

СОДЕРЖАНИЕ

Том 507, 2022

МАТЕМАТИКА

Функции от пар неограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов при возмущении

А. Б. Александров, В. В. Пеллер 5

Интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью

С. Н. Асхабов 10

Интегральные оценки производных рациональных функций в гельдеровых областях

А. Д. Баранов, И. Р. Каюмов 15

О неподвижных точках непрерывных преобразований, связанных с построением искусственных нейронных сетей

В. Б. Бетелин, В. А. Галкин 22

О задаче Канторовича с параметром

В. И. Богачев, С. Н. Попова 26

Онтология математического знания OntoMath^{PRO}

А. М. Елизаров, А. В. Кириллович, Е. К. Липачёв, О. А. Невзорова 29

О критериях проверки гипотезы об эквивалентности хвостов распределений

Е. О. Кантонистова, И. В. Родионов 36

Высокоточный алгоритм для решения задач электростатики в неоднородной пространственно периодической диэлектрической среде

Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин 40

Исследование устойчивости решения системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели логистической динамики

М. В. Николаев, А. А. Никитин, У. Дикман 46

Численное моделирование акустических процессов в градиентных средах сеточно-характеристическим методом

И. Б. Петров, В. И. Голубев, Ю. С. Анкипович, А. В. Фаворская 51

Числа Брёуа строгой функции Морса

П. Е. Пушкарь, М. С. Тёмкин 57

Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных

М. Рыбаков 61

Субриманова сфера Картана

Ю. Л. Сачков 66

Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России
в условиях санкций

Н. В. Трусов, А. А. Шананин

71

Построение эффективных рандомизированных проекционных оценок решений
интегральных уравнений на основе полиномов Лежандра

Г. А. Михайлов, А. С. Корда, С. В. Рогзинский

81

Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией

М. В. Шамолин

86

CONTENTS

Volume 507, 2022

MATHEMATICS

Functions of Perturbed Pairs of Noncommuting Unbounded Self-Adjoint Operators <i>A. B. Aleksandrov and V. V. Peller</i>	5
Integro-Differential Equation with a Sum-Difference Kernel and Power Nonlinearity <i>S. N. Askhabov</i>	10
Integral Estimates of Derivatives of Rational Functions in Hölder Domains <i>A. D. Baranov and I. R. Kayumov</i>	15
On Fixed Points of Continuous Mappings Associated with the Construction of Artificial Neural Networks <i>V. B. Betelin and V. A. Galkin</i>	22
On Kantorovich Problems with a Parameter <i>V. I. Bogachev and S. N. Popova</i>	26
OntoMath ^{PRO} – ontology of mathematical knowledge <i>A. M. Elizarov, A. V. Kirillovich, E. K. Lipachev, and O. A. Nevzorova</i>	29
On Procedures for Testing Equivalence of Distribution Tails <i>E. O. Kantonistova and I. V. Rodionov</i>	36
A High-Accuracy Algorithm for Solving Problems of Electrostatics in a Nonhomogeneous Spatially Periodic Dielectric Medium <i>Yu. A. Kriksina and V. F. Tishkina</i>	40
Investigation of the Stability of the Solution of a System of Nonlinear Integral Equations Arising in a Logistic Dynamics Model <i>M. V. Nikolaev, A. A. Nikitin, and U. Dieckmann</i>	46
Numerical Modeling of Acoustic Processes in Gradient Media Using Grid-Characteristic Method <i>I. B. Petrov, V. I. Golubev, Yu. S. Ankipovich, and A. V. Favorskaya</i>	51
Bruhat Numbers of a Strong Morse Function <i>P. E. Pushkar and M. S. Temkin</i>	57
Computational Complexity of Theories of a Binary Predicate with a Small Number of Variables <i>M. Rybakov</i>	61
Sub-Riemannian Cartan Sphere <i>Yu. L. Sachkov</i>	66
Mathematical Modeling of the Consumer Loan Market in Russia Under Sanction <i>N. V. Trusov and A. A. Shaninin</i>	71

Construction the Effective Randomized Projective Estimates for Solutions of Integral Equations
Based on Legendre Polynomials

G. A. Mikhailov, A. S. Korda, and S. V. Rogasinsky

81

Invariant Volume Forms of Variable Dissipation Systems with Three Degrees of Freedom

M. V. Shamolin

86

ФУНКЦИИ ОТ ПАР НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ

© 2022 г. А. Б. Александров^{1,*}, В. В. Пеллер^{1,2,**}

Представлено академиком С.В. Кисляковым

Поступило 28.06.2022 г.

После доработки 14.07.2022 г.

Принято к публикации 21.09.2022 г.

Для пары (A, B) не обязательно ограниченных и не обязательно коммутирующих самосопряжённых операторов и для функции f на евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 из неоднородного класса Бесова $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ определяется функция $f(A, B)$ от этих операторов как плотно определённый оператор. Рассматривается задача оценок функций $f(A, B)$ при возмущениях пары (A, B) . Устанавливается, что если $1 \leq p \leq 2$, (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – пары не обязательно ограниченных и не обязательно коммутирующих самосопряжённых операторов таких, что операторы $A_1 - A_2$ и $B_1 - B_2$ входят в класс Шаттена–фон Неймана S_p при $p \in [1, 2]$ и $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$, то имеет место следующая оценка липшицева типа: $\|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{S_p} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \max\{\|A_1 - A_2\|_{S_p}, \|B_1 - B_2\|_{S_p}\}$.

Ключевые слова: неограниченные самосопряжённые операторы, классы Шаттена–фон Неймана, классы Бесова, двойные операторные интегралы, тройные операторные интегралы, тензорные произведения Хогерупа, функции от пар некоммутирующих самосопряжённых операторов

DOI: 10.31857/S2686954322600446

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты этой заметки распространяют результаты работы [1] на случай пар неограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов. Напомним (см., например, [1]), что для пары (A, B) не обязательно ограниченных самосопряжённых операторов и для комплексно-значной функции f на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, являющейся мультипликатором Шура относительно произвольных борелевских спектральных мер, функция $f(A, B)$ от A и B определяется как двойной операторный интеграл

$$\begin{aligned} f(A, B) &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dE_A(x) dE_B(y) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dE_A(x) I dE_B(y), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где I – единичный оператор, а E_A и E_B – спектральные меры операторов A и B . Тогда $f(A, B)$ – ограниченный оператор. Мы отсылаем читателя к работам [5, 6] и [7] по поводу определения и основных свойств двойных операторных интегралов.

Мы также отсылаем читателя к работам [10] и [2] по поводу определения мультипликаторов Шура по отношению к спектральным мерам. Напомним (см. [10] и [2]), что функция Φ является мультипликатором Шура по отношению к спектральным мерам E_1 и E_2 в том и только в том случае, когда Φ входит в тензорное произведение Хогерупа $L^\infty(E_1) \otimes_{\text{h}} L^\infty(E_2)$, т.е. Φ допускает представление вида

$$\Phi(x, y) = \sum_n \varphi_n(x) \psi_n(y), \quad (1.2)$$

где $\varphi_n \in L^\infty(E_1)$, $\psi_n \in L^\infty(E_2)$ и

$$\left(\left\| \sum_n |\varphi_n(x)|^2 \right\|_{L^\infty(E_1)} \left\| \sum_n |\psi_n(x)|^2 \right\|_{L^\infty(E_2)} \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.3)$$

¹Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: aall54eexx@gmail.com

**E-mail: peller@math.msu.edu

Нормой функции Φ в $L^\infty(E_1) \otimes_h L^\infty(E_2)$ является инфимум левой части (1.3) по всем представлениям вида (1.2). В этом случае

$$\iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) dE_1(x) Q dE_2(y) = \sum_n \left(\int \varphi_n dE_1 \right) Q \left(\int \psi_n dE_2 \right),$$

причём ряд в правой части сходится в слабой операторной топологии и

$$\left\| \iint \Phi dE_1 Q dE_2 \right\| \leq \|\Phi\|_{L^\infty \otimes_h L^\infty} \|Q\|$$

(см., например, [2]).

В этой заметке мы определим функции $f(A, B)$ от неограниченных некоммутирующих операторов для некоторых функций f , которые не входят в тензорное произведение Хогерупа пространств ограниченных функций. В этом случае $f(A, B)$ оказывается плотно определённым неограниченным оператором.

В работе [1] для пар (A_1, B_1) и (A_2, B_2) некоммутирующих ограниченных самосопряжённых операторов A и B и для функций f однородного класса Бесова $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ определены операторы $f(A_1, B_1)$ и $f(A_2, B_2)$ и получена следующая оценка липшицева типа в классах Шаттена–фон Неймана \mathbf{S}_p при $1 \leq p \leq 2$:

$$\begin{aligned} & \|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{\mathbf{S}_p} \leq \\ & \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \max\{\|A_1 - B_1\|_{\mathbf{S}_p}, \|A_2 - B_2\|_{\mathbf{S}_p}\}. \end{aligned}$$

В той же работе [1] показано, что такое же неравенство неверно при $p > 2$ и неверно в операторной норме.

Напомним также, что в случае функций одного самосопряжённого оператора такие оценки липшицева типа верны при $1 \leq p \leq \infty$, см. [10] и [11].

Основная цель этой заметки – установить это неравенство для пар неограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов для функций f из однородного пространства Бесова $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$. Мы отсылаем читателя к работе [9] по поводу определения и основных свойств пространств Бесова.

Как и в случае ограниченных некоммутирующих операторов, ключевую роль играют тройные операторные интегралы. Мы отсылаем читателя к работам [1] и [3] по поводу тройных операторных интегралов.

2. ТРОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ХОГЕРУПА И ХОГЕРУПО-ПОДОБНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Тройные операторные интегралы – это выражения вида

$$\iiint_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3} \Psi(x_1, x_2, x_3) dE_1(x_1) T dE_2(x_2) R dE_3(x_3), \quad (2.1)$$

где Ψ – ограниченная измеримая функция на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$; E_1, E_2 и E_3 – спектральные меры в гильбертовом пространстве, а T и R – ограниченные линейные операторы. Такие операторные интегралы можно определить при некоторых предположениях на Ψ, T и R .

В работе [12] интегралы вида (2.1) определены для произвольных ограниченных операторов T и R и для функций Ψ из интегрального проектированного тензорного произведения $L^\infty(E_1) \otimes L^\infty(E_2) \otimes L^\infty(E_3)$. При этом справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \iiint \Psi dE_1 T dE_2 R dE_3 \right\|_{\mathbf{S}_r} \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes L^\infty \otimes L^\infty} \|T\|_{\mathbf{S}_p} \|R\|_{\mathbf{S}_q},$$

$$T \in \mathbf{S}_p, \quad R \in \mathbf{S}_q,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{при условии} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

Затем в работе [8] тройные операторные интегралы были определены для функций Ψ из тензорного произведения Хогерупа $L^\infty(E_1) \otimes_h L^\infty(E_2) \otimes_h L^\infty(E_3)$. Мы отсылаем читателя к работе [3] по поводу определения и основных свойств таких тензорных произведений Хогерупа. Отметим здесь, что для функций Ψ из $L^\infty(E_1) \otimes_h L^\infty(E_2) \otimes_h L^\infty(E_3)$ имеют место оценки

$$\left\| \iiint \Psi dE_1 T dE_2 R dE_3 \right\| \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes_h L^\infty \otimes_h L^\infty} \|T\| \cdot \|R\|$$

в случае ограниченных операторов T и R и

$$\left\| \iiint \Psi dE_1 T dE_2 R dE_3 \right\|_{\mathbf{S}_r} \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes_h L^\infty \otimes_h L^\infty} \|T\|_{\mathbf{S}_p} \|R\|_{\mathbf{S}_q}$$

в случае, когда $T \in \mathbf{S}_p, R \in \mathbf{S}_q, 1/r = 1/p + 1/q$ и $p, q \in [2, \infty]$.

Оказалось, однако, что для липшицевых оценок функций от пар некоммутирующих операторов нам нужны тройные операторные интегралы, подынтегральные функции которых входят в так называемые хогерупо-образные тензорные произведения первого вида $L^\infty(E_1) \otimes_h L^\infty(E_2) \otimes^h L^\infty(E_3)$ и второго вида $L^\infty(E_1) \otimes^h L^\infty(E_2) \otimes_h L^\infty(E_3)$. Такие тензорные произведения были введены в [1] и изучены более подробно в [3].

В работах [1] и [3] показано, что если $\Psi \in L^\infty(E_1) \otimes_h L^\infty(E_2) \otimes^h L^\infty(E_3), 1 \leq p \leq 2, T \in \mathbf{S}_p$, а R – ограниченный линейный оператор, то можно определить тройной операторный интеграл вида (2.1) и при этом имеет место оценка

$$\left\| \iiint \Psi dE_1 T dE_2 R dE_3 \right\|_{S_p} \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes_h L^\infty \otimes_h L^\infty} \|T\|_{S_p} \|R\|, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

А если же $\Psi \in L^\infty(E_1) \otimes^h L^\infty(E_2) \otimes_h L^\infty(E_3)$, $1 \leq p \leq 2$, T – ограниченный линейный оператор, а $R \in S_p$, то

$$\left\| \iiint \Psi dE_1 T dE_2 R dE_3 \right\|_{S_p} \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes^h L^\infty \otimes_h L^\infty} \|T\| \cdot \|R\|_{S_p}.$$

Кроме того,

$$\|W\|_{S_p} \leq \|\Psi\|_{L^\infty \otimes^h L^\infty \otimes_h L^\infty} \|T\| \cdot \|R\|_{S_p}. \quad (2.2)$$

Заметим, что в работе [1] были получены более общие оценки в классах Шаттена–фон Неймана для тройных операторных интегралов, подынтегральная функция которых входит в хогерупо-образные тензорные произведения пространств L^∞ . Позже в работе [3] оценки работы [1] были распространены на ещё более общий случай.

Отметим, что таким же образом можно определить хогерупо-образные тензорные произведения $\mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty$ и $\mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty$, где \mathcal{B}^∞ – пространство ограниченных борелевских функций на \mathbb{R} .

Рассмотрим теперь непрерывно дифференцируемую функцию f на \mathbb{R}^2 и определим разделённые разности $\mathcal{D}^{[1]}f$ и $\mathcal{D}^{[2]}f$ равенствами

$$(\mathcal{D}^{[1]}f)(x_1, x_2, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

и

$$(\mathcal{D}^{[2]}f)(x, y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}, \quad y_1 \neq y_2.$$

В случае, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, в определениях функций $\mathcal{D}^{[1]}f$ и $\mathcal{D}^{[2]}f$ нужно заменить разделённые разности соответствующими частными производными.

Определим класс $\mathcal{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ при $\sigma > 0$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^2) : \text{supp } \mathcal{F}f \subset \{t \in \mathbb{R}^2 : \|t\|_2 \leq \sigma\}\};$$

здесь мы используем обозначение \mathcal{F} для преобразования Фурье.

В работе [1] было установлено, что при $\sigma > 0$ и $f \in \mathcal{E}_\sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{D}^{[1]}f\|_{\mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty} \leq \text{const} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \quad (2.3)$$

$$\|\mathcal{D}^{[2]}f\|_{\mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty} \leq \text{const} \sigma \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.4)$$

Отсюда вытекает, что если функция f входит в однородный класс Бесова $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$, то $\mathcal{D}^{[1]}f \in \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty$ и $\mathcal{D}^{[2]}f \in \mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty$, при этом

$$\|\mathcal{D}^{[1]}f\|_{\mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1},$$

$$\|\mathcal{D}^{[2]}f\|_{\mathcal{B}^\infty \otimes^h \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1}.$$

Основным результатом работы [1] является следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$, а (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – пары ограниченных некоммутирующих самосопряжённых операторов таких, что $A_2 - A_1 \in S_p$ и $B_2 - B_1 \in S_p$. Тогда

$$\begin{aligned} f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2) &= \iiint \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} \times \\ &\times dE_{A_1}(x_1)(A_1 - A_2)dE_{A_2}(x_2)dE_{B_1}(y) + \\ &+ \iiint \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \times \\ &\times dE_{A_2}(x)dE_{B_1}(y_1)(B_1 - B_2)dE_{B_2}(y_2). \end{aligned}$$

Более того, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{S_p} &\leq \\ &\leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \max\{\|A_1 - A_2\|_{S_p}, \|B_1 - B_2\|_{S_p}\}. \end{aligned}$$

Основная цель этой заметки состоит в том, чтобы установить такое же неравенство в случае неограниченных некоммутирующих пар операторов при условии, что функция f входит в неоднородный класс Бесова $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. ФУНКЦИИ ОТ ПАР НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Напомним, что мы определили функции от необязательно коммутирующих самосопряжённых операторов формулой (1.1) в случае, когда функция f входит в тензорное произведения Хогерупа $\mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty$. Причём имеет место оценка

$$\|f(A, B)\| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty}, \quad f \in \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty.$$

Пусть f – функция двух переменных, а f_\sharp – функция, определённая равенством $f_\sharp(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} (1-it)^{-1} f(s, t)$. Предположим, что $f_\sharp \in \mathcal{B}^\infty \otimes_h \mathcal{B}^\infty$. Определим оператор $f(A, B)$ равенством

$$f(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\sharp}(A, B)(I - iB) = \\ = \left(\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f_{\sharp}(s, t) dE_A(s) dE_B(t) \right) (I - iB).$$

Тогда $f(A, B)$ – плотно определённый оператор, область определения которого совпадает с областью определения $D(B)$ оператора B . Он не обязательно ограничен, но оператор $f(A, B)(I - iB)^{-1}$ ограничен.

Заметим, что если $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $\sigma > 0$, то $f_{\sharp} \in \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}$. Это было установлено в следствии 7.3 работы [4] для функций f из $(\mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2))_+$, т.е. для функций f из $\mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, преобразование Фурье которых сосредоточено на $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Очевидно, что это же верно и при $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $\sigma > 0$. Таким образом, если $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, то оператор $f_{\sharp}(A, B)$ ограничен, в то время как $f(A, B)$ – не обязательно ограниченный плотно определённый оператор с областью определения $D(B)$. При этом

$$\|f_{\sharp}\|_{\mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}} \leq \text{const}(1 + \sigma) \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{2\sigma})}.$$

Это можно проверить так же, как и в следствии 7.3 работы [4].

Теорема 3.1. Пусть $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда $f_{\sharp} \in \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}$ и $\|f_{\sharp}\|_{\mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1}$.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ОЦЕНКИ ЛИПШИЦЕВА ТИПА

В этом разделе мы сформулируем основной результат заметки. Мы получим формулу для операторной разности в виде тройных операторных интегралов и получим оценку липшицева типа в норме S_p при $p \in [1, 2]$. Мы будем иметь дело с параметрами не обязательно ограниченными и не обязательно коммутирующими самосопряжёнными операторов.

Теорема 4.1. Пусть $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, а A_1, A_2 и B – самосопряжённые операторы такие, что $A_1 - A_2 \in S_2$. Тогда

$$f(A_1, B) - f(A_2, B) = \iiint \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} dE_{A_1}(x_1) \times \\ \times (A_1 - A_2) dE_{A_2}(x_2) dE_B(y)$$

и тем самым

$$\|f(A_1, B) - f(A_2, B)\|_{S_p} \leq \text{const} \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^2)} \|A_1 - A_2\|_{S_p}.$$

Напомним, что $\mathcal{D}^{[1]}f \in \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}$ (см. (2.3)), и, стало быть, тройной операторный интеграл в правой части равенства определён.

Следствие 4.2. Пусть $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ и $1 \leq p \leq 2$. Предположим, что A_1, A_2 и B – самосопряжённые операторы такие, что $A_2 - A_1 \in S_p$. Тогда имеет место неравенство:

$$\|f(A_1, B) - f(A_2, B)\|_{S_p} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \|A_1 - A_2\|_{S_p}.$$

Теорема 4.3. Пусть $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что A, B_1 и B_2 – самосопряжённые операторы такие, что $B_2 - B_1 \in S_2$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$f(A, B_1) - f(A, B_2) = \iiint \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \times \\ \times dE_A(x) dE_{B_1}(y_1) (B_1 - B_2) dE_{B_2}(y_2).$$

Опять же $\mathcal{D}^{[2]}f \in \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty} \otimes_{\text{h}} \mathcal{B}^{\infty}$ (см. (2.4)), и, стало быть, тройной операторный интеграл в правой части равенства определён.

Следствие 4.4. Пусть $f \in \mathcal{E}_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ при $p \in [1, 2]$. Предположим, что A, B_1 и B_2 – самосопряжённые операторы такие, что $B_2 - B_1 \in S_p$. Тогда

$$\|f(A, B_1) - f(A, B_2)\|_{S_p} \leq \text{const} \sigma \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^2)} \|B_1 - B_2\|_{S_p}.$$

Теорема 4.5. Пусть $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$ при $p \in [1, 2]$. Предположим, что A_1, A_2, B_1 и B_2 – самосопряжённые операторы такие, что $A_2 - A_1 \in S_p$ и $B_2 - B_1 \in S_p$. Тогда

$$\|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{S_p} \leq \\ \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \max\{\|A_1 - A_2\|_{S_p}, \|B_1 - B_2\|_{S_p}\}.$$

Теорема 4.6. Пусть $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что A_1, A_2, B_1 и B_2 – самосопряжённые операторы такие, что $A_1 - A_2 \in S_2$ и $B_1 - B_2 \in S_2$. Тогда имеет место тождество

$$f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2) = \\ = \iiint \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} \times \\ \times dE_{A_1}(x_1) (A_1 - A_2) dE_{A_2}(x_2) dE_{B_1}(y) + \\ + \iiint \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \times \\ \times dE_A(x) dE_{B_1}(y_1) (B_1 - B_2) dE_{B_2}(y_2).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования в § 2 выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 18-11-00053. Исследования

ния в § 3 выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 20-61-46016. Остальные результаты финансированы грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, выполненных под руководством ведущих учёных, соглашение 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aleksandrov A.B., Nazarov F.L., Peller V.V. Functions of noncommuting self-adjoint operators under perturbation and estimates of triple operator integrals // Adv. Math. 2016. V. 295. P. 1–52.
2. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Operator Lipschitz functions // Uspekhi Matem. Nauk. 2016. V. 71. № 4. P. 3–106.
3. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Multiple operator integrals, Haagerup and Haagerup-like tensor products, and operator ideals // Bulletin London Math. Soc. 2016. V. 49. P. 463–479.
4. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Functions of perturbed commuting dissipative operators // Math. Nachr., to appear
5. Birman M.S., Solomyak M.Z. Double Stieltjes operator integrals // Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1966. V. 1. P. 33–67 (Russian).
6. Birman M.S., Solomyak M.Z. Double Stieltjes operator integrals. II, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1967. V. 2. P. 26–60 (Russian).
7. Birman M.S., Solomyak M.Z. Double Stieltjes operator integrals. III, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1973. V. 6. P. 27–53 (Russian).
8. Juschenko K., Todorov I.G., Turowska L. Multidimensional operator multipliers // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361. P. 4683–4720.
9. Peetre J. New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Press., Durham, NC, 1976.
10. Peller V.V. Hankel operators in the theory of perturbations of unitary and self-adjoint operators, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1985. V. 19. № 2. P. 37–51 (Russian).
11. Peller V.V. Hankel operators in the perturbation theory of unbounded self-adjoint operators, Analysis and partial differential equations, 529–544, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 122, Marcel Dekker, New York, 1990.
12. Peller V.V. Multiple operator integrals in perturbation theory // Bull. Math. Sci. 2016. V. 6. P. 15–88.

FUNCTIONS OF PERTURBED PAIRS OF NONCOMMUTING UNBOUNDED SELF-ADJOINT OPERATORS

A. B. Aleksandrov^a and V. V. Peller^{a,b}

^a St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia

^b St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

For a pair (A, B) of not necessarily bounded and not necessarily commuting self-adjoint operators and for a function f on the Euclidean space \mathbb{R} that belongs to the inhomogeneous Besov class $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$, we define the function $f(A, B)$ of such operators as a densely defined operator. We consider the problem of estimating the functions $f(A, B)$ under perturbations of the pair (A, B) . It turns out that if $1 \leq p \leq 2$, (A_1, B_1) and (A_2, B_2) are pairs of not necessarily bounded and not necessarily commuting self-adjoint operators such that both $A_1 - A_2$ and $B_1 - B_2$ belong to the Schatten–von Neumann class S_p with $p \in [1, 2]$ and $f \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$, then the following Lipschitz type estimate holds: $\|f(A_1, B_1) - f(A_2, B_2)\|_{S_p} \leq \text{const} \|f\|_{B_{\infty,1}^1} \max\{\|A_1 - A_2\|_{S_p}, \|B_1 - B_2\|_{S_p}\}$.

Keywords: unbounded self-adjoint operators, Schatten–von Neumann classes, Besov classes, double operator integrals, triple operator integrals, Haagerup tensor products, functions of pairs of noncommuting self-adjoint operators

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2022 г. С. Н. Асхабов^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 06.10.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принято к публикации 17.10.2022 г.

Получены точные априорные оценки решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения вольтерровского типа с суммарно-разностным ядром в конусе пространства непрерывных на положительной полуоси функций. На основе этих оценок методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения указанного уравнения. Показано, что это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости в терминах весовой метрики. Указаны условия, при которых существует только тривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, суммарно-разностное ядро, степенная нелинейность

DOI: 10.31857/S2686954322700023

Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям с суммарными и разностными ядрами (см. монографии [1, 2] и приведенную в них библиографию). Например, описание процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, или процесса инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду приводит к нелинейным уравнениям с разностными ядрами [3–5], а нелинейные уравнения с суммарными ядрами возникают в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением [6, 7].

В настоящее время теория нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравне-

ний вольтерровского типа с разностными ядрами, т.е. теория уравнений типа свертки, разработана значительно полнее, чем соответствующая теория уравнений с суммарными ядрами. В частности, это связано с тем, что исследование нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с чисто суммарными ядрами оказывается затруднительным, так как операторы вольтерровского типа с суммарными ядрами не обладают, в отличие от операторов с разностными ядрами, свойством коммутативности.

В данной работе изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x+t)u(t) dt + \int_0^x K(x-t)u'(t) dt, \quad (1)$$

$$x > 0, \quad \alpha > 1,$$

где функции $H(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют следующим основным условиям:

$$H \in C^1[0, \infty),$$

$$H(x) \text{ не убывает на полуоси } [0, \infty) \quad (2)$$

$$\text{и } H(0) \geq 0,$$

¹ Чеченский государственный университет
им. А.А. Кадырова, Грозный, Россия

² Чеченский государственный педагогический университет, Грозный, Россия

³ Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: askhabov@yandex.ru

$$K \in C^1[0, \infty),$$

$$K'(x) \text{ не убывает на полуоси } [0, \infty) \quad (3)$$

$$K(0) = 0 \text{ и } K'(0) > 0.$$

Теоретический и прикладной интерес представляют нетривиальные решения уравнений вида (1), поэтому они разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \{u(x): u \in C[0, \infty) \cap C^1(0, \infty),$$

$$u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Цель данной работы — доказать глобальную теорему о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения уравнения (1), а также получить точные двусторонние оценки для этого решения.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1) исследуется также тесно связанное с ним интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)dt, \quad (4)$$

$$x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе

$Q = \{u(x): u \in C[0, \infty) \text{ и } u(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 0\}$, состоящем из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0, \infty)$ функций, и, вообще, любое решение этого уравнения в конусе Q удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Кроме того, если интегральное уравнение (4) имеет нетривиальное решение $u \in Q$, то его сдвиги

$$u(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если } x > \delta, \\ 0, & \text{если } x \leq \delta, \end{cases}$$

также являются решениями этого уравнения при любом $\delta > 0$, т.е. уравнение (4) может иметь континуум решений. Поэтому, для того чтобы задачу нахождения нетривиальных решений уравнения (4) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной и теоретической точек зрения особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения (4), будем искать его решения в классе

$$Q_0 = \{u(x): u \in C[0, \infty), u(0) = 0$$

$$\text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Заметим, что теория линейных интегральных уравнений типа свертки, т.е. уравнений с разностными ядрами, в настоящее время достаточно хорошо разработана и ее основные результаты приведены, например, в монографии [8]. Что касается соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными ядрами, то, как отмечено в работе [9], они изучены, в отличие от уравнений с разностными ядрами, сравнительно мало. Это замечание справедливо также относительно нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

СВОЙСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Прежде чем сформулировать теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения уравнения (1), выясним сначала, какими свойствами должны обладать эти решения, если они существуют.

Справедливы следующие две простые леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2) и (3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (4), то функция $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, т.е. $u \in C^1(0, \infty)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2) и (3). Если $u \in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то $u \in Q_0$ и является решением уравнения (4). Обратно, если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4), то $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1).

Далее нам понадобятся следующие два неравенства

$$\int_0^x a(x+t)b(t)dt \leq \int_0^x [2a(2t) - a(t)]b(t)dt, \quad (5)$$

$$x > 0,$$

$$\int_0^x a(x-t)b(t)dt \leq \int_0^x a(t)b(t)dt, \quad x > 0, \quad (6)$$

справедливые для любых неотрицательных убывающих на полуоси $[0, \infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$.

Неравенство (5) подробно доказано в [10, Лемма 1], а неравенство (6) известно как интегральное неравенство Чебышева [11, с. 120] (см. также [1, с. 121], где приведены два различных его доказательства).

Лемма 3. Пусть выполнены условия (2) и (3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (4), то для любого $x \in [0, \infty)$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \\ & \leq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)] dt \right)^{1/(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу леммы 2, исследование интегро-дифференциального уравнения (1) сводится к исследованию интегрального уравнения (4). Из лемм 1 и 3, в частности, следует, что если $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1), то оно не убывает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам (7).

Отметим, что при $H(x) = C_1$ и $K(x) = C_2x$, где $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$ есть константы, неравенства в (7) обращаются в равенства и дают решение как уравнения (4), так и уравнения (1), что свидетельствует о точности полученных в лемме 3 априорных оценок решения интегрального уравнения (4).

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Из леммы 3 вытекает, что решения уравнения (4) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x): u \in C[0, \infty)$$

и $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$ для любого $x \in [0, \infty)\}$,

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt \right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)] dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Запишем уравнение (4) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t) dt \right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда класс P инвариантен относительно оператора T , т.е. $T : P \rightarrow P$.

При доказательстве априорных оценок (7) и леммы 4 весьма полезными оказались неравенства (5), (6) и лемма III [12, с. 288].

Рассмотрим теперь класс

$$P_b = \{u(x): u \in C[0, b]$$

и $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$ для любого $x \in [0, b]\}$,

где $b > 0$ есть любое число, и определим в нем расстояние следующим образом

$$\rho(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{G(x)}. \quad (8)$$

Лемма 5. Пара (P_b, ρ) образует полное метрическое пространство.

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 4 из [13].

Из леммы 4 непосредственно вытекает, что оператор T действует из P_b в P_b . При следующем дополнительном предположении

$$q = \sup_{0 < x \leq b} \frac{\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)] dt}{\alpha \cdot \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt} < 1, \quad (9)$$

оператор T является сжимающим в метрическом пространстве P_b , причем

$$\rho(Tu, Tv) \leq q \cdot \rho(u, v), \quad \forall u, v \in P_b.$$

Полученные выше результаты позволяют сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3) и (9). Тогда интегральное уравнение (4) имеет в конусе Q_0 ($u \in P_b$ при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ρ . При этом справедлива оценка скорости сходимости:

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

где число $q < 1$ определено в условии (9), а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение (произвольная функция).

В силу леммы 2, теоремы 1 и равенства (см. [10, Лемма 2])

$$\int_0^x H(x+t) dt = \int_0^x [2H(2t) - H(t)] dt$$

справедлива следующая основная теорема данной работы.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3) и (9). Тогда интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в конусе Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$, причем для любого $x \in [0, \infty)$

$$\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u^*(x) \leq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)] dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ρ , определенной равенством (8). При этом справедлива оценка скорости сходимости (10).

Замечание 1. В линейном случае (при $\alpha = 1$) как и в случае, когда $0 < \alpha < 1$, интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в конусе Q лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Из теоремы 2 следует, что при $\alpha > 1$ уравнение (1) может иметь также и нетривиальное решение. Например, если $H(x) = C_1 \geq 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, то кроме тривиального решения уравнение (1) имеет в конусе Q и нетривиальное решение:

$$u(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} [C_1 + C_2] \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

В этом состоит принципиальное отличие нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа от соответствующих однородных линейных уравнений, которые могут иметь лишь тривиальное решение.

В связи с условием (9) заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)] dt}{\alpha \cdot \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2H(2x) - H(x) + K'(x)}{\alpha \cdot [H(2x) + K'(0)]} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Значение этого предела подтверждает корректность дополнительного условия (9). Более того, в случае ядер $H(x) = C_1 \geq 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, удовлетворяющих, очевидно, основным условиям (2) и (3), дополнительное условие (9) также выполняется и при этом значение $q = 1/\alpha$.

В заключение отметим, что следуя работам [10] и [13], теорему 2 можно обобщить на случай уравнения вида (1) с неоднородностью в правой части, а

в случае показателя α специального вида такое уравнение можно исследовать в пространстве Лебега $L_{1+\alpha}(0, \infty)$ методом монотонных по Браудеру-Минти операторов (см., например, [14]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код научной темы FECS-2020-0001) в части получения точных априорных оценок решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с суммарно-разностным ядром. Остальная часть исследования выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 22-11-00177).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. 304 с.
2. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge: Univ. Press, 2017. 387 p.
3. Keller J.J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. V. 32. № 2. P. 170–181.
4. Schneider W.R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. V. 33. № 1. P. 140–142.
5. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
6. Какичев В.А., Рогожин В.С. Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1264–1270.
7. Измаилов А.Ф. 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90–117.
8. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
9. Антипов В.Г. Особое интегральное уравнение с суммарным ядром // Известия вузов. Математика. 1959. № 6. С. 9–13.
10. Асхабов С.Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1210–1219.
11. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Колягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. 310 с.
12. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М: ГИТТЛ, 1951. 552 с.
13. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.
14. Асхабов С.Н., Карапетаянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // ДАН. 1990. Т. 311. № 5. С. 1035–1039.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SUM-DIFFERENCE KERNELS AND POWER NONLINEARITY

S. N. Askhabov^{a,b,c}

^a Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russian Federation

^b Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russian Federation

^c Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Presented by Academician A.L. Semenov

Exact a priori estimates are obtained for solutions to a nonlinear Volterra-type integro-differential equation with a sum-difference kernel in the cone of the space of functions continuous on the positive half-axis. On the basis of these estimates, the method of weighted metrics is used to prove a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a non-trivial solution of the indicated equation. It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence in terms of the weight metric. Conditions under which only a trivial solution exists are indicated. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integro-differential equation, sum-difference kernel, power nonlinearity

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. А. Д. Баранов^{1,*}, И. Р. Каюмов^{2,**}

Представлено академиком С.В. Кисляковым

Поступило 19.07.2022 г.

После доработки 07.09.2022 г.

Принято к публикации 16.09.2022 г.

Доказано, что двойной интеграл от модуля производной ограниченной рациональной функции степени n в гильбертовой области на плоскости ограничен числом порядка $\sqrt{\log n}$. Полученное неравенство усиливает классический результат Е.П. Долженко (1966), а также недавние результаты авторов. Построены примеры, показывающие влияние длины границы на поведение двойных интегралов от модулей производных ограниченных рациональных функций.

Ключевые слова: рациональная функция, пространство Харди, неравенство Харди–Литлвуда, гильбертова область

DOI: 10.31857/S2686954322600471

1. ВВЕДЕНИЕ

С.Н. Мергелян [1] построил пример ограниченной и аналитической в круге $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ функции f такой, что

$$I(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)| dA(z) = \infty,$$

где $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, $z = x + iy$. Несколько позже У. Рудин [2] доказал существование бесконечного произведения Бляшке B такого, что $I(B) = \infty$ и, более того, $\int_0^1 |B'(re^{i\theta})| dr = \infty$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Аналогичный, но более явный пример был построен Дж. Пиранияном [3].

Возникает естественный вопрос: что будет в случае, если функция f является рациональной. Очевидно, что в этом случае интеграл $I(f)$ будет ограничен некоторой величиной, зависящей от n . Оценке этой величины для достаточно широкого класса областей на плоскости была посвящена статья Е.П. Долженко [4]. В этой статье показано, что при определенных условиях регулярности

границ (существование кривизны, удовлетворяющей условию Гельдера) конечносвязной области G имеют место следующие неравенства для рациональных функций R степени не выше n с полюсами вне \bar{G} [4, Теорема 2.2]: если $1 < p \leq 2$, то

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq C n^{p-1} \|R\|_{H^\infty(G)}^p; \quad (1)$$

если мы дополнительно предположим, что область G ограничена, то

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq C \ln(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)}. \quad (2)$$

Здесь константа C зависит только от области G и от p , $H^\infty(G)$ обозначает множество всех функций, ограниченных и аналитических в G , а $\|f\|_{H^\infty(G)} = \sup_{w \in G} |f(w)|$.

В дальнейшем интегральные неравенства для производных рациональных функций (преимущественно в круге) изучались в работах А.А. Пекарского [5], В.И. Данченко [6, 7], и многих других авторов (см., например, [8, 9]). Короткое доказательство неравенств Долженко в случае круга с заменой H^∞ -нормы на более слабую $BMOA$ -норму можно найти в [9].

Уже простейший пример круга \mathbb{D} и функции $R(z) = z^n$ показывает точность неравенства (1). В то же время условия на регулярность области можно существенно ослабить. Авторами настоящей

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Казанский федеральный университет, Казань, Россия

*E-mail: anton.d.baranov@gmail.com

**E-mail: ikayumov@kpfu.ru

статьи в [10] было показано, что неравенство (1) остается справедливым для всех многосвязных областей класса Джона и для всех гильдеровых областей (см. определения в § 2). В частности, (1) выполнено, если область G односвязна, а конформное отображение φ единичного круга \mathbb{D} на область G удовлетворяет условию $\varphi' \in H^s(\mathbb{D})$, где $s > 1$, а $H^s(\mathbb{D})$ обозначает пространство Харди в круге. Тем самым, мы вплотную приближаемся к условию спрямляемости границы $\varphi' \in H^1(\mathbb{D})$.

Однако оказалось, что неравенство (2) для случая $p = 1$ можно существенно улучшить. В статье [10] авторами показано, что точный порядок роста интеграла $\int_G |R'(w)| dA(w)$ с ростом n равен $\sqrt{\log(n+1)}$. Однако это неравенство было доказано при более сильных условиях регулярности области, а именно $\varphi' \in H^2(\mathbb{D})$. В настоящей работе, используя более тонкую технику, нам удалось освободиться от лишних условий и доказать оценку для значительно более широкого класса областей.

Теорема 1. Пусть G — ограниченная односвязная гильдерова область со спрямляемой границей. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G , что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq C \sqrt{\ln(n+1)} \|R\|_{H^\infty(G)}. \quad (3)$$

Поскольку любая конечносвязная область класса Джона представима как объединение конечного числа односвязных гильдеровых областей, мы можем распространить оценки и на этот класс областей.

Следствие 1. Пусть G — ограниченная конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G , что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено (3).

Неравенство (3) уже является точным по порядку даже в случае круга, при этом в качестве R можно взять произведение Бляшке степени n . Доказательство точности этого неравенства, приведенное в [10], основано на тонких результатах Н.Г. Макарова [11] и Р. Бануэлоса и Ч.Н. Мура [12] о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Второй главный результат статьи относится к важному частному случаю, когда область G является кольцом. Для $r > 1$ и $0 < l < r$ рассмотрим кольцо $K_{l,r} = \{z : r-l < |z| < r\}$ радиуса r и ширины l . Поставленная задача интересна с точки зрения исследования влияния параметров кольца на

оценку интеграла. Оказалось, что при фиксированной ширине l и малых r имеет место логарифмическая зависимость от n , а зависимость от r линейна. Однако с ростом r зависимость от радиуса исчезает.

Теорема 2. Найдется такая константа $C > 0$, что для любых l, r , удовлетворяющих условиям $r \geq 1$ и $0 < l \leq r/2$, и для всякой рациональной функции R степени n , для которой $\|R\|_{H^\infty(K_{l,r})} \leq 1$, выполнено

$$\int_{K_{l,r}} |R'(w)| dA(w) \leq \begin{cases} Cr \left(1 + \sqrt{\log \frac{nl}{r}}\right), & r \leq nl, \\ Cnl, & r \geq nl. \end{cases} \quad (4)$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Напомним, что односвязная область G называется гильдеровой с показателем $\alpha \in (0, 1]$, если конформное отображение φ круга \mathbb{D} на область G лежит в классе Гельдера с показателем α в $\bar{\mathbb{D}}$. Хорошо известно, что область G гильдерова с показателем α тогда и только тогда, когда

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^{1-\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (5)$$

для некоторого $C > 0$ (см., например, [13, стр. 74]). В частности, область G будет гильдеровой (с показателем $1-1/p$), если $\varphi' \in H^p$ для некоторого $p > 1$, в то время как условие $\varphi' \in H^1$ описывает области со спрямляемой границей.

Конечносвязная область G называется *областью класса Джона*, если существует константа $C > 0$ такая, что любые две точки $a, b \in G$ могут быть соединены кривой γ в G так, что для любого $w \in \gamma$ имеет место неравенство

$$\min(\text{diam} \gamma(a, w), \text{diam} \gamma(w, b)) \leq C \text{dist}(w, \partial G). \quad (6)$$

Здесь $\gamma(a, w)$ и $\gamma(w, b)$ — части кривой γ , на которые ее разбивает точка w . Данное определение имеет много различных эквивалентных формулировок [14, 15]. В частности, условие (6) исключает наличие у области внутренних нулевых углов.

Для области G , ограниченной жордановой кривой, имеется эквивалентное определение [15, стр. 103]: G является областью класса Джона тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ найдется соединяющая их кривая $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ такая, что $\text{diam} \gamma \leq K|a-b|$ для некоторой абсолютной константы K (в геометрической теории функций области с таким свойством называют *линейно связными*; следует отметить, что в общей топологии этот термин имеет другой смысл). Известно, что односвязная область класса Джона является гильдеровой (см. [15, стр. 96–100]).

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы 1, для удобства читателей сформулируем классическую теорему Литтлвуда–Пэли (см., например, [16, стр. 332]).

Теорема Литтлвуда–Пэли. *Существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $g \in H^1$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-r) |g'(re^{it})|^2 dr \right)^{1/2} dt \leq C \|g\|_{H^1}.$$

В дальнейшем мы пишем $X \lesssim Y$, если найдется числовая константа $C > 0$ (возможно, зависящая от области G) такая, что $X \leq CY$ для всех допустимых значений переменных.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ – конформное отображение круга \mathbb{D} на G . Тогда

$$\int_G |R'(w)| dA(w) = \int_{\mathbb{D}} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z).$$

Пусть K – некоторая константа, значение которой будет выбрано позже. Оценим интеграл

$$\int_{|z| < 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z).$$

Отметим, что $R'(\varphi(z)) \cdot (\varphi'(z))^2 = (R(\varphi(z))\varphi'(z))' - R(\varphi(z))\varphi''(z)$. Положим $g(z) = R(\varphi(z))\varphi'(z)$. Тогда $g \in H^1$ и $\|g\|_{H^1} \leq \|R\|_{H^\infty(G)} \|\varphi'\|_{H^1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{|z| < 1-1/n^K} |g'(z)| dA(z) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-1/n^K} |g'(re^{it})| r dr \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-1/n^K} (1-r) |g'(re^{it})|^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^{1-1/n^K} \frac{r^2 dr}{1-r} \right)^{1/2} dt \leq \\ &\leq \sqrt{K \log n} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-1/n^K} (1-r) |g'(re^{it})|^2 dr \right)^{1/2} dt \leq \\ &\leq \sqrt{\log n} \|g\|_{H^1} \leq \sqrt{\log n} \|\varphi'\|_{H^1} \|R\|_{H^\infty(G)}. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство вытекает из вышеупомянутой теоремы Литтлвуда–Пэли.

Аналогичным образом легко оценить $R(\varphi(z))\varphi''(z)$. Для этого достаточно применить предыдущие оценки к функции $g = \varphi'$. Итак, мы получили оценку

$$\int_{|z| < 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \cdot |\varphi'(z)|^2 dA(z) \leq \sqrt{\log n} \|\varphi'\|_{H^1} \times \times \|R\|_{H^\infty(G)}. \tag{7}$$

Заметим, что она справедлива для любой области со спрямляемой границей, и мы не пользовались условием Гельдера.

Теперь оценим соответствующий интеграл в кольце $\{1 - 1/n^K < |z| < 1\}$. По неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$\begin{aligned} \int_{|z| > 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \cdot |\varphi'(z)|^2 dA(z) &\leq \\ &\leq \left(\int_{|z| > 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 dA(z) \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{|z| > 1-1/n^K} |\varphi'(z)|^2 dA(z) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку $R'(\varphi(z))\varphi'(z) = (R \circ \varphi)'(z)$, а функция $R \circ \varphi$ является n -листной (как композиция рациональной функции степени n и однолистной функции), первый интеграл не превосходит площади образа области G под действием рациональной функции R , умноженной на n :

$$\int_{|z| > 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 dA(z) \leq n \|R\|_{H^\infty(G)}^2.$$

Поскольку область G является гельдеровой (с некоторым показателем $\alpha \in (0, 1]$), то имеет место неравенство (5). Воспользуемся им для оценки второго интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{|z| > 1-1/n^K} |\varphi'(z)|^2 dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{1-1/n^K}^1 |\varphi'(re^{it})|^2 r dr dt \leq \\ &\leq \int_{1-1/n^K}^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi'(re^{it})|}{(1-r)^{1-\alpha}} dt dr \leq \\ &\leq \|\varphi'\|_{H^1} \int_{1-1/n^K}^1 \frac{dr}{(1-r)^{1-\alpha}} \leq n^{-K\alpha} \|\varphi'\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_{|z| > 1-1/n^K} |R'(\varphi(z))| \times |\varphi'(z)|^2 dA(z) \leq \|R\|_{H^\infty(G)} \|\varphi'\|_{H^1}^{1/2} n^{\frac{1-K\alpha}{2}}.$$

Выбирая соответствующее K (например, $K = 1/\alpha$), мы видим, что интеграл по кольцу $\{1 - 1/n^K < |z| < 1\}$ не превосходит $C \|R\|_{H^\infty(G)}$. Таким образом, неравенство (3) является следствием неравенства (7), что и завершает доказательство теоремы.

3. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В связи с доказанной теоремой 1 возникает вполне естественный вопрос: что будет в случае

неограниченной конечносвязной области со спрямляемой границей? Простой пример области $G = \{|z| > 1\}$ и рациональной функции $R(z) = 1/z$ показывает, что теорема 1 неверна ввиду того, что $\int_{|z|>1} |z|^{-2} dA(z) = \infty$. Распространим эту теорему на неограниченный случай, естественно в некотором более слабом варианте. С этой целью введем в рассмотрение весовую функцию ρ такую, что

$$0 \leq \rho(w) \leq 1, \quad \int_{|w|>1} \frac{\rho(w)}{|w|^2} dA(w) \leq 1. \quad (8)$$

Имеет место

Теорема 3. Пусть G – неограниченная конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей. Предположим, что весовая функция ρ удовлетворяет условиям (8). Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G , что для любой рациональной функции R степени не выше n выполнено

$$\int_G |R'(w)|\rho(w)dA(w) \leq C\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^\infty(G)}. \quad (9)$$

Доказательство. Поскольку граница области G спрямляема и, в частности, ограничена, найдется $K > 1$ такое, что $G \supset \{|w| > K\}$. Рассмотрим $\tilde{G} = G \cap \{|w| < 2K\}$. Это ограниченная область класса Джона и неравенство

$$\int_{\tilde{G}} |R'(w)|\rho(w)dA(w) \leq C\sqrt{\ln(n+1)}\|R\|_{H^\infty(G)}$$

следует из теоремы 1. Для оценки интеграла по $\{|w| > 2K\}$ применим конформное отображение $w = 1/z$. Тогда

$$\int_{|w|>2K} |R'(w)|\rho(w)dA(w) = \int_{|z|<1/(2K)} |(R(1/z))'| \frac{\rho(1/z)}{|z|^2} dA(z).$$

Учитывая, что $|R(1/z)| \leq \|R\|_{H^\infty(G)}$ при $|z| < 1/K$, мы получаем, что $|(R(1/z))'| \leq 2K\|R\|_{H^\infty(G)}$ при $|z| < 1/(2K)$, в то время как $\int_{|z|<1/(2K)} |z|^{-2} \rho(1/z) dA(z) \leq 1$ по условию (8).

4. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА ПО КОЛЬЦУ

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд известных неравенств для производных рациональных функций. Первое из них – еще одно неравенство Е.П. Долженко. Пусть R – рациональная функция степени n , полюса которой лежат вне единичной окружности \mathbb{T} . Тогда

$$\int_0^{2\pi} |R'(e^{it})| dt \leq 2\pi n \|R\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (10)$$

Это неравенство представляет собой частный случай намного более общего неравенства, полученного Е.П. Долженко в 1978 г. [17]. Изложение результата Долженко и обсуждение истории этого вопроса можно найти в [18].

Для ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ и $w \in G$ положим

$$d_G(w) = \text{dist}(w, \partial G).$$

Предположим, что область G односвязна, а конформное отображение ϕ единичного круга \mathbb{D} на G удовлетворяет условию $\phi' \in H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда для любой функции $f \in H^\infty(G)$ и $p \geq 2$ имеет место неравенство

$$\int_G |f'(w)|^p d_G^{p-1}(w) dA(w) \leq \|\phi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \|f\|_{H^\infty(G)}^p. \quad (11)$$

Это неравенство содержится, например, в [10, теорема 5]. Приведем совсем короткое доказательство. Замена переменной $w = \phi(z)$ и неравенство $d_G(w) \leq |\phi'(z)|(1 - |z|^2)$ дают

$$\begin{aligned} \int_G |f'(w)|^p d_G^{p-1}(w) dA(w) &\leq \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \phi)'(z)|^p |\phi'(z)| \times \\ &\times (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z) \leq \|\phi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \|f\|_{H^\infty(G)}^{p-2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \phi)'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) \leq \|\phi'\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \|f\|_{H^\infty(G)}^p. \end{aligned}$$

Мы воспользовались хорошо известными неравенствами $|g'(z)|(1 - |z|^2) \leq \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$ и

$$\int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) \leq \|g\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 \leq \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}^2, \quad (12)$$

примененными к $g = f \circ \phi$ (заметим, что $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \|f\|_{H^\infty(G)}$).

Далее нам понадобится одна простая лемма, утверждение которой напрямую следует из формулы замены переменной.

Лемма 1. Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $r > 0$ и $rG = \{rz : z \in G\}$. Тогда

$$\int_{rG} |f'(w)| dA(w) = r \int_G |(f(rz))'| dA(z)$$

для любой функции f , аналитической в rG .

Доказательство теоремы 2. Покажем, что интеграл в левой части неравенства (4) не превосходит каждого из выражений в правой части независимо от соотношения между n , r и l . Ясно, однако, что при $n \geq r/l$ более точной является первая оценка, а при $n \leq r/l$ – вторая.

Применение леммы 5 сводит задачу к исследованию интеграла от $|R'|$ по кольцу $\{1 - l/r < |z| < 1\}$. Пусть теперь R – рациональная функция степени

n и $|R(z)| \leq 1$ при $1 - l/r < |z| < 1$. Из неравенства (10) вытекает, что $\int_0^{2\pi} |R'(\rho e^{it})| dt \leq 2\pi n$, $1 - l/r < \rho < 1$.

Умножив это неравенство на ρ и затем проинтегрировав по $\rho \in [1 - l/r, 1]$, мы получаем

$$\int_{1-l/r < |z| < 1} |R'(z)| dA(z) \leq \frac{2nl}{r},$$

что и требовалось. Таким образом, при всех l, r и для любой рациональной функции R степени n , для которой $\|R\|_{H^\infty(K_{l,r})} \leq 1$, справедливо неравенство

$$\int_{K_{l,r}} |R'(w)| dA(w) \leq 2nl.$$

Применяя лемму 1 (с коэффициентом растяжения l), мы получаем, что

$$\int_{K_{l,r}} |R'(w)| dA(w) = l \int_{r/l-1 < |z| < r/l} |(R(lz))'| dA(z).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай кольца $\mathcal{A} = \{r - 1 < |w| < r\}$, $r \geq 2$. Покажем, что в этом случае

$$\int_{\mathcal{A}} |R'(w)| dA(w) \leq Cr \left(1 + \sqrt{\log \frac{n}{r}} \right),$$

где C – некоторая абсолютная числовая константа, не зависящая от R и r . В дальнейшем символ C будет обозначать такие (возможно разные в разных формулах) константы. Применяя это неравенство с r/l вместо r , мы получим первую оценку в (4).

Положим $\delta = \frac{r}{3n}$. Тогда, по неравенству Дольженко (10),

$$\int_{r-\delta < |w| < r} |R'(w)| dA(w) = r \int_{1-\delta/r < |z| < 1} |(R(rz))'| dA(z) \leq 2\delta n < r.$$

Аналогично,

$$\int_{r-1 < |w| < r-1+\delta} |R'(w)| dA(w) \leq Cr.$$

Чтобы оценить интеграл по кольцу $\mathcal{A}_0 = \{r - 1 + \delta < |w| < r - \delta\}$, зафиксируем односвязные области G и G_0 со следующими свойствами:

(i) $G_0 \subset G \subset \mathcal{A}$ и $\text{dist}(G_0, \partial G) \geq C\delta$, где C – некоторая абсолютная числовая константа;

(ii) $G_0 \subset \mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{k=0}^{2[r]-1} e^{i\pi k/[r]} G_0$;

(iii) G и G_0 – области с границей класса C^∞ .

Очевидно, такие области существуют. Достаточно рассмотреть криволинейные прямоугольники $\{r - 1 < |z| < r, |\arg z| < 4\pi/[r]\}$ и $\{r - 1 + \delta <$

$< |z| < r - \delta, |\arg z| < 2\pi/[r]\}$, которые уже удовлетворяют условиям (i) и (ii). Сглаживая границы в углах, получим области G и G_0 .

Заметим к тому же, что если мы обозначим через φ конформное отображение круга \mathbb{D} на область G , то $\varphi' \in H^\infty(\mathbb{D})$ и, более того, нормы таких конформных отображений можно считать ограниченными равномерно по $r \geq 2$.

Пусть R – рациональная функция степени не выше n и $\|R\|_{H^\infty(\mathcal{A})} \leq 1$. По неравенству (11) имеем

$$\int_G |R'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \leq C,$$

где константа C не зависит от R и r . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{G_0} |R'(w)| dA(w) \leq \\ & \leq \left(\int_{G_0} |R'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \right)^{1/2} \left(\int_{G_0} d_G^{-1}(w) dA(w) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из построения области G_0 как сглаженного криволинейного прямоугольника и свойства $\text{dist}(G_0, \partial G) \geq C\delta$ вытекает, что

$$\int_{G_0} d_G^{-1}(w) dA(w) \leq C \log \frac{1}{\delta} = C \log \frac{n}{r} + O(1).$$

Таким образом, по неравенству (11)

$$\int_{G_0} |R'(w)| dA(w) \leq C \left(1 + \sqrt{\log \frac{n}{r}} \right).$$

Просуммировав интегралы по поворотам области G_0 и используя свойство (ii), получим

$$\int_{\mathcal{A}_0} |R'(w)| dA(w) \leq Cr \left(1 + \sqrt{\log \frac{n}{r}} \right).$$

Тем самым, теорема 2 полностью доказана.

Обсудим теперь вопрос о порядковой точности оценок (4). Точность второй оценки при $r \geq nl$ легко получается рассмотрением простого примера: $w = z^n/r^n$. С первой оценкой дела обстоят несколько сложнее. Однако она также является точной в смысле порядка при условии $r/l \leq n^\alpha$, где α – некоторое число из промежутка $(0, 1)$. Докажем этот факт. Без ограничения общности можно полагать, что $l = 1$. Как было упомянуто выше, нами был построен пример ограниченной в круге \mathbb{D} рациональной функции R такой, что

$$\int_{|w| < 1} |R'(w)| dA(w) \geq c\sqrt{\ln(n+1)}$$

для некоторой константы $c > 0$, не зависящей от n . Поэтому

$$\int_{|w| < 1-1/n^\alpha} |R'(w)| dA(w) + \int_{K_{1/n^\alpha, 1}} |R'(w)| dA(w) \geq c\sqrt{\ln(n+1)}.$$

Оценим в этом неравенстве первый интеграл. Применяя неравенство (12), получим

$$\begin{aligned} & \int_{|w| < 1-1/n^\alpha} |R'(w)| dA(w) \leq \\ & \leq \left(\int_{|w| < 1-1/n^\alpha} |R'(w)|^2 (1 - |w|^2) dA(w) \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\int_{|w| < 1-1/n^\alpha} \frac{dA(w)}{1 - |w|^2} \right)^{1/2} \leq c_1 \sqrt{\alpha \log n} \end{aligned}$$

с некоторой абсолютной константой c_1 . Если взять $\alpha < (c/c_1)^2$, то наши оценки показывают, что

$$\int_{K_{1/n^\alpha, 1}} |R'(w)| dA(w) \geq c_2 \sqrt{\ln(n+1)},$$

где $c_2 = c - c_1 \sqrt{\alpha}$. В силу леммы 1, отсюда вытекает порядковая точность оценок (4) при $r/l \leq n^\alpha$.

Более того, несколько видоизменяя рассуждения, можно показать, что существует бесконечная последовательность натуральных чисел n таких, что оценки (4) точны по порядку при $r/l \leq n^\alpha$ для всех $\alpha < 1$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу: найти

$$M_n = \sup_{f \in H^\infty(\mathbb{D}), \|f\|_{H^\infty} \leq 1, |z| < 1-1/n} \int |f'(z)| dA(z).$$

Нетрудно установить, что эта задача асимптотически эквивалентна такой же задаче в классе ограниченных в \mathbb{D} рациональных функций степени n . Это следует из того факта, что любая ограниченная в \mathbb{D} функция может быть равномерно приближена в круге $\{|z| < 1 - 1/n\}$ вместе с производной своим многочленом Тейлора степени $2[n \log n]$ (см. [10], лемма 1), после чего достаточно взять произведение Бляшке степени $2[n \log n]$ с таким же многочленом Тейлора. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\sqrt{\log n}} = \\ & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \sup_{\|R\|_{H^\infty} \leq 1, |z| < 1-1/n} \int |R'(z)| dA(z), \end{aligned}$$

где в правой части супремум взят по множеству всех рациональных функций R степени не выше n и таких, что $\|R\|_{H^\infty} \leq 1$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\log n_k}} \sup_{\|f\|_{H^\infty} \leq 1, |w| < 1-1/n_k} \int |f'(w)| dA(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{M_n}{\sqrt{\log n}}.$$

Именно, для такой подпоследовательности натуральных чисел оценки (4) будут точны в порядковом смысле для всех фиксированных $\alpha < 1$ при условии, что $r/l \leq n_k^\alpha$. В самом деле, в интеграле по кругу $\{|z| < 1 - 1/n_k^\alpha\}$ произойдет уменьшение константы перед $\sqrt{\log n_k}$ в $\sqrt{\alpha}$ раз. Поэтому оставшийся интеграл по кольцу $\{1 - 1/n_k^\alpha < |w| < 1 - 1/n_k\}$ даст такой же порядок асимптотики $\sqrt{\log n_k}$. Далее, применяя масштабирующую лемму 1, убеждаемся в точности оценок (4).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы показали, что для ограниченных рациональных функций в гельдеровых областях со спрямляемой границей справедливо неравенство (3). Возникает естественный вопрос о необходимости условия гельдеровости. Весьма правдоподобной выглядит гипотеза, что для любой односвязной области со спрямляемой границей верна оценка

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq CL \sqrt{\ln(n+1)} \|R\|_{H^\infty(G)}, \tag{13}$$

где L – длина границы области G , а $C > 0$ – некоторая абсолютная числовая константа. Отметим, что если удастся доказать оценку (13) для областей с гельдеровыми границами, то простыми аппроксимационными соображениями условие гельдеровости можно отбросить.

Очевидно, что пример с кольцом подтверждает нашу гипотезу. Этот же пример показывает, что нулевые углы не играют существенной роли (кольцо с большим радиусом и фиксированной толщиной – это, фактически, область с нулевым углом). С другой стороны, пример показывает, что зависимость оценки от длины границы может быть весьма нетривиальной, и, по-видимому, ничего лучше оценки (3) получить не удастся (если не делать дополнительных предположений). Для достаточно “толстых” областей этот факт очевиден, что видно из масштабирующей леммы. Тонкие же области, как показывает пример, могут давать более сложную зависимость, хотя, вероятно, и не противоречат нашей гипотезе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мергелян С.Н. Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 5. С. 395–400.
2. Rudin W. The radial variation of analytic functions // Duke Math. J. 1955. V. 22. № 2. P. 235–242.
3. Piranian G. Bounded functions with large circular variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. № 6. P. 1255–1257.
4. Долженко Е.П. Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций // Матем. сб. 1966. Т. 69(111). № 4. С. 497–524.
5. Пекарский А.А. Неравенства типа Бернштейна для произвольных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124(166). № 4(8). С. 571–588.
6. Данченко В.И. Об одной интегральной оценке производной рациональной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 277–293.
7. Данченко В.И. Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 33–52.
8. Dyn'kin E.M. Inequalities for rational functions // J. Approx. Theory. 1997. V. 91. P. 349–367.
9. Baranov A., Zarouf R. The differentiation operator from model spaces to Bergman spaces and Peller type inequalities // J. Anal. Math. 2019. V. 137. № 1. P. 189–209.
10. Баранов А.Д., Каюмов И.Р. Оценки интегралов от производных рациональных функций в многосвязных областях на плоскости // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. № 5. С. 5–17.
11. Макаров Н.Г. Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 3–59; Leningrad Math. J. 1990. V. 1. № 1. P. 1–56.
12. Bañuelos R., Moore C.N. Mean growth of Bloch functions and Makarov's law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 112. P. 851–854.
13. Duren P. Theory of H^p spaces. New York, Academic Press, 1970.
14. Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1979. V. 4. № 2. P. 383–401.
15. Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps. Springer-Verlag New-York, 1992.
16. Pavlovic M. Function classes on the unit disc. V. 52. De Gruyter Studies in Mathematics, 2019.
17. Долженко Е.П. Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Analysis Mathematica. 1978. V. 4. № 4. P. 247–268.
18. Baranov A.D., Fedorovskiy K. Yu. On L^1 -estimates of derivatives of univalent rational functions // J. Anal. Math. 2017. V. 132. P. 63–80.

INTEGRAL ESTIMATES OF DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS IN HÖLDER DOMAINS

A. D. Baranov^a and I. R. Kayumov^b

^a Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

^b Kazan Federal University, Kazan, Russia

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

It is shown that the area integral of the modulus of the derivative of a bounded rational function of degree n in a Hölder domain in the complex plane is bounded by a quantity of order $\sqrt{\log n}$. The obtained inequality improves a classical result of E.P. Dolzhenko (1966) as well as some recent results due to the authors. Examples are constructed illustrating the influence of the length of the boundary on the behavior of area integrals of the moduli of the derivatives of bounded rational functions.

Keywords: Rational functions, Hardy space, Hardy-Littlewood inequality, Hölder domain

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПОСТРОЕНИЕМ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

© 2022 г. Академик В. Б. Бетелин^{1,*}, В. А. Галкин^{2,**}

Поступило 18.07.2022 г.

После доработки 25.07.2022 г.

Принято к публикации 22.09.2022 г.

Предложен общий топологический подход для конструирования сходящихся искусственных нейронных сетей (ИНС) на основе настройки алгоритмов принятия решений на последовательности итераций непрерывных отображений (слоев ИНС). Отображения выбираются на основе оптимизационных принципов, составляющих основу “обучения ИНС), а принятие решений по результатам обучения многослойной ИНС соответствует отысканию сходящейся последовательности к неподвижной точке. Выявлена существенная для этого класса задач вычислительная неустойчивость, связанная с явлением динамического хаоса и некорректностью этого класса задач. Предложены методы стабилизации, сходящиеся к устойчивым неподвижным точкам отображений, что является отправной точкой для широкого класса математических исследований по оптимизации обучающих наборов при построении ИНС.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, методы оптимизации, вычислительная неустойчивость, динамический хаос, методы регуляризации, неподвижные точки преобразований

DOI: 10.31857/S2686954322700035

Во многочисленных вычислительных экспериментах по распознаванию образов, обработке акустической, видео и текстовой информации были найдены подходы к созданию программного обеспечения для практического решения ряда трудно формализуемых задач. Эти успехи породили огромный поток работ и интерес к созданию полуэмпирических методов, носящих название Искусственные нейронные сети (ИНС).

Общий подход, лежащий в основе построения ИНС, состоит в принятии гипотезы возможности создания устройства, которое можно обучить на серии примеров принятия решений. Эта размытая формулировка предполагает наличие некоторой связи между выбранными парами объектов $(x, y) \in X \times Y$, определяющей некоторое отноше-

ние $R \subset X \times Y$ (гипотетический закон) [1]. Обычно предполагается, что R является функцией (т.е. каждому значению $x \in X$ соответствует ровно одно значение $y \in Y$).

Набор обучающих примеров составляет заданное подмножество $\tilde{R} \subset R$, где отношение R априори неизвестно. Целью создания ИНС является в некотором смысле “оптимальная реконструкция” неизвестного отношения R на основе заданного “обучающего” набора \tilde{R} . По своей природе такая постановка задачи является некорректной.

На практике размерность пространства входных данных X существенно больше размерности выходных данных Y . Типичное использование ИНС нацелено на “сжатие” обрабатываемого потока больших объемов входных данных (Big Data) с целью их классификации, распознавания объектов, видео и акустической информации и т.п.

Необходимым “элементом построения ИНС служит введение целевого правила (критерия, функционала и т.п.) F , на основе применения которого выполняется построение “наилучшего” продолжения заданного отношения \tilde{R} до отношения R_F , которое аппроксимирует R (например, посредством минимизации функционала F на некотором множестве параметров). Назовем R_F

¹ Федеральное государственное учреждение “Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Москва, Россия

² Сургутский филиал Федерального государственного учреждения “Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Сургут, Россия

*E-mail: betelin@niisi.msk.ru

**E-mail: val-gal@yandex.ru

математической моделью реализации ИНС. Построение этой модели может рассматриваться как задача об отыскании неподвижной точки \bar{x} ($\bar{x} = f(\bar{x})$) для некоторого отображения $f: M \rightarrow M$ на множестве данных $M \supset X \cup Y$. Выбор отображения f назовем слоем ИНС. По существу, построение слоя ИНС является этапом построения многослойной ИНС, состоящей из последовательно применяемых преобразований – слоев $f_n: M \rightarrow M$, которые последовательно модифицируются пользователем для достижения некоторого “оптимального, идеального для пользователя” результата. Искомый результат представляет собой неподвижную точку некоторого предельного преобразования $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Во многих случаях процесс отыскания \bar{x} основывается на рассмотрении последовательности итераций

$$x_{n+1} = f_n(x_n). \tag{1}$$

Часто при конкретных реализациях многослойных ИНС слои выбирают одинаковыми, т.е. итерации $f_n \equiv f$. Такой подход к созданию многослойных ИНС, вообще говоря, может не сходиться. А.Н. Шарковским для одномерных итераций $x_{n+1} = f(x_n)$ был обнаружен динамический хаос [2]. В частности, примером такой последовательности является логистический процесс, задаваемый отображением

$$f(x) = 4(x - x^2) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]. \tag{2}$$

В работе [3] установлено, что за счет выбора начального значения x_0 для отображения (2) можно получить любую наперед заданную смену знаков для последовательности $x_n - c$, где c – константа, не зависящая от номера n . Типичным свойством преобразования (2) является равномерное распределение значений итераций на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, построение цепочки слоев ИНС должно подчиняться модификациям, гарантирующим сходимость итераций.

Ниже рассмотрены алгоритмы, обладающие такими свойствами.

Теорема 1. Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство, на котором действует последовательность равномерно сжимающих операторов

$$f_n : M \rightarrow M, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. постоянные сжатия для f_n не превосходят величины $0 \leq q < 1$. Пусть последовательность неподвижных точек $\bar{x}_n, n \in \mathbb{N}$, отображений f_n сходится к некоторой точке $\bar{x} \in M$. Тогда точка \bar{x} может быть найдена как предел итераций

$$x_{n+1} = f_{n+1}(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{3}$$

где начальная точка $x_0 \in M$ выбирается произвольно.

Замечание. Достаточным условием сходимости точек \bar{x}_n является поточечная сходимость отображений f_n на M .

Действительно, это является непосредственным следствием того, что предел $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ является сжимающим отображением на (M, ρ) (т.к. по условию теоремы операторы f_n обладают общей постоянной сжатия $0 \leq q < 1$). Обозначим неподвижную точку $\bar{x} = f(\bar{x})$. Тогда

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) = \rho(f(\bar{x}), f_n(\bar{x}_n)) \leq \rho(f(\bar{x}), f_n(\bar{x})) + \rho(f_n(\bar{x}), f_n(\bar{x}_n)) \leq \varepsilon + q\rho(\bar{x}, \bar{x}_n)$$

(последнее неравенство выполнено при достаточно больших значениях n). Таким образом, для больших n

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{1 - q},$$

что доказывает утверждение.

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\rho(x_{n+1}, \bar{x}) \leq \rho(f_{n+1}(x_n), \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) = \rho(f_{n+1}(x_n), f_{n+1}(\bar{x}_{n+1})) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу равномерной сжатости отображений f_n имеем

$$\rho(x_{n+1}, \bar{x}) \leq q\rho(x_n, \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \leq q\rho(x_n, \bar{x}) + (1 + q)\rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}).$$

Выберем номер n достаточно большим, чтобы при $k \geq 0$ для произвольного положительного ε выполнялись неравенства

$$(1 + q)\rho(\bar{x}_{n+k}, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Тогда для $k \geq 1$ справедливо соотношение

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \leq q\rho(x_{n+k-1}, \bar{x}) + \varepsilon.$$

Индукцией по номеру $k \geq 1$ устанавливаем, что

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \leq q^k \rho(x_n, \bar{x}) + \varepsilon(1 - q)^{-1}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, получаем, что $\rho(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Приведенная выше теорема связана с построением систем с единственным решением. Практические задачи классификации и распознавания образов связаны с установлением соответствия поступающих данных одному из множества объектов, каждому из которых сопоставляется неподвижная точка многослойной ИНС. То есть для таких отображений неподвижная точка не единственна, поэтому одним из важнейших аспектов создания устойчивых многослойных ИНС является построение алгоритмов, стабилизирующих

предельное поведение итераций (3), при отказе от требования теоремы 1, связанного со свойством равномерного сжатия. В частности, хаотическое поведение последовательностей (1), (2) обусловлено наличием подмножества, где отображение (2) является достаточно сильно растягивающим. Аналогичными свойством обладает достаточно широкий класс отображений, в который, естественно, попадают экспериментально создаваемые ИНС. Такое поведение типично для гиперболических динамических систем [4].

С указанными явлениями связано общее свойство неустойчивости поведения высокочастотных гармоник разложения отображений в ряд Фурье, а именно, высоким номерам базисных функций соответствуют большие коэффициенты растяжения, порождающие хаотическое поведение итераций (1).

Устойчивое получение аппроксимации решения x дополнительно требует применения методов регуляризации [5]. В частности, это явление типично для аппаратной цифровой обработки данных на основе частотной фильтрации сигналов R с подавлением высокочастотной компоненты входного сигнала $x \in H_1 = L_2[a, b]$. Положим $R(x) = (k_1c_1, k_2c_2, \dots, k_nc_n, \dots)$, где вектор $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \in l_2 = H_2$ состоит из коэффициентов разложения в ряд Фурье вектора x по некоторой полной ортонормированной системе в $L_2[a, b]$, а заданная последовательность $k_n \rightarrow 0$, $k_n \neq 0$, определяет частотный фильтр входного сигнала x . Очевидно, фильтр $R : L_2[a, b] \rightarrow l_2$ является компактным оператором и, соответственно, восстановление исходного образа (сигнала) x на основе решения задачи для приближенных (зашумленных) данных $y \in l_2$ является некорректной задачей, у которой либо решение отсутствует, либо малые погрешности данных приводят к значительным ошибкам решения.

Таким образом, классы задач, основанные на применении ИНС как средства аппроксимации отображений и построения решений обратных задач с компактным оператором, обнаруживают общее математическое свойство – вычислительную неустойчивость при обработке больших массивов данных. Эти проблемы аналогичны также для задач “восстановления” образов по “цифровым двойникам”, поскольку имеют ту же математическую природу.

Для построения многослойных ИНС в задачах с хаотическим поведением итераций на слоях даже при наличии неединственности неподвижной точки эффективные решения связаны с применением процедуры последовательного усреднения аппроксимаций на основе ЗБЧ (закона больших чисел П.Л. Чебышёва), дающего существенное ускорение сходимости частичных сумм в теории

тригонометрических рядов Фурье [5]. Аналогичный эффект связан с теоремой Мазура [7], позволяющей за счет процедуры усреднения превратить слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Близкое явление имеет место в методе Ричардсона ускорения сходимости разностных схем на грубых сетках [8].

Теорема 2. Пусть непрерывное отображение f на \mathbb{R}_n оставляет инвариантным ограниченный замкнутый шар M . Пусть последовательность итераций (3) определяется формулами

$$x_n = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i\right). \quad (4)$$

Предположим, что почти везде существует предел средних арифметических $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$. Тогда последовательность итераций (4) сходится к неподвижной точке \bar{x} отображения $f : M \rightarrow M$ почти для всех начальных точек $x_0 \in M$.

Доказательство. Существование неподвижной точки $\bar{x} = f(\bar{x}) \in M$ следует из теоремы Брауэра [9]. (Подчеркнем, что такая точка, вообще говоря, неединственная). Сходимость почти везде

средних арифметических $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ обеспечивает сходимость последовательности итераций (4) к \bar{x} , которая является неподвижной точкой отображения $f : M \rightarrow M$.

Таким образом, алгоритмы (4) могут быть положены в основу создания классов устойчивых сходящихся ИНС.

Открытым является фундаментальный вопрос о сходимости средних арифметических $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$.

Он содержательно решен в рамках эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина [10] для отображений $f : M \rightarrow M$, сохраняющих меру. Вычислительные эксперименты авторов демонстрируют надежность и вычислительную устойчивость алгоритма (4) для широкого класса непрерывных отображений шара в себя.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме 0065-2019-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями. Успехи киберне-

- тики. 2021. Т. 2. № 4. С. 6–14.
<https://doi.org/10.51790/2712-9942-2021-2-4-1>
2. *Крянев А.В. и др.* Метрический анализ и обработка данных.
 3. *Лу Т.У., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 982–985.
 4. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1967. Вып. 90. № 1. С. 1–235.
 5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
 6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
 7. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
 8. *Николаев Е.С., Самарский А.А.* Выбор итерационных параметров в методе Рундсона // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. С. 960–973.
 9. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
 10. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений / Пер. с англ. Под ред. А.С. Городецкого. М.: МЦНМО, 2005. ISBN 5-94057-063-1

ON FIXED POINTS OF CONTINUOUS MAPPINGS ASSOCIATED WITH THE CONSTRUCTION OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Academician of RAS V. B. Betelin^a and V. A. Galkin^b

^a *Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia*

^b *Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russia*

A general topological approach is proposed for the construction of converging artificial neural networks (ANN) based on the configuration of decision-making algorithms on a sequence of iterations of continuous maps (ANN layers). The mappings are selected based on the optimization principles that form the basis of “ANN training”, and decision-making based on the results of multi-layer ANN training corresponds to finding a converging sequence to a fixed point. The phenomena of computational instability associated with the phenomenon of dynamic chaos associated with the incorrectness of this class of problems have been identified. Stabilization methods converging to stable fixed points of the mappings are proposed, which is the starting point for a wide class of mathematical studies on optimizing training sets in the construction of ANN.

Keywords: artificial neural networks, optimization methods, computational instability, dynamic chaos, regularization methods, fixed points

О ЗАДАЧЕ КАНТОРОВИЧА С ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. В. И. Богачев^{1,2,3,*}, С. Н. Попова^{4,2}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 01.06.2022 г.

После доработки 30.10.2022 г.

Принято к публикации 17.11.2022 г.

Изучается задача Канторовича оптимальной транспортировки мер на метрических пространствах в случае функций стоимости и маргинальных распределений, зависящих от параметра из метрического пространства. Показано, что расстояние Хаусдорфа между множествами вероятностных мер с заданными маргиналами оценивается через расстояния между маргиналами. В качестве следствия доказано, что стоимость оптимальной транспортировки непрерывна по параметру, если функция стоимости и маргинальные распределения непрерывны по этому параметру.

Ключевые слова: задача Канторовича, метрика Канторовича, оптимальный план, расстояние Хаусдорфа, непрерывность по параметру

DOI: 10.31857/S2686954322600380

Пусть μ и ν – борелевские вероятностные меры на полных сепарабельных метрических пространствах X и Y соответственно, $h \geq 0$ – непрерывная функция на $X \times Y$. Классическая задача Канторовича оптимальной транспортировки (см. [1–5]) заключается в минимизации интеграла

$$\int h d\sigma$$

по всем мерам σ из множества $\Pi(\mu, \nu)$, состоящего из борелевских вероятностных мер на $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители. Меры μ и ν называются маргинальными распределениями или маргиналами, а функция h называется функцией стоимости. Если существует мера в $\Pi(\mu, \nu)$ с конечным интегралом от h , то минимум достигается, а меры, на которых он достигается, называются оптимальными мерами или оптимальными планами Канторовича. Этот минимум называется оптимальной стоимостью и обозначается через $K_h(\mu, \nu)$.

Если функция стоимости h_t и маргинальные распределения μ_t и ν_t зависят от параметра t из метрического пространства T , то возникает вопрос о непрерывности относительно t оптимальной стоимости $K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ и возможности выбрать оптимальный план в $\Pi(\mu_t, \nu_t)$ непрерывным по параметру. Кроме того, множество всех транспортных планов $\Pi(\mu_t, \nu_t)$ также зависит от параметра, поэтому можно изучать его непрерывность при наделении пространства множеств мер метрикой Хаусдорфа, порожденной подходящей метрикой на пространстве мер. Задачи Канторовича с параметром исследовались в работах [5–8]. В работе [9] было показано, что соответствие $(\mu, \nu) \mapsto \Pi(\mu, \nu)$ непрерывно. Более короткое доказательство было недавно дано в работе [10], где использовалась метрика Прохорова на пространстве мер. Наш первый результат дает значительно более простую явную оценку с метрикой Канторовича.

Напомним (см. [1, 11]), что слабая топология на пространстве $\mathcal{P}(X)$ борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве X метризуема посредством метрики Канторовича–Рубинштейна d_{KR} , заданной формулой

$$d_{KR}(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int f d(\mu - \nu) : f \in \text{Lip}_1, |f| \leq 1 \right\},$$

где Lip_1 – множество 1-липшицевых функций на пространстве X . Пространство $(\mathcal{P}(X), d_{KR})$ также полно и сепарабельно.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

³ Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴ Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*E-mail: vibogach@mail.ru

Для ограниченного пространства X можно использовать метрику Канторовича

$$d_K(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int f d(\mu - \nu) : f \in \text{Lip}_1 \right\}.$$

Для всякого пространства, лежащего в шаре радиуса 1, верно равенство $d_K = d_{KR}$.

Заметим, что неограниченное метрическое пространство (X, d) можно наделить ограниченной метрикой $\varrho = \min(d, 1)$, порождающей исходную топологию, хотя (X, ϱ) не обязано быть полным. Для новой метрики ϱ и соответствующих ей метрик Канторовича—Рубинштейна ϱ_{KR} и Канторовича ϱ_K (отличие от старых возникает из-за различия в классах липшицевых функций) имеем $\varrho_K = \varrho_{KR}$. Кроме того,

$$2^{-1} \varrho_K \leq d_{KR} \leq 2\varrho_K.$$

Для наших целей можно использовать ограниченную метрику ϱ и ассоциированную с ней метрику Канторовича.

Стоит отметить, что, взяв d в качестве функции стоимости на $X \times X$, получаем формулу двойственности Канторовича $d_K(\mu, \nu) = K_d(\mu, \nu)$.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Пространство $X \times Y$ наделим метрикой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Эта метрика порождает соответствующие метрики Канторовича—Рубинштейна и Канторовича на пространстве $\mathcal{P}(X \times Y)$ вероятностных мер на произведении $X \times Y$.

Напомним, что расстояние Хаусдорфа между ограниченными замкнутыми подмножествами A и B метрического пространства (M, d) определяется формулой

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}.$$

Это расстояние будет рассматриваться для подмножеств пространства вероятностных мер $\mathcal{P}(X \times Y)$ с метрикой Канторовича—Рубинштейна d_{KR} (порожденной метрикой на $X \times Y$, введенной выше) или с метрикой Канторовича d_K , если X и Y ограничены, что дает соответствующие расстояния Хаусдорфа H_{KR} и H_K . Как объяснено выше, можно иметь дело с последним случаем и считать, что X и Y ограничены.

Теорема 1. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X)$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Тогда для каждой меры $\sigma_1 \in \Pi(\mu_1, \nu_1)$ существует такая мера $\sigma_2 \in \Pi(\mu_2, \nu_2)$, что

$$d_K(\sigma_1, \sigma_2) \leq d_K(\mu_1, \mu_2) + d_K(\nu_1, \nu_2). \quad (1)$$

Значит, для соответствующей метрики Хаусдорфа имеем

$$H(\Pi(\mu_1, \nu_1), \Pi(\mu_2, \nu_2)) \leq d_K(\mu_1, \mu_2) + d_K(\nu_1, \nu_2). \quad (2)$$

Теорема 2. Предположим, что меры $\mu_n \in \mathcal{P}(X)$ слабо сходятся к мере $\mu \in \mathcal{P}(X)$, меры $\nu_n \in \mathcal{P}(Y)$ слабо сходятся к мере $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, а равномерно ограниченные непрерывные функции $h_n : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ сходятся к функции $h : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ равномерно на компактных множествах. Тогда

$$K_h(\mu, \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{h_n}(\mu_n, \nu_n).$$

Доказательство сводится к случаю общей функции стоимости h , более того, достаточно рассмотреть случай функции h , удовлетворяющей условию Липшица с некоторой постоянной L . В этом случае имеем следующую явную оценку:

$$|K_h(\mu, \nu) - K_h(\mu_n, \nu_n)| \leq Ld_K(\mu, \mu_n) + Ld_K(\nu, \nu_n).$$

В самом деле, пусть $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ — оптимальная мера. По предыдущей теореме имеется такая мера $\pi \in \Pi(\mu_n, \nu_n)$, что

$$d_K(\sigma, \pi) \leq d_K(\mu, \mu_n) + d_K(\nu, \nu_n).$$

Поскольку h является L -липшицевой, имеем

$$\left| \int h d\pi - \int h d\sigma \right| \leq L(d_K(\mu, \mu_n) + d_K(\nu, \nu_n)).$$

Следовательно,

$$K_h(\mu_n, \nu_n) \leq K_h(\mu, \nu) + L(d_K(\mu, \mu_n) + d_K(\nu, \nu_n)).$$

Меняя местами пары (μ, ν) и (μ_n, ν_n) , получаем оценку

$$K_h(\mu, \nu) \leq K_h(\mu_n, \nu_n) + L(d_K(\mu, \mu_n) + d_K(\nu, \nu_n)).$$

Пусть T — метрическое пространство.

Следствие 1. Предположим, что отображения

$$t \mapsto \mu_t, \quad T \rightarrow \mathcal{P}(X) \quad \text{и} \quad t \mapsto \nu_t, \quad T \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

непрерывны и $(t, x, y) \mapsto h_t(x, y)$, $T \times X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда функция $t \mapsto K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ непрерывна.

Возникает вопрос, существует ли оптимальный план, непрерывно зависящий от параметра t . Можно показать посредством примеров, что такой выбор не всегда возможен. Однако имеются приближенные оптимальные планы, непрерывные по t . Для заданного $\varepsilon > 0$ мера $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ будет называться ε -оптимальной для функции стоимости h , если

$$\int h d\sigma \leq K_h(\mu, \nu) + \varepsilon.$$

Теорема 3. В ситуации предыдущего следствия можно выбрать ε -оптимальные меры $\sigma_t^\varepsilon \in \Pi(\mu_t, \nu_t)$ для функций стоимости h_t так, что они будут непрерывны по t в слабой топологии для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Если для каждого t имеется единственный оптимальный план σ_t , то он непрерывен по t .

Рассмотрим нелинейный функционал стоимости вида

$$J_H(\sigma) = \int_{X \times Y} H(x, y, \sigma) \sigma(dx dy),$$

где H – ограниченная непрерывная функция на $X \times Y \times \mathcal{P}(X \times Y)$. Функционалы такого типа были недавно изучены в работах [12–15].

Предположим, что H зависит от параметра $t \in T$ и функция

$$(t, x, y, \sigma) \mapsto H_t(x, y, \sigma)$$

ограничена и непрерывна на $T \times X \times Y \times \mathcal{P}(X \times Y)$.

Теорема 4. *Предположим, что $t \mapsto \mu_t$ и $t \mapsto \nu_t$ – непрерывные отображения со значениями в $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$ соответственно. Тогда функция*

$$t \mapsto \min_{\sigma \in \Pi(\mu_t, \nu_t)} \int_{X \times Y} H_t(x, y, \sigma) \sigma(dx dy)$$

непрерывна.

Доказательства представленных результатов будут даны в подробной статье.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано грантом РФФИ 22-11-00015.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2018.
2. *Богачев В.И., Колесников А.В.* // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. № 5. С. 3–110.
3. *Rachev S.T., Rüschendorf L.* Mass transportation problems, V. I, II, Springer, New York, 1998.
4. *Santambrogio F.* Optimal transport для applied mathematicians, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.
5. *Villani C.* Optimal transport, old and new, Springer, New York, 2009.
6. *Малофеев И.И.* // Докл. Акад. наук. 2016. Т. 470. № 1. С. 13–17.
7. *Bogachev V.I., Malofeev I.I.* // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 486. № 1. P. 1–30.
8. *Богачев В.И., Доледенко А.Н., Малофеев И.И.* // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 6. С. 149–153.
9. *Bergin J.* // Econom. Theory. 1999. V. 13. № 2. P. 471–481.
10. *Ghossoub M., Saunders D.* // Econom. Theory Bull. 2021. V. 9. № 1. P. 113–117.
11. *Bogachev V.I.* Measure theory, V. 1, 2, Springer, Berlin, 2007.
12. *Gozlan N., Roberto C., Samson P.-M., Tetali P.* // J. Funct. Anal. 2017. V. 273. № 11. P. 3327–3405.
13. *Alibert J.-J., Bouchitté G., Champion T.* // European J. Appl. Math. 2019. V. 30. № 6. P. 1229–1263.
14. *Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Pammer G.* // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2019. V. 58, Paper no. 203. P. 1–28.
15. *Backhoff-Veraguas J., Pammer G.* // Bernoulli. 2022. V. 28. № 1. P. 370–394.

ON KANTOROVICH PROBLEMS WITH A PARAMETER

V. I. Bogachev^{a,b,c} and S. N. Popova^{d,b}

^a Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^b National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

^c Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation

^d Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician V.V. Kozlov

In this note, we study the Kantorovich problem of optimal transportation of measures on metric spaces in the case where the cost function and marginal distributions depend on a parameter from a metric space. It is shown that the Hausdorff distance between the sets of probability measures with given marginals can be estimated by the distances between the marginals. As a corollary, it is proved that the cost of optimal transportation is continuous with respect to the parameter if the cost function and marginal distributions are continuous in this parameter.

Keywords: Kantorovich problem, Kantorovich metric, optimal plan, Hausdorff distance, continuity with respect to a parameter

ОНТОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ **OntoMath^{PRO}**

© 2022 г. А. М. Елизаров^{1,*}, А. В. Кириллович^{1,**},
Е. К. Липачёв^{1,***}, О. А. Невзорова^{1,****}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым

Поступило 03.06.2022 г.

После доработки 24.07.2022 г.

Принято к публикации 06.09.2022 г.

Представлена онтология **OntoMath^{PRO}** – первая семантическая веб-онтология профессионального математического знания, предназначенная для классификации и систематизации математических понятий. Концепты онтологии организованы в две иерархии: математических объектов и материализованных отношений. Учтены мета-онтологические различия, определенные в онтологии верхнего уровня, проведено разделение концептов на типы и роли. Отношения между понятиями заданы в материализованном виде. Аргументами материализованных отношений являются концепты-роли. В онтологии определены также многоязычные лексиконы для выражения математических концептов в текстах на естественном языке. Эти лексиконы представлены в виде наборов лингвистических открытых связанных данных. Проект построения **OntoMath^{PRO}** находится в развитии и предусматривает пополнение онтологии новыми разделами математики и расширение сферы ее практического применения.

Ключевые слова: онтологии, онтологическое проектирование, извлечение математических фактов, материализованные отношения, управление математическим знанием

DOI: 10.31857/S2686954322700011

1. ВВЕДЕНИЕ

Проведение современных научных исследований предполагает использование технологий управления знаниями, в том числе, расширенный поиск близких научных результатов, что может быть обеспечено, в частности, путем использования технологий семантического поиска в имеющихся цифровых коллекциях научных документов. Важную роль при этом играют онтологии. Как известно (см., например, [1]), онтология – это концептуальная модель предметной области, представленная на формальном языке, который обеспечивает применение машинных средств обработки информации. Отметим, что понятие “онтология” используется в разных сообществах в разных смыслах (исторически первом – в философском смысле), а приведенное определение, отражающее вычислительный смысл, характерно прежде всего для инженерии знаний и появилось сравнительно недавно.

С появлением Семантического веба онтологии стали играть ключевую роль в моделировании систем управления интеллектуальными данными и заняли центральное место в известном “слоеном пироге” Тима Бёрнерса-Ли (<https://www.w3.org/2000/Talks/1206-xml2k-tbl/slide10-0.html>). Наблюдаемая тенденция настоящего времени – расширение применения онтологий за счет создания онтологий отдельных предметных областей (в частности, математики), импортирования и логического объединения концептов онтологий смежных областей, а также использования различных баз данных и других информационных ресурсов. Вместе с тем однозначных описаний предметных областей с помощью онтологий не существует, потому что любая онтология предполагает развитие и зависит от целей ее создания и применения. Поэтому построение концептуальных моделей разделов предметных областей и формирование на этой базе соответствующих тезаурусов и онтологий составляют актуальное направление научных исследований. Существенные результаты в этом направлении применительно к математике получены в целом ряде работ.

Вопросам формирования онтологий научного информационного пространства посвящена работа [2]. Тезаурус предметной области “Смешанные уравнения математической физики” пред-

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*E-mail: amelizarov@gmail.com

**E-mail: alik.kirillovich@gmail.com

***E-mail: elipachev@gmail.com

****E-mail: onevzoro@gmail.com

ставлен в [3]. В исследовании [4] предложен способ описания термина, а также связанных с ним уравнений и формул в тезаурусе предметной области “Уравнения математической физики”. В [5] представлены подходы и методы создания семантической библиотеки в предметной области “Математика”; описаны информационная система LibMeta и онтология LibMeta Ontology, предназначенные для генерации семантических библиотек. Важность проектов по применению семантических технологий в математике в соответствии с принципами Открытых связанных данных (Linked Open Data, LOD, <https://lod-cloud.net/>), в том числе, проекта создания онтологии OntoMath^{PRO}, отмечена в исследованиях по формированию машиночитаемой LOD-коллекции Mathematics Subject Classification [6].

Исследование структуры математического знания и возможности его представления в Вебе с помощью онтологий исследованы в [7], а обзор семантических методов решения фундаментальных задач управления математическими знаниями содержится в [8] (здесь онтологии описаны как формализмы для представления математических знаний). Более широкий класс языков формализации в математике приведен в [9].

С разработкой математических онтологий связано решение целого ряда актуальных задач. Фундаментальными являются задачи классификации и систематизации понятий математического знания, семантического поиска, извлечения математических утверждений из текста и их представления в облаке LOD. Другая важная задача – построение рекомендательных систем как элементов систем поддержки и принятия решений, в том числе в математике. Применение онтологий в обучающих системах, в частности, для контроля математических знаний, – еще одна важная цель разработки соответствующих онтологий.

2. ОНТОЛОГИЯ OntoMath^{PRO}: БАЗОВЫЕ ПОДХОДЫ

OntoMath^{PRO} относится к классу предметных онтологий, она предназначена для классификации и систематизации понятий профессионального математического знания и включает несколько важнейших областей (доменов) математики. Существенной особенностью OntoMath^{PRO} является широкий охват понятий из различных областей математики, что дает возможность их повторного использования. Такая возможность – фундаментальное свойство всех предметных онтологий, оно в полной мере проявилось при проектировании OntoMath^{PRO}.

Одной из главных целей разработки математической онтологии OntoMath^{PRO} было ее использование в научных исследованиях, включая гло-

бальные цели, определенные во всемирных проектах “Global Digital Mathematical Library” (GDML), “World Digital Mathematical Library” (WDML) [10, 11].

В направлении классификации понятий математического знания онтология OntoMath^{PRO} обеспечивает построение современных классификаторов в различных областях математики, а также создание специализированных математических баз знаний. Встраивание онтологии в системы текстовой обработки математических документов позволяет не только извлекать из них новые математические понятия для обогащения самой онтологии, но и формировать и сохранять в базах знаний конкретные математические утверждения. Базы данных и базы знаний, сформированные методами извлечения информации из математических текстов, могут быть размещены в облаке LOD.

При проектировании онтологии OntoMath^{PRO} были использованы результаты по управлению математическими знаниями, полученные нами ранее, а также разработанные методы структурного и семантического анализа математических документов [12].

Первая версия онтологии, представленная в [13], предназначена для моделирования математических сущностей и организована в виде иерархии математических объектов и разделов математики. В следующей версии онтологии средства моделирования математических сущностей были дополнены средствами моделирования математических утверждений. Для этого онтология была пополнена иерархией материализованных отношений, мета-онтологическим и лингвистическим уровнями (см. раздел 2). Кроме того, OntoMath^{PRO} была использована для построения ряда приложений по управлению математическим знанием (см. раздел 3).

3. АРХИТЕКТУРА ОНТОЛОГИИ OntoMath^{PRO}

В структуре онтологии выделены три уровня (рис. 1), которые организованы в соответствии с различными моделями представления ее концептов:

- *уровень предметной онтологии* содержит концепты профессионального математического знания;
- *мета-онтологический уровень* представлен разметкой математических концептов мета-онтологическими аннотациями;
- *лингвистический уровень* обеспечивает распознавание математических концептов в научных математических текстах на русском и английском языках.

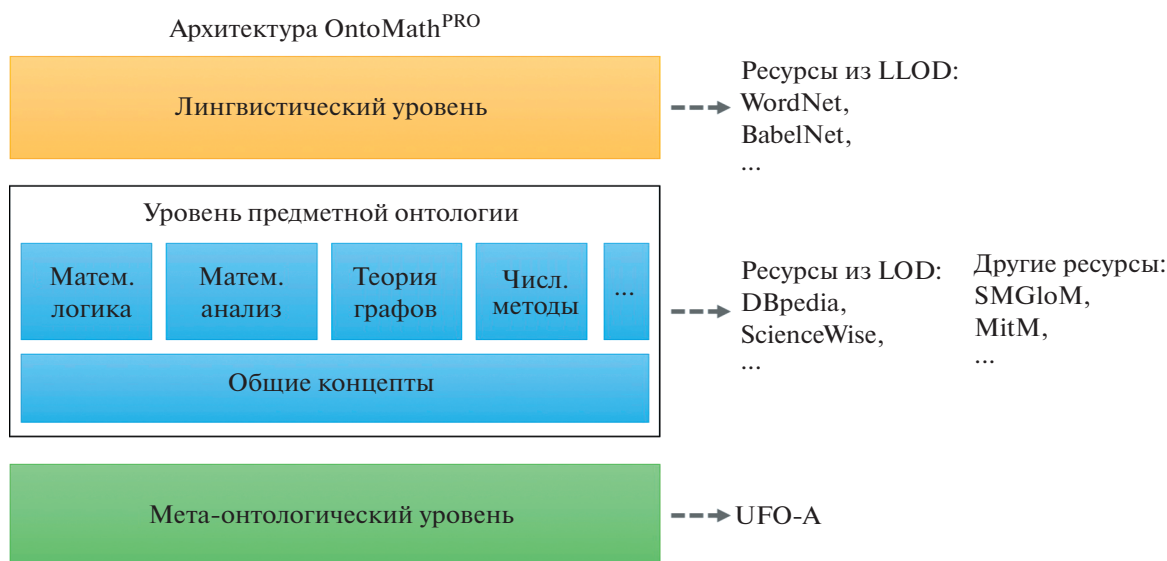


Рис. 1. Общая архитектура онтологии OntoMath^{PRO}.

На уровне предметной онтологии определены иерархия объектов и представление материализованных отношений.

Иерархия объектов содержит концепты, относящиеся к широкому набору областей математики (математическая логика, теория множеств, математический анализ, алгебра, геометрия, дифференциальные уравнения и другие). Концепты первого уровня иерархии относятся к трем типам: базовые математические объекты (такие как *Множество*, *Оператор*, *Отображение*), корневые элементы соответствующей области математики (например, *Элемент теории вероятностей*) и общие математические концепты (такие как *Проблема*, *Метод*, *Утверждение*, *Формула*).

Описание концепта онтологии содержит его название и определение на русском и английском языках, мета-онтологические аннотации, связи с другими концептами, а также ссылки на внешние ресурсы. На рис. 2 приведен пример концепта *Степень многочлена* в редакторе WebProtégé. Описание этого концепта содержит два варианта названия концепта на русском языке (свойство `rdfs:label`): “*Степень многочлена*” и “*Степень полинома*”, название концепта на английском языке (свойство `rdfs:label`), определение (свойство `rdfs:comment`), указание мета-онтологического класса *SubKind* (свойство `gifo:SubKind`) и вышестоящий концепт *Число*.

OntoMath^{PRO} определяет объектные свойства, связывающие все концепты из иерархии объектов. Введенные свойства выражают следующие отношения: (1) отношение между объектом математического знания и разделом математики; (2) отношение “*определяется через*”; (3) ассоциатив-

ное отношение и (4) отношение между задачей и методом ее решения.

Представление материализованных отношений нацелено на моделирование *n*-местных отношений между математическими объектами, выражаемых с помощью *n*-местных предикатов. Средствами языка OWL такие отношения представлены в материализованном виде, т.е. в виде классов. Аргументы *n*-местных отношений описаны с помощью классов-ролей, экземпляры которых связаны с экземплярами материализованных отношений с помощью объектных свойств.

На лингвистическом уровне материализованное отношение чаще всего задается формой глагола, например, “*делить*”, “*принадлежать*”. На рис. 3 представлен пример отношения делимости. Аргументы этого отношения – два концепт-роли *Делимое* и *Делитель*, которые являются подклассами концепта-типа *Число*. Экземплярами материализованного отношения служат отношения между конкретными числами, как указано на рисунке. Экземпляры аргументов отношения связаны с экземпляром отношения с помощью объектного свойства `omp:hasArgument`.

Мета-онтологический уровень. При проектировании онтологии OntoMath^{PRO} учтены онтологические различия концептов-типов и концептов-ролей.

Тип – это концепт, который является семантически жестким и онтологически независимым [14, 15]. Например, концепт *Натуральное число* является типом, так как его существование не зависит от отношений с другими числами.

Роль – это концепт, который является семантически нежестким и онтологически зависимым.

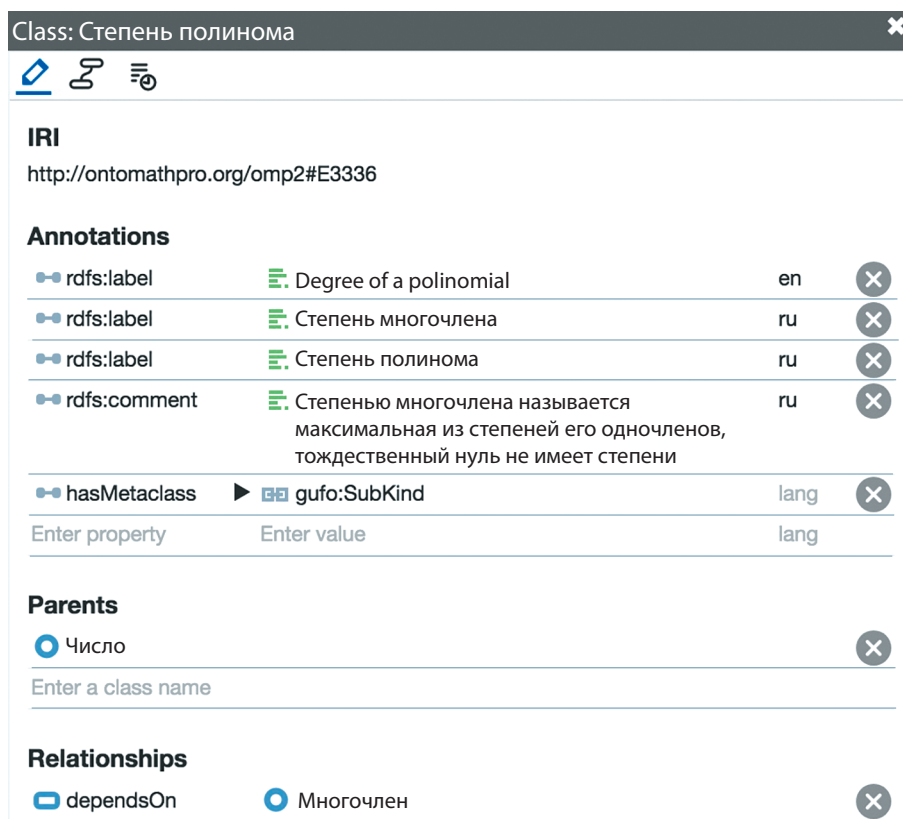


Рис. 2. Пример концепта Степень многочлена в редакторе WebProtégé.

Концепт-роль возникает только в силу каких-либо отношений с другим объектом [14, 15]. Например, концепт *Делитель* является ролью, которая возникает у числа (концепт *Число*) только в контексте операции деления. Концепты-роли привязаны к соответствующим концептам-типам с помощью отношения онтологической зависимости.

На мета-онтологическом уровне концепты из иерархии объектов аннотируются мета-онтологическими классами (такими как Тип, Роль, Релятор), которые определены в онтологии верхнего уровня UFO (Unified Foundation Ontology) [14].

Для аннотирования концептов онтологии OntoMath^{PRO} мета-онтологическими аннотациями использованы два подхода. В соответствии с первым из них аннотирование осуществляется с помощью предиката rdfs:type. Такой подход требует поддержки механизма OWL Punning (<https://www.w3.org/2007/OWL/wiki/Punning>), но позволяет задействовать принципы многоуровневого моделирования, в том числе онтологию MLT Ontology (<https://nemo.inf.ufes.br/projects/mlt/>). В соответствии со вторым подходом для аннотирования используется свойство omp2:hasMetaclass.

Лингвистический уровень онтологии OntoMath^{PRO} состоит из многоязычных лексиконов, определяющих способы выражения концептов из пред-

метной онтологии в русском (английском) языке. Каждый лексикон содержит:

- лексические единицы (однословные и многословные), обозначающие математические концепты (например, лексическая единица “матрица” используется для обозначения одноименного концепта *Матрица* из уровня предметной онтологии);
- формы лексических единиц (в разных падежах, числах);
- синтаксические деревья для многословных лексических единиц;
- синтаксические фреймы для лексических единиц-предикатов, которые описывают синтаксические аргументы заданного предиката, грамматические показатели аргументов и их связь с концептами онтологии.

Многоязычные лексиконы представлены в виде наборов Лингвистических открытых связанных данных (Linguistic Linked Open Data, LLOD, <http://linguistic-lod.org/>) с помощью онтологий OntoLex/Lemon (<https://www.w3.org/community/ontolex/>; <https://www.w3.org/2016/05/ontolex/>), LexInfo (<https://lexinfo.net/>) и PreMOn (Predicate Model for Ontologies, <https://premon.fbk.eu/>).

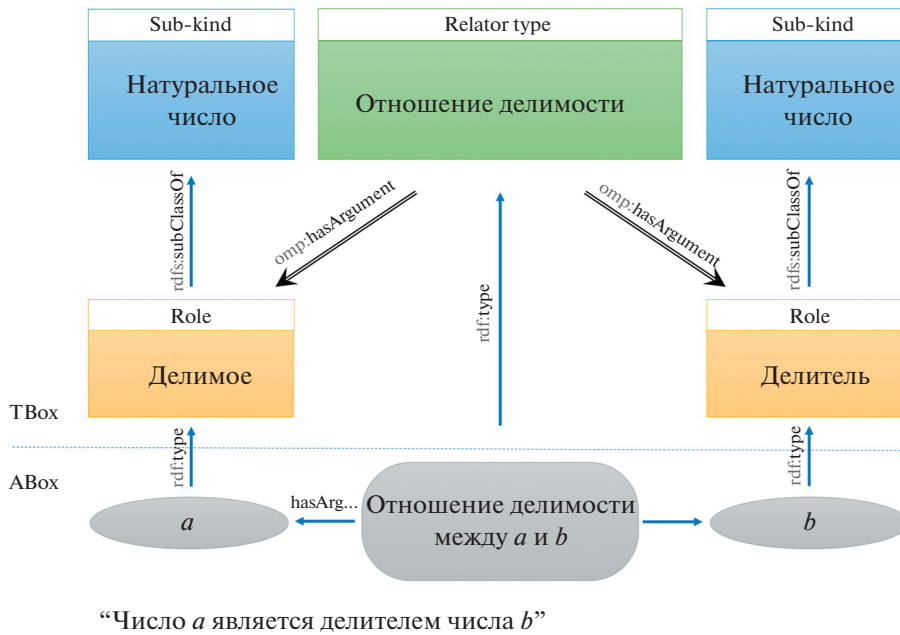


Рис. 3. Представление материализованных отношений.

Онтология $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ продолжает активно развиваться, ее текущая версия содержит более 4 тыс. концептов в иерархии объектов, отношения верхнего уровня в иерархии материализованных отношений, а также мета-онтологические описания для 600 концептов и лингвистические описания базовых концептов на русском и английском языках. В дальнейшем планируются разработка новых разделов онтологии и пополнение существующих разделов новыми концептами, разработка новых материализованных отношений между концептами и снабжение концептов новыми лингвистическими аннотациями.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОНТОЛОГИИ $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$

Одни из таких приложений связаны с разработанной нами экосистемой OntoMath .

OntoMath – это система онтологий, инструментов текстовой аналитики и приложений для управления математическим знанием [16]. Центральным ее компонентом является платформа семантической публикации. Она принимает на вход коллекцию математических документов в формате LaT_EX и автоматически строит семантическое представление документов в виде rdf -набора, интегрированного в облако LOD . Этот набор включает метаданные, компоненты логической структуры математических публикаций, математическую терминологию, математические формулы и представления, задающие связи терминов (концептов) с их символическими обозначениями в формулах. На базе сгенерированного rdf -

набора функционируют сервисы управления математическим знанием, в частности, сервис семантического поиска по математическим формулам ([17], <https://lobachevskii-dml.ru/mathsearch>), рекомендательная система для поиска и анализа математических статей [18] и система формирования рекомендаций по назначению математическим статьям индексов Универсальной десятичной классификации (УДК) [19].

Принципы моделирования онтологии $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ были применены при проектировании образовательной математической онтологии $\text{OntoMath}^{\text{Edu}}$ (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathEdu>), которая представляет знания из элементарной математики и используется для формирования образовательных курсов на основе современных цифровых платформ [20]. Онтология $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ была также использована при тестировании студентов математических специальностей для оценки уровня их компетенций. Тестирование предполагало построение взаимосвязей между рядом задач курса “Численные методы” и методами их решения. Проведенный эксперимент продемонстрировал эффективность примененного подхода.

Другие приложения онтологии $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ связаны с ее использованием в смежных областях и направлениях исследований.

В работах [21, 22] осуществлен перевод онтологии $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ на итальянский язык с дальнейшим ее использованием при разработке реко-

мендательных систем, связанных с обучающими математическими материалами.

В [23] онтология *OntoMath^{PRO}* использована для построения онтологии объектов научного знания SKOO (Scientific Knowledge Objects Ontology), которая в свою очередь предназначена для визуализации научного знания.

В [24] *OntoMath^{PRO}* использована в качестве компонента платформы для поиска документов в цифровых библиотечных каталогах.

В [25] онтология *OntoMath^{PRO}* использована в качестве одного из компонентов системы оценки качества данных в сенсорных сетях.

Таким образом, проект построения онтологии *OntoMath^{PRO}* уже нашел достаточно широкий спектр приложений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена онтология профессиональной математики *OntoMath^{PRO}*. Это первая семантическая веб-онтология профессионального математического знания, которая: (1) строго придерживается онтологических различий (ontological distinctions), определенных в онтологии верхнего уровня; (2) представляет математические отношения в качестве сущностей первого порядка; (3) содержит лингвистический уровень, который подробно описывает то, как математические концепты выражаются в тексте на естественном языке.

Основное научное значение полученных результатов состоит в том, что они связали между собой три различные области исследований: управление математическим знанием, онтологическое моделирование и Лингвистические открытые связанные данные (LLOD).

Проект построения онтологии *OntoMath^{PRO}* находится в развитии и предусматривает ее пополнение новыми разделами математики.

Онтология *OntoMath^{PRO}* распространяется под свободной лицензией Apache 2 и доступна в репозитории GitHub (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathPro/>) с возможностью ее пополнения с участием заинтересованных специалистов-математиков.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают признательность рецензентам за замечания, учет которых способствовал существенно улучшению содержания статьи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guarino N., Oberle D., Staab S.* In: *Staab S., Studer R.* (Eds.). *International Handbooks on Information Systems. Handbook on Ontologies*, 2th edition. N.Y.: Springer, 2009. P. 1–17. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-24750-0>
2. *Моисеев Е.И., Муромский А.А., Тучкова Н.П.* Об онтологии научного информационного пространства. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 48 с.
3. *Муромский А.А., Тучкова Н.П.* Представление математических понятий в онтологии научных знаний // *Онтология проектирования*. 2019. Т. 9. № 1 (31). С. 50–69. <https://doi.org/10.18287/2223-9537-2019-9-1-50-69>
4. *Тучкова Н.П.* О Семантической модели предметной области “Уравнения математической физики” // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2020. № 4 (20). С. 132–142. <https://doi.org/10.38028/ESI.2020.20.4.012>
5. *Serebryakov V.A., Ataeva O.M.* Ontology Based Approach to Modeling of the Subject Domain “Mathematics” in the Digital Library // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, № 8. P. 1920–1934. <https://doi.org/10.1134/S199508022108028X>
6. *Arndt S., Ion P., Runnwerth M., Schubotz M., Teschke O.* 10 Years Later: The Mathematics Subject Classification and Linked Open Data // In: *Kamareddine F., Sacerdoti Coen C.* (Eds.) *Intelligent Computer Mathematics. CICM 2021. Lecture Notes in Computer Science*. 2021. V. 12833. P. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81097-9_12
7. *Lange C.* Ontologies and languages for representing mathematical knowledge on the Semantic Web // *Semantic Web*. 2013. V. 4 (2). P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>
8. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Solovyev V.D., Zhiltsov N.G.* Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms // *Lobachevskii J. Math.* 2014. V. 35. № 4. P. 347–353. <https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>
9. *Kaliszyk C., Rabe F.* A Survey of Languages for Formalizing Mathematics // In: *Benzmüller C. and Miller B.* (Eds.) *CICM 2020 // Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 2020. V. 12236. P. 138–156. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_9
10. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*, DC: The National Academies Press, Washington, 2014. <https://doi.org/10.17226/18619>
11. *Ion P.D.F., Watt S.M.* The Global Digital Mathematics Library and the International Mathematical Knowledge Trust // *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 2017. V. 10383. P. 56–69. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6_5
12. *Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Невзорова О.А., Соловьёв В.Д.* Методы и средства семантического структурирования электронных математических документов // *ДАН*. 2014. Т. 457. № 6. С. 642–645. <https://doi.org/10.7868/S0869565214240049>

13. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* *OntoMath^{PRO} Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics* // In: Klinov P., Mourmstev D. (Eds.) *Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014)*. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. V. 468. P. 105–119. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9
14. *Guizzardi G. et al.* *UFO: Unified Foundational Ontology* // *Applied Ontology*. 2022. V. 17. № 1. P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>
15. *Лукашевич Н.В., Добров Б.В.* Проектирование лингвистических онтологий для информационных систем в широких предметных областях // *Онтология проектирования*. 2015. Т. 5. № 1 (15). С. 47–69.
16. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* *Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management* // *Communications in Computer and Information Science*. Springer, 2017. V. 706. P. 33–46. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3
17. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* *Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries* // *RPC 2017 – Proceedings of the 2nd Russian–Pacific Conference on Computer Technology and Applications*. 2017. С. 39–43. <https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>
18. *Елизаров А.М., Жижченко А.Б., Жильцов Н.Г., Кириллович А.В., Липачёв Е.К.* Онтологии математического знания и рекомендательная система для коллекций физико-математических документов // *ДАН*. 2016. Т. 467. № 4. С. 392–395. <https://doi.org/10.7868/S0869565216100042>
19. *Nevzorova O., Almukhametov D.* *Towards a recommender system for the choice of UDC code for mathematical articles* // *CEUR Workshop Proceedings*. 2021. V. 3036. P. 54–62. <http://ceur-ws.org/Vol-3036/paper04.pdf>
20. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* *OntoMath^{Edu}: Towards an Educational Mathematical Ontology* // *CEUR Workshop Proceedings*. 2020. V. 2634. P. 1–10. <http://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>
21. *Barana A., Di Caro L., Fioravera M., Marchisio M., Rabellino S.* *Ontology Development for Competence Assessment in Virtual Communities of Practice* // In: Penstein Rosé, C. et al. (Eds.) *Proceedings of the 19th International Conference Artificial Intelligence in Education (AIED 2018)*, part II. *Lecture Notes in Computer Science*. 2018. V. 10948. P. 94–98. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93846-2_18
22. *Di Caro L., Rabellino S., Fioravera M., Marchisio M.* *A Model for Enriching Automatic Assessment Resources with Free-Text Annotations* // *15th International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA 2018)*, October 21–23, 2018. Budapest, Hungary, 2018. P. 186–193.
23. *Daponte V., Falquet G.* *Une ontologie pour la formalisation et la visualisation des connaissances scientifiques* // *29es Journées Francophones d’Ingénierie des Connaissances, IC 2018, AFIA, Jul 2018, Nancy, France*. P. 129–136. [hal-01839572](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01839572). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01839572>
24. *Intarapaiboon P., Kesamoon C.* *Applying domain knowledge and academic information to enhance unknown-item search in OPAC* // *Malaysian Journal of Library & Information Science*. 2019. V. 24. № 1. P. 45–58. <https://doi.org/10.22452/mjlis.vol24no1.3>
25. *Vedurmudi A.P., Neumann J., Gruber M., Eichstädt S.* *Semantic Description of Quality of Data in Sensor Networks* // *Sensors*. 2021. V. 21 (6462). P. 1–21. <https://doi.org/10.3390/s21196462>

OntoMath^{PRO} – ONTOLOGY OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

A. M. Elizarov^a, A. V. Kirillovich^a, E. K. Lipachev^a, and O. A. Nevzorova^a

^a *Kazan (Privolzhsky) Federal University, Kazan, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

This article presents the first semantic web ontology of professional mathematical knowledge OntoMath^{PRO}. This ontology is designed to classify and systematize mathematical concepts. OntoMath^{PRO} ontology concepts are organized into two hierarchies: the hierarchy of mathematical objects and the hierarchy of materialized relations. When designing the ontology, the meta-ontological differences defined in the top-level ontology were taken into account; the division of concepts into types and roles was carried out. Relations between concepts are given in a reified form. Concepts-roles are arguments of reified relations. Multilingual dictionaries for extracting mathematical concepts from natural language texts have been defined in the ontology. These lexicons are presented as sets of linguistically related open data. The OntoMath^{PRO} project is developing and improving. Ontology is enriched with new branches of mathematics, and the areas of application of ontology continue to expand.

Keywords: ontology, ontology development, mathematical fact extraction, reified relation, mathematical knowledge management

О КРИТЕРИЯХ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

© 2022 г. Е. О. Кантонистова^{1,*}, И. В. Родионов^{2,**}

Представлено академиком РАН Д.А. Новиковым

Поступило 15.09.2022 г.

После доработки 23.10.2022 г.

Принято к публикации 30.10.2022 г.

Предложен метод проверки гипотезы об эквивалентности хвоста распределения данных с выбранным хвостом распределения – аналога гипотезы согласия для статистики экстремумов. Метод основан на новом преобразовании данных, переводящем k максимальных порядковых статистик выборки из стандартного равномерного закона $U[0, 1]$ в случайные величины, похожие в своем асимптотическом поведении на выборку из $U[0, 1]$ размера k . Доказано, что критерии, построенные по предложенному методу, являются состоятельными на максимально широкой альтернативе – отрицании основной гипотезы.

Ключевые слова: хвост распределения, критерий согласия, статистика экстремумов, эквивалентность

DOI: 10.31857/S2686954322600586

1. ВВЕДЕНИЕ

При построении вероятностных моделей данных в различных областях знаний возникают ситуации, когда вероятности редких событий не могут быть качественно описаны в рамках популярных моделей и требуют отдельного анализа. Такие ситуации возникают, в частности, в финансовых и страховых задачах, в задачах надежности и демографических исследованиях, когда “тело” распределения описывается, например, нормальным или логнормальным законом, а хвост – правильно меняющимся распределением. Более того, редкие (экстремальные) события могут быть сами по себе центральным объектом анализа, как, например, при изучении природных катаклизмов и катастроф, в задачах безопасности ядерной энергетики и других. Анализ таких событий является основным предметом изучения стохастической теории экстремумов, см. монографии [1, 2]. В настоящей работе нас будет интересовать статистическая часть этой теории.

По сравнению с оцениванием параметров, методам проверки гипотез в статистике экстремумов

посвящено не так много работ, см. обзор [3]. Это во многом связано с тем, что наиболее популярной (и, по сути, безальтернативной для практиков) моделью для хвостов распределений до сих пор является модель обобщенного распределения Парето [1, 2], которая не требует применения аппарата проверки гипотез. Однако в связи с тенденцией к увеличению объемов доступных данных становится возможным рассмотрение более узких (семипараметрических) моделей хвостов распределений, например, таких как модели хвостов распределений вейбулловского и лог-вейбулловского типов. Тем самым, возникает необходимость в разработке статистических критериев для выбора подходящей модели хвоста распределения данных, частным случаем которых являются критерии о принадлежности хвоста распределения какому-то определенному классу.

Для этой цели, по аналогии с классической статистикой, могут быть использованы критерии согласия, в статистике которых вместо неизвестных параметров распределений подставлены их оценки. Тем не менее эта задача в литературе практически не рассматривалась – единственным на текущий момент исследованием, посвященным задаче построения критериев согласия с хвостом распределения, является работа [4]. Однако фактически в этой работе были предложены критерии проверки не гипотезы согласия с хвостом распределения, а гипотезы о том, что хвост распределения пропорционален выбранно-

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

² Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ekantonistova@hse.ru

**E-mail: vecsell@gmail.com

му, что может привести к принципиально неверным выводам о хвосте распределения на практике при его использовании. Дополнительной мотивацией к изучению критериев согласия с хвостом распределения служит тот факт, что статистики критериев согласия часто используются для определения оптимального значения высокого уровня при оценивании параметров в рамках статистики экстремумов [5].

Для построения критериев согласия с хвостом распределения предлагается воспользоваться идеями, которые были применены при построении критериев согласия для цензурированных данных. При разработке последних в литературе преимущественно использовались 2 подхода: усечение статистики стандартного критерия согласия и специальные преобразования данных, см. обзор литературы в работе [6]. Преимущества и недостатки каждого из подходов рассмотрены в работе [4]. Достаточно полное описание критериев, полученных с помощью первого подхода, можно найти в монографии [7]. Однако в случае стандартной постановки статистики экстремумов, а именно, если для статистического анализа используются лишь k максимальных (или минимальных) порядковых статистик выборки размера n , где последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям

$$k \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad k/n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

статистики критериев согласия, построенных в рамках первого подхода, будут стремиться к нулю по вероятности, что делает этот подход бесполезным для нашей задачи. Далее будем полагать, что последовательности $k(n)$ и $k(n)/n$ являются монотонными с некоторого момента.

Ключевой для второго подхода является работа [8], в которой преобразование k максимальных порядковых статистик выборки из стандартного равномерного закона $U[0,1]$, переводящее их в выборку размера k из $U[0,1]$, было впервые использовано для построения критериев согласия по цензурированной выборке. Пусть U_1, \dots, U_n – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины из распределения $U[0,1]$, а $U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(n)}$ – вариационный ряд этой выборки. Тогда, как показано в [8],

$$Z_{(i)} = U_{(i)}/U_{(k)} \cdot (B_{k,n}(U_{(k)}))^{1/k}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

являются порядковыми статистиками выборки $\{Z_{(i)}\}_{i=1}^k$ из $U[0,1]$, где

$$B_{k,n}(x) = \sum_{j=k}^n C_n^j x^j (1-x)^{n-j}. \quad (3)$$

Далее, в рамках второго подхода для проверки гипотезы согласия $H_0 : F = F_0$ по порядковым статистикам $\{X_{(i)}\}_{i=1}^k$ выборки $\{X_{i}\}_{i=1}^n$ предлагается

подставлять в статистики стандартных критериев согласия величины $\{Z_{(i)}\}_{i=1}^k$ вместо $\{U_{(i)}\}_{i=1}^k$, где $U_{(i)} = F_0(X_{(i)})$ и $\{Z_{(i)}\}_{i=1}^k$ получены из $\{U_{(i)}\}_{i=1}^k$ согласно формуле (2). Тем самым, при верности нулевой гипотезы распределения статистик критериев согласия, полученных в рамках второго подхода, будут совпадать с распределениями статистик их стандартных аналогов, что, однако, не будет выполняться в случае верности альтернативной гипотезы. Другие подобные преобразования можно найти в работах [9, 10]. Однако, как выяснилось, критерии согласия с хвостом распределения, которые могут быть получены на основе преобразования (2), фактически проверяют гипотезу об асимптотической пропорциональности хвоста распределения наблюдений с хвостом выбранного распределения и, тем самым, обладают схожими недостатками с критериями, предложенными в работе [4].

В этой работе мы предложим новое преобразование данных, похожее на преобразование (2), результатом которого будут случайные величины, не являющиеся, однако, независимыми и распределенными по закону $U[0,1]$. Тем не менее “эмпирическая функция распределения”, построенная по этим величинам, в случае верности основной гипотезы будет сходиться к функции распределения стандартного равномерного закона. Это свойство данного преобразования позволит нам на его основе предложить метод построения критериев для проверки гипотезы согласия с хвостом распределения, т.е. о том, что хвост распределения асимптотически эквивалентен выбранному. Также мы показываем состоятельность предложенных критериев на максимально широкой альтернативной гипотезе – отрицании основной гипотезы.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть F – функция распределения. Определим ее правую граничную точку как $x_F^* = \inf\{x : \overline{F}(x) = 1\}$ и хвостовую функцию распределения как $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Будем говорить, что хвостовые функции распределения \overline{F}_0 и \overline{F}_1 эквивалентны (пишем $F_0 \overset{r}{\sim} F_1$), если их правые граничные точки совпадают, т.е. $x^* := x_{F_0}^* = x_{F_1}^*$, и выполнено соотношение

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{\overline{F}_0(x)}{\overline{F}_1(x)} = 1.$$

Правым хвостом функции распределения F назовем класс эквивалентности $T(\overline{F})$ хвостовых функций распределения по отношению $\overset{r}{\sim}$, т.е. для

функции распределения G свойство $G \overset{r}{\sim} F$ эквивалентно выполнению $\bar{G} \in T(\bar{F})$. Далее мы продолжим говорить о правых хвостах распределений, хотя все приведенные ниже рассуждения можно повторить и для левых хвостов. Определим гипотезу согласия с (правым) хвостом распределения F_0 как $H_0 : F_1 \overset{r}{\sim} F_0$. Отметим, что в работе [4] гипотеза согласия с хвостом распределения определялась как $H_0^T : F_1(x) = F_0(x)$ для всех достаточно больших x , однако стохастическая теория экстремумов является асимптотической наукой, и проверить на практике выполнение соотношения $F_1(x) = F_0(x)$ для всех $x > x_0$, в отличие от более слабого условия $F_1 \overset{r}{\sim} F_0$, может оказаться достаточно проблематичным.

Пусть (X_1, \dots, X_n) – н.о.р. случайные величины с непрерывной функцией распределения F_1 , а функция распределения F_0 тоже непрерывна. Предположим, что мы хотим проверить гипотезу H_0 по этой выборке. Для удобства перейдем к рассмотрению н.о.р. случайных величин $\{U_i\}_{i=1}^n$, где $U_i = F_0(X_i)$, и, тем самым, гипотезе $H'_0 : F \overset{r}{\sim} F_{U[0,1]}$, где $F = F_1(F_0^{\leftarrow})$ – функция распределения случайной величины U_1 , $F_0^{\leftarrow}(t) = \inf\{x : F_0(x) = t\}$ и $F_{U[0,1]}$ – функция распределения стандартного равномерного закона. Заметим, что выводы о правом хвосте распределения возможно делать только по максимальным членам вариационного ряда выборки, поэтому будем рассматривать только k максимальных членов вариационного ряда выборки $\{U_i\}_{i=1}^n$, где $k < n$.

Введем следующее преобразование k максимальных порядковых статистик выборки $\{U_i\}_{i=1}^n$,

$$V_{(i)} = \frac{1 - U_{(n-i+1)}}{1 - U_{(n-k+1)}} f_{k,n}(1 - U_{(n-k+1)}), \quad i = 1, \dots, k,$$

где семейство функций $\{f_{k,n}(x), x \in [0, 1]\}$ таково, что $f_{k,n}(k/n) \rightarrow 1$ и $\limsup_n f_{k,n}(x) \in [0, 1]$ для $x = x(n)$ с $\lim_n xn/k \neq 1$, если $k = k(n)$ удовлетворяет (1) при $n \rightarrow \infty$. Сохраняя связь с преобразованием (2), положим

$$f_{k,n}(x) = \frac{1}{2}((B_{k,n}(x))^{1/k} + (1 - B_{k+1,n}(x))^{1/k}), \quad (4)$$

где функция $B_{k,n}(x)$ определена в (3). Действительно, функция (4) удовлетворяет условиям, наложенным выше, поскольку, как несложно проверить, $(B_{k,n}(x))^{1/k} \rightarrow 1$ для $x = x(n)$ таких, что $\liminf_n xn/k \geq 1$, и $\limsup_n (B_{k,n}(x))^{1/k} < 1$ для $x =$

$x(n)$ таких, что $\limsup_n xn/k < 1$, если $k = k(n)$ удовлетворяет (1) при $n \rightarrow \infty$.

Назовем $F_{k,n}^*(x) = k^{-1} \sum_{i=1}^k I(V_{(i)} \leq x)$ эмпирической функцией распределения набора случайных величин $\{V_{(i)}\}_{i=1}^k$. Далее будем предполагать, что F дважды дифференцируема. Для формулировки результатов этой работы введем следующее условие, являющееся классическим для стохастической теории экстремумов: скажем, что функция распределения F удовлетворяет условию фон Мизеса [2], если

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{(1 - F(x))F''(x)}{(F'(x))^2} = -\gamma - 1, \quad (5)$$

где γ – индекс экстремального значения. В частности, в случае верности гипотезы H'_0 $\gamma = -1$ и $x^* = 1$.

Далее, обозначим через D пространство Скорохода, т.е. пространство непрерывных справа функций, имеющих предел слева, на $[0, 1]$. Следующая теорема является развитием классического результата Донскера, Колмогорова и Скорохода о сходимости нормированной разности эмпирической и теоретической функций распределения к броуновскому мосту (гауссовскому процессу $B(t)$ на отрезке $[0, 1]$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s, t) = \min(s, t) - st$).

Теорема 1. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^n$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F , удовлетворяющей условию (5). Предположим, что выполнена гипотеза H'_0 . Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям (1) и

$$\sqrt{k} \left| \frac{1 - F(k/n)}{k/n} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда процесс $y(t) = \sqrt{k}|F_{k,n}^*(t) - t|$ слабо сходится в D к броуновскому мосту $B(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Данная теорема позволяет строить критерии проверки гипотезы согласия H'_0 на основе статистик классических критериев согласия. В качестве примера рассмотрим критерии Колмогорова и Андерсона-Дарлингга; разумеется, приведенные ниже рассуждения могут быть адаптированы и для других критериев согласия. Обозначим через

$$D_{k,n}^* = \sup_{t \in [0,1]} |F_{k,n}^*(t) - t|, \quad W_{k,n}^* = \int_0^1 \frac{(F_{k,n}^*(t) - t)^2}{t(1-t)} dt$$

модификации статистик критериев согласия Колмогорова и Андерсона-Дарлингга проверки гипотезы $H_0^* : F = F_{U[0,1]}$ соответственно. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. Тогда, как следует из Теоремы 1, в случае выполнения условий (1) и (6) правила

если $\sqrt{k}D_{k,n}^* > K_{1-\alpha}$, то отвергнуть H_0' , (7)

если $kW_{k,n}^* > W_{1-\alpha}$, то отвергнуть H_0' (8)

являются критериями проверки гипотезы H_0' , асимптотическими имеющими уровень значимости α , где $K_{1-\alpha}$ и $W_{1-\alpha}$ – квантили уровня $1 - \alpha$ распределений Колмогорова и Андерсона-Дарлингга соответственно. Следующая теорема позволяет утверждать, что критерии (7) и (8) являются состоятельными на альтернативе $H_1' : H_0'$ неверна.

Теорема 2. Пусть $\{U_{i=1}^n\}$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F , удовлетворяющей условию (5). Предположим, что верна гипотеза H_1' , а последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет (1). Тогда для всех $t \in (0,1)$, кроме, может быть, одной точки

$$\sqrt{k}|F_{k,n}^*(t) - t| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

В данной работе предложен метод построения критериев проверки гипотезы согласия с хвостом распределения H_0' . Метод основан на новом преобразовании данных, который переводит k максимальных членов вариационного ряда выборки из стандартного равномерного закона в случайные величины, близкие по своему поведению к вариационному ряду выборки из стандартного равномерного закона размера k . В отличие от первой работы [4], посвященной данной задаче, в статье предложены критерии в точности для проверки гипотезы согласия с хвостом распределения и доказываются их состоятельность на максимально широкой альтернативе – отрицании основной гипотезы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа над разделами 2 и 3 выполнена И.В. Родионовым за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00035) в Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук.

ON PROCEDURES FOR TESTING EQUIVALENCE OF DISTRIBUTION TAILS

E. O. Kantonistova^a and I. V. Rodionov^b

^a National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

^b Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute) of RAS, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D.A. Novikov

We propose the method for testing the hypothesis about the equivalence of distribution tail of the observed data and certain distribution tail, it is the analogue of goodness-of-fit hypothesis for statistics of extremes. The method is based on the new data transformation, moving up k largest order statistics of a sample from standard uniform distribution $U[0, 1]$ to random variables asymptotically similar to a sample from $U[0, 1]$ of size k . We prove that tests built by the proposed method are consistent on the widest alternative – specifically, on the negation of the main hypothesis.

Keywords: distribution tail, goodness-of-fit test, statistics of extremes, equivalence

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J., Segers J.* Statistics of Extremes: Theory and Applications. N.Y.: Wiley. 2004. 498 p. <https://doi.org/10.1002/0470012382>
2. *de Haan L., Ferreira A.* Extreme Value Theory: An Introduction. N.Y.: Springer Verlag. 2006. 417 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-34471-3-8-3-642-33483-2>
3. *Hüsler J., Peng L.* Review of testing issues in extremes: in honor of Professor Laurens de Haan // *Extremes*. 2008. V. 11. № 1. P. 99–111. <https://doi.org/10.1007/s10687-007-0052-0>
4. *Kantonistova E.O., Rodionov I.V.* Analogues of classical goodness-of-fit tests for distribution tails // *Doklady Mathematics*. 2021. V. 103. I. 1. P. 35–38. <https://doi.org/10.1134/S1064562421010063>
5. *Danielsson J., Ergun L.M., de Haan L., De Vries C.* Tail Index Estimation: Quantile Driven Threshold Selection. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=17478>. 2016. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2717478>
6. *Goldmann C., Klar B., Meintanis S. G.* Data transformations and goodness-of-fit tests for type-II right censored samples // *Metrika*. 2015. V. 78. P. 59–83. <https://doi.org/10.1007/s00184-014-0490-z>
7. *D'Agostino R.B., Stephens M.A.* Goodness-of-Fit Techniques. New York: Marcel Dekker. 1986. 576 p. <https://doi.org/10.1201/9780203753064>
8. *Michael J.R., Schucany W.R.* A new approach to testing goodness of fit for censored samples // *Technometrics*. 1979. V. 21. P. 435–441. <https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489813>
9. *Lin C.-T., Huang Y.-L., Balakrishnan N.* A New Method for Goodness-of-Fit Testing Based on Type-II Right Censored Samples // *IEEE Transactions in Reliability*. 2008. V. 57. № 4. P. 633–642. <https://doi.org/10.1109/TR.2008.2005860>
10. *Fischer T., Kamps U.* On the existence of transformations preserving the structure of order statistics in lower dimensions // *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2011. V. 141. P. 536–548. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2010.06.028>

ВЫСОКОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

© 2022 г. Ю. А. Криксин^{1,*}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,**}

Поступило 18.04.2022 г.

После доработки 13.09.2022 г.

Принято к публикации 15.09.2022 г.

Предложен высокоточный и экономичный итерационный метод вычисления потенциала и напряженности электрического поля в трехмерном неоднородном пространственно периодическом диэлектрике, помещенном в первоначально однородное электрическое поле. В основе алгоритма лежит идея представления потенциала в виде суммы линейной функции и пространственно периодической поправки, которая может быть выражена в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа, удовлетворяющим соответствующим условиям периодичности. Для экономичной численной реализации предложенного алгоритма используется быстрое преобразование Фурье.

Ключевые слова: итерационные методы, оператор Лапласа, собственные функции, быстрое преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S2686954322600239

1. Задачи электростатики в пространственно периодических средах возникают естественным образом в ряде актуальных исследований в физической химии и материаловедении, где электрическое поле применяется в качестве способа управления состоянием системы [1]. Численное решение задач электростатики в основном осуществляется тремя группами методов, куда входят (а) разностные методы; (б) проекционные методы, такие как различные версии метода Галеркина; (в) метод интегральных уравнений [2–5]. Наряду с этими методами в ряде специфических задач используются спектральные методы, в которых искомое решение представляется в виде разложения по системе собственных функций соответствующего дифференциального оператора [4]. Спектральный подход эффективен в задачах с периодическими граничными условиями в однородной среде, поскольку в этом случае аналитическое решение представимо в виде разложения по тригонометрической системе функций. Однако дело обстоит иначе в случае неоднородных сред, так как тригонометрические функции, вообще говоря, не являются собственными функ-

циями дифференциального оператора задачи. Тем не менее тригонометрический базис в пространственно периодических задачах все еще является достаточно привлекательным для представления решения в виде линейной комбинации тригонометрических функций, когда характеристики среды являются плавно меняющимися функциями. В настоящей работе предложен аналог псевдоспектрального подхода, примененного к задачам теории полимеров [6], для решения задач электростатики в пространственно периодических диэлектрических средах с плавно меняющейся диэлектрической проницаемостью, на основе которого создан высокоточный экономичный итерационный метод вычисления потенциала и напряженности электрического поля с использованием быстрого преобразования Фурье.

2. Потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ электрического поля в среде с достаточно гладкой положительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, удовлетворяет уравнению в частных производных эллиптического типа [1]

$$\operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})) = \nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r})) = 0. \quad (1)$$

В случае неоднородного диэлектрика, помещенного в первоначально однородное электрическое поле, удобно представить искомый потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - (\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \quad (2)$$

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: kriksin@imamod.ru

**E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

где \mathbf{E}_0 – вектор напряженности электрического поля в однородной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью, равной среднему значению $\bar{\epsilon}$ диэлектрической проницаемости среды $\epsilon(\mathbf{r})$, а $\varphi(\mathbf{r})$ – добавочный потенциал. Подстановка правой части (2) в уравнение (1) приводит к следующему уравнению

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = (\mathbf{E}_0 - \nabla \varphi(\mathbf{r}), \nabla \ln \epsilon(\mathbf{r})). \quad (3)$$

Искомый добавочный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в правой части (2) удовлетворяет периодическим граничным условиям в пространственно периодической диэлектрической среде

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3) &= f(\mathbf{r}), \\ n_k \in Z, \quad V = |(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])| > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где в качестве функции f используются функции $\epsilon(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$, Z – множество целых чисел, $\{\mathbf{a}_k\}$ – базис в E^3 .

Отметим, что уравнение Пуассона относительно функции $\varphi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad (5)$$

в котором функции $\varphi(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ удовлетворяют условиям периодичности (4), определяет решение с точностью до постоянной составляющей. Поэтому в подпространстве потенциалов $\varphi(\mathbf{r})$ с нулевым средним значением уравнение (5) имеет единственное решение. Для такого решения задачи (5) с нулевой постоянной составляющей и граничными условиями (4) будем использовать обозначение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \nabla^{-2} \rho(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Уравнение (3) определяет добавочный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ также с точностью до постоянной составляющей, значение которой без ограничения физической общности можно положить равным нулю. Подставляя правую часть уравнения (3) в уравнение (6) вместо функции $\rho(\mathbf{r})$, получаем еще одну форму записи уравнения (3)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \nabla^{-2} (\mathbf{E}_0 - \nabla \varphi(\mathbf{r}), \nabla \ln \epsilon(\mathbf{r})) = F[\varphi(\mathbf{r}); \epsilon(\mathbf{r})]. \quad (7)$$

В отличие от уравнения (3) уравнение (7) подразумевает, что постоянная составляющая потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ равна нулю.

Для решения уравнения (7) с периодическими граничными условиями можно применить итерационный метод Пикара с положительным параметром τ

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(\mathbf{r}) &= (1 - \tau)\varphi_k(\mathbf{r}) + \tau F[\varphi_k(\mathbf{r}); \epsilon(\mathbf{r})], \\ \tau \in (0, 1], \quad \varphi_0(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

или другие, более быстро сходящиеся итерационные методы, в том числе многослойные [7, 8].

3. Рассмотрим экономичный способ вычисления оператора $F[\varphi(\mathbf{r}); \epsilon(\mathbf{r})]$ с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). С этой целью введем взаимный (обратный) базис $\{\mathbf{b}_j\}$, определяемый условиями

$$(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Каждая достаточно гладкая действительная периодическая функция $f(\mathbf{r})$ может быть разложена в равномерно сходящийся тригонометрический ряд Фурье, допускающий почленное дифференцирование (т.е. ряды Фурье для производных также сходятся равномерно),

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{q}_{\mathbf{m}}\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\mathbf{q}_{\mathbf{m}} = 2\pi(m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3), \quad m_k \in Z,$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – целочисленный вектор, Z – множество целых чисел, а коэффициенты ряда (10) определяются равенствами

$$f_{\mathbf{m}} = V^{-1} \int_{\Pi} f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}_{\mathbf{m}}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

$$\Pi = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3; 0 \leq x_k \leq 1\}.$$

Следующие дифференциальные операторы (градиент и лапласиан), примененные к достаточно гладкой функции $f(\mathbf{r})$, также выражаются в виде равномерно сходящихся рядов Фурье

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{r}) &= i \sum_{\mathbf{m}} \mathbf{q}_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{q}_{\mathbf{m}}\mathbf{r}), \\ \nabla^2 f(\mathbf{r}) &= - \sum_{\mathbf{m}} |\mathbf{q}_{\mathbf{m}}|^2 f_{\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{q}_{\mathbf{m}}\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Обращение лапласиана на множестве функций с нулевым средним значением происходит с помощью равенства

$$\nabla^{-2} f(\mathbf{r}) = - \sum_{\mathbf{m} \neq 0} |\mathbf{q}_{\mathbf{m}}|^{-2} f_{\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{q}_{\mathbf{m}}\mathbf{r}). \quad (13)$$

Соотношения (10)–(13) лежат в основе высокоточного вычисления градиента и лапласиана функции на равномерной сетке с помощью дискретного преобразования Фурье, когда высокочастотными гармониками функции можно пренебречь.

Для вычисления коэффициентов Фурье (12) воспользуемся формулой прямоугольников на равномерной сетке в параллелепипеде Π

$$\mathbf{r}_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^3 x_k^{(n_k)} \mathbf{a}_k, \quad (14)$$

где

$$x_k^{(n_k)} = n_k / N_k, \quad n_k = 0, 1, \dots, N_k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (15)$$

полагая

$$f_{\mathbf{m}} = (N_1 N_2 N_3)^{-1} \sum_{\mathbf{n}} f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}}) \exp \left(-2\pi i \sum_{k=1}^3 m_k n_k / N_k \right), \quad (16)$$

$$\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbf{N},$$

где \mathbf{N} обозначает конечное множество целочисленных векторов \mathbf{m} и \mathbf{n} , компоненты которых принимают целые неотрицательные значения, описанные соотношениями (15). Отметим тесную связь формулы прямоугольников на отрезке прямой для тригонометрических полиномов и квадратурных формул Гаусса для полиномов Чебышева [9], а именно: формула прямоугольников на равномерной сетке с числом узлов N является точной для тригонометрических полиномов степени n , где $n < N/2$ и, тем самым, выполняет роль высокоточной формулы Гаусса на множестве периодических функций.

Равенство (16) представляет собой с точностью до множителя дискретное преобразование Фурье сеточной функции $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$. Восстановление сеточной функции $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ по ее коэффициентам (16) происходит с помощью обратного дискретного преобразования Фурье

$$f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}} \exp \left(2\pi i \sum_{k=1}^3 m_k n_k / N_k \right), \quad (17)$$

$$\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

Соотношения (16) и (17) позволяют использовать алгоритм БПФ для высокоточного и экономичного вычисления коэффициентов Фурье и восстановления по ним исходной сеточной функции. Для вычисления коэффициентов Фурье дискретных аналогов дифференциальных операторов (12) градиента $\tilde{\nabla} f_{\mathbf{m}}$, лапласиана $\tilde{\nabla}^2 f_{\mathbf{m}}$ и обращения лапласиана (13) $\tilde{\nabla}^{-2} f_{\mathbf{m}}$ сеточной функции $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ применяются соответственно соотношения

$$\tilde{\nabla} f_{\mathbf{m}} = i \mathbf{q}_{j(\mathbf{m})} f_{j(\mathbf{m})}, \quad \tilde{\nabla}^2 f_{\mathbf{m}} = -|\mathbf{q}_{j(\mathbf{m})}|^2 f_{j(\mathbf{m})} \quad (18)$$

и

$$\tilde{\nabla}^{-2} f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} -|\mathbf{q}_{j(\mathbf{m})}|^{-2} f_{j(\mathbf{m})}, & |\mathbf{q}_{j(\mathbf{m})}| > 0, \\ 0, & |\mathbf{q}_{j(\mathbf{m})}| = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\mathbf{j}(\mathbf{m}) = (j(m_1, N_1), j(m_2, N_2), j(m_3, N_3)), \quad (20)$$

$$j(m, N) = \begin{cases} m, & 2m \leq N; \\ m - N, & 2m > N. \end{cases} \quad (21)$$

Дискретные аналоги градиента, лапласиана и обращения лапласиана сеточной функции $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ вычисляются по формуле (17) обратного дискретного преобразования Фурье с заменой коэффициентов $f_{\mathbf{m}}$ соответственно на коэффициенты $\tilde{\nabla} f_{\mathbf{m}}$, $\tilde{\nabla}^2 f_{\mathbf{m}}$ и $\tilde{\nabla}^{-2} f_{\mathbf{m}}$, определенные выше в (18)–(21).

Отметим, что в сравнении с широко распространенными разностными аппроксимациями дифференциальных операторов [2], введенные здесь их дискретные аналоги (18)–(21) обладают определенным преимуществом. Они совпадают с исходными операторами (12) и (13) в точках сетки (14), (15) на множестве конечных линейных комбинаций тригонометрических функций вида (10), если компоненты индексов гармоник удовлетворяют неравенствам $2m_k < N_k$ ($k = 1, 2, 3$), причем сами эти линейные комбинации могут быть использованы для вычисления функций и соответствующих операторов (12) и (13) во всех точках параллелепипеда Π , а не только в узлах сетки.

Замечание. Стремление к нулю коэффициентов разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$ в уравнении (7) должно быть достаточно быстрым. Для простоты понимания условий, накладываемых на спектр функции $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$, рассмотрим одномерное уравнение (7). Если шаг равномерной сетки по пространственной переменной равен h , то пространственная частота Найквиста равна $(2h)^{-1}$. Следовательно, выбор шага сетки h должен производиться так, чтобы частичная тригонометрическая сумма ряда Фурье векторной функции $\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r})$ с гармониками, включающими волновые числа q , удовлетворяющие неравенству

$|q| \leq \pi h^{-1}$, аппроксимировала исходный ряд и его производную с достаточной точностью, определяемой конкретным приложением. Отметим, что в правую часть уравнения (7) входит скалярное произведение градиентов функции $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$ и искомого добавочного потенциала $\varphi(\mathbf{r})$. Если каждая из этих функций содержит гармоники с модулем волнового числа πh^{-1} , то их скалярное произведение может содержать гармоники с модулем волнового числа $2\pi h^{-1}$, т.е. включать пространственные частоты, превышающие частоту Найквиста. Поэтому ограничение на шаг сетки должно быть усилено по меньшей мере вдвое: значимые гармоники функции $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$ (т.е. те, которые передают существенную информацию о функции) должны включать только волновые вектора с длинами $|q| \leq \pi(2h)^{-1}$. В случае многомерного уравнения (7) под q следует понимать каждую из независимых компонент волнового вектора $\mathbf{q}_{\mathbf{m}}$.

Кратко опишем процедуру вычисления правой части уравнения (7):

1. Последовательно полагаем функцию $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ равной $\varphi(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ и $\ln \varepsilon(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$, применяя затем к ней каждый раз дискретное преобразование Фурье (16) для вычисления коэффициентов Фурье $f_{\mathbf{m}}$, находя векторные коэффициенты $\tilde{\nabla} f_{\mathbf{m}}$ в соответствии с левой формулой (18) и вычисляя дискретный ана-

лог градиента $\tilde{\nabla}f(\mathbf{r}_n)$ по формуле (17), в которой скалярные коэффициенты f_m заменены на векторные коэффициенты $\tilde{\nabla}f_m$.

2. Вычисляем скалярное произведение $\rho(\mathbf{r}_n) = (E_0 - \tilde{\nabla}\varphi(\mathbf{r}_n), \tilde{\nabla}\ln\varepsilon(\mathbf{r}_n))$, где вектора $\tilde{\nabla}\varphi(\mathbf{r}_n)$ и $\tilde{\nabla}\ln\varepsilon(\mathbf{r}_n)$ уже найдены на предыдущем шаге, и полагаем функцию $f(\mathbf{r}_n)$ равной $\rho(\mathbf{r}_n)$, применяя к ней дискретное преобразование Фурье (16) для вычисления коэффициентов Фурье f_m , находя величины $\tilde{\nabla}^{-2}f_m$ в соответствии с формулой (19) и вычисляя дискретный аналог обращения лапласиана $\tilde{\nabla}^{-2}f(\mathbf{r}_n) = \tilde{\nabla}^{-2}\rho(\mathbf{r}_n)$ по формуле (17), в которой коэффициенты f_m заменены на коэффициенты $\tilde{\nabla}^{-2}f_m$.

Результатом применения указанных выше двух шагов является вычисление значений правой части $F[\varphi(\mathbf{r}); \varepsilon(\mathbf{r})]$ уравнения (7) в узлах сетки (14). Далее для численного решения уравнения (7) следует применить итерационный процесс (8) или какой-либо иной метод, например, из работ [7, 8].

Вычислительная трудоемкость прямого (16) и обратного (17) дискретных преобразований Фурье методом БПФ оценивается величиной порядка $O(M \log M)$ операций, где $M = N_1N_2N_3$. Указанная оценка и возможность эффективного распараллеливания алгоритмов БПФ [10] предоставляют возможность численного решения трехмерных задач электростатики в периодических диэлектрических средах итерационными методами с использованием большого числа узлов сетки в параллелепипеде Π за реальное время.

4. Применим предложенный выше алгоритм для расчета электрического поля в модельных одномерной и трехмерной пространственно периодических диэлектрических средах, состоящих из компонентов А и В, каждый из которых характеризуется значением диэлектрической проницаемости ε_A и ε_B соответственно.

Сначала рассмотрим одномерную среду с ламеллярной морфологией, положив объемные доли компонентов А и В соответственно равными

$$\eta_A(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi x)], \quad (22)$$

$$\eta_B(x) = 1 - \eta_A(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Локальную диэлектрическую проницаемость среды определим следующим образом

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_A\eta_A(x) + \varepsilon_B\eta_B(x), \quad \varepsilon_A = 4.5, \quad \varepsilon_B = 2.5. \quad (23)$$

Однородное электрическое поле $E_0 = 1$ считаем направленным вдоль оси x . Уравнение (3) относительно добавочного потенциала $\varphi(x)$ в этом случае принимает вид

$$\varphi_{xx}(x) = (E_0 - \varphi_x(x), (\ln \varepsilon(x))_x), \quad E_0 = 1 \quad (24)$$

с периодическим граничным условием $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.

Для применения вычислительного алгоритма, описанного в пп. 2 и 3, рассмотрим равномерную сетку $x_n = n/N$ ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) на отрезке $[0, 1]$, где $N = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 10$). Отметим, что коэффициенты разложения функции $(\ln \varepsilon(x))_x = \varepsilon_x(x)/\varepsilon(x)$ в тригонометрический ряд Фурье (по функциям $\exp(i2\pi nx)$) достаточно быстро стремятся к нулю, так что при выполнении неравенства $|n| \leq 20$ частичная сумма этого ряда аппроксимирует функцию $(\ln \varepsilon(x))_x$ с точностью 12–13 значащих цифр. Дальнейшее увеличение числа членов ряда при стандартной длине мантиссы 16 действительного числа нецелесообразно, поскольку оно не приводит к увеличению точности вычислений, так как гармоники с большими значениями номеров содержат только шум с характерными значениями амплитуд высших гармоник порядка $\sim 10^{-15}$. Суммирование таких рядов представляет собой хорошо известную некорректно поставленную задачу [11]. Анализ гармоник численного решения $\varphi(x)$ и его первой производной $\varphi_x(x)$ показывает, что максимальная достигаемая точность вычислений этих величин составляет 12–14 значащих цифр. Поэтому для вычисления коэффициентов Фурье данных функций достаточно использовать сетки с числом узлов $N = 32, 64$ и использовать частичные суммы их тригонометрических рядов, включающие гармоники с номерами $|n| \leq 20$. Сетки с большим числом N узлов не улучшают точность вычислений. В качестве иллюстраций на рис. 1 приведены графики напряженности электрического поля (рис. 1а)

$$E(x) = -\Phi_x(x) = E_0 - \varphi_x(x) \quad (25)$$

и плотности энергии электрического поля (рис. 1б)

$$\rho_E(x) = \frac{1}{2}\varepsilon(x)E^2(x). \quad (26)$$

Перейдем к расчету электрического поля в трехмерной пространственно периодической диэлектрической среде, имеющей морфологию алмаза [12]. Объемные доли компонентов А и В, использованные в расчетах, имеют вид

$$\eta_A(\mathbf{r}) = 0.5 + 0.044[\cos(2\pi(x + y - z)) + \cos(2\pi(x - y + z)) + \cos(2\pi(-x + y + z)) - \cos(2\pi(x + y + z))], \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad (27)$$

$$\eta_B(\mathbf{r}) = 1 - \eta_A(\mathbf{r}),$$

а диэлектрическая проницаемость среды определяется равенством

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_A\eta_A(\mathbf{r}) + \varepsilon_B\eta_B(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_A = 4.5, \quad \varepsilon_B = 2.5. \quad (28)$$

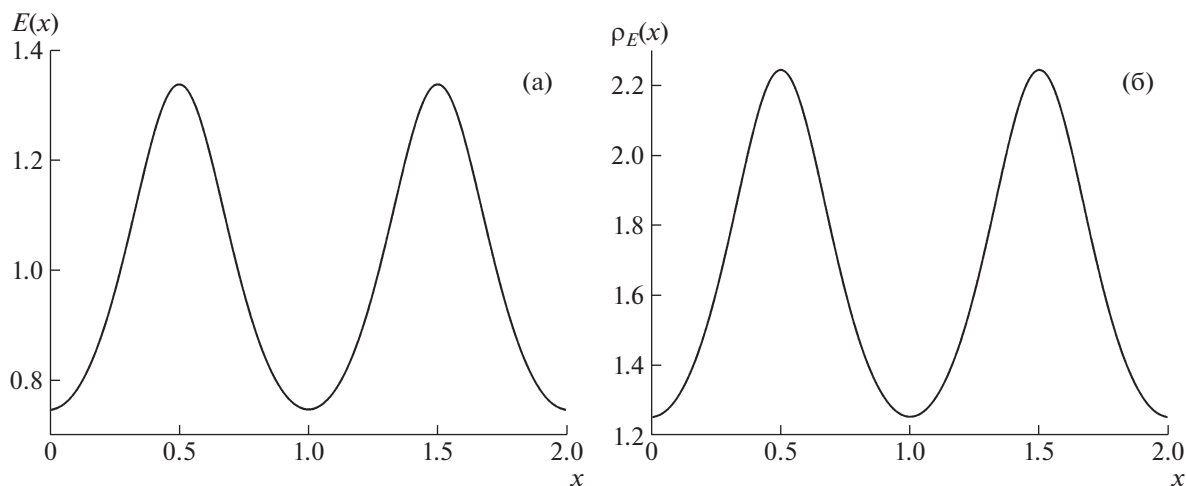


Рис. 1. Потенциал $\Phi(x)$ (а) и напряженность $E(x)$ (б) электрического поля, определяемые уравнениями (24) и (25).

С помощью предложенного выше численного алгоритма вычисляем добавочный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, удовлетворяющий уравнению (3) и условиям периодичности

$$f(x + n_1, y + n_2, z + n_3) = f(x, y, z), \quad n_k \in Z. \quad (29)$$

Для определения численного решения использовалась равномерная сетка в единичном кубе с числом узлов 32^3 и 64^3 . Точность вычисления напряженности электрического поля в любой точке

куба составляла 6 и 10 значащих цифр соответственно. Для численной сходимости итераций с относительной точностью 10^{-13} потребовалось 9 итераций по методу Ng [7] или 12 итераций метода последовательных приближений (8) при $\tau = 1$.

На рис. 2 представлена поверхность уровня плотности энергии электрического поля

$$\rho_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{r}) |\mathbf{E}_0 - \nabla \varphi(\mathbf{r})|^2 = \overline{\rho_E(\mathbf{r})} = 1.738, \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_0 = (1, 0, 0),$$

где $\overline{\rho_E(\mathbf{r})}$ обозначает среднее значение $\rho_E(\mathbf{r})$ в единичном кубе.

В заключение еще раз отметим, что при фиксированном числе узлов сетки точность численного решения существенно зависит от скорости убывания коэффициентов Фурье функции $\ln \varepsilon(\mathbf{r})$ с ростом номеров гармоник. Чем выше скорость убывания коэффициентов Фурье, тем более точно вычисляется решение.

Предложенный выше метод решения уравнения (1) может быть использован и для других граничных условий, эффективно сводящихся к периодическим, таких как однородные граничные условия первого рода и условия отражения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят суперкомпьютерный комплекс НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова и центр информационных технологий Гронингского университета (Нидерланды) за предоставленную возможность проведения расчетов.

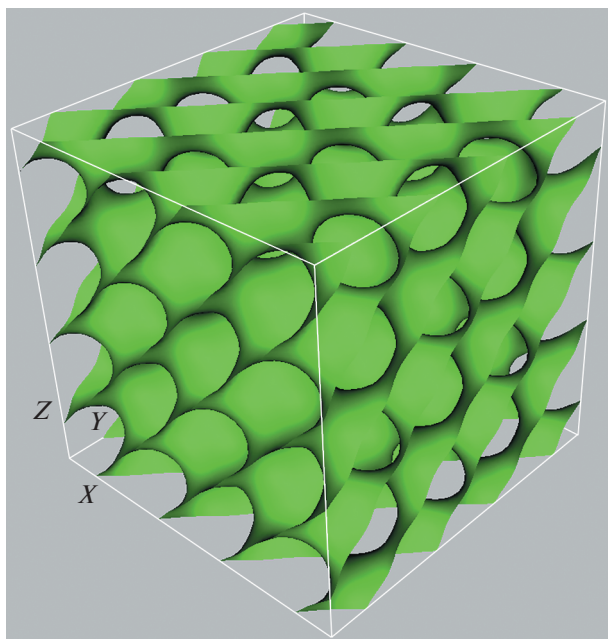


Рис. 2. Поверхность уровня $\rho_E(\mathbf{r}) = 1.738$ плотности энергии электрического поля в кубе с ребром 2, содержащем 8 элементарных единичных кубов. Оси X , Y и Z направлены вдоль ребер куба.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2019-1623.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matsen M.W.* Electric Field Alignment in Thin Films of Cylinder-Forming Diblock Copolymer // *Macromolecules*, 2006, V. 39, С. 5512–5520. <https://doi.org/10.1021/ma060456m>
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.
3. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin methods. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio : Springer-Verlag, 1984. 309 с.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
5. *Dworsky L.N.* Introduction to Numerical Electrostatics Using MATLAB. New Jersey: Wiley, 2014. 438 с.
6. *Fredrickson G.H.* The Equilibrium Theory of Inhomogeneous Polymers. New York: Oxford University Press, 2006. 452 с.
7. *Ng K.-Ch.* Hypernetted chain solutions for the classical one-component plasma up to $r = 7000$ // *J. Chem. Phys.* 1974. V. 61. С. 2680–2689. <https://doi.org/10.1063/1.1682399>
8. *Anderson D.G.* Iterative Procedures for Nonlinear Integral Equations // *Journal of the ACM.* 1965. V. 12. № 4. С. 547–560. <https://doi.org/10.1145/321296.321305>
9. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
10. *Kriksin Y.A., Khalatur P.G.* Parallel Algorithm for 3D SCF Simulation of Copolymers With Flexible and Rigid Blocks // *Macromol. Theory Simul.* 2012. V. 21. № 6. С. 382–399. <https://doi.org/10.1002/mats.201100116>
11. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
12. *Erukhimovich I., Kriksin Y.* Thermodynamics of 3D diamond-like epitaxial (film) morphologies on 1D modulated substrate: Weak crystallization theory // *J. Chem. Phys.* 2019. V. 150. № 224701. <https://doi.org/10.1063/1.5108642>

A HIGH-ACCURACY ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEMS OF ELECTROSTATICS IN A NONHOMOGENEOUS SPATIALLY PERIODIC DIELECTRIC MEDIUM

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

A high-precision and economical iterative method is proposed for calculating the potential and the strength of the electric field in a three-dimensional inhomogeneous spatially periodic dielectric placed in an initially homogeneous electric field. The algorithm is based on the idea of representing the potential as a sum of a linear function and a spatially periodic correction, which can be expressed as an expansion in eigenfunctions of the Laplace operator that satisfies the appropriate periodicity conditions. For an economical numerical implementation of the proposed algorithm, the fast Fourier transform is used.

Keywords: iterative methods, Laplace operator, eigenfunctions, fast Fourier transform

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. М. В. Николаев^{1,2,*}, А. А. Никитин^{1,3,**}, У. Дикман^{4,5,6,***}

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 29.09.2022 г.

После доработки 13.11.2022 г.

Принято к публикации 17.11.2022 г.

В данной работе проводится анализ системы нелинейных интегральных уравнений, которая возникает в результате трехпараметрического замыкания третьих пространственных моментов в модели логистической динамики У. Дикмана и Р. Лоу во многовидовом случае. Конкретно, исследуются условия, при которых решение данной системы является устойчивым относительно параметров замыкания. Для этого исходная система уравнений представляется в виде единого операторного уравнения в банаховом пространстве специального вида, после чего применяется обобщенный принцип неподвижной точки.

Ключевые слова: функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954322600604

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается трехпараметрическое семейство систем нелинейных интегральных уравнений, которые описывают состояние равновесия при замыкании третьих моментов в пространственной логистической модели У. Дикмана и Р. Лоу, [1, 2]. Решения данных систем исследуются на устойчивость относительно параметров замыкания. В разделе 2 работы дано краткое описание модели, а также описано исследуемое семейство систем уравнений. В разделе 3 проводится переформулировка исходных систем в виде единых операторных уравнений над специаль-

ным банаховым пространством. Основные результаты статьи касательно исследования устойчивости решений построенных уравнений приводятся в разделе 4.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Модель

Рассмотрим n -видовое сообщество неподвижных организмов, обитающих в пространстве \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$). Введем следующие гомогенные по времени и пространству биологические характеристики:

1. $d_i \geq 0$ – естественная смертность вида i ,
2. $s_{ij} \geq 0$ – агрессивность вида i по отношению к виду j ,
3. $b_i > 0$ – интенсивность рождения новых особей вида i ,
4. $m_i = m_i(x)$ – ядра разброса особей вида i ,
5. $w_{ij} = w_{ij}(x)$ – ядра конкуренции между видами i и j .

При этом все ядра разброса и конкуренции являются неотрицательными, радиально симметричными, интегрируемыми функциями, с L_1 -нормой, равной 1, которые исчезают на бесконечности. Дополнительно предположим, что ядра конкуренции существенно ограничены. Ядра

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

³ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

⁴ Высший университет Окинавского института науки и технологий, Онна, Япония

⁵ Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

⁶ Высший университет повышения квалификации, Хаяма, Япония

*E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru

**E-mail: nikitin@cs.msu.ru

***E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at

разброса описывают плотности вероятностей случайных величин, определяющих положение потомков относительно своих родителей. Ядра конкуренции задают пространственную структуру конкуренции между индивидами различных видов.

Описанная модель является стохастической, поэтому вводятся так называемые пространственные моменты — усредненные статистические характеристики сообщества. Момент k -го порядка будем обозначать через:

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_k, t).$$

Данная величина описывает среднюю плотность в момент времени t наборов из k особей, в которых p -я особь относится к виду i_p , а сдвиг между p -й особью и первой равен x_p .

2.2. Система равновесия

В настоящей статье мы будем работать с состоянием равновесия сообщества, которое характеризуется отсутствием динамики моментов во времени (таким образом, моменты перестают зависеть от t). В случае трехпараметрического замыкания третьих моментов оно описывается следующей системой интегральных уравнений (подробнее см. в [2]):

$$\left\{ \begin{aligned} 0 = & 2\delta_{ij}\bar{m}_i(x)M_i + [(\bar{m}_i + \bar{m}_j) * M_{ij}](x) - \\ & - (\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \tilde{\alpha})(d_i + d_j) + \\ & + \bar{w}_{ij}(x) + \bar{w}_{ji}(x))M_{ij}(x) - \\ & - \tilde{\beta} \sum_{k=1}^n \left(\frac{[\bar{w}_{ik} * M_{jk}](-x)}{M_j} + \frac{[\bar{w}_{jk} * M_{ik}](x)}{M_i} \right) M_{ij}(x) - \\ & - \tilde{\gamma} \sum_{k=1}^n \frac{[\bar{w}_{ik} M_{ik} * M_{kj}](x) + [\bar{w}_{jk} M_{kj} * M_{ik}](x)}{M_k} \\ & - \tilde{\beta} M_i M_j \sum_{k=1}^n (s_{ik} + s_{jk}) M_k, \\ & i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$ — свертка функций f и g , $\bar{m}_i(x) = b_i m_i(x)$, $\bar{w}_{ij}(x) = s_{ij} w_{ij}(x)$, а $\tilde{\alpha} = \alpha/(\alpha + \gamma)$, $\tilde{\beta} = \beta/(\alpha + \gamma)$, $\tilde{\gamma} = \gamma/(\alpha + \gamma)$ являются параметрами замыкания, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $\alpha + \gamma \neq 0$. Числа M_i и функции $M_{ij}(x)$ — это первые и вторые пространственные моменты сообщества соответственно, которые являются неизвестными в данной системе. На эти величины накладываются дополнительные условия [3]:

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow +\infty} M_{ij}(x) = M_i M_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Будем называть систему (1) системой равновесия.

3. ОПЕРАТОР РАВНОВЕСИЯ

3.1. Пространство $(\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$

Для дальнейшего исследования переформулируем систему (1) в виде единого операторного уравнения. Сначала сделаем замену переменных вида $Q_{ij} = M_{ij}/M_i$. Из условий (2) следует, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow +\infty} Q_{ij}(x) = M_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

В статье [6] было введено пространство $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N)$, состоящее из элементов вида $f = \mathcal{F}f + \mathcal{N}f$, где $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{N}f \in \mathbb{R}$. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\widehat{L}_1} = \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f|.$$

Будем искать Q_{ij} в $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N)$. В таком случае из условий (3) получим, что $\mathcal{N}Q_{ij} = M_j$.

Рассмотрим пространство $(\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$ матриц размера $n \times n$, элементами которых являются функции из $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N)$. Нетрудно показать, что оно также является банаховым относительно нормы

$$\|F\|_{n \times n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|F_{ij}\|_{\widehat{L}_1},$$

где $F = [F_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, $F_{ij} \in \widehat{L}_1(\mathbb{R}^N)$. В дальнейшем также будем считать совокупность неизвестных Q_{ij} матрицей $Q \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$.

3.2. Построение оператора равновесия

Определим несколько вспомогательных операторов, действующих в $(\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$:

$$\mathcal{C}F = [[(m_i + m_j) * F_{ij}]]_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}},$$

$$\mathcal{S}F = \left[\sum_{k=1}^n ([\bar{w}_{ik} F_{ik} * F_{kj}] + [\bar{w}_{jk} F_{kj} * F_{ik}]) \right]_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}},$$

$$\mathcal{R}F = \left[\mathcal{N} F_{ij} \sum_{k=1}^n (s_{ik} + s_{jk}) \mathcal{N} F_{ik} \right]_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}},$$

$$(\mathcal{P}F)(x) = \left[\sum_{k=1}^n ([\bar{w}_{ik} * F_{jk}](-x) + [\bar{w}_{jk} * F_{ik}](x))F_{ij}(x) \right]_{i=1, \bar{n}, j=1, \bar{n}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \max_{i=1, \bar{n}} b_i, & \nu &= 2 \max_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} \|\bar{w}_{ij}\|_{BL_1}, \\ \xi &= 2 \max_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} s_{ij}, & \eta &= \max_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} \|\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{ji}\|_{BL_1}, \end{aligned}$$

где

$$\|f\|_{BL_1} = \max \left\{ \|f\|_{L_1}, \operatorname{esssup}_{\mathbb{R}^N} |f| \right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Для любых элементов $F \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}F\|_{n \times n} &\leq \mu \|F\|_{n \times n}, & \|\mathcal{S}F\|_{n \times n} &\leq \nu \|F\|_{n \times n}^2, \\ \|\mathcal{R}F\|_{n \times n} &\leq \xi \|F\|_{n \times n}^2, & \|\mathcal{P}F\|_{n \times n} &\leq \eta \|F\|_{n \times n}^2. \end{aligned}$$

Определим оператор $\mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$, который преобразует элементы $F \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$ по правилу:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})F &= \Omega \odot (2M + \mathcal{C}F - W \odot F - \\ &- \tilde{\beta}\mathcal{P}F - \tilde{\gamma}\mathcal{S}F - \tilde{\beta}\mathcal{R}F). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{diag}\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n\}, \\ W &= [\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{ji}]_{i=1, \bar{n}, j=1, \bar{n}}, \end{aligned}$$

$$\Omega = [(\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \tilde{\alpha})(d_i + d_j))]_{i=1, \bar{n}, j=1, \bar{n}}^{-1},$$

а под \odot подразумевается покомпонентное умножение матриц. Можно видеть, что с точностью до алгебраических преобразований, а также с учетом новых переменных система равновесия (1) совпадает с операторным уравнением $Q = \mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})Q$ в покомпонентной форме. Будем называть оператор (4) оператором равновесия. Таким образом, разрешимость системы равновесия сведена к существованию неподвижной точки оператора равновесия.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕТРИВИАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

4.1. Условия разрешимости

В работе [5] были найдены условия на параметры замыкания и биологические параметры модели, которые в силу теоремы 2 из [4], а также

представления оператора равновесия в виде суммы компактного и сжимающего операторов, обеспечивают существование неподвижной точки оператора (4). Положим:

$$\begin{aligned} \omega &= \max_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} |\Omega_{ij}| = \\ &= \left(\min_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} |\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \tilde{\alpha})(d_i + d_j)| \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что параметры биологической модели и замыкания подобраны так, что величина ω определена корректно, т.е. выполнено условие

$$\min_{\substack{i=1, \bar{n} \\ j=1, \bar{n}}} |\tilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \tilde{\alpha})(d_i + d_j)| > 0. \quad (5)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1 ([5]). Пусть выполнено условие (5), $|\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| > 0$, и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности s_{ij} , не равный нулю. Пусть также

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega} \right)^2 - 8(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu) \sum_{i=1}^n b_i \geq 0, \quad (6)$$

а положительное число R таково, что

$$\begin{cases} \omega(\eta + 2(|\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}|\nu)R) < 1 \\ -\mu - \eta + \frac{1}{\omega} - \sqrt{D} \\ \frac{2(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)}{2(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)} \leq R \leq \frac{-\mu - \eta + \frac{1}{\omega} + \sqrt{D}}{2(|\tilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\tilde{\gamma}|\nu)}, \end{cases} \quad (7)$$

тогда у оператора $\mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ существует нетривиальная неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле.

4.2. Основные результаты

Заметим, что величина D непрерывна по параметрам замыкания $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$. Значит, если $D > 0$ при заданных значениях параметров, то она сохраняет свой знак и в некоторой их окрестности. Используя эту идею, можно показать, что строгие неравенства в условиях (6) и (7) обеспечивают существование неподвижной точки у операторов равновесия, параметры замыкания которых не сильно отличаются от исходных значений.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, но при этом неравенства (6) и (7) выполняются строго. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ из условия

$$\begin{cases} |\tilde{\alpha}_\varepsilon - \tilde{\alpha}| < \varepsilon, \\ |\tilde{\beta}_\varepsilon - \tilde{\beta}| < \varepsilon, \\ |\tilde{\gamma}_\varepsilon - \tilde{\gamma}| < \varepsilon, \end{cases}$$

следует, что у оператора $\mathcal{E}(\tilde{\alpha}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon, \tilde{\gamma}_\varepsilon)$ также существует неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле.

Проанализируем влияние параметров замыкания на сам оператор равновесия.

Теорема 3. Оператор равновесия $\mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ меняется непрерывно при малом изменении параметров $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$. То есть, если для $\tilde{\alpha}$ выполнено условие (5), то $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall R > 0 \exists \delta = \delta(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \varepsilon, R) > 0$ такое, что, как только

$$\begin{cases} |\tilde{\alpha}_\delta - \tilde{\alpha}| < \delta, \\ |\tilde{\beta}_\delta - \tilde{\beta}| < \delta, \\ |\tilde{\gamma}_\delta - \tilde{\gamma}| < \delta, \end{cases}$$

то для любого элемента $F \in (\widehat{L}_1(\mathbb{R}^N))^{n \times n}$, по норме не превосходящего R , верно неравенство

$$\|\mathcal{E}(\tilde{\alpha}_\delta, \tilde{\beta}_\delta, \tilde{\gamma}_\delta)F - \mathcal{E}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})F\|_{m \times n} \leq \varepsilon,$$

причем для всех таких $\tilde{\alpha}_\delta$ выполнено условие (5).

Множество неподвижных точек оператора равновесия является компактным в силу возможности его представления в виде суммы компактного и сжимающего операторов ([5]). С учетом этого факта из теорем 2 и 3 напрямую следует, что малое изменение параметров замыкания не приводит к существенному изменению множества неподвижных точек оператора равновесия.

Теорема 4. В условиях теоремы 2 при малых изменениях параметров замыкания $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ множество неподвижных точек оператора равновесия меняется непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках текущей работы был поставлен и исследован вопрос об устойчивости решения системы равновесия (1), разрешимость которой была показана в работе [5]. Данная система путем введения банахова пространства специального вида была сведена к операторному уравнению, что позволило оперировать в терминах неподвижных точек операторов. Было показано, что если в условиях (6) и (7), гарантирующих существование неподвижной точки оператора равновесия, вы-

полняются строгие неравенства, вместо нестрогих, то малое возмущение параметров замыкания не влияет на разрешимость системы равновесия. Кроме того, оператор равновесия, задаваемый данной системой, при таких условиях зависит от параметров замыкания непрерывно, а значит, и множество его неподвижных точек, являющееся компактным, меняется непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа, что говорит об устойчивости решений системы (1). Отметим, что ранее вопрос об анализе устойчивости систем равновесия в рамках модели У. Дикмана и Р. Лоу не рассматривался.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены А.А. Никитиным при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.
2. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
3. Murrell D. J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. V. 229. P. 421–432.
4. Красносельский М.А. Два замечания о методе последовательных приближений. // УМН. 1955. Т. 10. № 1(63). С. 123–127.
5. Николаев М.В., Никитин А.А., Дикман У. Применение обобщенного принципа неподвижных точек к исследованию системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели популяционной динамики // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 9. С. 1242–1250.
6. Николаев М.В., Дикман У., Никитин А.А. Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. № 1. С. 35–39.

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF THE SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN A LOGISTIC DYNAMICS MODEL

M. V. Nikolaev^{a,b}, A. A. Nikitin^{a,c}, and U. Dieckmann^{d,e,f}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^c *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^d *Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Onna, Japan*

^e *International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*

^f *Graduate University for Advanced Studies, Hayama, Japan*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

In this paper, we analyze a system of nonlinear integral equations that arises as a result of the three-parameter closure of the third spatial moments in the logistic dynamics model of U. Dieckmann and R. Law in the multi-species case. Specifically, the conditions under which the solution of this system is stable with respect to the closure parameters are investigated. To do this, the initial system of equations is represented as a single operator equation in the special Banach space, after which the generalized fixed point principle is applied.

Keywords: functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГРАДИЕНТНЫХ СРЕДАХ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,**},
Ю. С. Анкипович^{2,***}, А. В. Фаворская^{1,****}

Поступило 05.08.2022 г.

После доработки 24.10.2022 г.

Принято к публикации 28.10.2022 г.

В настоящей работе рассматривается задача распространения сейсмических волн в градиентных геологических средах. Для описания их динамического поведения используются акустическое приближение и процедура численного интегрирования начально-краевой задачи акустического волнового уравнения с механическими параметрами, имеющими пространственную изменчивость. Разработан сеточно-характеристический численный метод, явно учитывающий градиентность среды. Проведено сравнение полученных численных решений с результатами расчетов при аппроксимации среды кусочно-постоянной моделью в одномерном случае.

Ключевые слова: градиентные среды, акустика, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод

DOI: 10.31857/S2686954322600513

1. ВВЕДЕНИЕ

Для математического моделирования процесса распространения сейсмических волн в геологических средах успешно применяется система уравнений линейной акустики [1, 2]. Для численного решения определяющей системы уравнений применяются различные численные методы: конечно-разностный [3, 4], конечно-объемный [5], метод конечных элементов [6, 7], сеточно-характеристический метод [8–10] и другие. В данной работе используется класс сеточно-характеристических методов, развитый для линейных гиперболических систем.

Изменение механических свойств геологического массива с глубиной вносит вклад в процесс распространения в нем сейсмических волн. Градиентную среду можно приближенно описывать разными вычислительными моделями: считать

всю среду однородной с некоторыми средними параметрами, разбить среду на несколько зон, в каждой из которой свойства материала считаются постоянными, явно учитывать градиентность среды на этапе построения расчетного алгоритма. Численное решение системы уравнений линейной акустики для случая постоянных и кусочно-постоянных коэффициентов рассмотрено во множестве работ [11, 12]. Однако работы, которые явно учитывают градиентность среды, редки и, зачастую, в них рассматривается только переменная скорость звука, тогда как плотность среды считается постоянной [13, 14].

В настоящей работе разработан сеточно-характеристический метод, явно учитывающий изменение скорости звука и плотности среды внутри расчетной ячейки. Представлено сравнение волновых полей с результатами, получаемыми в рамках применения модели акустической среды с кусочно-постоянными коэффициентами.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений акустики может быть получена из уравнения неразрывности [15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

и уравнения Эйлера

¹ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

***E-mail: ankipovich.ius@phystech.edu

****E-mail: aleanera@yandex.ru

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p, \quad (2)$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность рассматриваемой среды, p – давление, \vec{V} – скорость частиц среды. Для замыкания системы будем использовать предположение о баротропности среды $p = p(\rho)$. Особенностью данной системы является возможность распространения акустических волн с конечной скоростью c , определяемой параметрами среды.

Рассмотрим малые возмущения относительно равновесного состояния, характеризующегося параметрами (ρ_0, p_0, \vec{V}_0) , возникающие во время распространения звуковой волны:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0(\vec{r}) + \rho', \\ p = p_0 + p', \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \end{cases} \quad (3)$$

$\rho' \ll \rho_0, \quad p' \ll p_0, \quad |\vec{V}'| \ll c.$

В предположении изначально покоящейся среды ($\vec{V}_0 = \vec{0}$) получаем линеаризованную систему уравнений [16]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\rho(\vec{r})$ – равновесная плотность рассматриваемой среды (для краткости опущен индекс 0), p – отклонение давления от равновесного состояния, \vec{V} – отклонение скорости частиц среды, $c = c(\vec{r}) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ – скорость распространения акустической волны, определяемая параметрами среды.

В матричном виде в одномерном случае она записывается как:

$$\vec{U}_t + \mathbf{A} \vec{U}_x = \vec{0}, \quad (5)$$

где нижние индексы x и t обозначают дифференцирование по координате и времени, соответственно, а вектор \vec{U} и матрица \mathbf{A} имеют следующий вид:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} V \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрицу \mathbf{A} можно диагонализировать, используя матрицу перехода \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho c & -\rho c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Сделаем замену переменных (переход в инварианты Римана):

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \omega^- \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \vec{U} \Rightarrow \vec{U} = \mathbf{R} \vec{\Omega}. \quad (8)$$

В общем случае матрица \mathbf{R} зависит от координат, поэтому вносить ее напрямую под знак дифференцирования по координате нельзя, необходимо учитывать ее производную.

Система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{-1} \cdot \left[\mathbf{R} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{A} \left(\mathbf{R} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \vec{\Omega} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} + \left(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right) \vec{\Omega} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В итоге мы приходим к следующей матричной форме записи рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} + \mathbf{M} \vec{\Omega} = 0, \\ \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2} \left(c_x + \frac{c}{\rho} \rho_x \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

В работе рассматривается случай линейных зависимостей для плотности среды и скорости распространения акустических волн от координаты, когда $c_x = \alpha_c$ и $\rho_x = \alpha_\rho$. Рассмотрим часть уравнения, которая содержит только частные производные. Мы можем найти характеристики, вдоль которых уравнение в частных производных сводится к уравнению в полных дифференциалах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega^+}{\partial t} + c(x) \frac{\partial \omega^+}{\partial x} = \frac{d\xi}{dt}, \\ \xi(t) = \omega^+(t, x^+(t)). \end{cases} \quad (11)$$

При этом $x^+(t)$ находится из дифференциального уравнения для характеристики:

$$\begin{cases} \frac{dx^+}{dt} = c(x) = c_0 + \alpha_c x, \\ x^+(t) = \frac{c(x_0) e^{\alpha_c(t-t_0)} - c_0}{\alpha_c}. \end{cases} \quad (12)$$

То же самое можно выполнить и для второго инварианта:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega^-}{\partial t} - c(x) \frac{\partial \omega^-}{\partial x} = \frac{d\zeta}{dt}, \\ \zeta(t) = \omega^-(t, x^-(t)), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^-}{dt} &= -c(x) = -(c_0 + \alpha_c x), \\ x^-(t) &= \frac{c(x_0)e^{-\alpha_c(t-t_0)} - c_0}{\alpha_c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь (x_0, t_0) – точка, находящаяся на характеристике.

При описанной выше замене переменных система уравнений (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}}{dt} + \mathbf{M}(t)\bar{\Psi} &= 0, \\ \mathbf{M}(t) &= \begin{pmatrix} a(x^+(t)) & -a(x^+(t)) \\ a(x^-(t)) & -a(x^-(t)) \end{pmatrix}, \\ a(x) &= \frac{1}{2} \left(\alpha_c + \frac{c_0 + \alpha_c x}{\rho_0 + \alpha_p x} \alpha_p \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В работе для ее решения использовался модифицированный метод Эйлера с пересчетом второго порядка:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{n+1} &= \bar{\Psi}^n + \frac{\tau}{2} (-\mathbf{M}(t_n)\bar{\Psi}^n - \mathbf{M}(t_{n+1})\bar{\Psi}^{n+1/2}), \\ \bar{\Psi}^{n+1/2} &= \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2} \mathbf{M}(t_{n+1}) \right)^{-1} \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2} \mathbf{M}(t_n) \right) \bar{\Psi}^n, \end{aligned} \quad (16)$$

а также явный метод Рунге–Кутты третьего порядка:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{n+1} &= \bar{\Psi}^n + \frac{1}{6}(\bar{k}_1 + 4\bar{k}_2 + \bar{k}_3), \\ \bar{k}_1 &= -\tau \mathbf{M}(t_n) \bar{\Psi}^n, \\ \bar{k}_2 &= -\tau \mathbf{M}\left(t_n + \frac{\tau}{2}\right) \left(\bar{\Psi}^n + \frac{\bar{k}_1}{2} \right), \\ \bar{k}_3 &= -\tau \mathbf{M}(t_n + \tau) (\bar{\Psi}^n + 2\bar{k}_2 - \bar{k}_1), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\bar{\Psi}^n = \begin{pmatrix} \xi(t_n) \\ \zeta(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^+(t_n, x^+(t_n)) \\ \omega^-(t_n, x^-(t_n)) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В общем случае характеристики не проходят через узлы расчетной сетки, поэтому чтобы найти значения искомых функций ξ и ζ в точке пересечения характеристической кривой с предыдущим слоем по времени, использовалась интерполяция полиномом второй/третьей степени на фиксированном шаблоне.

Таким образом, полный расчетный алгоритм заключается в следующем:

1. Из каждой точки пространственной расчетной сетки на следующем временном слое выпускаем характеристики обратно до пересечения с предыдущим временным слоем.

2. В каждой точке пространственной расчетной сетки на предыдущем временном слое переходим к характеристическим переменным со своими акустическими свойствами (плотностью и скоростью звука) по формуле (8).

3. Используя полиномиальную интерполяцию второго/третьего порядка, рассчитываем значение $\bar{\Psi}^n$ в точке пересечения характеристической кривой с предыдущим слоем по времени.

4. По формулам (16)/(17) вычисляем $\bar{\Psi}^{n+1}$ в рассматриваемой точке пространственной расчетной сетки.

5. Переходим обратно к исходным физическим переменным по формуле (8).

Для случая кусочно-постоянных коэффициентов использовался сеточно-характеристический метод, описанный в работе [17], и обладающий вторым порядком аппроксимации.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для сравнения двух вычислительных подходов была рассмотрена следующая постановка задачи. Дана одномерная градиентная акустическая среда, в которой заданы гладкие начальные импульсы скорости и давления:

$$\begin{aligned} x &\in [-1000; 1000], \\ t &\in [0; 0.25], \\ c &= 3000 + x, \\ \rho &= 2500 + 0.5x, \end{aligned} \quad (19)$$

$$v(0, x) = \begin{cases} \sin^4\left(x \frac{\pi}{50}\right), & x \in [0; 50], \\ 0, & x \notin [0; 50], \end{cases}$$

$$p(0, x) = \rho(x)c(x)v(0, x).$$

Выбор функции $\sin^4(x)$ обусловлен ее достаточно гладкой сшивкой с нулем на границах рассматриваемой области $[0; 50]$. Была проведена серия численных расчетов, отличающихся применяемым численным методом. Использовались согласованные по порядку аппроксимации процедуры полиномиальной интерполяции и интегрирования системы вдоль характеристической кривой. Исследовался вопрос уменьшения ошибки численного решения при измельчении расчетной сетки в диапазоне от 2000 до 256000 расчетных ячеек. При измельчении пространственной сетки уменьшался и шаг по времени так, чтобы обеспечить постоянство числа Куранта. На рис. 1 и 2 представлены графики решений, полученные тремя рассматриваемыми методами для сетки наибольшей мелкости. Они свидетельствуют о минимальном различии в полученных численных решениях, что подтверждает возможность использования любого из них.

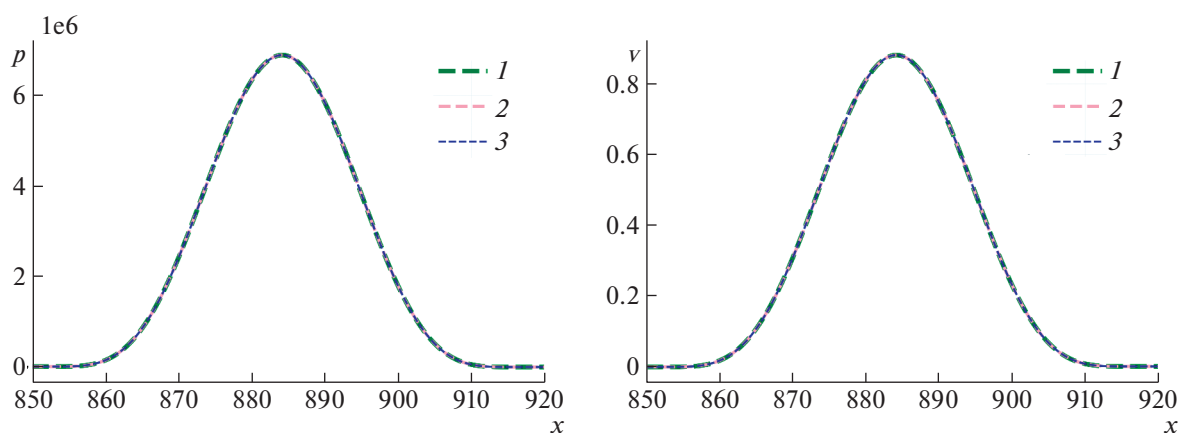


Рис. 1. Профили давления (слева) и скорости (справа), рассчитанные с использованием предложенной в работе модификации сеточно-характеристического метода второго (1) и третьего (2) порядка, а также методом из работы [17] (3).

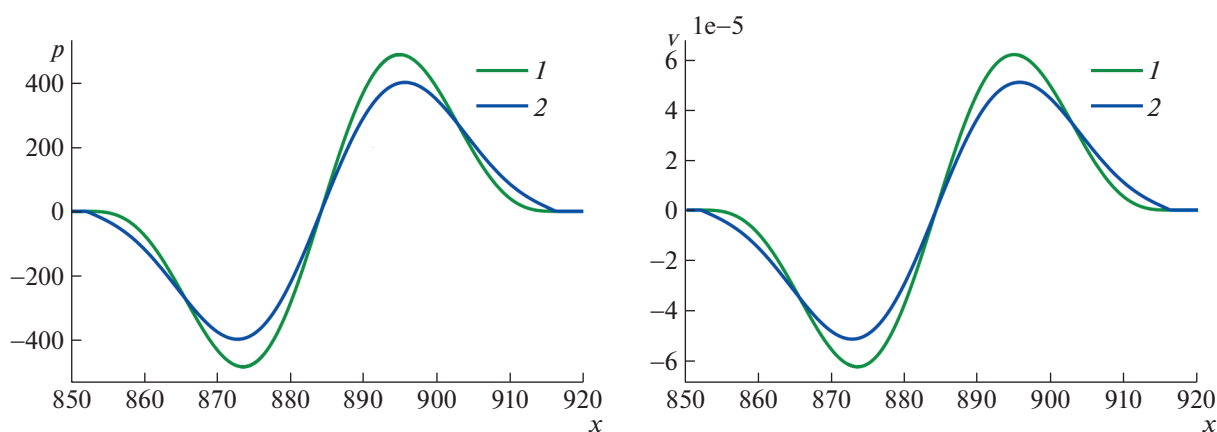


Рис. 2. Разность профилей давления (слева) и скорости (справа), рассчитанная между результатами, полученными методом из работы [17] и с использованием предложенной в работе модификации сеточно-характеристического метода второго (1) и третьего (2) порядка.

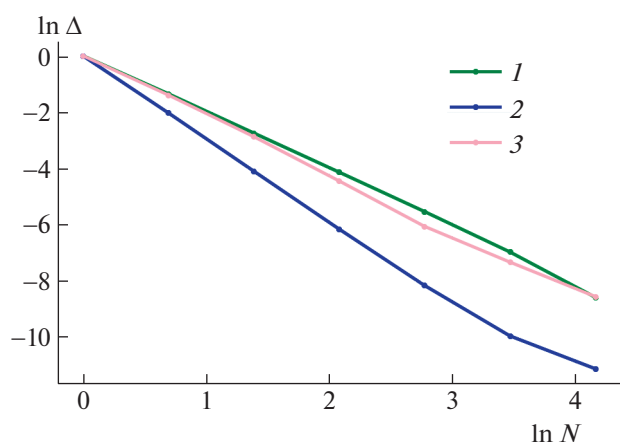


Рис. 3. График зависимости логарифма ошибки от логарифма числа ячеек в сетке при использовании предложенной в работе модификации сеточно-характеристического метода второго (1) и третьего (2) порядка, а также метода из работы [17] (3).

В работе также было исследовано поведение ошибки численного решения при измельчении расчетной сетки от 2000 до 256000 ячеек. Графики зависимости логарифма ошибки (относительно численного решения на самой мелкой сетке) от логарифма числа ячеек для каждого из методов представлены на рис. 3.

Из графиков видно, что при использовании интерполяции полиномами третьей степени и метода Рунге–Кутты третьего порядка возможно обеспечить убывание численной ошибки метода быстрее, чем для предложенного ранее метода кусочно-постоянной аппроксимации модели [17].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был исследован процесс распространения акустических волн в средах с пространственно изменяющимися параметрами:

скоростью звука и плотностью. Для численного решения определяющей системы уравнений был предложен сеточно-характеристический метод, явно учитывающий наличие градиента механических параметров на масштабе расчетной ячейки. Было выполнено сравнение расчетных полей давления и скорости с результатами, полученными в рамках аппроксимации среды моделью с кусочно-постоянными параметрами. Продемонстрирована возможность построения численных методов повышенного порядка. Направлением дальнейших исследований может быть обобщение разработанного подхода на трехмерный случай. Необходимо отметить, что используемый в работе сеточно-характеристический подход позволяет построить вычислительный алгоритм для решения системы уравнений линейной теории упругости с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами. Однако возможность обобщения предложенного алгоритма на упругие среды с градиентным изменением параметров является предметом отдельного исследования. В таком случае область практического применения была бы расширена с задач сейсмической разведки, например, на задачи неразрушающего контроля гетерогенных материалов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2022-0005 “Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых и реагирующих средах с использованием многопроцессорных вычислительных систем”, Рег. № 1021060708369-1-1.2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Young C., Shragge J., Schultz W., Haines S., Oren C., Simmons J., Collett T.S.* Advanced distributed acoustic sensing vertical seismic profile imaging of an Alaska North Slope gas hydrate field. *Energy & Fuels*. 2022. V. 36. № 7. P. 3481–3495.
2. *Chai X., Tang G., Wang F., Gu H., Wang X.* Q-compensated acoustic impedance inversion of attenuated seismic data: Numerical and field-data experiments. *Geophysics*. 2018. V. 83. № 6. P. R553–R567.
3. *Wang E., Ba J., Liu Y.* Time-space-domain implicit finite-difference methods for modeling acoustic wave equations. Time-space-domain implicit FD. *Geophysics*. 2018. V. 83. № 4. P. T175–T193.
4. *Amini N., Shin C., Lee J.* Second-order implicit finite-difference schemes for the acoustic wave equation in the time-space domain. *Geophysics*. 2021. V. 86. № 5. P. T421–T437.
5. *Denner F., Evrard F., van Wachem B. G.* Conservative finite-volume framework and pressure-based algorithm for flows of incompressible, ideal-gas and real-gas fluids at all speeds. *Journal of Computational Physics*. 2020. V. 409. art. no. 109348.
6. *Diwan G.C., Mohamed M.S.* Pollution studies for high order isogeometric analysis and finite element for acoustic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019. V. 350. P. 701–718.
7. *Adjerid S., Moon K.* An immersed discontinuous Galerkin method for acoustic wave propagation in inhomogeneous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. V. 41. № 1. P. A139–A162.
8. *Фаворская А.В., Петров И.Б.* О численном моделировании пространственных динамических волновых эффектов в скальных массивах. Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. № 4. С. 418–422. <https://doi.org/10.7868/S0869565217040041>
9. *Петров И.Б., Голубев В.И., Петрухин В.Ю., Никитин И.С.* Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 59–64. <https://doi.org/10.31857/S2686954321030140>
10. *Nikitin I.S., Golubev V.I.* Higher Order Schemes for Problems of Dynamics of Layered Media with Nonlinear Contact Conditions. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2022. V. 274. P. 273–287.
11. *Golubev V., Shevchenko A., Khokhlov N., Petrov I., Malovichko M.* Compact grid-characteristic scheme for the acoustic system with the piece-wise constant coefficients. 2022. *International Journal of Applied Mechanics*. V. 14. № 2, art. no. 2250002. <https://doi.org/10.1142/S1758825122500028>
12. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Nikitin I.S.* Numerical investigation of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 1902. № 1. art. no. 012110.
13. *Kuvshinov B.N., Mulder W.A.* The exact solution of the time-harmonic wave equation for a linear velocity profile. *Geophysical Journal International*. 2006. V. 167. № 2. P. 659–662.
14. *Pekeris C.L.* Theory of propagation of sound in a half-space of variable sound velocity under conditions of formation of a shadow zone. *The journal of the acoustical society of America*. 1946. V. 18. № 2. P. 295–315.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
16. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 416 с.
17. *Хохлов Н.И.* Моделирование распространения динамических волновых возмущений в гетерогенных средах на высокопроизводительных вычислительных системах: дис. ... д. ф.-м. наук: 05.13.18. ФГАОУ ВО “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)”, Долгопрудный, 2022. 298 с.

NUMERICAL MODELING OF ACOUSTIC PROCESSES IN GRADIENT MEDIA USING THE GRID-CHARACTERISTIC METHOD

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^a, V. I. Golubev^a,
Yu. S. Ankipovich^b, and A. V. Favorskaya^a**

^a *Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

In this paper, we consider the problem of seismic wave propagation in gradient geological media. Their dynamic behavior is described using the acoustic approximation and the procedure of numerical integration of the initial-boundary value problem of the acoustic wave equation with mechanical parameters having spatial variability. A grid-characteristic numerical method has been developed that explicitly considers the gradient of the medium. The obtained numerical solutions are compared with the results calculated in the frame of the piecewise constant model in the one-dimensional case.

Keywords: gradient media, acoustics, mathematical modeling, grid-characteristic method

ЧИСЛА БРЮА СТРОГОЙ ФУНКЦИИ МОРСА

© 2022 г. П. Е. Пушкарь^{1,2,*}, М. С. Тёмкин^{1,3,**}

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым

Поступило 15.05.2020 г.

После доработки 27.10.2020 г.

Принято к публикации 27.10.2020 г.

Пусть f – функция Морса на многообразии M , у которой все критические значения попарно различны. По такой функции (вместе с выбором некоторых ориентаций) и полю \mathbb{F} мы строим набор ненулевых элементов поля, называемых числами Брюа. При некоторых условиях ацикличности на M альтернированное произведение всех чисел Брюа не зависит от f с точностью до знака, т.е. является инвариантом многообразия. Для любого типичного однопараметрического семейства функций на M мы предъявляем соотношение, связывающее числа Брюа концевых функций семейства с числом перестроек, происходящих по ходу этого семейства. Это соотношение обобщает результат из [1].

Ключевые слова: теория Морса, теория Серфа, топология многообразий

DOI: 10.31857/S2686954322700047

1. ЧИСЛА БРЮА В УСЛОВИЯХ АЦИКЛИЧНОСТИ

Рассмотрим гладкий кобордизм $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$, т.е. компактное многообразие M с краем $\partial_0 M \sqcup \partial_1 M$. Напомним, что функцией Морса на M называется функция $f : M \rightarrow [0, 1]$ с лишь невырожденными критическими точками, причем такая, что $f^{-1}(0) = \partial_0 M$, $f^{-1}(1) = \partial_1 M$. Если для любых двух критических точек x и y функции f верно, что $f(x) \neq f(y)$, то такая функция называется строгой. Мы начинаем с описания инварианта строгой функции Морса f , зависящего от поля \mathbb{F} и являющегося усилением пар Баранникова [2]. Это инвариант функции (для фиксированного \mathbb{F}) относительно непрерывных деформаций в (несвязном) пространстве строгих функций Морса на данном многообразии. Интерес представляет уже случай замкнутого многообразия M .

Для $a \in [0, 1]$ положим $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$; это подмножество называется множеством меньших значений. Предположим, что для каждой крити-

ческой точки $x \in M$ выбрана образующая в группе $H_{\text{ind } x}(M^{f(x)+\varepsilon}, M^{f(x)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, где $\text{ind } x$ – индекс критической точки x , а $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ достаточно мало. Такой выбор называется ориентацией f .

Зафиксируем строгую функцию Морса f и поле \mathbb{F} . Мы переходим к описанию множества значений, принимаемых инвариантом пары (f, \mathbb{F}) . Инвариант состоит из двух частей: пар Баранникова (для краткости, просто пар) и чисел Брюа. Пары Баранникова – это некоторые пары (x, y) критических точек f соседнего индекса, подчиняющиеся условию, что если $f(x) > f(y)$, то $\text{ind } x = \text{ind } y + 1$. Каждая критическая точка может принадлежать максимум одной паре Баранникова. Приведенные условия являются необходимыми, но не достаточными, полное определение предъявлено ниже. Таким образом, инвариант включает в себе, в частности, разбиение всех критических точек на верхние в паре (в наших обозначениях, x), нижние в паре (в наших обозначениях, y) и неспаренные. Набор пар задается, в этих терминах, биекцией между верхними точками и нижними точками индекса, меньшего на 1. Далее, число Брюа – это определяемый ниже ненулевой элемент поля \mathbb{F} , приписанный каждой паре Баранникова и определенный с точностью до знака. Пример для $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ изображен на рис. 1 (он реализуется некоторой строгой функцией Морса на S^4). Критические точки изображены точками, упорядоченными снизу вверх по возрастанию критических значений. Индекс подписан сверху или снизу

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

² Независимый Московский Университет, Москва, Россия

³ Дартмутский колледж, Гановер, США

*E-mail: petya.pushkar@gmail.com

**E-mail: mikhail.temkin@dartmouth.edu

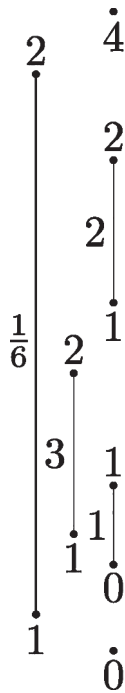


Рис. 1

зу, пары обозначены отрезками. Число Брюа пары написано слева от середины соответствующего отрезка (неопределенность в знаке опущена).

2. КОНСТРУКЦИЯ ИНВАРИАНТА

Выберем какую-нибудь ориентацию f . В дальнейшем все гомологии берутся с коэффициентами в \mathbb{F} . Пусть x и y — две критические точки индексов $k + 1$ и k соответственно, такие что $f(x) > f(y)$. По основной теореме теории Морса, имеется гомотопическая эквивалентность $M^{f(x)+\epsilon} \simeq M^{f(x)-\epsilon} \cup_{\varphi} e^{k+1}$, где e^{k+1} — клетка размерности $k + 1$, а $\varphi : S^k \rightarrow M^{f(x)-\epsilon}$ — характеристическое отображение ее границы, которое можно считать вложением. Рассмотрим фундаментальный класс соответствующей сферы как элемент в $H_k(M^{f(x)-\epsilon})$. Пусть X — образ этого класса при отображении $H_k(M^{f(x)-\epsilon}) \rightarrow H_k(M^{f(x)-\epsilon}, M^{f(y)-\epsilon})$. Далее, рассмотрим критическую точку y и ее относительный фундаментальный класс как элемент в $H_k(M^{f(y)+\epsilon}, M^{f(y)-\epsilon})$. Пусть Y — образ этого класса при отображении $H_k(M^{f(y)+\epsilon}, M^{f(y)-\epsilon}) \rightarrow H_k(M^{f(x)-\epsilon}, M^{f(y)-\epsilon})$, индуцированном вложением. Говорят, что точки x и y образуют пару Баранникова, если $X = \lambda Y \neq 0$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Число λ называется числом Брюа соответствующей пары. При смене ориентации

функции f некоторые числа Брюа могут лишь поменять знак.

Можно показать, что это определение пар Баранникова совпадает с введенным в [2]. Отметим, что близкие идеи о числах Брюа над \mathbb{Q} возникли независимо от настоящей работы в [3].

Легко видеть, что количество неспаренных точек индекса k равно $\dim H_k(M, \partial_0 M)$. Если $\dim M \geq 4$ и \mathbb{F} есть \mathbb{Q} или \mathbb{F}_p , то по любому наперед заданному числу $\lambda \in \mathbb{F}^*$ можно построить строгую функцию Морса на M , имеющую $\pm\lambda$ в качестве одного из своих чисел Брюа. Далее, рассмотрим произведение

$$\prod_{\theta \in \Theta} \lambda_{\theta}^{(-1)^{\deg \theta}} \in \mathbb{F}^* / \pm 1,$$

где Θ — множество пар Баранникова функции f над \mathbb{F} , λ_{θ} — число Брюа пары θ , $\deg \theta$ — индекс верхней критической точки в паре θ . Мы называем это произведение альтернированным произведением чисел Брюа, по аналогии с эйлеровой характеристикой, которая является альтернированной суммой, например, чисел Бетти.

Теорема 1. Пусть f — строгая функция Морса на M , а \mathbb{F} — поле. Предположим, что $H_k(M, \partial_0 M; \mathbb{F}) = 0$ для всех $0 < k < \dim M$. Тогда альтернированное произведение чисел Брюа не зависит от f (с точностью до знака).

Рассмотрим в качестве примера $M = \mathbb{R}P^n$ (здесь $\partial_0 M = \partial_1 M = \emptyset$) и $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Тогда это произведение равно $\pm 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть стандартную функцию Морса с $n + 1$ критической точкой, инвариант которой изображен на рис. 2 ($n = 6$). Условие ацикличности из Теоремы 1 является существенным — для любого наперед заданного целого числа μ можно найти строгую функцию Морса f на $\mathbb{C}P^2$, для которой альтернированное произведение чисел Брюа над \mathbb{Q} равно $\pm\mu$.

3. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОРСА

Будем говорить, что две пары Баранникова (x_1, y_1) и (x_2, y_2) идут внахлест, если либо $f(y_1) < f(y_2) < f(x_1) < f(x_2)$, либо $f(y_2) < f(y_1) < f(x_2) < f(x_1)$. Обозначим через O количество (неупорядоченных) пар Баранникова, идущих внахлест. Для примера на рис. 1 это число равно 1. В дальнейшем нам понадобится число

$$\tau(f, \mathbb{F}) = (-1)^O \prod_{\theta \in \Theta} \lambda_{\theta}^{(-1)^{\deg \theta}} \in \mathbb{F}^*,$$

не имеющее какой-либо неопределенности в знаке, но зависящее от ориентации f .

Рассмотрим типичный путь $\{f_t\}$ в пространстве функций на M , $t \in [-1, 1]$; его принято называть типичным однопараметрическим семейством функций. Типичная точка семейства есть строгая функция Морса $f_{t_0} : M \rightarrow [0, 1]$. С типичным семейством $\{f_t\}$ связана его диаграмма Серфа [4], определяемая как подмножество точек плоскости вида (t, a) , где a является критическим значением функции f_t . Это подмножество есть конечное объединение образов отрезка, гладких вне своих концов; эти образы называются дугами. Дуги пересекаются лишь просто и трансверсально и не имеют вертикальных касательных. Их граничные точки есть либо каспы (т.е. негладкие точки полукубической параболы), либо точки на вертикальных прямых $t = \pm 1$.

Имеется лишь конечное число значений параметра t , в которых функция f_t не является строгой функцией Морса. Говорят, что в этих точках происходит перестройка строгой функции Морса. Такие перестройки бывают двух типов.

1. Функция f_{t_0} строгая, но не морсовская. В этот момент происходит рождение или смерть двух критических точек соседнего индекса. В подходящих координатах эта ситуация моделируется семейством $f_t(x_1, \dots, x_{\dim M}) = x_1^3 \pm tx_1 + Q(x_2, \dots, x_{\dim M})$, где Q – невырожденная квадратичная форма. На диаграмме Серфа эта перестройка отвечает каспу. Можно показать, что две упомянутые точки соседнего индекса образуют пару Баранникова с числом Брюа ± 1 (для любого \mathbb{F} , причем знак не зависит от \mathbb{F}).

2. Функция f_{t_0} морсовская, но не строгая. В этот момент происходит обмен местами двух критических значений. На диаграмме Серфа это отвечает трансверсальному пересечению двух дуг.

Каждая дуга соответствует некоторой критической точке функции f_t для $t \in (a, b) \subset [-1, 1]$, где (a, b) – проекция внутренних точек этой дуги в $[-1, 1]$. Пусть количество дуг равно N . Тогда, сделав 2^N бинарных выборов, мы можем согласованно ориентировать все строгие функции Морса семейства $\{f_t\}$. Обозначим через C количество каспов с числом Брюа -1 , а через X – число самопересечений диаграммы Серфа (т.е. перестроек второго типа). Очевидно, X – инвариант семейства, т.е. число, не зависящее от ориентаций.

Пусть \mathbb{F} – поле характеристики не два. Предположим, что $H_*(M, \partial_0 M; \mathbb{F}) = 0$. В таком случае, согласно предыдущей части этой заметки, у любой строгой функции Морса f_t нет неспаренных

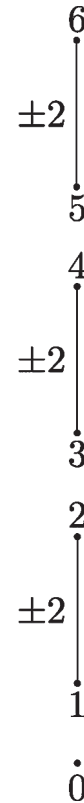


Рис. 2

точек и $\tau(f_t, \mathbb{F})$ не зависит от f_t с точностью до знака. Нетрудно показать, что знак $\frac{\tau(f_t, \mathbb{F})}{\tau(f_{-t}, \mathbb{F})} (-1)^C \in \{\pm 1\}$ является инвариантом семейства. Следующая теорема устанавливает связь между двумя введенными инвариантами.

Теорема 2. Пусть \mathbb{F} – поле характеристики не два, а $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$ – такой кобордизм, что $H_*(M, \partial_0 M; \mathbb{F}) = 0$. Пусть также $\{f_t\}$ – типичное однопараметрическое семейство функций на M (как-либо ориентированное). Тогда справедливо равенство

$$\frac{\tau(f_t, \mathbb{F})}{\tau(f_{-t}, \mathbb{F})} (-1)^C (-1)^X = 1.$$

Это равенство по модулю два, записанное в мультипликативной нотации.

4. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ И СВЯЗЯХ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Подробности и доказательства обеих теорем описываются в работе [5]. Для доказательств вводится модификация понятия полного флага на цепном комплексе над полем. Линейно-алгебраическое ядро доказательств – разложение Брюа

для $GL_n(\mathbb{F})$. Необходимость последовательного изложения этих инструментов делает геометрические результаты менее доступными. С другой стороны, если ограничиться формулировками, то оказывается, что можно обойтись лишь языком элементарной дифференциальной топологии, что и сделано в настоящей заметке.

Теорема 2 доказана в [1] в следующих дополнительных предположениях.

1) Функции f_{-1} и f_1 не имеют критических точек (как следствие, кобордизм тривиален, т.е. $M = \partial_0 M \times [0, 1]$). В нашем контексте это означает, что первый из трех множителей в вышеприведенной формуле равен 1.

2) Многообразие $\partial_0 M$ либо односвязно и стабильно параллелизуемо, либо имеет размерность не меньше 5.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В. Васильева за вдумчивую вычитку текста и ряд полезных замечаний. Его усилия сделали изложение более внятным.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М. Тёмкина выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации “5-100”. Работа П. Пушкаря поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 18-01-00461) и фондом Саймонса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhmetev P.M., Cencelj M., Repovs D.* Some Algebraic Properties of Cerf Diagrams of One-Parameter Function Families. *Functional Analysis and Its Applications*. 2005. V. 39.
2. *Barannikov S.* The Framed Morse Complex and Its Invariants // *Advances in Soviet Mathematics*. 1994. V. 22. P. 93–115.
3. *Le Peutrec D., Francis Nier F., Viterbo C.* Bar Codes of Persistent Cohomology and Arrhenius Law for P-forms, 2020. arXiv: 2002.06949 [math.AP].
4. *Cerf J.* La Stratification Naturelle Des Espaces de Fonctions Différentiables Rolles et Le Théorème de La Pseudo-Isotopie // *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques*. 1970. V. 39. P. 5–173.
5. *Pushkar P., Temkin M.* Enhanced Bruhat Decomposition and Morse Theory. *Int. Math. Res. Not.* (to appear), 2022. arXiv: 2012.05307 [math.AT].

BRUHAT NUMBERS OF A STRONG MORSE FUNCTION

P. E. Pushkar^{a,b} and M. S. Temkin^{a,c}

^a *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

^b *Independent University of Moscow, Moscow, Russian Federation*

^c *Dartmouth College, Hanover, USA*

Presented by Academician of the RAS V.A. Vasilyev

Let f be a Morse function on a manifold M , such that all its critical values are pairwise distinct. Given such a function (together with a certain choice of orientations) and a field \mathbb{F} we construct a set of non-zero elements of the field, which are called Bruhat numbers. Under certain acyclicity conditions on M alternating product of all the Bruhat numbers doesn't depend on f (up to sign), thus it is an invariant of the manifold. For any typical one-parameter family of functions on M we provide a relation which links Bruhat numbers of the boundary functions of the family with the number of bifurcations which happen along the way. This relation generalizes the result from [1].

Keywords: Morse theory, Cerf theory, topology of manifolds

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ТЕОРИЙ БИНАРНОГО ПРЕДИКАТА В ЯЗЫКАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2022 г. М. Рыбаков^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 07.08.2022 г.

После доработки 19.09.2022 г.

Принято к публикации 23.09.2022 г.

Доказана Σ_1^0 -трудность различных теорий бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными и бинарной предикатной буквой (без констант и равенства). Показано, что при добавлении равенства, композиции и транзитивного замыкания получаются Π_1^1 -трудные теории бинарного предиката при двух предметных переменных в языке.

Ключевые слова: классическая логика предикатов, диадическая логика, неразрешимость, теорема Чёрча, теорема Трахтенброта

DOI: 10.31857/S2686954322600501

Введение. Предлагаемая работа связана с так называемой классической проблемой разрешения [1], в частности, с алгоритмической сложностью фрагментов элементарных теорий [2, 3]. Ниже речь пой-

дет о теориях бинарного предиката, причем как в языке с одной лишь бинарной буквой, так и в языке, обогащенном некоторыми дополнительными средствами.

Известно, что классическая логика бинарного предиката неразрешима [4, глава 21]. Отметим, что соответствующее доказательство [4] использует бесконечно много предметных переменных; в то же время для доказательства неразрешимости логики предикатов достаточно трех предметных переменных, если ее язык содержит, помимо бинарной предикатной буквы, бесконечно много унарных букв [5]. Понижение числа переменных до двух [6, 7], использование лишь унарных букв и равенства [4, глава 21] или охраняемых фрагментов, где бинарные буквы допускаются в формулах ограниченно [8], приводит к разрешимости. Возникает естественный вопрос о разрешимости логики и теорий бинарного предиката в языке с конечным числом переменных, начиная с трех.

Аналогичная ситуация наблюдается и при обогащении языка логики предикатов различными

дополнительными средствами, важными для приложений. Так, логика предикатов с равенством, обогащенная оператором транзитивного замыкания, Π_1^1 -трудна в языке с двумя переменными, но доказательство использует несколько бинарных букв и бесконечно много унарных [9]; и здесь тоже возникает вопрос об алгоритмической сложности теорий бинарного предиката в языке с конечным числом переменных, но уже начиная с двух.

Ответ на вопрос о разрешимости логики бинарного предиката в языке с числом переменных не менее трех (и без дополнительных операторов) следует из [10]: такая логика неразрешима (см. [10, пункт (ii) раздела 4.8]). Аналогичные результаты для классической логики бинарного предиката в языке с двумя переменными, обогащенном дополнительными операторами, автору неизвестны.

Ниже будет описано построение, дающее короткое доказательство, во-первых, неразрешимости многих теорий бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными (в частности, Σ_1^0 -полноты логики бинарного предиката и Π_1^0 -полноты теории конечных моделей бинарного предиката), а во-вторых, Π_1^1 -трудности проблемы общезначимости формул в языке с бинарной пре-

¹ Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: m_rybakov@mail.ru

дикатной буквой, равенством и двумя предметными переменными, обогащенном операторами композиции и транзитивного замыкания. Построение будет состоять в моделировании проблем укладки домино [11, 12]; отметим, что такой метод хорошо известен, и примеры применения теории замощений можно найти как в алгебре [13, 14], так и в логике [1, 15–18].

Неразрешимая проблема домино. Плитки домино имеют квадратную форму одинакового размера; *тип* t плитки определяется *цветами* lt, rt, ut и dt ее граней. Следующая проблема укладки Π_1^0 -полна [11]: по набору $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ типов плиток нужно выяснить, существует ли T -укладка, т.е. такая функция $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$ выполняются равенства $\ulcorner f(i, j) = \lfloor f(i+1, j) \urcorner$ и $\ulcorner f(i, j) = \lfloor f(i, j+1) \urcorner$.

Моделирование укладки. Зафиксируем бинарную предикатную P . Введем сокращения. Пусть $rx = xPx$, $\bar{r}x = \neg rx$, $gx = \exists y(ry \wedge xPy)$, $\bar{g}x = \neg gx$, а также

$$\begin{aligned} xEy &= \forall z((xPz \leftrightarrow yPz) \wedge (zPx \leftrightarrow zPy)); \\ xSy &= xPy \wedge \neg xEy \wedge \forall z(xPz \wedge zPy \rightarrow zEx \vee zEy); \\ xHy &= xSy \wedge (rx \leftrightarrow ry); \\ xVy &= xSy \wedge (rx \leftrightarrow \bar{r}y). \end{aligned}$$

Если выполнено rx , то x является рефлексивным, а если $\bar{r}x$, то иррефлексивным; gx понимаем как то, что x – элемент сетки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, т.е. место для плитки, E задает конгруэнтность, S – смещение на P -шаг, H и V понимаем как смещения вправо и вверх. Чтобы определить xSz , в определении для xSy одновременно заменяем y на z и z на y ; аналогично для ySz , zSy , xEz и т.д. Если u – свойство, то $\forall_u xA = \forall x(ux \rightarrow A)$, $\exists_u xA = \exists x(ux \wedge A)$.

Пусть G – конъюнкция формул $\forall x \forall y \forall z (xPy \wedge yPz \rightarrow xPz)$, $\forall_g x \exists_g y xHy$, $\forall_g x \exists_g y xVy$, $\forall_g x \forall_g y (\exists z (xHz \wedge zVy) \leftrightarrow \exists z (xVz \wedge zHy))$ и $\exists_g x \bar{r}x$. Тогда если G истинна в некоторой модели M , то M содержит сетку вида $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, горизонтальные ряды которой задает H , а вертикальные V , причем элементы первого горизонтального ряда являются иррефлексивными, второго – рефлексивными, третьего – иррефлексивными и т.д.

Пусть $h^y x = \neg \exists u xPy$, $t_0^y x = \exists_g y (xSy \wedge h^x y)$, $t_{k+1}^y x = \exists_g y (xSy \wedge t_k^x y)$, где $k \in \mathbb{N}$. Формула $t_m^y x$ выражает следующее: x видит своего S -последователя вне сетки, который видит последний элемент за m S -шагов. Ниже вместо $t_m^y x$ и $t_m^x y$ пишем $t_m x$ и $t_m y$. Содержательно $t_m x$ означает, что на месте x лежит плитка типа t_m .

Пусть t_T – конъюнкция следующих формул:

$$\begin{aligned} & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg t_j x); \\ & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \rightarrow \forall_g y (xHy \rightarrow \bigvee_{rt_i=lt_j} t_j y)); \\ & \forall_g x \bigvee_{i=0}^n (t_i x \rightarrow \forall_g y (xVy \rightarrow \bigvee_{ut_i=dt_j} t_j y)). \end{aligned}$$

Лемма 1. $G \wedge t_T$ выполнима \Leftrightarrow существует T -укладка.

Отметим, что в построениях можно обойтись лишь *позитивными* формулами, заменив формулу $G \wedge t_T$ на ее отрицание, проблему выполнимости – на проблему опровержимости, а затем все вхождения отрицания – на импликацию к формуле $\forall x \forall y xPy$.

Теория бинарного предиката. Из леммы 1, с учетом замечания о позитивных формулах, получаем следующее уточнение теоремы Чёрча [19]:

- позитивный фрагмент классической логики предикатов Σ_1^0 -полон в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными.

Этот факт можно обобщить на различные теории бинарного предиката: достаточно внести незначительные изменения в описанное выше моделирование. Для класса моделей C бинарного предиката элементарную теорию этого класса обозначим $Th(C)$. Пусть F, If, R, Ir, S, As, T и It – классы всех, соответственно, конечных, бесконечных, рефлексивных, иррефлексивных, симметричных, антисимметричных, транзитивных и интранзитивных моделей бинарного предиката. Если X и Y – классы моделей, то вместо $X \cap Y$ будем писать XY . Так, $IfRST$ – класс всех бесконечных моделей, являющихся одновременно рефлексивными, симметричными и транзитивными.

Теорема 1. Пусть C – класс моделей бинарного предиката, содержащий хотя бы один из следующих классов: $IfIrT, IfIt, IfRS, IfIrS$. Тогда позитивный фрагмент теории $Th(C)$ в языке с тремя переменными является Σ_1^0 -трудным.

Получаем, в частности, что теории классов If, R, Ir, S, As, T и It неразрешимы в языке с тремя предметными переменными.

Используя сходную аргументацию, можно получить следующее уточнение теоремы Трахтенброта [20, 21]:

- позитивный фрагмент теории конечных моделей Π_1^0 -полон в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.

Для обоснования этого факта достаточно учесть, что с помощью проблемы укладки коди-

руется проблема неостановки машин Тьюринга на пустой ленте, а затем изменить формулы выше так, чтобы они утверждали, что первый ряд укладки описывает начальную конфигурацию с пустой лентой, а в имеющемся начальном фрагменте укладки не встречается плитка, тип которой соответствует заключительному состоянию машины Тьюринга; отметим, что другой возможный путь состоит в использовании эффективной неотделимости [22] и теоремы 1.

Справедливо и более общее утверждение.

Теорема 2. Пусть C – класс конечных моделей бинарного предиката, содержащий FR или $FIRAsT$. Тогда позитивный фрагмент теории $Th(C)$ в языке с тремя переменными является Π_1^0 -трудным.

Обогащение языка. Покажем, что обогащение языка может привести к сильной неразрешимости, причем иногда даже при наличии в языке лишь двух переменных. Рассмотрим проблему укладки плиток домино, когда для T -укладки f дополнительно требуется, чтобы множество $\{j \in \mathbb{N} : f(0, j) = t_0\}$ было бесконечным. Известно, что эта проблема Σ_1^1 -полна [12, теорема 6.4].

Пусть в языке имеется оператор транзитивного замыкания и P^+ соответствует транзитивному замыканию P . Для формулы A определим A' как формулу, получающуюся из A заменой P на P^+ . Пусть $lx = \neg \exists y y H' x$. Пусть G^* – конъюнкция формул $\forall x \forall y (x P y \wedge \neg y P x \rightarrow x S' z)$, $\forall_g x \exists_g y x H' y$, $\forall_g x \exists_g y x V' y$, $\forall_g x \exists_g y (\exists z (x H' z \wedge z V' y) \leftrightarrow \exists z (x V' z \wedge z H' y))$, $\exists_g x (\bar{r}x \wedge lx)$ и $\forall_g x (lx \rightarrow \forall_g y (x V y \rightarrow l y))$, а t_T^* – конъюнкция t_T' и формулы $\forall_g x (lx \rightarrow \exists_g y (\neg x E' y \wedge x P^+ y \wedge l y \wedge t_0 y))$. Тогда выполнимость формулы $G^* \wedge t_T^*$ эквивалентна существованию T -укладки с дополнительным условием. Это дает Π_1^1 -трудность теорий в языке с бинарной предикатной буквой и тремя переменными; отметим, что оператор транзитивного замыкания применялся лишь к атомарным формулам.

При добавлении равенства и композиции, используя идеи, изложенные в [9], можно описать эту же проблему укладки домино, задействуя всего две переменные и одну бинарную предикатную букву. Третья переменная входит в определения для E и S , а также в один из конъюнктивных членов формулы G . Заменяем E равенством. Используя равенство и транзитивное замыкание, можно выразить условие функциональности бинарного отношения с дополнительными требованиями сюръективности и отсутствия общих элементов в области определения и прибытия, см. [9].

Это позволяет “разбить” движение по H и V на “четные” и “нечетные” шаги H_0, H_1, V_0, V_1 ; в формулах вида $t_m x$ вместо S можно использовать P ; как итог, S больше не требуется. Конъюнктивный член в G с тремя переменными заменяем на $\forall_g x \exists_g y (x [H \circ V] y \wedge x [V \circ H] y)$, где $x H y = x H_0 y \vee x H_1 y$ и $x V y = x V_0 y \vee x V_1 y$. Снова получаем Π_1^1 -трудность теорий, но при двух переменных.

Получаем следующую теорему.

Теорема 3. Проблема общезначимости формул языка логики предикатов с двумя предметными переменными, бинарной предикатной буквой и равенством, обогащенного операторами транзитивного замыкания и композиции, Π_1^1 -трудна.

Отметим, что проблема истинности формул такого языка в классе всех конечных моделей не выходит за границы класса Π_1^0 , поскольку можно эффективно перечислить как все формулы, так и все конечные модели (с точностью до изоморфизма), что позволяет построить эффективное перечисление множества опровержимых формул.

Обсуждение. Отметим, что незначительно ослабленные варианты теорем 1 и 2 могут быть получены из [10] с учетом результатов, представленных в [2, 3, 22] и др. (см. также, например, работы [23] и [24, приложение]). Так, в [10] доказана неразрешимость логики бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными, а используя переводы, описанные в [2, 3], можно получить неразрешимость (с учетом [22], Σ_1^0 -трудность или Π_1^0 -трудность) различных теорий бинарного предиката в языке с конечным (иногда, возможно, довольно большим) числом предметных переменных; идея, в первом приближении, состоит в том, чтобы в переводах элиминировать некоторые переменные при появлении в формулах вложенных кванторов, поступая примерно так, как это было сделано в определении формул вида $t_m(x)$, данном выше, когда в рекурсивном описании вместо очередной новой переменной берется уже использовавшаяся, но не имеющая свободных вхождений в ранее построенных формулах.

Также отметим, что в исследованиях (см., например, [1, 3]) уделяется большое внимание разрешимости фрагментов классической логики предикатов, определяемых кванторными префиксами из некоторого регулярного множества; если такое множество бесконечно, то в нем существуют сколь угодно длинные кванторные префиксы, а значит, соответствующий фрагмент языка предполагает наличие бесконечного множества предметных переменных. Множества кванторных префиксов, для которых известна неразрешимость определяемых ими фрагментов ло-

гики бинарного предиката, бесконечны. Поэтому возникает естественный вопрос: можно ли извлечь из приведенного выше построения доказательство неразрешимости какого-либо фрагмента логики бинарного предиката, определяемого конечным множеством кванторных префиксов? Ответ здесь отрицательный: формулы вида $t_m^y(x)$ используют цепочки вложенных кванторов по переменным x и y , причем длина этих цепочек зависит от m , поэтому, преобразуя формулы вида t_T к префиксной нормальной форме, при росте числа элементов в T мы получим рост длины кванторной приставки, а значит, и рост числа переменных в получающейся формуле.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность анонимным рецензентам за их замечания и предложения, а также за обсуждение темы работы и результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены в ИППИ РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 21-18-00195.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Börger E., Grädel E., Gurevich Y.* The Classical Decision Problem. Springer, 1997.
2. *Ерошов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А.* Элементарные теории // Успехи математических наук. 1965. Т. 20. Вып. 4(124). С. 37–108.
3. *Nies A.* Undecidable fragments of elementary theories // Algebra Universalis. 1996. V. 35. P. 8–33.
4. *Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C.* Computability and Logic. Cambridge University Press, fifth edition, 2007.
5. *Surányi J.* Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionskalküls // Matematikai és Fizikai Lapok. 1943. V. 50. P. 51–74.
6. *Mortimer M.* On languages with two variables // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. V. 21. P. 135–140.
7. *Grädel E., Kolaitis P.G., Vardi M.Y.* On the decision problem for two-variable first-order logic // Bulletin of Symbolic Logic. 1997. V. 3 (1). P. 53–69.
8. *Grädel E.* On the restraining power of guards // Journal of Symbolic Logic. 1999. V. 64 (4). P. 1719–1742.
9. *Grädel R., Otto M., Rosen E.* Undecidability results on two-variable logics // Archive for Mathematical Logic. 1999. V. 38. P. 313–354.
10. *Tarski A., Givant S.* A Formalization of Set Theory without Variables. American Mathematical Society, 1987.
11. *Berger R.* The Undecidability of the Domino Problem. Volume 66 of Memoirs of AMS. AMS, 1966.
12. *Harel D.* Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness // Journal of the ACM. 1986. V. 33. P. 224–248.
13. *Conway J., Lagarias J.* Tiling with polyominoes and combinatorial group theory // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53 (2). P. 183–208.
14. *Kari J., Papasoglu P.* Deterministic aperiodic tile sets // Geometric and functional analysis. 1999. V. 9. P. 353–369.
15. *Reynolds M., Zakharyashev M.* On the products of linear modal logics // Journal of Logic and Computation. 2001. V. 11. P. 909–931.
16. *Kontchakov R., Kurucz A., Zakharyashev M.* Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. V. 11. P. 428–438.
17. *Rybakov M., Shkatov D.* Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2021. V. 31 (5). P. 1266–1288.
18. *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter // Логические исследования. 2021. V. 27 (2). P. 93–120.
19. *Church A.* A note on the “Entscheidungsproblem” // The Journal of Symbolic Logic. 1936. V. 1. P. 40–41.
20. *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 569–572.
21. *Трахтенброт Б.А.* О рекурсивной отделимости // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88. № 6. С. 953–956.
22. *Speranski S.* A note on hereditarily Π_1^0 - and Σ_1^0 -complete sets of sentences // Journal of Logic and Computation. 2016. V. 26 (5). P. 1729–1741.
23. *Nerode A., Shore R.A.* Second order logic and first order theories of reducibility ordering // The Kleene Symposium, North-Holland, editors Barwise J., Keisler H.J., Kunen K., 1980. P. 181–200.
24. *Kremer P.* On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. 1997. V. 62 (2). P. 529–544.

**COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF THEORIES
OF A BINARY PREDICATE WITH A SMALL NUMBER OF VARIABLES****M. Rybakov^a**^a *Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We prove Σ_1^0 -hardness of a number of theories of a binary predicate with three individual variables (in languages without constants or equality). We also show that, in languages with equality and the operators of composition and the transitive closure, theories of a binary predicate are Π_1^1 -hard with only two individual variables.

Keywords: first-order logic, dyadic logic, undecidability, Church's theorem, Trakhtenbrot's theorem

СУБРИМАНОВА СФЕРА КАРТАНА

© 2022 г. Ю. Л. Сачков^{1,*}

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе

Поступило 14.06.2022 г.

После доработки 31.08.2022 г.

Принято к публикации 13.09.2022 г.

Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Картана с 3-мерным инвариантным многообразием основных симметрий.

Ключевые слова: группа Картана, субриманова геометрия, субриманова сфера

DOI: 10.31857/S2686954322600434

1. ГРУППА КАРТАНА

Алгебра Картана – это свободная нильпотентная алгебра \mathfrak{g} с 2-мя образующими глубины 3. В ней существует базис X_1, \dots, X_5 , в котором ненулевые скобки имеют вид

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Алгебра Картана имеет градуировку

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)},$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}(X_1, X_2), \quad \mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3,$$

$$\mathfrak{g}^{(3)} = \text{span}(X_4, X_5),$$

$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}, \quad \mathfrak{g}^{(4)} = \{0\},$$

поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$ можно ввести закон умножения, превращающий это пространство в группу Картана: $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$, см. [14] и статьи, цитированные в этой работе. В этой модели левоинвариантные поля, порождающие алгебру Картана, имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

2. ПОСТАНОВКА СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРУППЕ КАРТАНА

2.1. Геометрическая постановка

Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S , с центром масс c .

2.2. Задача оптимального управления

Эту геометрическую задачу можно переформулировать [13] как задачу оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad (1)$$

$$q = (x, y, z, v, w) \in G = \mathbb{R}^5,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (2)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Это субриманова задача для субримановой структуры на \mathbb{R}^5 , заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером. Эта субриманова структура – единственная, с точностью до автоморфизма группы Картана, левоинвариантная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Следовательно, можно считать, что $q_0 = \text{Id} = (0, \dots, 0)$.

¹ Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Россия
*E-mail: yusachkov@gmail.com

3. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Субриманова задача на группе Картана есть простейшая левоинвариантная задача со следующими свойствами:

- она имеет аномальные кратчайшие, касающиеся каждого вектора распределения,
- это следующая по сложности после задачи Дидоны задача на свободной группе Карно максимального роста (ее вектор роста равен (2, 3, 5)).

Эта задача – единственная свободная нильпотентная субриманова задача глубины 3 с интегрируемым по Лиувиллю нормальным гамильтоновым полем принципа максимума Понтрягина (неинтегрируемыми по Лиувиллю являются свободные нильпотентные задачи глубины 3, ранга более 2 [4], а также глубины более 3, ранга не менее 2 [1]).

Распределение $\Delta = \text{span}(X_1, X_2)$ имеет 14-мерную алгебру инфинитезимальных симметрий – особую алгебру \mathfrak{g}_2 , этот факт восходит к знаменитой “пятимерной” работе Эли Картана [5].

Наконец, субриманова задача на группе Картана доставляет нильпотентную аппроксимацию любой задачи с вектором роста (2, 3, 5), в частности:

- задачи о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [9, 10],
- машины с двумя прицепами [11],
- задачи о движении электрического заряда в плоскости под действием магнитного поля [12].

Любой из этих причин достаточно для детального исследования субримановой задачи на группе Картана.

4. РАНЕЕ ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним некоторые из результатов, полученных в предыдущих работах [13–16].

- Аномальные траектории (соответствующие аномальному случаю $v = 0$ принципа максимума Понтрягина [2, 3]):

- однопараметрические подгруппы $e^{\pm t(u_1 X_1 + u_2 X_2)}$, $u_i \equiv \text{const}$,
- проецируются на плоскость (x, y) в прямые,
- поэтому оптимальны,
- нестрого аномальны, т.е. одновременно являются нормальными.

- Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle \lambda, X_1 \rangle^2 + \langle \lambda, X_2 \rangle^2) / 2$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= c, & \dot{c} &= -\alpha \sin(\theta + \beta), & \dot{\alpha} &= \dot{\beta} = 0, \\ \dot{q} &= \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2. \end{aligned} \quad (4)$$

- В фазовом цилиндре уравнения маятника (4) введены координаты (ϕ, k) , в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot{\phi} = \sqrt{\alpha}, \quad \dot{k} = 0.$$

- Получена параметризация геодезических экспоненциальным отображением:

$$\begin{aligned} \text{Exp}: C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow G, & \text{Exp}(\lambda, t) &= \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda) = q(t), \\ C &= \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2). \end{aligned}$$

- Описана группа симметрий экспоненциального отображения

$$\text{Sym} = \text{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\text{SO}(2) = \{e^{tX_0} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$X_0 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w},$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i \mid i = 1, \dots, 4\},$$

дискретная подгруппа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ порождена отражениями $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ маятника в осях θ, c :

$$\varepsilon^1: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz),$$

$$\varepsilon^2: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz).$$

- Явно описано время разреза $t_{\text{cut}}: C \rightarrow (0, +\infty]$.

5. СУБРИМАНОВЫ РАССТОЯНИЕ И СФЕРЫ

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (метрика Карно-Караатеодори) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} d(q_0, q_1) &= \\ &= \inf \left\{ \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \mid \text{управление } (u_1, u_2)(t) \right. \\ &\quad \left. \text{переводит } q_0 \text{ в } q_1 \right\}. \end{aligned}$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Картана $L_q: q' \mapsto qq'$,

$$d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),$$

$$L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).$$

В силу того, что группа Картана есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с дилатациями:

$$\delta_\beta: (x, y, z, v, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 v, \beta^3 w), \quad \beta > 0,$$

$$d(\text{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\text{Id}, q),$$

$$\delta_\beta(S_R(\text{Id})) = S_{\beta R}(\text{Id}).$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\text{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \text{Id}) = 1\}.$$

Единичная сфера S параметризуется экспоненциальным отображением:

$$S = \{\text{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C, t_{\text{cut}}(\lambda) \geq 1\}.$$

Субриманова структура и сфера инвариантны относительно группы симметрий $\text{Sym} = SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$g(S) = S, \quad g \in \text{Sym}.$$

Основной объект этой работы – сечение сферы трехмерным инвариантным многообразием основных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\tilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{z = V = 0\},$$

$$V(q) = xv + yw - z(x^2 + y^2)/2,$$

а также его фактор по группе вращений

$$\hat{S} = \tilde{S}/SO(2).$$

Мы ограничиваемся описанием лишь сечения \tilde{S} , так как полная сфера S не допускает столь подробного исследования ввиду сложности ее параметризации: функция $t_{\text{cut}}(\lambda)$, задающая время разреза на группе Картана, в общем случае есть корень уравнения в эллиптических функциях, см. [14, 16].

6. СТРУКТУРА ФАКТОРА \hat{S}

На рис. 1 изображен фактор сечения сферы \hat{S} на группе Картана в координатах

$$a = \frac{r^2 - \sigma^2}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}}, \quad b = \frac{2r\sigma}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma = \rho - \frac{r^3}{6}, \quad \rho = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Кривая \hat{S} параметризуется параметром $k \in [0, 1]$. Имеется стратификация

$$\hat{S} = \left(\bigsqcup_{i=1}^3 \gamma_i\right) \sqcup \{A, C_0, C_1\}, \tag{5}$$

$A = e^{\cos \theta X_1 + \sin \theta X_2}$ есть точка на аномальной траектории, $k = 0$, C_0 есть точка на периодической эйлеровой эластике восьмерке (см. рис. 8 [13]),

$$x = y = 0, \quad k = k_0 \approx 0.9, \tag{6}$$

$$C_1: p_z(k) = p_V(k), \quad k = k_1 \approx 0.8,$$

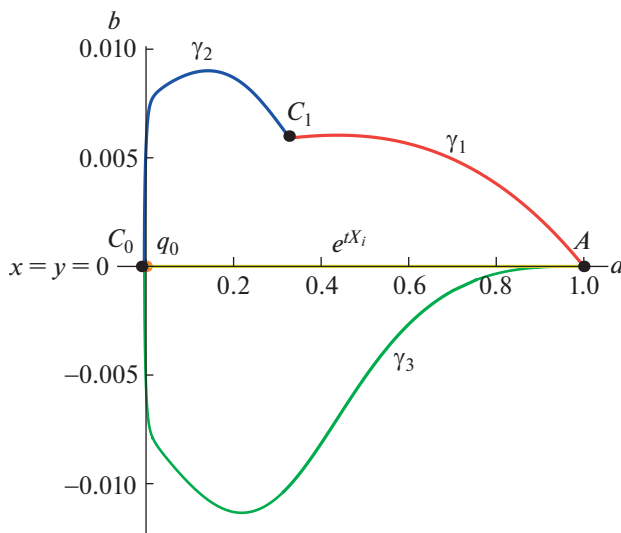


Рис. 1. Фактор сечения сферы \hat{S} на группе Картана.

$$\begin{aligned} \gamma_1: k &\in (0, k_1), \\ \gamma_2: k &\in (k_1, k_0), \\ \gamma_3: k &\in (k_0, 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Определение чисел $k_0, k_1 \in (0, 1)$, а также функций $p_z, p_V: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ приведено в работе [14].

На рис. 1:

- надпись e^{iX_i} над горизонтальным отрезком, соединяющим точки q_0 и A , обозначает аномальные траектории, соединяющие начальную точку $q_0 = \text{Id}$ с точками сферы, проецирующимися в точку A ,
- надпись $x = y = 0$ справа от точки C_0 обозначает точки периодических эластик-восьмерок,
- точка C_0 имеет координаты $(a, b) = (0, b_0)$, где $b_0 \approx -0.004$.

В последующих теоремах для краткости допускается некоторая вольность обозначений: точки множества \hat{S} рассматриваются иногда как окружности в G , а иногда как точки в G .

7. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОЧЕК ФАКТОРА \hat{S}

Напомним вкратце некоторые необходимые понятия субримановой геометрии, подробнее см. [2, 3].

В рассматриваемой задаче аномальные траектории, выходящие из точки $q_0 = \text{Id}$, суть однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения; при этом они являются субримановыми кратчайшими, т.е. реализуют минимум функционала длины (3) между любыми своими точками.

Первая сопряженная точка к q_0 на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою локальную оптимальность.

Точка Максвелла на геодезической есть точка, в которую приходят более одной геодезической одинаковой длины, начинающихся в q_0 .

Точка разреза на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою (глобальную) оптимальность.

Теорема 1.

- (1) A есть точка на аномальной кратчайшей,
- (2) C_i суть сопряженные точки к q_0 , точки Максвелла, точки разреза,
- (3) $q \in \gamma_i$ суть точки Максвелла, точки разреза, не сопряженные точки к q_0 .

8. КРАТНОСТЬ ТОЧЕК ФАКТОРА \hat{S}

Кратностью точки $q \in G$ называется мощность

$\mu(q) = \text{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}$.

Теорема 2.

- (1) $\mu(A) = 1$,
- (2) $\mu(C_i) = c$ (континуум $\cong S^1$),
- (3) $q \in \gamma_i \Rightarrow \mu(q) = 2$.

9. РЕГУЛЯРНОСТЬ \hat{S} И \tilde{S}

Теорема 3.

- (1) кривые γ_i аналитичны и регулярны,
- (2) A, C_i суть особые точки, в них \hat{S} негладкая, но липшицева,
- (3) замыкания
 - (3.1) $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 \cup \{A, C_0\}$,
 - (3.2) $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_0, C_1\}$,
 - (3.3) $\bar{\gamma}_3 = \gamma_1 \cup \{C_0, A\}$,
 суть гладкие кривые класса C^∞ .

Теорема 4. \tilde{S} есть липшицево многообразие, аналитически диффеоморфное $\hat{S} \times S^1$ и билипшицево эквивалентное (потому гомеоморфное) тору \mathbb{T}^2 .

10. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФАКТОРА \hat{S}

Множество называется *аналитическим*, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется *полуаналитическим* [6], если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной

системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется *субаналитическим* [7], если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Теорема 5.

- Множество $\hat{S} \setminus \{A\}$ полуаналитично, потому субаналитично.
- В окрестности точки A кривая γ_3 есть график гладкой неаналитической функции.
- Поэтому множество \hat{S} несубаналитично.
- Следовательно, сфера S несубаналитична.

11. Exp–log КАТЕГОРИЯ

Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит exp–log категории [18], если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадлежит exp–log категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого – функции из exp–log категории.

Теорема 6. В окрестности точки A кривая γ_3 есть график функции из exp–log категории. Поэтому множество \hat{S} принадлежит exp–log категории.

12. СТРАТИФИКАЦИЯ УИТНИ

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к *стратификации Уитни* [17]:

- если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни [7],
- если множество принадлежит exp–log категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни [8].

Теорема 7. Разбиение (5) есть стратификация Уитни.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания по изложению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локуцкий Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 5. С. 74–119.
2. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, Berlin. 2004.
3. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019.
4. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups, Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. № 6. P. 759–774.
5. Cartan E. Lès systemes de Pfaff a cinque variables et lès equations aux derivees partielles du second ordre // Ann. Sci. École Normale. 1910. V. 27. № 3. P. 109–192.
6. Łojasiewicz S. Ensembles semi-analitiques, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1964.
7. Hironaka H. Subanalytic sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya, 1973. P. 453–493.
8. Ta Lê Loi. Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures // Illinois J. Math. 1998. V. 42. Is. 2. P. 347–356.
9. Li Z., Canny J., Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. V. 1. № 6. P. 62–72.
10. Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: the holonomic case, in book: “Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control”, publ. Univ. Colorado, Boulder, G. Ferreyra et al. Eds., 1999. P. 241–256.
11. Laumond J.P. Nonholonomic motion planning for mobile robots // Preprint No. 98211. Toulouse, France: LAAS-CNRS, 1998.
12. Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F. Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics // Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications. Singapore: World Scientific, 2002. P. 183–202.
13. Сачков Ю.Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны. Мат. Сборник. 2003. V. 194 (9). P. 63–90.
14. Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны. Мат. Сборник. 2006. Т. 197. № 6. С. 111–160.
15. Sachkov Yu.L. Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // Journal of Dynamical and Control Systems. 2021. V. 27. P. 709–751.
16. Ardentov A., Hakavuori E. Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // ESAIM:COCV. 2022. V. 28. P. 12.
17. Горески М., Макферсон Р. Стратифицированная теория Морса, М.: Мир, 1991.
18. Van Den Dries L., Macintyre A., Marker D. The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation // Ann. of Math. 1994. V. 140. № 2. P. 183–205.

SUB-RIEMANNIAN CARTAN SPHERE

Yu. L. Sachkov^a^a Ailamazyan Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

The structure of intersection of the sub-Riemannian sphere on the Cartan group with a 3-dimensional invariant manifold of main symmetries is described.

Keywords: Cartan group, sub-Riemannian geometry, sub-Riemannian sphere

УДК 005.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО КРЕДИТА В РОССИИ В УСЛОВИЯХ САНКЦИЙ

© 2022 г. Н. В. Трусов^{1,2,3,4,*}, академик РАН А. А. Шананин^{1,2,3,4,5,**}

Поступило 18.10.2022 г.

После доработки 22.10.2022 г.

Принято к публикации 08.11.2022 г.

В статье разработана и исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. В модели предполагается, что доходы заемщиков описываются геометрическим броуновским движением. Коммерческие банки оценивают риски дефолта заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца оценка сводится к решению краевой задачи уравнений с частными производными, для которой построено аналитическое решение. Модель применена для анализа проблемы сохранения в сложившихся условиях потребительского кредита как механизма социальной адаптации домашних хозяйств.

DOI: 10.31857/S2686954322600525

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние двадцать лет в России значительно вырос рынок потребительского кредита. Задолженность домашних хозяйств по потребительскому кредиту достигла 12.5 триллионов рублей, что составляет более 12% годового ВВП РФ и более 9% от активов консолидированного баланса коммерческих банков РФ. Поскольку отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам изменялось в последнее десятилетие в диапазоне от 2.5 до 3.5, потребительский кредит являлся одним из самых привлекательных активов для коммерческих банков. Рост спроса на потребительский кредит, с одной стороны, отражает формирование в РФ “среднего слоя” в последние двадцать лет. Домашние хозяйства, относящиеся к “среднему слою”, управляют динамикой своих расходов, используя потребительский кредит, и измеряют свой спрос с величиной процентной

ставки на кредит. С другой стороны, потребительский кредит в России выполнял функцию социальной адаптации и более половины по суммарному объему выданных кредитов составляют заимствования малообеспеченных домашних хозяйств, которые предъявляют спрос на кредит в сложных жизненных обстоятельствах в независимости от величины процентной ставки. Такая структура заемщиков повышает вероятность неисполнения обязательств по погашению кредита и порождает риски для банковской системы, которые вызвали озабоченность у руководства министерства экономического развития еще летом 2019 г. Пандемия COVID-19 оказала влияние на экономическое положение домашних хозяйств и усложнила состояние рынка потребительского кредита.

Наложенные в 2022 г. на Россию санкции были направлены на снижение уровня жизни домашних хозяйств за счет кризиса банковской системы и инфляции. Санкции ставят целью обострить социальную напряженность, снизить эффективность управления на федеральном уровне и вызвать дезинтеграцию власти. Ответные меры правительства предполагают компенсацию потерь домашних хозяйств в реальных располагаемых доходах. Имеются два канала поддержки и социальной адаптации домашних хозяйств: прямые трансферты из бюджета и потребительский кредит. Возникает вопрос: как изменится в сложившихся обстоятельствах рынок потребительского кредита и сможет ли он выполнять функцию социальной адаптации в сочетании с прямыми трансфертами из бюджета? В новых условиях из-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁴ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

⁵ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*E-mail: trunick.10.96@gmail.com

**E-mail: alexshan@yandex.ru

менились подходы коммерческих банков к выдаче потребительских кредитов. Поэтому для анализа возможных стратегий управляющих органов РФ и ответа на поставленный вопрос нужно использовать математические модели, в которых поведение на рынке потребительского кредита коммерческих банков, домашних хозяйств из различных социальных слоев описываются на основе исследования их интересов и логики поведения в изменяющихся условиях. Модели спроса на потребительский кредит домашних хозяйств из различных социальных слоев разрабатывались в [1, 2] и использовались для анализа состояния рынка потребительского кредита России в 2019–2021 гг. В этом анализе предполагалось, что коммерческие банки, имея большие запасы ликвидности, будут вести себя инерционно и их поведение можно моделировать эконометрическими моделями. В новых условиях дефицита ликвидности поведение ведущих коммерческих банков на рынке потребительского кредита изменилось и его нужно моделировать на основе анализа интересов и логики их поведения. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Предполагается, что коммерческие банки назначают ставку по потребительскому кредиту, исходя из своих интересов, оценивая ответное поведение домашних хозяйств.

В разделе 2 содержатся результаты работы [2] по моделированию спроса на потребительский кредит на основе концепции рационального репрезентативного домашнего хозяйства. В результате анализа задачи оптимального управления, моделирующей экономическое поведение рационального репрезентативного домашнего хозяйства, выделены четыре типа заемщиков, соответствующие различным социальным слоям населения. В разделе 3 поставлена и исследована задача о формировании коммерческим банком процентной ставки по потребительскому кредиту. Модель предполагает, что доходы заемщиков описываются геометрическим броуновским движением, а коммерческие банки назначают процентную ставку, исходя из максимизации математического ожидания чистой приведенной прибыли, учитывая риски заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, удается свести решение краевой задачи к задаче Коши для уравнения теплопроводности к внешним источником и получить оценку рисков в аналитической форме. В разделе 4 построенная модель идентифицирована по данным Росстата об обследовании бюджетов домашних хозяйств и проанализированы влия-

ния шоков, вызванных санкциями, на состояние потребительского кредита в России.

2. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ДОМАШНЕГО ХОЗЯЙСТВА

Для моделирования экономического поведения социального слоя домашних хозяйств будем опираться на концепцию рационального репрезентативного экономического агента, восходящую к работе Ф. Рамсея [3]. Будем использовать модель поведения репрезентативного домашнего хозяйства в форме задачи оптимального управления из работ [2, 4, 5]. В этой модели динамика ликвидных средств домашнего хозяйства $M_0(t)$ описывается уравнением

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = S(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t). \quad (1)$$

Здесь $S(t)$ доходы домашнего хозяйства в момент времени t , относительно которых предполагается рост с темпом γ , т.е. $S(t) = S_0 e^{\gamma t}$; $C(t)$ потребление; $p(t)$ индекс потребительских цен, относительно которого предполагается рост с темпом j , т.е. $p(t) = p_0 e^{jt}$; $H_L(t)$ заимствования по потребительскому кредиту; $H_D(t)$ сбережения в форме депозитов в коммерческом банке. При этом, если домашнее хозяйство осуществляет займ на величину H_L , то $H_L > 0$, если домашнее хозяйство осуществляет платеж по потребительскому кредиту, то $H_L < 0$. Аналогично, пополнение депозитарного счета на величину H_D влечет к уменьшению запаса денег M_0 , поэтому $H_D > 0$, ежели происходит снятие средств с депозитарного счета, то $H_D < 0$. Изменение задолженности $L(t) \geq 0$ по потребительскому кредиту описывается уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \quad (2)$$

где r_L – процентная ставка по потребительскому кредиту. Уравнение изменения сбережений в форме депозитов $D(t) \geq 0$ под процентную ставку r_D :

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t). \quad (3)$$

Отсутствие арбитража предполагает, что ставка по кредитам больше ставки по депозитам, т.е. $r_L > r_D$. Закон Фишера связывает между собой запас денег $M_0(t)$ и потребительские расходы домашнего хозяйства $C(t)$ через коэффициент $\theta > 0$:

$$M_0(t) = \theta p(t)C(t),$$

где $\frac{1}{\theta} > 0$ – скорость обращения денег.

Для дальнейшего изложения удобно ввести переменную $X(t)$, определяющуюся как

$$X(t) = M_0(t) - L(t) + D(t)$$

и именуемую как финансовое состояние домашнего хозяйства. Из рационального поведения домашнего хозяйства следует, что оно не заимствует по потребительскому кредиту и не сберегает одновременно, поэтому

$$L(t) = (M_0(t) - X(t))_+,$$

$$D(t) = (X(t) - M_0(t))_+.$$

В силу уравнений (1)–(3) получаем, что динамика финансового состояния описывается динамической системой

$$\frac{dX}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M_0 - r_L (M_0 - X)_+ + r_D (X - M_0)_+, \quad (4)$$

$$X(0) = x_0. \quad (5)$$

Домашнее хозяйство стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\delta_0 > 0$ и постоянным отращением к риску $0 < 1 - \alpha < 1$ на временном интервале $[0, T]$, управляя запасом денег $M_0 \geq 0$, т.е.

$$\int_0^T (M_0(t))^\alpha e^{-\delta_0 t} dt \rightarrow \max_{M_0 \geq 0}. \quad (6)$$

Будем говорить, что финансовое состояние $X(t)$ является ликвидным, если существует управление $M_0(t)$, обеспечивающее выполнение условия $X(T) \geq 0$. Иными словами, к конечному моменту времени домашнее хозяйство должно расплатиться со своими кредитами. Пусть $x(t) = X(t)e^{-\gamma t}$, $M(t) = M_0(t)e^{-\gamma t}$, $\delta = \delta_0 + \alpha j$, $\hat{H}_L(t) = H_L(t)e^{-\gamma t}$. Задача оптимального управления на конечном временном горизонте формулируется в следующем виде

$$\int_0^T M^\alpha e^{-(\delta - \alpha \gamma)t} dt \rightarrow \max_M, \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad (8)$$

$$x(0) = x_0, x(T) \geq 0, \quad (9)$$

$$M(t) \geq 0. \quad (10)$$

Чтобы обеспечить условие $x(T) \geq 0$, необходимо выполнение неравенства $X \geq -\frac{S}{r_L - \gamma}$ (если это неравенство нарушается, то домашнее хозяйство не имеет возможности расплатиться с кредитами при сохранении конъюнктуры и образуется финансовая пирамида). Если $T \rightarrow \infty$, то это условие является не только необходимым, но и достаточным.

Зная оптимальную траекторию $M(t)$, доставляющую максимум дисконтируемому потреблению (7), можно найти финансовое состояние $x(t)$ из задачи Коши (7)–(10), а также динамику задолженности по потребительским кредитам $L(t)$ и динамику сбережений в форме депозитов $D(t)$. В работе [2] показано, что оптимальная траектория $M(t)$ существует. В силу негладкости правой части дифференциального уравнения (8) применяется принцип максимума Понтрягина в форме Кларка, с помощью которого можно выделить 3 режима экономического поведения домашнего хозяйства: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от финансового состояния и параметров конъюнктуры (подробнее см. [2]).

Если устремить временной горизонт $T \rightarrow \infty$ в задаче оптимального управления (7)–(10), то можно построить синтез задачи оптимального управления практически в аналитическом виде (см. [2]). Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от текущего значения фазовой переменной x и параметров экономической конъюнктуры. Он зависит от соотношения величин $r_L, r_D, \delta - \frac{1 - \alpha}{\theta}, \delta + (1 - \alpha)\gamma$ и определяет социальный слой, к которому относится домашнее хозяйство. Перебирая всевозможные допустимые сочетания величин $r_L, r_D, \delta - \frac{1 - \alpha}{\theta}, \delta + (1 - \alpha)\gamma$, можно получить различные типы социальных слоев, подробное описание которых представлено в [2]. Отметим, что в каждом социальном слое определяются режимы, в которых может находиться домашнее хозяйство.

Нас интересует проблема роста задолженности по потребительскому кредиту. Покажем, как с помощью представленной модели можно вычислить спрос на потребительский кредит \hat{H}_L . Тогда из уравнения баланса ликвидных средств заемщика (1) с учетом динамики финансового состояния домашнего хозяйства (4) и введенных перенормировок получаем, что спрос на потребительский кредит описывается уравнением

$$\hat{H}_L = \left(\frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - S + \gamma M(x) + \frac{M(x)}{\theta} \right)_+,$$

или, что то же самое, в силу (4)

$$\hat{H}_L = \left(\frac{dM(x)}{dx} \left(S - \gamma x - \frac{M(x)}{\theta} - r_L (M(x) - x)_+ \right) - S + \gamma M(x) + \frac{M(x)}{\theta} \right)_+, \quad (11)$$

где $M(x) = M(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ – синтез оптимального управления.

В зависимости от соотношения величин r_L , $\delta - \frac{1-\alpha}{\theta}$, $\delta + (1-\alpha)\gamma$ выделяются 4 типа поведения заемщиков, соответствующие различным социальным слоям.

Тип поведения 1. Если $r_L < \delta - \frac{1-\alpha}{\theta}$, $1 + \gamma\theta \geq 0$, или $r_L < \delta + (1-\alpha)\gamma$, $1 + \gamma\theta < 0$, то синтез опти-

мального управления задается функцией

$$M(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right),$$

откуда

$$\frac{dM(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta)}{dx} = \frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}.$$

Спрос на потребительский кредит определяется как

$$\hat{H}_L = \frac{(\delta - \alpha r_L)((r_L - \delta)\theta + (1-\alpha))}{(1-\alpha)^2(1+\theta r_L)} \cdot x + \frac{(1-\alpha)(r_L - \gamma)(\theta(\delta - r_L) - (1-\alpha))S + ((1-\alpha) - \theta(\delta - \alpha r_L))(\delta - \alpha r_L)S}{(1-\alpha)^2(r_L - \gamma)(1+\theta r_L)}.$$

В данном типе поведения домашнее хозяйство осуществляет займы по потребительскому кредиту вне зависимости от своего финансового состояния.

Тип поведения 2. Если $\delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$, $1 + \theta\gamma < 0$, то синтез оптимального управления задается функцией

$$M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta) = \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) x,$$

откуда

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}.$$

Спрос на потребительский кредит определяется как

$$\hat{H}_L = \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L) + (1-\alpha)(1+\theta r_L)}{(1-\alpha)\theta} \right) \times \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) \cdot x + \left(\frac{\theta(\delta - r_L) - (1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) \cdot S.$$

В данном типе поведения домашнее хозяйство также осуществляет займы по потребительскому кредиту вне зависимости от своего финансового состояния.

Тип поведения 3. Если $\delta - \frac{1-\alpha}{\theta} < r_L < \delta + (1-\alpha)\gamma$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < \frac{(\delta - \alpha r_L)S}{(r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta})(r_L - \gamma)}$, то синтез оптимального управления и спрос на потребительский кредит повторяют тип поведения 1. В противном случае, если $1 + \theta\gamma \geq 0$, $x \geq$

$\frac{(\delta - \alpha r_L)S}{(r_L - \delta + \frac{1-\alpha}{\theta})(r_L - \gamma)}$, то потребительский кредит не заимствуется.

Тип поведения 4. Если $\delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$, $1 + \theta\gamma \geq 0$, а финансовое состояние $x < \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$, то синтез определяется из решения уравнения

$$x + \frac{S}{r_L - \gamma} = \frac{S(1+\theta r_L)(\delta + (1-\alpha)\gamma - r_L)}{(\delta - \alpha r_L)(1+\gamma\theta)(r_L - \gamma)} \times \left(\frac{M_2(1+\gamma\theta)}{S\theta} \right)^{\frac{(1-\alpha)(\gamma-r_L)}{(\delta+(1-\alpha)\gamma-r_L)}} + \left(\frac{(1-\alpha)(1+\theta r_L)}{\theta(\delta - \alpha r_L)} \right) M_2, \quad (12)$$

которое имеет два положительных решения относительно переменной M_2 . Определим $M_2(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ как минимальное решение уравнения (12). Функция $M_2(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta)$ – дифференцируемая функция по теореме о неявной функции. Тогда

$$\frac{dM(x)}{dx} = \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) \times \left[1 - \left(\frac{M(1+\gamma\theta)}{S\theta} \right)^{\frac{-\delta+\alpha r_L}{(\delta+(1-\alpha)\gamma-r_L)}} \right]^{-1}.$$

Спрос на потребительский кредит определяется как

$$\hat{H}_L = \frac{M}{\theta} - S + \gamma M + \left(\frac{\theta(\delta - \alpha r_L)}{(1-\alpha)(1+\theta r_L)} \right) \times \left[1 - \left(\frac{M(1+\gamma\theta)}{S\theta} \right)^{\frac{-\delta+\alpha r_L}{(\delta+(1-\alpha)\gamma-r_L)}} \right]^{-1} \times \left(S - \gamma x - \frac{M}{\theta} - r_L(M - x) \right).$$

В случае $x \geq \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$ потребительский кредит не осуществляется.

Для использования модели необходимо задать поведенческие характеристики репрезентативного домашнего хозяйства, характерные для данного социального слоя: скорость обращения денег $\frac{1}{\theta}$, отвращение к риску $1 - \alpha$, коэффициент дисконтирования δ и показатели экономической конъюнктуры: процентную ставку по кредитам r_L , темп роста доходов γ и инфляцию j . Для калибровки модели экономического поведения домашних хозяйств были использованы данные Росстата. Росстат предоставляет ежеквартальную статистику Обследования Бюджетов Домашних Хозяйств (ОБДХ) [6], проводя опрос среди 50 000 домашних хозяйств, проживающих в 82 регионах России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разделены на 3 группы: богатую, среднюю и бедную. Основываясь на данных ОБДХ, мы обратили внимание, что примерно половина домашних хозяйств, относящихся к бедной группе регионов, проживает в городском типе населенного пункта, а вторая половина в селе. Поскольку стиль жизни в городе отличается от села, то кагорта домашних хозяйств из бедной группы регионов была разделена еще на две. В каждой группе регионов выделяются слои населения с разными уровнями доходов и расходов.

Мы разделили участников опроса ОБДХ на заемщиков и прочих домашних хозяйств, не выплачивающих кредит. Заемщики делятся на два типа: низкодоходные, имеющие высокий риск невозврата кредита, и высокодоходные. Анализируя статистику ОБДХ, можно видеть, что подушевые доходы у высокодоходных заемщиков примерно в 2 раза больше, чем подушевые доходы у низкодоходных заемщиков. Для идентификации поведенческих характеристик репрезентативных домашних хозяйств, относящихся к определенному слою, решаются обратные задачи. Для работы со статистикой ОБДХ, выделения социальных слоев домашних хозяйств в разных группах регионов, идентификации параметров модели, верификации полученных данных и построения прогнозов был разработан специальный программный комплекс в виде приложения MatLab AppDesigner [7].

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО КРЕДИТА

Рынок потребительского кредита является несовершенным рынком, на котором домашние хозяйства предъявляют спрос на кредит, а коммерческие банки предоставляют кредит. Формирование процентной ставки на рынке потребительского кредита

моделируется с помощью равновесия по Штакельбергу. Коммерческие банки, оценив зависимость спроса на кредит в зависимости от процентной ставки, устанавливают процент по потребительскому кредиту на уровне, который максимизирует их прибыль.

Основной формой платежа по потребительскому кредиту является аннуитетный платеж. Пусть как и раньше r_L – месячная ставка по вновь выдаваемому кредиту, \hat{T} – срок кредита, исчисляемый в месяцах. Задолженность по кредиту равна $\hat{H}_L(r_L)e^{r_L\hat{T}}$, где $\hat{H}_L(r_L)$ – текущий спрос на кредит. Аннуитетный платеж A можно найти из уравнения

$$\hat{H}_L(r_L)e^{r_L\hat{T}} = A \int_0^{\hat{T}} e^{r_L(\hat{T}-t)} dt,$$

откуда

$$A = \frac{r_L}{1 - e^{-r_L\hat{T}}} \hat{H}_L(r_L).$$

Коммерческие банки учитывают риск неплатежеспособности заемщика. Обозначим через τ момент времени, когда заемщик не сможет выполнять обязательства по аннуитетному платежу. С точки зрения коммерческих банков доходы заемщиков $S(t)$ не являются стабильными. Будем предполагать, что коммерческие банки моделируют доходы заемщика с помощью стохастического дифференциального уравнения геометрического броуновского движения

$$dS = \gamma S dt + \sigma S dW_t,$$

$$S(0) = S_0,$$

где γ – темп роста доходов, W_t – винеровский процесс, $\sigma > 0$ – параметр волатильности. Предположим, что заемщик объявляет дефолт по кредиту, если его доход не позволяет осуществлять аннуитетный платеж A и потребительские расходы на минимальном уровне μ , т.е.

$$\tau = \min \left(\inf_t \{S(t) < A + \mu\}, \hat{T} \right).$$

Поскольку доход заемщика является случайным процессом, величина $\tau \in (0, \hat{T})$ является случайным моментом останковки. Коммерческие банки устанавливают процентную ставку по потребительскому кредиту, максимизируя математическое ожидание чистой приведенной прибыли (NPV), т.е.

$$NPV(r_L) = \mathbb{E}_\tau \left(A \int_0^\tau e^{-\lambda t} dt - \hat{H}_L(r_L) \right) = \mathbb{E}_\tau \left(\left(\frac{r_L(1 - e^{-\lambda\tau})}{\lambda(1 - e^{-r_L\tau})} - 1 \right) \hat{H}_L(r_L) \right) \rightarrow \max_n, \quad (13)$$

где λ – коэффициент дисконтирования финансовых потоков банками, который равен стоимости фондирования расходов для коммерческих банков.

Обозначим $\alpha_u = \frac{\sigma}{\sqrt{2\gamma - \sigma^2}}$.

Теорема. Если $\gamma > \frac{\sigma^2}{2}$, то

$$\mathbb{E}_\tau e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\hat{T}} + \frac{\alpha_u}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda\hat{T}}} e^{-\frac{\lambda}{4\alpha_u^2\tau^2} \left(\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) + \tau^2 \right)} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda\hat{T}-\tau^2}} e^{-y^2} dy \right) d\tau. \quad (14)$$

Доказательство. Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dS = S\gamma dt + \sigma S dW_t, \quad S(0) = S_0$$

имеет сильное решение (см. с. 364 в [8]):

$$S(t) = S_0 e^{\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}.$$

Откуда следует, что

$$\tau = \min \left(\hat{T}, \inf_{t \geq 0} \left\{ W_t < \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{A+\mu}{S_0} \right) - \left(\gamma - \frac{\sigma}{2} \right) t \right\} \right). \quad (15)$$

Введем следующие обозначения:

$$W_t^x = x + W_t,$$

$$\tau_x^\theta = \min \left(\theta, \inf_{t \geq 0} \left\{ W_t^x < \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{A+\mu}{S_0} \right) - \left(\gamma - \frac{\sigma}{2} \right) t \right\} \right),$$

$$u(t, x) = \mathbb{E} e^{-\lambda\tau_x^{\hat{T}-t}}.$$

Тогда $\mathbb{E}_\tau e^{-\lambda\tau} = u(0, 0)$. По формуле Фейнмана–Каца (см. теорема 21.14 на с. 378 в [8]) имеем, что $u(t, x)$ является решением следующей краевой задачи

$$\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

$$x \in \left[\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right), +\infty \right), \quad (17)$$

$$u(\hat{T}, x) = e^{-\lambda\hat{T}}, \quad (18)$$

$$u \left(t, \ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right) = e^{-\lambda t}. \quad (19)$$

Обозначим $v(t, x) = u(\hat{T} - t, x)$. Тогда

$$-\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0,$$

$$v(0, x) = e^{-\lambda\hat{T}},$$

$$x \in \left[\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right), +\infty \right),$$

$$v \left(\hat{T} - t, \ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right) = e^{-\lambda t}.$$

Эта задача эквивалентна задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником

$$-\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \alpha_u^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = \psi(t) \delta \left(x - \ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right),$$

$$v(0, x) = e^{-\lambda\hat{T}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\psi(t)$ является решением уравнения Абеля

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha_u} \int_0^t \frac{\psi(s)}{\sqrt{t-s}} ds = e^{\lambda(t-\hat{T})},$$

т.е.

$$\psi(t) = \frac{2\alpha_u}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda\hat{T}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(e^{\lambda s} - 1)}{\sqrt{t-s}} ds,$$

откуда

$$\psi(t) = \frac{\alpha_u \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda(\hat{T}-t)} \int_0^{\sqrt{\lambda\hat{T}}} e^{-x^2} dx.$$

Тогда, по формуле Пуассона, получаем

$$v(t, x) = e^{-\lambda\hat{T}} + \frac{\alpha_u e^{-\lambda\hat{T}}}{2\pi} \times \int_0^t \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t-z}} e^{-\frac{1}{4\alpha_u^2(t-z)} \left(x - \ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right)^2} e^{\lambda z} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda z}} e^{-y^2} dy \right) dz. \quad (20)$$

С учетом введенной замены $v(t, x) = u(\hat{T} - t, x)$ из (20) получаем

$$u(t, x) = e^{-\lambda\hat{T}} + \frac{\alpha_u e^{-\lambda\hat{T}}}{2\pi} \int_0^{\hat{T}-t} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\hat{T}-t-z}} e^{-\frac{1}{4\alpha_u^2(\hat{T}-t-z)} \left(x - \ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right)^2} \times e^{\lambda z} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda z}} e^{-y^2} dy \right) dz. \quad (21)$$

Подставляя $t = 0, x = 0$ в формулу (21), получаем

$$\begin{aligned}
 u(0, 0) &= e^{-\lambda \hat{T}} + \\
 &+ \frac{\alpha_u e^{-\lambda \hat{T}}}{2\pi} \int_0^{\hat{T}} \sqrt{\frac{\lambda}{\hat{T}-z}} e^{-\frac{1}{4\alpha_u^2(\hat{T}-z)} \left(\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right)^2} e^{\lambda z} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda z}} e^{-y^2} dy \right) dz = \\
 &= e^{-\lambda \hat{T}} + \frac{\alpha_u}{2\pi} \int_0^{\hat{T}} \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} e^{-\frac{1}{4\alpha_u^2 \tau} \left(\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right)^2} e^{-\lambda \tau} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda(\hat{T}-\tau)}} e^{-y^2} dy \right) d\tau = \\
 &= e^{-\lambda \hat{T}} + \frac{\alpha_u}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda \hat{T}}} e^{-\left(\frac{\lambda}{4\alpha_u^2 \tau^2} \left(\ln \left(\frac{A+\mu}{S_0} \right) \right)^2 + \tau^2 \right)} \left(\int_0^{\sqrt{\lambda \hat{T}-\tau^2}} e^{-y^2} dy \right) d\tau,
 \end{aligned}$$

что доказывает справедливость формулы (14) и завершает доказательство теоремы.

Предложение. Если $\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \leq 0$, то

$$\mathbb{E}_\tau \left(\frac{r_L(1 - e^{-\lambda \tau})}{\lambda(1 - e^{-r_L \hat{T}})} - 1 \right) \leq 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}$. Тогда уравнение (16) на множестве (17) с краевыми условиями (18)–(19) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= 0, \\
 x &\in \left[\ln \left(\frac{A + \mu}{S_0} \right), +\infty \right), \\
 u(\hat{T}, x) &= e^{-\lambda \hat{T}}, \\
 u \left(t, \ln \left(\frac{A + \mu}{S_0} \right) \right) &= e^{-\lambda t},
 \end{aligned}$$

единственным решением которого является функция $u(t, x) = e^{-\lambda t}$. Тогда $u(0, 0) = 1$ и множитель

$$\left(\frac{r_L(1 - e^{-\lambda \tau})}{\lambda(1 - e^{-r_L \hat{T}})} - 1 \right) = -1 < 0,$$

т.е. банку не выгодно выдавать потребительский кредит заемщику (напомним, что займ по потребительскому кредиту домашним хозяйством соответствует $\hat{H}_L > 0$).

Если $\gamma < \frac{\sigma^2}{2}$, то вероятность неплатежеспособности домашнего хозяйства по займу вырастает, выход на граничное условие (15) происходит раньше. Значит, $u(0, 0) > 1$ и множитель

$$\left(\frac{r_L(1 - e^{-\lambda \tau})}{\lambda(1 - e^{-r_L \hat{T}})} - 1 \right) < -1,$$

следовательно, банку также не выгодно выдавать потребительский кредит. Предложение доказано.

Замечание. Если $\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \leq 0$, то выдача потребительского кредита убыточна для коммерческого банка.

Мы используем средневзвешенную ставку по потребительскому кредиту в качестве параметра модели, поэтому считаем, что репрезентативное домашнее хозяйство осуществляет займ по потребительскому кредиту под процент \tilde{r}_L , где

$$\frac{d\tilde{r}_L}{dt} = (r_L - \tilde{r}_L) \cdot \frac{\hat{H}_L(r_L)}{M(x; r_L, r_D, \gamma, \theta, \alpha, \delta)}, \tag{22}$$

а r_L является максимумом чистой приведенной прибыли (13).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для построения прогнозов поведения заемщиков необходимо задать динамики доходов населения, ставок по кредитам и инфляции. Согласно данным Росстата месячная инфляция в марте 2022 г. составила 7.8%, после которой месячная инфляция резко сократилась. С учетом прогнозов Росстата мы предполагаем, что к концу 2022 г. ожидается годовая инфляция на уровне 15%.

В конце февраля 2022 г. ключевая ставка ЦБ была резко поднята до 20% годовых, количество отказов в выдаче потребительского кредита выросло до 75%. Несмотря на последующие снижения ключевой ставки ЦБ до 8%, процент, под который выдаются кредиты малоимущим домашним хозяйствам, остается запретительным и находится на уровне 40% годовых. Для моделирования процентной ставки высокодоходных заемщиков подходит модель рынка потребительского кредита, представленная в разделе 3. По результатам расчетов ожидается рост процентной ставки по потребительским кредитам до 25–30% для высокодоходных заемщиков к середине 2023 г.

В связи с уходом крупных фирм из России весной 2022 г., остановки заводов производства, небольшая часть населения потеряла доходы. Основные потери доходов пришлись на малоимущие слои населения. Мы полагаем, что к концу 2023 г. номинальное падение доходов у малоимущих слоев населения составит 15% по отношению к началу 2022 г., в то время как динамика доходов у высокодоходных слоев населения будет сохраняться прежней.

4.1. Сценарий 1. Анализ финансового положения заемщиков

По результатам расчетов, весной 2022 г. разоряются как низкодоходные, так и высокодоход-

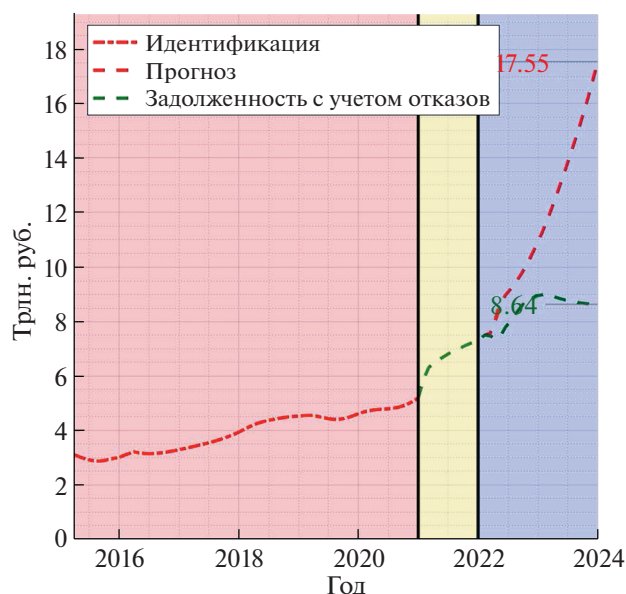


Рис. 1. Суммарная задолженность низкодоходных заемщиков.

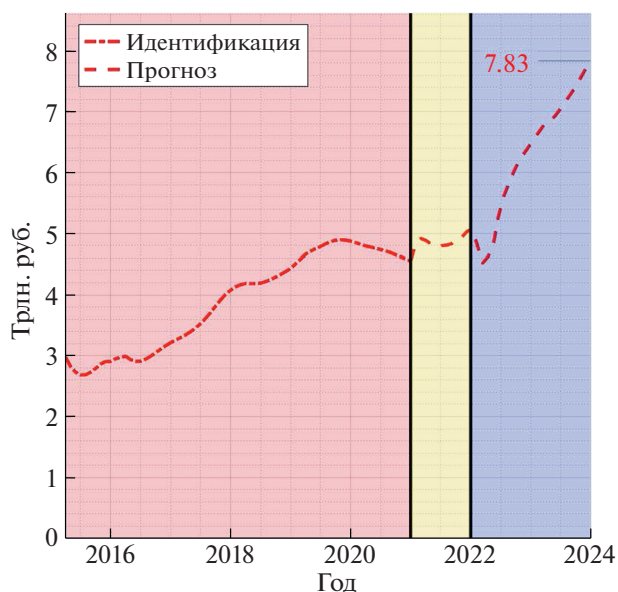


Рис. 2. Суммарная задолженность высокодоходных заемщиков.

ные заемщики во всех группах регионов (нарушается условие платежеспособности $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$).

После весны 2022 г. платежеспособность заемщиков восстанавливается, но начиная с конца 2022 г. — начала 2023 г. низкодоходные заемщики вновь утрачивают свою платежеспособность, что приводит к ощутимому росту спроса на потребительский кредит среди малоимущих слоев населения. Как отмечалось ранее, с марта 2022 г. резко выросло количество отказов в выдаче потребительского кредита низкодоходным заемщикам. При подсчете суммарной задолженности по всем группам регионов мы учитываем эту тенденцию и считаем, что если малоимущее домашнее хозяйство находится в состоянии неплатежеспособности, то коммерческие банки не выдают ему потребительский кредит.

На рис. 1–2 представлены суммарные задолженности по всей стране с дифференциацией на низкодоходных и высокодоходных заемщиков. Области описывают три этапа использования модели: идентификации с марта 2015 г. по декабрь 2020 г., верификации с января 2021 г. по декабрь 2021 г. и периода построения прогнозов с января 2022 г. по декабрь 2023 г.

Отметим, что если бы банки выдавали малоимущим домашним хозяйствам потребительские кредиты, то они бы поддерживали их уровень потребления на минимальном уровне, но это бы привело к ощутимому росту задолженности до 17.55 трлн руб. к концу 2023 г., а общая задолженность составила бы 25.38 трлн руб. Отказы в выдаче потребительского кредита малоимущим слоям

населения приводят к социальной напряженности. На начало 2022 г. суммарная задолженность по потребительскому кредиту составляла 12.6 трлн руб. В данном сценарии с учетом отказов в выдаче кредитов к концу 2023 г. итоговая задолженность вырастет до 16.47 трлн руб., при этом объем отказов за прогнозный период составит 8.91 трлн руб. Потребительский кредит перестает выполнять роль социальной адаптации домашних хозяйств.

4.2. Сценарий 2. Субсидирование низкодоходных заемщиков

Главная проблема потребительского кредитования в России заключается в платежеспособности малоимущих заемщиков. Данный сценарий является ответом на вопрос: можно ли сохранить роль социальной адаптации у потребительского кредита за счет адресной финансовой поддержки малоимущих заемщиков? Предполагается рост доходов малоимущих заемщиков с августа 2022 г. до конца 2023 г. за счет осуществления их финансовой поддержки через государственные структуры. Было посчитано, что за этот период необходимо выделить 58.9 млрд руб. малоимущим заемщикам, проживающим в городском типе бедной группы регионов, 70.6 млрд руб. в сельском типе бедной группы регионов, 594.1 млрд руб. в средней группе регионов и 246 млрд руб. в богатой группе регионов. Данные величины были рассчитаны исходя из условия сохранения платежеспособности низкодоходных заемщиков после весны 2022 г. во всех группах регионов. Итоговая задол-

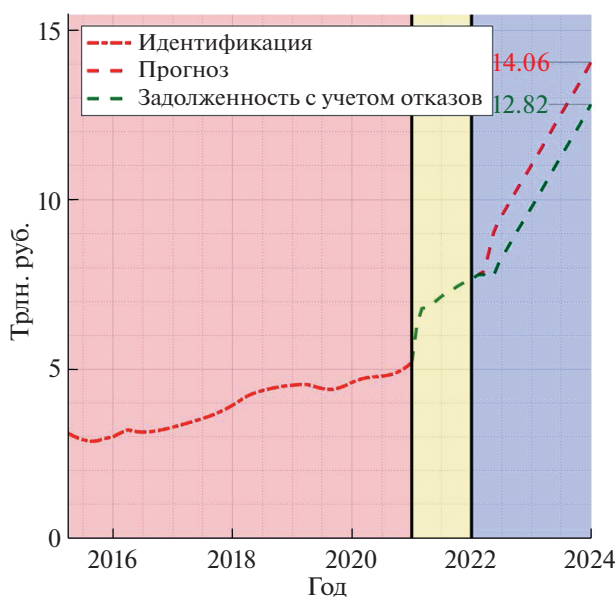


Рис. 3. Суммарная задолженность низкодоходных заемщиков.

женность низкодоходных заемщиков во всех группах регионов представлена на рис. 3.

При выделении субсидий низкодоходным заемщикам в размере 969.6 млрд руб до конца 2023 г. их платежеспособность восстанавливается, а отказы в выдаче осуществлялись бы в весенний период 2022 г. Объем отказов в выдаче потребительского кредита составил бы 1.24 трлн руб, а итоговый рост задолженности за два года с учетом задолженности высокодоходных заемщиков вырос бы на 9.29 трлн руб.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экономическое поведение репрезентативного домашнего хозяйства описано в виде задачи оптимального управления рамсеевского типа. Используя данные ОБДХ Росстата, были выделены репрезентативные домашние хозяйства из различных групп регионов России. Модель идентифицирована по статистическим данным ОБДХ за март 2015 г. – декабрь 2020 г. и верифицирована по статистическим данным за 2021 г. С помощью модели проанализирована платежеспособность низкодоходных и высокодоходных домашних хозяйств до конца 2023 г. Назначение процентной ставки по кредитам для высокодоходных заемщиков моделируется исходя из максимизации приведенной чистой прибыли для коммерческих банков. Моделирование процентной ставки основывается на формуле Фейнмана–Каца.

Выяснилось, что основная проблема потребительского кредитования заключается в скорой неплатежеспособности малоимущих заемщиков, процентные ставки по кредитам для которых в

настоящий момент являются запретительными. Отказы в выдаче потребительского кредита малоимущим домашним хозяйствам ведет к социальной напряженности. Расчеты по модели показывают, что целевое субсидирование малоимущих граждан может восстановить их платежеспособность, и, как следствие, снизить социальную напряженность в данных слоях населения. При этом объем выделенных средств к концу 2023 г. составляет менее 1 трлн руб. Программный комплекс [7] позволяет анализировать экономическое положение домашних хозяйств в России с учетом региональной специфики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-07-00285).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shananin A.A., Trusov N.V.* The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. V. 42. № 7. P. 1738–1752.
2. *Тарасенко М.В., Трусков Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // *ЖВМ и МФ*. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
3. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of savings // *The Economic Journal*. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
4. *Рудева А.В., Шананин А.А.* Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // *Дифференциальные уравнения*. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799–1803.

5. *Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V.* Consumer Loan Demand Modeling // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends*. 2021. CCIS. V. 1476. P. 417–428.
6. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2020. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 02.08.2022)
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №. 2022619524 “Анализ спроса на потребительский кредит в РФ”. Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка №. 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022 г.
8. *Коралов Л.Б., Синай Я.Г.* Теория вероятностей и случайные процессы. М.: МЦНМО, 2013. 408 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THE CONSUMER LOAN MARKET IN RUSSIA UNDER SANCTIONS

N. Trusov^{a,b,c,d} and Academician of the RAS A. Shananin^{a,b,c,d,e}

^a *Federal Research Center “Informatics and Management” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^c *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^d *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^e *Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

The article develops and investigates a new model for the formation of interest rates on consumer loans based on the analysis of interests and the logic of commercial banks behavior. The model assumes that borrowers’ incomes are described by a geometric Brownian motion. Commercial banks assess the risks of default by borrowers. According to the Feynman–Kac formula, the estimate is reduced to solving a boundary value problem of partial differential equations. The analytical solution for this problem is constructed. The model is used to analyze the problem of maintaining consumer credit under the current conditions as a mechanism for social adaptation of the households.

УДК 519.642

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ РАНДОМИЗИРОВАННЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

© 2022 г. Член-корреспондент РАН Г. А. Михайлов^{1,2,*},
А. С. Корда^{1,**}, С. В. Рогазинский^{1,2,***}

Поступило 02.06.2022 г.
После доработки 08.09.2022 г.
Принято к публикации 21.11.2022 г.

Строятся и оптимизируются численно-статистические проекционные оценки решений интегральных уравнений с использованием полиномов Лежандра в связи с вычислительной сложностью ортогональных разложений с адаптированным весом. На основе аналитических и соответствующих численных расчетов минимизируется среднеквадратическая погрешность как функция длины используемого отрезка проекционного разложения при фиксированном объеме статистической выборки, реализуемой для оценки коэффициентов разложения. Предлагаемая методика успешно апробирована в тестовой задаче, близкой к проблеме Милна, причем она оказалась весьма эффективной, сравнительно с использованием регуляризованного разложения по полиномам Лагерра.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, проекционная оценка, среднеквадратическая погрешность, оценка по столкновениям, прямое моделирование, полиномы Лежандра, индикатриса Хеньи–Гринштейна

DOI: 10.31857/S2686954322700059

1. Работа посвящена построению и оптимизации численно-статистических проекционных оценок одномерных функциональных характеристик $\varphi(z)$, $0 \leq z \leq H < +\infty$, решения интегральных уравнений вида

$$\Phi(x) = \int_x k(x', x)\Phi(x')dx' + f(x), \quad (1)$$

или $\Phi = K\Phi + f$. Здесь $x \in R_n$, $K \in [L_1 \rightarrow L_1]$, $f \in L_1(x)$ и спектральный радиус $\rho(K_1) < 1$, где K_1 – интегральный оператор с ядром $|k(x', x)|$. Функция $\varphi(z)$ получается интегрированием решения $\Phi(x)$ по всем переменным, кроме $z \in R_1$ в некоторой

системе координат. Для простоты изложения далее предполагается, что z – одна из координат фазовой точки: $z = z(x)$.

Методом Монте-Карло уравнения типа (1) решаются с помощью моделирования специальных цепей Маркова [1]. Важной частью такого метода являются оценки функциональных зависимостей, в основном разные типы ядерных и статистических проекционных оценок (см., например, [1]). Решая конкретную задачу, необходимо проводить сравнительный анализ таких оценок, предварительно их оптимизируя. Следует отметить, что использовать статистические проекционные оценки в методе Монте-Карло впервые предложил Н.Н. Ченцов [2], разработавший общую методику их оптимизации, которая требует существенной доработки и детализации в конкретных задачах. Простая приближенная оптимизация специальных статистических проекционных оценок для решения задач из областей эффективного применения метода Монте-Карло (переноса излучения с учетом поляризации, теории разреженных газов) использована в [3, 4]. Она может быть существенно улучшена с использованием излагаемых далее результатов.

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: gam@sscc.ru

**E-mail: asc@osmf.sscc.ru

***E-mail: svr@osmf.sscc.ru

В настоящей работе предлагается детализированная универсальная методика оптимизации для практически важного класса статистических проекционных оценок с использованием комбинации аналитических и соответствующих численных расчетов.

С целью построения функции $\varphi(z) \in L_2(0, H)$ используется ее разложение по полиномам Лежандра $\{\psi_i(z)\}$ (см. [5]), ортонормированным в заданном интервале $(0, H)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\approx \varphi_m(z) = \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(z), \\ a_i &= (\varphi, \psi_i) = \int_X \varphi(x) \psi_i(z(x)) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

В процессе расчетов значения полиномов вычисляются рекуррентно [6]:

$$\begin{aligned} \psi_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \psi_1(z) = z \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \psi_{n+1}(z) &= \sqrt{4 - \frac{1}{(n+1)^2}} z \psi_n(z) - \frac{n}{n+1} \sqrt{1 + \frac{4}{2n-1}} \psi_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Использование полиномов Лежандра связано с тем, что реализация ортогональных разложений с адаптированным весом $p \approx \varphi$ может быть арифметически весьма затруднительной, как это показало решение рассматриваемой далее типовой тестовой задачи теории переноса с экспоненциальной асимптотикой $\varphi(z)$ при $H \rightarrow \infty$.

Имея достаточно хорошее приближение $\varphi \approx \varphi_0$, можно использовать оценку $\varphi_m^{(1)} = \varphi_0 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m$, для которой $\|\varphi - \varphi_m^{(1)}\| \leq \max \varphi_0 \left\| \frac{\varphi}{\varphi_0} - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m \right\|$.

Следует отметить, что численно-статистическая оптимизация оценки $\varphi_m^{(1)}$ требует дополнительного исследования в каждом конкретном случае. В рассматриваемой далее тестовой задаче использование в качестве φ_0 асимптотики решения при $H \rightarrow \infty$ не дало улучшения статистической оценки, сравнительно с $\tilde{\varphi}_m$, вследствие увеличения дисперсий оценок коэффициентов разложения и недостаточного приближения $\varphi(z)$ функцией $\varphi_0(z)$ для малых z .

2. Рандомизация оценки (2) получается путем вычисления линейных функционалов $(\varphi, \psi_i) = \int \varphi(z) \psi_i(z) dz$ методом Монте-Карло с использованием так называемой “оценки по столкновениям” (см., например, [1]) $\xi_i = \sum_{k=0}^{N_c} Q_k \psi_i(z(x_k))$. Здесь x_0, x_1, \dots, x_{N_c} – вспомогательная обрывающаяся с вероятностью 1 цепь Маркова, определя-

емая переходной плотностью $p(x', x)$ и плотностью начального состояния $f_0(x)$, $Q_0 = f(x_0)/f_0(x_0)$, $Q_k = Q_{k-1} k(x_{k-1}, x_k)/p(x_{k-1}, x_k)$, причем выполняются условия несмещенности [1]. Предполагается, что $\rho(K_p) < 1$, где K_p – интегральный оператор с ядром $k^2(x', x^2)/p(x', x)$. При сформулированных выше условиях имеем $E \xi_i = (\varphi, \psi_i) = a_i$, $D \xi_i < +\infty$.

Рандомизированная оценка после реализации N траекторий строится следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_m(z) = \sum_{i=0}^m \tilde{a}_i \psi_i(z).$$

Здесь $\tilde{a}_i = \frac{1}{N} \sum \xi_i^{(k)}$, где $\{\xi_i^{(k)}\}_{k=1, \dots, N}$ – выборочные значения “оценки по столкновениям” ξ_i . Выполняются соотношения $E \tilde{\varphi}_m = \varphi_m$, $D \tilde{\varphi}_m < +\infty$.

По аналогии с [2] имеем

$$\begin{aligned} L(m) &= E \|\varphi - \tilde{\varphi}_m\|^2 = \\ &= \sum_{i=0}^m D \tilde{a}_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^2 = L_1(m) + L_2(m), \end{aligned}$$

где $L_2(m) = \|\varphi - \varphi_m\|^2$.

3. Перейдем теперь к решению задачи минимизации квадрата среднеквадратической погрешности $L(m)$. С этой целью сформулируем утверждение, которое является простым следствием теоремы 4.10 из [5].

Лемма 1. Если для $r \geq 1$ выполняется соотношение $\frac{d^r \varphi(z)}{d^r z} < c < +\infty$, при $0 \leq z \leq H$, то

$$\|\varphi - \varphi_m\|^2 \leq \frac{C_2}{m^{2r-1}}. \quad (3)$$

Расчеты, проведенные, в частности, при выполнении работ [3, 4] и настоящей работы, показали, что изменением величины $D \tilde{a}_i$, сравнительно с a_i^2 , можно пренебречь, т.е. полагать $L_1(m) \approx C_1 m = (d/n)m$.

Было также замечено, что последовательности a_i^2 для четных и нечетных номеров в асимптотике могут существенно различаться и поэтому целесообразно с целью минимизации $L(m)$ рассматривать $L_2(m)$ для нечетных m в виде

$$L_2(m) = \sum_{i=0}^{(m+1)/2} b_i^2, \quad b_i^2 = a_{2i}^2 + a_{2i+1}^2.$$

Это свойство коэффициентов было проверено на примере разложения функции $\varphi(z) = \exp(-z/5.4)$ по полиномам Лежандра в интервале $0 < z < 10$.

Лемма 1 дает основание предполагать, что в случае достаточно гладкой $\varphi(z)$ выполняется соотношение

$$L_2(m) \leq \frac{C_2}{m^k}, \quad k \geq 1. \quad (4)$$

Достаточно просто доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Если

$$L(m) = C_1 m + \frac{C_2}{m^k}, \quad (5)$$

то выполняются соотношения

$$m_{opt} = \arg \min L(m) = \left(k \frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad (6)$$

$$L_1(m_{opt}) = k^{\frac{1}{k+1}} C_1^{\frac{k}{k+1}} C_2^{\frac{1}{k+1}}, \quad L_2(m_{opt}) = k^{-\frac{1}{k+1}} C_1^{\frac{k}{k+1}} C_2^{\frac{1}{k+1}}, \quad (7)$$

$$L(m_{opt}) = (1+k)L_2(m_{opt}).$$

Лемма 2 показывает, что при выполнении соотношения (5) асимптотически при $N \rightarrow \infty$ вследствие соотношения $C_1 = d/N$ имеем

$$m_{opt} \asymp N^{\frac{1}{k+1}}, \quad (L_2(m_{opt}))^{1/2} \asymp N^{-\frac{k}{2(k+1)}}.$$

Для решения рассматриваемой задачи минимизации $L(m)$ необходимо с помощью предварительных расчетов оценивать величины C_2 и k (C_1 – это среднее значение слабо меняющейся величины $D\tilde{a}_i$). Использование соотношения (7) для оценки k неэффективно из-за сильного возрастания относительной статистической погрешности оценок \tilde{a}_i . Поэтому для исследования асимптотики величины $L_2(m)$ используется тот факт, что соотношение $L_2(m) \asymp C_2/m^k$ соответствует соотношению $b_i^2 \asymp \frac{C_2^{(1)}}{i^{k+1}}$, причем $b_i^2/b_{i+1}^2 = ((i+1)/i)^{k+1}$.

Определив интервал (i_1, i_2) слабого изменения отношения b_i^2/b_{i+1}^2 , можно оценить подходящее значение $k+1$ путем осреднения отношений $\ln(b_i^2/b_{i+1}^2)/\ln((i+1)/i)$, т.е. по формуле

$$k+1 \approx \frac{1}{i_2 - i_1} \sum_{i=i_1}^{i_2-1} \frac{2(\ln|b_i| - \ln|b_{i+1}|)}{\ln(i+1) - \ln i}. \quad (8)$$

Заметим, что значение k в (4) практически ограничивается возможным нарастанием производных; это было замечено и при решении рас-

сматриваемой далее тестовой задачи. Оценив, как указано выше, значение k , далее можно оценить коэффициент C_2 , используя те же значения b_i^2 по формуле

$$C_2 = \frac{L_2(2i_2 + 1) - L_2(2i_1 - 1)}{\frac{1}{(2i_2 + 1)^k} - \frac{1}{(2i_1 - 1)^k}}. \quad (9)$$

Замечательным свойством этой формулы является то, что она не требует знания a_i для $i > 2i_2 + 2$.

4. В качестве тестовой рассматривалась задача об оценке плотности $\varphi(z)$ столкновений частицы в слое $0 \leq z \leq H = 10$ рассеивающего и поглощающего вещества для источника столкновений с плотностью $f(z_1, z_2, z; \omega) = e^{-z} \delta(z_1 - 0) \delta(z_2 - 0) \delta(\omega - \omega_0)$, $z > 0$, где $\omega_0 = (0, 0, 1)$ – направление скорости частицы, вызывающей начальное столкновение.

Параметры среды: коэффициент ослабления $\sigma = 1$, вероятность рассеяния $\sigma_s/\sigma = 0.9$, вероятность поглощения $\sigma_c/\sigma = 0.1$, индикатриса рассеяния Хеньи–Гринштейна:

$$g(\mu) = \frac{1 - \mu_0^2}{2(1 + \mu_0^2 - 2\mu_0\mu)^{3/2}}.$$

Средний косинус угла рассеяния $\mu_0 = 0.9$. При этом значение μ моделируется по формуле:

$$\mu = \frac{1}{2\mu_0} \left(1 + \mu_0^2 - \left(\frac{1 - \mu_0^2}{2\mu_0 \text{rand} + 1 - \mu_0} \right)^2 \right),$$

где rand – случайное число, равномерно распределенное в $(0, 1)$.

Отметим, что при $\sigma \equiv 1$ осредненная по z_1, z_2 плотность столкновений $\varphi(z) = \iiint \Phi(z_1, z_2, z; \omega) dz_1 dz_2 d\omega$, где Φ – интенсивность излучения. Таким образом, фактически рассматривается задача, близкая к проблеме Милна [7]. Для данных параметров довольно высокую точность имеет транспортное приближение [7], которое дает для $\varphi(z)$ следующую асимптотическую оценку $\varphi_{as}(z) \asymp e^{-\lambda z}$, $\lambda \approx \frac{1}{5.4}$.

Для построения оптимальной согласно сказанному выше оценки $\tilde{\varphi}_m(z)$ в рамках сформулированной физико-вероятностной модели было реализовано 10^9 траекторий частиц-квантов излучения. В результате расчетов были получены значения слагаемых $k_i + 1$ в сумме (8), приведенные для $i_1 \leq i \leq i_2 = 11$ в табл. 1. Эта таблица показывает практически достаточную устойчивость оценки параметра степенного изменения величины b_i^2

в интервале $3 \leq i \leq 11$. Из формулы (8) получаем $\tilde{k} = 4.97 \approx 5$.

По формуле (9) здесь получается значение $C_2 \approx 0.094$, а осреднение величин $D\tilde{a}_i$ в интервале $0 \leq i \leq 30$ дает $C_1 \approx 10^{-9}$. С использованием этих оценок по формулам (6), (7) получено: $m_{opt} \approx 28$, $E(\varphi - \tilde{\varphi}_{28})^2 \approx \tilde{L}(28) = 3.3 \times 10^{-8}$, т.е. среднеквадратическая погрешность оценивается величиной $\tilde{\delta}_2 = \sqrt{\tilde{L}(28)} \approx 1.8 \times 10^{-4}$.

Известно [1], что в данной задаче $\varphi(z)$ равно среднему числу пересечений частицей уровня z с весом $1/|\omega_z|$. При ограничении $|\omega_z| > \varepsilon$ дисперсия соответствующей статистической “локальной оценки” $\tilde{\varphi}_i(z)$ конечна, а относительное смещение не превосходит ε . В расчетах было использовано $\varepsilon = 10^{-6}$, а относительная статистическая погрешность при $N = 10^9$ имеет порядок величины 0.001%. В результате расчетов было получено значение $\tilde{\delta}_2^{(i)} = \tilde{\delta}_2(\tilde{\varphi}_{28} - \tilde{\varphi}_i) \approx 2.2 \times 10^{-4}$, а минимальное значение $\tilde{\delta}_2^{(i)} = 2.0 \times 10^{-4}$ реализуется при $m = 36$.

Полученное отличие $\tilde{\delta}_2^{(i)}$ от $\tilde{\delta}_2$ можно объяснить асимптотическим характером леммы 2, а также статистической погрешностью оценки $\tilde{\varphi}_i$. С помощью прямого дифференцирования интегрального уравнения вида (1) “локальная оценка” была распространена на производные функции $\varphi(z)$. Уже первая производная для больших значений z оказалась на порядок больше $\varphi(z)$; этим объясняется полученное по формуле (8) значение $k = 5$ (хотя $\varphi(z)$, по-видимому, бесконечно дифференцируема при $0 < z < H$)).

Как уже было указано в конце пункта 1 текста статьи, разложение функции φ/φ_0 здесь не улучшает оценку из-за недостаточного приближения функции $\varphi(z)$ экспонентой $\exp(-z/5.4)$. Попытка построить оценку $\tilde{\varphi}_m(z)$ на основе разложения по полиномам, ортогональным с весом $\exp(-z/5.4)$, оказалась неудачной из-за необходимости расчетов со слишком большим количеством арифметических разрядов.

Использование разложения по полиномам Лагерра, ортонормированным на $(0, +\infty)$, здесь заведомо неэффективно из-за разрыва функции $\varphi(z)$ в точке $z = H = 10$. Однако соответствующий алгоритм был улучшен путем моделирования траекторий в полупространстве $z \geq 0$ с игнорированием вклада в оценку от столкновений на траекториях, до этого покинувших слой $0 \leq z \leq H$. Таким образом, $\varphi(z)$ была продолжена непрерывно на $z \geq H$, но с разрывом 1-го рода производной для $z = H$. При этом была получена оценка $L_2(m) \approx \frac{C_2}{m}$

Таблица 1. Слагаемые в сумме (8)

i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$k_i + 1$	5.71	6.05	5.70	6.47	6.39	6.29	5.46	5.26	6.42

и соответственно (6) m_{opt} получалось путем уравнения $L_2(m)$ и $L_1(m)$. Для такого “регуляризованного” алгоритма в случае $N = 10^9$ было получено значение $\tilde{\delta}_2 \approx 3.6 \times 10^{-3}$, в то время как для алгоритма, связанного с полиномами Лежандра, имеем $\tilde{\delta}_2 \approx 1.8 \times 10^{-4}$.

Большой объем проведенных расчетов показал, что при малой величине среднеквадратического отклонения практически всегда малым является и равномерное отклонение рассматриваемой статистической проекционной оценки от искомого решения. По-видимому, это связано с достаточно точной среднеквадратической оценкой производной от решения, что требует дополнительного довольно сложного исследования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0251-2021-0002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
2. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972.
3. Михайлов Г.А., Трачева Н.В., Ухинов С.А. Рандомизированный проекционный метод для оценки угловых распределений поляризованного излучения на основе численного статистического моделирования // Comput. Math. and Math. Phys. 2016. V. 56. № 9. P. 1540–1550. <https://doi.org/10.7868/S0044466916090155>
4. Rogasinsky S. V. Two variants of Monte Carlo projection method for numerical solution of nonlinear Boltzmann equation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2019. V. 34. № 3. P. 143–150. <https://doi.org/10.1515/rnam-2019-0012>
5. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
6. Jackson D. Fourier Series And Orthogonal Polynomials. The University of Minnesota, 1941.
7. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford University Press, 1957.

CONSTRUCTION THE EFFECTIVE RANDOMIZED PROJECTIVE ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS BASED ON LEGENDRE POLYNOMIALS

Corresponding Member of the RAS **G. A. Mikhailov^{a,b}, A. S. Korda^a, and S. V. Rogasinsky^{a,b}**

^a *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

^b *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

Numerically-statistical projective estimates for solutions of integral equations are constructed and optimized using Legendre polynomials by the reason of the computational complexity of orthogonal expansions with the adapted weight. Based on the analytical and the corresponding numerical computations the mean-square error is minimizing as the function of the projection expansion segment length, while the sample size for coefficients is fixed. The proposed technique has been successfully verified in the test problem close to the Milne problem, and it turned out to be very effective in comparison with the regularized expansion by Laguerre polynomials.

Keywords: Monte Carlo method, projection estimator, mean-square error, collision estimator, direct simulation, Legendre polynomials, Henyey-Greenstein indicatrix

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2022 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 16.10.2022 г.

После доработки 24.10.2022 г.

Принято к публикации 28.10.2022 г.

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954322700060

Наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов, как известно [1–3], позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4–6]).

Как показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее четырехмерное пространство”. Эта задача приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамиче-

ские системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по трехмерной сфере с индуцированной метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Впервые частные случаи систем с тремя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предьявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru

В разделе 1 изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, трехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических.

В разделе 2 в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным в разделе 1.

В разделе 3 рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

1. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (ср. с [5, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^* = z_3 f_3(\alpha), \quad \beta_1^* = z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2^* = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (1)$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1 , z_2 , z_3 в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [5, 7, 9, 10] с семью ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{aligned} \alpha^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\alpha^{*2} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\beta_1^{*2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)\beta_2^{*2} &= 0, \\ \beta_1^{**} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha^*\beta_1^* + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{*2} &= 0, \quad (2) \\ \beta_2^{**} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\alpha^*\beta_2^* + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\beta_1^*\beta_2^* &= 0, \end{aligned}$$

т.е. остальные 11 коэффициентов связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, примут вид

$$\begin{aligned} z_1^* &= -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\ &- f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2^* &= -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_3^* &= -f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned}$$

и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(а) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного четырехмерного твердого тела.

(б) Системы на касательных расслоениях более общих трехмерных поверхностях вращения.

(в) Системы на касательном расслоении трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (то, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов, будет показано ниже).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i**} + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i(x) x^{j*} x^{k*} = 0$, $i = 1, 2, 3$, является гладкая

функция $\sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x) x^{j*} x^{k*}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме участвуют четыре дифференциальных соотношения на четыре “произвольные” функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1).

Теорема 1. Если выполнены условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \quad (4)$$

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha), \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \end{cases} \quad (6)$$

то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1 = \text{const}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z_2, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) &= f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) &= z_1 \Phi_0(\alpha) \Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Phi(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(\beta_1, \beta_2) &= \\ &= \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и фазовых $z^* = \ln \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_3^* = \ln[\sqrt{z_1^2 + z_2^2}/|z_1|]$) фазовый поток системы (1), (3) сохраняет объем на касательном расслоении TM^3 , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dz_3 \wedge dz^* \wedge dz_3^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

Заметим, что система дифференциальных равенств (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Пример 1. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или

когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos \alpha$) (задачи класса (а)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= -z_3, \quad z_3^\bullet = -(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}, \\ z_2^\bullet &= z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} + \\ &+ z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ z_1^\bullet &= z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} - \\ &- z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \beta_1^\bullet &= z_2 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \beta_2^\bullet &= -z_1 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пример 2. В случае трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (в)), четырехпараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha} (\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \beta_2^{\bullet 2}) &= 0, \\ \beta_1^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha} \alpha^\bullet \beta_1^\bullet &= 0, \quad \beta_2^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha} \alpha^\bullet \beta_2^\bullet &= 0, \end{aligned}$$

и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_3 \mu_1 \alpha, \quad z_3^\bullet = -z_2^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2} - z_1^2 \frac{\mu_1 \mu_3 \alpha^2}{\mu_3^2 \alpha^2 + \mu_4}, \\ z_2^\bullet &= z_2 z_3 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, \quad z_1^\bullet = z_1 z_3 \frac{\mu_1 \mu_3 \alpha^2}{\mu_3^2 \alpha^2 + \mu_4}, \\ \beta_1^\bullet &= z_2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_2}}, \quad \beta_2^\bullet = z_1 \frac{\mu_1 \mu_3 \alpha^2}{\mu_3^2 \alpha^2 + \mu_4}, \\ &\mu_1, \dots, \mu_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле с аддитивными компонентами $F_3(\alpha)$, $F_2(\beta_1)$, $F_1(\beta_2)$ с потенциалом (12), см. далее. В проекциях же на оси z_k^\bullet , $k = 1, 2, 3$, силовое поле будет иметь следу-

ющие комбинированные компоненты, соответственно: $F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)$, $F_2(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_3 f_3(\alpha), \\ z_3^\bullet &= F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \\ &\quad - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_2^\bullet &= F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - \\ &\quad - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1^\bullet &= F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - \\ &\quad - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\ &\quad - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2, \\ \beta_1^\bullet &= z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_1 f_2(\alpha)g(\beta_1), \end{aligned} \quad (11)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + \\ + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_2^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_1^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \\ + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_2^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + \\ + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet &= 0 \end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Теорема 2. Если выполнены условия (4)–(6), то система (11) обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) &= \\ = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha, \beta) &= C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) &= V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = \\ = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a) da - 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b) db - 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b) db, \end{aligned} \quad (12)$$

а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ – первых интегралов (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и

фазовых $z^* = \ln \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_*^* = \ln[\sqrt{z_1^2 + z_2^2}/|z_1|]$ фазовый поток системы (11) сохраняет объем на касательном расслоении TM^3 , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dz_3 \wedge dz^* \wedge dz_*^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$, вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси z_k^\bullet , $k = 1, 2, 3$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha)$, $z_2 F^1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha) + z_3 F_3^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_3^\bullet &= F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha), \\ z_2^\bullet &= -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \\ &\quad - f(\alpha)g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_1^2 + z_2 F^1(\alpha), \\ z_1^\bullet &= -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\ &\quad - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2 + z_1 F^1(\alpha), \\ \beta_1^\bullet &= z_2 f(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_1 f(\alpha)g(\beta_1), \end{aligned} \quad (13)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - \{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha)\}\alpha^\bullet - \\ - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) + \\ + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)\beta_2^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_1^{\bullet\bullet} - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \beta_1^\bullet + \\ + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma_{22}^1(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta_2^{\bullet\bullet} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \beta_2^\bullet + \\ + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + \Gamma_2(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} &= 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha, \end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы необходимо знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $z_1, z_2 \rightarrow z, z_*, z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, z_* = z_2/z_1$, система (13) распадается следующим образом:

$$\alpha^\bullet = z_3 f_3(\alpha) + b \delta(\alpha),$$

$$z_3^\bullet = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \quad (14)$$

$$z^\bullet = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha),$$

$$z_*^\bullet = (\pm) z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \quad (15)$$

$$\beta_1^\bullet = (\pm) \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha),$$

$$\beta_2^\bullet = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \quad (16)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (14), один — после замены независимой переменной — независимой системы (15), и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (16) (т.е. всего четыре).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (17)$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1 f_s(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad (18)$$

$$s = 1, 2, 3.$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$.

Условие (17) назовем “геометрическим”, а условия из группы (18) — “энергетическими”. Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (17) и (18). Тогда система (14)–(16) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [12, 13] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1, \lambda^1 = \lambda_3^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1 \left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1) z_3 \delta(\alpha) f_3(\alpha) - \lambda_3^0 \delta^2(\alpha)}{z \delta(\alpha) f_3(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (19)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (20)$$

Первый интеграл для системы (15) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \quad (21)$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (9). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (22)$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_2, C_3 можно подставить левые части первых интегралов (9), (10), соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1, \lambda^1 = \lambda_3^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_3) du_3}{U_2(C_1, u_3)}, \quad u_3 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u = \frac{z}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_3^2 + (b - \lambda^1) u_3 - \lambda_3^0,$$

$$U_2(C_1, u_3) = 2U_1(u_3) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_3)}\} / 2, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. Если для систем вида (14)–(16) выполняются геометрическое и энергетические свойства (17), (18), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие четыре инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами:

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \times \\ \times \frac{u_3^2 + u^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u},$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_3) du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\};$$

$$\rho_3(z_*, \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_*^2}} dz_* \wedge d\beta_1 \quad (\text{после замены независи-} \\ \text{мого переменного в системе (15)});$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) dz_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2),$$

но независимые с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством четыре.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного анализа – наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих (асимптотических) предельных множеств [13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [14], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [14–16]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 p.

2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 84–90.
6. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
16. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

INVARIANT VOLUME FORMS OF VARIABLE DISSIPATION SYSTEMS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

M. V. Shamolin^a

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth three-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form