( \frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left( \frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad \left( \frac{\partial f(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left( \frac{\partial f(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma,$$

получаем условия сопряжения

$$(1 - \lambda)\varphi_*^+(M) - (1 + \lambda)\varphi_*^-(M) = 2\lambda[f_0(M) + f(M)],$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left( \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma, \quad (1.13)$$

где  $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ ,  $\lambda \in (-1, 1)$ , а орт  $\vec{n}_M$ ,  $M \in \Gamma$ , как и выше, направлен внутрь области  $D_1$ .

В условиях (1.10), (1.11) и (1.13) функция  $f_0(M)$  и её производная  $\partial f_0(M)/\partial n_M$  имеют сингулярности на границах. Поэтому обобщённый потенциал возмущений  $\varphi_*(M)$  будет иметь такие же сингулярности на границах, что и функция  $f_0(M)$ , и должен удовлетворять указанным условиям всюду на границах, за исключением изолированных особых точек функции  $f_0(M)$ .

Потребуем для обобщённого потенциала  $\varphi_*(M)$  выполнения в бесконечности условий регулярности [8, с. 20]

$$\varphi_*(M) = O(1/r), \quad K(M)|\nabla\varphi_*(M)| = O(1/r^2) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где  $r$  – расстояние от точки  $M$  до некоторой фиксированной точки  $M_0$  области  $D$ . Условия (1.14) выражают затухание обобщённого потенциала и скорости возмущений на бесконечности и обеспечивают единственность решения поставленных задач.

Постановка задач состоит в следующем. Заданы источники течения (задан обобщённый потенциал  $\varphi_0(M)$ ) и проницаемость среды  $K(M)$  (проницаемости  $K_\nu(M) = k_\nu K(M)$ ,  $k_\nu = \text{const}$ ,  $\nu = 1, 2$ ). Найти обобщённый потенциал  $\varphi_*(M)$ , удовлетворяющий уравнению (1.3) и одному из следующих условий: условию (1.10) (первая краевая задача), условию (1.11) (вторая краевая задача), условию (1.13) (задача сопряжения). Если область  $D$  ограничена сингулярной поверхностью  $\sigma_0$  или/и содержит бесконечно удалённую точку, то  $\varphi_*(M)$  должен также удовлетворять условию (1.12) или/и (1.14). По найденному обобщённому потенциалу  $\varphi_*(M)$  согласно представлениям (1.8) и (1.9) находим искомые обобщённые потенциалы  $\varphi(M)$  и  $\varphi_\nu(M)$ ,  $\nu = 1, 2$ .

**Замечание.** В случае второй внутренней краевой задачи для  $\varphi_*(M)$ , когда область  $D$  течения ограничена непроницаемой поверхностью  $\sigma_2$ , алгебраическая сумма мощностей источников и стоков, расположенных внутри и на поверхности  $\sigma_2$ , должна быть равна нулю в силу уравнения (1.2) неразрывности. Это означает, что характеризующий заданные источники обобщённый потенциал  $\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M)$  должен удовлетворять условию

$$\int_{\sigma_2} K(M) \frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M} d\sigma_M = \int_{\sigma_2} K(M) \left( \frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M} + \frac{\partial f(M)}{\partial n_M} \right) d\sigma_M = 0, \quad (1.15)$$

которое выражает отсутствие потока жидкости через поверхность  $\sigma_2$ . Равенство (1.15) – условие разрешимости второй внутренней краевой задачи [8, с. 39].

Решение поставленных задач представим в конечном виде в случае однородной и кусочно-однородной среды с каноническими границами (плоскость и сфера), а в случае неоднородной среды и произвольных замкнутых гладких границ редуцируем задачи к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

**2. Задачи с каноническими границами.** Рассмотрим трёхмерное течение в однородной среде. Каждую границу  $\Gamma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будем моделировать поверхностью в виде плоскости, уравнение которой  $x = 0$  ( $y, z \in (-\infty, \infty)$ ).

**Теорема 1** (сопряжения на плоскости). Пусть течение в однородной безграничной среде проницаемости  $K = 1$  описывает потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f_1(M) + f_2(M), \quad (2.1)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции  $f_0(M)$  расположены только на плоскости  $x = 0$ , а функций  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  – только вне её в полупространствах  $x > 0$  и  $x < 0$  соответственно. Причём имеют место соотношения

$$f_j(M) = O(1/r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1, 2, \quad (2.2)$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в областях  $D_1(x > 0)$  и  $D_2(x < 0)$  среды с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, сопрягающихся по граничной плоскости  $\Gamma = \{x = 0, y, z \in (-\infty, \infty)\}$ , характеризуют потенциалы  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$ :

$$\begin{aligned} k_1 \varphi_1(M) &= \varphi_0(M) + \lambda(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), \quad M \in D_1, \\ k_2 \varphi_2(M) &= \varphi_0(M) - \lambda(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), \quad M \in D_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ ,  $\lambda \in (-1, 1)$ , а точки  $M = (x, y, z)$  и  $M_* = (-x, y, z)$  симметричны относительно плоскости  $x = 0$ .

**Доказательство.** Учитывая представления (1.9) и (2.3), потенциал возмущений  $\varphi_*(M)$  ищем в виде

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} A_1(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), & M \in D_1, \\ A_2(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), & M \in D_2, \end{cases}$$

в которых  $A_1$  и  $A_2$  – константы. Функция  $f_0(M_*)$  так же, как и заданная функция  $f_0(M)$ , имеет сингулярности только на границе  $\Gamma$ . Поэтому  $f_0(M_*)$  – гармоническая функция всюду в области  $D = D_1 \cup D_2$ . Функции  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  имеют заданные сингулярности в областях  $D_1(x > 0)$  и  $D_2(x < 0)$ . Функции  $f_1(M_*)$ ,  $M_* \in D_2$ , и  $f_2(M_*)$ ,  $M_* \in D_1$ , имеют сингулярности в областях  $D_2$  и  $D_1$ , так как они являются аналитическими продолжениями в эти области функций  $f_1(M)$ ,  $M \in D_1$ , и  $f_2(M)$ ,  $M \in D_2$ , соответственно. Поэтому  $f_1(M_*)$  и  $f_2(M_*)$  – гармонические функции соответственно в областях  $D_1$  и  $D_2$ . Тогда потенциал возмущений  $\varphi_*(M)$  – гармоническая функция, удовлетворяющая в области  $D = D_1 \cup D_2$  уравнению (1.3').

Найдём константы  $A_1$  и  $A_2$ , удовлетворив потенциал  $\varphi_*(M)$  условиям (1.13), в которых в рассматриваемом случае орт нормали  $\vec{n}_M$ ,  $M \in \Gamma$ , сонаправлен с осью  $Ox$ . Учтём потенциал (2.1) и выполняющиеся на границе  $\Gamma$  равенства

$$f_j(M) = f_j(M_*), \quad \frac{\partial f_j(M)}{\partial x} = -\frac{\partial f_j(M_*)}{\partial(-x)}, \quad j = 0, 1, 2, \quad M = M_* = (0, y, z).$$

Получим равенство  $((1 - \lambda)A_1 - (1 + \lambda)A_2 - 2\lambda)\varphi_0(M) = 0$ , т.е.

$$(A_1 + A_2) \left( \frac{\partial f_0(M)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(M)}{\partial x} - \frac{\partial f_2(M)}{\partial x} \right) = 0, \quad M = (0, y, z),$$

которое тождественно удовлетворяется всюду на границе  $\Gamma$ , исключая точки сингулярности функции  $f_0(M)$ ,  $M \in \Gamma$ , если  $A_1 = \lambda$  и  $A_2 = -\lambda$ . Тогда для потенциала  $\varphi_*(M)$  справедливо представление

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} \lambda(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), & M \in D_1, \\ -\lambda(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), & M \in D_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

В силу условий (2.2) потенциал (2.4) удовлетворяет в бесконечности условиям (1.14) при  $K = \text{const}$ . Согласно представлениям (1.9) и (2.4) имеем искомые потенциалы (2.3) течения. Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи задания источников течения и запишем для них потенциалы (2.3). Если источники течения на границе  $\Gamma$  отсутствуют ( $f_0(M) = 0$ ), то [8, с. 257]

$$k_1\varphi_1(M) = f_1(M) + \lambda f_1(M_*) + (1 + \lambda)f_2(M), \quad M \in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(M) = (1 - \lambda)(f_1(M) + f_2(M)), \quad M \in D_2.$$

Когда источники располагаются только на границе  $\Gamma$ , а вне  $\Gamma$  источников нет ( $f_1(M) = 0$ ,  $f_2(M) = 0$ ), то

$$k_1\varphi_1(M) = f_0(M) + \lambda f_0(M_*), \quad M \in D_1, \quad k_2\varphi_2(M) = (1 - \lambda)f_0(M), \quad M \in D_2. \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость  $x = 0$  ( $y, z \in (-\infty, \infty)$ ) моделирует границу  $\sigma_1$  или границу  $\sigma_2$ .

**Теорема 2.** Пусть в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  источники течения располагаются в полупространстве  $x \geq 0$  и течение характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M),$$

в котором сингулярности функции  $f_0(M)$  лежат только на плоскости  $x = 0$ , а функции  $f(M)$  – только в полупространстве  $D(x > 0)$ . Причём имеют место соотношения

$$f_0(M) = O(1/r) \quad \text{и} \quad f(M) = O(1/r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

если функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в области  $D(x > 0)$  среды проницаемости  $K = 1$ , которая ограничена плоскостью  $x = 0$ , если эта плоскость является границей  $\sigma_1$ , характеризует потенциал

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) - \varphi_0(M_*), \quad M \in D, \quad (2.7)$$

а если плоскость  $x = 0$  является границей  $\sigma_2$  – потенциал

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \varphi_0(M_*), \quad M \in D, \quad (2.8)$$

где  $\varphi_0(M_*) = f_0(M_*) + f(M_*)$ , а точка  $M_* = (-x, y, z)$  симметрична точке  $M = (x, y, z)$  относительно плоскости  $x = 0$ .

**Доказательство.** Сингулярности функции  $\varphi_0(M_*)$  расположены на границах  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$ , а функции  $f(M_*)$  – при  $x < 0$ . Поэтому потенциалы возмущений  $\varphi_*(M) = -\varphi_0(M_*)$  и  $\varphi_*(M) = \varphi_0(M_*)$  ( $\varphi_0(M_*) = f_0(M_*) + f(M_*)$ ) – гармонические функции, удовлетворяющие уравнению (1.3') в области  $D(x > 0)$ . Так как на границах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (орт  $\vec{n}_M \in \sigma_2$  направлен вдоль оси  $Ox$ ) справедливы равенства

$$\varphi_0(M) = \varphi_0(M_*), \quad \frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_0(M_*)}{\partial(-x)}, \quad M = M_* = (0, y, z),$$

то потенциалы возмущений  $\varphi_*(M)$  удовлетворяют условиям (1.10') и (1.11) на этих границах всюду, за исключением особых точек функции  $f_0(M)$ . В силу условий (2.6) потенциалы возмущений  $\varphi_*(M)$  удовлетворяют в бесконечности условиям (1.14) при  $K = 1$ . Тогда выражения (2.7) и (2.8) – действительно искомые потенциалы течений. Теорема доказана.

Отметим, что потенциалы (2.7) и (2.8) можно рассматривать как предельные случаи потенциала  $\varphi_1(M)$  представления (2.3) при  $\lambda \rightarrow -1$  и  $\lambda \rightarrow 1$ , когда  $k_1 = 1$  и  $\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M)$  ( $f_1(M) = f(M)$ ,  $f_2(M) = 0$ ).

Из представлений (2.7) и (2.8) вытекают частные случаи потенциалов в зависимости от заданных источников течения: когда на границах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  нет источников ( $f_0(M) = 0$ ), то в представлениях (2.7) и (2.8)  $\varphi_0(M) = f(M)$  [8, с. 260], и, если источники располагаются только на этих границах, а вне них источников нет ( $f(M) = 0$ ), то  $\varphi_0(M) = f_0(M)$ .

Пусть сфера радиуса  $a$  с центром в начале координат – модель границ  $\Gamma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Рассмотрим сначала случай, когда эта сфера – граница сопряжения областей  $D_1(r > a)$  и  $D_2(r < a)$  среды с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно.

**Теорема 3** (сопряжения на сфере). Пусть течение в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f_1(M) + f_2(M), \quad (2.9)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции  $f_0(M)$  располагаются только на расстоянии  $r = a$  от начала координат, а функций  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  – только при  $r > a$  и  $r < a$  соответственно. Причём имеют место соотношения

$$f_j(M) = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \quad f_2(M) = O(1/r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1, 2. \quad (2.10)$$

Тогда течения в областях  $D_1(r > a)$  и  $D_2(r < a)$  сред с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, сопрягающихся по граничной сфере  $\Gamma = \{r = a\}$ , определяют потенциалы  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$ :

$$k_1 \varphi_1(M) = \varphi_0(M) + \lambda \left\{ \frac{a}{r} \sum_{j=0}^1 \left( f_j(M_*) - \frac{1+\lambda}{2} \Phi_j(M_*) \right) + f_2(M) + \frac{1+\lambda}{2} \Phi_2(M) \right\}, \quad M \in D_1,$$

$$k_2 \varphi_2(M) = \varphi_0(M) - \lambda \left\{ \sum_{j=0}^1 \left( f_j(M) + \frac{1-\lambda}{2} \Phi_j(M) \right) + \frac{a}{r} \left( f_2(M_*) - \frac{1-\lambda}{2} \Phi_2(M_*) \right) \right\}, \quad M \in D_2. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\Phi_j(M) = \int_0^1 \tau^{-(1-\lambda)/2} f_j(M\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \quad \Phi_2(M) = \int_{-\infty}^1 \tau^{-(1+\lambda)/2} f_2(M\tau) d\tau,$$

$\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ ,  $\lambda \in (-1, 1)$ , а точки  $M = (x, y, z)$  и  $M_* = (x_*, y_*, z_*)$  сопряжены относительно сферы радиуса  $a$ , т.е. их радиус-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_*$  (декартовы координаты) связаны преобразованием инверсии:

$$\vec{r}_* = \frac{a^2}{r^2} \vec{r} \quad \left( x_* = \frac{a^2}{r^2} x, \quad y_* = \frac{a^2}{r^2} y, \quad z_* = \frac{a^2}{r^2} z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

**Доказательство.** Согласно представлениям (1.9) и (2.11) потенциал возмущения  $\varphi(M)$  ищем в виде

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} A_1 \left\{ \frac{a}{r} \sum_{j=0}^1 (f_j(M_*) - \alpha_1 \Phi_j(M_*)) + f_2(M) + \alpha_1 \Phi_2(M) \right\}, & M \in D_1, \\ A_2 \left\{ \sum_{j=0}^1 (f_j(M) + \alpha_2 \Phi_j(M)) + \frac{a}{r} (f_2(M_*) - \alpha_2 \Phi_2(M_*)) \right\}, & M \in D_2, \end{cases}$$

где

$$\Phi_j(M) = \int_0^1 \tau^{\alpha_1-1} f_j(M\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \quad \Phi_2(M) = \int_{-\infty}^1 \tau^{\alpha_2-1} f_2(M\tau) d\tau,$$

$A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2$ , – константы.

По условию теоремы функция  $f_0(M)$  имеет особые точки только на границе  $\Gamma = \{r = a\}$  сопряжения областей, а функции  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  – только в областях  $D_1 (r > a)$  и  $D_2 (r < a)$  соответственно. Поэтому функция  $f_0(M)$  – гармоническая всюду в области  $D = D_1 \cup D_2$ , а функции  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  – соответственно в областях  $D_2$  и  $D_1$ . Функции  $\Phi_j(M)$ ,  $j = 0, 1$ , и  $\Phi_2(M)$  – непрерывные гармонические функции, удовлетворяющие уравнению (1.3') в областях  $D_2$  и  $D_1$  соответственно, так как они определяются сходящимися в этих областях интегралами. Действительно, полагая в указанных интегралах  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$  и учитывая условия (2.10), согласно обобщённой теореме о среднем значении [9, с. 114], находим

$$\begin{aligned} \Phi_j(M) &= \int_0^1 \tau^{\alpha_1-1} f_j(M\tau) d\tau = \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \int_{\tau_0}^1 \tau^{\alpha_1-1} f_j(M\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} [f_j(M) - f_j(M\tau_0)\tau_0^{\alpha_1}] = \frac{f_j(M)}{\alpha_1}, \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2, \\ \Phi_2(M) &= \int_{-\infty}^1 \tau^{\alpha_2-1} f_2(M\tau) d\tau = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \int_{\tau_0}^1 \tau^{\alpha_2-1} f_2(M\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha_2} \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} [f_2(M) - f_2(M\tau_0)\tau_0^{\alpha_2}] = \frac{f_2(M)}{\alpha_2}, \quad M \in D_1. \end{aligned}$$

Функции  $f_j(M)$ ,  $j = 0, 1$ ,  $M \in D_2$ , и  $f_2(M)$ ,  $M \in D_1$ , – непрерывные гармонические функции, а поэтому такими же являются и функции  $\Phi_j(M)$ ,  $j = 0, 1$ ,  $M \in D_2$ , и  $\Phi_2(M)$ ,  $M \in D_1$ , и, кроме того, они будут удовлетворять тем же условиям (2.10).

Точки  $M$  и  $M_*$  – инверсные относительно сферы радиуса  $a$ , их радиус-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_*$  связаны преобразованием  $\vec{r}_* = a^2\vec{r}/r^2$ . Поэтому, согласно теореме Кельвина [10, с. 282], функции  $af_j(M_*)/r$ ,  $a\Phi_j(M_*)/r$ ,  $j = 0, 1$ , – гармонические в области  $D_1$ , а функции  $af_2(M_*)/r$ ,  $a\Phi_2(M_*)/r$  – гармонические в области  $D_2$ . Следовательно, потенциал возмущений  $\varphi_*(M)$  – гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению (1.3') в области  $D = D_1 \cup D_2$ .

Найдём теперь константы  $A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2$ , используя условия (1.13) на сфере  $\Gamma = \{r = a\}$ . Заменяя переменные  $M\tau$  на  $r\tau$  ( $r\tau = R$ ), имеем

$$\Phi_j(M) = \frac{1}{r^{\alpha_1}} \int_0^r R^{\alpha_1-1} f_j(R) dR, \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$

$$\Phi_2(M) = \frac{1}{r^{\alpha_2}} \int_\infty^r R^{\alpha_2-1} f_2(R) dR, \quad M \in D_1.$$

Находим

$$\frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} = \frac{f_j(M)}{r} - \frac{\alpha_1}{r^{\alpha_1-1}} \int_0^r R^{\alpha_1-1} f_j(R) dR = \frac{1}{r} [f_j(M) - \alpha_1 \Phi_j(M)], \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(M)}{\partial r} = \frac{f_2(M)}{r} - \frac{\alpha_2}{r^{\alpha_2-1}} \int_\infty^r R^{\alpha_2-1} f_2(R) dR = \frac{1}{r} [f_2(M) - \alpha_2 \Phi_2(M)], \quad M \in D_1,$$

или

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} + \alpha_1 \Phi_j(M) &= f_j(M), \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2, \\ r \frac{\partial \Phi_2(M)}{\partial r} + \alpha_2 \Phi_2(M) &= f_2(M), \quad M \in D_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Непрерывно продолжая эти равенства на границу  $\Gamma = \{r = a\}$ , получаем, что они будут справедливы для функций  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  всюду на границе, а для функции  $f_0(M)$  – во всех точках границы за исключением особых точек этой функции.

Так как  $r_* = a^2/r$ , то  $\partial/\partial r = -(a^2/r^2)\partial/\partial r_*$ . Поэтому на границе  $\Gamma$  справедливы равенства

$$\frac{\partial f_j(M)}{\partial r} = -\frac{\partial f_j(M_*)}{\partial r_*}, \quad \frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_j(M_*)}{\partial r_*}, \quad j = 0, 1, 2, \quad M = M_* \quad (r = r_* = a). \quad (2.13)$$

Подставим потенциал  $\varphi_*(M)$  в условия (1.13) на границе  $\Gamma = \{r = a\}$  и учтём представление (2.9) и равенства (2.12) и (2.13) на границе. Тогда на границе, т.е. при  $M = M_*$  ( $r = r_* = a$ ), имеем равенства

$$\begin{aligned} ((1-\lambda)A_1 - (1+\lambda)A_2 - 2\lambda)\varphi_0(M) + ((1-\lambda)\alpha_1 A_1 + (1+\lambda)\alpha_2 A_2) \left( \Phi_2(M) - \sum_{j=0}^1 \Phi_j(M) \right) &= 0, \\ ((\alpha_1 - 1)A_1 - \alpha_2 A_2) \frac{\partial}{\partial r} \left( \sum_{j=0}^1 f_j(M) + \Phi_j(M) - f_2(M) \right) + \\ + (\alpha_1 A_1 + (1 - \alpha_2)A_2) \frac{\partial}{\partial r} \left( f_2(M) + \Phi_2(M) - \sum_{j=0}^1 f_j(M) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Они тождественно удовлетворяются всюду на границе  $\Gamma$ , за исключением особых точек функции  $f_0(M)$ , если константы  $A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2$ , удовлетворяют системе равенств

$$(1 - \lambda)A_1 - (1 + \lambda)A_2 - 2\lambda = 0, \quad (1 - \lambda)\alpha_1 A_1 + (1 + \lambda)A_2 = 0,$$

$$(1 - \alpha_1)A_1 + \alpha_2 A_2 = 0, \quad \alpha_1 A_1 + (1 - \alpha_2)A_2 = 0.$$

Отсюда находим  $A_1 = \lambda$ ,  $A_2 = -\lambda$ ,  $\alpha_1 = (1 + \lambda)/2$ ,  $\alpha_2 = (1 - \lambda)/2$ , причём  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , и поскольку  $\lambda \in (-1, 1)$ , то  $\alpha_1 \in (0, 1)$ ,  $\alpha_2 \in (1, 0)$ .

Тогда потенциал  $\varphi_*(M)$  принимает следующий вид:

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} \lambda \left\{ \frac{a}{r} \sum_{j=0}^1 \left( f_j(M_*) - \frac{1+\lambda}{2} \Phi_j(M_*) \right) + f_2(M) + \frac{1+\lambda}{2} \Phi_2(M) \right\}, & M \in D_1, \\ -\lambda \left\{ \sum_{j=0}^1 \left( f_j(M) + \frac{1-\lambda}{2} \Phi_j(M) \right) + \frac{a}{r} \left( f_2(M_*) - \frac{1-\lambda}{2} \Phi_2(M) \right) \right\}, & M \in D_2, \end{cases}$$

где

$$\Phi_j(M) = \int_0^1 \tau^{-(1-\lambda)/2} f_j(M\tau) d\tau, \quad \Phi_2(M) = \int_\infty^1 \tau^{-(1+\lambda)/2} f_2(M\tau) d\tau.$$

Потенциал  $\varphi_*(M)$ ,  $M \in D_1$ , удовлетворяет в бесконечности условию (1.14), поскольку заданные функции  $f_j(M)$  и, следовательно,  $\Phi_j(M)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , удовлетворяют условиям (2.10). Подставляя функцию  $\varphi_*(M)$  в представление (1.9), получаем искомые потенциалы (2.11). Теорема доказана.

Запишем потенциалы (2.11) для частных случаев расположения источников течения. Если на границе  $\Gamma$  нет источников ( $f_0(M) = 0$ ), то имеем [8, с. 378]

$$k_1 \varphi_1(M) = f_1(M) + \frac{\lambda a}{r} \left( f_1(M_*) - \frac{1+\lambda}{2} \Phi_1(M_*) \right) + (1 + \lambda)(f_2(M) + \lambda \Phi_2(M)), \quad M \in D_1,$$

$$k_2 \varphi_2(M) = (1 - \lambda) \left( f_1(M) - \frac{\lambda}{2} \Phi_1(M) \right) + f_2(M) - \frac{\lambda a}{r} \left( f_2(M_*) - \frac{1-\lambda}{2} \Phi_2(M_*) \right), \quad M \in D_2. \quad (2.14)$$

Сюда включены случаи, когда источники располагаются только в области  $D_1$  ( $r > a$ ) при  $f_2(M) = 0$  или только в области  $D_2$  ( $r < a$ ) при  $f_1(M) = 0$ . Если источники лежат только на границе, а вне её источников нет ( $f_1(M) = 0$  и  $f_2(M) = 0$ ), то находим, что

$$k_1 \varphi_1(M) = f_0(M) + \frac{\lambda a}{r} \left( f_0(M_*) - \frac{1+\lambda}{2} \Phi_0(M_*) \right), \quad M \in D_1,$$

$$k_2 \varphi_2(M) = (1 - \lambda) \left( f_0(M) - \frac{\lambda}{2} \Phi_0(M) \right), \quad M \in D_2. \quad (2.15)$$

В потенциалах (2.14) и (2.15) функции  $\Phi_j(M)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , такие же, как и в формулах (2.11).

Пусть теперь сфера радиуса  $a$  с центром в начале координат моделирует границу  $\sigma_1$  или границу  $\sigma_2$ .

**Теорема 4.** Пусть течение в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  описывает потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M), \quad (2.16)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции  $f_0(M)$  располагаются на расстоянии  $r = a$  от начала координат, а функции  $f(M)$  — только на расстоянии либо  $r > a$ , либо  $r < a$ . Причём имеют место соотношения

$$f_0(M) = O(1) \quad \text{и} \quad f(M) = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

если сингулярности функции  $f(M)$  лежат в области  $r > a$ , и

$$f(M) = O(1/r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

если сингулярности функции  $f(M)$  лежат в области  $r < a$ . Тогда течение в области  $D$  с границей  $\sigma_1$  характеризует потенциал

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) - \frac{a}{r} \varphi_0(M_*), \quad M \in D, \quad (2.19)$$

а с границей  $\sigma_2$  – потенциал

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \frac{a}{r} (\varphi_0(M_*) - \Phi_p(M_*)), \quad M \in D. \quad (2.20)$$

Здесь

$$\Phi_p(M_*) = \int_p^1 \varphi_0(M_* \tau) d\tau, \quad p = \begin{cases} 0, & \text{если } M \in D(r > a), \\ \infty, & \text{если } M \in D(r < a), \end{cases}$$

$\varphi_0(M_*) = f_0(M_*) + f(M_*)$ . Точки  $M$  и  $M_*$  – сопряжённые относительно сферы радиуса  $a$ , их радиус-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_*$  связаны преобразованием  $\vec{r}_* = a^2 \vec{r} / r^2$ .

**Доказательство.** Согласно представлениям (1.8), (2.17), (2.19) и (2.20) потенциалы возмущений имеют вид

$$\varphi_*(M) = -\frac{a}{r} \varphi_0(M_*) = -\frac{a}{r} (f_0(M_*) + f(M_*)), \quad M \in D, \quad (2.21)$$

$$\varphi_*(M) = \frac{a}{r} (\varphi_0(M_*) - \Phi_p(M_*)) = \frac{a}{r} (f_0(M_*) + f(M_*) - \Phi_p(M_*)), \quad M \in D, \quad (2.22)$$

где

$$\Phi_p(M_*) = \int_p^1 (f_0(M_* \tau) + f(M_* \tau)) d\tau.$$

Определяющий функцию  $\Phi_p(M_*)$  интеграл существует (сходится) при  $p = 0$  и  $p = \infty$  в силу условий (2.17) и (2.18).

Функция  $f_0(M_*)$  имеет заданные сингулярности только на сфере (при  $r = a$ ) и, следовательно, является гармонической всюду в области  $D$  – вне и внутри сферы. Функция  $f(M)$  имеет заданные сингулярности только либо вне (при  $r > a$ ), либо внутри (при  $r < a$ ) сферы. Поэтому, согласно представлению (2.16), функции  $\varphi_0(M)$  и  $\Phi_0(M)$  ( $\varphi_0(M)$  и  $\Phi_\infty(M)$ ) – гармонические в области  $D(r > a)$  (в области  $D(r < a)$ ). Тогда на основании теоремы Кельвина функции  $a\varphi_0(M_*)/r$  и  $a\Phi_0(M_*)/r$  (функции  $a\varphi_0(M_*)/r$  и  $a\Phi_\infty(M_*)/r$ ) будут гармоническими в области  $D(r > a)$  (в области  $D(r < a)$ ). Следовательно, будут гармоническими, т.е. будут удовлетворять в области  $D$  уравнению (1.3'), и потенциалы возмущений (2.21) и (2.22).

Подставляя потенциал (2.21) в условие (1.10'), убеждаемся, что на границе  $\sigma_1$ , т.е. при  $M = M_*$  ( $r = a$ ), оно удовлетворяется тождественно.

Покажем, что потенциал (2.22) удовлетворяет условию (1.11) на границе  $\sigma_2$ , т.е. при  $M = M_*$  ( $r = a$ ). Аналогично доказанным представлениям (2.12) имеем

$$r \frac{\partial \Phi_p(M)}{\partial r} + \Phi_p(M) = \varphi_0(M), \quad M \in D. \quad (2.23)$$

На сфере справедливы аналогичные (2.13) равенства

$$\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi_0(M_*)}{\partial r_*}, \quad \frac{\partial \Phi_p(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_p(M_*)}{\partial r_*}, \quad M = M_* \quad (r = a). \quad (2.24)$$

Непрерывно продолжим равенство (2.23) из области  $D$  на сферу ( $r = a$ ). Учитывая представления (2.16) и (2.24), находим для потенциала (2.22) на границе  $\sigma_2$ , т.е. при  $M = M_*$  ( $r = a$ ), предельное значение

$$\left(\frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial r}\right)^+ = \frac{1}{a} \left( a \frac{\partial \Phi_p(M)}{\partial r} + \Phi_p(M) \right) - \frac{\varphi_0(M)}{a} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = -\frac{\partial f_0(M)}{\partial r} - \frac{\partial f(M)}{\partial r}, \quad M \in \sigma_2.$$

Подставим его в граничное условие (1.11) и убедимся, что это условие тождественно удовлетворяется. Итак, потенциалы (2.21) и (2.22) удовлетворяют граничным условиям, причём всюду на границах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  за исключением изолированных особых точек функции  $f_0(M)$ .

Видим, что потенциалы (2.21) и (2.22) возмущений  $\varphi_*(M)$  удовлетворяют в бесконечности условиям (1.14) при  $K = 1$ . Подставляя эти потенциалы в представление (1.8), получаем искомые потенциалы (2.19) и (2.20) течений. Теорема доказана.

Из общих представлений (2.19) и (2.20) вытекают представления для потенциалов в частных случаях расположения источников течения: когда источники имеются либо только вне границ  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $f_0(M) = 0$ ,  $\varphi_0(M) = f(M)$ ), либо только на границах ( $f(M) = 0$ ,  $\varphi_0(M) = f_0(M)$ ).

Применим теоремы 1–4 для исследования конкретных трёхмерных течений в среде с границами  $\Gamma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , моделируемых плоскостью и сферой. Ряд течений с источниками вне границ изучен в работе [8, с. 375]. Исследуем некоторые течения с источниками, заданными на границах.

Течение к точечному стоку мощности  $Q$  в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = \frac{Q}{4\pi r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

В случае задачи сопряжения на плоскости  $x = 0$  ( $y, z \in (-\infty, \infty)$ ) потенциалы течения в областях  $D_1(x > 0)$  и  $D_2(x < 0)$  среды с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно в силу представления (2.5), вытекающего из теоремы 1, принимают вид

$$\varphi_\nu(M) = \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)r}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2.$$

Поле скоростей течения, согласно закону (1.1), имеет только радиальную составляющую

$$v_{\nu r}(M) = k_\nu \frac{d\varphi_\nu(M)}{dr} = -\frac{Qk_\nu}{2\pi(k_1 + k_2)r^2}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

а поток жидкости через поверхность  $\sigma$  сферы радиуса  $r$  равен (как и должно быть) мощности стока  $Q$ :

$$\int_{\sigma/2} \vec{v}_1 \cdot d\vec{\sigma} + \int_{\sigma/2} \vec{v}_2 \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q}{2\pi} \int_{\sigma/2} \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Omega = Q.$$

На основании представлений (2.7) и (2.8) теоремы 2 в области  $D(x > 0)$  потенциал  $\varphi(M)$  равен нулю (течение не существует), если плоскость  $x = 0$  – эквипотенциальная граница  $\sigma_1$ , и потенциал  $\varphi(M)$  течения к стоку мощности  $2Q$ , когда плоскость  $x = 0$  – непроницаемая граница  $\sigma_2$ , равен  $Q/(2\pi r)$ .

Течение в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  от диполя, момент которого  $m$  ориентирован вдоль оси  $Ox$ , характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = -\frac{mx}{4\pi r^3} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Используя представление (2.5), находим потенциалы течения в областях  $D_1(x > 0)$  и  $D_2(x < 0)$  среды с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно:

$$\varphi_1(M) = -\frac{2mk_2x}{k_1(k_1 + k_2)r^3}, \quad M \in D_1, \quad \varphi_2(M) = -\frac{2mx}{(k_1 + k_2)r^3}, \quad M \in D_2.$$

Согласно теореме 2 в области  $D(x > 0)$  потенциал течения  $\varphi(M)$  от диполя с моментом  $2m$  равен  $-mx/(2\pi r^3)$ , если плоскость  $x = 0$  – эквипотенциальная граница  $\sigma_2$ , и равен нулю (такого течения нет), когда плоскость  $x = 0$  – непроницаемая граница  $\sigma_2$ . В случае границы  $\sigma_2(x = 0)$  существует течение от диполя, момент которого  $2m$  ортогонален оси  $Ox$  (направлен, например, вдоль оси  $Oy$ ), которое характеризует потенциал  $\varphi(M) = -my/(2\pi r^3)$ ,  $M \in D(x > 0)$ .

Исследуем теперь течение от стока мощности  $Q$ , расположенного на сфере радиуса  $a$  с центром в начале координат. Течение в безграничной среде проницаемости  $K = 1$  описывает потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = \frac{Q}{4\pi R} \quad (R = \sqrt{r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2}),$$

где  $\gamma$  – угол между радиус-векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  произвольной точки  $M$  пространства и точки  $M_0$  расположения стока, отстоящей на расстоянии  $a$  от начала координат. Согласно представлению (2.15), вытекающему из теоремы 3, находим потенциалы течения в областях  $D_1(r > a)$  и  $D_2(r < a)$  среды с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно:

$$\varphi_1(M) = \frac{Q}{4\pi(k_1 + k_2)} \left( \frac{2}{R} - \lambda \int_0^1 \frac{\tau^{(\lambda-1)/2} d\tau}{|\vec{r} - \tau\vec{r}_0|} \right), \quad M \in D_1,$$

$$\varphi_2(M) = \frac{Q}{4\pi(k_1 + k_2)} \left( \frac{2}{R} - \lambda \int_0^1 \frac{\tau^{(\lambda-1)/2} d\tau}{|\tau\vec{r} - \vec{r}_0|} \right), \quad M \in D_2,$$

где  $|\vec{r} - \tau\vec{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2\tau ra \cos \gamma + (\tau a)^2}$ ,  $|\tau\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(\tau r)^2 - 2\tau ra \cos \gamma + a^2}$ .

На основании представлений (2.19) и (2.20) теоремы 4 находим, что потенциал  $\varphi(M)$  равен нулю (течения нет), когда сфера – эквипотенциальная граница  $\sigma_1$ , и что для потенциала течения в области  $D(r > a)$  справедливо равенство

$$\varphi(M) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{2}{R} - \int_0^1 \frac{d\tau}{|\vec{r} - \tau\vec{r}_0|} \right) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2} + a - r \cos \gamma}{r(1 - \cos \gamma)} \right),$$

когда сфера – непроницаемая граница  $\sigma_2$ . Течение в области  $D(r < a)$  с границей  $\sigma_2$  невозможно в силу уравнения неразрывности (1.2): условие (1.15) при  $f(M) = 0$  не выполняется.

**3. Задачи с произвольными замкнутыми гладкими границами.** Рассмотрим общий случай, когда границы моделируются произвольными замкнутыми гладкими поверхностями и течение происходит в неоднородной среде. Пусть течение в безграничной среде проницаемости  $K(M)$  вызвано стоком мощности  $Q$ , расположенным в точке  $M_0$ , и характеризуется обобщённым потенциалом

$$f_0(M) = Q\Phi(M, M_0).$$

Здесь  $\Phi(M, M_0)$  – фундаментальное решение уравнения (1.3), являющееся функцией координат точки  $M$  ( $M \neq M_0$ ), его можно представить в следующем виде [8, с. 361]:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{H_1(M, M_0)}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}R_{MM_0}} + H_2(M, M_0), \quad (3.1)$$

где  $R_{MM_0} = |\vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}|$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ , радиус-векторы которых  $\vec{r}_M$  и  $\vec{r}_{M_0}$ , а  $H_1(M, M_0)$  и  $H_2(M, M_0)$  – непрерывно дифференцируемые функции по координатам точек  $M$  и  $M_0$ , причём  $H_1(M_0, M_0) = 1$ .

Если область  $D$  ограничена сингулярной поверхностью  $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ , то согласно формулам (1.12) функция  $\Phi(M, M_0)$  удовлетворяет условиям

$$\Phi^+(M, M_0) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left( K(M) \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial n_M} \right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \quad (3.2)$$

в которых  $M_0 \notin \sigma_0$ . В бесконечности для функции  $\Phi(M, M_0)$  выполняются соотношения

$$\Phi(M, M_0) = O(1/R_{MM_0}), \quad K(M)|\nabla \Phi(M, M_0)| = O(1/R_{MM_0}^2) \quad \text{при} \quad R_{MM_0} \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Фундаментальные решения  $\Phi(M, M_0)$ , удовлетворяющие представлениям (3.1)–(3.3), известны для сред, проницаемости  $K(M)$  которых принадлежат достаточно широкому классу функций [8, с. 354].

Пусть течение вызвано стоком мощности  $Q$ , расположенным в точке  $M_0$  заданной гладкой поверхности, а также другими источниками вне поверхности. Течение в среде проницаемости  $K(M)$  характеризует обобщённый потенциал

$$\varphi_0(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M), \quad (3.4)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции  $f(M)$  лежат вне поверхности. Рассмотрим случаи, когда заданная поверхность моделирует границу  $\Gamma$  раздела сред разных проницаемостей или непроницаемую границу  $\sigma_2$ .

**Теорема 5** (сопряжения на произвольной гладкой замкнутой поверхности). Пусть течение в среде проницаемости  $K(M)$  характеризует обобщённый потенциал (3.4). Тогда течение в областях  $D_1$  и  $D_2$  среды с проницаемостями  $K_1$  и  $K_2$  соответственно ( $K_\nu = k_\nu K(M)$ ,  $k_\nu = \text{const}$ ,  $\nu = 1, 2$ ) характеризуют обобщённые потенциалы  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$ :

$$k_\nu \varphi_\nu(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M) + \int_\Gamma \mathcal{K}(M, N)(g(N) + \lambda Q\Phi(N, M_0)) d\sigma_N, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (3.5)$$

где функция  $g(M)$  – решение интегрального уравнения

$$g(M) - 2\lambda \int_\Gamma \mathcal{K}(M, N)g(N) d\sigma_N - 2\lambda^2 Q \int_\Gamma \mathcal{K}(M, N)\Phi(N, M_0) d\sigma_N = 2\lambda f(M), \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0, \quad (3.6)$$

в котором  $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ ,  $\lambda \in (-1, 1)$ , функции  $f(M)$  и  $K(M)$ ,  $M \in \Gamma$ , являются гладкими, а ядро задаётся равенством  $\mathcal{K}(M, N) = K(N)\partial\Phi(M, N)/\partial n_N$ .

**Доказательство.** Согласно представлениям (1.9), (3.4) и (3.5) обобщённые потенциалы течения принимают вид

$$k_\nu \varphi_\nu(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M) + \varphi_0(M), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

где  $\varphi_*(M)$  – обобщённый потенциал возмущений, обусловленных различием проницаемостей  $K_1(M)$  и  $K_2(M)$  среды в областях  $D_1$  и  $D_2$  соответственно ( $D = D_1 \cup D_2$ ).

Будем искать функцию  $\varphi_*(M)$  в виде обобщённого потенциала двойного слоя [8, с. 366]

$$\varphi_*(M) = \int_\Gamma K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} (g(N) + C\Phi(N, M_0)) d\sigma_N, \quad M \in D. \quad (3.7)$$

Здесь  $g(N)$  – непрерывная на поверхности  $\Gamma$  функция, а  $\Phi(M, N)$  и  $\Phi(N, M_0)$  – фундаментальные решения уравнения (1.3) по переменным  $M \in D$  и  $N \in \Gamma$  ( $N \neq M_0$ ) соответственно, орт нормали  $\vec{n}_N \in \Gamma$  направлен внутрь области  $D_1$ ,  $C$  – константа.

Найдём константу  $C$  и уравнение для функции  $g(M)$ , используя условия (1.13). Для этого непрерывно продолжим обобщённый потенциал (3.7) на поверхность  $\Gamma$ , предполагая, что она принадлежит классу Ляпунова. Получим предельные значения

$$\begin{aligned} \varphi_*^\pm(M) = \int_{\Gamma} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} (g(N) + C\Phi(N, M_0)) d\sigma_N \pm \\ \pm \frac{g(M) + C\Phi(M, M_0)}{2}, \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где функция  $\Phi(M, M_0)$  имеет при  $M = M_0 \in \Gamma$  особенность (3.1), а интеграл существует при  $M \neq M_0$  в смысле главного значения.

Учитывая представления (3.4), (3.8) и непрерывность производной двойного слоя по орту нормали  $\vec{n}_M \in \Gamma$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} g(M) - 2\lambda \int_{\Gamma} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} (g(N) + C\Phi(N, M_0)) d\sigma_N + \\ + (C - \lambda Q)\Phi(M, M_0) = 2\lambda f(M), \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0. \end{aligned}$$

Это равенство будет тождественно удовлетворяться на всей поверхности  $\Gamma$ , исключая точку  $M_0$  расположения стока, если  $C = \lambda Q$ , а функция  $g(M)$  удовлетворяет интегральному уравнению (3.6).

Так как  $C = \lambda Q$ , то обобщённый потенциал (3.7) принимает вид

$$\varphi_*(M) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) (g(N) + \lambda Q\Phi(N, M_0)) d\sigma_N, \quad M \in D, \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{K}(M, N) = K(N)\partial\Phi(M, N)/\partial n_N$ .

Слагаемое  $\lambda Q\Phi(N, M_0)\mathcal{K}(M, N)$  подынтегрального выражения в (3.9) при  $N \rightarrow M_0$  имеет интегрируемую особенность в силу представления (3.1) для  $\Phi(N, M_0)$ , и поэтому интеграл сходится (существует). Следовательно, обобщённый потенциал (3.9) существует. Он удовлетворяет уравнению (1.3), а также условиям (1.12), поскольку  $\Phi(M, N)$  – фундаментальное решение этого уравнения, отвечающее условиям (3.2). Так как  $\mathcal{K}(M, N) = O(R_{MN}^{-2})$  при  $R_{MN} \rightarrow \infty$  согласно условию (3.3), то  $\varphi_*(M)$  удовлетворяет в бесконечности условию (1.14).

Подставляя обобщённый потенциал (3.9) в представление (1.9), получаем искомые обобщённые потенциалы (3.5) течения, если функция  $g(M)$  удовлетворяет интегральному уравнению (3.6). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (3.6). Так как поверхность  $\Gamma$  принадлежит классу Ляпунова, то для ядра  $\mathcal{K}(M, N)$  в силу представления (3.1) имеем оценку  $|\mathcal{K}(M, N)| \leq O(R_{MN}^{2-\mu})$  при  $R_{MN} \rightarrow 0$ , где  $\mu = (0, 1]$ . Поэтому первый интеграл в уравнении (3.6) имеет слабую сингулярность (типа Фредгольма). На основании представления (3.1) оценим во втором интеграле в (3.6) подынтегральное выражение

$$\mathcal{K}(M, N)\Phi(N, M_0) = K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} \Phi(N, M_0).$$

При  $N \rightarrow M = M_0 \in \Gamma$  имеем оценку  $|\mathcal{K}(M, N)\Phi(N, M_0)| \leq A/R_{MM_0}^{3-\mu}$ ,  $\mu = (0, 1]$ ,  $A = \text{const} > 0$ . Следовательно, второй интеграл в уравнении (3.6) имеет при  $M = M_0$  неинтегрируемую особенность, он определён при  $M \neq M_0$ .

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к неоднородному сингулярному интегральному уравнению второго рода, содержащему в качестве слагаемого интеграл с заданным подынтегральным выражением, который определён при  $M \neq M_0$ .

Представление (3.5) задачи сопряжения получено для произвольно заданных источников течения. В частности, если сток на границе  $\Gamma$  отсутствует ( $Q = 0$ ), то имеем потенциалы [8, с. 395]

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu} \left( f(M) + \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) g(N) d\sigma_N \right), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

где функция  $g(M)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(M) - 2\lambda \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) g(N) d\sigma_N = 2\lambda f(M), \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0.$$

Если на границе  $\Gamma$  имеется только сток мощности  $Q$ , а источников вне границы нет ( $f(M) = 0$ ), то

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu} \left\{ Q\Phi(M, M_0) + \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) [g(N) + \lambda Q\Phi(N, M_0)] d\sigma_N \right\}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

где функция  $g(M)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(M) - 2\lambda \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) g(N) d\sigma_N - 2\lambda^2 Q \int_{\Gamma} \mathcal{K}(M, N) \Phi(N, M_0) d\sigma_N = 0, \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0.$$

Это уравнение неоднородное, поскольку последнее слагаемое в нём – заданная функция точки  $M$ , определённая при  $M \neq M_0$ .

Пусть произвольная гладкая поверхность  $\sigma_2$  моделирует непроницаемую границу области  $D$  течения. В этом случае имеют место вторая внешняя и внутренняя краевые задачи для обобщённого потенциала возмущений  $\varphi_*(M)$ . Для разрешимости внутренней задачи обобщённый потенциал (3.4) должен удовлетворять условию (1.15), которое принимает вид

$$\int_{\sigma_2} K(M) \left( Q \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial n_M} + \frac{\partial f(M)}{\partial n_M} \right) d\sigma_M = 0. \quad (3.10)$$

Условие (3.10) означает, что должна быть равна нулю алгебраическая сумма мощностей стока  $Q$ , расположенного на поверхности  $\sigma_2$ , и источников, заключённых внутри поверхности, которые моделируются сингулярностями функции  $f(M)$ .

**Теорема 6.** Пусть течение в безграничной среде проницаемости  $K(M)$  описывает обобщённый потенциал (3.4), удовлетворяющий условию (3.10) в случае внутренней краевой задачи. Тогда течение в области  $D$  с непроницаемой границей  $\sigma_2$  характеризует обобщённый потенциал

$$\varphi(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M) + \int_{\sigma_2} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} h(N) d\sigma_N, \quad (3.11)$$

где функция  $h(M)$  – решение интегрального уравнения

$$\int_{\sigma_2} \mathcal{K}(M, N) h(N) d\sigma_N = -Q \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0, \quad (3.12)$$

в котором ядро задаётся равенством  $\mathcal{K}(M, N) = K(N) \partial^2 \Phi(M, N) / \partial n_M \partial n_N$ , а орт нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $\sigma_2$  направлен внутрь области  $D$ .

**Доказательство.** Согласно представлениям (1.8) и (3.11) обобщённый потенциал возмущений  $\varphi_*(M)$  ищем в виде обобщённого потенциала двойного слоя

$$\varphi_*(M) = \int_{\sigma_2} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} h(N) d\sigma_N, \quad M \in D, \quad (3.13)$$

где  $h(M)$  и  $K(M)$  – непрерывные на поверхности  $\sigma_2$  функции,  $\Phi(M, N)$ ,  $M \neq N$ , – фундаментальное решение уравнения (1.3). Подставим это представление для  $\varphi_*(M)$  в условие (1.11) и учтём заданный обобщённый потенциал (3.4). Учитывая, согласно монографии [11, с. 126, 139], непрерывность производной двойного слоя по орту нормали  $\vec{n}_M$ ,  $M \in \sigma_2$ , получаем для функции  $h(M)$  интегральное уравнение

$$\int_{\sigma_2} K(N) \frac{\partial^2 \Phi(M, N)}{\partial n_N \partial n_M} h(N) d\sigma_N = -Q \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0,$$

которое совпадает с уравнением (3.12).

Обобщённый потенциал (3.13) удовлетворяет уравнению (1.3) и условиям (1.12) и (1.14), так как  $\Phi(M, N)$  – фундаментальное решение уравнения (1.3), отвечающее условиям (3.2) и (3.3). Подставляя обобщённый потенциал (3.13) в представление (1.8), получаем искомый обобщённый потенциал (3.11). Теорема доказана.

Ядро  $K(M, N)$  интегрального уравнения (3.12) имеет согласно представлению (3.1) сильную сингулярность:  $K(M, N) = O(R_{MN}^{-3})$  при  $R_{MN} \rightarrow 0$ . Поэтому интеграл в уравнении понимается в смысле конечной части по Адамару [12, с. 143]. Правая часть уравнения содержит непрерывную функцию  $\partial f(M)/\partial n_M$  и слагаемое  $Q \partial \Phi(M, M_0)/\partial n_M = O(R_{MM_0}^{-2})$  при  $R_{MM_0} \rightarrow 0$ , имеющее особенность при  $M = M_0$ .

Таким образом, исследование второй краевой задачи редуцируется к неоднородному гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода с сингулярностью в правой части.

Рассмотрим частные случаи расположения заданных источников течения и запишем его обобщённые потенциалы (3.11). Если на границе  $\sigma_2$  нет стока ( $Q = 0$ ), то

$$\varphi(M) = f(M) + \int_{\sigma_2} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} h(N) d\sigma_N, \quad M \in D,$$

где функция  $h(N)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{\sigma_2} K(M, N) h(N) d\sigma_N = -\frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0.$$

Если на границе  $\sigma_2$  имеется только сток мощности  $Q$ , а источников вне границы  $\sigma_2$  нет ( $f(M) = 0$ ), то имеем обобщённый потенциал течения в случае внешней задачи

$$\varphi(M) = Q\Phi(M, M_0) + \int_{\sigma_2} K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} h(N) d\sigma_N, \quad M \in D,$$

где функция  $h(N)$  – решение интегрального уравнения

$$\int_{\sigma_2} K(M, N) h(N) d\sigma_N = -Q \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0.$$

Внутренняя краевая задача не имеет решения, так как для неё не выполняется условие (3.10) при  $f(M) = 0$ .

Решение первой краевой задачи имеет место только в случае, когда на произвольной гладкой поверхности  $\sigma_1$  отсутствует сток ( $Q = 0$ ), оно получено в монографии [8, с. 396].

**Закключение.** Подводя итоги, отметим, что решения основных задач фильтрации (первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения) представлены в конечном виде для случая канонических границ (плоскость и сфера) в однородной среде, а в общем случае произвольных замкнутых гладких границ в неоднородной среде вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к гиперсингулярному и сингулярному интегральным уравнениям на границах. Эти уравнения могут быть решены численным методом дискретных особенностей [1, с. 433].

Представленные теоремами 1–6 исследования – математические модели фильтрационных процессов в граничных задачах, возникающих на практике, например, при добыче воды (нефти) из природных пластов грунта. Они могут также представлять интерес при изучении процессов иной физической природы (теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), которые характеризуются законами, математически аналогичными законам (1.1) и (1.2).

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Сетухе за полезное обсуждение результатов работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglou M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modelling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // *Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model.* 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 8. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 8. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1970.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
11. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., 2001.
12. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

Орловский государственный университет  
им. И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.  
После доработки 12.05.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

## О СВОЙСТВАХ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. Н. А. Раутиан

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов, представимыми интегралами Стильтьеса от экспоненты. Применяется подход, основывающийся на изучении однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Доказывается существование сжимающей  $C_0$ -полугруппы. В качестве следствия для полученной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве и начальной задачи для исходного абстрактного интегро-дифференциального уравнения установлена их корректная разрешимость и указана связь между решениями этих задач.

DOI: 10.31857/S0374064121090119

**Введение.** В работе проводится исследование абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанное уравнение является операторной моделью линейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающего в теории вязкоупругости:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) = & \rho^{-1}(\mu \Delta u(x, t) + 3^{-1}(\mu + \lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u(x, t))) - \\ & - \int_0^t K_1(t - \tau) \rho^{-1} \mu (\Delta u(x, \tau) + 3^{-1} \operatorname{grad}(\operatorname{div} u(x, \tau))) d\tau - \\ & - \int_0^t K_2(t - \tau) (3\rho)^{-1} \lambda \operatorname{grad}(\operatorname{div} u(x, \tau)) d\tau + f(x, t), \end{aligned}$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ ,  $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$  – вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с гладкой границей,  $\rho > 0$  – постоянная плотность,  $\lambda$ ,  $\mu$  – положительные параметры (коэффициенты Ламе),  $\Delta$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, x_2, x_3$  (см. [1–3]). Будем предполагать, что на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  выполнено нулевое условие Дирихле:  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Функции  $K_1(t)$  и  $K_2(t)$  ядер интегральных операторов – положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды. Предполагается, что функции  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , представимы интегралами Стильтьеса от экспоненты (см. равенство (3)).

В настоящее время имеется обширная литература, посвящённая исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–19] и библиографию в них).

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [12–16], в которых проведён спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Подход к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, основывающийся на применении теории полугрупп, развивался в работах [9, 15, 17–19].

**1. Определения. Обозначения. Постановка задачи.** Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $A$  – самосопряжённый положительный,  $A^* = A \geq \kappa_0 I$  ( $\kappa_0 = \text{const} > 0$ ), оператор, действующий в пространстве  $H$  и имеющий ограниченный обратный. Пусть  $B$  – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве  $H$ , с областью определения  $D(B)$  такой, что  $D(A) \subseteq D(B)$ , удовлетворяющий при некотором  $\kappa > 0$  неравенству  $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$  для любого  $x \in \text{Dom}(A)$ ,  $I$  – тождественный оператор в пространстве  $H$ .

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \int_0^t K_1(t-s)Au(s)ds - \int_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Предположим, что функция  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , имеет следующее представление:

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где  $d\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) – положительная мера, порождаемая неубывающей непрерывной справа на  $\mathbb{R}_+$  функцией  $\mu_i$ . Интеграл понимается в смысле Стильеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Введём обозначение

$$M_i(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau} d\mu_i(\tau)}{\tau}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B. \quad (6)$$

Из самосопряжённости положительного оператора  $A$  и неотрицательного оператора  $B$ , а также из условий (4) следует, что оператор  $A_0$  является самосопряжённым и положительным.

Отметим, что задачи вида (1), (2) представляют собой операторные модели задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [1, 2]) и теплофизике (см. [7–10]). Результаты о спектральном анализе уравнения (1) в случае, когда ядра  $K_i(t)$  представляют собой убывающие экспоненты, изложены в монографии [12].

**Замечание 1.** Из свойств операторов  $A$  и  $B$  и неравенства Гайнца (см. [20, с. 177–178]) следует, что оператор  $A_0$  является обратимым,  $A_0^{-1}$  – ограниченный оператор, а операторы  $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$  и  $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$  допускают ограниченное замыкание в  $H$ .

**Определение 1.** Назовём вектор-функцию  $u(t)$  *классическим решением* задачи (1), (2), если  $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$ ,  $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$  и  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения  $t \in \mathbb{R}_+$  и начальным условиям (2).

Через  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , обозначим пространства  $L^2(\mathbb{R}_+, H)$  вектор-функций на полуоси  $\mathbb{R}_+$  со значениями в  $H$ , снабжённые нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left( \int_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2 d\mu_k(s) \right)^{1/2}.$$

**2. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка.** Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (1), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_0 u(t) + \int_0^t \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) \right) A \frac{du(s)}{ds} ds + \int_0^t \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) \right) B \frac{du(s)}{ds} ds = \\ = f(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что  $A = A_0^{1/2} Q_1^* Q_1 A_0^{1/2}$  и  $B = A_0^{1/2} Q_2^* Q_2 A_0^{1/2}$ , поэтому уравнение (7) формально можно записать в виде

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_0^{1/2} \left[ A_0^{1/2} u(t) + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \left( \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds \right) d\mu_k(\tau) \right] = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = f(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0. \quad (8)$$

Введём новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t),$$

$$\xi_k(t, \tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

В этих переменных задача (1), (2) формально приводится к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2} \left[ \xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t, \tau) d\mu_k(\tau) \right] = f_1(t), \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2} v(t), \\ \frac{d\xi_1(t, \tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_1 A_0^{1/2} v(t) - \tau \xi_1(t, \tau), \quad \frac{d\xi_2(t, \tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_2 A_0^{1/2} v(t) - \tau \xi_2(t, \tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $t \in \mathbb{R}_+$ , функция  $f_1(t)$  определена равенством (8),

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2} \varphi_0, \quad \xi_k(t, \tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

Теперь, во-первых, мы должны превратить задачу (9), (10) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной, во-вторых, мы должны установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (9), (10) и решением исходной задачи (1), (2).

**3. Задача Коши в расширенном функциональном пространстве. Формулировка результатов.** Сначала определим оператор  $\tau\xi(\tau)$ , входящий в третье и четвертое уравнения системы (9).

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу  $L_k(t)$  в пространстве  $\Omega_k$  (см. [18, с. 65]):  $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$ ,  $\xi(\tau) \in \Omega_k$ ,  $t \geq 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . Известно, что линейный оператор  $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$  в пространстве  $\Omega_k$  с областью определения

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}$$

является генератором полугруппы  $L_k(t)$  (см. [18, с. 65]).

**Замечание 2.** 1) Для любого  $\xi(\tau) \in \Omega_k$  при  $t \geq 0$  справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-t\tau}}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) \right\|_H d\mu_k(\tau) \leq \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right)^{1/2} \|\xi(\tau)\|_{\Omega_k}. \quad (11)$$

2) Для любого  $\xi \in D(\mathbb{T}_k)$  имеет место оценка

$$|\langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k}| \leq \|\tau\xi(\tau)\|_{\Omega_k} \|\xi(\tau)\|_{\Omega_k}. \quad (12)$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гёльдера к интегралам в левой части неравенств (11), (12).

Введём операторы  $\mathbb{B}_k : H \rightarrow \Omega_k$  ( $k = 1, 2$ ), действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда сопряжённые операторы  $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \rightarrow H$  ( $k = 1, 2$ ) запишутся в виде

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau), \quad k = 1, 2.$$

Действительно, для любых  $v \in D(\mathbb{B}_k)$ ,  $\xi(\tau) \in \Omega_k$  справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_{\Omega_k} = \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_H d\mu_k(\tau) = \\ &= \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau) \right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) \rangle_H. \end{aligned}$$

Введём гильбертово пространство  $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$  с естественным скалярным умножением; в частности, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

которое будем называть *расширенным функциональным пространством*.

В пространстве  $\mathbb{H}$  зададим линейный оператор  $\mathbb{A}$  с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau) \in H_{1/2}, \right.$$

$$\xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1, 2 \Big\} =$$

$$= \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1, 2\},$$

действующий следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T &= \\ &= \left( -A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau) \right], A_0^{1/2} v, Q_k A_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} v - \tau \xi_k(\tau), \quad k = 1, 2 \right)^T = \\ &= \left( -A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \quad k = 1, 2 \right)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор  $\mathbb{A}$  можно представить в виде следующей операторной матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2} \mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2} \mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $I$  – тождественный оператор в соответствующем пространстве.

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем записать систему (9), (10) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве  $\mathbb{H}$ :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \quad (13)$$

$$Z(0) = z. \quad (14)$$

**Определение 2.** Вектор-функция  $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$ ,  $t \in [0, \infty)$ , принимающая значения в пространстве  $\mathbb{H}$ , называется *классическим решением* задачи (13), (14), если она принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{A})) \cap C([0, \infty), D(\mathbb{A}))$  при любом  $\tau \in \mathbb{R}_+$  и удовлетворяет уравнению (13) и начальному условию (14).

**Определение 3** [20]. Линейный оператор  $A$  с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если  $\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0$  для любого  $x \in D(A)$  и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (4). Тогда оператор  $\mathbb{A}$  в пространстве  $\mathbb{H}$  с плотной областью определения  $D(\mathbb{A})$  является *максимально диссипативным*.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (4). Тогда линейный оператор  $\mathbb{A}$  является *генератором сжимающей  $C_0$ -полугруппы*  $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$  в пространстве  $\mathbb{H}$ , при этом решение задачи

(13), (14) представимо в виде  $Z(t) = S(t)z$ ,  $t > 0$ , и для любого  $z \in D(\mathbb{A})$  справедливо энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = -2 \left( \int_0^{+\infty} \tau \|\xi_1(t, \tau)\|_H^2 d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty} \tau \|\xi_2(t, \tau)\|_H^2 d\mu_2(\tau) \right). \quad (15)$$

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad (16)$$

$$Z(0) = z. \quad (17)$$

Будем предполагать, что вектор-функция  $F(t)$  имеет вид  $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0)$ , где  $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$ , а функции  $M_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , определяются равенствами (5), вектор  $z$  имеет вид  $z = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (4) и любое из следующих условий:

1) вектор-функция  $A_0^{1/2}f(t)$  принадлежит пространству  $C([0, \infty), H)$ , а векторы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – пространствам  $H_{3/2}$  и  $H_{1/2}$  соответственно;

2) вектор-функция  $f(t)$  принадлежит пространству  $C^1([0, \infty), H)$ , функции  $M_k(t)$  – пространству  $C^1([0, +\infty))$ ,  $k = 1, 2$ , а векторы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – пространствам  $H_1$  и  $H_{1/2}$  соответственно.

Тогда задача (16), (17) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)),$$

где  $v(t) := u'(t)$ ,  $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$ ,  $u(t)$  – классическое решение задачи (1), (2), и справедлива оценка

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ &\leq d \left[ (\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2) + \left( \int_0^t \|f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0\|_H ds \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

с постоянной  $d$ , не зависящей от вектор-функции  $f$ , и векторов  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ .

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1), (2) с нулевыми начальными условиями  $u(+0) = 0$ ,  $u^{(1)}(+0) = 0$  имеет представление  $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$ . Здесь оператор-функция  $L(\lambda)$  является символом уравнения (1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B, \quad (19)$$

в котором  $\hat{K}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , – преобразования Лапласа функций  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2,$$

$\hat{f}(\lambda)$  – преобразование Лапласа вектор-функции  $f(t)$ ,  $I$  – тождественный оператор в пространстве  $H$ .

**Определение 4.** Множество значений  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется *резольвентным множеством*  $\rho(L)$  оператор-функции  $L(\lambda)$ , если для любого  $\lambda \in \rho(L)$  оператор-функция  $L^{-1}(\lambda)$  существует и ограничена. Множество  $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$  называется *спектром* оператор-функции  $L(\lambda)$ .

Обозначим через  $\sigma(\mathbb{A})$ ,  $\sigma(\mathbb{T})$  спектры операторов  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{T}$  соответственно.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия (4). Тогда  $\sigma(\mathbb{A}) \setminus \sigma(\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$ , не вещественная часть спектра оператора  $\mathbb{A}$  совпадает с не вещественной частью спектра оператор-функции  $L$  и симметрична относительно вещественной оси.

Структура и локализация спектра оператор-функции  $L(\lambda)$  изучалась в работах [13, 14].

**4. Доказательство теорем 1 и 2.** Для доказательства теорем 1 и 2 будем использовать следующие две хорошо известные теоремы из монографии [20, с. 109–110].

**Теорема 4.3** [20]. *Всякий диссипативный оператор допускает расширение до максимально диссипативного оператора. Диссипативный оператор  $A$  является максимально диссипативным тогда и только тогда, когда для любого  $\lambda \in \mathbb{C}$  с положительной вещественной частью область значений  $R(A - \lambda I)$  оператора  $A - \lambda I$  совпадает со всем пространством.*

Через  $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ , где  $H_i$  – банаховы пространства,  $i = 1, 2$ , будем обозначать банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов из  $H_1$  в  $H_2$ . В частности, если  $H_1 = H_2$ , то алгебру  $\mathcal{B}(H_1, H_2)$  обозначаем через  $\mathcal{B}(H_1)$ .

**Теорема 4.5** [20]. *Для того чтобы задаче Коши для уравнения  $\dot{x} = Ax$  с замкнутым оператором  $A$  в гильбертовом пространстве отвечала сжимающая  $C_0$ -полугруппа, необходимо и достаточно, чтобы оператор  $A$  был максимально диссипативным оператором.*

**Доказательство теоремы 1.** Покажем, что для оператора  $\mathbb{A}$  справедливы следующие утверждения:

1) Неравенство  $\operatorname{Re} \langle \mathbb{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} \leq 0$  справедливо для любого  $Z \in D(\mathbb{A})$ .

2) Образ отображения  $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) : D(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{H}$  совпадает с пространством  $\mathbb{H}$  для любого  $\lambda$  с положительной вещественной частью. Здесь  $\mathbb{I}$  – тождественный оператор в пространстве  $\mathbb{H}$ .

Тогда, по теореме 4.3 [20], оператор  $\mathbb{A}$  будет максимально диссипативным.

Докажем утверждение 1). Действительно, по определению оператора  $\mathbb{A}$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} &= - \left\langle A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], v \right\rangle_H + \langle A_0^{1/2} v, \xi_0 \rangle_H + \sum_{k=1}^2 \langle \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v, \xi_k(\tau) \rangle_{\Omega_k} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} = - \left\langle A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], v \right\rangle_H + \overline{\langle \xi_0, A_0^{1/2} v \rangle_H} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \overline{\langle \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau), A_0^{1/2} v \rangle_H} - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} = - \left\langle A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], v \right\rangle_H + \\ &\quad + \overline{\left\langle A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], v \right\rangle_H} - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} = \\ &= -2i \operatorname{Im} \langle A_0^{1/2} [\xi_0 + A_0^{1/2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)], v \rangle_H - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \langle \mathbb{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} = - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi_k(\tau), \xi_k(\tau) \rangle_{\Omega_k} = - \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \tau \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \leq 0. \quad (20)$$

Для доказательства утверждения 2) покажем, что оператор  $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$  непрерывно обратим на пространстве  $\mathbb{H}$  и  $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^{-1} \in L(\mathbb{H})$  для любого  $\lambda$  с положительной вещественной частью. Для этого нам понадобится следующее непосредственно проверяемое предложение.

**Предложение 1.** Пусть  $\tilde{H}_k$  ( $k = 1, 2$ ) – гильбертовы пространства. Предположим, что  $A_{11}^{-1} \in \mathcal{B}(\tilde{H}_1)$ ,  $A_{22}^{-1} \in \mathcal{B}(\tilde{H}_2)$ ,  $A_{12} \in \mathcal{B}(\tilde{H}_2, \tilde{H}_1)$ ,  $A_{21} \in \mathcal{B}(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ ,  $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ ,  $D_1^{-1} \in \mathcal{B}(\tilde{H}_1)$ , и рассмотрим определённый на пространстве  $\tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$  линейный оператор

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор  $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$  принадлежит пространству  $\mathcal{B}(\tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2)$ .

**Доказательство.** Если выполнены условия предложения 1, то несложно проверить, что справедливо представление (факторизация типа Шура–Фробениуса, см. [21, § 1.6])

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}[I + A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}] \end{pmatrix} \in L(\tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Это и доказывает предложение 1.

Введём гильбертово пространство  $\mathbb{H}_0 = H \oplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$  и следующие операторы:  $\mathbb{B} := (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T : H \rightarrow \mathbb{H}_0$ ,  $\mathbb{B}^* := (I, \mathbb{B}_1^*, \mathbb{B}_2^*) : \mathbb{H}_0 \rightarrow H$  и  $\mathbb{T} : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}_0$ , где

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{T}_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Оператор  $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}$  представим в виде следующего произведения:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} - \lambda \mathbb{I} &= \begin{pmatrix} -\lambda I & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} =: \\ &=: \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_1(\lambda) \mathbb{A}_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя обозначения предложения 1 к оператор-функции  $\mathbb{A}_1(\lambda)$ , будем иметь  $\tilde{H}_1 = H$ ,  $\mathbb{H} = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2 = H \oplus \mathbb{H}_0$ , где  $A_{11} := -\lambda A_0^{-1}$ ,  $A_{12} := (-I, -\mathbb{B}_1^*, -\mathbb{B}_2^*)$ ,  $A_{21} := (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T$ ,

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix}.$$

Тогда для всех  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq -\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$  справедливы следующие равенства:

$$A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & -(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & -(\tau + \lambda)^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & -(\tau + \lambda)^{-1}I \end{pmatrix},$$

$$A_{12}A_{22}^{-1} = (\lambda^{-1}I, \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1}, \mathbb{B}_2^*(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1}),$$

$$\begin{aligned}
A_{22}^{-1}A_{21} &= (-\lambda^{-1}I, -(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1, -(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_2)^T, \\
D_1 &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k = \\
&= -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda + \tau)} Q_k^* Q_k = \\
&= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2} \left[ \lambda^2 + A_0 + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda + \tau} \right) A + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda + \tau} \right) B \right] A_0^{-1/2} = \\
&= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2} \left[ \lambda^2 + \left( 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \right) A + \left( 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \right) B + \right. \\
&\quad \left. + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda + \tau} \right) A + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda + \tau} \right) B \right] A_0^{-1/2} = \\
&= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2} \left[ \lambda^2 + A + B - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda + \tau} A - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda + \tau} B \right] A_0^{-1/2} = \\
&= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2} L(\lambda) A_0^{-1/2} =: M(\lambda), \tag{24}
\end{aligned}$$

где  $L(\lambda)$  – оператор-функция (19).

Покажем, что для оператор-функции  $\mathbb{A}_1(\lambda)$  при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$  таких, что  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , выполнены условия предложения 1.

**Лемма 1.** В принятых выше обозначениях справедливы следующие утверждения:

а) для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$  таких, что  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , оператор-функция  $M^{-1}(\lambda)$  принадлежит пространству  $\mathcal{B}(H)$ ;

б) для всех  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq -\tau$ , где  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , выполняется включение

$$-(\mathbb{T} + \lambda)^{-1} := \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & -(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0);$$

в) имеют место включения  $\mathbb{B}^* = (I, \mathbb{B}_1^*, \mathbb{B}_2^*) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0, H)$  и  $\mathbb{B} = (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T \in \mathcal{B}(H, \mathbb{H}_0)$ .

**Доказательство.** Заметим, что для всех  $\lambda$  с положительной вещественной частью в силу условия (4) справедлива следующая оценка:

$$\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda + \tau)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{Re} \lambda + \tau) d\mu_k(\tau)}{\tau|\lambda + \tau|^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau|\lambda + \tau|} \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}, \quad k = 1, 2. \tag{25}$$

Докажем утверждение а). Согласно определению оператор-функции в (24) имеем

$$M(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k.$$

Следовательно, для всех  $\lambda$  таких, что  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , с учётом оценки (25) выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|M(\lambda)v\|_H &\geq \frac{|(M(\lambda)v, v)|_H}{\|v\|_H} = \frac{1}{\|v\|_H} \left| -\lambda(A_0^{-1}v, v)_H - \frac{1}{\lambda}(v, v)_H - \sum_{k=1}^2 (\mathbb{B}_k^*(\tau + \lambda)^{-1}\mathbb{B}_kv, v)_H \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|v\|_H} \left( \operatorname{Re} \lambda (A_0^{-1/2}v, A_0^{-1/2}v)_H + \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} (v, v)_H + \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda + \tau)} (Q_kv, Q_kv)_H \right) = \\ &= \|v\|_H \left( \operatorname{Re} \lambda \frac{\|A_0^{-1/2}v\|_H^2}{\|v\|_H^2} + \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda + \tau)} \frac{\|Q_kv\|_H^2}{\|v\|_H^2} \right) \geq \|v\|_H \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2}. \end{aligned}$$

б) Покажем, что для всех  $\lambda$  таких, что  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq -\tau$ , где  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , оператор  $\mathbb{T}(\lambda)$  принадлежит пространству  $\mathcal{B}(\mathbb{H}_0)$ . Действительно, для любого вектора  $Z_0 = (\xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T \in \mathbb{H}_0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbb{T}(\lambda)Z_0\|_{\mathbb{H}_0}}{\|Z_0\|_{\mathbb{H}_0}} &= \frac{\|(\lambda^{-1}\xi_0, (\tau + \lambda)^{-1}\xi_1(\tau), (\tau + \lambda)^{-1}\xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}_0}}{\|(\xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}_0}} = \\ &= \left( |\lambda|^{-2}\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{\|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau)}{|\lambda + \tau|^2} \right) \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right)^{-1} \leq \frac{1}{|\lambda|^2}. \end{aligned}$$

в) Для любого вектора  $Z_0 = (\xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T \in \mathbb{H}_0$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\|(I, \mathbb{B}_1^*, \mathbb{B}_2^*)Z_0\|_H^2}{\|Z_0\|_{\mathbb{H}_0}^2} &= \left\| \xi_0 + \sum_{k=1}^2 Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{\xi_k(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \right\|_H^2 \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right)^{-1} \leq \\ &\leq 2 \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{\|Q_k^* \xi_k(\tau)\|_H}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \right)^2 \right) \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right)^{-1} \leq \\ &\leq 2 \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau} \right) \left( \int_0^{+\infty} \|Q_k^* \xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right) \right) \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right)^{-1} \leq \\ &\leq 2 \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|Q_k^*\|_H^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right) \left( \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \|\xi_k(\tau)\|_H^2 d\mu_k(\tau) \right)^{-1} \leq \\ &\leq 2 \max\{1, \|Q_1\|_H^2, \|Q_2\|_H^2\}. \end{aligned}$$

Для любого вектора  $v \in H$ , учитывая ограниченность операторов  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ , имеем

$$\frac{\|(I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T v\|_{\mathbb{H}_0}^2}{\|v\|_H^2} = \frac{1}{\|v\|_H^2} \left( \|v\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau} \|Q_k\|_H^2 \|v\|_H^2 \right) \leq 1 + \sum_{k=1}^2 \|Q_k\|_H^2.$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что для оператора  $\mathbb{A}_1(\lambda)$  при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  выполнены условия предложения 1 и, следовательно, оператор  $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^{-1}$  принадлежит пространству  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ . Таким

образом, при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  область значений  $R(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$  совпадает с пространством  $\mathbb{H}$  и, следовательно, оператор  $\mathbb{A}$  является максимально диссипативным в этом пространстве. Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Утверждение теоремы 2 следует из [20, теорема 4.5] и теоремы 1. Пусть  $z \in D(\mathbb{A})$ . Тогда  $S(t)z \in D(\mathbb{A})$  для любого  $t > 0$  и из (13) следует равенство

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = 2\operatorname{Re} \langle \mathbb{A}S(t)z, S(t)z \rangle_{\mathbb{H}}.$$

С другой стороны, согласно (20) получаем

$$\operatorname{Re} \langle \mathbb{A}Z, Z \rangle_{\mathbb{H}} = - \sum_{k=1}^2 \langle \tau \xi_k(\tau), \xi_k(\tau) \rangle_{\Omega_k},$$

откуда следует энергетическое равенство (15). Теорема 2 доказана.

**5. Доказательство теоремы 3.** В этом пункте работы будем использовать определения и утверждения из монографии [20, гл. 1, § 1.2].

**Определение 5.** Пусть  $\mathcal{A}$  – линейный оператор в банаховом пространстве  $\mathcal{H}$ , имеющий всюду плотную в этом пространстве область определения  $D(\mathcal{A})$ . Задача Коши

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \quad (26)$$

$$Z(0) = z \quad (27)$$

называется *корректной (равномерно корректной)*, если

- 1) для любого  $z \in D(\mathcal{A})$  существует единственное решение задачи (26), (27);
- 2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: если последовательность  $(Z_n(0))_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$  сходится к нулю, то и последовательность  $(Z_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  соответствующих решений сходится к нулю при каждом  $t \in [0, T]$  (равномерно по  $t \in [0, T]$ ) на любом конечном отрезке  $[0, T]$ .

**Замечание.** Если задача Коши (26), (27) порождает сжимающую полугруппу в пространстве  $\mathcal{H}$ , то эта задача равномерно корректна.

В дальнейшем будут использоваться следующие результаты из [20, гл. 1, §§ 1, 6].

**Теорема 1.1** [20]. Если задача Коши (26), (27) корректна, то её решение даётся формулой  $Z(t) = S(t)z$  ( $z \in D(\mathcal{A})$ ), где  $S(t)$  – сильно непрерывная при  $t > 0$  полугруппа операторов.

**Теорема 6.5** [20]. Если задача Коши (26), (27) равномерно корректна, то формула

$$Z(t) = S(t)z + \int_0^t S(t-p)F(p) dp \quad (28)$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t),$$

$$Z(0) = z,$$

где  $z \in D(\mathcal{A})$  и вектор-функция  $F(t)$  удовлетворяет одному из следующих двух условий:

- 1) множество значений функции  $F(t)$ ,  $t \geq 0$ , содержится в множестве  $D(\mathcal{A})$ , а функция  $\mathcal{A}F(t)$  принадлежит классу  $C([0, \infty), \mathcal{H})$ ;
- 2) функция  $F(t)$  принадлежит классу  $C^1([0, +\infty), \mathcal{H})$ .

**Доказательство теоремы 3.** Задача Коши (16), (17), записанная по координатам, имеет вид (9), (10). Рассмотрим последние два уравнения системы (9). Применим к этим уравнениям

метод вариации произвольных постоянных. По определению операторов  $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau)$ ,  $k = 1, 2$ , где  $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau \xi \in \Omega_k\}$ , соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t, \tau)}{dt} = -\mathbb{T}_k \xi_k(t, \tau).$$

Следовательно, общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде  $\xi_k^O(t, \tau) = e^{-t\mathbb{T}_k} C_k(\tau)$ , где  $C_k(\tau) \in \Omega_k$  – произвольные векторы. Применяя формулу (28) для решения неоднородных уравнений при условии

$$\xi_k(t, \tau)|_{t=0} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

получаем

$$\xi_k(t, \tau) = \int_0^t e^{-(t-s)\mathbb{T}_k} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} v(s) ds = \int_0^t e^{-(t-s)\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} v(s) ds.$$

Из первого уравнения системы в соответствии с областью определения оператора  $\mathbb{A}$  имеем

$$\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t, \tau) d\mu_k(\tau) \in D(A_0^{1/2}). \quad (29)$$

Подставляя найденные выражения для  $\xi_k(t, \tau)$  в (29), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^t A_0^{1/2} v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \int_0^t e^{-(t-s)\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} v(s) ds d\mu_k(\tau) = \\ & = \int_0^t \left[ A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi_0 \in D(A_0^{1/2}). \end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы 3 либо  $\varphi_0 \in H_{3/2}$ ,  $\varphi_1 \in H_{1/2}$ , либо  $\varphi_0 \in H_1$ ,  $\varphi_1 \in H_{1/2}$ . Таким образом,  $z = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, 0, 0) \in D(\mathbb{A})$ , т.е. выполнено условие теоремы 6.1 из [20]. Следовательно,

$$\int_0^t \left[ A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds \in D(A_0^{1/2}).$$

Итак, задача (16), (17), согласно теореме 6.1, является равномерно корректной и справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leq d \left( \|z\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds \right) \quad (30)$$

с постоянной  $d$ , не зависящей от вектор-функции  $F$  и векторов  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ . Оценка (30) следует из формулы (28), применённой к задаче (16), (17), в обозначениях теоремы 3, так как  $Z(t) = S(t)z$ , где полугруппа  $S(t)$  является сжимающей согласно теореме 1.

Покажем, что  $v(t) := u'(t)$ ,  $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$ , где  $u(t)$  – классическое решение задачи (1), (2). Рассмотрим вектор-функцию

$$-A_0^{1/2} \int_0^t \left[ A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds =$$

$$= -A_0 \int_0^t A_0^{-1/2} \left[ I + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} v(s) ds, \quad t > 0. \quad (31)$$

Из (31) следует включение

$$\int_0^t A_0^{-1/2} \left[ I + \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} v(s) ds \in D(A_0).$$

Введём обозначение

$$R(t) := A_0^{-1/2} \left[ \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2}, \quad t > 0.$$

Тогда вектор-функцию в (31) можно записать в виде

$$\int_0^t v(s) ds + \int_0^t R(t-s)v(s) ds =: y(t) \in D(A_0). \quad (32)$$

После интегрирования по частям в (32) и введения новой вектор-функции  $w(t) = \int_0^t v(s) ds$  получаем следующее интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$(I + R(0))w(t) + \int_0^t R'(t-s)w(s) ds = y(t), \quad y(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_1), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} R'(t) &= -A_0^{-1/2} \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_k(\tau) \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} = \\ &= - \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_1(\tau) \right) A_0^{-1} A - \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_2(\tau) \right) A_0^{-1} B, \\ R(0) &= A_0^{-1/2} \left[ \sum_{k=1}^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau} \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} = \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \right) A_0^{-1} A + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \right) A_0^{-1} B. \end{aligned}$$

Покажем, что оператор-функция  $R'(t)$  принадлежит пространству  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$ . Действительно, для любого  $z \in H_1$

$$\begin{aligned} \|R'(t)z\|_{H_1} &= \left\| \left[ \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_1(\tau) \right) A + \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_2(\tau) \right) B \right] A_0^{-1} (A_0 z) \right\|_H \leq \\ &\leq \left\| \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_1(\tau) \right) A A_0^{-1} + \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_2(\tau) \right) B A_0^{-1} \right\|_H \|z\|_{H_1} \leq \\ &\leq \left[ \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_1(\tau) \right) \|A A_0^{-1}\|_H + \left( \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_2(\tau) \right) \|B A_0^{-1}\|_H \right] \|z\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $R'(t) \in \mathcal{B}(H_1)$ . Кроме того, для любых  $t_1, t_2 > 0$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|R'(t_1) - R'(t_2)\|_{H_1} \leq \\ & \leq \left( \int_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau}) d\mu_1(\tau) \right) \|A_0^{-1}A\|_H + \left( \int_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau}) d\mu_2(\tau) \right) \|A_0^{-1}B\|_H. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор-функция  $R'(t)$  принадлежит пространству  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$ . Из уравнения (33) вытекает, что

$$w(t) = (I + R(0))^{-1} \left( y(t) - \int_0^t R'(t-s)w(s) ds \right) =: Sw(t),$$

где оператор  $S: H_1 \rightarrow H_1$ . Покажем, что  $\|S\|_{C(\mathbb{R}_+; L(H_1))} < 1$ .

**Утверждение.** Для любых  $w_1(t), w_2(t) \in H_1$  при  $t \in \mathbb{R}_+$  имеет место следующая оценка:

$$\sup_{t \geq 0} \|Sw_1(t) - Sw_2(t)\|_{H_1} \leq \kappa \sup_{t \geq 0} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1},$$

где  $\kappa = \|A_0R(0)A_0^{-1}\|_H \|I + A_0R(0)A_0^{-1}\|_H^{-1} < 1$ .

Действительно, для любых  $w_1(t), w_2(t) \in H_1$  при  $t > 0$  справедлива оценка

$$\|Sw_1(t) - Sw_2(t)\|_{H_1} \leq \|(I + R(0))^{-1}\|_{H_1} \left\| \int_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s)) ds \right\|_{H_1}.$$

Далее, для любого  $z \in H_1$  получаем

$$\begin{aligned} & \|(I + R(0))^{-1}z\|_{H_1} = \|A_0(I + R(0))^{-1}A_0^{-1}(A_0z)\|_H \leq \\ & \leq \left\| I + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \right) AA_0^{-1} + \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \right) BA_0^{-1} \right\|_H^{-1} \|z\|_{H_1} = \|(I + A_0R(0)A_0^{-1})\|_H^{-1} \|z\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\|(I + R(0))^{-1}\|_{H_1} \leq \|(I + A_0R(0)A_0^{-1})\|_H^{-1}$ , так как операторы  $AA_0^{-1}$  и  $BA_0^{-1}$  принадлежат пространству  $\mathcal{B}(H)$  и положительны. Аналогично для любых  $w_1(t), w_2(t) \in H_1$  при  $t > 0$  получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s)) ds \right\|_{H_1} = \sup_{t \geq 0} \left\| A_0 \int_0^t R'(t-s)A_0^{-1}A_0(w_1(s) - w_2(s)) ds \right\|_H \leq \\ & \leq \sup_{t \geq 0} \left\| A_0 \int_0^t R'(t-s)A_0^{-1} ds \right\|_H \sup_{t \geq 0} \|w_1(s) - w_2(s)\|_{H_1} \leq \|A_0R(0)A_0^{-1}\|_H \sup_{t \geq 0} \|w_1(s) - w_2(s)\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (33) имеет решение  $w(t) \in C([0, +\infty), H_1)$  и  $v(t) \in D(A_0)$ .

Вернёмся к первому уравнению системы (9) и воспользуемся тем, что  $v(t) \in D(A_0)$ . Справедлива следующая цепочка равенств:

$$-A_0^{1/2} \left[ \xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(t, \tau) d\tau \right] + f(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= -A_0^{1/2} \left[ \int_0^t A_0^{1/2} v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^2 Q_k^* \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Q_k A_0^{1/2} v(s) ds d\mu_k(\tau) \right] + \\
&\quad + f(t) - \left( \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 = \\
&= - \left[ \int_0^t A_0 v(s) ds + A_0 \varphi_0 + \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} A v(s) ds d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} B v(s) ds d\mu_2(\tau) \right] + \\
&\quad + f(t) - \left( \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0. \tag{34}
\end{aligned}$$

Производя замену переменной  $v(t) := u'(t)$  в выражении (34) и применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}
&- \left[ \int_0^t A_0 u'(s) ds + A_0 \varphi_0 + \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} A u'(s) ds d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} B u'(s) ds d\mu_2(\tau) \right] + \\
&\quad + f(t) - \left( \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 = \\
&= - \left[ A_0 u(t) + \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A u'(s) ds + \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B u'(s) ds \right] + \\
&\quad + f(t) - \left( \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 = \\
&= -A_0 u(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) \right) A u(s) \Big|_0^t + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_1(\tau) A u(s) ds - \\
&\quad - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) \right) B u(s) \Big|_0^t + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_2(\tau) B u(s) ds + \\
&\quad + f(t) - \left( \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 = \\
&= -A_0 u(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \right) A u(t) + \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) \right) A u(0) + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_1(\tau) A u(s) ds - \\
&\quad - \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \right) B u(t) + \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) \right) B u(0) + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_2(\tau) B u(s) ds -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \right) Au(t) + \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) \right) A\varphi_0 + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_1(\tau) Au(s) ds - \\
& - \left( \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \right) Bu(t) + \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) \right) B\varphi_0 + \int_0^t \int_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau} d\mu_2(\tau) Bu(s) ds + \\
& + f(t) - \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau) A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau) B \right) \varphi_0 = \\
& = -(A+B)u(t) + \int_0^t K_1(t-s)Au(s) ds + \int_0^t K_2(t-s)Bu(s) ds + f(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, первое уравнение системы (9) совпадает с интегро-дифференциальным уравнением (1):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -(A+B)u(t) + \int_0^t K_1(t-s)Au(s) ds + \int_0^t K_2(t-s)Bu(s) ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с начальными условиями  $u(+0) = \varphi_0$ ,  $u^{(1)}(+0) = \varphi_1$ . Следовательно,  $u(t)$  – классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 3 обеспечивает выполнение условий теоремы 6.5 [20], а тогда оценка (18) следует из оценки (30). Теорема 3 доказана.

**6. Доказательство теоремы 4.** Согласно представлению (23) имеет место равенство  $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{H} = \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_1(\lambda) \mathbb{A}_0$ , где  $\mathbb{A}_0$  – обратимый оператор в пространстве  $\mathbb{H}$  такой, что  $\mathbb{A}_0^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ , а оператор-функция  $\mathbb{A}_1(\lambda)$  имеет вид

$$\mathbb{A}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix}.$$

Применяя обозначения предложения 1 к оператор-функции  $\mathbb{A}_1(\lambda)$ , получаем  $\tilde{H}_1 = H$ ,  $\mathbb{H} = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2 = H \oplus \mathbb{H}_0$ , где  $\mathbb{H}_0 := H \oplus (\oplus_{k=1}^2 \Omega_k)$ ,  $A_{11} = -\lambda A_0^{-1}$ ,  $A_{12} = (-I, -\mathbb{B}_1^*, -\mathbb{B}_2^*)$ ,  $A_{21} = (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T$ ,

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix}.$$

Согласно предложению 1 для всех  $\lambda$  таких, что  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \notin \sigma(M(\lambda))$ ,  $\lambda \notin \sigma(\mathbb{T}_k + \lambda I)$ ,  $k = 1, 2$ , оператор-функция  $\mathbb{A}_1(\lambda)$  допускает следующее представление (факторизация типа Шура–Фробениуса, см. представление (21) и [21, предложение 1.6.2]):

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} I & \lambda^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_1 + \lambda I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2 + \lambda I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1} & I & 0 & 0 \\ -(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} \mathbb{B}_1 & 0 & I & 0 \\ -(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1} \mathbb{B}_1 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (35)
\end{aligned}$$

где, согласно (24), оператор-функция  $M(\lambda)$  задаётся равенством

$$M(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1} I - \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* (\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1} \mathbb{B}_k = -\lambda^{-1} A_0^{-1/2} L(\lambda) A_0^{-1/2},$$

в котором оператор-функция  $L(\lambda)$  определяется формулой (19) и является символом уравнения (1). Таким образом,  $\sigma(M(\lambda)) = \sigma(L(\lambda))$ ; кроме того, согласно п. а) леммы 1,  $\sigma(\mathbb{T}_k) = (\infty, 0]$ . Следовательно, в силу представления (35), предложения 1 и леммы 1 справедливо равенство  $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(L) \cup (-\infty, 0]$ . Согласно п. б) леммы 1  $\sigma(L(\lambda)) = \sigma(M(\lambda)) \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ ; кроме того,  $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Поэтому не вещественная часть спектра оператор-функции  $L(\lambda)$  симметрична относительно вещественной оси и совпадает с не вещественной частью спектра оператора  $\mathbb{A}$ . Теорема 4 доказана.

**7. Пример.** Рассмотрим  $\mu_1(\tau) = (\sum_{k=1}^{j-1} a_k) \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau) = (\sum_{k=1}^{j-1} b_k) \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(\tau)$  – ступенчатые функции, где  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $a_k > 0$ ,  $b_k \geq 0$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $\chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(\tau)$  – характеристические функции полуинтервалов  $[\beta_{j-1}, \beta_j)$ ,  $0 \leq \beta_{j-1} < \beta_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $\beta_0 = 0$ . Тогда ядра интегральных операторов имеют следующие представления:

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^N a_j e^{-\beta_j t}, \quad K_2(t) = \sum_{j=1}^N b_j e^{-\beta_j t},$$

и условия (4) примут вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

Введём новые переменные  $v(t) := u'(t)$ ,  $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$ ,

$$\xi_{1j}(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{a_j} e^{-(t-s)\beta_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1 A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds,$$

$$\xi_{2j}(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{b_j} e^{-(t-s)\beta_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2 A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

В этих обозначениях задача (1), (2) приводится к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2} \left[ \xi_0(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{a_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1^* \xi_{1j}(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2^* \xi_{2j}(t) \right] = f_1(t), \\ \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2} v(t), \\ \frac{d\xi_{1j}(t)}{dt} = \frac{\sqrt{a_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1 A_0^{1/2} v(t) - \beta_j \xi_{1j}(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \\ \frac{d\xi_{2j}(t)}{dt} = \frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2 A_0^{1/2} v(t) - \beta_j \xi_{2j}(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2} \varphi_0, \quad \xi_j(t)|_{t=0} = 0, \quad j = \overline{1, N},$$

где

$$f_1(t) = f(t) - \left( \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t} A + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t} B \right) \varphi_0.$$

Несложно видеть, что оценка (18) принимает вид

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leq d \left[ (\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2) + \left( \int_0^t \left\| f(s) - \left( \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} e^{-\beta_j s} A + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\beta_j s} B \right) \varphi_0 \right\| ds \right)^2 \right].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем” (теоремы 1 и 2) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (теоремы 3 и 4) (проект 20-01-00288 А).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. Munoz Rivera J.E. Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity // Quart. Appl. Math. 1994. V. 52. P. 629–648.
4. Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. V. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhauser; Basel, 2003. V. 146.
5. Локишин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М., 1982.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
7. Gurtin M.E., Pipkin A.C. General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
8. Лыков А.В. Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
9. Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
10. Miller R.K. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66. P. 313–332.
11. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
12. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
13. Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces // J. of Math. Sci. 2019. V. 239. № 5. P. 771–787.
14. Власов В.В., Раутиан Н.А. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стильеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
15. Раутиан Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. P. 1226–1244.
16. Eremenko A., Ivanov S. Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
17. Dafermos C.M. Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
18. Engel K.J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
19. Pata V. Stability and exponential stability in linear viscoelasticity // Milan J. of Math. 2009. V. 77. P. 333–360.
20. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
21. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London, 2008.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 26.04.2021 г.  
После доработки 30.05.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.73:534+519.642.7

## ОБЪЁМНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ

© 2021 г. А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченков

Выводятся объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, описывающих нестационарные задачи рассеяния акустического поля на прозрачных трёхмерных структурах. Предлагается эффективный метод численного решения полученных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121090120

**Введение.** В работах [1, 2] рассматривались задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой, окружённой свободным пространством. Используя объёмные сингулярные интегральные уравнения в частотной области [3] и свойства преобразования Фурье, для решения этих задач получены интегральные уравнения с запаздыванием по времени. В настоящей статье, применяя некоторые результаты работ [1, 2], рассматриваются нестационарные задачи рассеяния акустического поля на прозрачных трёхмерных структурах. Выводятся объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, которые описывают указанный класс задач. Предлагается эффективный метод численного решения полученных уравнений.

**1. Исходное интегральное уравнение.** Рассмотрим следующий класс задач нестационарной акустики. В ограниченной трёхмерной области  $Q$ , окружённой свободным пространством, материальная среда характеризуется индексом рефракции  $n(x)$ ,  $x \in Q$ , а вне  $Q$  индекс рефракции равен единице. Требуется определить акустическое поле в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , порождаемое внешним источником  $f_0(x, t)$ , локализованным в конечной области, причём  $f_0(x, t) = 0$  при  $t < 0$ . В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти функцию акустического поля  $U(x, t)$  в  $\mathbb{R}^3$ , удовлетворяющую волновому уравнению

$$\Delta U(x, t) - \frac{n(x)}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = f_0(x, t), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость звука в свободном пространстве. К уравнению (1) необходимо добавить ещё условия, гарантирующие отсутствие волн, приходящих из бесконечности.

Для вывода нестационарных интегральных уравнений будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье:

$$f(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad f(t) = F^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

В формулах (2) исходная функция  $f(t)$  и её фурье-образ  $f(\omega)$  различаются указанием аргументов  $t$  и  $\omega$  соответственно.

Применяя преобразование Фурье к каждой части уравнения (1), получаем уравнение для фурье-образов поля

$$\Delta U(x, \omega) - \frac{n(x)\omega^2}{c^2} U(x, \omega) = f_0(x, \omega). \quad (3)$$

Фурье-образ  $U(x, \omega)$  должен удовлетворять, кроме уравнения (3), ещё и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( r \left( \frac{\partial U}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} U \right) \right) = 0, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (4)$$

Пусть  $f(x, \omega)$  – финитная функция в  $\mathbb{R}^3$  относительно  $x$ . Тогда интегральное представление

$$V(x, \omega) = - \int f(y, \omega) G(R, \omega) dy \quad (5)$$

удовлетворяет в  $\mathbb{R}^3$  уравнению Гельмгольца

$$\Delta V + (\omega/c)^2 V = f \quad (6)$$

и условию излучения на бесконечности вида (4). В (5)  $G(R, \omega)$  – функция Грина уравнения Гельмгольца, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$G(R, \omega) = \exp(i\omega R/c)/(4\pi R), \quad R = |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3). \quad (7)$$

Запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\Delta U + (\omega/c)^2 U = f_0 - (\omega/c)^2 (n - 1)U. \quad (8)$$

Из соотношений (3)–(8) вытекает, что неизвестное поле  $U(x, \omega)$  имеет следующее интегральное представление:

$$U(x, \omega) = - \int f_0(y, \omega) G(R, \omega) dy + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int_Q (n(y) - 1) U(y, \omega) G(R, \omega) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9)$$

Первый интеграл в правой части равенства (9) описывает поле  $U_0(x, \omega)$ , создаваемое источником  $f_0(x, \omega)$  в свободном пространстве. Далее, поскольку  $n(x) = 1$  вне  $Q$ , из равенства (9) следует, что неизвестное поле  $U(x, \omega)$  удовлетворяет в области  $Q$  интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$U(x, \omega) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int_Q (n(y) - 1) U(y, \omega) G(R, \omega) dy = U_0(x, \omega), \quad x \in Q.$$

Зная поле  $U(x, \omega)$  в области  $Q$ , несложно найти поле в любой точке пространства, используя равенство (9).

Имеют место следующие свойства Фурье-преобразований:

$$F^{-1}[-\omega^2 f(\omega)] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad (10)$$

$$F^{-1}[f(\omega)g(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad F^{-1}[e^{i\omega\Delta}] = \delta(t - \Delta), \quad (11)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака, а  $\Delta$  – некоторая постоянная. Преобразование Фурье обобщённых функций определяется для класса  $\mathcal{S}'$  так называемых обобщённых функций медленного роста – линейных непрерывных функционалов на пространстве  $\mathcal{S}$  основных функций, представляющем собой линейное подпространство пространства  $C^\infty(\mathbb{R})$ , состоящее из функций, которые при  $|x| \rightarrow \infty$  убывают вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ , с заданной в нём специальной сходимостью (см. [4, гл. II, § 8.1]). Именно, преобразованием Фурье обобщённой функции  $f \in \mathcal{S}'$  называется [4, гл. II, § 9.2] обобщённая функция  $F[f]$  такая, что  $(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi])$  для всех  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Несложно убедиться [4, гл. II, § 9.2], что так определённое отображение  $F$  переводит  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$  и является линейным и непрерывным, а для обратного отображения  $F^{-1}$  очевидно равенство  $(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi])$  для всех  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

В силу определений (2) равенство (10) очевидно. Покажем справедливость первого равенства в (11). Имеем

$$\begin{aligned} F\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}g(t-\tau)d(t-\tau)\right)d\tau = f(\omega)g(\omega). \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к первому и последнему членам в цепочке равенств (12), получаем первое равенство в (11). Доказательство второго равенства в (11) следует непосредственно из определения преобразования Фурье обобщённых функций и приведено, например, в [4, гл. II, § 9.2, пример].

Из представления (7) и второго равенства в (11) вытекает, что

$$F^{-1}[G(R, \omega)] = (4\pi R)^{-1}\delta(t - R/c). \quad (13)$$

В силу соотношений (10)–(13) получаем

$$\begin{aligned} F^{-1}[G(R, \omega)\omega^2 f(y, \omega)] &= -(4\pi R)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - R/c)\frac{\partial^2 f(y, t-\tau)}{\partial t^2}d\tau\right) = \\ &= -(4\pi R)^{-1}\frac{\partial^2 f(y, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad \tau = t - R/c. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (9) и используя равенство (14), приходим к следующему объёмному интегральному уравнению с запаздыванием по времени:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_0(x, t) - \frac{1}{4\pi c^2} \int_Q \frac{1}{R}(n(y) - 1)\frac{\partial^2 U(y, \tau)}{\partial \tau^2} dy, \\ R &= |x - y|; \quad \tau = t - R/c; \quad U(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнения (15) очевидно, что акустическое поле в  $\mathbb{R}^3$  зависит только от значений поля в области неоднородности  $Q$ . Поэтому (15) можно рассматривать как интегральное уравнение в  $Q$ .

Из изложенного выше следует

**Теорема.** Пусть индекс рефракции акустического поля равен  $n(x)$  в ограниченной области  $Q \subset \mathbb{R}^3$  и единице вне этой области. Тогда акустическое поле  $U$ , порождаемое внешним полем  $U_0$ , описывается объёмным интегральным уравнением (15), содержащим запаздывание по времени, зависящее от пространственных переменных.

**2. Метод решения.** Будем использовать метод коллокации для численного решения уравнения (15). Для этого в прямоугольной декартовой системе координат в  $\mathbb{R}^3$  введём конечное множество точек – сетку – так, чтобы область  $Q$  целиком находилась в прямоугольном параллелепипеде  $\Pi$  со сторонами  $N_l h$ ,  $l = 1, 2, 3$ , где  $h$  – шаг сетки по декартовым координатам. Тогда если  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  – вершина этого параллелепипеда с наименьшей суммой координат, то координаты каждого узла сетки имеют вид  $x^0 + (p_1 h, p_2 h, p_3 h)$ , где  $p_l = \overline{0, N_l}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , т.е. вид  $x^0 + h p$ , где  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . Поэтому каждый узел однозначно определяется точкой  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $p_l = \overline{0, N_l}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , которую назовём *сеточными координатами* узла и будем писать  $p \in Q$ , если узел с сеточными координатами  $p$  лежит в области  $Q$ . Параллелепипед  $\Pi$  разбивается данной сеткой на ячейки (элементарные кубики)  $\Pi(p)$ ,  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,

$p_l = \overline{0, N_l - 1}$ , где  $p$  – вершина кубика с наименьшей суммой сеточных координат. Определим область  $\tilde{Q}$  как объединение  $N_Q$  ячеек, центры которых лежат внутри области  $Q$ . Центр кубика  $\Pi(p)$ , содержащегося в области  $\tilde{Q}$ , обозначим через  $x(p)$ . Узловые точки, в которых определяются значения акустического поля, будем задавать в центрах  $x(p)$ . Для дискретизации уравнения (15) по времени введём временную сетку  $t(0), t(1), t(2), \dots$  с постоянным шагом  $\delta$ , где  $t_0 = 0$  – начало процесса. Будем обозначать через  $V(p, t(n))$  значение функции в  $p$ -й пространственной узловой точке и во временной узловой точке  $t(n) = n\delta$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а через  $V(q, \tau(n, p, q))$  – значение функции в  $q$ -й пространственной узловой точке и во временной точке

$$\tau(n, p, q) = n\delta - |x(p) - x(q)|/c. \quad (16)$$

Теперь уравнение (15) аппроксимируется следующей системой уравнений, имеющей размерность  $\sim N_Q$ :

$$U(p, t) = U_0(p, t) + B(0) \frac{\partial^2 P(p, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{q \in Q \\ q \neq p}} B(p - q) \frac{\partial^2 P(q, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad p \in Q, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$P(q, \tau) = (n(q) - 1)U(q, \tau), \quad t = t(n), \quad \tau = \tau(n, p, q), \quad B(p - q) = - \int_{\Pi(q)} \frac{1}{4\pi|x(p) - y|} dy. \quad (17)$$

Значения функции в суммах (17) должны, в связи с запаздыванием по времени, задаваться во временных точках, предшествующих  $t(n)$ . Это означает, что для всех  $\tau$ , входящих в систему (17), должно выполняться условие  $\tau \leq t(n - 1)$ . Минимальное расстояние между узловыми точками равно  $h$ . Тогда из (16) следует, что между шагами сеток по пространству и по времени должно выполняться соотношение

$$h/c \geq \delta. \quad (18)$$

Условие (18) совпадает с критерием Куранта–Фридрихса, который является необходимым условием для устойчивости численного решения гиперболических уравнений, описывающих распространение волн.

Определим следующую связь между шагами сеток:

$$h = 2c\delta. \quad (19)$$

Коэффициент 2 обусловлен тем, чтобы при вычислении производных по разностным формулам не выходить за временные узловые точки, стоящие слева от  $t(n)$ . Из равенств (16), (19) вытекает, что для всех значений  $\tau$ , входящих в (17), выполняется оценка

$$\tau(n, p, q) \leq (n - 2)\delta = t(n - 2), \quad q \neq p.$$

Конкретные значения шагов  $\delta$  и  $h$ , которые связаны соотношением (19), зависят от специфики задачи и требуемой точности решения. Можно предложить следующий способ определения этих величин. Разложим источник поля  $f_0(x, t)$ , создающий внешнее поле  $U_0(x, t)$ , в интеграл Фурье по времени. В силу равенства Парсеваля, учитывая, что  $f_0(x, t) = 0$  при  $t < 0$ , получаем

$$I_0 = \int_V \int_0^{+\infty} |f_0(x, t)|^2 dt dx = \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x, \omega)|^2 d\omega dx, \quad (20)$$

где  $V$  – область локализации источника поля. Определим полосу частот  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ , которая достаточно точно описывает поведение функции  $f_0(x, t)$ , следующей формулой:

$$1 - \frac{I(\omega_{\max})}{I_0} \ll 1, \quad I(\omega_{\max}) = \int_V \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} |f_0(x, \omega)|^2 d\omega dx. \quad (21)$$

Из соотношений (20), (21) несложно найти  $\omega_{\max}$ . Период, соответствующий частоте  $\omega_{\max}$ , равен  $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}$ . Теперь шаг сетки по времени можно задать формулой

$$\delta = C\pi/\omega_{\max}, \quad (22)$$

в которой постоянная  $C$  зависит от конкретной задачи и, в конечном счёте, определяется численными экспериментами. Для многих задач  $C \approx 1$ .

Теперь оценим второе слагаемое в правой части равенства (17). Для производной функции имеем

$$\left| \frac{\partial^2 \vec{P}(p, t)}{\partial t^2} \right| \approx \omega_{\max}^2 |\vec{P}(p, t)|. \quad (23)$$

Далее, пусть  $\Omega(\rho)$  – шар радиуса  $\rho = \sqrt{3}h/2$  с центром в точке  $x = 0$ . Очевидно включение  $\Pi(0) \subset \Omega(\rho)$ . Тогда, используя сферическую систему координат, получаем

$$|B(0)| = \frac{1}{4\pi} \int_{\Pi(0)} r \, dr \, dS < \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega(\rho)} r \, dr \, dS = \frac{3}{8}h^2. \quad (24)$$

Теперь из соотношений (19), (22)–(24) вытекает, что

$$\frac{|B(0)|}{c^2} \left| \frac{\partial^2 P(p, t)}{\partial t^2} \right| < \frac{3\pi^2 C^2}{2} |n(p) - 1| |U(p, t)|. \quad (25)$$

Таким образом, если значения постоянной  $C$  в оценке (25) достаточно малы, в правой части равенства (17) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с  $U(p, t)$  из левой части равенства. Конкретные значения  $C$ , при которых это допустимо, определяются численными экспериментами.

Для максимального расстояния  $D$  между пространственными узловыми точками в  $Q$  очевидно равенство

$$D = h \max |p - q|, \quad p, q \in Q. \quad (26)$$

Значит, максимальное время запаздывания между узловыми точками  $Q$  равно  $T = D/c$ . Тогда из (19) следует, что максимальное число узловых точек по времени, в которых необходимо вычислять функции, входящие в правую часть системы (17), определяется формулой

$$M = [T/\delta] + 1 = [2 \max |p - q|] + 1, \quad p, q \in Q, \quad (27)$$

где  $[\cdot]$  – целая часть числа.

Теперь рассмотрим аппроксимацию производных функции по времени. Пусть задана дважды дифференцируемая функция  $P(t)$  и известны её значения в узловых точках  $t(m) = m\delta$ , где  $m$  – целые числа. Тогда значение производной функции в точке  $t$ , находящейся внутри отрезка  $[t(m-1), t(m+1)]$ , определяется разностной формулой

$$\frac{d^2 P(t)}{dt^2} \approx \frac{P(m-1) - 2P(m) + P(m+1)}{\delta^2}. \quad (28)$$

В качестве центральной точки  $m$  целесообразно брать такую узловую точку, которая наиболее близка к  $t$ . Отметим, что формула (28) даёт точное значение производной для любых квадратичных функций  $P(t)$ . Можно также использовать более точные формулы для аппроксимации, в которые будут входить значения  $P(m-2)$ ,  $P(m-1)$ ,  $P(m)$ ,  $P(m+1)$ ,  $P(m+2)$ . Однако в этом случае шаг по времени должен быть меньше и равняться  $\delta = h/(3c)$ .

Используя формулу (28), значение производных  $P(t)$  в точке  $\tau$  можно приближённо представить в виде

$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} \approx \frac{1}{\delta^2} \sum_{j=-1}^1 \beta_j P(m(\tau) + j), \quad m(\tau/\delta) = \begin{cases} [\tau/\delta], & \text{если } \tau/\delta \leq [\tau/\delta] + 1/2, \\ [\tau/\delta] + 1, & \text{если } \tau/\delta > [\tau/\delta] + 1/2, \end{cases} \quad (29)$$

где вид  $\beta_j$  очевиден из (28).

Определим безразмерную переменную  $z$  формулой  $y = y(q) + zh$ . Тогда, учитывая, что  $x(p) - y(p) = (p - q)h$ , из (17) получаем

$$B(p - q) = -h^2 \frac{1}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 (p_j - q_j - z_j)^2}} = h^2 B^0(p - q). \quad (30)$$

Функция  $B^0(p - q)$  является безразмерной. Если  $|p - q| \gg 1$ , то можно использовать приближённую формулу  $B^0(p - q) \approx -1/(4\pi|p - q|)$ .

Из равенств (16), (19) следует, что  $\tau(n, p, q) = (n - 2|p - q|)\delta$ . Далее, используя представления (29), (30) для выражений, входящих в сумму (17), получаем

$$B(p - q) \frac{\partial^2 \vec{P}(q, \tau)}{\partial \tau^2} \approx 4B^0(p - q) \sum_{j=-1}^1 \beta_j P(q, n - m + j), \quad m = m(2|p - q|). \quad (31)$$

Вид функции  $m = m(2|p - q|)$  вытекает из (29).

Из (17), (31) следует, что последовательные по времени значения поля в узловых точках области  $Q$  могут быть представлены следующей формулой:

$$U(p, n) = U_0(p, n) + \sum_{l=1}^M \sum_{q \in Q} B(p - q, l) P(q, n - l),$$

$$P(q, n - l) = (n(q) - 1)U(q, n - l), \quad q \in Q, \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Функции  $B(p - q, l)$  определяются из приведённых выше выражений, а значение  $M$  – формулой (27). Очевидно, что  $B(0, l) = 0$ . Из (31) следует, что при фиксированных  $p, q$  функция  $B(p - q, l)$  имеет только три ненулевых значения по  $l$ .

Основные вычислительные затраты в формуле (32) связаны с вычислением сумм. Обозначим

$$W(p, n) = \sum_{l=1}^M \sum_{q \in Q} B(p - q, l) P(q, n - l). \quad (33)$$

Для вычисления суммы (33) применим технику на основе быстрого дискретного преобразования Фурье [5, с. 93; 6]. Введём параллелепипед  $\Pi_2$  со сторонами  $2N_1h, 2N_2h, 2N_3h$ . Доопределим функции  $B(p_1, p_2, p_3, l)$  нулями в тех узловых точках параллелепипеда  $\Pi_2$ , в которых они не определены, и продолжим затем эти функции на все целочисленные значения  $p_1, p_2, p_3$  периодически с периодами  $2N_1, 2N_2, 2N_3$  соответственно. Продолжим функции  $P(p, n - l)$  на все узловые точки  $p \in \Pi_2$ , полагая их равными нулю в узловых точках, не принадлежащих области  $Q$ . Рассмотрим функцию

$$W(p, n) = \sum_{l=1}^M \sum_{q \in \Pi_2} B(p - q, l) P(q, n - l). \quad (34)$$

Учитывая изложенное, очевидно, что при  $p \in Q$  значение  $W(p_1, p_2, p_3, n)$  из (34) совпадает со значением  $W(p_1, p_2, p_3, n)$  из (33). Теперь, применяя дискретное преобразование Фурье по каждой пространственной переменной к обеим частям равенства (34), будем иметь

$$W^k(k, n) = \sum_{l=1}^M B^F(k, l) P^F(k, n - l), \quad k \in \Pi_2. \quad (35)$$

Зная функцию (35), для того чтобы вычислить  $W(p, n)$  необходимо выполнить обратное дискретное преобразование Фурье.

Оценим требуемое количество арифметических операций и объём памяти для хранения массивов, которые необходимы для выполнения одного временного шага, определяемого выражением (32). Массивы  $B(p, l)$  и  $B^F(k, l)$  вычисляются один раз до начала выполнения алгоритма решения. После вычисления необходимо сохранять в памяти компьютера массив чисел  $M_B$  объёма

$$|M_B| \approx 8MN_1, N_2, N_3, \quad M = [2 \max |p - q|] + 1, \quad p, q \in Q. \quad (36)$$

Из (35) следует, что также необходимо хранить массив комплексных чисел  $M_P$  объёма

$$|M_P| \approx 8MN_1, N_2, N_3. \quad (37)$$

При вычислении акустического поля для очередного временного шага требуется, согласно (34) и (35), выполнить дискретное преобразование Фурье только для функции  $P(p, n - 1)$  в параллелепипеде  $\Pi_2$ , поскольку преобразования Фурье функций в предыдущие моменты времени известны. Таким образом, число  $T_t$  арифметических операций, требуемое для выполнения одного временного шага, оценивается формулами

$$T_t \approx 2T_{FF} + T_S, \quad T_S = 10MN_1N_2N_3, \\ T_{FF} \approx 10N_1N_2N_3(\text{LOG}(N_1) + \text{LOG}(N_2) + \text{LOG}(N_3)). \quad (38)$$

В выражении (38) через  $\text{LOG}(N)$  обозначен целочисленный логарифм, т.е. сумма всех простых делителей числа  $N$ .

Обозначим  $N = N_1N_2N_3$ . Тогда из (36)–(38) следует, что объём требуемой памяти и число арифметических операций, необходимое для выполнения одного временного шага, практически пропорциональны  $MN \approx N^{4/3}$ .

Важной характеристикой алгоритма является количество временных шагов, которое нужно выполнить для получения полного решения поставленной задачи. Если внешнее поле ограничено во времени, то критерием остановки алгоритма может быть следующий: значения акустического поля в области  $Q$  близки к нулю.

**Заключение.** Рассмотренные в работе методы могут быть использованы для решения многих важных классов задач нестационарной акустики. Отметим, что описанный выше метод решения с соответствующими изменениями может быть применён и к нестационарным интегральным уравнениям, описывающим линейные материальные среды с временной и пространственной дисперсией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин А.Б. Интегральные уравнения для нестационарных задач электродинамики в материальных средах // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1288–1290.
2. Самохин А.Б., Самохина А.С., Кобаяси К. Численные методы решения нестационарного объёмного сингулярного интегрального уравнения электродинамики // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1293–1300.
3. Самохин А.Б. Объёмные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215–1230.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988.
5. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М., 1987.
6. Сигов А.С., Андрианова Е.Г., Жуков Д.О., Зыков С.В., Тарасов И.Е. Квантовая информатика: обзор основных достижений // Рос. технол. журн. 2019. Т. 7. № 1. С. 5–37.

Российский технологический университет (МИРЭА),  
г. Москва,  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 25.03.2021 г.  
После доработки 25.03.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

### О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

© 2021 г. А. В. Сетуха

Рассматривается вопрос о разрешимости одного гиперсингулярного интегрального уравнения на гладкой поверхности с краем в предположении, что на ней существуют глобальные изотермические координаты. Интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, решение ищется в классе функций, непрерывных по Гёльдеру, обращающихся в нуль на краю поверхности и имеющих в некоторой окрестности каждой точки, не лежащей на краю поверхности, поверхностный градиент, непрерывный по Гёльдеру в этой окрестности. Для этого уравнения доказано выполнение альтернативы Фредгольма. Показано также, что полученные результаты применимы к граничному интегральному уравнению, возникающему в краевой задаче для уравнения Гельмгольца в области вне указанной поверхности с условием Неймана на этой поверхности.

DOI: 10.31857/S0374064121090132

**Введение.** Уравнения с сильно сингулярными интегралами возникают в различных приложениях. В частности к уравнениям такого типа сводятся краевые задачи Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца на экране, если искать их решения в виде потенциала двойного слоя. Известен подход, при котором сильно сингулярное интегральное уравнение рассматривается как псевдодифференциальное [1; 2; 3, с. 125–161]. Этот подход позволяет исследовать разрешимость указанных уравнений в пространствах обобщённых функций.

Однако представляет интерес и вопрос о существовании их решений в пространствах “гладких” функций. В частности, это важно при построении численных методов решения таких уравнений. Так, существует подход к численному решению сильно сингулярных уравнений, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции и методе коллокаций. В вычислительной аэродинамике для решения задач о потенциальном обтекании тел используется метод вихревых рамок [4; 5, с. 462–476]. Как показано в [5, с. 474], в основе этого метода лежит решение некоторого граничного интегрального уравнения с сильной особенностью, интеграл в котором понимается в смысле конечного значения по Адамару. В [3, с. 139, 148, 351] получены результаты по разрешимости этого уравнения, возникающего при решении краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа, и сходимости численного метода вихревых рамок, но основу рассуждений составлял в конечном счёте опять-таки переход к концепции псевдо-дифференциального уравнения.

Другой подход развит автором в работах [6–8], в которых для гиперсингулярного интегрального уравнения, возникающего в краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа вне плоского экрана, доказана его разрешимость в классе гладких функций. Информация о свойствах такого решения используется, в частности, при обосновании равномерной сходимости на сетке численного метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций [3, с. 386].

В работах [9, 10] рассмотрен вопрос о существовании гладких решений у двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения на выпуклой ограниченной области с кусочно-гладкой границей с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару, более общего вида: рассмотрен случай как уравнения первого, так и второго рода (с неизвестной функцией вне интеграла); кроме члена с главной особенностью это уравнение содержит также интегральные операторы как с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения, так и с обычными интегралами. Решение рассматривалось в классе функций, непрерывных по Гёльдеру на всей области и имеющих частные производные первого порядка, непрерывные по Гёльдеру в окрестности каждой точки области. Для этого уравнения было доказано выполнение

альтернативы Фредгольма. В частности, полученные результаты применимы к интегральному уравнению, которое возникает в краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца на плоском экране.

В настоящей статье рассматривается вопрос о разрешимости аналогичного гиперсингулярного интегрального уравнения на гладкой поверхности с краем. Основным результатом работы состоит в том, что для случая, когда на поверхности можно ввести изотермические координаты [11, с. 109], уравнение с сильной особенностью сводится к рассмотренному в статье [10] двумерному гиперсингулярному уравнению по области параметризации. Благодаря этому удалось построить класс функций, в котором для данного уравнения выполнена альтернатива Фредгольма. В статье также показано, что полученные результаты применимы к граничному интегральному уравнению, возникающему в краевой задаче для уравнения Гельмгольца в области вне указанной поверхности с условием Неймана на этой поверхности.

**1. Основные формулировки.** Пусть  $\Sigma$  – гладкая разомкнутая поверхность с краем в  $\mathbb{R}^3$ , заданная параметрически: поверхность  $\Sigma$  есть множество точек  $x = \varphi(u)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u = (u_1, u_2) \in D$ , где  $D$  – замыкание некоторой выпуклой ограниченной области на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , границей которой является замкнутая кусочно-гладкая кривая класса  $C^2$ ,  $\varphi$  – диффеоморфизм, отображающий множество  $D$  на множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , класса  $C^4$ . Тогда первая квадратичная форма поверхности определяется метрическим тензором  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ :

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2, \quad g_{ij} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right).$$

Криволинейные координаты называются *изотермическими*, если первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = \rho^2(u)(du_1^2 + du_2^2).$$

Это означает, что

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) = \rho^2, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) = 0. \quad (1)$$

При этом функция  $\rho^2(u)$  строго положительна. Будем считать, что  $\rho(u) > 0$ . Тогда, так как множество  $D$  – компакт, найдутся положительные константы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  такие, что

$$\theta_1 < \rho(u) < \theta_2. \quad (2)$$

Заметим, что изотермические координаты можно ввести в окрестности произвольной точки любой гладкой поверхности [11, с. 109]. В статье рассматривается случай, когда изотермические координаты заданы на всей поверхности.

На поверхности  $\Sigma$  рассматривается интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g$ :

$$a(x)g(x) + \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y + \int_{\Sigma} B_1(x, y)g(y) d\sigma_y + \int_{\Sigma} B_2(x, y)g(y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, \quad (3)$$

здесь  $\partial\Sigma$  – край поверхности  $\Sigma$ , первый интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, второй интеграл – в смысле главного значения, функция  $a(x)$  непрерывна по Гёльдеру на поверхности  $\Sigma$ , функция  $B_1(x, y)$  имеет вид

$$B_1(x, y) = \sum_{i=1}^I \tilde{b}_i(u) \tilde{B}_{1i}(v-u) \quad \text{при} \quad x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v), \quad u, v \in D, \quad (4)$$

где  $I$  – некоторое натуральное число и функции  $\tilde{B}_{1i}(u)$ ,  $i = \overline{1, I}$ , определены, непрерывно дифференцируемы при  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \neq 0$ , и удовлетворяют условиям

$$|\tilde{B}_{1i}(u)| \leq \frac{C_1}{|u|^2}, \quad |\nabla \tilde{B}_{1i}(u)| \leq \frac{C_2}{|u|^3}, \quad \int_{r_1 \leq |u| \leq r_2} \tilde{B}_{1i}(u) du = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 < r_1 < r_2, \quad (5)$$

а функции  $\tilde{b}_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , непрерывны по Гёльдеру на множестве  $D$ , функция  $B_2(x, y)$  такова, что функция  $\tilde{B}_2(u, v) = B_2(\varphi(u), \varphi(v))$  представляется в виде

$$\tilde{B}_2(u, v) = \frac{\tilde{B}_2^*(u, v)}{|u - v|^\beta}, \quad \beta < 2, \quad \text{при } u, v \in D, \quad (6)$$

где функция  $\tilde{B}_2^*(u, v)$  непрерывна по Гёльдеру по совокупности переменных на множестве  $D \times D$ .

Рассматривается случай, когда правая часть  $f(x)$  уравнения непрерывна по Гёльдеру на поверхности  $\Sigma$ .

Все известные функции  $a(x)$ ,  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$ ,  $f(x)$  и искомая функция  $g(x)$  предполагаются, вообще говоря, комплекснозначными. Класс функций, в котором ищется решение, зададим ниже.

Напомним определения интегралов в смысле конечного значения по Адамару и в смысле главного значения. Пусть  $h(y)$  – функция на поверхности  $\Sigma$ , имеющая особенность в точке  $x \in \Sigma$ .

Интеграл от функции  $h$  по поверхности  $\Sigma$  существует в смысле *конечного значения по Адамару*, если существуют константы  $A$  и  $\alpha \geq 0$ , с которыми существует предел, принимаемый за значение интеграла,

$$\int_{\Sigma} h(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} h(y) d\sigma_y - \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \right\},$$

где  $U(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| < \varepsilon\}$  – трёхмерный открытый шар с центром в точке  $x$  радиуса  $\varepsilon$ .

При этом легко показать, что если указанный предел существует с некоторыми константами  $\alpha > 0$  и  $A$ , то константы  $\alpha$  и  $A$  определены однозначно. Если предел существует при  $\alpha = 0$ , следует положить и  $A = 0$  – тогда данное определение приводит к интегралу в смысле главного значения: интеграл от функции  $h$  по поверхности  $\Sigma$  существует в смысле *главного значения*, если существует предел, принимаемый за значение интеграла,

$$\int_{\Sigma} h(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} h(y) d\sigma_y.$$

Отметим, что если интеграл от функции  $h$  существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения, а если интеграл существует в смысле главного значения, то он существует и в смысле конечного значения по Адамару (с  $\alpha = 0$  и  $A = 0$ ).

**2. Основные определения и обозначения.** Будем обозначать через  $H^\mu[G]$ , где  $\mu \in (0, 1]$  и  $G$  – некоторое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , линейное пространство действительных функций  $f(x)$ , определённых на множестве  $G$ , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{\mu, G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu}.$$

В случае, когда  $G$  является областью или замыканием области в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , обозначим через  $H^{1, \mu}[G]$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , линейное пространство действительных функций  $f(x)$ , определённых на множестве  $G$ , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{1, \mu, G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\mu, G}.$$

Теперь рассмотрим действительнзначные функции, заданные на рассматриваемого вида поверхности  $\Sigma$ . Пространство  $H^\mu[\Sigma]$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , определено выше. Пусть  $H^{1,\mu}[\Sigma]$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , – линейное пространство действительнзначных функций  $f(x)$ , заданных на поверхности  $\Sigma$ , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{1,\mu,\Sigma} = \sup_{x \in \Sigma} |f(x)| + \sup_{x \in \Sigma} |\text{Grad } f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \Sigma \\ x \neq y}} \frac{|\text{Grad } f(x) - \text{Grad } f(y)|}{|x - y|^\mu},$$

где  $\text{Grad } f(x)$  – поверхностный градиент функции  $f$ . Мы введём поверхностный градиент  $\text{Grad}$  с помощью понятия дифференцируемости функции на поверхности. Функция  $f$  на поверхности  $\Sigma$  дифференцируема в точке  $x \in \Sigma$ , если существует вектор  $\vec{A}$  такой, что в окрестности этой точки значения  $f(y)$ ,  $y \in \Sigma$ , представляются в виде

$$f(y) = f(x) + (\vec{A}, y - x) + \alpha(x, y), \quad \text{где} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{\alpha(x, y)}{|x - y|} = 0.$$

При этом вектор  $\vec{A}$  определён с точностью до слагаемого вида  $\lambda \vec{n}(x)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а  $\vec{n}(x)$  – единичный нормальный вектор к поверхности  $\Sigma$  в точке  $x$ , и если последнее представление существует, то вектор  $\vec{A}$  можно однозначно выбрать при условии  $(\vec{A}, \vec{n}(x)) = 0$ . Такой вектор  $\vec{A}$  будем называть *поверхностным градиентом* функции  $f$  в точке  $x$  и обозначать через  $\text{Grad } f(x)$ .

Обозначим также через  $H^\mu_{\mathbb{C}}[G]$ , где  $G$  – множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , через  $H^{1,\mu}_{\mathbb{C}}[G]$ , здесь  $G$  – область или замыкание области в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , и через  $H^{1,\mu}_{\mathbb{C}}[\Sigma]$ , где  $\Sigma$  – поверхность рассматриваемого вида,  $\mu \in (0, 1]$ , линейные пространства заданных на соответствующих множествах комплекснзначных функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  – действительнзначные функции, принадлежащие пространствам  $H^\mu[G]$ ,  $H^{1,\mu}[G]$  и  $H^{1,\mu}[\Sigma]$  соответственно, а норма определяется равенством  $\|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$ , нормы функций  $f_1$  и  $f_2$  берутся в соответствующих пространствах.

Через  $A(\mu, \Sigma)$  обозначим линейное пространство действительнзначных функций  $f$ , удовлетворяющих включению  $f \in H^\mu[\Sigma]$  и при  $x \in \partial\Sigma$  равенству  $f(x) = 0$ , таких, что на любом участке  $\Sigma'$  поверхности  $\Sigma$ , состоящем из точек вида  $x = \varphi(u)$ ,  $u \in D'$ , где  $D'$  – замыкание некоторого открытого подмножества множества  $D$ , для которого  $D' \subset \text{int } D$ , выполняется включение  $f \in H^{1,\mu}[\Sigma]$ , где  $\text{int}$  – внутренность множества.

Множество комплекснзначных функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ ,  $x \in \Sigma$ ,  $f_1, f_2 \in A(\mu, \Sigma)$  обозначим через  $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ .

Решение уравнения (3) будем искать в классе функций  $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ . При этом мы докажем, что для любой функции  $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$  левая часть уравнения (3) определена во всех точках  $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ .

**3. О свойствах расстояний на поверхности. Функции на поверхности.** Сначала установим связь между расстоянием между точками на поверхности и расстоянием между соответствующими точками на множестве параметров. Пусть  $x = \varphi(u)$ ,  $y = \varphi(v)$  – точки на поверхности  $\Sigma$ ,  $u, v \in D$ . Тогда

$$y - x = \int_0^1 \frac{d\varphi(u + t(v - u))}{dt} dt.$$

Значит, разность  $y - x$  можно представить в виде

$$y - x = \tilde{H}_1(u, v)(u_1 - v_1) + \tilde{H}_2(u, v)(u_2 - v_2), \quad \tilde{H}_i(u, v) = \int_0^1 \varphi''_i(u + t(v - u)) dt, \quad i = 1, 2,$$

где через  $\varphi''_i \equiv \varphi''_i(u)$ ,  $i = 1, 2$ , обозначена частная производная  $\partial\varphi/\partial u_i$  в точке  $u = (u_1, u_2)$ . При этом  $\tilde{H}_i(u, v) \in C^3[D \times D]$ .

Далее, каждую из функций  $\tilde{H}_i(u, v)$  можно представить в виде

$$\tilde{H}_i(u, v) = H_i(u) + \sum_{j=1}^2 \tilde{H}_{ij}(u, v)(v_j - u_j),$$

где

$$H_i(u) = \tilde{H}_i(u, u) = \varphi''_i(u), \quad \tilde{H}_{ij}(u, v) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{H}_i(u, w)}{\partial w_i} \Big|_{w=u+t(v-u)} dt, \quad \tilde{H}_{ij}(u, v) \in C^2[D \times D].$$

Аналогичным образом, обозначив  $H_{ij}(u) = \tilde{H}_{ij}(u, u)$ , функции  $\tilde{H}_{ij}(u, v)$  можно представить в виде

$$\tilde{H}_{ij}(u, v) = H_{ij}(u) + \sum_{k=1}^2 \tilde{H}_{ijk}(u, v)(v_k - u_k), \quad H_{ij} \in C^2[D], \quad \tilde{H}_{ijk} \in C^1[D \times D].$$

Тогда

$$y - x = \sum_{k=1}^2 \varphi''_i(u)(v_i - u_i) + \sum_{i,j=1}^2 H_{ij}(u)(v_i - u_i)(v_j - u_j) + \sum_{i,j,k=1}^2 \tilde{H}_{ijk}(u, v)(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k).$$

Теперь в силу равенств (1) получаем

$$|y - x|^2 = \rho^2(u)(u - v)^2 + W(u, v), \quad (7)$$

где

$$W(u, v) = W_0(u, v) + W^*(u, v), \quad W_0(u, v) = \sum_{i,j,k=1}^2 W_{ijk}(u)(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k), \quad (8)$$

$W_{ijk}(u)$  – некоторые функции класса  $C^2[D]$ ,  $W^*(u, v)$  – некоторая функция класса  $C^1[D \times D]$ , удовлетворяющая условиям

$$|W^*(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^4, \quad \left| \frac{\partial W^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial W^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad (9)$$

здесь и далее через  $C_\varphi$  обозначены константы, определяемые только функцией  $\varphi$ , причём в разных оценках значение константы  $C_\varphi$  может быть различным. При этом функция  $W(u, v)$  подчинена оценкам

$$|W(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial W(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial W(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^2. \quad (10)$$

Из равенства (7) и оценок (2) и (10) следует, что выполнены следующие неравенства с некоторой константой  $C_\varphi$ :

$$|x - y| \leq C_\varphi |u - v|, \quad |u - v| \leq C_\varphi |x - y|. \quad (11)$$

Далее, получим более точную оценку для расстояния  $|x - y|$ . Справедливо представление

$$|y - x| = \rho(u)|u - v| + d(u, v), \quad (12)$$

где

$$d(u, v) = |y - x| - \rho(u)|u - v| = \frac{W(u, v)}{|y - x| + \rho(u)|u - v|}. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial|y - x|}{\partial u_i} = \frac{1}{2|y - x|} \frac{\partial(y - x)^2}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial|y - x|}{\partial v_i} = \frac{1}{2|y - x|} \frac{\partial(y - x)^2}{\partial v_i},$$

откуда, используя равенство (7) и оценки (10), получаем

$$\frac{\partial|y - x|}{\partial u_i} \leq C_\varphi, \quad \frac{\partial|y - x|}{\partial v_i} \leq C_\varphi.$$

Тогда из равенства (13) и оценок (10) вытекает, что

$$|d(u, v)| \leq C_\varphi|u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial d(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|, \quad \left| \frac{\partial d(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|. \quad (14)$$

Функцию  $d(u, v)$  можно представить в виде

$$d(u, v) = d_0(u, v) + d^*(u, v), \quad (15)$$

где

$$d_0(u, v) = \frac{W_0(u, v)}{2\rho(u)|u - v|}, \quad (16)$$

функция  $W_0(u, v)$  задана в (8),

$$d^* = d - d_0 = W \left\{ \frac{1}{|x - y| + \rho|u - v|} - \frac{1}{2\rho|u - v|} \right\} + \frac{W^*}{|x - y| + \rho|u - v|}.$$

Используя равенство (12) и оценки (9) и (10), получаем

$$|d^*(u, v)| \leq C_\varphi|u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial d^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial d^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|^2. \quad (17)$$

Пусть  $f(x)$  – некоторая функция на поверхности  $\Sigma$  и пусть  $\tilde{f}(u) = f(x)$  при  $x = \varphi(u)$ . Из оценок (11) следует, что условия  $f \in H^\mu[\Sigma]$  и  $\tilde{f} \in H^\mu[D]$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , равносильны.

Пусть теперь функция  $f(x)$  дифференцируема. Тогда

$$df = (\text{Grad } f, dx) = d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} du_2.$$

Векторы  $\text{Grad } f$  и  $dx$  как векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности, можно представить в виде

$$\text{Grad } f = f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2,$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – некоторые коэффициенты. Учитывая равенства (1), можем записать

$$(\text{Grad } f, dx) = \rho^2(f_1 du_1 + f_2 du_2),$$

откуда следует, что  $f_i = (\partial \tilde{f} / \partial u_i) / \rho$ . Таким образом,

$$\text{Grad } f = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right).$$

Тогда условия  $f \in H^{1,\mu}[\Sigma]$  и  $\tilde{f} \in H^{1,\mu}[D]$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , также равносильны.

**4. Сингулярные и гиперсингулярные интегралы на поверхности.** Сначала рассмотрим интегралы на плоскости. Пусть  $D$  – рассматриваемое множество на плоскости параметризации,  $\tilde{B}_1(u)$  – функция, определённая при  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \neq 0$ , удовлетворяющая условиям (5),  $g \in H^\mu(D)$ ,  $\mu \in (0, 1]$ . Тогда в каждой точке  $u \in D \setminus \partial D$  интеграл

$$\int_D \tilde{B}_1(v-u)g(y) dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \tilde{B}_1(v-u)g(y) dv$$

существует в смысле главного значения [12, с. 52], здесь  $U(u, \varepsilon)$  – двумерный открытый шар с центром в точке  $u$  радиуса  $\varepsilon$ .

Далее, пусть  $\tilde{g} \in H^{1, \mu}[D]$ . Тогда в каждой точке  $u \in D \setminus \partial D$  существует интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv - \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \right\}. \quad (18)$$

Здесь так же, как и в случае поверхностного интеграла, мы считаем, что интеграл существует, если существует указанный предел с некоторыми  $A$  и  $\alpha \geq 0$ , причём  $A = 0$ , если предел существует при  $\alpha = 0$ .

Действительно, представим данный интеграл в виде

$$\int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \tilde{g}(u) \int_D \frac{1}{|u-v|^3} dv, \quad I_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{g}(u)}{\partial u_i} \int_D \frac{v_i - u_i}{|u-v|^3} dv, \\ I_3 = \int_D \frac{\tilde{g}(v) - \tilde{g}(u) - (\text{grad } \tilde{g}(u), v-u)}{|u-v|^3} dv.$$

При этом интеграл  $I_3$  сходится как несобственный (подынтегральная функция не превосходит по модулю величины  $O(|u-v|^{-1})$ ), а интегралы, входящие в сумму  $I_2$ , сходятся в смысле главного значения.

Рассмотрим интеграл  $I_1$ . Существует открытый круг  $U(u, R)$  с центром в точке  $u$  радиуса  $R$ , содержащийся во множестве  $D$ . Тогда для любого  $\varepsilon \in (0, R)$  можем записать

$$\tilde{g}(u) \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{1}{|u-v|^3} dv = I_{11}(R) + I_{12}(R, \varepsilon), \\ I_{11}(R) = \int_{D \setminus U(u, R)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv, \quad I_{12}(R, \varepsilon) = \int_{U(u, R) \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv.$$

Переходя к полярным координатам с центром в точке  $u$ , получаем

$$I_{12}(R, \varepsilon) = \tilde{g}(u) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^R \frac{dr}{r^2} = 2\pi \tilde{g}(u) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R} \right).$$

Но тогда интеграл  $I_1$  существует как предел

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi \tilde{g}(u)}{\varepsilon} \right).$$

Значит, интеграл, определяемый выражением (18), существует.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании сингулярных и гиперсингулярных интегралов на поверхности  $\Sigma$  и их преобразовании к интегралам по параметрам.

Сразу заметим, что если  $g$  – непрерывная функция на поверхности  $\Sigma$ , то

$$\int_{\Sigma} g(x) d\sigma_x = \int_D g(\varphi(v)) J(v) dv, \quad J(v) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right| = \rho^2(v).$$

**Лемма 1.** Пусть  $g \in H^\mu[\Sigma]$ , функция  $B_1(x, y)$  представляется в виде  $B_1(x, y) = \tilde{B}_1(v - u)$  при  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \varphi(y)$  и функция  $\tilde{B}_1$  удовлетворяет условиям (5). Тогда при  $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$  существует интеграл

$$\int_{\Sigma} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \int_D \tilde{B}_1(u - v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv,$$

понимаемый в смысле главного значения, где  $\tilde{g}(v) = g(\varphi(v))$ .

**Доказательство.** Построим шар  $U(x, \varepsilon)$  с центром в рассматриваемой точке  $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$  радиуса  $\varepsilon > 0$ , и пусть  $x = \varphi(u)$ ,  $u \in D \setminus \partial D$ . Тогда

$$\int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(v) - \varphi(u)| \geq \varepsilon}} \tilde{B}_1(v - u) g(\varphi(v)) \rho^2(v) dv = I_1 + I_2 - I_3,$$

где

$$I_i = \int_{D_i(\varepsilon)} \tilde{B}_1(v - u) g(\varphi(v)) \rho^2(v) dv, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$D_1 = \{v \in D : \rho(u)|v - u| \geq \varepsilon\}, \quad D_2(\varepsilon) = \{v \in D : \rho(u)|v - u| < \varepsilon, \quad |\varphi(v) - \varphi(u)| \geq \varepsilon\},$$

$$D_3(\varepsilon) = \{v \in D : \rho(u)|v - u| \geq \varepsilon, \quad |\varphi(v) - \varphi(u)| < \varepsilon\}.$$

В силу представления (12) и оценки (14) получаем, что если  $v \in D_2 \cup D_3$ , то

$$\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 \leq \rho(u)|v - u| \leq \varepsilon + C_\varphi \varepsilon^2$$

и при этом  $|x - y| \geq \rho(u)|v - u| - C_\varphi \varepsilon^2$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то  $\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 > 0$  и  $|x - y| \geq \varepsilon/2$ . Пусть  $N = \max_{x \in \Sigma} |g(x)|$ . Тогда

$$|I_2 - I_3| \leq C_\varphi C_1 N \int_{\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 \leq |u - v| \leq \varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2} \frac{dv}{\varepsilon^2} \leq C_\varphi C_1 N \varepsilon,$$

где  $C_1$  – константа из условий (5), и, значит,  $I_2 - I_3 \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда

$$\int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \int_D \tilde{B}_1(u - v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $g \in H^{1, \mu}[\Sigma]$ . Тогда при  $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$  существует интеграл

$$I(x) = \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y, \quad (19)$$

понимаемый в смысле конечного значения по Адамару. Именно,

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y - \frac{2\pi g(x)}{\varepsilon} \right\}, \quad (20)$$

и этот интеграл сводится к интегралу по параметрам, также понимаемому в смысле конечного значения по Адамару:

$$I(x) = \int_D \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(v) - \varphi(u)|^3} dv = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{D \setminus U(x, \delta)} \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(v) - \varphi(u)|^3} dv - \frac{2\pi \tilde{g}(x)}{\delta} \right\}, \quad (21)$$

где  $\tilde{g}(v) = g(\varphi(v))$ . Кроме того, интеграл  $I(x)$  можно представить в виде

$$I(x) = \frac{1}{\rho^3(u)} \int_D \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|v - u|^3} dv + \sum_{i,j,k=1}^2 \alpha_{ijk}(u) \int_D A_{ijk}(v - u) \tilde{g}(v)\rho^2(v) dv + \int_D A_2(u, v) \tilde{g}(v)\rho^2(v) dv, \quad (22)$$

где  $\alpha_{ijk} \in C^1[D]$ ,  $A_{ijk}(v - u)$  — функции вида (5),  $A_2(u, v)$  — ядро вида (6), первый интеграл сходится в смысле конечного значения по Адамару, интегралы, стоящие под знаком суммы, сходятся в смысле главного значения, последний интеграл сходится как несобственный.

**Доказательство.** Пусть  $x = \varphi(u) \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ . При каждом  $\varepsilon > 0$  рассмотрим интеграл

$$I(x, \varepsilon) = \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(u) - \varphi(v)|^3} d\sigma_v.$$

Пусть  $v \in D$ ,  $y = \varphi(v)$ . Используя равенство (12) и обозначая  $a = \rho(u)|u - v|$ ,  $d = d(u, v)$ , можем записать  $|x - y| = a + d$ . При этом в силу оценки (14) найдётся  $r_0 > 0$ , не зависящее от  $u$  и  $v$ , такое, что при  $|u - v| < r_0$  выполнено неравенство  $|d| \leq a/2$ . Пусть  $f(a) = a^{-3}$ . Запишем для функции  $f$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(a + d) = f(a) + f'(a)d + f''(a + \theta d)d^2, \quad \text{где } \theta \in (0, 1).$$

Представляя второе слагаемое в виде  $f'(a)d = f'(a)(d_0 + d^*)$ , получаем

$$\frac{1}{|x - y|^3} = f(a) + f'(a)d_0 + (f'(a)d^* + f''(a + \theta d)d^2) = A_0(u, v) + A_1(u, v) + A_2(u, v), \quad (23)$$

$$A_0(u, v) = \frac{1}{\rho^3(u)|u - v|^3},$$

$$A_1(u, v) = -3 \frac{d_0(u, v)}{\rho^4(u)|u - v|^4}, \quad A_2(u, v) = -3 \frac{d^*(u, v)}{\rho^4(u)|u - v|^4} + 12 \frac{d(u, v)^2}{(\rho(u)|u - v| + \theta d(u, v))^5}.$$

При этом в силу оценок (14) и (17) имеем

$$|A_2(u, v)| \leq C_\varphi \frac{1}{|u - v|}, \quad (24)$$

а ядро  $A_1(x, y)$  вследствие определений (8) и (16) имеет вид

$$A_1(u, v) = \sum_{i,j,k=1,2} \alpha_{ijk}(u) A_{ijk}(v - u),$$

$$\alpha_{ijk}(u) = \frac{W_{ijk}(u)}{\rho^5(u)}, \quad A_{ijk}(v - u) = \frac{(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k)}{|v - u|^5}.$$

Проведённые выкладки справедливы при  $|u - v| < r_0$ . Однако в представлении (23) левая часть, а также слагаемые  $A_0(u, v)$  и  $A_1(u, v)$  определены при всех  $u, v \in D$ . Тогда с учётом неравенств (11) функция  $A_2(u, v)$  определена и удовлетворяет оценке (24) при всех  $x, y \in \Sigma$  с некоторой константой, если положить

$$A_2(u, v) = \frac{1}{|x - y|^3} - A_0(u, v) - A_1(u, v).$$

Докажем, что ядро  $A_2(u, v)$  представляется в виде (6). Для этого сначала докажем, что это ядро подчинено оценкам

$$\left| \frac{\partial A_2(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq \frac{C}{|u - v|^2}, \quad \left| \frac{\partial A_2(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq \frac{C}{|u - v|^2}, \quad u, v \in D, \quad u \neq v. \quad (25)$$

Для этого заметим, что  $A_2(x, y) = F(a, d)$ , где  $F(a, d) = f(a + d) - f(a) - f'(a)d_0$ . Тогда

$$\frac{\partial A_2(u, v)}{\partial u_i} = \frac{\partial F(a, d)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial u_i} + \frac{\partial F(a, d)}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial u_i}.$$

Теперь оценки (25) вытекают из оценок (14) и (17).

Из оценок (24) и (25) следует, что функция  $A_2^*(u, v) = A_2(u, v)|u - v|^{1+\mu}$ ,  $\mu \in (0, 1)$ , непрерывна по Гёльдеру по совокупности аргументов  $(u, v)$  на множестве  $D \times D$ .

Вернёмся к рассматриваемому интегралу. Его можно представить в виде

$$I(x, \varepsilon) = I_0(x, \varepsilon) + I_1(x, \varepsilon) + I_2(x, \varepsilon), \quad I_i(x, \varepsilon) = \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} A_i(u, v) g(y) d\sigma_y.$$

При этом интеграл  $I_2(x, \varepsilon)$  сходится как несобственный, а интеграл  $I_1(x, \varepsilon)$  сходится в смысле главного значения согласно лемме 1. При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(x, \varepsilon) = \sum_{i, j, k=1, 2} \alpha_{ijk}(u) \int_D A_{ijk}(v - u) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv, \quad (26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(x, \varepsilon) = \int_D A_2(u, v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv. \quad (27)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_0(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(v) \rho^2(v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} d\sigma_y.$$

Представим этот интеграл в виде

$$I_0(x, \varepsilon) = I_{01}(x, \varepsilon) + I_{02}(x, \varepsilon) + I_{03}(x, \varepsilon),$$

где

$$I_{01}(x, \varepsilon) = \frac{\tilde{g}(u)}{\rho(u)} \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{1}{|u - v|^3} dv, \quad I_{02}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\text{grad}(\tilde{g}(u) \rho^2(u))(u - v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} dv,$$

$$I_{03}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{q(u, v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} dv, \quad q(u, v) = \tilde{g}(v) \rho^2(v) - \tilde{g}(u) \rho^2(u) - \text{grad}(\tilde{g}(u) \rho^2(u))(u - v).$$

Так как функция  $g(u)\rho^2(u)$  принадлежит пространству  $H^{1,\mu}[D]$ , справедлива оценка

$$|q(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^{1+\mu} \|\tilde{g}\|_{1,\mu,D}.$$

Значит, интеграл  $I_{03}(x, \varepsilon)$  сходится как несобственный. Интеграл  $I_{02}(x, \varepsilon)$  сходится в смысле главного значения в силу леммы 1.

Наконец, рассмотрим интеграл  $I_{01}(x, \varepsilon)$ , перейдя на плоскости интегрирования  $(v_1, v_2)$  к полярным координатам с центром в точке  $u$ .

Пусть  $\xi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $v(\theta, t) = u + t\xi(\theta)$ ,  $t \geq 0$ .

Обозначим  $y_\theta(t) = \varphi(v(\theta, t))$ ,  $r_\theta(t) = |y_\theta(t) - x|$ , где, как и выше,  $x = \varphi(u)$ . При этом  $t = |v(\theta, \varepsilon) - u|$ .

Докажем, что производная функции  $r_\theta(t)$  положительна при достаточно малых значениях  $t$ . Действительно,

$$y'_\theta(t) = \sum_{i=1}^2 \varphi''_i(v(\theta, t)) \xi_i(t)$$

и тогда

$$|y'_\theta(0)| = \rho(u), \quad |y'_\theta(t) - y'_\theta(0)| \leq C_\varphi t.$$

Далее имеем

$$r'_\theta(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{(y_\theta(t) - y_\theta(0), y_\theta(t) - y_\theta(0))} = \frac{(y'_\theta(t), y_\theta(t) - y_\theta(0))}{r_\theta(t)}. \quad (28)$$

Так как  $y_\theta(t) - y_\theta(0) = t \int_0^1 y'_\theta(\tau t) d\tau$ , можем записать

$$r'_\theta(t) = \left( y'_\theta(t), \int_0^1 y'_\theta(\tau t) d\tau \right) \left( \int_0^1 r'_\theta(\tau t) d\tau \right)^{-1}.$$

Заметим, что в силу неравенств (11) выполнено условие  $r_\theta(t) > 0$  при  $t > 0$ . Поэтому вследствие представления (28) получаем, что  $r'_\theta(0) = \rho(u)$ ,  $|r'_\theta(t) - r'_\theta(0)| \leq C_\varphi t$ . Тогда найдётся  $r_1 \in (0, r_0]$  такое, что при  $t \leq r_1$  справедливо неравенство  $r'_\theta(t) > \rho(u)/2$ . Значит, при  $t \leq r_1$  справедливо также неравенство  $r_\theta(t) > t\rho(u)/2$ .

Будем считать, что  $\varepsilon < \varepsilon_0 \equiv \rho(u)r_1/2$ . Тогда для каждого  $\theta$  существует единственное  $t = t(\theta, \varepsilon) \in [0, r_1]$ , являющееся решением уравнения  $r_\theta(t) = \varepsilon$ . Теперь интеграл  $I_{01}(x, \varepsilon)$  представим в виде

$$I_{01}(x, \varepsilon) = \frac{\tilde{g}(u)}{\rho(u)} (J(x, \varepsilon) + \tilde{J}(x, \varepsilon)),$$

где

$$J(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| < r_1 \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{1}{|u-v|^3} dv, \quad \tilde{J}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \geq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv.$$

Интеграл  $\tilde{J}(x, \varepsilon)$  существует и не зависит от  $\varepsilon$ . Интеграл  $J(x, \varepsilon)$  преобразуется к виду

$$J(x, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{t(\theta, \varepsilon)}^{r_1} \frac{\tau d\tau}{\tau^3} = -\frac{2\pi}{r_1} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{t(\theta, \varepsilon)} d\theta.$$

Рассмотрим функцию  $t(\theta, \varepsilon)$ . Имеем  $|y - x| = \varepsilon$  при  $x = \varphi(u)$ ,  $y = \varphi(v)$ ,  $v = v(\theta, t)$ ,  $t = t(\theta, \varepsilon)$ , причём  $|u - v| = t$ . В силу равенства (12) получаем  $\rho t - \varepsilon = d$ ,  $|\rho t - \varepsilon| \leq C_\varphi \varepsilon^2$ ,

где  $\rho = \rho(u)$ . Тогда существует  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$  такое, что при  $\varepsilon < \varepsilon_1$  выполнено неравенство  $|\rho t - \varepsilon| \leq \varepsilon/2$ . Теперь можем записать

$$\frac{1}{t} = \frac{\rho}{\varepsilon - d} = \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\rho d}{\varepsilon^2} + \frac{\rho d^2}{(\varepsilon - d)\varepsilon^2}.$$

Далее, в силу равенств (15) и (16) получаем

$$d = d_0 + d^*, \quad d_0 = \frac{W_0}{\rho t} = \frac{W_0}{\varepsilon - d} = \frac{W_0}{\varepsilon} + \frac{W_0 d}{\varepsilon(\varepsilon - d)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{t} = \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\rho W_0}{\varepsilon^3} + \beta, \quad \beta = \rho \left\{ \frac{W_0 d}{\varepsilon^3(\varepsilon - d)} + \frac{d^*}{\varepsilon^3} + \frac{d^2}{(\varepsilon - d)\varepsilon^2} \right\}, \quad |\beta| \leq C_\varphi \varepsilon.$$

В силу определения (8) имеем

$$W_0 = \frac{\varepsilon^3}{\rho^3} \tilde{W}_0 + \left( t^3 - \frac{\varepsilon^3}{\rho^3} \right) \tilde{W}_0, \quad \tilde{W}_0 = \sum_{i,j,k=1,2} W_{ijk}(u) \xi_i(\theta) \xi_j(\theta) \xi_k(\theta).$$

Тогда, учитывая оценку  $|t - \varepsilon/\rho| \leq C_\varphi \varepsilon^2$ , будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho \tilde{W}_0}{\varepsilon^3} d\theta = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ J(x, \varepsilon) - \frac{2\pi \rho}{\varepsilon} \right\} = -\frac{2\pi}{r_1} \equiv J(x).$$

Прямым вычислением несложно проверить, что

$$J(x) = -\frac{2\pi}{r_1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\substack{v \in D \\ \delta \leq |u-v| \leq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi}{\delta} \right\} = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \leq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv,$$

где последний интеграл понимается как двойной интеграл в смысле конечного значения по Адамару.

Собирая вместе полученные оценки, заключаем, что справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^3(u)} \left\{ \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(\nu) \rho^2(v)}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi \tilde{g}(u) \rho^2(u)}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{\rho^3(u)} \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \leq r_1}} \frac{\tilde{g}(\nu) \rho^2(v)}{|u-v|^3} dv,$$

из которого и соотношений (26) и (27) вытекает формула (22). Лемма доказана.

Нетрудно показать, что если функция  $g$  определена и непрерывна на поверхности  $\Sigma$  и существует окрестность  $U = U(x, \varepsilon)$  точки  $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$  такая, что на поверхности  $\Sigma_U = \Sigma \cap \bar{U}$  выполнено условие  $g \in H^{1,\mu}[\Sigma_U]$ , то интеграл (19) существует и имеют место формулы (20)–(22). Для доказательства достаточно представить рассматриваемый интеграл в виде

$$I(x) = \int_{\Sigma_U} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y + \int_{\Sigma \setminus \Sigma_U} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y$$

и применить лемму 2 к первому интегралу.

Отсюда также следует, что интеграл (19) существует и справедливы формулы (20)–(22), если функция  $g$  имеет комплексные значения и удовлетворяет условию  $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ .

**5. О разрешимости уравнения (3).** В силу лемм 1 и 2 уравнение (3) преобразуется к равносильному уравнению для неизвестной функции  $\tilde{g}(u) = g(\varphi(u))\rho^2(u)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u)\tilde{g}(u) + \int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|v-u|^3} dv + \sum_{m=1}^M \tilde{b}_m(u) \int_D \tilde{B}_{1m}(u-v)\tilde{g}(v) dv + \\ + \int_D \tilde{B}_2(u,v)\tilde{g}(v) dv = \tilde{f}(u), \quad u \in D \setminus \partial D, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\tilde{f}(u) = \rho^3(u)f(\varphi(u))$ ,  $\tilde{a}(u) = \rho(u)a(\varphi(u))$ , причём выполнены включения  $\tilde{f} \in H^\mu[D]$ ,  $\tilde{a} \in H^\mu[D]$ ,  $\tilde{b}_m(u)$ ,  $m = \overline{1, M}$ , – функции, удовлетворяющие условию  $b_m \in H^\mu[D]$ ,  $\tilde{B}_{1m}$ ,  $m = \overline{1, M}$ , – функции вида (5),  $\tilde{B}_2(u, v)$  – функция, представляющаяся в виде (6) с некоторым  $\beta \in [0, 2)$ ,  $\tilde{B}_2^* \in H^\mu(D \times D)$ ; все записанные включения выполнены с некоторым  $\mu \in (0, 1]$ .

Уравнение такого вида в случае  $M = 1$  и  $\tilde{b}_1(u) = 1$  рассматривалось в работе [10]. Его решение искалось во введённом в [10] классе функций  $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ , аналогичном классу  $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ , определённому в настоящей работе. Именно, класс  $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$  состоит из заданных на множестве  $D$  комплекснозначных функций  $f(u) = f_1(u) + if_2(u)$ , где  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , – вещественнозначные функции, удовлетворяющие включению  $f_i \in H^\mu[D]$  и при  $x \in \partial D$  равенству  $f_i(x) = 0$ , такие, что для любого множества  $D' \subset \text{int } D$ , являющегося замыканием открытого множества, выполняется включение  $f_i \in H^{1, \mu}[D']$ . Следующая теорема доказана в работе [10] для частного случая уравнения (29) с  $M = 1$  и  $\tilde{b}_1(u) = 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mu < 1/2$ ,  $\mu < 2 - \beta$ ,  $\mu \leq \beta$ , где  $\beta$  – константа из условия (6). Тогда:

1) для уравнения (29) справедлива альтернатива Фредгольма: либо уравнение (29) имеет решение  $\tilde{g} \in A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$  для любой правой части  $\tilde{f} \in H_{\mathbb{C}}^\mu[D]$ , либо однородное уравнение имеет ненулевые решения в классе функций  $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ ;

2) однородное уравнение, соответствующее уравнению (29), имеет не более конечного числа линейно независимых решений;

3) если однородное уравнение (29) однозначно разрешимо в классе функций  $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ , то при любой правой части  $\tilde{f} \in H_{\mathbb{C}}^\mu[D]$  решение уравнения (29) в классе  $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$  представляется в виде

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2, \quad \text{где } \tilde{g}_1 \in H_{\mathbb{C}}^{1, \mu}[D], \quad \tilde{g}_2 \in C^\infty(\text{int } D),$$

$$\text{при всех } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\alpha| \geq 1, \quad \text{функции } D^\alpha \tilde{g}_2(u) \rho(u, \partial D)^{|\alpha| - 1/2} \text{ ограничены,} \quad (30)$$

здесь  $\rho(u, \partial D)$  – расстояние от точки  $u$  до множества  $\partial D$ ,  $D^\alpha \tilde{g}_2 = (\partial^{|\alpha|} g_2) / (\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2})$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ . При этом выполнены оценки

$$\|\tilde{g}_1\|_{1, \mu, D} \leq C \|\tilde{f}\|_{\mu, D}, \quad |D^\alpha \tilde{g}_2(u)| \leq C(\alpha) \|\tilde{f}\|_{\mu, D} \rho(u, \partial D)^{1/2 - |\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\alpha| \geq 1, \quad (31)$$

$$\|\tilde{g}\|_{H_{\mathbb{C}}^{1/2}} \leq C \|\tilde{f}\|_{\mu, D}, \quad (32)$$

где  $C$  и  $C(\alpha)$  – некоторые константы, зависящие от операторов в левой части уравнения, множества  $D$  и параметра  $\mu$  и не зависящие от функции  $\tilde{f}$ .

Выше мы отметили, что теорема 1 доказана только в частном случае уравнения (29). Покажем, что эта теорема остаётся в силе и для общего случая уравнения (29). Введём линейный оператор  $B_1$ , ставящий функции  $\tilde{g}$ , определённой на множестве  $D$ , в соответствие функцию  $\tilde{f} = B_1 \tilde{g}$ , определённую на этом же множестве, по формуле

$$\tilde{f}(u) = \sum_{m=1}^M \tilde{b}_m(u) \int_D \tilde{B}_{1m}(u-v)\tilde{g}(v) dv. \quad (33)$$

Обозначим  $\dot{H}_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$  – подпространство линейного пространства  $H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$ , элементами которого являются функции  $\tilde{g} \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$ , удовлетворяющие условию  $\tilde{g}(x) = 0$  при  $x \in \partial D$ . В работе [10] для оператора  $B_1$  вида (33) с  $M = 1$  и  $\tilde{b}_1(u) = 1$  доказана

**Лемма 3** (лемма 1 из [10]). *Оператор  $B_1$ , определяемый формулой (33), действует из пространства  $\dot{H}_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$  в пространство  $H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$  и непрерывен.*

Из анализа доказательства этой леммы, приведённого в [10], следует, что лемма справедлива и для рассматриваемого общего случая оператора  $B_1$  вида (33). Но тогда легко убедиться в том, что всё доказательство теоремы 1 из работы [10] остаётся в силе для уравнения (29). Тем самым теорема 1 верна и для рассматриваемого уравнения (29).

Из теоремы 1 следует

**Теорема 2.** Пусть  $\mu \leq \beta$ ,  $\mu < 1/2$ . Тогда:

1) для уравнения (3) справедлива альтернатива Фредгольма: либо уравнение (3) имеет решение  $\varphi \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$  для любой правой части  $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[\Sigma]$ , либо однородное уравнение имеет ненулевые решения в классе функций  $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ ;

2) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет не более конечного числа линейно независимых решений;

3) если однородное уравнение однозначно разрешимо в классе функций  $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ , то при любой правой части  $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[\Sigma]$  функция  $\tilde{g}(u) = \rho^2(u)g(\varphi(u))$ , где  $g$  – решение уравнения (3), представляется в виде  $\tilde{g}(u) = \tilde{g}_1(u) + \tilde{g}_2(u)$  так, что  $\tilde{g}_1 \in H^{1,\mu}[D]$ ,  $\tilde{g}_2 \in C^{\infty}[\text{int } D]$  и выполнены условия (30)–(32) с  $\tilde{f}(u) = f(\varphi(u))\rho^3(u)$ .

## 6. Краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца (Лапласа) на экране.

Пусть  $\Sigma$  – рассматриваемая поверхность,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$  – область вне этой поверхности. Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца на экране  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \Delta U + k^2 U &= 0 \quad \text{в области } \Omega, \\ \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)^{\pm} &= f \quad \text{на поверхности } \Sigma \setminus \partial \Sigma, \end{aligned}$$

где  $f$  – некоторая функция, заданная на поверхности  $\Sigma$ ,  $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}$ ,  $\mu \in (0, 1]$ . Не рассматривая в данной статье вопрос о разрешимости поставленной задачи, отметим, что её решение в области  $\Omega$  можно искать в виде потенциала двойного слоя

$$U(x) \equiv U[\Sigma, g](x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |x-y|. \quad (34)$$

Отметим также, что потенциал двойного слоя (34) позволяет найти решение, удовлетворяющее условию

$$U(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

и условию излучения на бесконечности в форме Зоммерфельда

$$(x, \text{grad } U(x)) - ikU(x) = o(1/|x|) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (35)$$

При  $k = 0$  получается уравнение Лапласа. Для него рассматриваются действительные решения  $U(x)$  и функция  $F$  имеет вид

$$F(x-y) = F_0(x-y) \equiv 1/(4\pi r), \quad r = |x-y|,$$

условие (35) не ставится.

В работе [13, лемма 8] для потенциала двойного слоя в случае оператора Лапласа  $F(x-y) = F_0(x-y)$  доказано, что если  $g \in H^{1,\mu}$ , то градиент потенциала двойного слоя имеет в каждой точке  $\Sigma \setminus \partial \Sigma$  краевые значения, для которых справедлива формула

$$(\text{grad } U)^{\pm}(x) = \int_{\Sigma} g(y) \text{grad}_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y \pm \frac{1}{2} \text{Grad } U(x), \quad (36)$$

интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

Очевидно, что формула (36) верна и в случае, когда  $g \in A_C(\mu, \Sigma)$ . Для доказательства этого достаточно рассмотреть функцию  $U(z)$  в окрестности рассматриваемой точки  $x$ , представив её в виде

$$U[\Sigma, g](z) = U[\Sigma'(x), g](z) + U[\Sigma \setminus \Sigma'(x), g](z),$$

где  $\Sigma''(x)$  – участок поверхности  $\Sigma$ , выбранный так, что  $x \in \Sigma' \setminus \partial \Sigma''$  и выполнено включение  $g \in H^{1,\mu}[\Sigma'']$ . Тогда для первого слагаемого формула (36) верна для рассматриваемой точки  $x$ , а второе слагаемое представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в точке  $x$ .

Чтобы доказать справедливость формулы (36) для уравнения Гельмгольца, представим функцию  $F(x-y)$  в виде

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x), \quad F_1(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad r = |x|,$$

и для упрощения, чтобы использовать известные результаты, предположим, что рассматриваемая поверхность  $\Sigma$  может быть достроена до некоторой замкнутой поверхности  $\Sigma_0$  класса  $C^3$  (на поверхности  $\Sigma_0$  мы уже не требуем существования изотермических координат).

Потенциал  $U$  с плотностью  $g \in A_C(\mu, \Sigma)$  представим в виде суммы

$$U(x) = U_0(x) + U_1(x), \quad U_0(x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad U_1(x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F_1(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y.$$

При этом для функции  $U_0$  верна формула (36) и можно показать, что функция  $U_1$  непрерывно дифференцируема во всём пространстве. Чтобы доказать непрерывность градиента функции  $U_1$  в окрестности каждой точки  $x \in \Sigma$ , достроим поверхность  $\Sigma$  до замкнутой поверхности  $\Sigma_0$  и доопределим функцию  $g$  на поверхности  $\Sigma_0 \setminus \Sigma$  равенством  $g = 0$ . При этом функция  $g$  непрерывна на поверхности  $\Sigma_0$ . Градиент функции  $U_1$  представляется в точках  $x \notin \Sigma$  в виде

$$\text{grad } U_1(x) = \int_{\Sigma_0} \vec{K}(x, y) g(y) dy, \quad \vec{K}(x, y) = \text{grad}_x \frac{\partial F_1(x-y)}{\partial n_y}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0, \quad y \in \Sigma_0. \quad (37)$$

Далее, несложно показать, что выполняются оценки

$$|\vec{K}(x, y)| \leq \frac{C_\varphi}{|x-y|}, \quad \left| \frac{\partial \vec{K}(x-y)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C_\varphi}{|x-y|^2}.$$

Тогда для любых  $y \in \Sigma_0$  и  $x, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0$  таких, что  $2|x-z| \leq |x-y|$ , нетрудно доказать оценку

$$|\vec{K}(x, y) - \vec{K}(z, y)| \leq \frac{C_\varphi |x-z|}{|x-y|^2},$$

откуда в силу [14, теорема 2.7] заключаем, что интеграл в формуле (37) порождает непрерывную функцию в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому формула (36) справедлива и для уравнения Гельмгольца.

Вследствие формулы (36) рассматриваемая краевая задача сводится к следующему интегральному уравнению с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_{\Sigma} g(x) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma, \quad (38)$$

где

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = (\vec{n}(x), \text{grad}_x (\vec{n}(y), \text{grad}_y F(x-y))).$$

При этом если  $g \in A_C(\mu, \Sigma)$  – решение уравнения (38), то функция  $U = U[\Sigma, g]$  является решением рассматриваемой краевой задачи.

Покажем, что уравнение (38) представляется в виде (3).

Получим выражение для ядра уравнения (38). Несложно убедиться, что

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = (\vec{n}(y), \text{grad}_y F(x-y)) = \frac{1}{4\pi} (\vec{n}(y), x-y) \Psi(r), \quad \Psi(r) = \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)' = \frac{e^{ikr}(1-ikr)}{r^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{n}(y), \vec{n}(x)) \Psi(r) + B_{21}(x, y), \\ B_{21}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{n}(y), x-y)(\vec{n}(x), x-y)}{r} \Psi''(r) = \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi} \frac{(\vec{n}(y), x-y)(\vec{n}(x), x-y)}{r^5} (-3 + 3ikr + k^2 r^2). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{n}(x), \vec{n}(y) - \vec{n}(x))}{|x-y|^3} + B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y), \\ B_{22}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \Psi(r) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(1-ikr) - 1}{r^3}, \quad r = |x-y|. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим функцию  $\eta(u, v) = (\vec{n}(x), \vec{n}(y) - \vec{n}(x))$ . Так как  $\eta(u, v) = 0$  при  $u = v$ , можем записать

$$\eta(u, v) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(u)(v_i - u_i) + \eta^*(u, v),$$

$$|\eta^*(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial \eta^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|, \quad \left| \frac{\partial \eta^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|.$$

Тогда, используя равенство (23), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3} + B_1(x, y) + B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y) + B_{23}(x, y), \\ B_1(x, y) &= \frac{1}{4\pi \rho^3(u) |u-v|^3} \sum_{i=1}^2 \eta_i(u)(v_i - u_i), \\ B_{23}(x, y) &= (A_1(u, v) + A_2(u, v)) \eta(u, v) + \frac{1}{4\pi} \frac{\eta^*(u, v)}{|x-y|^3}. \end{aligned}$$

Далее легко видеть, что ядро  $B_1(x, y)$  имеет вид (4), (5), а для ядра

$$B_2(x, y) = B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y) + B_{23}(x, y)$$

несложно доказать оценки

$$|B_2(x, y)| \leq \frac{C_\varphi}{|u-v|}, \quad \left| \frac{\partial B_2(x, y)}{\partial u_i} \right| \leq \frac{C_\varphi}{|u-v|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Из последних оценок заключаем, что функция  $B_2$  имеет вид (6).

Таким образом, уравнение (38) – уравнение рассматриваемого вида и для него справедлива теорема 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1624.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stephan E.P.* Boundary integral equations for screen problems in 3 // *Integral Equations and Operator Theory*. 1987. V. 10. P. 236–257.
2. *Крутицкий П.А.* Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разомкнутых поверхностей и случай ее явного решения // *Докл. РАН*. 2012. Т. 447. № 4. С. 365–368.
3. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., 2001.
4. *Апаринков В.А., Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Расчет нестационарных аэродинамических характеристик тел при отрывном обтекании // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. 1988. Т. 2. № 16. С. 1558–1566.
5. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
6. *Сету́ха А.В.* Краевая задача Неймана с граничным условием на разомкнутой плоской поверхности // *Дифференц. уравнения*. 2001. Т. 37. № 10. С. 1311–1329.
7. *Сету́ха А.В.* О построении фундаментальных решений краевой задачи Неймана в области вне разомкнутой плоской поверхности // *Дифференц. уравнения*. 2002. Т. 38. № 4. С. 505–515.
8. *Сету́ха А.В.* Трехмерная краевая задача Неймана с обобщенными граничными условиями и уравнение Прандтля // *Дифференц. уравнения*. 2003. Т. 39. № 9. С. 1188–1200.
9. *Лебедева С.Г., Сету́ха А.В.* О численном решении полного двумерного гиперсингулярного уравнения методом дискретных особенностей // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 2. С. 223–233.
10. *Сету́ха А.В.* О разрешимости некоторого полного двумерного гиперсингулярного уравнения // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 9. С. 1141–1151.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М., 1986.
12. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
13. *Сету́ха А.В.* Об аппроксимации вторых производных потенциала объёмного заряда, размещённого в слое малой толщины, поверхностным интегралом // *Дифференц. уравнения*. 2018. Т. 54. № 9. С. 1262–1281.
14. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова,  
Институт вычислительной математики  
им. Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 20.03.2021 г.  
После доработки 20.03.2021 г.  
Принята к публикации 08.06.2021 г.