

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 1

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

January–February

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

О моделях гравитационного взаимодействия <i>Н. И. Амелькин</i>	3
Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой в случае гиперболических уравнений <i>Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков</i>	18
Прохождение и захват волн в акустическом волноводе с перфорированными перегородками <i>С. А. Назаров, Л. Шенель</i>	35
Непериодические колебания микро- и наноструны в газовой среде <i>М. А. Ильгамов, И. М. Утяшев</i>	66
Шарнирный четырехзвенник: приводимость конфигурационного пространства и передаточная функция <i>М. Д. Ковалёв</i>	77
Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП <i>Р. А. Башмаков, Д. А. Насырова, В. Ш. Шагапов</i>	88
Моделирование температуры пресноводного ледового покрова при вариации температуры атмосферного воздуха <i>В. К. Гончаров</i>	105
Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин <i>А. П. Янковский</i>	121

CONTENTS

On the gravitational interaction models <i>N. I. Amel'kin</i>	3
Hodograph method for solving the problem on shallow water under a solid cover in the case of hyperbolic equations <i>T. F. Dolgikh, M. Yu. Zhukov</i>	18
Transmission and trapping of waves in an acoustic waveguide with perforated walls <i>S. A. Nazarov, L. Chesnel</i>	35
Non-periodic oscillations of micro- and nano-strings in a gaseous medium <i>M. A. Ilgamov, I. M. Utyashev</i>	66
Four-bar linkage: reducibility of the configuration space and transfer function <i>M. D. Kovalev</i>	77
Natural vibrations of fluid in a well connected to the formation, in the presence of a hydraulic fracture <i>V. Sh. Shagapov, R. A. Bashmakov, D. A. Nasyrova</i>	88
Modelling of the freshwater ice cover temperature when the atmospheric air temperature variation <i>V. K. Goncharov</i>	105
Modeling of thermo-elastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates <i>A. P. Yankovskii</i>	121

УДК 521.135

О МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. Н. И. Амелькин^{1,*}¹ Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*e-mail: namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

После доработки 20.04.2021 г.

Принята к публикации 20.05.2021 г.

В рамках задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, для которых смещения перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. Из этого семейства выделяется одна модель, в которой гравитационное взаимодействие является строго центральным, а при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек точно описывается законом тяготения Ньютона.

Ключевые слова: закон всемирного тяготения Ньютона, общая теория относительности, модели гравитационного взаимодействия

DOI: 10.31857/S0032823521060023

1. Введение. Обосновывая свою модель гравитационного взаимодействия И. Ньютон “не измышлял гипотез” о природе тяготения, а решал “прямую” задачу динамики, в которой сила, действующая на материальную точку, определяется по наблюдаемому движению этой точки. В модели Ньютона сила тяготения выражается формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий взаимодействующие точки с массами M и m , γ – гравитационная постоянная. Это решение Ньютон получил, основываясь на установленных из наблюдений законах Кеплера.

В рамках модели (1.1) для задачи двух тел уравнение для наблюдаемой переменной \mathbf{R} принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(m + M) \quad (1.2)$$

Это уравнение можно трактовать как закон движения точки единичной массы в поле неподвижной точки массы $m + M$.

Как известно, аномалия в движении Меркурия, указывающая на неточность закона тяготения Ньютона (1.1), была обнаружена Урбенем Леверье еще в середине 19 века. По расчетам Леверье [1, 2] аномальное (необъяснимое моделью Ньютона) смещение перигелия Меркурия составляет около 38 угловых секунд за столетие. По современным оценкам оно составляет 43" за столетие. В поведении других элементов орбиты Меркурия видимых аномалий не обнаружено.

Следует отметить, что в полном смещении перигелия Меркурия указанное выше аномальное смещение составляет около 7%. Остальная часть смещения объясняется в рамках модели Ньютона (1.1) возмущающим влиянием других планет. При этом в смещении перигелия Меркурия, обусловленном влиянием других планет, помимо вековой имеется колебательная компонента, амплитуда которой равна около $18''$ [3]. Существенную долю в эту колебательную компоненту вносит возмущение от Юпитера с периодом около 12 лет. Поэтому достоверно определить величину аномального смещения перигелия Меркурия возможно только по результатам наблюдений в течение промежутка времени в десятки лет.

Чтобы выявить по наблюдениям аномальное смещение перигелия для других планет Солнечной системы требуются более длительные промежутки времени, чем для Меркурия, поскольку для них величина этого смещения меньше, а отношение колебательной компоненты, обусловленной влиянием других планет, к среднему смещению существенно больше. Например, для Венеры амплитуда колебательной компоненты в поведении перигелия составляет около $1350''$, что почти в сто раз больше, чем среднее наблюдаемое смещение за столетие [3].

Для объяснения аномалий в движении Меркурия было предложено в свое время много разных модификаций закона тяготения Ньютона. Подробный обзор работ на эту тему можно найти в книге Роузвера [4]. Большинство таких модификаций были признаны несостоятельными ввиду того, что они неадекватно объясняли либо наблюдаемое смещение перигелия Меркурия, либо отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца.

Адекватное объяснение наблюдаемых аномалий в движении планет и отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца дает общая теория относительности (ОТО) А. Эйнштейна. С историей развития и современным состоянием этой теории можно ознакомиться в работах [4–7].

В настоящей работе приводятся другие, отличные от ОТО, модификации закона тяготения Ньютона, в рамках которых адекватно объясняются аномальные смещения перигелиев орбит планет (раздел 2) и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца (раздел 3).

Ниже при рассмотрении различных моделей тяготения под центральностью взаимодействия будет подразумеваться тот случай, когда в задаче двух тел для наблюдаемой переменной \mathbf{R} , соединяющей взаимодействующие точки, ускорение $\ddot{\mathbf{R}}$ имеет только радиальную компоненту, т.е. $\ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} = 0$.

2. Модификации закона Ньютона с центральным взаимодействием. Автором первых модификаций закона тяготения Ньютона был, видимо, Клод Клеро, который искал объяснение кажущихся тогда аномалий в движении Луны. Клеро предложил следующие две модели закона тяготения [8]:

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{R}\right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{R^2}\right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.2)$$

Мы здесь подробно рассмотрим только модель (2.1), как наиболее заслуживающую внимания. В рамках этой модели для задачи двух тел уравнение для наблюдаемой переменной \mathbf{R} принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{R}\right) \frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(m + M) \quad (2.3)$$

В этой модели возмущающее ускорение (добавка к ускорению (1.2) для модели Ньютона) имеет только радиальную компоненту $S = -\mu \varepsilon_1 / R^3$. Из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах следует, что такое возмущение влияет только на поведение долготы перигелия $\varpi = \omega + \Omega$ и эксцентриситета e орбиты. Уравнения для этих элементов записываются в виде [9]

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{SR^2}{\mu} \sin \varphi \quad (2.4)$$

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = -\frac{SR^2}{\mu e} \cos \varphi \quad (2.5)$$

Здесь φ – истинная аномалия. В первом приближении теории возмущений, подставляя в уравнения (2.4) и (2.5) уравнение невозмущенной Кеплеровой орбиты

$$R = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.6)$$

и вычисляя среднее смещение, получим

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = \frac{\varepsilon_1}{Pe} (1 + e \cos \varphi) \cos \varphi, \quad \Delta\varpi = \frac{\pi\varepsilon_1}{P} \quad (2.7)$$

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{\varepsilon_1}{P} (1 + e \cos \varphi) \sin \varphi, \quad \Delta e = 0 \quad (2.8)$$

Здесь и всюду далее $\Delta\varpi$ – среднее смещение долготы перигелия за один оборот планеты вокруг Солнца, P – параметр невозмущенной орбиты планеты.

Смещению перигелия Меркурия, равному $43''$ за столетие, соответствует значение $\varepsilon_1 = 8.85$ км. При таком значении ε_1 смещения перигелиев остальных внутренних планет, вычисленные по формуле (2.7), составляют

$$\text{Венера: } 8.64'', \quad \text{Земля: } 3.83'', \quad \text{Марс: } 1.35'' \quad (2.9)$$

Эти значения хорошо согласуются с разницей между наблюдениями и результатами расчетов по модели Ньютона (1.1).

Таким образом, модель Клеро (2.1) вполне адекватно описывает наблюдаемое поведение всех планет Солнечной системы. Но, несмотря на это, она была в свое время отвергнута. Основным аргументом против нее состоял в том [4], что эта модель, адекватно описывая силу взаимодействия планет с Солнцем, дает совершенно неадекватное значение силы взаимодействия свинцовых шаров в опытах Кавендиша. Но этот аргумент справедлив лишь в том предположении, что ε_1 – универсальная постоянная, не зависящая от масс взаимодействующих точек.

Покажем, что можно определить такую зависимость ε_1 от масс взаимодействующих точек, при которой модель (2.1) будет адекватно описывать наблюдаемое поведение всех планет и Луны, а ее применение к опытам Кавендиша не будет вызывать никаких противоречий.

Определим параметр ε_1 в модели Клеро (2.1) формулой $\varepsilon_1 = 6\mu/c^2$, где c – скорость света. Тогда закон тяготения запишется в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 + \frac{6\mu}{c^2 R} \right) \frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(M + m), \quad (2.10)$$

а для наблюдаемой переменной \mathbf{R} в задаче двух тел получим уравнение

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + \frac{6\mu}{c^2 R} \right) \frac{\mathbf{R}}{R}$$

Для такой модели тяготения возмущающее ускорение будет иметь только радиальную компоненту $S = -6\mu^2/(c^2 R^3)$, а из уравнения (2.5) получим

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = \frac{6\mu}{c^2 R e} \cos \varphi = \frac{6\mu}{c^2 e P} \cos \varphi (1 + e \cos \varphi) \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что среднее смещение долготы перигелия за один оборот планеты вокруг Солнца определяется формулой

$$\Delta\varpi = \frac{6\pi\mu}{c^2 P} \quad (2.12)$$

Отметим, что точно такой же формулой определяется смещение перигелиев орбит планет в рамках ОТО [10]. После подстановки значений μ и P в формулу (2.12), используя данные о периодах обращения, получим следующие смещения перигелиев внутренних планет за столетие:

$$\text{Меркурий: } 43'', \quad \text{Венера: } 8.64'', \quad \text{Земля: } 3.83'', \quad \text{Марс: } 1.35'' \quad (2.13)$$

Для внешних планет аномальные смещения перигелиев, вычисленные по формуле (2.12), составляют десятые и сотые доли угловых секунд за столетие. Определить эти смещения по наблюдениям практически невозможно, поскольку они очень малы. Кроме того, для внешних планет возмущения от соседних планет вносят в смещения перигелиев колебательные компоненты большой амплитуды, имеющие долгопериодические составляющие с периодами от 12 до 560 лет [3].

В задаче о движении Луны m – масса Луны, а M – масса Земли. Вычисленное по формуле (2.12) аномальное смещение перигея Луны составляет 0.05 угловой секунды за столетие, т.е. пренебрежимо малую величину. Как оказалось, все “аномалии” в движении Луны с высокой точностью объясняются в рамках модели Ньютона и вызваны в основном возмущающим влиянием Солнца.

В опытах Кавендиша, если положить массы шаров равными $M = 100$ кг и $m = 10$ кг, а расстояние между центрами шаров $R = 0.2$ м, сила по модели (2.10) будет совпадать с ньютоновской силой (1.1) с относительной точностью 10^{-23} .

Таким образом, модель Клеро, записанная в форме (2.10), вполне адекватно описывает наблюдаемые движения планет и Луны, а в опытах Кавендиша практически неразличима с моделью Ньютона (1.1).

Ниже приводятся другие модели тяготения, в рамках которых смещение перигелиев орбит планет определяется формулой (2.12). Во всех этих моделях траектории движения являются плоскими кривыми, поэтому ограничимся использованием полярных координат R, φ . При этом \dot{R} и $R\dot{\varphi}$ будут представлять собой радиальную и тангенциальную компоненты скорости, соответственно.

Рассмотрим семейство моделей, в которых сила гравитационного взаимодействия задается в явном виде следующей формулой:

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 + x \frac{\mu}{c^2 R} + y \frac{\dot{R}^2}{c^2} + z \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(M + m) \quad (2.14)$$

Здесь x, y, z – некоторые безразмерные параметры. В задаче двух тел уравнение для наблюдаемой переменной запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + x \frac{\mu}{c^2 R} + y \frac{\dot{R}^2}{c^2} + z \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.15)$$

Учитывая, что для движения в центральном поле имеет место интеграл площадей $R^2 \dot{\phi} = K = \text{const}$, и что для невозмущенной орбиты

$$R = \frac{P}{1 + e \cos \phi}; \quad K^2 = \mu P, \quad \dot{R}^2 = \frac{\mu}{P} e^2 \sin^2 \phi \quad (2.16)$$

получим для возмущающего ускорения следующее выражение:

$$S = -\frac{\mu^2}{R^2 c^2 P} \left(x(1 + e \cos \phi) + y e^2 \sin^2 \phi + z(1 + e \cos \phi)^2 \right) \quad (2.17)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2.5) среднее смещение перигелия орбиты за один оборот планеты вокруг Солнца определится формулой

$$\Delta \varpi = (x + 2z) \frac{\pi \mu}{c^2 P} \quad (2.18)$$

Исходя из того, что смещение перигелия определяется значением (2.12), получим

$$x + 2z = 6 \quad (2.19)$$

При учете этого соотношения из формулы (2.15) определяется следующее двухпараметрическое семейство моделей тяготения:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 + (6 - 2z) \frac{\mu}{c^2 R} + y \frac{\dot{R}^2}{c^2} + z \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.20)$$

При $y = z = 0$ из (2.20) следует модель Клеро (2.10), в которой сила взаимодействия зависит только от расстояния. Для других моделей из семейства (2.20) сила зависит не только от расстояния, но и от компонент относительной скорости.

Отметим, что для всех моделей семейства (2.14) среднее смещение эксцентриситета орбиты, вычисленное на основании уравнения (2.4), равно нулю.

Все модели из семейства (2.20), за исключением модели Клеро (2.10), обладают тем недостатком, что для них отсутствует интеграл энергии. Такого недостатка нет в модели Гербера, которая по словам Роузвера [4] была в свое время “конкурентом” ОТО Эйнштейна. В модели Гербера гравитационное взаимодействие, как и в предыдущих моделях, является центральным и задается обобщенным потенциалом

$$U = -\frac{\gamma m M}{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c} \right)^{-2} \quad (2.21)$$

В задаче двух тел лагранжиан для такой модели определяется выражением

$$L = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\mu}{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c} \right)^{-2}; \quad \mu = \gamma(M + m) \quad (2.22)$$

Первыми интегралами для рассматриваемой модели являются интеграл площадей $R^2 \dot{\phi} = K = \text{const}$ и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\mu}{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c} \right)^{-3} \left(1 - \frac{3\dot{R}}{c} \right) = h = \text{const} \quad (2.23)$$

Радиальное ускорение в полярных координатах выражается формулой

$$W_R = \ddot{R} - R \dot{\phi}^2 \quad (2.24)$$

Из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \quad (2.25)$$

с точностью до членов второго порядка малости относительно величин

$$\frac{\mu}{Rc^2} \ll 1, \quad \frac{V^2}{c^2} \ll 1 \quad (2.26)$$

получим (промежуточные выкладки опущены)

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 - \frac{6\mu}{c^2 R} - \frac{3\dot{R}^2}{c^2} + \frac{6R^2\dot{\phi}^2}{c^2} \right) \quad (2.27)$$

Нетрудно видеть, что определяемое формулой (2.27) первое приближение для модели Гербера соответствует одной из моделей семейства (2.20), поскольку оно получается из формулы (2.20) при $z = 6$, $y = -3$. Таким образом, в рамках модели Гербера смещение перигелия орбиты планеты также, как и для всех моделей (2.20), определяется формулой (2.12).

Покажем, что помимо модели Гербера имеется семейство других моделей центрального взаимодействия, для которых имеет место интеграл энергии, а смещение перигелия орбиты определяется формулой (2.12).

Рассмотрим гравитационное поле, задаваемое обобщенным потенциалом

$$U = -\frac{\gamma m M}{R} \Phi^{1/2}; \quad \Phi = 1 - x \frac{\mu}{c^2 R} - y \frac{\dot{R}^2}{c^2}, \quad (2.28)$$

где x , y – некоторые безразмерные параметры. Лагранжиан системы в задаче двух тел имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\mu}{R} \Phi^{1/2}$$

Первыми интегралами системы являются интеграл площадей $R^2 \dot{\phi} = K = \text{const}$ и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\mu}{R} \Phi^{-1/2} \left(1 - x \frac{\mu}{c^2 R} \right) = h = \text{const} \quad (2.29)$$

Из уравнения Лагранжа (2.25) с точностью до членов второго порядка малости относительно величин (2.26) получим для радиального ускорения следующее выражение (промежуточные выкладки опущены):

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + (y-x) \frac{\mu}{Rc^2} + \frac{y\dot{R}^2}{2c^2} - y \frac{R^2\dot{\phi}^2}{c^2} \right) \quad (2.30)$$

В рассматриваемом случае на основании формул (2.16) для возмущающего ускорения получим выражение

$$S = -\frac{\mu^2}{R^2 c^2 P} \left((y-x)(1 + e \cos \varphi) + \frac{y e^2 \sin^2 \varphi}{2} - y(1 + e \cos \varphi)^2 \right)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2.5) среднее смещение перигелия орбиты за один оборот планеты вокруг Солнца определится формулой

$$\Delta \varpi = -(x+y) \frac{\pi \mu}{c^2 P} \quad (2.31)$$

Учитывая это равенство, получим из (2.28), что смещение перицентра определяется формулой (2.12) для следующего однопараметрического семейства моделей тяготения, задаваемого обобщенным потенциалом:

$$U = -\frac{\gamma m M}{R} \left(1 + (6 + y) \frac{\mu}{c^2 R} - y \frac{\dot{R}^2}{c^2} \right)^{1/2} \quad (2.32)$$

Ускорение материальной точки в этом случае выражается формулой

$$\ddot{\mathbf{R}} \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + 2(y + 3) \frac{\mu}{Rc^2} + \frac{y}{2} \frac{\dot{R}^2}{c^2} - y \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.33)$$

При $y = -6$ формула (2.33) повторяет первое приближение модели Гербера (2.27), а при $y = 0$ – модель Клеро (2.10).

Таким образом, имеется бесконечно много моделей тяготения, для которых, как и в ОТО, смещение перицетров орбит в задаче двух тел определяется формулой (2.12).

3. Модели тяготения, получаемые из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени. В рамках общей теории относительности (ОТО) гравитационное взаимодействие между материальными точками зависит не только от расстояния, но и от скоростей точек. Смещение перигелия орбиты планеты по ОТО за один оборот планеты вокруг Солнца определяется формулой [10]

$$\Delta\varpi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2} = \frac{6\pi\mu}{Pc^2} \quad (3.1)$$

Здесь a – большая полуось невозмущенной эллиптической орбиты, T – период обращения, P – параметр, e – эксцентриситет, c – скорость света.

Формула (3.1) в точности повторяет формулу (2.12) для рассмотренных выше семейств моделей центрального взаимодействия (2.20) и (2.32). Но ОТО объясняет не только аномальное движение Меркурия и других планет, но и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца, а также гравитационное красное смещение.

В рамках ОТО формула (3.1) может быть получена из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. В этой метрике интервал задается выражением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - R^2 d\theta^2; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2} \quad (3.2)$$

Здесь R , φ , θ – сферические координаты точки.

Модель тяготения, определяемую метрикой Шварцшильда (3.2), будем далее называть моделью Шварцшильда. Эта модель приводится в большинстве научных и учебных публикаций, имеющих отношение к ОТО, и используется, в частности, для вывода следствий ОТО о смещении перигелиев орбит планет и отклонении лучей света в гравитационном поле Солнца. Но в этой модели, как будет показано ниже, гравитационное взаимодействие не является центральным, а при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек не описывается точно законом тяготения Ньютона (1.1).

Поставим задачу найти такую модель тяготения, в которой:

1. Гравитационное взаимодействие является центральным.
2. При нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек тяготение точно описывается законом Ньютона (1.1).
3. Смещения перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО.

Для решения поставленной задачи рассмотрим метрику общего вида

$$ds^2 = fc^2 dt^2 - g^{-1} dR^2 - h^{-1} (R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2) \quad (3.3)$$

Здесь функции f , g , h задаются формулами

$$f = 1 - \frac{\alpha}{R} - x \frac{\alpha^2}{R^2}, \quad g = 1 - y \frac{\alpha}{R}, \quad h = 1 - z \frac{\alpha}{R}; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2}, \quad (3.4)$$

где x , y , z – некоторые безразмерные параметры.

Движение материальной точки в таком пространстве-времени описывается уравнениями Лагранжа, а лагранжиан определяется формулой [11]

$$L = -\Phi^{1/2}; \quad \Phi = fc^2 - g^{-1} \dot{R}^2 - h^{-1} (\sin^2 \theta R^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2)$$

Из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Phi^{-1/2} h^{-1} R^2 \dot{\theta}) - \Phi^{-1/2} h^{-1} R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

следует, что при начальных условиях $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$ угол θ будет оставаться неизменным, равным $\pi/2$, т.е. траекторией движения точки будет плоская кривая. Поэтому для описания движения в рассматриваемой задаче можно ограничиться полярными координатами R , φ . Тогда метрика (3.3) запишется в виде

$$ds^2 = fc^2 dt^2 - g^{-1} dR^2 - h^{-1} R^2 d\varphi^2, \quad (3.5)$$

а для лагранжиана получим выражение

$$L = -\Phi^{1/2}; \quad \Phi = fc^2 - g^{-1} \dot{R}^2 - h^{-1} R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.6)$$

Рассматриваемая система имеет циклический первый интеграл (аналог интеграла площадей)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Phi^{-1/2} h^{-1} R^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (3.7)$$

и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \Phi^{-1/2} fc^2 = \text{const} \quad (3.8)$$

Легко видеть, что при учете интеграла энергии (3.8) вместо (3.7) в качестве независимого первого интеграла можно использовать следующую функцию:

$$f^{-1} h^{-1} R^2 \dot{\varphi} = K = \text{const} \quad (3.9)$$

Для рассматриваемых моделей гравитационное взаимодействие в общем случае не является центральным, т.е. помимо радиального ускорения W_R материальная точка испытывает и трансверсальное ускорение W_φ . Последнее определяется из интеграла (3.9) следующим выражением:

$$W_\varphi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\varphi}) = \frac{K}{R} \left(f \frac{\partial h}{\partial R} + h \frac{\partial f}{\partial R} \right) \dot{R} \quad (3.10)$$

Отметим, что взаимодействие будет строго центральным только в случае $h = f^{-1}$.

Радиальное ускорение определяется по формуле

$$W_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \quad (3.11)$$

Его можно найти из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0,$$

которое принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi^{-1/2} g^{-1} \dot{R} \right) + \frac{1}{2} \Phi^{-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial R} c^2 + g^{-2} \frac{\partial g}{\partial R} \dot{R}^2 + h^{-2} \frac{\partial h}{\partial R} R^2 \dot{\phi}^2 - 2h^{-1} R \dot{\phi}^2 \right) = 0 \quad (3.12)$$

Учитывая вытекающее из интеграла энергии (3.8) соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi^{-1/2} \right) = -\Phi^{-1/2} f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} \quad (3.13)$$

получим

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi^{-1/2} g^{-1} \dot{R} \right) = \Phi^{-1/2} g^{-1} \left[\dot{R} - \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 \right] \quad (3.14)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (3.12) будем иметь

$$\dot{R} = \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 - \frac{1}{2} g \left(\frac{\partial f}{\partial R} c^2 + h^{-2} \frac{\partial h}{\partial R} R^2 \dot{\phi}^2 - 2h^{-1} R \dot{\phi}^2 \right)$$

Отсюда на основании формулы (3.11) найдем радиальное ускорение точки

$$W_R = -\frac{c^2}{2} g \frac{\partial f}{\partial R} + \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{gh^{-1} - 1}{R} - \frac{1}{2} gh^{-2} \frac{\partial h}{\partial R} \right) R^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.15)$$

Производные от функций (3.4) определяются формулами

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\alpha}{R^2} \left(1 + 2x \frac{\alpha}{R} \right), \quad \frac{\partial g}{\partial R} = y \frac{\alpha}{R^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial R} = z \frac{\alpha}{R^2} \quad (3.16)$$

а выражение gh^{-1} с точностью до малых второго порядка относительно α/R записывается в виде

$$gh^{-1} = 1 + (z - y) \frac{\alpha}{R} \quad (3.17)$$

После подстановки этих выражений в формулу (3.15) получим

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + (4x - 2y) \frac{\mu}{Rc^2} - (2 + y) \frac{\dot{R}^2}{c^2} - (z - 2y) \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right) \quad (3.18)$$

Здесь приближенное равенство означает, что выражение в скобках записано с точностью до малых второго порядка относительно α/R .

Аналогичным образом из формулы (3.10) получается приближенное выражение для трансверсального ускорения

$$W_\phi \approx \frac{\mu}{R^2} 2(z + 1) \frac{K}{Rc^2} \dot{R} \approx \frac{\mu}{R^2 c^2} 2(z + 1) \dot{R} R \dot{\phi} \quad (3.19)$$

В рассматриваемой задаче возмущающее ускорение точки имеет и радиальную компоненту S и трансверсальную компоненту T , причем

$$S \approx -\frac{\mu}{R^2 c^2} \left((4x - 2y) \frac{\mu}{R} - (2 + y) \dot{R}^2 - (z - 2y) \frac{K^2}{R^2} \right)$$

$$T \approx \frac{\mu}{R^2} 2(z + 1) \frac{K}{Rc^2} \dot{R}$$

В этом случае долгота перицентра описывается уравнением [9]

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\varphi} = \frac{R^2}{\mu e} \left[-S \cos \varphi + \left(1 + \frac{R}{P} \right) T \sin \varphi \right] \quad (3.20)$$

Из этого уравнения, учитывая приведенные выше формулы (2.16) для невозмущенной орбиты, получим для смещения перицентра за один оборот спутника вокруг притягивающего центра следующее выражение:

$$\Delta \bar{\omega} = (4x + 2y + 2z + 4) \frac{\mu \pi}{P c^2} \quad (3.21)$$

Для изучения движения фотона в гравитационном поле следует положить в уравнении (3.5) интервал равным нулю: $ds = 0$. Тогда получим уравнение

$$c^2 = f^{-1} \left(g^{-1} \dot{R}^2 + h^{-1} R^2 \dot{\varphi}^2 \right) = V_0^2(R, \dot{R}, \dot{\varphi}) \quad (3.22)$$

Это уравнение выражает квадрат скорости фотона в пустоте при отсутствии каких-либо полей через радиальную \dot{R} и трансверсальную $R\dot{\varphi}$ компоненты скорости фотона в гравитационном поле. Из постоянства квадрата скорости, записанной в криволинейных координатах, следует равенство нулю проекций ускорения на оси локального базиса этих координат, т.е. уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial V_0^2}{\partial R} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial V_0^2}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.23)$$

Второе из уравнений (3.23) дает первый интеграл

$$f^{-1} h^{-1} R^2 \dot{\varphi} = K = \text{const}, \quad (3.24)$$

совпадающий с первым интегралом (3.9) для материальной точки. Из него определяется выражение для трансверсального ускорения фотона

$$\tilde{W}_\varphi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\varphi}) = \frac{K}{R} \left(f \frac{\partial h}{\partial R} + h \frac{\partial f}{\partial R} \right) \dot{R} \approx \frac{\alpha}{R^2} \frac{K}{R} (z + 1) \dot{R}, \quad (3.25)$$

совпадающее с выражением (3.10) для материальной точки.

Для определения радиального ускорения фотона используем первое из уравнений (3.23). Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{R}} \right) &= 2 \frac{d}{dt} (f^{-1} g^{-1} \dot{R}) = 2 f^{-1} g^{-1} \left[\ddot{R} - \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 \right] \\ \frac{\partial V_0^2}{\partial R} &= -f^{-1} g^{-1} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 - \\ &\quad - f^{-1} h^{-1} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) R^2 \dot{\varphi}^2 + 2 f^{-1} h^{-1} R \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

после сокращения на $2 f^{-1} g^{-1}$ получим уравнение

$$\ddot{R} - \frac{1}{2} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 + \frac{1}{2} g h^{-1} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1} \frac{\partial h}{\partial R} \right) R^2 \dot{\varphi}^2 - g h^{-1} R \dot{\varphi}^2 = 0$$

Отсюда на основании формулы (3.11) находим выражение для радиального ускорения фотона

$$\tilde{W}_R = \frac{1}{2} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 + \left[\frac{g h^{-1} - 1}{R} - \frac{1}{2} g h^{-1} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1} \frac{\partial h}{\partial R} \right) \right] R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.26)$$

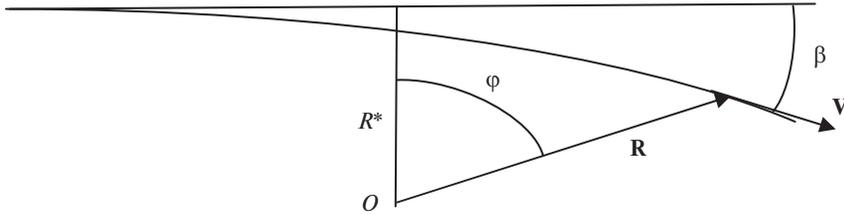


Рис. 1.

После учета формул (3.16), (3.17) получим

$$\tilde{W}_R \approx \frac{\mu}{R^2 c^2} \left[(1 + y) \dot{R}^2 + (z - 2y - 1) R^2 \dot{\varphi}^2 \right] \quad (3.27)$$

Здесь приближенное равенство означает, что множители при \dot{R}^2 и $R^2 \dot{\varphi}^2$ вычислены с точностью до малых α/R .

Определим угол отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца. Для фотона, летящего со скоростью \tilde{V} и испытывающего ускорение \tilde{W} , изменение угла β поворота вектора скорости описывается уравнением (см. рис. 1)

$$d\beta = \frac{-\tilde{W}_R \cos(\varphi - \beta) + \tilde{W}_\varphi \sin(\varphi - \beta)}{\tilde{V}} dt$$

Учитывая вытекающее из первого интеграла (3.24) приближенное равенство $K dt \approx R^2 d\varphi$, малость отклонения скорости \tilde{V} от величины c и формулу $K = R^* c$, где R^* – радиус Солнца, получим

$$d\beta \approx \frac{R^2 [\tilde{W}_\varphi \sin(\varphi - \beta) - \tilde{W}_R \cos(\varphi - \beta)]}{R^* c^2} d\varphi \quad (3.28)$$

Невозмущенное движение фотона представляет собой равномерное движение по прямой линии и описывается уравнениями

$$R = \frac{R^*}{\cos \varphi}, \quad \dot{R} = \frac{R^* \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{K}{R^2} = \frac{K \sin \varphi}{R^*} = c \sin \varphi \quad (3.29)$$

После учета формул (3.29) получим для радиального (3.27) и трансверсального (3.25) ускорений фотона следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_R &\approx \frac{\mu}{R^2} \left[(1 + y) \sin^2 \varphi + (z - 2y - 1) \cos^2 \varphi \right] \\ \tilde{W}_\varphi &\approx \frac{2\mu}{R^2} (z + 1) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.28) и интегрируя на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ при учете малости угла β , получим следующее выражение для угла отклонения световых лучей, проходящих рядом с краем диска Солнца:

$$\Delta\beta = \frac{\mu}{R^* c^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(2z - y + 1) \sin^2 \varphi \cos \varphi - (z - 2y - 1) \cos^3 \varphi \right] d\varphi = \frac{2\mu}{R^* c^2} (y + 1) \quad (3.30)$$

Итак, смещение перигелия орбит планет и отклонение световых лучей, проходящих рядом с краем диска Солнца, описываются формулами

$$\Delta\varpi = (4x + 2y + 2z + 4) \frac{\mu\pi}{Rc^2} \quad (3.31)$$

$$\Delta\beta = 2(1 + y) \frac{\mu}{R^*c^2} \quad (3.32)$$

Модели тяготения, определяемой метрикой Шварцшильда (3.2), соответствуют следующие значения параметров: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. В этом случае имеем

$$\Delta\varpi = \frac{6\mu\pi}{Rc^2}, \quad \Delta\beta = \frac{4\mu}{R^*c^2} \quad (3.33)$$

Вычисленный по формуле (3.33) угол отклонения от прямой линии лучей света, проходящих близко к краю диска Солнца, составляет $\Delta\beta = 1.75''$.

Как известно [4], первый вариант ОТО Эйнштейна основывался на уравнениях поля, соответствующих “промежуточной” пространственно-временной метрике, которая получается из (3.5) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. В этом случае из формул (3.31), (3.32) следует

$$\Delta\varpi = \frac{4\pi\mu}{c^2P}, \quad \Delta\beta = \frac{2\mu}{c^2R^*},$$

т.е. смещение перицентра эллиптической орбиты составляет две трети от значения, получаемого для модели тяготения, определяемой метрикой Шварцшильда, а отклонение лучей света в два раза меньше. Позже Эйнштейн скорректировал свои уравнения и получил для смещения перигелиев эллиптических орбит и отклонений лучей света значения, определяемые формулами (3.33).

Из формул (3.31), (3.32) следует, что каждой фиксированной паре значений $\Delta\varpi$, $\Delta\beta$ соответствует однопараметрическое семейство моделей тяготения. Если исходить из того, что значения отклонений определяются формулами (3.33), то для параметров этого семейства получим следующие соотношения:

$$y = 1, \quad 2x + z = 0 \quad (3.34)$$

В этом случае, выбирая x в качестве независимого параметра, получим на основании формул (3.3), (3.4) однопараметрическое семейство моделей тяготения, определяемых следующей метрикой:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R} - x \frac{\alpha^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{-1} dR^2 - \left(1 + 2x \frac{\alpha}{R}\right)^{-1} \left(R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2\right) \quad (3.35)$$

Для этих моделей формулы (3.18), (3.19) для компонент ускорения материальной точки принимают следующий вид:

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 + 2(2x - 1) \frac{\mu}{Rc^2} - 3 \frac{\dot{R}^2}{c^2} + 2(x + 1) \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}\right) \quad (3.36)$$

$$W_\varphi \approx \frac{\mu}{R^2 c^2} 2(1 - 2x) \dot{R} R \dot{\varphi} \quad (3.37)$$

В семействе (3.35) метрике Шварцшильда (3.2) соответствует значение параметра $x = 0$. В этом случае гравитационное взаимодействие не является центральным, а компоненты ускорения материальной точки выражаются формулами

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 - 2 \frac{\mu}{Rc^2} - 3 \frac{\dot{R}^2}{c^2} + 2 \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}\right), \quad W_\varphi \approx \frac{\mu}{R^2 c^2} 2 \dot{R} R \dot{\varphi} \quad (3.38)$$

Из этих формул следует также, что при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек (при $\dot{R} = \dot{\phi} = 0$) нет точного совпадения с законом тяготения Ньютона (1.1).

Рассматривая в семействе (3.35) другие значения параметра x , например, из множества $x = n/2$, где n – целые числа, получим модели тяготения, по сравнению с которыми модель Шварцшильда никаких видимых преимуществ не имеет, т.е. затруднительно привести какие-либо аргументы, на основании которых следует отдать предпочтение этой модели. Более того, из рассматриваемого множества моделей (3.35) заслуживает особого внимания модель, соответствующая значению параметра $x = 1/2$. Для этой модели ускорение материальной точки записывается в виде

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2} \left(1 - 3 \frac{\dot{R}^2}{c^2} + 3 \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right), \quad W_\phi \approx 0 \quad (3.39)$$

т.е. в первом приближении гравитационное взаимодействие является центральным, а при отсутствии относительной скорости (при $\dot{R} = \dot{\phi} = 0$) закон взаимодействия определяется моделью Ньютона (1.1).

Важно отметить, что получаемая из (3.35) при $x = 1/2$ модель тяготения допускает такое уточнение, что для уточненной модели гравитационное взаимодействие будет *строго* центральным, а закон взаимодействия при нулевой относительной скорости будет *точно* описываться моделью Ньютона (1.1). Такое уточнение осуществляется незначительной (не влияющей на первое приближение) корректировкой выражений для функций g и h (3.4), фигурирующих в метрике (3.5), а именно, если эту метрику задать функциями

$$f = 1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2}, \quad g = \left(1 + \frac{\alpha}{R} \right)^{-1}, \quad h = f^{-1}; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2} \quad (3.40)$$

Тогда эта метрика запишется в виде

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R} \right) dR^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2} \right) (R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + R^2 d\theta^2) \quad (3.41)$$

В этом случае из уравнения (3.10) получим строгое равенство $W_\phi = 0$, т.е. взаимодействие будет строго центральным, а при учете равенства

$$g \frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\alpha}{R^2} \quad (3.42)$$

выражение (3.15) для радиального ускорения примет вид

$$W_R = -\frac{\mu}{R^2} + \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{gf-1}{R} + \frac{g}{2} \frac{\partial f}{\partial R} \right) R^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.43)$$

Отсюда следует, что для рассматриваемой модели при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1).

Для модели тяготения, определяемой метрикой (3.41), взаимодействие фотона с гравитирующей материальной точкой тоже является строго центральным, поскольку в этом случае из формулы (3.25) следует строгое равенство $\tilde{W}_\phi = 0$. При этом формула (3.26) для ускорения фотона принимает вид

$$\tilde{W}_R = \frac{1}{2} \left(f^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial R} \right) \dot{R}^2 + \frac{gf-1}{R} R^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.44)$$

Формула (3.44) может быть получена и из формулы (3.43), если учесть равенство (3.22), которое для рассматриваемой модели принимает вид

$$c^2 = f^{-1} g^{-1} \dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.45)$$

В заключение покажем, что модель тяготения, определяемая метрикой

$$ds^2 = c^2 [2 - \exp(\alpha/R)] dt^2 - \exp(\alpha/R) dR^2 - [2 - \exp(\alpha/R)] (R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + R^2 d\theta^2) \quad (3.46)$$

характеризуется точно такими же свойствами, что и модель (3.41), т.е. в рамках этой модели гравитационное взаимодействие является строго центральным, при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1), а смещение перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца определяются теми же формулами (3.33), что и в рамках ОТО.

Действительно, для модели (3.46) в обозначениях (3.3) будем иметь

$$f = 2 - \exp(\alpha/R), \quad g^{-1} = \exp(\alpha/R), \quad h^{-1} = f$$

В этом случае из формул (3.10) и (3.25) получим строгие равенства: $W_\phi = 0$, $\tilde{W}_\phi = 0$. При этом будет выполняться равенство (3.42), а выражения (3.15) и (3.26) для радиального ускорения примут вид (3.43) и (3.44), соответственно. Отсюда следует, что и в рамках модели (3.46), гравитационное взаимодействие является строго центральным, а при $\dot{R} = \dot{\phi} = 0$ закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1).

Нетрудно видеть, что модель тяготения (3.41) можно получить из модели (3.46), если в последней оставить только главные члены разложения функции $\exp(\alpha/R)$ по степеням α/R . В задаче о движении планет как и в задаче об отклонении лучей света в гравитационном поле Солнца $\alpha/R \ll 1$. Поэтому в первом приближении модель (3.46) дает те же самые значения (3.33) для $\Delta\varpi$ и $\Delta\beta$, что и модель (3.41).

Заключение. Основные результаты работы сводятся к следующим:

1. Предложена модификация закона Клеро (2.10), в рамках которой сила гравитационного взаимодействия является центральной и зависит только от расстояния, а смещения перигелиев орбит в задаче двух тел совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. В опытах Кавендиша эта модель практически неразличима с моделью Ньютона.

2. Найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, задаваемых обобщенным потенциалом (2.32), в рамках которых взаимодействие является центральным, а смещения перигелиев орбит в задаче двух тел совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО.

3. Рассмотрены модели тяготения, получаемые из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени. Найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, определяемое метрикой (3.35), для которых смещения перигелиев орбит в задаче двух тел и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. Из этого семейства выделяется модель (3.41), которая характеризуется строго центральным взаимодействием, а при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек точно описывается законом тяготения Ньютона. Показано, что точно такими же свойствами обладает и модель тяготения, определяемая метрикой (3.46).

Автор выражает благодарность академику В.Ф. Журавлеву за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp. 1859. V. 5. P. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1859. V. 49. P. 379–383.
3. *Амелькин Н.И.* Расчеты эволюции орбит планет // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 407–425.
4. *Роузвер Н.Т.* Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985. 244 с.
5. *Визгин В.П.* Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование 1900–1915 гг.). М.: Наука, 1981. 352 с.
6. *Фейнман Р.Ф., Мориного Ф.Б., Вагнер У.Г.* Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К, 2000. 296 с.
7. *Владимиров Ю.С.* Классическая теория гравитации. М.: Libroком, 2009. 264 с.
8. *Clairaut A.C.* Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle // Hist. Mem. Acad. r. Sci. 1745. P. 329–364.
9. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз, 1963. 588 с.
10. *Эйнштейн А.* Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собр. научн. тр. в 4 т. Т. I. С. 439–447.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

On the Gravitational Interaction Models

N. I. Amel'kin^{a, #}^a Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia[#]e-mail: namelkin@mail.ru

As part of the task of movement on inertia in curved space-time, a single-parametric family of gravitational models has been found, for which the displacement of perihelion orbits of planets and the deviation of light rays in the gravitational field of the Sun coincide with the values predicted by GTR. One model stands out from this family, in which gravitational interaction is strictly central, and at zero relative speed of interacting material points is accurately described by Newton's gravity law.

Keywords: Newton's law of gravity, general theory of relativity, gravitational interaction models

REFERENCES

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp., 1859, vol. 5, pp. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1859. vol. 49, pp. 379–383.
3. *Amel'kin N.I.* Calculations of the evolution of planet orbits // PММ, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 407–425.
4. *Roseveare N.T.* Mercury's perihelion from Le Verrier to Einstein. Oxford: Oxford University Press, 1982. pp. viii + 208.
5. *Vizgin V.P.* Relativistic Theory of Gravity (Origins and Formation of 1900–1915). Moscow: Nauka, 1981. 352 p.
6. *Feynman R.F., Morinigo F.B., Wagner W.G.* Feynman lectures on gravity. CRC Press. Taylor & Francis Group. 2003. 280 p.
7. *Vladimirov Yu.S.* Classical Theory of Gravity. Moscow: Librocom, 2009. 264 p.
8. *Clairaut A.C.* Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle // Hist. Mem. Acad. r. Sci., 1745, pp. 329–364.
9. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 588 p.
10. *Einstein A.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin // Math. Phys., 1915, pp. 778, 799, 831, 844.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Vol. II. Field Theory. Moscow: Nauka, 1988. 512 p. (in Russian)

УДК 51.72

МЕТОД ГОДОГРАФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МЕЛКОЙ ВОДЕ ПОД ТВЕРДОЙ КРЫШКОЙ В СЛУЧАЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ© 2022 г. Т. Ф. Долгих^{1,*}, М. Ю. Жуков^{1,2,**}¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия² Южный математический институт, Владикавказ, Россия

*e-mail:dolgikh@sfedu.ru

**e-mail:myuzhukov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.06.2021 г.

После доработки 10.11.2021 г.

Принята к публикации 28.11.2021 г.

Построено точное двухпараметрическое решение задачи Коши о течении двухслойной мелкой воды под твердой крышкой — двух бесконечных соприкасающихся слоев жидкости с малой разницей плотности, движущихся с различными скоростями в горизонтальном канале с твердыми стенками. Искажение границы раздела слоев происходит ввиду неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Задача описывается системой двух квазилинейных уравнений гиперболического типа в частных производных первого порядка. Для построения решения использован вариант метода годографа на основе закона сохранения, позволяющий преобразовать систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к линейному уравнению с переменными коэффициентами в частных производных второго порядка, для которого указана функция Римана–Грина. Предложен способ восстановления явного решения задачи Коши на линиях уровня неявного решения, позволяющий, в конечном итоге, редуцировать решение исходной задачи к решению некоторой задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера представлены результаты расчетов для пространственно периодических начальных данных.

Ключевые слова: метод годографа, мелкая вода под крышкой, квазилинейные гиперболические уравнения

DOI: 10.31857/S0032823522010039

1. Введение. Формулировки задач о плоскопараллельном течении слоев идеальной несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном канале хорошо известны. В частности, в случае одного слоя с одной твердой и другой свободной границами — это задача о поведении мелкой воды. Более сложные варианты, например, когда течение нескольких слоев жидкости происходит в канале с твердыми плоскими границами подробно описаны ранее [1–5]. Интерес к таким задачам объясняется тем, что они достаточно просто описывают неустойчивости либо Рэлея–Тейлора (в случае различной плотности слоев жидкости), либо Кельвина–Гельмгольца (в случае слоев жидкости, движущихся с различными скоростями), позволяя получать важную информацию о наиболее типичная чертах указанных неустойчивостей.

В предлагаемой работе рассмотрена одна из наиболее простых, с математической точки зрения, моделей — течение двухслойной жидкости в канале с твердыми крышками, когда слои жидкости с малой разницей плотности движутся с различными ско-

ростями ([1], модель III; [2], с. 133–140; [3], с. 56–58). Основное внимание фокусируется на способе конструирования решения задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений гиперболического типа в частных производных первого порядка. Для этих целей используется метод годографа на основе закона сохранения, предложенный первоначально в [6], и развитый в ряде работ [7–11]. Заметим, что такой метод можно применять и для решения уравнений эллиптического типа (см., напр., [10, 12–14]) и, в частности, практически для всех задач о неустойчивых сплошных средах, описанных в [15]. Уместно напомнить, что для рассматриваемой задачи о двухслойной мелкой воде при большой разнице между скоростями движения слоев (больше единицы в безразмерных переменных) гиперболический тип уравнений изменяется на эллиптический ([1], модель III; [2], с. 133–140). Метод годографа с дополнительными модификациями позволяет преобразовать решение исходной задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений, записанной в инвариантах Римана, в некоторую задачу для одного линейного уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Такой метод эффективен, когда имеется явная зависимость между исходными переменными и инвариантами Римана, а также явное выражение для функции Римана–Грина соответствующего линейного уравнения. Для указанной модели ([1], модель III, [2], с. 133–140; [3], с. 56–58) явная зависимость между инвариантами Римана известна. Более того, замена переменных переводит уравнения двухслойной мелкой воды (для рассматриваемой модели) к обычным уравнениям мелкой воды, точнее к уравнениям некоторого политропного газа. Однако, инварианты Римана, приведенные в ([1], с. 11, (3.5)), неоднозначно связаны с исходными переменными – содержат радикалы, выбор знака перед которыми далеко нетривиален. Аналогичная неоднозначность возникает и при замене переменных, приводящих уравнения двухслойной мелкой воды к уравнениям обычной мелкой воды в ([1], с. 13, (4.1), (4.3)).

В предлагаемой работе предложена замена переменных, позволяющая устранить неоднозначность между исходными переменными и инвариантами Римана, а также для соответствующего линейного уравнения метода годографа найти явное выражение функции Римана–Грина (гипергеометрическая функция). В конечном итоге, это позволяет построить неявное двухпараметрическое решение исходной задачи Коши. Явное решение задачи восстанавливается на линиях уровня неявного решения при помощи интегрирования некоторой задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во избежание недоразумений, вновь, подчеркнем, что несмотря на то, что задача о поведении двухслойной мелкой воды под крышкой достаточно хорошо исследована (см. например, [1–3]), точное решение задачи Коши, насколько известно авторам, отсутствует.

2. Постановка задачи. Уравнения для описания поведения двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с малым скачком плотности в безразмерных переменных возьмем в форме (приближение мелкой воды)

$$h_t - \frac{1}{2}(v(h^2 - 1))_x = 0, \quad v_t - \frac{1}{2}(h(v^2 - 1))_x = 0; \quad |h| < 1, \quad (2.1)$$

дополнив их начальными условиями

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (2.2)$$

Здесь $h(x, t)$ – положение границы раздела слоев жидкости, $v(x, t)$ – полуразность скоростей верхнего и нижнего слоев (см. рис. 1), $h_0(x)$, $v_0(x)$ – заданные функции, определяющие первоначальное расположение границы раздела между жидкостями и полуразность скоростей движения слоев.

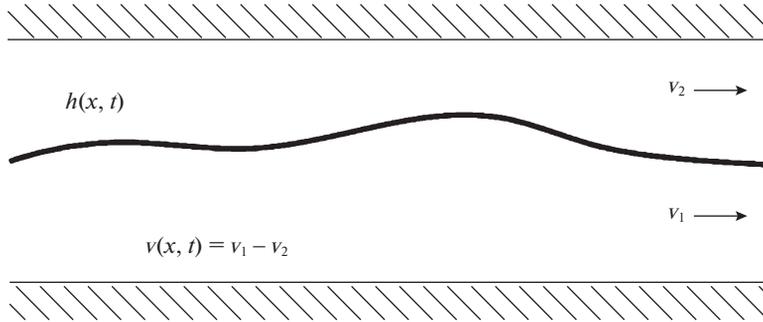


Рис. 1. Схема течения двухслойной мелкой воды.

Уравнения (2.1) предложены в ([2], с. 67, (9.22)) и ([1], Модель III), в которых они представлены в ином виде (для слоя $0 < \tilde{h} < 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{h}_t + (1 - 2\tilde{h})v\tilde{h}_x - \tilde{h}(1 - \tilde{h})v_x &= 0; \quad 0 < \tilde{h} < 1 \\ v_t + (1 - v^2)\tilde{h}_x + (1 - 2\tilde{h})v v_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Переход от (2.3) к (2.1) производится при помощи замены $2\tilde{h} \rightarrow (h + 1)$. Другой вариант замены уравнений (2.3), осуществляющий переход от слоя $0 < \tilde{h} < 1$ к слою $|h| < 1$, использован в ([2], с. 135, (3.6)).

Область Ω , в которой уравнения (2.1) имеют гиперболический тип, определяется неравенствами

$$\Omega = \{|h| < 1, |v| < 1\} \quad (2.4)$$

Известно (см., например, [16]), что в процессе эволюции решение $h(x, t)$, $v(x, t)$ может покидать пределы области Ω . В частности, при $|v| = 1$ происходит “слияние” двух вещественных характеристик уравнений (2.1) в одну кратную характеристику, а при $|v| > 1$ уравнения имеют эллиптический тип. Более подробное описание процессов при переходе в область $|v| > 1$ имеется в монографии ([2], с. 133–140), в которой, в частности, указано, что переход их области гиперболичности в область эллиптичности в случае классических (неразрывных) решений невозможен ([2], с. 135).

2.1. Замена переменных и инварианты Римана. Задача Коши (2.1), (2.2) после замены переменных

$$h = \sin \xi, \quad v = \sin \eta; \quad \xi > -\frac{\pi}{2}, \quad \eta < \frac{\pi}{2}, \quad (2.5)$$

принимает вид

$$\xi_t - (\sin \xi \sin \eta)\xi_x + \frac{1}{2}(\cos \xi \cos \eta)\eta_x = 0 \quad (2.6)$$

$$\eta_t + \frac{1}{2}(\cos \xi \cos \eta)\xi_x - (\sin \xi \sin \eta)\eta_x = 0$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \eta(x, 0) = \eta_0(x) \quad (2.7)$$

Используя обычную технику (см., например, [16], с. 27–31) нетрудно найти инварианты Римана R^1 , R^2 и соответствующие характеристические направления λ^1 , λ^2

$$\xi = R^1 + R^2, \quad \eta = R^2 - R^1 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= -\frac{1}{2}\cos\eta\cos\xi - \sin\eta\sin\xi \\ \lambda^2 &= \frac{1}{2}\cos\eta\cos\xi - \sin\eta\sin\xi\end{aligned}\tag{2.9}$$

Хорошо известно, что инварианты Римана могут быть определены различными способами — произвольная функция от инварианта также является инвариантом. В частности, аналогом инвариантов ([1], с. 11, (3.5)) для уравнений (2.1) будут

$$\tilde{R}^k = -vh \mp \sqrt{(1-h^2)(1-v^2)}\tag{2.10}$$

Связь между инвариантами \tilde{R}^1 , \tilde{R}^2 и исходными переменными определяется уравнениями

$$\tilde{R}^1\tilde{R}^2 = h^2 + v^2 - 1, \quad \tilde{R}^1 + \tilde{R}^2 = -2vh\tag{2.11}$$

Уравнения (2.11), в итоге, например, для h приводят к уравнению четвертого порядка, и величины h и v не могут быть однозначно определены по \tilde{R}^1 , \tilde{R}^2 .

Напротив, предложенная замена (2.5) приводит к взаимнооднозначному соответствию $(R^1, R^2) \Leftrightarrow (h, v)$, естественно, при условии $(-\pi/2 < \xi, \eta < \pi/2)$. Более того, при любых эволюциях решения $(h, v) \in \Omega$ (см. (2.4), (2.5)), то есть уравнения (2.5) (и (2.1)), всегда являются гиперболическими. Нетрудно понять, что для исследования уравнений в эллиптической области удобно, например, использовать замену $h = \sin \xi$, $v = \operatorname{ch} \eta$, $|\eta| < 1$, $|\xi| > 1$ (см. [14]).

2.2. Задача Коши для инвариантов Римана. Записанная для инвариантов Римана задача Коши, соответствующая (2.6), (2.7) (или (2.1), (2.2)), имеет вид

$$R_t^1 + \lambda^1(R^1, R^2)R_x^1 = 0, \quad R_t^2 + \lambda^2(R^1, R^2)R_x^2 = 0\tag{2.12}$$

$$R^1(x, 0) = R_0^1(x), \quad R^2(x, 0) = R_0^2(x),\tag{2.13}$$

где $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$ — заданные функции, $\lambda(R^1, R^2)$, $\lambda^1(R^1, R^2)$ определены с учетом (2.8), (2.9).

Основная цель работы — построение неявного двухпараметрического решения задачи Коши (2.12), (2.13) и указание способа (как правило, численного) восстановления явного решения на линиях уровня неявного решения (изохронах).

3. Построение решения. Для построения решения задачи Коши (2.12), (2.13) применяем метод годографа на основе закона сохранения, впервые предложенный в [6] и развитый в [10], а также использованный в ряде работ [7–9, 11]). На самом деле можно использовать и иные варианты метода — классический вариант (взаимозамена зависимых и независимых переменных $(R^1, R^2) \Leftrightarrow (\xi, \eta)$, см., например, ([16], с. 33, 34)), или обобщенный метод годографа [17]. Почти очевидно, что, в конечном итоге, все указанные методы приведут к одинаковому результату. С точки зрения авторов, метод на основе закона сохранения более “прозрачен” и лучше приспособлен к решению задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений гиперболического типа. В данном разделе описание метода дается для общего случая произвольных зависимостей $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ и лишь затем рассмотрен конкретный вариант (2.9).

3.1. Неявное двухпараметрическое решение. Следуя [6, 10] двухпараметрическое неявное решение задачи Коши (2.12), (2.13) разыскиваем в виде

$$R^1(x, t) = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2(x, t) = r^2(a) = R_0^2(a),\tag{3.1}$$

где a, b — параметры.

Для определения связи между переменными (x, t) и параметрами (a, b) в форме

$$t = t(a, b), \quad x = x(a, b), \quad (3.2)$$

используем закон сохранения

$$\varphi_t(R^1, R^2) + \psi_t(R^1, R^2) = 0, \quad (3.3)$$

где φ , ψ – плотность и плотность потока закона сохранения.

Выполняя дифференцирование в (3.3), и исключая при помощи (2.12) производные, например, R_t^1 , R_t^2 , получаем линейную систему для определения функций $\varphi(R^1, R^2)$, $\psi(R^1, R^2)$

$$\begin{aligned} \psi_{R^1}(R^1, R^2) &= \lambda^1(R^1, R^2)\varphi_{R^1}(R^1, R^2) \\ \psi_{R^2}(R^1, R^2) &= \lambda^2(R^1, R^2)\varphi_{R^2}(R^1, R^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Условия разрешимости уравнений (3.4) приводят к линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для функции φ (аналогичное для функции ψ)

$$(\lambda^1 - \lambda^2)\varphi_{R^1 R^2} + \lambda_{R^2}^1 \varphi_{R^1} - \lambda_{R^1}^2 \varphi_{R^2} = 0, \quad (3.5)$$

которое дополняем условиями (см. [10], условия модифицированы по сравнению с [6])

$$(\psi - \lambda^1 \varphi)|_{R^1=r^1(b)} = 1, \quad (\psi - \lambda^2 \varphi)|_{R^2=r^2(a)} = -1 \quad (3.6)$$

Легко показать, что решение задачи (3.4)–(3.6) имеет вид

$$\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{2\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)}{\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)}, \quad (3.7)$$

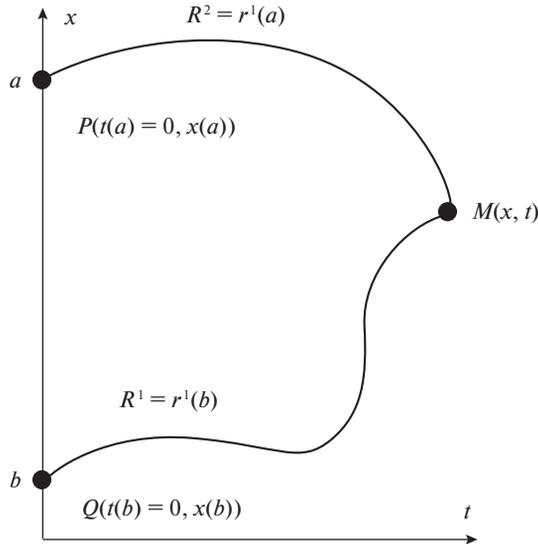
где $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ – функция Римана–Грина уравнения (3.5), которая по переменным R^1, R^2 удовлетворяет уравнению (3.5), а по переменным r^1, r^2 – сопряженному уравнению, функцию $\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$, по аналогии с функцией Римана–Грина, удобно записывать как зависящую от параметров r^1, r^2 .

Действительно, дифференцируя соотношения (3.6) соответственно по R^2 и R^1 , с учетом (3.4) получим условия, возникающие при определении функции Римана–Грина (см. [18], с. 446–457), а дополнительный множитель в формуле (3.7) появляется из условий (3.6) если положить $R^1 = r^1$, $R^2 = r^2$ и учесть нормировку $\Phi(r^1, r^2 | r^1, r^2) = 1$.

Функция $t(a, b)$, связывающая переменную t с a, b , определяется соотношением

$$t(a, b) = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) | r^1(b), r^2(a)) d\tau \quad (3.8)$$

Здесь приведен частный вид формулы, справедливый для случая, когда начальные условия задаются при $t = 0$. Более общий вид формулы для начальных данных задаваемых на некоторой кривой в плоскости (x, t) см. в [6, 10], а также [7–9, 12]. Опуская подробности, укажем, что соотношение (3.8) получено интегрированием по замкнутому контуру PQM дифференциальной 1-формы $(\psi dt - \varphi dx)$, соответствующей закону сохранения (3.3). Часть контура PQ – это отрезок $[a, b]$ на оси $t = 0$. Части контура QM , PM отвечают характеристикам, соответственно, $dx = \lambda^1 dt$ и $dx = \lambda^2 dt$, на которых со-

Рис. 2. Контур PQM .

храняются инварианты Римана — $R^1 = r^1(b)$ и $R^2 = r^2(a)$ (см. рис. 2). Фактически, значения $r^1(b)$, $r^2(a)$ идентифицируют характеристики.

Аналогичным образом определяется функция $x(a, b)$, необходимая для окончательного построения неявного решения (3.1), (3.2). Однако, для нахождения явного решения функция $x(a, b)$, непосредственно, не требуется (см. [10]).

Обратим внимание на то, что роль “параметров” a, b достаточно многогранна. Во-первых, можно считать, что a, b — это обычные числовые параметры, задающие двух-параметрическое решение. Во-вторых, если при помощи (3.2) удастся построить обратные функции $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, то (3.1) попросту является явным решением задачи. В-третьих, ввиду (3.1), величины a, b можно считать инвариантами Римана, так как функции от инвариантов Римана также инварианты. Наконец, в-четвертых, a, b — это лагранжевы переменные, то есть значения координаты x в момент $t = 0$. Последнее, в частности, означает, что построен аналог метода характеристик для системы двух квазилинейных уравнений — начальные данные из точек $x = a$, $x = b$ оси x переносятся вдоль характеристик PM, QM в точку M (см. рис. 2).

3.2. Явное решение на изохронах. Для построения явного решения на плоскости (a, b) рассматриваем линии уровня функции $t(a, b)$ (изохроны). Задавая значение t_* , выбираем некоторую изохрону, считая ее параметризованной при помощи параметра μ

$$t_* = t(a(\mu), b(\mu)), \quad (3.9)$$

где t_* — момент времени, идентифицирующий линию уровня, $a(\mu), b(\mu)$ — значения a, b , соответствующие параметру μ .

Считая изохрону достаточно гладкой (кусочно-гладкой), и дифференцируя соотношение (3.9) по параметру μ , получаем задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (подробнее см. ([10], с. 46–51))

$$\frac{da(\mu)}{d\mu} = -t_b(a, b), \quad \frac{db(\mu)}{d\mu} = t_a(a, b), \quad \frac{dX(\mu)}{d\mu} = J(a, b) \quad (3.10)$$

$$a(0) = a_*, \quad b(0) = b_*, \quad X(0) = X_*$$

$$J(a, b) = \left(\lambda^2 \left(r^1(b), r^2(a) \right) - \lambda^1 \left(r^1(b), r^2(a) \right) \right) t_a(a, b) t_b(a, b), \quad (3.11)$$

где (a_*, b_*) – точка на изохроне, соответствующая $\mu = 0$, функция $X(\mu)$ отвечает координате x на изохроне: $X(\mu) = x(a, b) = x(a(\mu), b(\mu))$, X_* – значение координаты x на изохроне при $\mu = 0$, производные $t_a(a, b)$, $t_b(a, b)$ вычисляются при помощи (3.8), $J(a, b)$ – якобиан преобразования $(a, b) \rightleftharpoons (x, t)$.

Таким образом, интегрируя задачу Коши (3.10), с учетом (3.1) для момента времени t_* получаем явное решение, которое полностью определяется начальными данными $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$

$$R^1(x, t_*) = r^1(b(\mu)) = R_0^1(b(\mu))$$

$$R^2(x, t_*) = r^2(a(\mu)) = R_0^2(a(\mu)) \quad (3.12)$$

$$x = X(\mu), \quad t_* = t(a_*, b_*)$$

Конечно, предварительно следует решить задачу (3.5), (3.6) для нахождения функции φ , входящую в соотношение (3.8). Ограничения накладываемые на начальные данные, фактически, определяются условиями существования интеграла (3.8), в частности, $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$ могут быть кусочно-гладкими функциями и даже кусочно-непрерывными (в этом случае потребуются дополнительные условия на разрывах, см., например, [27]).

Заметим, что явное решение (3.12), по-прежнему, является двухпараметрическим. Роль параметров играют момент времени t_* и μ . На практике, вычисление интегралов в выражениях для $t(a, b)$, $t_a(a, b)$, $t_b(a, b)$ сводится к решению некоторых задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, что существенно упрощает вычисления (подробнее см. [10]).

Наконец, обратим внимание на то, что правая часть уравнения для $X(\mu)$ совпадает с якобианом $J(a, b)$ преобразования $(a, b) \rightleftharpoons (x, t)$ (см. (3.11)). В частности, это означает, что знак производной $dX(\mu)/d\mu$ может измениться, и при нарушении монотонности функции $X(\mu)$ по параметру μ на изохроне может возникнуть неоднозначность решения по переменной x . Иными словами, метод позволяет строить опрокидывающиеся (неоднозначные) решения, конечно, если физический смысл задачи, как в случае границы раздела между двумя слоями жидкости, допускает такие решения.

4. Функция Римана–Грина для уравнения (3.5). Для нахождения функции $t(a, b)$ требуется функция $\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$, определяемая, в свою очередь, функцией Римана–Грина уравнения (3.5) (см. (3.7)). Именно возможность явного определения функции Римана–Грина является ключевым фактором эффективности метода, описанного в разд. 2.

Уравнение (3.5) удобно представить в общей форме

$$\varphi_{R^1 R^2} + A(R^1, R^2) \varphi_{R^1} + B(R^1, R^2) \varphi_{R^2} + C(R^1, R^2) \varphi = 0, \quad (4.1)$$

где коэффициенты $A(R^1, R^2)$, $B(R^1, R^2)$, $C(R^1, R^2)$ определены соотношениями (с учетом (2.9))

$$A(R^1, R^2) = \frac{\lambda_{R^2}^1}{\lambda^1 - \lambda^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} \eta)$$

$$B(R^1, R^2) = -\frac{\lambda_{R^1}^2}{\lambda^1 - \lambda^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \eta), \quad C(R^1, R^2) = 0 \quad (4.2)$$

$$\xi = R^1 + R^2, \quad \eta = R^2 - R^1$$

Вычисляя инварианты Лапласа k и h ([19], с. 117, (3.2)), а также инварианты Овсянникова p и q ([19], с. 120, (4.6)), имеем

$$h = A_{R^1} + AB - C = \frac{3}{4}(\operatorname{tg}^2 \xi - \operatorname{tg}^2 \eta) \quad (4.3)$$

$$k = B_{R^2} + AB - C = \frac{3}{4}(\operatorname{tg}^2 \xi - \operatorname{tg}^2 \eta) \quad (4.4)$$

$$p = \frac{k}{h} = 1, \quad q = \frac{(\ln h)_{R^1 R^2}}{h} = \frac{8}{3} \quad (4.5)$$

Это означает, что в соответствии с классификационной теоремой ([19], с. 123) уравнение (4.1), (4.2) эквивалентно одному из вариантов уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (такой вид уравнение имеет только при $p = 1$)

$$Z_{XY}(X, Y) - \frac{2}{q(X+Y)^2} Z(X, Y) = 0 \quad (4.6)$$

Переход от уравнения (4.1), (4.2) к эквивалентному уравнению (4.6) осуществляется при помощи замены переменных [19, с. 117, (3.1)]

$$X = \alpha(R^1), \quad Y = \beta(R^2), \quad \varphi = \omega(R^1, R^2)Z(X, Y), \quad (4.7)$$

где $\alpha(R^1)$, $\beta(R^2)$, $\omega(R^1, R^2)$ определяются уравнениями (см. ([19], с. 123, (5.3) и с. 118 (3.3))), которые при переходе от (4.1) к (4.6) принимают вид

$$h(R^1, R^2) = \frac{2}{q} \frac{\alpha_{R^1} \beta_{R^2}}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_{R^1} \beta_{R^2}}{(\alpha + \beta)^2} \quad (4.8)$$

$$(\ln \omega)_{R^1 R^2} - \frac{\omega_{R^1} \omega_{R^2}}{\omega^2} = -h \quad (4.9)$$

Нетрудно показать, что с учетом формул (4.3)–(4.5) уравнения (4.8), (4.9) допускают решения

$$\alpha(R^1) = \frac{1}{2} \cos(2R^1), \quad \beta(R^2) = \frac{1}{2} \cos(2R^2) \quad (4.10)$$

$$\omega(R^1, R^2) = K(\alpha(R^1) + \beta(R^2))^{\frac{1}{2}},$$

где K – произвольный постоянный множитель.

Функция Римана–Грина для уравнения (4.8) хорошо известна (см., например, [20–23]) и впервые получена Риманом ([24], с. 73). В рассматриваемом случае функция имеет вид

$$Z(R^1, R^2 | r^1, r^2) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \theta\right) \quad (4.11)$$

$$\theta = -\frac{(\alpha(R^1) - \alpha(r^1))(\beta(R^2) - \beta(r^2))}{(\alpha(r^1) + \beta(r^2))(\alpha(R^1) + \beta(R^2))}, \quad (4.12)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Окончательный результат для функций $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ и $\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ (см. (3.7), (3.8)) имеет вид

$$\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{(\alpha(R^1) + \beta(R^2))^{1/2}}{(\alpha(r^1) + \beta(r^2))^{1/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \theta\right) \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2}\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{(\alpha(R^1) + \beta(R^2))^{1/2}}{(\alpha(r^1) + \beta(r^2))^{3/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \theta\right) \quad (4.14)$$

Обратим внимание, что множитель K выбран с учетом нормировки $\Phi(r^1, r^2 | r^1, r^2) = 1$ для функции Римана–Грина.

5. Результаты расчетов и анализ. С использованием алгоритма, изложенного в разд. 2, и с учетом выражения для функции Римана–Грина (4.13), (4.14), приведем результаты решения задачи Коши в исходных переменных (2.1), (2.2) для некоторых начальных данных.

5.1. Периодическое возмущение границы между слоями. Начальные данные для функции $h_0(x)$, $v_0(x)$ выбираем в виде T -периодического пространственного возмущения границы раздела

$$h_0(x) = \varepsilon \cos x, \quad v_0(x) = v_0 = \text{const}, \quad (5.1)$$

где ε – амплитуда возмущения, v_0 – начальная постоянная полуразность скоростей слоев жидкости, $T = 2\pi$ – период, выбор которого не играет существенной роли, ввиду $-\infty < x < \infty$.

5.2. Выбор начальных данных для задачи Коши (3.10), (3.11). Для решения задачи Коши (3.10), (3.11) требуются начальные данные – значения a_* , b_* , идентифицирующие изохрону, и значение X_* , связывающее начало отсчета координаты x и параметра μ . Способ определения X_* по заданным a_* , b_* подробно описан в ([10], с. 50, 51), а также в [7–9, 11–13] и, в конечном итоге, сводится к однократному (для каждой изохроны) вычислению интеграла

$$Y(b) = \int_{a_*}^b x_{\bar{b}}(a_*, \bar{b}) d\bar{b} + a_* = \int_{a_*}^b \lambda^2(r^1(\bar{b}), r^2(a_*)) t_{\bar{b}}(a_*, \bar{b}) d\bar{b} + a_* \quad (5.2)$$

Здесь $Y(b) = x(a_*, b)$ и учтено соотношение $x_b = \lambda^2 t_b$ ($x_a = \lambda^1 t_a$), которое следует из (3.1) после подстановки в (2.12) при тождественно не равных константе функциях $r^1(b)$, $r^2(a)$.

Очевидно, что $X_* = Y(b_*) = x(a_*, b_*)$. Заметим, что в случае периодических решений выбор X_* существенной роли не играет.

Для выбора a_* , b_* следует построить на плоскости (a, b) линии уровня функции $t(a, b)$ (см., в частности, рис. 3). Изображение изохрон на плоскости (a, b) крайне информативно. Дело в том, что первые два уравнения системы (3.10) представляют гамильтонову систему, в которой роль гамильтониана играет функция $t(a, b)$. Это означает, что стационарные точки (если таковые имеются, как в рассматриваемом случае) могут быть либо седлом, либо центром. Сказанное демонстрирует рис. 3, на котором

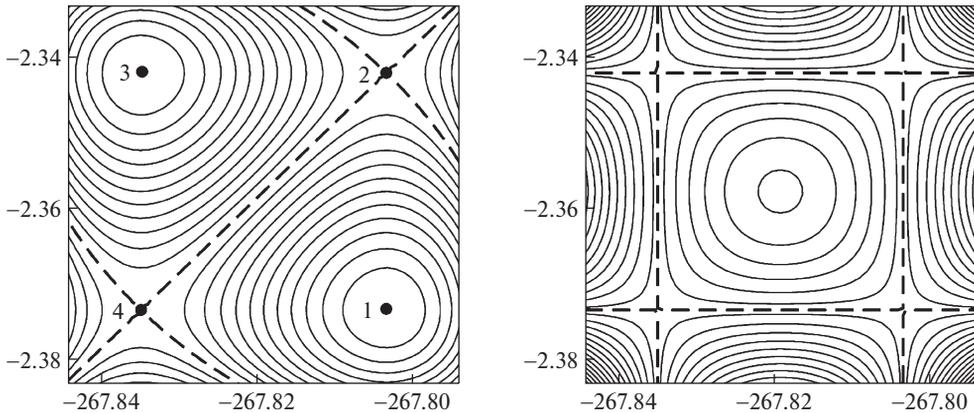


Рис. 3. Линии уровня функции $t(a, b)$ (слева) и якобиана $J(a, b)$ (справа) в окрестности точки $a_0 = -267.819, b_0 = -2.358$ (центр рисунка). $J(a_0, b_0) = -2.4 \times 10^{-7}$. На сепаратрисах (штриховые линии) происходит смена знака якобиана. Параметры: $\varepsilon = 0.1, \nu_0 = 0$. Значения момента времени на изохронах $t_* \approx 266.129$ и различаются в окрестности точки (a_0, b_0) лишь в четвертом знаке. Цифрами 1–4 отмечены стационарные точки (a_k, b_k) .

показаны изохроны в окрестности точки $(a_0, b_0) = (-267.819, -2.358)$ и отмечены стационарные точки системы (3.10)

$$\begin{aligned}
 (a_1, b_1) &= (-267.80434, -2.37263) \\
 (a_2, b_2) &= (-267.80430, -2.34283) \\
 (a_3, b_3) &= (-267.83418, -2.34279) \\
 (a_4, b_4) &= (-267.83414, -2.37267),
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

в которых $t_a(a_k, b_k) = 0, t_b(a_k, b_k) = 0$. Точки $(a_1, b_1), (a_3, b_3)$ являются центрами, а точки $(a_2, b_2), (a_4, b_4)$ соответствуют седловым точкам.

В совокупности с линиями уровня якобиана $J(a, b)$ (см. рис. 3) поведение изохрон позволяет качественно описать структуру решения, в частности, на линиях смены знака якобиана может происходить опрокидывание решения.

Важно отметить, что при построении решений $h(x, t_*)$, $v(x, t_*)$ для различных моментов $t_* = t(a_*, b_*)$ выбираемые начальные точки (a_*, b_*) , идентифицирующие изохроны, не должны попадать на замкнутые линии уровня (см. окрестности центров $(a_1, b_1), (a_3, b_3)$ на рис. 3), по крайней мере, для рассматриваемой задачи. Таким замкнутым линиям соответствуют изолированные решения, не реализуемые для рассматриваемых начальных данных. Иными словами, характеристики, выходящие с оси $t = 0$ (см. рис. 2), не попадают на замкнутые линии. Заметим, что характеристики, выходящие с оси $t = 0$, не попадают и в седловые точки $(a_2, b_2), (a_4, b_4)$.

5.3. Периодичность решения. В случае периодических начальных данных (5.1), очевидно, что $R_0^1(\tau), R_0^2(\tau), r^1(b), r^2(a)$ являются T -периодическими функциями своих аргументов. Это, в частности, означает, что функция Римана–Грина $\varphi(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)|r^1(b),$

$r^2(a)$ (подынтегральное выражение в (3.8)) является T -периодической по каждому аргументу τ , a , b . Легко показать, что выполнено соотношение $t(a+T, b+T) = t(a, b)$, и решение задачи (2.1), (2.2) с начальными данными (5.1) сохраняет пространственную T -периодичность. Действительно, интегрируя тождество

$$\frac{d}{d\mu} x(a(\mu), b(\mu)) = \frac{d}{d\mu} x(a(\mu) + T, b(\mu) + T),$$

с учетом начального условия (см. (3.10)) $X|_{\mu=0} = X_*$ получим

$$x(a, b) - X_* = x(a + T, b + T) - x(a_* + T, b_* + T) \quad (5.4)$$

Принимая во внимание (5.2), имеем

$$X_* = x(a_*, b_*) = \int_{a_*}^{b_*} (x_{\bar{b}}(a_*, \bar{b}) d\bar{b} + a_*),$$

и, ввиду периодичности подынтегрального выражения,

$$x(a_* + T, b_* + T) = \int_{a_*+T}^{b_*+T} x_{\bar{b}}(a_* + T, \bar{b}) d\bar{b} + a_* + T = X_* + T \quad (5.5)$$

Тогда с учетом (5.4), (5.5)

$$x(a + T, b + T) = x(a, b) + T \quad (5.6)$$

Окончательно, учитывая вид решения (3.12), получим искомую T -периодичность решения по переменной x

$$\begin{aligned} R^1(x(a, b) + T, t_*) &= R^1(x(a + T, b + T), t_*) = r^1(b + T) = r^1(b) = R^1(x(a, b), t_*) \\ R^2(x(a, b) + T, t_*) &= R^2(x(a + T, b + T), t_*) = r^2(a + T) = r^2(a) = R^2(x(a, b), t_*) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заметим, что в случае начальных данных (5.1), по причине периодичности $t(a + T, b + T) = t(a, b)$, построение линий уровня существенно упрощается — на плоскости (a, b) возникает некоторая периодическая структура изолиний. В частности, точки $(a_k + 2\pi l, b_k + 2\pi l)$ (см. (5.3)) также являются стационарными точками.

5.4. Многозначность и опрокидывание решения. Одной из важных характеристик решений казилинейных уравнений является момент времени t_z , при котором происходит “опрокидывание” профиля решения — решение может становиться многозначным по пространственной координате, и/или происходит градиентная катастрофа. Многозначность решения, обычно, как, например, в газовой динамике, устраняется при помощи разрывного решения (ударной волны). В рассматриваемой задаче о поведении границы раздела слоев жидкости, многозначность не противоречит физике процесса — граница раздела, в принципе, может иметь произвольную форму, которая описывается многозначной по x функцией $h(x, t)$. Ясно, что t_z зависит от вида начального распределения и, в случае (5.1), от параметров ε , v_0 , то есть $t_z = t_z(\varepsilon, v_0)$.

Момент t_z вычисляется из условий наличия точки перегиба координаты $x = X(\mu)$ (см. (3.12)) в некоторой точке изохроны, то есть условий $x = X(\mu)$, $X_{\mu}(\mu) = 0$, $X_{\mu\mu}(\mu) = 0$, которые приводят к одной из систем

$$J(a, b) = 0, \quad t_{aa}(a, b) = 0 \quad (5.8)$$

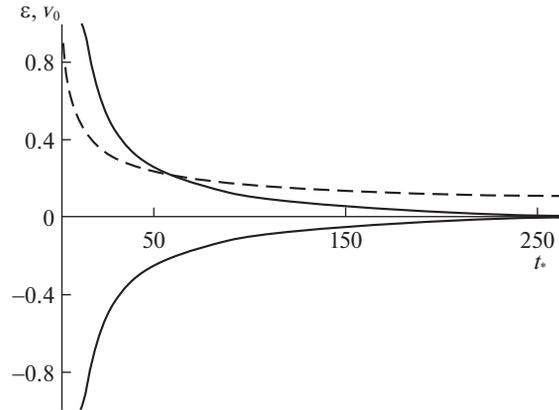


Рис. 4. Зависимости времени опрокидывания t_z для параметров $\varepsilon = 0.1$, $-0.99 < v_0 < 0.99$ (сплошная линия) и $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.891$, $v_0 = 0$ (штриховая линия).

или

$$J(a, b) = 0, \quad t_{bb}(a, b) = 0 \quad (5.9)$$

Решение (a_z, b_z) одной из систем (5.8) и/или (5.9) определяет момент времени $t_z = t(a_z, b_z)$.

Обратим внимание на то, что в стационарных точках (a_k, b_k) якобиан $J(a_k, b_k) = 0$ и $X_{\mu\mu}(\mu) = 0$. Однако, как уже указывалось, характеристики с оси $x = 0$ не попадают в точки (a_k, b_k) и такие точки не следует рассматривать как точки опрокидывания решения.

Результаты расчетов t_z для параметров $\varepsilon = 0.1$, $-0.99 < v_0 < 0.99$ и $v_0 = 0$, $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.891$, приведены на рис. 4. При $\varepsilon = 0.1$, $v_0 = 0$ значение $t_z = 265.9985$ ($a_z = -267.2250$, $b_z = -2.3578$).

Как и следовало ожидать, наибольшее значения t_z принимает в случае, когда в начальный момент времени различие в скоростях между слоями отсутствует ($v_0 = 0$), и t_z убывает с ростом $|v_0|$. Аналогичное убывание t_z имеет место и при росте амплитуды возмущения ε .

5.5. Поведение границы раздела. На рис. 5 в моменты времени t_* (на изохронах) показаны граница раздела $h(x, t_*)$ и изменения полуразности скоростей $v(x, t_*)$ в слоях жидкости.

Кроме этого, на рис. 5 г изображены функция $\mu = \mu(x)$ и функция $t_{bb}(a(\mu), b(\mu))$ по переменной x . Это позволяет отслеживать опрокидывание профиля решения, то есть ситуацию, при которой $X_\mu(\mu) = 0$ (или $\mu_x(x) = \infty$) и $t_{bb} = 0$ или $t_{aa} = 0$ (см. (5.8), (5.9)). Мнозначность решения по переменной x , в частности, видна на рис. 5 в.

5.6. О построении асимптотики. Соотношение (3.8) для определения функции $t(a, b)$ с учетом вида функции Римана–Грина (4.12)–(4.14) для малых значений параметра ε в случае начальных данных (5.1) позволяет достаточно просто построить асимптотику решения. Для этого, принимая во внимание, что при $v_0 = 0$ имеем $\theta = O(\varepsilon^4)$, а при $v_0 \neq 0$ имеем $\theta = O(\varepsilon^2)$ (см. (4.12), (4.10), (2.5), (2.8), (5.1)), достаточно взамен гипергеометрической функции ${}_2F_1$ использовать разложение в ряд, сохраняя члены порядка

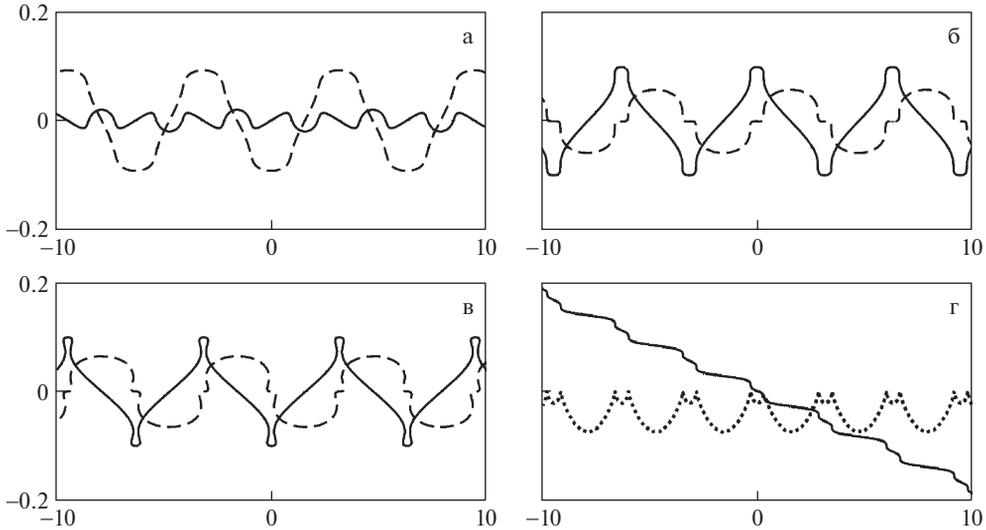


Рис. 5. Функции $h(x, t_*)$ (сплошная линия) и $v(x, t_*)$ (штриховая линия) в моменты: (а) $t_* = 195$, (б) $t_* = 265.5$, (в) $t_* = 322.5$, (г) – функция $\mu(x)$ (сплошная линия) и функция $t_{bb}(x)$ для изохроны (б) при $t_* = 265.5$.

$O(\varepsilon^4)$ и явно вычисляя интеграл в (3.8). Вычислительный эксперимент показал, что при $\varepsilon = 0.1$, $v_0 = 0$ разложение в ряды до членов порядка $O(\varepsilon^4)$ позволяет воспроизводить вычисление изохрон и якобиана (см. рис. 3) с точностью до трех знаков после запятой. Конечно, задачу Коши (3.10), (3.11), все равно, приходится решать численно, но использование разложения ${}_2F_1$ позволяет существенно ускорить расчет. Заметим, что при этом и результаты, показанные на рис. 5, также воспроизводятся с указанной точностью.

В принципе, решение задачи (2.6), (2.7), по крайней мере, для начальных данных (5.1), можно разыскивать в виде асимптотических рядов по степеням ε

$$\{\xi, \eta\} = \sum_{k=0} \{\xi_{2k+1}(x, t), \eta_{2k+1}(x, t)\} \varepsilon^{2k+1}$$

Однако, величины $\{\xi_{2k+1}(x, t), \eta_{2k+1}(x, t)\}$ включают в себя члены порядка $O(t^k)$ и при больших значениях t сходимость рядов крайне плохая. На рис. 6 для параметров $\varepsilon = 0.1$, $v_0 = 0$ приведены результаты расчетов с сохранением членов ряда до порядка $O(\varepsilon^7)$, включительно, в моменты времени $t = 210$, $t = 265.5$ (сравни с рис. 6б). Удовлетворительный результат с точностью до 1% удается получить лишь при $t < 140$ (напомним, что момент опрокидывания решения для данных параметров $t_z \approx 266$). При дальнейшем росте t асимптотическое решение значительно отличается от точного. Дальнейшее увеличение количества членов ряда лишь ухудшает ситуацию, ввиду того, что ряды являются асимптотическими.

Заметим, что построение решения в виде рядов делает практически невозможным определение момента опрокидывания решения.

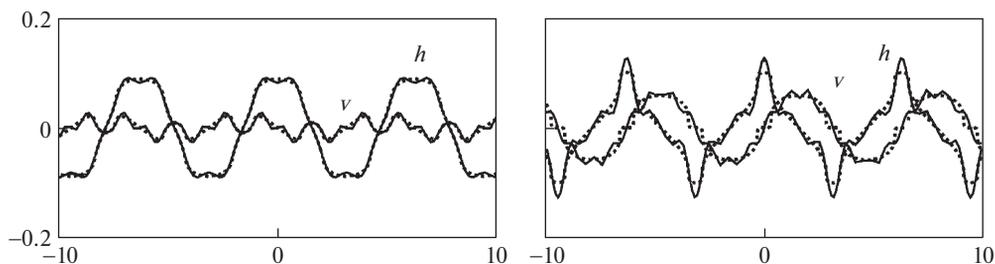


Рис. 6. Функции $h(x, t_*)$, $v(x, t_*)$ в моменты: $t_* = 210$ и $t_* = 265.5$ (справа). Асимптотика (сплошная линия) с точностью до $O(\varepsilon^9)$ и точное решение (пунктир). Параметры $\varepsilon = 0.1$, $v_0 = 0$.

Заключение. Рассмотренный в работе алгоритм решения задачи (2.6), (2.7), конечно, применим и к начальным данным, отличным от (5.1). Выбор периодических начальных данных и представление результатов расчетов для параметра $v_0 = 0$ обусловлено лишь тем, что в этом случае, ввиду различных симметрий (отсутствие начального сдвига скорости, симметричное расположение границы раздела и т.п.), наиболее ярко проявляются особенности решения, такие как, например, наличие стационарных точек. Расчеты для других начальных данных, в частности, для движущихся навстречу солитоноподобных возмущений границы, не приведены по причине того, что основной целью работы является построение эффективного алгоритма решения систем гиперболических уравнений, а не детальное исследование различных вариантов начальных данных. Обратим внимание на то, что метод, фактически, является точным — не используются никакие аппроксимации задачи, типичные для конечно-разностных методов, проекционных методов, метода конечных элементов и конечных объемов. Точность решения ограничена лишь точностью интегрирования задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конечно, серьезным ограничением метода являются требования существования явных соотношений, связывающих исходные переменные с инвариантами Римана, и наличие явного выражения для функции Римана–Грина. Последнее, впрочем, при отсутствии явного выражения лишь усложнит алгоритм, тогда как возможность записи задачи в инвариантах Римана весьма важна. Однако, круг задач, для которых такие требования выполнены достаточно широко (см., в частности, [6–15, 25, 26]). Помимо исследования конкретных оригинальных задач, одним из применений метода построения точного решения является использование результатов в качестве эталонных тестовых примеров для проверки при разработке иных численных алгоритмов решения систем (двух) квазилинейных уравнений. При этом, как уже указывалось, начальные данные могут быть кусочно-непрерывными и метод позволяет строить как разрывные решения (при наличии дополнительных соотношений на разрывах), так и автономные, решать задачу Гурса с данными на характеристиках (см., в частности, [27]), а также решать системы двух квазилинейных уравнений эллиптического типа (см., например, [10, 12, 14, 25, 28]). Наконец, заметим, что на основе закона сохранения, обобщенного и классического доказана [29] эквивалентность различных методов годографа.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.

2. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985. 319 с.
3. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2000. 420 с.
4. Gerwin R.A. Stability of the interface between two fluids in relative motion // *Rev. Mod. Phys.* V. 40. № 3. 1968. P. 652–658.
5. Степанянц А.Л., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996. 240 с.
6. Senashov S.I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // *SIGMA*. 2012. V. 8. № 071. 16 p.
7. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical integration of two hyperbolic quasilinear equations. Part I. The shallow water equations // arXiv:1410.2832, 2014. 19 p.
8. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part II. Zonal electrophoresis equations // arXiv:1503.01762, 2014. 23 p.
9. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part III. Two-beam reduction of the dense soliton gas equations // arXiv:1512.06710, 2015. 22 p.
10. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Долгих Т.Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015. 126 с.
11. Долгих Т.Ф. Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси // *Изв. вузов. Северо-Кавказ. рег. Естеств. науки*. 2017. № 3-1 (195-1). С. 28–35.
12. Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза // *Вестн. ВГУ. Сер.: Физика. Математика*. 2017. № 2. С. 85–96.
13. Долгих Т.Ф. Задача об опрокинутой мелкой воде // *Сб. тр. XX международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”*, Т. II, 2020. С. 78–82.
14. Долгих Т.Ф. Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой // *Изв. вузов. Северо-Кавказ. рег. Естеств. науки*. 2021. № 1 (195-1). С. 15–24.
15. Жданов Б.А., Трубников С.К. Квазиустойчивые газовые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
16. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 668 с.
17. Царев С.П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // *Изв. АН СССР. Сер. математич.* 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1067.
18. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
19. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 339 с.
20. Copson E.T. On the Riemann–Green function // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1958. V. 1. P. 324–348.
21. Zeitsch P.J. On the Riemann function [Электронный ресурс] // *Rev. in Math. Phys.* 2017.
22. Zeitsch P.J. On the Riemann function [Электронный ресурс] // *Mathematics*. 2018. V. 6. № 316. <https://doi.org/10.3390/math6120316>
23. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // *УМН*. 1992. Т. 47(286). Вып. 4. С. 83–144.
24. Riemann B. *Collected Papers*. Heber City (UT): Kendrock Press, 2004. 515 p.
25. Жуков М.Ю., Долгих Т.Ф. Математические модели жидкости, газа и переноса электрическим полем в многокомпонентных химически активных средах // *Математич. форум*. Т. 13. *Совр. пробл. математики и математич. образования*. Владикавказ ЮМИ ВНЦ РАН, 2020. С. 87–104.
26. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Solution of a Class of First-Order Quasilinear Partial Differential Equations // in: *Operator Theory and Differential Equations, Trends in Mathematics* / Ed. by Kusraev A.G., Totieva Z.D. Cham: Springer, 2021. P. 331–341. https://doi.org/0.1007/978-3-030-49763-7_22
27. Елаева М.С., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Взаимодействие слабых разрывов и метод годографа для задачи о фракционировании двухкомпонентной смеси электрическим полем // *ЖВММФ*. 2016. Т. 56. № 8. С. 1455–1469.

28. Сенашов С.И., Филлюшина Е.В., Гомонова О.В. Построение упруго-пластических границ с помощью законов сохранения // Вестн. СибГАУ. 2015. Т. 16. № 2. С. 343–359.
29. Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю. Варианты метода годографа для решения системы двух квазилинейных уравнений // Владикавк. мат. ж. 2021. Т. 23. № 2. С. 34–50.

Hodograph Method for Solving the Problem on Shallow Water under a Solid Cover in the Case of Hyperbolic Equations

T. F. Dolgikh^{a,#} and M. Yu. Zhukov^{a,b,##}

^a Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^b Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia

[#]e-mail: dolgikh@sfedu.ru

^{##}e-mail: myuzhukov@mail.ru

An exact two-parameter solution of the Cauchy problem of the flow of two-layer shallow water under a solid cover i.e., two infinite contiguous layers of liquid with a small density difference moving at different velocities in a horizontal channel with solid walls, is constructed. The distortion of the layer interface occurs due to the Kelvin-Helmholtz instability. The problem is described by a system of two quasilinear the first order hyperbolic partial differential equations. To construct the solution a variant of the hodograph method based on the conservation law is used. This method allow us transform a system of first order quasilinear partial differential equations to a linear second order partial differential equation with variable coefficients. For this equations the Riemann–Green function is known. A method is proposed for reconstructing the explicit solution of the Cauchy problem on the level lines of the implicit solution, which ultimately reduces the solution of the original problem to the solution of a certain Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. The results of calculations for spatially periodic initial data are presented.

Keywords: hodograph method, shallow water under the solid cover, quasilinear hyperbolic equations

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Models of two-layer “shallow water” // Appl. Mech.&Techn. Phys., 1979, no. 2, pp. 3–14.
2. Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I. et al. Nonlinear Problems of the Theory of Surface and Internal Waves. Novosibirsk: Nauka, 1985. 319 p. (in Russian)
3. Lyapidevsky V.Yu., Teshukov V.M. Mathematical models of propagation of long waves in an inhomogeneous liquid. Novosibirsk: SB RAS Publ., 2000. 420 p. (in Russian)
4. Gerwin R.A. Stability of the interface between two fluids in relative motion // Rev. Mod. Phys., vol. 40, no. 3, 1968, pp. 652–658.
5. Stepanyants A.L., Fabricant A.L. Wave Propagation in Shear Flows. Moscow: Nauka, 1996. 240 p. (in Russian)
6. Senashov S.I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA, 2012, vol. 8, no. 071. 16 p.
7. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical integration of two hyperbolic quasilinear equations. Part I. The shallow water equations // arXiv:1410.2832, 2014. 19 p.
8. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part II. Zonal electrophoresis equations // arXiv:1503.01762, 2014. 23 p.
9. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part III. Two-beam reduction of the dense soliton gas equations // arXiv:1512.06710, 2015. 22 p.
10. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V., Dolgikh T.F. Hodograph Method for Solving Hyperbolic and Elliptic Quasi-Linear Equations. Rostov-on-Don: SFU Publ., 2015. 126 p. (in Russian)

11. *Dolgikh T.F.* Solving the problem of mass transfer under the action of an electric field in a two-component mixture // *Izv. vuzov. The North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2017, no. 3-1 (195-1), pp. 28–35.
12. *Dolgikh T.F., Zhukov M. Yu., Shiryayeva E.V.* Solution of elliptic equations with periodic data for the problem of zonal electrophoresis // *Bull. VSU. Ser. Physics. Math.*, 2017, no. 2, pp. 85–96.
13. *Dolgikh T.F.* The problem of overturned shallow water // *Proc. XX Int. Conf. "Modern Problems of Continuum Mechanics"*, 2020, vol. II, pp. 78–82.
14. *Dolgikh T.F.* Hodograph method for solving the problem of shallow water under a hard lid // *Izv. vuzov. The North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2021, no. 1 (195-1). pp. 15–24.
15. *Zhdanov B.A., Trubnikov S.K.* Quasi-Stable Gas Media. Moscow: Nauka, 1991. 176 p. (in Russian)
16. *Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N.* Systems of Quasi-Linear Equations. Moscow: Nauka, 1978. 668 p. (in Russian)
17. *Tsarev S.P.* Geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. Generalized method of the hodograph // *Izv. USSR Acad. Sci. Ser. Math.*, 1990. vol. 54, no. 5, pp. 1048–1067.
18. *Courant R.* Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1964. 830 p. (in Russian)
19. *Ovsyannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1978. 339 p. (in Russian)
20. *Copson E.T.* On the Riemann–Green function // *Arch. Ration. Mech. Anal*, 1958., vol. 1. pp. 324–348.
21. *Zeitsch P.J.* On the Riemann function (Electronic resource) // *Rev. in Math. Phys.*, 2017.
22. *Zeitsch P.J.* On the Riemann function (Electronic resource) // *Math.*, 2018, vol. 6, no. 316. doi:10.3390/math6120316
23. *Ibragimov N.H.* Group analysis of ordinary differential equations and the principle of invariance in mathematical physics // *UMN*, 1992, vol. 47 (286), no. 4, pp. 83–144.
24. *Riemann B.* Collected Papers. Heber City (UT): Kendrock Press, 2004. 515 p.
25. *Zhukov M. Yu., Dolgikh T.F.* Mathematical models of liquid, gas and electric field transport in multicomponent chemically active media // *Math. Forum*, vol. 13. Modern Problems of Mathematics and Mathematical Education. Vladikavkaz YUMI VNC RAS, 2020. pp. 87–104.
26. *Zhukov M. Yu., Shiryeva E.V.* Solution of a Class of First-Order Quasilinear Partial Differential Equations // in: *Operator Theory and Differential Equations, Trends in Mathematics / Ed. by Kusraev A.G., Totieva Z.D.* Cham: Springer, 2021. pp. 331–341. doi: 0.1007/978-3-030-49763-7_22
27. *Elaeva M.S., Zhukov M. Yu., Shiryayeva E.V.* Interaction of weak discontinuities and the hodograph method for the problem of fractionation of a two-component mixture by an electric field // *Comp. Math.&Math. Phys*, 2016, vol. 56, no. 8. pp. 1455–1469.
28. *Senashov S.I., Filyushina E.V., Romanova O.V.* Construction of elastic-plastic boundaries using conservation laws // *Bull. SibGAU*, 2015, vol. 16, no. 2. pp. 343–359.
29. *Dolgikh T.F., Zhukov M. Yu.* Variants of the hodograph method for solving a system of two quasilinear equations // *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 34–50.

УДК 519.958

ПРОХОЖДЕНИЕ И ЗАХВАТ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

© 2022 г. С. А. Назаров^{1,*}, Л. Шенель^{2,**}

¹ *Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*

² *INRIA/Centre de mathématiques appliquées, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France*

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

**e-mail: lucas.chesnel@inria.fr

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.

После доработки 03.02.2021 г.

Принята к публикации 10.03.2021 г.

Изучаются захват и прохождение волн через акустический волновод с семейством перфорированных перегородок. Собственные числа соответствующей спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа найдены при условии геометрической симметрии. Почти полное прохождение поршневой волны через систему мелких отверстий (инвертированная аномалия Вайнштейна) достигается путем точной настройки расстояния между перегородками при разнообразной конфигурации соединительных отверстий. Установлен критерий возможности образования названной аномалии. Обсуждаются родственные вопросы, в частности, примитивные волновые фильтры и эффект камеры обскура.

Ключевые слова: акустический волновод, перфорированные стенки, захваченные волны, асимптотика коэффициентов рассеяния, почти полное прохождение волны

DOI: 10.31857/S0032823522010076

1. Постановка задачи. Опишем общую геометрию волновода, однако при некоторых ограничениях, которые будут сниматься в работе по мере надобности. Пусть $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ – цилиндр с сечением ω , областью на плоскости \mathbb{R}^2 с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Масштабированием сведем характерный размер сечения к единице и сделаем безразмерными системы декартовых координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2) := (x_1, x_2)$ и все геометрические параметры. Начало тех или иных координат обозначаем O . Пусть еще ω_* – внутренняя подобласть области ω и P^1, \dots, P^J – попарно различные точки в ней, т.е. $\bar{\omega}_* \subset \omega$ и $P^j \in \omega_*$, $P^j \neq P^k$ при $j \neq k$. Наконец, зафиксируем точки $z^1 < \dots < z^N$ на оси аппликат $z = x_3$ и подберем коэффициенты растяжения/сжатия $\gamma_n > 0$ и векторы сдвигов $y^n \in \mathbb{R}^2$ так, чтобы

$$\Omega_n = \left\{ x : \gamma_n^{-1} (y - y^n) \in \omega, z \in \Upsilon_n := (z^n, z^{n+1}) \right\} \supset \omega_* \times \Upsilon_n; \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (1.1)$$

Акустический волновод Π^ε с резонатором (рис. 1, а–г) составлен из полубесконечных цилиндрических рукавов

$$\Omega_0 := \Omega^- = \omega \times (-\infty, z^1), \quad \Omega_N := \Omega^+ = \omega \times (z^N, +\infty) \quad (1.2)$$

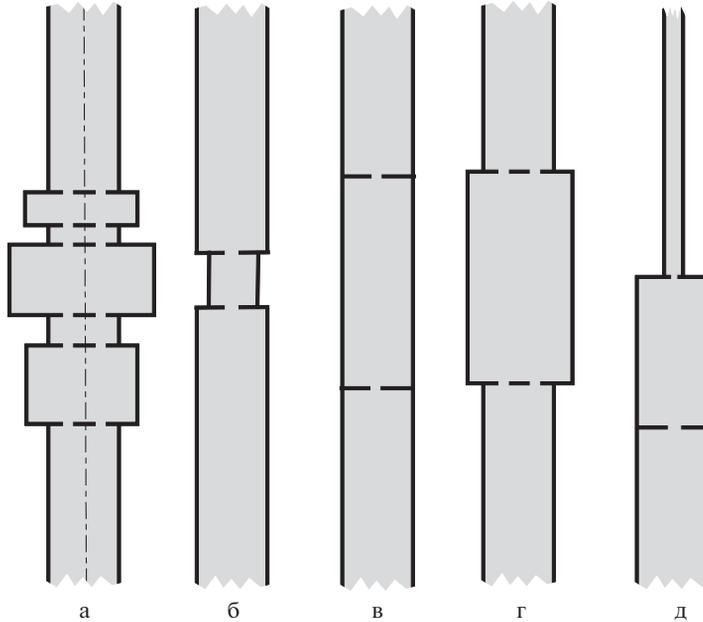


Рис. 1. Волноводы с несколькими (а) или одной (б–д) камерами, отделенными перфорированными перегородками.

и конечных цилиндров (1.1), зауженных или расширенных камер-вставок, которые соединены через мелкие отверстия

$$\theta_j^\varepsilon(z^n) = \{x : \varepsilon^{-1}(y - P^j) \in \theta_j, z = z^n\}; \quad j = 1, \dots, J, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (1.3)$$

в поперечных перегородках $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega_{n-1}$. При этом $\theta_1, \dots, \theta_J$ – ограниченные липшицевы области на плоскости, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр, а величина $\varepsilon_0 > 0$ зафиксирована так, что замыкания проекций множеств (1.3) на плоскость $\{x : z = 0\}$ попадают внутрь области ω_* , т.е. $\overline{\theta_j^\varepsilon(z^n)} \subset \partial\omega_* \times \{z^n\}$.

Гармонические во времени колебания акустической среды в волноводе с жесткими стенками и перфорированными перегородками

$$\Pi_N^\varepsilon = \bigcup_{n=0}^N \Omega_n \cup \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{j=1}^J \theta_j^\varepsilon(z^n) \quad (1.4)$$

описываются при помощи спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа Δ_x в дифференциальной форме

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda u^\varepsilon(x), \quad x \in \Pi_N^\varepsilon, \quad \partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0; \quad x \in \partial\Pi_N^\varepsilon \quad (1.5)$$

или вариационной форме

$$\left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon \right)_{\Pi_N^\varepsilon} = \lambda \left(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \right)_{\Pi_N^\varepsilon}; \quad \psi^\varepsilon \in H^1(\Pi_N^\varepsilon) \quad (1.6)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали ν , определенная почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Pi_N^\varepsilon$, а u^ε – давление в среде, $\lambda = \kappa^2$ – спектраль-

ный параметр и $\kappa > 0$ – частота колебаний (масштабированием постоянная плотность сведена к единице). Наконец, $(\cdot, \cdot)_{\Pi_N^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi_N^\varepsilon)$ и $H^1(\Pi_N^\varepsilon)$ – пространство Соболева.

При гладких или кусочно-гладких границах задействованных областей можно оперировать исключительно дифференциальной постановкой (1.5) задачи в обычных или весовых пространствах Соболева ([1] гл. 5 и 6), однако при собственно липшицевых поверхностях приходится иметь дело с интегральным тождеством (1.6). Далее ограничиваемся классическими формулировками возникающих краевых задач, так как переход к обобщенным проводится по стандартной схеме [2].

Левая часть равенства (1.6) – положительная, симметричная и замкнутая в $H^1(\Pi^\varepsilon)$ форма, а значит, задаче (1.5) ставится в соответствие ([3] гл. 10) положительный самосопряженный оператор A^ε в $L^2(\Pi^\varepsilon)$, область определения которого шире пространства Соболева $H^2(\Pi^\varepsilon)$ из-за корневых сингулярностей градиента решения на ребре $\partial\theta_j^\varepsilon(z^n) = \{x : y \in \partial\theta_j^\varepsilon, z = z^n\}$ (см. [4, 5] и, например, ([1] гл. 2 и 12)). Непрерывный спектр σ_c^ε оператора A^ε занимает замкнутую полуось $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$ и разбивается на участки постоянной кратности собственными числами

$$0 = \Lambda_0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_k \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.7)$$

модельной задачи на сечении

$$-\Delta_y U(y) = \Lambda U(y), \quad y \in \omega, \quad \partial_\nu U(y) = 0; \quad y \in \partial\omega \quad (1.8)$$

Дискретный спектр σ_d^ε заведомо пуст, но у оператора A^ε могут быть собственные числа, вкрапленные в непрерывный спектр и образующие точечный спектр σ_p^ε . В разд. 3 при дополнительных условиях симметрии (рис. 1, а)

$$\Pi_N^\varepsilon = \left\{ x = (y, z) : (-y_1, y_2, z) \in \Pi_N^\varepsilon \right\} \quad (1.9)$$

и “раздутия” $\gamma_n > 1$ хотя бы одной из камер при помощи приема [6] показано, что множество $\sigma_p^\varepsilon \cap (0, \Lambda_1)$ не пусто. В то же время для уменьшенных камер (рис. 1, б)

$$\gamma_n \leq 1, \quad L_n = z^{n+1} - z^n < \pi\Lambda_1^{-1/2}; \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (1.10)$$

на интервале $(0, \Lambda_1)$ собственных чисел оператора A^ε нет – этот факт вытекает из априорных оценок решений в сингулярно возмущенных областях [7]. В общей ситуации, в частности, выше первой положительной точки отсечки Λ_1 строение точечного спектра осталось неизученным.

Зафиксируем спектральный параметр $\lambda = \kappa^2$ в первом интервале $(0, \Lambda_1)$ непрерывного спектра; при этом $\kappa \in (0, \kappa_+)$ и $\kappa_+ = \sqrt{\Lambda_1}$. Тогда в прямом бесконечном цилиндре Ω распространяются только поршневые волны, не зависящие от поперечных координат y

$$w^\pm(z) = \alpha e^{\pm i\kappa z}, \quad \kappa = \sqrt{\lambda}, \quad \alpha = (2\kappa|\omega|)^{-1/2} \quad (1.11)$$

Нормирующий множитель α включает площадь $|\omega|$ сечения ω .

Волна w^+ , приходящая из бесконечности в рукаве Ω^- , порождает рассеянное акустическое поле и вместе с ним образует решение задачи (1.5)

$$u^\varepsilon(x) = \chi_-(z) \left(w^+(z) + R^\varepsilon w^-(z) \right) + \chi_+(z) T^\varepsilon w^+(z) + \tilde{u}^\varepsilon(x) \quad (1.12)$$

При этом R^ε и T^ε – коэффициенты отражения и прохождения при уходящих в рукавах Ω^\pm волнах (1.11), \tilde{u}^ε – остаток, затухающий на бесконечности со скоростью $O(e^{-\beta_\lambda |z|})$, $\beta_\lambda = \sqrt{\Lambda_1 - \lambda}$, а χ_\pm – гладкие срезающие функции, локализирующие волны в рукавах Ω^\pm

$$\chi_\pm(z) = 1 \quad \text{при} \quad \pm z > 2z_*, \quad \chi_\pm(z) = 0 \quad \text{при} \quad \pm z < z_*, \quad 0 \leq \chi_\pm \leq 1$$

Длина $z_* > 0$ зафиксирована так, что $-z_* < z^1 < \dots < z^{N+1} < z_*$.

Технический результат работы – вывод асимптотических формул для коэффициентов рассеяния

$$R^\varepsilon = R^0 + \tilde{R}^\varepsilon, \quad T^\varepsilon = T^0 + \tilde{T}^\varepsilon, \quad |\tilde{R}^\varepsilon| + |\tilde{T}^\varepsilon| \leq c\varepsilon \quad (1.13)$$

Формулы (1.13) с достаточно явными выражениями для R^0 и T^0 применяются для обеспечения почти полного прохождения поршневой волны через семейство перфорированных перегородок, т.е. достижению равенства $R^0 = 0$. Основное внимание в статье уделяется случаю двух ($N = 2$) перегородок, причем не только для волновода (1.4) с двумя рукавами (1.2), имеющими одинаковое сечение ω (рис. 1, б–г), но и для волновода (рис. 1, д)

$$\Pi_2^\varepsilon = \Omega_\#(\ell^\varepsilon) \cup \bigcup_{\pm} \left(\Omega_{\pm}(\ell^\varepsilon) \cup \bigcup_{j=1}^{J_{\pm}} \theta_{j\pm}^\varepsilon \right) \quad (1.14)$$

у которого рукава

$$\Omega_{\pm}(\ell^\varepsilon) = \{x : y \in \omega_{\pm}, \pm z > \ell^\varepsilon\} \quad (1.15)$$

и камера

$$\Omega_1 := \Omega_\#(\ell^\varepsilon) = \{x : y \in \omega_\#, |z| < \ell^\varepsilon\} \quad (1.16)$$

имеют неодинаковые сечения ω_{\pm} , $\omega_\# \subset \mathbb{R}^2$, а перегородки – различающуюся перфорацию

$$\Theta_{\pm}^\varepsilon(\ell^\varepsilon) = \left\{ x : y \in (\omega_{\pm} \cap \omega_\#) \setminus \bigcup_{j=1}^{J_{\pm}} \overline{\theta_{j\pm}^\varepsilon} \right\}, \quad \theta_{j\pm}^\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}(y - P_{(\pm)}^j), z = \pm \ell^\varepsilon\} \quad (1.17)$$

При этом $\omega_{\pm} \cap \omega_\# \neq \emptyset$ и $P_{(\pm)}^j \in \omega_{\pm} \cap \omega_\#$, $j = 1, \dots, J_{\pm}$. Используемые в формулах (1.14)–(1.17) обозначения вполне аналогичны введенным в начале раздела и не нуждаются в пояснениях. Упомянем лишь, что нормирующий множитель α_{\pm} в поршневых волнах равен $(2\kappa|\omega_{\pm}|)^{-1/2}$.

В разд. 2 приводятся известные результаты, относящиеся к случаям $N = J = 1$ (одна перегородка), $N = 2$, $J = 1$ (одна камера) и $N = \infty$ (периодическое семейство перегородок). В отличие от многих предшествующих публикаций используется метод [7] построения асимптотики решений статических и спектральных сингулярно возмущенных краевых задач, приспособленный [8–10] к дифракционным задачам о волноводах. В разд. 4 содержится вспомогательный материал, а в разд. 5 проведен асимптотический анализ решения (1.12) в волноводе Π_2^ε с двумя перегородками, но произволь-

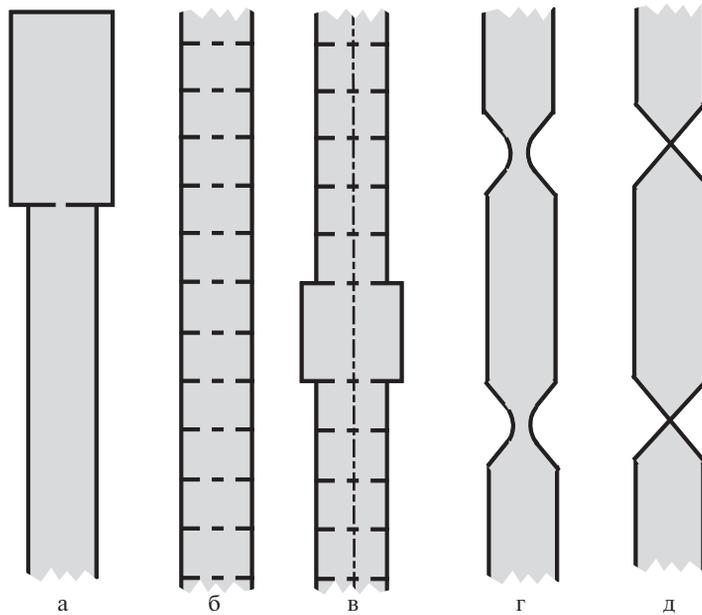


Рис. 2. Камера обскура (а), волноводы с периодическими семействами перфорированных перегородок (б и в) и волноводы с зауженными участками (г и д).

ным количеством отверстий, и как следствие в разд. 6 сформулированы условия, гарантирующие упомянутое почти полное прохождение поршневой волны. Этот эффект, называемый инвертированной аномалией Вайнштейна (терминология [11]), достигается путем подбора полувысоты вставки-камеры (1.16)

$$\ell^\varepsilon = \ell^0 + \varepsilon \ell' + \varepsilon^2 \ell'' \tag{1.18}$$

Благодаря свойству унитарности матрицы рассеяния названная аномалия распространения волны w^+ в направлении от $-\infty$ к $+\infty$ гарантирует такую же аномалию волны w^- в направлении от $+\infty$ к $-\infty$. Почти полное прохождение отличающихся от поршневых волн не исследовалось.

Многие геометрические ограничения введены в начале разд. 1 исключительно для предварительной фиксации объекта, но в разд. 5 и 7 обсуждаются разнообразные допустимые изменения геометрии волновода, в частности, широкие трубы, оканчивающиеся “глушителем” (рис. 1, д) или “камерой обскура” (рис. 2, а). Новый результат из разд. 6.2 – критерий (6.9) возможности достижения эффекта почти полного прохождения поршневой волны в волноводе (1.14) с разными рукавами (1.15) и количествами отверстий в двух перегородках. Если $J = 1$, а ω_\pm и $\theta_{1\pm}$ – круги с радиусами ρ_\pm^ω и ρ_\pm^θ соответственно (рис. 1, б), то упомянутый критерий выглядит просто

$$\frac{\rho_+^\theta}{\rho_+^\omega} = \frac{\rho_-^\theta}{\rho_-^\omega} \tag{1.19}$$

В общем случае критерий содержит площади $|\omega_\pm|$ сечений и, что весьма неожиданно, гармонические емкости [12, 13] множеств $\{x \in \mathbb{R}^3 : y \in \overline{\theta_{j\pm}}, z = 0\}$.

2. Известные факты

2.1. *Периодический волновод.* В рамках теории Флоке–Блоха–Гельфанда (см. [1, 14–17] и др.) существенный спектр σ_e^ε задачи (1.5) в цилиндре Π_∞^ε со счетным периодическим семейством перфорированных перегородок $\{\Theta^\varepsilon(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (рис. 2, б)

$$\Pi_\infty^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Theta^\varepsilon(n); \quad \Omega = \omega \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (2.1)$$

$$\Theta^\varepsilon(n) = \omega(n) \setminus \bigcup_{j=1}^J \theta_j^\varepsilon(n); \quad \omega(n) = \omega \times \{n\} \quad (2.2)$$

определяется при помощи преобразования Гельфанда [18] и требует исследовать модельную задачу на ячейке периодичности \mathfrak{W}^ε

$$\mathfrak{W}^\varepsilon = \left\{ x \in \Pi_\infty^\varepsilon : |z| < \frac{1}{2} \right\} = \left(\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) \setminus \Theta^\varepsilon(0) \quad (2.3)$$

Именно, существенный спектр σ_e^ε – объединение спектральных сегментов

$$\sigma_k^\varepsilon(k) = \left\{ M_k^\varepsilon(\tau) : \tau \in [-\pi, \pi] \right\}; \quad k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.4)$$

образованных собственными числами

$$0 \leq M_0(\tau) \leq M_1(\tau) \leq M_2(\tau) \leq \dots \leq M_k(\tau) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (2.5)$$

модельной спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta_x V^\varepsilon(x; \tau) &= M^\varepsilon(\tau) V^\varepsilon(x; \tau); \quad x \in \mathfrak{W}^\varepsilon \\ \partial_\nu V^\varepsilon(x; \tau) &= 0, \quad x \in \partial \mathfrak{W}^\varepsilon \setminus \left(\overline{\omega \left(-\frac{1}{2} \right)} \cup \overline{\omega \left(\frac{1}{2} \right)} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

с зависящими от параметра Флоке $\tau \in \mathbb{R}$ условиями квазипериодичности на торцах $\omega(\pm 1/2)$ ячейки (2.3)

$$V^\varepsilon \left(y, +\frac{1}{2}; \tau \right) = e^{i\tau} V^\varepsilon \left(y, -\frac{1}{2}; \tau \right), \quad \partial_z V^\varepsilon \left(y, +\frac{1}{2}; \tau \right) = e^{i\tau} \partial_z V^\varepsilon \left(y, -\frac{1}{2}; \tau \right); \quad y \in \omega \quad (2.7)$$

В волноводе (2.1) к единице сведен период, т.е. расстояние между соседними перегородками, а не характерный размер сечения ω . Ячейка периодичности, на которой ставится модельная задача со спектром (2.5), имеет единичную длину, но может быть вырезана из периодической области (2.1) произвольно; например, в случае $\mathfrak{W}^\varepsilon = \omega \times (0, 1)$ условия квазипериодичности устанавливают связь значений решения и его производных только на малых множествах $\theta_j^\varepsilon(0)$ и $\theta_j^\varepsilon(1)$, $j = 1, \dots, J$, лежащих на торцах $\omega(0)$ и $\omega(1)$, а на оставшейся части границы $\partial \mathfrak{W}^\varepsilon$ выставлены краевые условия Неймана.

Вариационная постановка [2] задачи (2.6), (2.7) порождает ([3], гл. 10) положительный самосопряженный оператор $B^\varepsilon(\tau)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathfrak{W})$ с дискретным спектром (2.5). Функции $\tau \mapsto M_k^\varepsilon(\tau)$ непрерывны и 2π -периодичны, т.е. сегменты (2.4) – связанные компакты на полуоси $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Для собственных чисел задачи (2.6), (2.7) установлены [19, 20] формулы

$$\left| M_k^\varepsilon(\tau) - M_k^0 \right| \leq c_k \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k] \quad (2.8)$$

Здесь c_k и ε_k – положительные величины, зависящие от номера k члена последовательности (2.5), а M_k^0 – собственные числа предельной задачи Неймана

$$-\Delta_x V^0(x) = M^0 V^0(x), \quad x \in \mathfrak{W}_\bullet^0, \quad \partial_\nu V^0(x) = 0; \quad x \in \partial \mathfrak{W}_\bullet^0$$

Ячейки $\mathfrak{W}_\bullet^\varepsilon$ и \mathfrak{W}_\bullet^0 совпадают как множества, но на торцах $\omega(0)$ и $\omega(1)$ второй из них уничтожены следы перфорации $\{\theta_j^\varepsilon\}_{j=1}^J$.

Соотношения (2.8) показывают, что длины сегментов (2.4) не превосходят $2c_k\varepsilon$, и в случае $M_k^0 < M_{k+1}^0$ между сегментами $\sigma^\varepsilon(k)$ и $\sigma^\varepsilon(k+1)$ раскрыта лакуна шириной $M_{k+1}^0 - M_k^0 + O(\varepsilon)$. Лакуны называются зонами торможения волн, так как на соответствующих частотах распространение волн в волноводе (2.1) невозможно. Вместе с тем при $\lambda \in \sigma_e^\varepsilon(k)$, т.е. в весьма узких частотных диапазонах (2.4), существуют волны, переносящие энергию без каких-либо потерь вдоль волновода через счетное семейство мелких отверстий. Поэтому спектральные сегменты называются зонами прохождения волн, а сами волны имеют вид

$$w(x) = e^{i\tau n} V(x; \tau), \quad (y, z - n) \in \mathfrak{W}^\varepsilon; \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

При этом $V(\cdot; \tau)$ – собственная функция задачи (2.6), (2.7), отвечающая собственному числу $M(\tau)$ при некотором $\tau \in (-\pi, \pi]$. Функция (2.9) именуется волной Флоке, оказывается гладкой благодаря условиям квазипериодичности (2.7) и в силу равенств (2.6) удовлетворяет задаче (1.5) в периодическом волноводе (2.1).

2.2. Одна перегородка. Исследована [21] дифракция волн в волноводе (1.4) с одной перегородкой и одним малым отверстием в ней, т.е. $N = 1$, $J = 1$, $y^1 = 0$ и $\Pi_1^\varepsilon = (\Omega \setminus \omega(0)) \cup \theta_1^\varepsilon(0)$ (в случае $J > 1$ выводы остаются без существенных изменений). На околопороговых частотах в Π_1^ε обнаружены разнородные аномалии Вайнштейна [22]. Опишем эти эффекты на примере малой частоты вблизи основного порога $\Lambda_0 = 0$ и увеличивающемся, но также малом размере ε отверстия $\theta_1^\varepsilon(0)$. Если отверстие совсем мало и $\varepsilon = o(\kappa)$, то поршневая волна претерпевает почти полное отражение и коэффициент прохождения T^ε – бесконечно малая $O(\varepsilon)$ (прямая аномалия Вайнштейна). В случае “большого” диаметра отверстия, т.е. при $\kappa = o(\varepsilon)$ наблюдается почти полное прохождение волны w^+ (инвертированная аномалия Вайнштейна по терминологии [11]), а именно, для коэффициентов рассеяния (1.13) верны соотношения $R^0 = 0$, $R^\varepsilon = O(\varepsilon)$ и $|T^\varepsilon| = 1 + O(\varepsilon)$.

Если величины ε и κ сравнимы по порядку, то оба коэффициента рассеяния R^ε и T^ε перестают быть малыми. Изучены [11, 23–26] родственные двумерные и трехмерные задачи, связанные с аномалиями Вайнштейна [22].

2.3. Две перегородки. Далее волноводам Π_2^ε (рис. 1, б–г) уделяется основное внимание.

Описан [27] эффект почти полного прохождения волн в случае $J = 1$, но для волновода Π_2^ε с мягкими стенками (задача Дирихле для уравнения Гельмгольца) при помощи подхода, опирающегося на разложение в ряды Фурье и потому излишне громоздкого. Метод [7] построения асимптотики решений краевых задач в сингулярно возмущенных областях применен [28, 29] для исследования прохождения волн в плоском волноводе с заузненными участками, образующими в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ двойной

угол (рис. 2, г и д). Как и в статье [27], на границе назначены условия Дирихле. В указанных публикациях процедуры настройки формы камер для обеспечения почти полного прохождения волн не разрабатывались.

Алгоритмы построения асимптотики в краевых задачах Дирихле и Неймана [7] различаются существенно хотя бы потому, что предельные задачи обладают разными свойствами, а их решения – разным поведением около выделенных особых точек. Поэтому упомянутые результаты неприменимы к рассматриваемой задаче (1.5).

3. Собственные числа

3.1. Захваченные волны. Предположим, что волновод (1.4) обладает плоскостью $\{x : x_1 = 0\}$ зеркальной симметрии (см. формулу (1.9) и рис. 1, а). Сузим задачу (1.5) на половину $\Pi_{N+}^\varepsilon = \{x \in \Pi_N^\varepsilon : x_1 = y_1 > 0\}$ волновода и на его срединной плоскости $\Gamma^\varepsilon = \{x \in \Pi_N^\varepsilon : x_1 = 0\}$ назовем искусственные условия Дирихле [6]

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_+^\varepsilon(x) &= \lambda_{+}^\varepsilon u_+^\varepsilon(x); & x \in \Pi_{N+}^\varepsilon \\ \partial_\nu u_+^\varepsilon(x) &= 0; & x \in \partial\Pi_{N+}^\varepsilon \setminus \Gamma^\varepsilon, & u_+^\varepsilon(x) = 0; & x \in \Gamma^\varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сечение ω рукавов Ω^\pm наследуют симметрию от самого волновода $\Pi_N^\varepsilon \supset \Omega^\pm$. Первое собственное число $\Lambda_{0+} > 0$ соответствующей модельной смешанной краевой задаче на половине $\omega_+ = \{y \in \omega : y_1 > 0\}$ сечения

$$\begin{aligned} -\Delta_y U_+(y) &= \Lambda_+ U_+(y); & y \in \omega_+ \\ \partial_\nu U_+(y) &= 0; & y \in \partial\omega, & y_1 > 0, & U_+(y) = 0; & y \in \partial\omega, & y_1 = 0 \end{aligned}$$

определяет нижнюю грань непрерывного спектра σ_{c+}^ε оператора A_+^ε задачи (3.1) (обозначения аналогичны введенным в разд. 1) и совпадает с каким-то положительным членом Λ_k последовательности (1.7). Например, для прямоугольника $\omega = (-d_1, d_1) \times (-d_2, d_2)$ в случае $d_2 \geq d_1$ имеем $\mathbf{k} = 1$, однако индекс \mathbf{k} можно сделать сколь угодно большим, увеличивая дробь d_1/d_2 . В любом случае продолжение по нечетности соответствующей собственной функции U_{0+} задачи (1.9) через среднюю линию $\{y \in \omega : y_1 = 0\}$ фигуры ω есть не что иное, как собственная функция $U_{\mathbf{k}}$ задачи (1.8). Таким образом, непрерывный спектр σ_{c+}^ε оператора A_+^ε задачи (3.1) (обозначения аналогичны введенным в разд. 1) занимает луч $[\Lambda_k, +\infty) \subset \mathbb{R}_+$, а интервал $(0, \Lambda_k) \supset (0, \Lambda_1)$ может содержать собственные числа задачи (3.1), образующие ее дискретный спектр

$$\sigma_{d+}^\varepsilon = \{\lambda_{0+}^\varepsilon, \dots, \lambda_{\Theta^{\varepsilon_+}}^\varepsilon\} \quad (3.2)$$

Соответствующие собственные функции $u_{0+}^\varepsilon, \dots, u_{\Theta^{\varepsilon_+}}^\varepsilon$ ортонормируем в пространстве $L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)$. Наконец, нечетное продолжение собственных функций задачи (3.1) в Π_{N+}^ε через плоскость Γ^ε дает собственные функции задачи (1.5) в Π_N^ε и тем самым показывает, что множество σ_{d+}^ε содержится в точечном спектре σ_p^ε , который состоит из собственных чисел оператора A^ε , вкрапленных в его непрерывный спектр σ_c^ε . Дискретный спектр σ_d^ε задачи (1.5) заведомо пуст.

Для того чтобы обнаружить дискретный спектр в задаче (3.1), предположим, что среди коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в определении (1.1) есть превосходящие единицу. Пусть $\gamma_n > 1$, а число $Q \in \mathbb{N}_0$ и высота $L_n = z^{n+1} - z^n$ цилиндра Ω_n таковы, что

$$\pi^2 Q^2 L_n^{-2} < (1 - \gamma_n^{-2}) \Lambda_1 \leq \pi^2 (Q + 1)^2 L_n^{-2} \quad (3.3)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на половине $\Omega_{n+} = \{x \in \Omega_+ : x_1 > 0\}$ цилиндра Ω_n

$$\begin{aligned} -\Delta_x V_+^\varepsilon(x) &= M_+^\varepsilon V_+^\varepsilon(x); & x \in \Omega_{n+} \\ \partial_\nu V_+^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\Omega_{n+} \setminus \overline{\Gamma_n^\varepsilon}, & V_+^\varepsilon(x) = 0; & x \in \Gamma_n^\varepsilon \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь Γ_n^ε — объединение искусственно образованной поверхности $\Gamma_n^0 = \{x \in \Omega_n : y_1 = 0\}$ и частей отверстий $\theta_j^\varepsilon(n)$ и $\theta_j^\varepsilon(n+1)$, $j = 1, \dots, J$, попадающих на границу $\partial\Omega_{n+}$. При $\varepsilon = 0$ отверстия исчезают и задача (3.4) превращается в предельную спектральную смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_x V_+^0(x) &= M_+^0 V_+^0(x); & x \in \Omega_{n+} \\ \partial_\nu V_+^0(x) &= 0, & x \in \partial\Omega_{n+} \setminus \overline{\Gamma_n^0}, & V_+^0(x) = 0; & x \in \Gamma_n^0 \end{aligned}$$

у которой в силу ограничения (3.3) есть собственные числа

$$M_{nq+}^0 = \gamma_n^{-2} \Lambda_1 + \pi^2 q^2 L_n^{-2} \in (0, \Lambda_1); \quad q = 0, \dots, Q \quad (3.5)$$

Проверено ([7] гл. 9, [30]), что задача (3.4) имеет собственные числа $M_{n0+}^\varepsilon, \dots, M_{nQ+}^\varepsilon$, подчиненные неравенствам

$$\left| M_{nq+}^\varepsilon - M_{nq+}^0 \right| \leq c_0 \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

с некоторыми $c_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$. Таким образом, при малом ε упомянутые собственные числа содержатся в интервале $(0, \Lambda_1)$. Соответствующие собственные функции $V_{n0+}^\varepsilon, \dots, V_{nQ+}^\varepsilon$ ортонормируем в пространстве $L^2(\Omega_{n+})$ и продолжим нулем через отверстия $\Gamma_n^\varepsilon \setminus \Gamma_n^0$ на волновод Π_{N+}^ε . Наконец, $\mathcal{L}_n^\varepsilon$ — линейная оболочка указанных продолжений, $\dim \mathcal{L}_n^\varepsilon = Q + 1$.

Для вывода оценки кратности дискретного спектра (3.2)

$$Q^\varepsilon \geq Q \quad (3.6)$$

применим минимальный принцип ([30] теор. 10.2.1)

$$\lambda_{q+}^\varepsilon = \inf_{u_+^\varepsilon \in \mathcal{C}_q^\varepsilon \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2}{\|u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2} \quad (3.7)$$

Здесь $\mathcal{C}_0^\varepsilon = H_0^1(\Pi_{N+}^\varepsilon; \Gamma^\varepsilon) = \{u_+^\varepsilon \in H^1(\Pi_{N+}^\varepsilon) : u_+^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma^\varepsilon\}$, Γ^ε — срединная плоскость симметричного тела Π_N^ε , и

$$\mathcal{C}_q^\varepsilon = \left\{ u_+^\varepsilon \in H_0^1(\Pi_{N+}^\varepsilon; \Gamma^\varepsilon) : (u_+^\varepsilon, u_{p+}^\varepsilon)_{\Pi_{N+}^\varepsilon} = 0, p = 0, \dots, q-1 \right\}$$

Итак, $\mathcal{L}_n^\varepsilon \subset \mathcal{C}_0^\varepsilon$, и в силу формулы (3.7) при $q = 0$ имеем

$$\lambda_{0+}^\varepsilon \leq \inf_{u_+^\varepsilon \in \mathcal{L}_n^\varepsilon \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2}{\|u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2} = \|\nabla_x V_{n0+}^\varepsilon; L^2(\Omega_{n+})\|^2 = M_{n0+}^0 < \Lambda_1$$

Функции $V_{n0+}^\varepsilon, \dots, V_{nq+}^\varepsilon$ взаимно ортогональны в пространстве $L^2(\Pi_N^\varepsilon)$, и поэтому $\dim \mathcal{L}_{nl}^\varepsilon \geq Q$, где

$$\mathcal{L}_{nq}^\varepsilon = \left\{ u_+^\varepsilon \in \mathcal{L}_n^\varepsilon : (u_+^\varepsilon, u_{p+}^\varepsilon)_{\Pi_{N+}^\varepsilon} = 0, p = 0, \dots, q-1 \right\} \quad (3.8)$$

Следовательно

$$\lambda_{1+}^\varepsilon \leq \inf_{u_+^\varepsilon \in \mathcal{L}_{n1}^\varepsilon \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2}{\|u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\|^2} = M_{np+}^0 < \Lambda_1$$

Здесь $p = 0$ в случае $V_{n0+}^\varepsilon \in \mathcal{L}_{n1}^\varepsilon$, но $p = 1$ в противном случае, так как какая-то нетривиальная линейная комбинация $c_0^\varepsilon V_{n0+}^\varepsilon + c_1^\varepsilon V_{n1+}^\varepsilon$ обязательно содержится в множестве (3.8) при $q = 1$.

Продолжив рассуждения, находим, что $\lambda_{Q+}^\varepsilon \leq M_{nQ+}^\varepsilon < \Lambda_1$, и доказываем искомое неравенство (3.6). После этого может оказаться, что $\dim \mathcal{L}_{nQ}^\varepsilon = 0$, а значит, обнаружить еще одно собственное число $\lambda_{Q+1+}^\varepsilon \in \sigma_{d+}^\varepsilon$ по изложенной схеме не удастся. Вместе с тем соотношение (3.6) не всегда превращается в равенство. Во-первых, на интервале $(0, \Lambda_1)$ спектр рассмотренной предельной задачи в Ω_{n+} , вообще говоря, не исчерпывается собственными числами (3.5). Во-вторых, среди цилиндров (1.1) могут найтись несколько штук с коэффициентами растяжения $\gamma_n > 1$. Наконец, не все собственные числа в дискретном спектре σ_d^ε удается найти по изложенной схеме.

В любой ситуации при указанной симметрии волновода (1.4) увеличение размеров хотя бы одного из цилиндров (1.1) позволяет по прежней схеме образовать любое заданное наперед количество собственных чисел задачи (1.5), вкрапленных в ее непрерывный спектр.

3.2. Отсутствие точечного спектра. Для применения известных априорных оценок будем считать, что контуры $\partial\omega$ и $\partial\theta^1, \dots, \partial\theta^J$ гладкие. Пусть еще Π_N^ε – цилиндр Ω с перегородками $\Theta^\varepsilon(z^1), \dots, \Theta^\varepsilon(z^N)$ (рис. 1, б), т.е. $y^1, \dots, y^N = 0 \in \mathbb{R}^2$ и $\Omega_n = \omega \times \Upsilon_n$, где $\Upsilon_n = (z^n, z^{n+1})$, $n = 1, \dots, N-1$ и $\Upsilon_0 = (-\infty, z^1)$, $\Upsilon_N = (z^N, +\infty)$. Вставки (1.1) невысокие, что обеспечено вторым требованием (1.10), а первое выполнено потому, что $\gamma_1 = \dots = \gamma_{N-1} = 1$ по построению.

Предположим, что у задачи (1.5) есть собственное число

$$\lambda^\varepsilon = (\kappa^\varepsilon)^2 \in (\delta, \Lambda_1 - \delta) \quad \text{при малом } \delta > 0 \quad (3.9)$$

Соответствующую собственную функцию u^ε нормируем в пространстве $L^2(\Pi^\varepsilon)$ и разобьем ее на компоненты

$$u_0^\varepsilon(z) = \frac{1}{|\omega|_\omega} \int_\omega u^\varepsilon(y, z) dy, \quad u_\perp^\varepsilon(y, z) = u^\varepsilon(y, z) - u_0^\varepsilon(z), \quad \int_\omega u_\perp^\varepsilon(y, z) dy = 0$$

$$1 = \|u^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\|^2 = \|u_\perp^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\|^2 + |\omega| \|u_0^\varepsilon; L^2(\Upsilon)\|^2 \quad (3.10)$$

$$\|\nabla_x u_\perp^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\|^2 + |\omega| \|\partial_z u_0^\varepsilon; L^2(\Upsilon)\|^2 = \|\nabla_x u^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\|^2 = \lambda^\varepsilon \|u^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\|^2 \leq \Lambda_1$$

Условие ортогональности в списке (3.10) обеспечивает неравенство Пуанкаре

$$\left\| \nabla_x u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\omega(z)) \right\|^2 \geq \Lambda_1 \left\| u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\omega(z)) \right\|^2 \quad \forall z \in \Upsilon = \bigcup_{n=0}^N \Upsilon_n \quad (3.11)$$

Кроме того, при $n = 1, \dots, N - 1$ одномерное неравенство Харди [31], записанное в сферических координатах, влечет за собой весовую оценку

$$\sum_{k=n, n+1} \left\| r_{jk}^{-1} u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Omega_n) \right\|^2 \leq C_n \left\| u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Omega_n) \right\|^2; \quad r_{jk} = \left(|y - P^j|^2 + |z - z^k|^2 \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

Подставим в интегральное тождество (1.6) пробную функцию $\psi_n \in C_c^{\infty}(\Upsilon_n)$, не зависящую от переменных y и продолженную нулем с камеры Ω_n на весь волновод Π_N^{ε} . В результате получим соотношение

$$|\omega| \int_{\Upsilon_n} \partial_z u_0^{\varepsilon}(z) \overline{\partial_z \psi_n(z)} dz = \lambda^{\varepsilon} |\omega| \int_{\Upsilon_n} u_0^{\varepsilon}(z) \overline{\psi_n(z)} dz$$

Интегралы по множеству Ω_n , содержащие произведения $u_{\perp}^{\varepsilon}(y, z) \psi_n(z)$ и $\partial_z u_{\perp}^{\varepsilon}(y, z) \partial_z \psi_n(z)$ исчезли по причине условия ортогональности в списке (3.10), которое сохраняется при почти всех $z \in \Upsilon_n$ и для производной $\partial_z u_{\perp}^{\varepsilon}$. Следовательно

$$-\partial_z^2 u_0^{\varepsilon}(z) = \lambda^{\varepsilon} u_0^{\varepsilon}(z); \quad z \in \Upsilon_n \Rightarrow u_0^{\varepsilon} \in H^2(\Upsilon_n) \quad (3.13)$$

$$u_0^{\varepsilon}(z) = a_{n+}^{\varepsilon} e^{+i\kappa^{\varepsilon} z} + a_{n-}^{\varepsilon} e^{-i\kappa^{\varepsilon} z}; \quad n = 0, \dots, N$$

$$u_0^{\varepsilon} \in L^2(\Upsilon) \Rightarrow a_{0\pm}^{\varepsilon} = a_{N\pm}^{\varepsilon} = 0 \quad (3.14)$$

Поскольку λ^{ε} не является собственным числом задачи Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения (3.13) в силу предположений (1.10) и (3.9), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \left\| u_0^{\varepsilon}; H^2(\Upsilon_n) \right\|^2 + \left| I_n^{\varepsilon} \right| &\leq c \left(\left| F_{n+}^{\varepsilon} \right|^2 + \left| F_{n+1-}^{\varepsilon} \right|^2 \right); \quad n = 1, \dots, N - 1 \\ F_{m\pm}^{\varepsilon} &= \partial_z u_0^{\varepsilon}(z^m \pm 0), \quad I_n^{\varepsilon} = \int_{\Upsilon_n} \left(\left| \partial_z u_0^{\varepsilon}(z) \right|^2 - \lambda^{\varepsilon} \left| u_0^{\varepsilon}(z) \right|^2 \right) dz \end{aligned} \quad (3.15)$$

В силу соотношений (1.5), (3.13) и (3.15) функция u_{\perp}^{ε} удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_{\perp}^{\varepsilon}(x) &= \lambda^{\varepsilon} u_{\perp}^{\varepsilon}(x); \quad x \in \Omega_n, \quad \partial_{\nu} u_{\perp}^{\varepsilon}(x) = 0; \quad x \in \partial\omega_n \times \Upsilon_n \\ -\partial_z u_{\perp}^{\varepsilon}(y, z^n + 0) &= F_{n+}^{\varepsilon}, \quad \partial_z u_{\perp}^{\varepsilon}(y, z^{n+1} - 0) = -F_{n+1-}^{\varepsilon}; \quad (y, 0) \in \Theta^{\varepsilon}(0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Приведем несколько известных априорных оценок [7] решений эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях применительно к краевой задаче (3.16), правые части которой временно зафиксируем. Прежде всего, поскольку гладкие ребра $\partial\omega \times \{z^n\}$ и $\partial\omega \times \{z^{n+1}\}$ на границе $\partial\Omega_n$ имеют раствор $\pi/2$, а точки (P^j, z^n) и (P^j, z^{n+1}) являются вершинами конусов \mathbb{R}_{\pm}^3 , локальные весовые оценки решений задачи Неймана ([1] гл. 9 §4, 32–34) показывают, что

$$\begin{aligned} \left\| r_n^{\beta} \nabla_x^2 u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Omega_n \setminus \mathcal{B}_{\varepsilon R}(n)) \right\| &\leq c_{\beta n} \left((1 + \lambda^{\varepsilon}) \left\| u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Omega_n) \right\| + \left| F_{n+}^{\varepsilon} \right| + \left| F_{n+1-}^{\varepsilon} \right| \right) \\ \beta &\in (0, 1), \quad r_n = \min \{ r_{jk} \mid j = 1, \dots, J, k = n, n + 1 \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{\varepsilon R}(n) = \bigcup_{k=n, n+1} \bigcup_{j=1}^J \mathbb{B}_{\varepsilon R}^3(P^j, z^k); \quad \mathbb{B}_\rho^3(\mathcal{P}) = \{x : |x - \mathcal{P}| < \rho\}$$

Радиус $R > 0$ выбран так, чтобы $\overline{\theta_j} \subset \mathbb{B}_R^2(\mathcal{O}) = \{y : |y| < R\}$ при $j = 1, \dots, J$.

Обрабатываем окрестности отверстий $\theta_j^\varepsilon(n)$. Сделаем растяжение координат

$$x \mapsto \xi^{jn} = (\eta^{jn}, \zeta^{jn}) = (\varepsilon^{-1}(y - P^j), \varepsilon^{-1}(z - z^n)) \quad (3.17)$$

Замена (3.17) переводит множество $\Pi_N^\varepsilon \cap \mathbb{B}_{\varepsilon R}(P^j, z^n)$ в пересечение шара $\mathbb{B}_R^3(\mathcal{O})$ и двух полупространств $\mathbb{R}_\pm^3 = \{\xi : \pm \xi_3 > 0\}$, соединенных через отверстие $\theta_j(0) = \{\xi : \eta \in \theta_j, \xi_3 = 0\}$

$$\Xi^j = \mathbb{R}_+^3 \cup \theta_j(0) \cup \mathbb{R}_-^3 \quad (3.18)$$

На ребре $\partial\theta_j \times \{0\}$ трещины $\overline{\theta_j}$ градиент решения задачи Неймана приобретает сингулярность $O(\rho_\theta^{-1/2})$, где ρ_θ – расстояние до ребра. Это обстоятельство предопределяет весовой показатель $\beta_\theta \in (-1/2, 0)$ в локальной оценке ([1] гл. 10 и 12 § 8, [32–34])

$$\begin{aligned} & \left\| \rho_\theta^{\beta_\theta} \nabla_\xi \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{2R}^3(\mathcal{O})) \right\| + \left\| \rho_\theta^{\beta_\theta+1} \nabla_\xi^2 \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{2R}^3(\mathcal{O})) \right\| \leq \\ & \leq c_{\beta_n} \left[(1 + \varepsilon^2 \lambda^\varepsilon) \left\| \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{3R}^3(\mathcal{O})) \right\| + \varepsilon \sum_{\pm} |F_{n\pm}^\varepsilon| \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

для функции $\xi^{jn} \mapsto \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon(\xi^{jn}) = u_\perp^\varepsilon(P^j + \varepsilon\eta^{jn}, z^n + \varepsilon\zeta^{jn})$, подчиненной уравнению $-\Delta_\xi \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon = \varepsilon^2 \lambda^\varepsilon \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon$ и крайевым условиям $\pm \partial_\zeta \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon = \mp \varepsilon F_{n\pm}^\varepsilon$ соответственно на примыкающих к отверстию частях бесконечного множества (3.18) и его границы.

Итак, составляющая u_\perp^ε , а значит, и само решение u^ε принадлежат весовому классу Соболева с показателем гладкости два. В то же время из-за упомянутых сингулярностей на ребрах трещин нормальные производные $\partial_z u^\varepsilon(\cdot, z^n)$ и $-\partial_z u^\varepsilon(\cdot, z^{n+1})$ на торцах камеры Ω_n не попадают в пространство $L^2(\omega)$, но все-таки принадлежат пространству $L^q(\omega)$ с показателем $q \in [1, 2)$. В итоге гладкая на интервале $\Upsilon_n \ni z$ функция

$$z \mapsto \int_\omega \partial_z u^\varepsilon(y, z) dy$$

по крайней мере непрерывна в конечных точках z^n и z^{n+1} . Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Theta^\varepsilon(z^n \pm 0)} \partial_z u^\varepsilon(y, z^n \pm 0) dy = |\Theta^\varepsilon(z^n)| \partial_z u_0^\varepsilon(y, z^n \pm 0) - \sum_{j=1}^J \int_{\theta_j^\varepsilon} \partial_z u_\perp^\varepsilon(y, z^n) dy \\ \left| \int_{\theta_j^\varepsilon} \partial_z u_\perp^\varepsilon(y, z^n) dy \right| &= \varepsilon \left| \int_{\theta_j} \partial_\zeta \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon(\eta, z^n) d\eta \right| \leq \varepsilon \left(\int_{\theta_j} \rho_\theta^{-2\beta_\theta-1} d\eta \right)^{1/2} \left\| \rho_\theta^{\beta_\theta+1/2} \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon(\cdot, z^n); L^2(\theta_j) \right\| \leq \\ &\leq c_{\beta_\theta} \varepsilon \left[\left\| \rho_\theta^{\beta_\theta} \nabla_\xi \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{2R}^3(\mathcal{O})) \right\| + \left\| \rho_\theta^{\beta_\theta+1} \nabla_\xi^2 \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{2R}^3(\mathcal{O})) \right\| \right] \leq \\ &\leq c_{\beta_\theta} j n \varepsilon \left[\left\| \mathbf{u}_{jn}^\varepsilon; L^2(\Xi^j \cap \mathbb{B}_{3R}^3(\mathcal{O})) \right\| + \varepsilon \sum_{\pm} |F_{n\pm}^\varepsilon| \right] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_{\beta_0 j n} \varepsilon \left[\varepsilon^{-3/2} \|u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Pi_N^{\varepsilon} \cap \mathbb{B}_{3\varepsilon R}^3(P^j, z^n))\| + \varepsilon \sum_{\pm} |F_{n\pm}^{\varepsilon}| \right] \leq \\ &\leq c_{\beta_0 j n} \left[\varepsilon^{1/2} \|u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Pi_N^{\varepsilon})\| + \varepsilon^2 \sum_{\pm} |F_{n\pm}^{\varepsilon}| \right] \end{aligned}$$

При этом сначала воспользовались неравенством Коши–Буняковского и сходимостью интеграла от выражения $\rho_0^{-2\beta_0-1}$ с показателем $\beta_0 < 0$ по области $\theta_j \in \mathbb{R}^2$, затем сделали обратную замену координат (3.17) и применили известное следовое весовое неравенство Кондратьева ([1] гл. 9 § 4, [35]) вместе с оценкой (3.19) и, наконец, учли неравенство Харди (3.12) и тот факт, что $r_{jn} \leq c_j \varepsilon$ при $x \in \mathbb{B}_{3\varepsilon R}^3(P^j, z^n)$.

Просуммируем полученные соотношения по $n = 1, \dots, N$ и при малом ε придем к ключевой оценке

$$\mathbf{F}^{\varepsilon} := \sum_{n=1}^N |F_{n\pm}^{\varepsilon}| \leq C \varepsilon^{1/2} \|u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Pi_N^{\varepsilon})\| \quad (3.20)$$

Согласно определениям (3.10) интегральное тождество (1.6) с ингредиентами $\lambda = \lambda^{\varepsilon}$ и $\psi^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}$ принимает вид

$$\|\nabla_x u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Pi_N^{\varepsilon})\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \|u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Pi_N^{\varepsilon})\|^2 = \lambda^{\varepsilon} |\omega| \|u_0^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 - |\omega| \|\partial_z u_0^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 \quad (3.21)$$

В силу формул (3.9) и (3.11) левая часть равенства (3.21) больше величины $\delta \|u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Pi_N^{\varepsilon})\|^2$. Вместе с тем соотношения (3.15) и (3.20) показывают, что правая часть равенства (3.21) мажорируется величиной $c_F \sqrt{\varepsilon} \|u_{\perp}^{\varepsilon}; H^1(\Pi_N^{\varepsilon})\|^2$. В результате при малом ε выводим равенства $\|u_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\Pi_N^{\varepsilon})\| = 0$ и $u_{\perp}^{\varepsilon} = 0$, и при учете формул (3.14) находим, что $u^{\varepsilon} = 0$ на объединении рукавов $\Omega_0 \cup \Omega_N$, а значит, и всюду на волноводе Π_N^{ε} по теореме о единственности продолжения [36]. В итоге видим, что сделанное изначально предположение ложно, и при указанных ограничениях на интервале $(0, \Lambda_1)$ собственных чисел (3.9) у оператора A^{ε} задачи (1.5) нет.

3.3. Несколько замечаний. Схему проверки отсутствия собственных чисел на интервале $(0, \Lambda_1)$ непрерывного спектра σ_c^{ε} оператора A^{ε} нетрудно приспособить к волноводу (1.4), у которого вставки (1.1) имеют коэффициенты сжатия $\gamma_n \leq 1$ и любых допустимых векторах сдвигов $y^n \in \mathbb{R}^2$, $n = 1, \dots, N$. Более того, расположение отверстий в перегородках $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega_{n-1}$ и их форма также не играют существенной роли.

Если нарушить ограничения (1.10) или (3.9), то перестанут быть верными неравенства (3.11), (3.15) и ход доказательства нарушится.

Если возмутить одну или несколько ячеек (рис. 2, в) периодического волновода (2.1) в предположении (1.9) о его зеркальной симметрии, то по схеме из разд. 3 (1°) нетрудно образовать собственные числа, попадающие как вовнутрь лакун (дискретный спектр $\sigma_{d\infty}^{\varepsilon}$), так и на сегменты (2.4) (точечный спектр $\sigma_{p\infty}^{\varepsilon} \setminus \sigma_{d\infty}^{\varepsilon}$). Известны [37–40] приемы образования таких собственных без предположения о симметрии при помощи малых сингулярных возмущений задачи.

4. Специальные решения вспомогательных задач

4.1. *Пограничный слой.* Растяжение координат (3.17) и формальный переход к $\varepsilon = 0$ переопределяют волновод (1.4) в бесконечную область (3.18). В данном разделе индексы j и n у символов ξ^{jn} и Ξ^j не пишем.

Поскольку $\Delta_x + \kappa^2 = \varepsilon^{-2}(\Delta_\xi + \varepsilon^2 \kappa^2)$ в растянутых координатах (3.17), поведение поля u^ε около отверстий (1.3) описывается при помощи решений предельной задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$-\Delta_\xi Z(\xi) = 0; \quad \xi \in \Xi, \quad \mp \partial_\zeta Z(\eta, \pm 0) = 0; \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\theta(0)} \quad (4.1)$$

В рамках метода сращиваемых асимптотических разложений ([7] гл. 2, [41, 42]) требуется перечислить все ограниченные решения задачи (4.1). Одно из них очевидно – константа. Еще одно определено равенством

$$\mathbf{Z}(\xi) = \begin{cases} 1 - \mathbf{P}(\xi), & \zeta > 0 \\ -1 + \mathbf{P}(\xi), & \zeta < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{P} – емкостной потенциал двумерного множества $\overline{\theta(0)}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , т.е. затухающее на бесконечности решение задачи Дирихле во внешности плоской трещины

$$-\Delta_\xi \mathbf{P}(\xi) = 0; \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\theta(0)}, \quad \mathbf{P}(\xi) = 1; \quad \xi \in \overline{\theta(0)} \quad (4.3)$$

Функция \mathbf{P} четна по переменной $\zeta = \xi_3$, а значит, функция \mathbf{Z} нечетна. Согласно краевому условию в задаче (4.3) функция \mathbf{Z} обращается в нуль на трещине $\theta(0)$, имеет непрерывную производную $\partial \mathbf{Z} / \partial \xi_3$ и потому оказывается гладкой всюду в области Ξ , кроме ребра $\partial \theta \times \{0\}$. Наконец, в силу определения емкостного потенциала (см. [12, 13] и др.) справедливо представление

$$\mathbf{Z}(\xi) = \pm 1 \mp \frac{C(\theta)}{2\pi|\xi|} \pm \sum_{p=1,2} \frac{C_p(\theta)\eta_p}{2\pi|\xi|^3} + O(|\xi|^{-3}); \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \pm \zeta > 0 \quad (4.4)$$

При этом $(2\pi|\xi|)^{-1}$ – функция Грина задачи Неймана для оператора Δ_ξ в полупространстве \mathbb{R}_\pm^3 с особенностью в начале координат O , коэффициенты $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$, имеющие отношение к тензору поляризации [12] множества $\overline{\theta(0)} \subset \mathbb{R}^3$, востребованы не будут, и

$$C(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\theta(0)}} |\nabla_\xi \mathbf{P}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \text{cap}_3 \theta > 0 \quad (4.5)$$

Кроме того, $\text{cap}_3 \theta$ – гармоническая емкость [12, 13] множества $\overline{\theta(0)} \subset \mathbb{R}^3$.

Доказано ([34] § 2 и 5, [43, 44]), что всякое ограниченное решение задачи (4.1) – линейная комбинация $c_0 + c_1 \mathbf{Z}^j$.

В следующих разделах используются обозначения \mathbf{Z}^j и $C(\theta_j)$, $j = 1, \dots, J$.

4.2. *Полубесконечный цилиндр.* Рассмотрим задачу Неймана в зафиксированном полуцилиндре $\Omega_\perp = \omega \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(x) &= \lambda u(x), \quad x \in \Omega_\perp, \quad \partial_\nu u(x) = 0; \quad x \in \partial \omega \times \mathbb{R}_+ \\ -\partial_z u(y, 0) &= g(y); \quad y \in \omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

У однородной ($g = 0$) задачи (4.6) есть единственное ограниченное решение, порожденное приходящей волной w^-

$$Y(x) = w^-(x) + w^+(x) = \alpha \left(e^{-ikz} + e^{+ikz} \right) \quad (4.7)$$

Таким образом, условие существования затухающего решения задачи (4.6) имеет вид

$$\int_{\omega} g(y) dy = 0 \quad (4.8)$$

При $z \rightarrow +\infty$ решение $u(y, z)$ – бесконечно малая $O(e^{-\beta_1 z})$, $\beta_1 = \sqrt{\Lambda_1 - \lambda}$.

В рамках теории обобщенных функций [45] задача (4.6) с правой частью

$$g(y) = \delta(y - P^j) - |\omega|^{-1}, \quad (4.9)$$

содержащей дельта-функцию Дирака и потому удовлетворяющей условию (4.8), имеет затухающее решение G^j – обобщенную функцию Грина, которая допускает представление

$$G^j(x) = \chi^j(x)(2\pi r_j)^{-1} + \tilde{G}^j(x), \quad e^{\beta_1 z} |\tilde{G}^j(x)| \leq c_j \quad (4.10)$$

Здесь $r_j = \left(|y - P^j|^2 + z^2 \right)^{1/2}$, χ^j – гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки P^j , $\chi^j \chi^k = 0$ при $j \neq k$. Числовая $(J \times J)$ -матрица G с элементами $G_{jk} = \tilde{G}^j(P^k)$ симметрична.

4.3. Составной конечный цилиндр. В цилиндре $\Omega_{\#}(\ell) = \omega_{\#} \times (-\ell, \ell)$, определенном по формуле (1.16), рассмотрим краевую задачу с условиями скачков на срединной плоскости $\omega_{\#}(0) = \omega_{\#} \times \{0\}$

$$-\Delta_x v(x) = \lambda v(x); \quad x \in \Omega_{\#} \setminus \omega_{\#}(0) \quad (4.11)$$

$$\partial_\nu v(x) = 0; \quad x \in \partial\omega_{\#} \times ((-\ell, 0) \cup (0, +\ell)) \quad (4.12)$$

$$\pm \partial_z v(y, 0) = h_{\pm}(y); \quad y \in \omega_{\#} \quad (4.13)$$

$$[v](y) = h_0(y), \quad [\partial_z v](y) = h_1(y); \quad y \in \omega_{\#} \quad (4.14)$$

Здесь $[v](y) = v(y, +0) - v(y, -0)$ – скачок функции v , и γ, ℓ – положительные параметры.

Предположим, что $\lambda_q = (2\ell)^{-1} \pi^2 q^2$ – простое собственное число задачи (4.11)–(4.14) при некотором $q \in \mathbb{N}$. Условие разрешимости задачи (4.11)–(4.14) с параметром $\lambda = \lambda_q$ и собственной функцией

$$\mathbf{v}(z) = \cos\left(\frac{\pi q}{2\ell}(z + \ell)\right) \quad (4.15)$$

имеет вид

$$0 = \int_{\omega_{\#}} \left(h_-(y) + (-1)^q h_+(y) - \cos\left(\frac{\pi}{2} q\right) h_1(y) - \frac{\pi q}{2\ell} \sin\left(\frac{\pi}{2} q\right) h_0(y) \right) dy \quad (4.16)$$

Далее понадобятся сингулярные правые части краевых условий (4.13)

$$h_{\pm}(y) = h_{\text{reg}\pm}(y) + h_{\text{dir}\pm}(y), \quad h_{\text{dir}\pm}(y) = \sum_{j=1}^J b_{\pm}^j \delta(y - P^j) \quad (4.17)$$

При этом $h_{\text{рег}\pm}$ – гладкие функции на множестве $\overline{\omega_{\#}}$. Согласно предназначению дельта-функции интегралы из соотношения (4.16) превращаются в суммы

$$\int_{\omega_{\#}} h_{\pm}(y) dy = \int_{\omega_{\#}} h_{\text{рег}\pm}(y) dy + \sum_{j=1}^J b_{\pm}^j \quad (4.18)$$

5. Асимптотика коэффициентов рассеяния. Пусть Π_2^{ε} (рис. 1, б и в) – волновод (1.4) с двумя перфорированными перегородками и одной вставкой (см. формулы (1.16), (1.17), разд. 2.3 и рис. 1, б–г), причем высота $2\ell^{\varepsilon}$ удовлетворяет соотношению (1.18), в котором величины ℓ' , ℓ'' подлежат определению и

$$\ell := \ell^0 = \frac{\pi q}{2\kappa}, \quad \kappa = \sqrt{\lambda} \in (0, \kappa_+); \quad q \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

При этом $N = 2$, но число отверстий $J \in \mathbb{N}$ произвольно, а положение точек $z^1 = -\ell^{\varepsilon}$, $z^2 = \ell^{\varepsilon}$ зависит от малого параметра ε , в частности, $L_1 = 2\ell^{\varepsilon}$.

Асимптотические разложения на рукавах (1.2)

$$u^{\varepsilon}(x) = \alpha(e^{i\kappa(z+\ell^{\varepsilon})} + R^0 e^{-i\kappa(z+\ell^{\varepsilon})}) + u_{-}^0(y, -z - \ell^{\varepsilon}) + \dots \quad (5.2)$$

$$u^{\varepsilon}(x) = \alpha T^0 e^{+i\kappa(z-\ell^{\varepsilon})} + u_{+}^0(y, z - \ell^{\varepsilon}) + \dots \quad (5.3)$$

дополним разложением на цилиндрической вставке (1.16)

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} a^0 \mathbf{v}(z) + \varepsilon^0 (a' \mathbf{v}(z) + v'_{\varepsilon}(x)) + \varepsilon v''_{\varepsilon}(x) + \dots \quad (5.4)$$

При этом \mathbf{v} – собственная функция (4.15), числа R^0 , T^0 , a^0 и функции u_{\pm}^0 , v'_{ε} подлежат определению, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе. Слагаемые разложений (5.2)–(5.4) зависят от малого параметра ε , что позволит определить их как решения задач (4.6) и (4.11)–(4.14) в фиксированных областях Ω_{\square} и $\Omega_{\#}(\ell)$ соответственно.

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений ([7] гл. 2, [41, 42]) и, интерпретируя разложения (5.2)–(5.4) как внешние, согласуем их с внутренними разложениями около отверстий $\theta_j^{\varepsilon}(\pm\ell^{\varepsilon})$, заданных формулой (1.3) и использующих растянутые координаты $\xi^{\varepsilon j \pm} = (\varepsilon^{-1}(y - P^j), \varepsilon^{-1}(z \mp \ell^{\varepsilon}))$ (ср. определение (3.17) с $z^n = \pm\ell^{\varepsilon}$)

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} Z_{\pm}^{j0}(\xi^{\varepsilon j \pm}) + Z_{\pm}^{j'}(\xi^{\varepsilon j \pm}) + \dots \quad (5.5)$$

В силу формулы (4.15) для главного члена разложения (5.4) верны соотношения

$$a^0 \mathbf{v}(y, \pm\ell^{\varepsilon}) = a^0 (\mp 1)^q \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\kappa \ell')^2 + O(\varepsilon^3) \right) \quad (5.6)$$

$$a^0 \partial_z \mathbf{v}(y, \pm\ell^{\varepsilon}) = \varepsilon a^0 (\mp 1)^{q+1} \kappa^2 (\ell' + \varepsilon \ell'' + O(\varepsilon^2)) \quad (5.7)$$

Поскольку функции (5.2) и (5.3) остаются ограниченными на рукавах при $\varepsilon \rightarrow +0$, первое слагаемое суммы (5.5) затухает при $\xi_3^{\varepsilon j \pm} \rightarrow \pm\infty$ и, являясь решением задачи (4.1) в области Ξ^j , согласно представлениям (4.4) и (5.6) принимает вид

$$Z_{\pm}^{j0}(\xi^{\varepsilon j \pm}) = \frac{a^0}{2} (\mp 1)^{q+1} \left(1 \mp Z^j(\xi^{\varepsilon j \pm}) \right) + \dots \quad (5.8)$$

Здесь \mathbf{Z}^j – гармоническая функция (4.2) в области (3.18), и ее представление (4.16) включает коэффициент $C(\theta_j)$, находящийся в связи (4.15) с гармонической емкостью трещины $\overline{\theta_j(0)}$. Таким образом, выполнены разложения

$$\xi^{\varepsilon j \pm} \rightarrow \infty: Z_{\pm}^j(\xi^{\varepsilon j \pm}) = \frac{a^0}{2} (\mp 1)^q \begin{cases} 2 - C(\theta_j) (2\pi |\xi^{\varepsilon j \pm}|)^{-1} + \dots, & \pm \xi_{\xi_3}^{\varepsilon j \pm} < 0 \\ C(\theta_j) (2\pi |\xi^{\varepsilon j \pm}|)^{-1} + \dots, & \pm \xi_{\xi_3}^{\varepsilon j \pm} > 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

При этом многоточие заменяет величины $O(|\xi^{\varepsilon j \pm}|^{-2})$, которые находятся согласно формуле (4.4), но в дальнейших вычислениях значимой роли не играют.

В силу соотношения

$$|\xi^{\varepsilon j \pm}|^{-1} = \varepsilon r_{\varepsilon j \pm}^{-1} := \varepsilon \left(|y - P^j|^2 + |z \mp \ell^{\varepsilon}|^2 \right)^{-1/2} \quad (5.10)$$

процедура согласования разложений (5.2), (5.3) и (5.9) (нижняя строка) показывает, что поправочные члены u_{\pm}^0 суть обладающие сингулярностями $a^0 (\mp 1)^q C(\theta_j) (4\pi r_j)^{-1}$ решения задачи (4.6) в цилиндре Ω_{\perp} с правыми частями

$$\begin{aligned} g_{-}(y) &= i\kappa \alpha (R^0 - 1) + \frac{a^0}{2} \sum_{j=1}^J C(\theta_j) \delta(y - P^j) \\ g_{+}(y) &= i\kappa \alpha T^0 + \frac{a^0}{2} (-1)^q \sum_{j=1}^J C(\theta_j) \delta(y - P^j) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Поршневые волны (1.11), помещенные в правые части разложений (5.2) и (5.3), имеют множителями первые члены асимптотики коэффициентов рассеяния (1.13) и поэтому в главном учитывают поведение функции (1.12) на бесконечности в волноводе (1.14), а значит, поля $u_{\pm}^0(y, z)$ должны исчезать при $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, учет сингулярных составляющих у данных Неймана (5.11) приводит к равенству

$$u_{\pm}^0(x) = \frac{a^0}{2} (\mp 1)^q \sum_{j=1}^J C(\theta_j) G^j(x) \quad (5.12)$$

Здесь G^j – обобщенные функции Грина с требуемым поведением (4.10) при $r_j \rightarrow +0$. Постоянные составляющие $i\kappa \alpha (R^0 - 1)$ и $i\kappa \alpha T^0$ в формулах (5.11) компенсировать затухающими решениями задачи (4.6) нельзя, однако данное Неймана (4.9) функции Грина также содержит регулярную составляющую $-|\omega|^{-1}$, а значит, суммы (5.12) действительно удовлетворяет указанным задачам при условиях

$$R^0 - 1 = \frac{ia^0 \mathbf{C}}{2\alpha \kappa |\omega|} = ia^0 \alpha \mathbf{C}, \quad T^0 = ia^0 (-1)^q \alpha \mathbf{C} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{C} := \sum_{j=1}^J C(\theta_j) > 0, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\kappa |\omega|}} \quad (5.14)$$

Кроме того, около точек $(P^j, 0) \in \partial\Omega_{\perp}$ верны представления

$$u_{\pm}^0(x) := a^0 \mathbf{u}_{\pm}^0(x) = a^0 C(\theta_j) (4\pi r_j)^{-1} + a^0 \mathbf{u}_{\pm}^0 + O(r_j); \quad r_j \rightarrow +0 \quad (5.15)$$

$$\mathbf{u}_{j\pm}^0 = \frac{1}{2}(\mp 1)^q \sum_{j=1}^J C(\theta_j) \mathcal{G}_{jk} \in \mathbb{R} \quad (5.16)$$

Согласование разложений (5.4) и (5.9) (верхняя строка) вместе с соотношением (5.7) приводят к задаче (4.11)–(4.14) в фиксированном цилиндре $\Omega^\gamma(\ell)$ для предельного ($\varepsilon = 0$) поправочного слагаемого v'_0 на вставке $\Omega^\gamma(\ell^\varepsilon)$ переменной высоты. Правые части этой задачи имеют вид

$$h'_0 = h'_1 = 0, \quad h'_\pm(y) = a^0 (\mp 1)^q \left[\kappa^2 \ell' - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J C(\theta_j) \delta(y - P^j) \right]; \quad y \in \omega_\# \quad (5.17)$$

При этом в краевых условиях на торцах $\omega_\#(-\ell)$ и $\omega_\#(+\ell)$ учтены невязки, порожденные сдвигом границ $\omega_\#(-\ell^\varepsilon)$ и $\omega_\#(+\ell^\varepsilon)$, а также сингулярности, привнесенные согласованием с главными членами (5.8) внутренних разложений около отверстий $\theta_j^\varepsilon(\pm\ell^\varepsilon)$. Выберем слагаемое

$$\ell' = \left(2\kappa^2 |\omega_\#| \right)^{-1} \mathbf{C} > 0 \quad (5.18)$$

в формуле (1.18) для полувысоты ℓ^ε цилиндрической вставки $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$. При нарушении равенства (5.18) искомый эффект пропадает (см. разд. 8.2). Согласно определению (5.18) условие разрешимости (4.16) задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями (5.17) (см. формулы (4.17) и (4.18)) выполнено, а значит, существует ее решение

$$v'_0(x) := a^0 v'_0(x) = \frac{a^0}{2} C(\theta_j) (2\pi r_{j\pm})^{-1} + a^0 \mathbf{v}'_{j\pm} + O(r_{j\pm}) \quad (5.19)$$

$$r_{j\pm} = \left(|y - P^j|^2 + |z \mp \ell|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

которое определено с точностью до слагаемого $a' \mathbf{v}$ и может быть подчинено условию ортогональности, фиксирующему постоянные $\mathbf{v}'_{j\pm} \in \mathbb{R}$ в представлении (5.19)

$$\int_{\Omega_\#(\ell)} \cos\left(\frac{\pi q}{2\ell} z\right) \mathbf{v}'(x) dx = 0$$

В силу соотношения (5.18) множитель a' при собственной функции (4.15), присутствующий в формуле (5.4), не влияет на изучаемые главные члены асимптотики поля (1.12).

Составим задачу для третьего члена v'_0 разложения (5.4). Поскольку торцы $\omega_\#(\pm\ell^\varepsilon)$ цилиндра $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ смещаются при $\varepsilon \rightarrow +0$, сингулярности $O(r_{j\pm})^{-1}$ самой функции (5.19) порождают невязки порядка $r_{\varepsilon j\pm}^{-3}$ в краевых условиях Неймана на торцах $\omega_\#(\pm\ell^\varepsilon)$ цилиндра $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ (ср. формулы (5.19) и (5.10)). Для устранения нежелательных – слишком сильных – сингулярностей положим

$$v'_\varepsilon(y, z) = a^0 \begin{cases} \mathbf{v}'_0(y, z - \varepsilon \ell' - \varepsilon^2 \ell''), & z > 0 \\ \mathbf{v}'_0(y, z + \varepsilon \ell' + \varepsilon^2 \ell''), & z < 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Функция (5.20) задана на самой вставке $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$, и ее сингулярности сосредоточены в “правильных” точках $(P^j, \pm\ell^\varepsilon)$, а значит, могут быть согласованы с внутренними разложениями (5.5). Вместе с тем функция v'_ε и ее производные приобрели скачки на сре-

динном сечении $\omega_{\#}(0)$, которые нужно компенсировать очередным асимптотическим членом v_{ε}'' — подчиним его условиям сопряжения (5.5), где

$$h_0''(y) = 2\ell' a^0 \partial_z v_0'(y, 0), \quad h_1''(y) = 2\ell' a^0 \partial_z^2 v_0'(y, 0) \quad (5.21)$$

Формулы (5.7) и (5.4) предоставляют регулярные составляющие правых частей условий Неймана (4.13)

$$h_{\text{рег}\pm}''(y) = (\mp 1)^q \kappa^2 (a' \ell' + a^0 \ell'') \quad (5.22)$$

Появление в этих краевых условиях суммы $h_{\text{dir}\pm}''$ дельта-функций Дирака и их производных обусловлено согласованием внешних и внутренних разложений около отверстий. Учитывая слагаемые $O(1)$ при $r_j \rightarrow +0$ в выражениях (5.15) и (5.20) выводим условия на бесконечности

$$\begin{aligned} Z_{\pm}^{j'}(\xi^{\varepsilon j \pm}) &= S_{\pm} + a^0 \mathbf{u}_{j\pm}^0 + o(1); \quad \left| \xi_3^{\varepsilon j \pm} \right| \rightarrow \infty, \quad \pm \xi_3^{\varepsilon j \pm} > 0 \\ Z_{\pm}^{j'}(\xi^{\varepsilon j \pm}) &= a^0 \mathbf{v}'_{j\pm} + a'(\mp 1)^q + o(1); \quad \left| \xi_3^{\varepsilon j \pm} \right| \rightarrow \infty, \quad \mp \xi_3^{\varepsilon j \pm} > 0 \\ S_+ &= \alpha T^0, \quad S_- = \alpha(1 + R^0) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь величины $\mathbf{u}_{j\pm}^0$ и $\mathbf{v}'_{j\pm}$ взяты из формул (5.16) и (5.19) соответственно. Таким образом, представление (4.4) решений \mathbf{Z}^j задачи (4.1) в области Ξ^j показывает, что

$$Z_{\pm}^{j'}(\xi^{\varepsilon j \pm}) = B_{j\pm}^+ + B_{j\pm}^- Z^j(\xi^{\varepsilon j \pm}) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} B_{j+}^{\vartheta} &= \frac{1}{2} S_+ + \frac{a^0}{2} (\mathbf{u}_{j+}^0 + \vartheta \mathbf{v}'_{j+}) + \vartheta \frac{a'}{2} (-1)^q \\ B_{j-}^{\vartheta} &= \frac{\vartheta}{2} S_{\pm} + \frac{a^0}{2} (\vartheta \mathbf{u}_{j-}^0 + \mathbf{v}'_{j-}) + \frac{a'}{2}, \quad \vartheta = \pm \end{aligned} \quad (5.25)$$

Продолжим процедуру согласования и извлечем слагаемые $O\left(\left|\xi^{\varepsilon j \pm}\right|^{-2}\right)$ и $O\left(\left|\xi^{\varepsilon j \pm}\right|^{-1}\right)$ соответственно из членов $Z_{\pm}^{j0}(\xi^{\varepsilon j \pm})$ и $Z_{\pm}^{j'}(\xi^{\varepsilon j \pm})$ разложения (4.4), которые предписывают функции v_0' поведение около точек $(P^j, \pm \ell)$. В результате согласно особенности (4.10) функции Грина и данным Неймана (4.9) для нее находим сингулярную составляющую правой части краевого условия (4.13)

$$h_{\text{dir}\pm}''(y) = \pm \sum_{j=1}^J B_{j\pm}^- C(\theta_j) \delta(y - P^j) \mp \frac{a^0}{2} (\mp 1)^q \sum_{j=1}^J \sum_{p=1,2} C_p(\theta_j) \frac{\partial \delta}{\partial y_p}(y - P^j) \quad (5.26)$$

Как и ранее в формуле (5.17), дельта-функции Дирака и их производные — результат процедуры согласования при учете слагаемых порядков $\left|\xi^{\varepsilon j \pm}\right|^{-1} = \varepsilon r_{\varepsilon j \pm}^{-1}$ и $\varepsilon^{-1} \left|\xi^{\varepsilon j \pm}\right|^{-2} = \varepsilon r_{\varepsilon j \pm}^{-2}$ соответственно из разложений функций (5.24) и (5.8), полученных согласно представлениям (4.4) и (5.8), (5.24). Вместе с тем производные $\partial \delta / \partial y_p$, порождающие сингулярности $O(r_{\varepsilon j \pm}^{-2})$ внутри камеры $\Omega_{\#}(\ell^{\varepsilon})$, не сказываются на условиях (4.16) разрешимости задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями (5.21), (5.22) и (5.26), так как собственная функция (4.15) не зависит от переменных y и дифференцирование уничтожает ее следы на торцах $\omega_{\#}(\pm \ell)$. Кроме того, определение (5.18) поправки в

представлении (1.18) размера ℓ^ε уничтожает в названном условии разрешимости коэффициент a' , фигурировавший в формулах (5.4) и (5.22). В силу соотношений (5.23) и (5.25) оно принимает вид

$$\frac{\alpha}{2} \mathbf{C} \left((-1)^q T^0 + 1 + R^0 \right) + a^0 \left(\mathbf{B}(\kappa) + \kappa^2 |\omega_\#| \ell'' \right) = 0 \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\kappa) = & \frac{1}{2} \sum_{\pm} \sum_{j=1}^J (\mp 1)^q \left(\mathbf{u}_{j\pm}^0 - \mathbf{v}'_{j\pm} \right) C(\theta_j) - \\ & - 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \mathbf{C} \int_{\omega} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} q\right) \partial_z \mathbf{v}'_0(y, 0) + \frac{\pi q}{2\ell} \sin\left(\frac{\pi}{2} q\right) \partial_z^2 \mathbf{v}'_0(y, 0) \right) dy \end{aligned} \quad (5.28)$$

Величина $\mathbf{B}(\kappa)$, получающаяся при вычислении интеграла (4.16) с подынтегральными выражениями (5.21), (5.22) и (5.26), из которых удалены коэффициенты S_{\pm} , a' , ℓ'' , а множитель ℓ' заменен выражением (5.18), зависит от выбранной частоты κ и формы волновода Π_2^0 , т.е. от областей ω , $\omega_\#$, $\theta_1, \dots, \theta_J$, точек P^1, \dots, P^J и размеров ℓ , ℓ' . Вместе с тем явная формула для функции $\kappa \mapsto \mathbf{B}(\kappa)$ недоступна без применения численных методов, так как она определяется через вспомогательные решения \mathbf{u}_{\pm}^0 и \mathbf{v}'_0 , точнее их скалярные характеристики из соотношений (5.12), (5.15), (5.19) и (5.25). Единственное используемое далее важное свойство: функции \mathbf{u}_{\pm}^0 и \mathbf{v}'_0 , а вместе с ними и число $\mathbf{B}(\kappa)$ вещественны.

6. Почти полное прохождение поршневой волны. Покажем, как можно добиться равенств

$$R^0 = 0, \quad T^0 = (-1)^{q+1} \quad (6.1)$$

в представлениях (1.13) коэффициентов рассеяния. При учете соотношений (5.13) и (6.1) имеем

$$a^0 = i\alpha^{-1} \mathbf{C}^{-1} \quad (6.2)$$

Коэффициент (6.2) чисто мнимый, а число (5.28) вещественное. Таким образом, соотношение

$$\ell'' = - \left(2\kappa^2 |\omega_\#| \right)^{-1} \mathbf{B}(\kappa) \quad (6.3)$$

уничтожает мнимую часть выражения (5.27). Его вещественная часть исчезает в силу равенств (6.1). Итак, последнее из нужных требований соблюдено.

Определение высоты $2\ell^\varepsilon$ вставки $\Omega^\gamma(\ell^\varepsilon)$ по формулам (1.18), (5.1) и (5.18), (6.3) следует интерпретировать как настройку параметров волновода для обеспечения почти полного прохождения поршневой волны через две перфорированные перегородки. Поскольку поправка (5.18) положительна, найденная высота $2\ell^\varepsilon$ больше критической $\pi q/\kappa$.

Обсудим несколько вариантов изменения геометрии волновода Π_2^ε .

6.1. Нарушение настройки. Пусть $t \neq 0$ – вещественный параметр, и в противоположность формуле (6.3)

$$\ell'' = t - \left(2\kappa^2 |\omega_\#| \right)^{-1} \mathbf{B}(\kappa) \quad (6.4)$$

Теперь, решив систему линейных уравнений (5.13) и (5.27), находим

$$R^0(t) = 1 - \frac{i\alpha^2 \mathbf{C}^2}{t + i\alpha^2 \mathbf{C}^2}, \quad T^0(t) = (-1)^{q+1} \frac{i\alpha^2 \mathbf{C}^2}{t + i\alpha^2 \mathbf{C}^2}, \quad a^0 = -\frac{\alpha \mathbf{C}}{t + i\alpha^2 \mathbf{C}^2} \quad (6.5)$$

Графики функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^0(t), T^0(t)$ на комплексной плоскости \mathbb{C} суть окружности с радиусом $\frac{1}{2}$ и центрами в точках $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-1)^{q+1}$ на вещественной оси. В случае $t = 0$ получаем равенства (6.1), но $R^0(t) \rightarrow 1, T^0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Наконец, модули коэффициентов отражения и прохождения

$$|R^0(t)| = 1 - \frac{\alpha^4 \mathbf{C}^4}{t^2 + \alpha^4 \mathbf{C}^4}, \quad |T^0(t)| = \frac{\alpha^4 \mathbf{C}^4}{t^2 + \alpha^4 \mathbf{C}^4}$$

соответственно монотонно возрастает и убывает при увеличении переменной $|t|$. Приведенные формулы показывают, как при изменении высоты вставки (1.1), $n = 1$, почти полное прохождение поршневой волны превращается в ее почти полное отражение.

Формула (6.4) означает искажение настройки высоты вставки на втором шаге асимптотической процедуры. Сделаем то же на первом шаге (5.18), а именно положим

$$\ell' = t - \alpha^2 \gamma^{-2} \mathbf{C}, \quad t \neq 0$$

Тогда задача (4.11)–(4.14) с правыми частями (5.17) разрешима только в случае $a^0 = 0$, а значит, представление (5.4) теряет главный асимптотический член $O(\varepsilon^{-1})$ и поэтому реализуется почти полное отражение поршневой волны.

6.2. Разные перфорация перегородок и сечения рукавов. Пусть $P_{\vartheta}^1, \dots, P_{\vartheta}^{J_{\vartheta}}$ – два ($\vartheta = \pm$) семейства попарно различных точек в области ω_* , и $\theta_{j\pm}^{\varepsilon}(\pm \ell^{\varepsilon})$ – отверстия, определенные аналогами формул (1.3) по фиксированным областям $\theta_{j\pm} \subset \mathbb{R}^2$; здесь $J_{\pm} \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, J_{\pm}$. Повторим с понятными изменениями выкладки из разд. 4 применительно к измененному волноводу (1.14) (рис. 1, д), у которого рукава (1.15) имеют неодинаковые сечения ω_{\pm} и перегородки (1.17) перфорированы по-разному. В результате получим заменители формул (5.27) и (5.13), (5.14)

$$R^0 - 1 = ia^0 \alpha_- \mathbf{C}_-, \quad T^0 = ia^0 (-1)^q \alpha_+ \mathbf{C}_+ \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2} \left((-1)^q T^0 \alpha_+ \mathbf{C}_+ + (1 + R^0) \alpha_- \mathbf{C}_- \right) + a^0 \left(\mathbf{B}_{\#}(\kappa) + 2\kappa^2 |\omega_{\#}| \ell'' \right) = 0 \quad (6.7)$$

$$\mathbf{C}_{\pm} = \sum_{j=1}^{J_{\pm}} C(\theta_{j\pm}), \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa |\omega_{\pm}|}} \quad (6.8)$$

Новая перфорация перегородок (1.17) приводит к сингулярным составляющим

$$g_{\text{dir}\pm}(y) = \frac{a^0}{2} (\mp 1)^q \sum_{j=1}^{J_{\pm}} C(\theta_{j\pm}) \delta(y - P_{(\pm)}^j)$$

в правых частях (5.11) краевых условий Неймана в задаче (4.11)–(4.14) для u_{\pm}^0 и, соответственно, к равенствам (6.6), проистекающим от условия (4.8) ее разрешимости. Похожие изменения происходят и в сингулярных составляющих (5.26) задачи (4.11)–(4.14) для v_0'' и в коэффициентах при $T^0, 1 + R^0$ и a^0 в формуле (6.7). Модифицированное выражение (5.28), обозначенное $\mathbf{B}_{\#}(\kappa)$, появляется в формуле (6.7) и, следовательно, в условии (6.4), однако для существования решения (6.1) полученной системы алгебраических уравнений для T^0 и R^0 требуется еще одно ограничение

$$\frac{1}{\sqrt{|\omega_+|}} \sum_{j=1}^{J_+} \text{cap}_3 \theta_{j+} = \frac{1}{\sqrt{|\omega_-|}} \sum_{j=1}^{J_-} \text{cap}_3 \theta_{j-} \quad (6.9)$$

Равенство (6.9) следует интерпретировать как критерий возможности обеспечить эффект почти полного прохождения поршневой волны в волноводе (1.14) путем настройки высоты $2\ell^\varepsilon$ камеры. В критерии фигурируют площади $|\omega_\pm|$ сечений рукавов и гармонические емкости [12] двумерных трещин $\{x : y \in \overline{\theta_{j\pm}}, z = 0\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , определенные по емкостному потенциалу \mathbf{P} согласно формулам (4.3) и (4.5).

Если требование (6.9) нарушено, то при соблюдении условия (6.3) с заменой $\mathbf{B}(\kappa) \mapsto \mathbf{B}_\#(\kappa)$ находим

$$R^0(\varphi) = \frac{1 - \varphi^2}{1 + \varphi^2}, \quad T^0(\varphi) = \frac{2(-1)^j \varphi}{1 + \varphi^2}, \quad \varphi = \frac{\alpha_+ \mathbf{C}_+}{\alpha_- \mathbf{C}_-}$$

Таким образом, наблюдаются значимые как отражение, так и прохождение волн, однако при слабой проницаемости одной из перегородок ($\varphi \rightarrow +0$ или $\varphi \rightarrow +\infty$) легко предсказуемо почти полное отражение, т.е. $|R^0(\varphi)| \rightarrow 1$.

6.3. Волновые фильтры и дамперы. Отсутствие в ограничении (6.9) частоты κ позволяет создать примитивный волновой фильтр (рис. 1, д), в котором

$$\Omega_\#(\ell^\varepsilon) = \omega_- \times (-\ell^\varepsilon, \ell^\varepsilon), \quad J = 1, \quad |\omega_+|^{-1/2} \text{cap}_3 \theta_{1+} = |\omega_-|^{-1/2} \text{cap}_3 \theta_{1-}$$

Именно, если расстояние $2\ell^\varepsilon$ между первой перегородкой $\Theta^\varepsilon(-\ell^\varepsilon) = \omega_-(-\ell^\varepsilon) \setminus \overline{\theta_{1+}^\varepsilon}$ и “выхлопной трубой” $\omega_+(\ell^\varepsilon) = \omega_+ \times (\ell^\varepsilon, +\infty)$ подобрано согласно модифицированным формулам (1.18), (5.1), (5.18), (6.3) (ср. соотношения (6.6)–(6.8) и (5.13), (5.27), (5.14)) при заданной частоте $\kappa_* := \kappa \in (0, \min \Lambda_{1\pm}^{1/2})$, где $\Lambda_{1\pm}$ – первые положительные собственные числа задач (1.8) в областях ω_\pm , то поршневая волна с волновым числом $\alpha_* = (2\kappa_* |\omega_-|)^{-1/2}$ почти не отражается, однако при изменении волнового числа (вариации частоты) настройка камеры $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ пропадает, и она работает как “глушитель”, т.е. почти полностью отражает волну.

Если ω_\pm и θ_\pm – круги с радиусами ρ_\pm^ω и ρ_\pm^θ соответственно, то простейшее свойство линейности гармонической емкости [12] показывает, что критерий (6.9) почти полного прохождения соблюдается при ограничении (1.19).

7. Замечания

7.1. Полные асимптотические разложения. Развитие изложенной асимптотической процедуры позволяет построить бесконечные ряды для коэффициентов рассеяния R^ε и T^ε . Вместе с тем в рамках метода сращиваемых разложений [41, 42] на следующих шагах итерационных процессов в асимптотические конструкции привлекаются решения предельных задач в областях Ω_\square , $\Omega_\#(\ell)$ и Ξ_j из разд. 4 с все более и более сильными сингулярностями в точках $(P^j, 0)$, $(P^j, \pm\ell)$ и на бесконечности. Это обстоятельство значительно усложняет реализацию процедуры согласования. Более простым оказывается метод составных разложений [7, 46, 47], в котором на каждом шаге требуется решать задачи с фиксированным поведением вблизи особых точек. Показано ([7] гл. 2, [48]), как старшие асимптотические члены, полученные при помощи метода сращивания, переделываются в члены, пригодные для метода составных разложений. В частности, в рамках последнего метода задачи в цилиндрах $\Omega_\#(\ell)$ и Ω_\square всегда решаются в классе ограниченных и затухающих на бесконечности функций, а сингулярно-

сти использованных в разд. 5 решений u_{\pm}^0 и v_0' присоединяются к решениям задач в неограниченных областях Ξ^1, \dots, Ξ^J , которым (решениям) предписывается затухание со скоростью $O\left(|\xi^j|^{-1}\right)$.

Младшие члены асимптотики понадобятся наверняка при попытке обеспечить почти полное прохождение волн, отличающихся от поршневых и приобретающих зависимость от поперечных координат $y = (y_1, y_2)$. Например, если амплитудная часть $U(y)$ волны $e^{i\mu z}U(y)$ обращается в нуль в точке P^j , вокруг которой образованы отверстия $\theta_j^{\varepsilon}(z^n)$ в перегородках, то в задаче (4.1) о пограничном слое нужно учесть специальные решения, которые имеют отношение к тензору поляризации [12 прил. G] трещины $\overline{\theta}_j(0)$, включают коэффициенты $C_1(\theta_j)$ и $C_2(\theta_j)$, уже фигурировавшие в формулах (4.4) и (5.26). При этом производные дельта-функции Дирака в краевых условиях (4.13) оказывают влияние на условия разрешимости (4.16) задачи (4.11)–(4.14) в случае зависимости собственной функции v от поперечных переменных y . В результате критерий (6.9) возможности почти полного прохождения поршневых волн (1.11) существенно изменяется для волн иного строения.

7.2. Обоснование асимптотики. Общие методы исследования сингулярно возмущенных статических и спектральных краевых задач [7] требуют лишь незначительных изменений при переходе к дифракционным задачам о распространении волн в волноводах с цилиндрическими выходами на бесконечность. При этом полезной оказывается техника весовых пространств с отделенной асимптотикой ([1] гл. 6, 7, § 3) (см. также [49, 50] для уравнения Гельмгольца в квантовых и акустических волноводах). Нормы в таких пространствах включают модули коэффициентов рассеяния и поэтому для проверки соотношений (1.11) достаточно из построенных членов асимптотических разложений (5.2)–(5.5) соорудить подходящее глобальное асимптотическое приближение к решению (1.12) задачи (1.5), обработать появившуюся малую невязку в вариационной задаче (1.6) и применить равномерные по параметру ε априорные оценки решений. Нужные асимптотические конструкции для обоих методов сращиваемых и составных разложений известны ([7] гл. 2). Благодаря возможности нахождения младших членов асимптотик заботиться о точности априорных оценок не нужно (ср. подход [47]), но метод [7] все-таки предоставляет асимптотически точные оценки.

7.3. Вариация частоты. Изменим постановку вопроса, а именно, зафиксируем высоту L вставки (1.15) и попытаемся найти частоту

$$\kappa(\varepsilon) = \kappa^0 + \varepsilon\kappa' + \varepsilon^2\kappa'' + O(\varepsilon^3), \quad (7.1)$$

при которой происходит почти полное прохождение поршневых волн (1.11) в волноводе Π_2^{ε} с рукавами (1.17) одинакового сечения ω .

При помощи соотношений (1.18), (5.1) и (5.18) находим два первых члена разложения (7.1)

$$\kappa^0 = \frac{\pi q}{L}, \quad \kappa' = \frac{C}{\pi q |\omega_{\#}|}$$

К сожалению, явную формулу для коэффициента κ'' в третьем члене представления (1.18) получить не удастся, так как величина $\mathbf{B}(\kappa)$ сложным образом зависит от частоты κ : в выражении (5.28) присутствуют интегралы от решений \mathbf{u}_{\pm}^0 и \mathbf{v}_0' краевых задач для оператора Гельмгольца $\Delta_x + \kappa^2$.

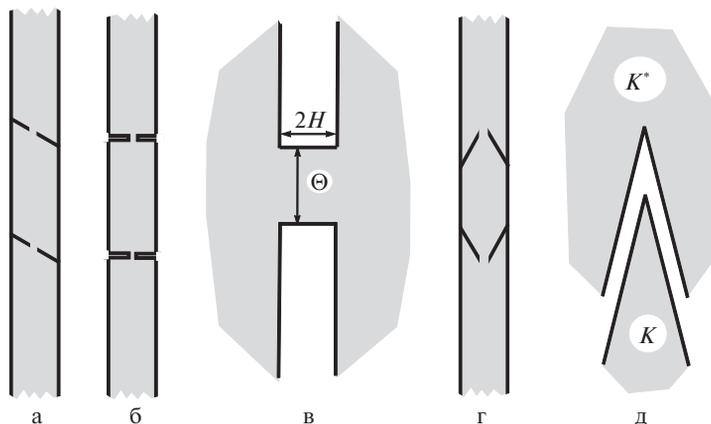


Рис. 3. Иные формы волноводов с перфорированными перегородками (а, б, г) и области для описания пограничных слоев (в и д).

8. Варианты, обобщения и следствия

8.1. *Изменение геометрии перфорированных перегородок.* Разработаны общие алгоритмы, позволяющие приспособить предложенные асимптотические процедуры к цилиндрическим волноводам с препятствиями, изображенными на рис. 3, а и б. Вместе с тем по сравнению с волноводами на рис. 1, а–г, вспомогательные решения предельных задач из разд. 4 теряют явный вид. Например, в случае косых перегородок (рис. 3, а) искажается дифракционное поле (4.7), и коэффициент отражения в полубесконечном цилиндре Ω_{\angle} со скошенным торцом отличен от единицы, а в случае утолщенных перегородок (рис. 3, б) вместо решения (4.2), найденного по емкостному потенциалу \mathbf{P} , используется решение Z задачи (4.1) в полупространствах, соединенных через трубу $\theta_j \times [-H_n, H_n]$ (рис. 3, в)

$$\Xi^j = \left\{ \xi : \eta \in \mathbb{R}^2, |\zeta| > H_n \right\} \cup \left\{ \xi : \eta \in \theta_j, |\zeta| \leq H_n \right\}$$

с зафиксированным поведением на бесконечности

$$\mathbf{Z}(\xi) = \pm 1 \mp C(\theta_j, H_n) |\xi|^{-2} + O(|\xi|^{-2}); \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \pm \zeta > 2H_n > 0$$

Здесь $2\epsilon H_n$ – толщина перегородки с номером $n = 1, \dots, N$, $H_n > 0$, а $C(\theta_j, H_n)$ – величина, зависящая от формы отверстия θ_j и от длины $2H_n$ трубы, однако не выражающаяся через классические объекты гармонического анализа.

Для конических перегородок с отверстиями диаметром $O(\epsilon)$ в вершинах (рис. 3, г) алгоритм построения асимптотики изменяется мало (ср. публикации [28, 29] для двумерной задачи Дирихле, рис. 2, г и д), однако разложение ведется по степеням малого параметра ϵ с показателями, определенными по сингулярностям решений ([43, 51], гл. 7) задачи Неймана для оператора Лапласа в выпуклом конусе \mathbf{K} и его дополнении $\mathbf{K}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbf{K}}$ (рис. 3, д). Впрочем для подобных задач разработанная в данной статье процедура настройки параметров волновода ранее не применялась и эффект почти

полного прохождения волн через перфорированные перегородки обнаружен не был (ср. разд. 6.2).

8.2. *Почти полное отражение.* Если $\lambda = \kappa^2$ – не собственное число задачи (4.11)–(4.14), то поршневая волна w^+ , приходящая из бесконечности в рукаве $\Omega_-(\ell)$ волновода Π_2^ε , почти полностью отражается от первой перегородки $\Theta^\varepsilon(-\ell)$ (обозначения из формул (2.2) и (1.14)). Коэффициенты рассеяния у решения (1.12) принимают вид

$$R^\varepsilon = 1 + \varepsilon R' + O(\varepsilon^2), \quad T^\varepsilon = \varepsilon^2 T'' + O(\varepsilon^3) \quad (8.1)$$

Алгоритм построения асимптотики значительно упрощается по сравнению с разд. 5 и разд. 6, в частности, бесполезно проводить настройку высоты вставки $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ и можно взять $\ell' = 0$ и $\ell'' = 0$ в определении (1.18).

Укажем начальные члены асимптотики в разных частях волновода.

Поправочный член внешнего разложения на рукаве $\Omega_-(\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \alpha \left(e^{i\kappa(z+\ell)} + e^{-i\kappa(z+\ell)} \right) - \varepsilon \alpha \sum_{j=1}^J C^j(\theta_j) \left[\frac{i}{\kappa|\omega|} e^{-i\kappa(z+\ell)} + G^j(y, -z - \ell) \right] + \dots \quad (8.2)$$

находится в результате согласования с внутренним разложением около отверстий $\theta_j^\varepsilon(-\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \alpha(1 - \mathbf{Z}^j(\xi^{j-})) + \dots; \quad j = 1, \dots, J \quad (8.3)$$

Здесь использованы обозначения, введенные в разд. 5. Формула (8.2) означает, что в представлении (8.1) фигурирует величина

$$R' = -\frac{i}{\kappa|\omega|} \sum_{j=1}^J C(\theta_j) = -2i\alpha^2 \mathbf{C}$$

Продолжение процедуры согласования показывает, что в силу соотношений (8.3) и (4.4) первый член внешнего разложения на камере $\Omega^Y(\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon v'_0(x) + \dots$$

находится из однозначно разрешимой по предположению задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями

$$h_0(y) = h_1(y) = 0, \quad h_+(y) = 0, \quad h_-(y) = \alpha \sum_{j=1}^J C^j(\theta_j) \delta(y - P^j)$$

Наконец, внутреннее разложение вблизи отверстий $\theta_j^\varepsilon(+\ell)$ и внешнее на рукаве $\Omega_+(\ell)$ выглядят так:

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2} v'(P^j, \ell) \left(1 - \mathbf{Z}^j(\xi^{j+}) \right) + \dots, \quad j = 1, \dots, J$$

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j=1}^J v'(P^j, \ell) C^j(\theta_j) \left(\frac{i}{\kappa|\omega|} e^{i\kappa(z-\ell)} + G^j(y, z - \ell) \right) + \dots$$

Последняя формула приводит ко второму соотношению (8.1).

Проведенные вычисления позволяют заключить, что прохождение поршневой волны через одну перегородку с отверстием диаметром $O(\varepsilon)$ понижает амплитуду в ε раз.

Таким образом, при условии, что число $\lambda = \kappa^2$ не является собственным для задачи Неймана на каждой $(n = 1, \dots, N - 1)$ из камер (1.1), коэффициент прохождения T^ε в волноводе (1.4) с N перегородками приобретает порядок ε^N .

8.3. *Камера обскура.* Рассмотрим решение

$$u_{\square}^\varepsilon(x) = \chi(z)\alpha(e^{i\kappa(z+\ell^\varepsilon)} + R_{\square}^\varepsilon e^{-i\kappa(z+\ell^\varepsilon)}) + u_{\square}^\varepsilon(x) \quad (8.4)$$

задачи (1.5) в полубесконечном волноводе $\Pi_{\square}^\varepsilon$ (рис. 2, а), который образован рукавом $\Omega_-(\ell^\varepsilon) = \omega \times (-\infty, -\ell^\varepsilon)$ и камерой $\Omega_{\square}^\varepsilon = \omega_{\#} \times (-\ell^\varepsilon, 0)$, соединенными одним отверстием $\theta_{\square}^\varepsilon(-\ell^\varepsilon)$. Множество $\Pi_{\square}^\varepsilon$ – половина $\{x \in \Pi_2^\varepsilon : z < 0\}$ симметричного множества Π_2^ε из разд. 5 в случае $J = 1$, а значит, решения (8.4) и (1.12) связаны соотношением

$$u_{\square}^\varepsilon(y, z) = u^\varepsilon(y, z) + u^\varepsilon(y, -z)$$

При этом коэффициент отражения R_{\square}^ε в волноводе $\Pi_{\square}^\varepsilon$ равен сумме $R^\varepsilon + T^\varepsilon$ коэффициентов рассеяния в волноводе Π_2^ε . Таким образом, асимптотические формулы из разд. 6 позволяют найти асимптотику фазы $\psi_\varepsilon \in (-\pi, \pi]$ у коэффициента отражения

$$\left| R_{\square}^\varepsilon \right| = 1 \Rightarrow R_{\square}^\varepsilon = e^{i\psi_\varepsilon}$$

Если κ^2 не является собственным числом задачи Неймана в половине $\Omega_{\square}^\varepsilon(\ell)$ цилиндра $\Omega^\varepsilon(\ell)$, т.е. $\kappa \neq \pi p/\ell$ при всех $p \in \mathbb{N}$, или настройка высоты ℓ^ε нарушена на первом шаге (5.18), то $\psi_0 = 0$ в представлении фазы

$$\psi_\varepsilon = \psi_0 + O(\varepsilon) \quad (8.5)$$

Если же $\kappa = \pi p/\ell$, $p \in \mathbb{N}$, т.е. $q = 2p$ в формуле (5.1), а настройка высоты ℓ^ε нарушена на втором шаге и поправка ℓ'' имеет вид (6.4) с параметром $t \in \mathbb{R}$, то согласно формулам (6.5) и (1.13)

$$\begin{aligned} R_{\square}^\varepsilon(t) = R^0(t) + T^0(t) &= 1 + \frac{2i\alpha^2\mathbf{C}^2}{it + \alpha^2\mathbf{C}^2} + O(\varepsilon) = \frac{t^2 - \alpha^4\mathbf{C}^4}{t^2 + \alpha^4\mathbf{C}^4} + i \frac{2t\alpha^2\mathbf{C}^2}{t^2 + \alpha^4\mathbf{C}^4} + O(\varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi_0(t) = \operatorname{arctg} \frac{2t\alpha^2\mathbf{C}^2}{t^2 - \alpha^4\mathbf{C}^4} \end{aligned}$$

Главная часть фазы (8.5) удовлетворяет соотношениям

$$\psi_0(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0, \quad \psi_0(t) \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \pm \alpha^2\mathbf{C}^2$$

Иными словами, для спектрального параметра $\lambda = \kappa^2$, близкого к собственному числу задачи Неймана в камере $\Omega_{\square}^\varepsilon$ с заклеенным отверстием, происходит быстрое, со скоростью $O(\varepsilon^{-1})$, изменение фазы ψ_ε коэффициента отражения R_{\square}^ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
4. *Бирман М.Ш., Скворцов Г.Е.* О квадратичной суммируемости старших производных решений задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей // Изв. вузов. 1983. № 8. С. 34–40.
5. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
6. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2. Berlin: Akademie, 1991.
8. *Назаров С.А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. матем. ж. 2010. Т. 51. № 5. С. 1086–1101.
9. *Назаров С.А.* Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода // Матем. зам. 2010. Т. 87. № 5. С. 764–786.
10. *Назаров С.А.* Асимптотика ловушечных мод и собственных чисел под порогом непрерывного спектра волновода с тонким экранирующим препятствием // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 3. С. 216–260.
11. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акустич. ж. 2020. Т. 66. № 5. С. 489–508.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
13. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
15. *Кучмент П.А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // УМН. 1982. Т. 37. № 4. С. 3–52.
16. *Скриганов М.М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 171. Л.: Наука, 1985. 122 с.
17. *Kuchment P.* Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
18. *Гельфанд И.М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
19. *Назаров С.А.* Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области // Функци. анализ и его прил. 2009. Т. 43. № 3. С. 92–95.
20. *Назаров С.А.* Пример множественности лакун в спектре периодического волновода // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 4. С. 99–124.
21. *Назаров С.А.* О прохождении волн через малое отверстие в перегородке акустического волновода // Сиб. матем. ж. 2018. Т. 59. № 1. С. 110–129.
22. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966.
23. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math. 2009. V. 70. P. 1201–1218.
24. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
25. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.
26. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // Wave Motion. 2017. V. 68. P. 218–241.
27. *Delitsyn A., Grebenkov D.S.* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math. 2018. V. 71. № 4. P. 537–580.

28. Баскин Л.М., Кабардов М., Нейттаанмяки П., Пламеневский Б.А., Сарафанов О.В. Асимптотика и численное исследование резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах переменного сечения // ЖВММФ. 2013. Т. 53. № 11. С. 1835–1855.
29. Baskin L.M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V. Resonant tunneling. quantum waveguides of variable cross-section, asymptotics, numerics, and applications // in: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Heidelberg, New York: Springer, 2015.
30. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
31. Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
32. Арутюнян Н.Х., Назаров С.А., Шойхет Б.А. Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1365–1369.
33. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленингр. матем. об-ва. 1990. Т. 1. С. 174–211.
34. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
35. Кондратьев В.А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области // Диффер. уравн. Т. 6. № 10. С. 1831–1843.
36. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
37. Figotin A., Klein A. Midgap defect modes in dielectric and acoustic media // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58. № 6. P. 1748–1773.
38. Назаров С.А. Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и окологороговые собственные числа // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 3. С. 111–160.
39. Delourme B., Fliss S., Joly P., Vasilevskaya E. Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. Part 1: Existence results // Asymptotic Analysis. 2017. V. 103. № 3. P. 103–134.
40. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел и функций тонкой квадратной решетки Дирихле с искривленной перемычкой // Матем. зам. 2019. Т. 105. № 4. С. 564–588.
41. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
42. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
43. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
44. Pazy A. Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
45. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
46. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
47. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures. Oxford: Clarendon, 1999.
48. Назаров С.А. Разрушение циклов и возможность раскрытия спектральных лакун в квадратной решетке тонких акустических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 6. С. 3–51.
49. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // ТМФ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
50. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функци. анализ и его прил. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
51. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.

Transmission and Trapping of Waves in an Acoustic Waveguide with Perforated Walls

S. A. Nazarov^{a,#} and L. Chesnel^{b,##}

^a *Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*

^b *INRIA/Centre de mathématiques appliquées, École Polytechnique, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France*

[#] *e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

^{##} *e-mail: lucas.chesnel@inria.fr*

We study trapping and transition of waves in an acoustic waveguide with a family of perforated cross-walls. Eigenvalues of the corresponding spectral Neumann problem for the Laplace operator under the symmetry geometry conditions. Almost complete transmission of the piston are found out wave through the family of small holes (the inverted Weinstein anomaly) is achieved by fine tuning of the distance between the cross-walls with various configuration of the connecting holes. A criterion of the above-mentioned anomaly is obtained. We also discuss some related questions, in particular, primitive wave filters and the effect of camera obscura.

Keywords: acoustic waveguide, perforated walls, trapped waves, asymptotics of scattering coefficients, almost complete transition of waves

REFERENCES

1. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
2. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // *Appl. Math. Sci.*, 1985, vol. 49.
3. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory and Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Reidel: Dordrecht, 1987.
4. *Birman M.Sh., Skvortsov G.E.* On square-integrability of higher derivatives of a solution of a Dirichlet problem in a domain with piecewise smooth boundary // *Izv. vuzov. Math.*, 1962, vol. 20, no. 5, pp. 12–21. (in Russian)
5. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1967, vol. 16, pp. 227–313.
6. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 261, pp. 21–31.
7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie, 1991.
8. *Nazarov S.A.* Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold // *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 866–878.
9. *Nazarov S.A.* Opening a gap in the continuous spectrum of a periodically perturbed waveguide // *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 5, pp. 738–756.
10. *Nazarov S.A.* Asymptotics of trapped modes and eigenvalues below the continuous spectrum of a waveguide with a thin barrier // *St. Petersburg Math. J.*, 2011, vol. 23, no. 3, pp. 571–601.
11. *Nazarov S.A.* Anomalies of scattering of acoustic waves near cutoff points of the continuous spectrum (a review) // *Acoust. Phys.*, 2020, vol. 66, no. 5, pp. 477–494.
12. *Polya G., Szegő G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, NJ: Univ. Press, 1951.
13. *Landkof N.S.* Foundations of Modern Potential Theory. Springer, 1972.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. III: Scattering Theory. N.Y.: Acad. Press, 1989.
15. *Kuchment P.A.* Floquet theory for partial differential equations // *Russ. Math. Surv.*, 1982, vol. 37, no. 4, pp. 1–60.
16. *Skriganov M.M.* Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1987, vol. 171, pp. 1–121.

17. *Kuchment P.* Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
18. *Gelfand I.M.* Decomposition into eigenfunctions of an equation with periodic coefficients // Dokl. AN SSSR, 1950, vol. 73, pp. 1117–1120. (in Russian)
19. *Nazarov S.A.* A gap in the essential spectrum of the Neumann problem for an elliptic system in a periodic domain // Funct. Anal. Appl., 2009, vol. 43, no. 3, pp. 239–241.
20. *Nazarov S.A.* On the plurality of gaps in the spectrum of a periodic waveguide // Math. sb., 2010, vol. 201, pp. 569–594.
21. *Nazarov S.A.* Transmission of waves through a small aperture in the cross-wall in an acoustic waveguide // Siberian Math. J., 2018, vol. 59, no. 1, pp. 85–101.
22. *Weinstein A.* Diffraction Theory and Factorization Method Moscow: Sovetskoe Radio, 1966. (in Russian)
23. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math., 2009, vol. 70, pp. 1201–1218.
24. *Nazarov S.A.* Scattering anomalies in a resonator above thresholds of the continuous spectrum // Math. Sb., 2015, vol. 206, no. 6, pp. 782–813.
25. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1245–1260.
26. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // Wave Motion, 2017, vol. 68, pp. 218–241.
27. *Delitsyn A., Grebenkov D.S.* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math., 2018, vol. 71, no. 4, pp. 537–580.
28. *Baskin L.M., Kabardova M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V.* Asymptotic and numerical study of resonant tunneling in two-dimensional quantum waveguides of variable cross section // Comp. Math. & Math. Phys., 2013, vol. 53, no. 11, pp. 1664–1683.
29. *Baskin L.M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V.* Resonant tunneling. quantum waveguides of variable cross-section, asymptotics, numerics, and applications // in: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Heidelberg; N.Y.: Springer, 2015.
30. *Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A.* Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes // Math. USSR Izv., 1985, vol. 24, pp. 321–345
31. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. Cambridge: Univ. Press, 1934.
32. *Arutyunyan N.Kh., Nazarov S.A., Shoikhet B.A.* Bounds and the asymptote of the stress-strain state of a three-dimensional body with a crack in elasticity theory and creep theory // Sov. Phys. Dokl., 1982, vol. 27, pp. 817–819.
33. *Nazarov S.A., Plamenevskii B.A.* Neumann problem for selfadjoint elliptic systems in a domain with piecewise smooth boundary // Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2, 1993, vol. 15, pp. 169–206.
34. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Russ. Math. Surv., 1999, vol. 54, no. 5, pp. 947–1014.
35. *Kondratiev V.A.* The smoothness of the solution of the Dirichlet problem for second order elliptic equations in a piecewise smooth domain // Differ. Uravn., 1970, vol. 6, no. 10, pp. 1831–1843. (in Russian)
36. *Schechter M., Bers L., John F.* Partial Differential Equations. N.Y.: Interscience, 1964.
37. *Figotin A., Klein A.* Midgap defect modes in dielectric and acoustic media // SIAM J. Appl. Math., 1998, vol. 58, no. 6, pp. 1748–1773.
38. *Nazarov S.A.* Almost standing waves in a periodic waveguide with resonator, and near-threshold eigenvalues // St. Petersburg Math. J., 2016, vol. 28, no. 3, pp. 377–410.
39. *Delourme B., Fliss S., Joly P., Vasilevskaya E.* Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. Part 1: Existence results // Asymptotic Analysis. 2017, vol. 103, no. 3, pp. 103–134.
40. *Nazarov S.A.* Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of a thin square Dirichlet lattice with a curved ligament // Math. Notes, 2019, vol. 105, no. 4, pp. 77–94.
41. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964.
42. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Providence, RI : Am. Math. Soc., 1992.
43. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.

44. *Pazy A.* Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, vol. 24, pp. 193–218.
45. *Vladimirov V.S.* Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Mir, 1979.
46. *Višik M.I., Ljusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter // Amer. Math. Soc. Transl., 1962, vol. 20, pp. 239–364.
47. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon, 1999.
48. *Nazarov S.A.* Breakdown of cycles and the possibility of opening spectral gaps in a square lattice of thin acoustic waveguides // Math. Izv., 2018, vol. 82, no. 6, pp. 1148–1195.
49. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // Theor.&Math. Phys., 2011, vol. 167, no. 2, pp. 606–627.
50. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // Funct. Anal. Appl., 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
51. *Parton V.Z., Perlin P.I.* Mathematical Methods of the Theory of Elasticity. Nauka, Moscow 1981, 688 pp.

УДК 534.112,519.63

**НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРО- И НАНОСТРУНЫ
В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ**© 2022 г. М. А. Ильгамов^{1,2,3,*}, И. М. Утяшев^{1,2,**}¹ Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия² Башкирский государственный университет, Уфа, Россия³ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*e-mail: ilgamov@anrb.ru**e-mail: utyashevim@mail.ru

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принята к публикации 25.09.2021 г.

Рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в приповерхностном слое и в основном объеме материала. В зависимости от материала эффективная жесткость на растяжение может быть больше или меньше, чем обычная жесткость. Второй эффект обусловлен наличием разности сил давления среды на выпуклой и вогнутой сторонах круговой поверхности, появляющейся при отклонении от прямой линии. Эти эффекты определяются безразмерными параметрами. Решение определяется в зависимости от заданного закона изменения давления по времени. Повышение давления приводит к уменьшению амплитуды и повышению частоты колебаний. С вакуумированием связаны увеличение амплитуды и уменьшение частоты. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

Ключевые слова: микро- и наноструны, газовая среда, изменение давления, поперечные непериодические колебания, обратная задача

DOI: 10.31857/S0032823522010052

1. Введение. Нанопроволоки, микро- и наноструны находят применение в электронных, оптоэлектронных и электромеханических устройствах, в литографии, в качестве химических и биологических детекторов и сенсоров и т.д. [1–4]. Изучение их эксплуатационных свойств, в частности, статической и динамической деформации под действием приложенных сил, спектра частот, устойчивости формы представляет большой интерес.

Как показано экспериментально и теоретически в работах [5, 6], а также в последующих исследованиях, при диаметрах струны порядка 10 мкм и меньше начинает влиять на деформацию поверхностный эффект, связанный с различием упругих характеристик в тонком слое около поверхности и в основном объеме тела. Влияние указанного и других эффектов объясняется тем, что с уменьшением диаметра d струны увеличивается удельная поверхность пропорционально d^{-1} . Укажем на исследования [7–11] в этом направлении, в которых приводится также обзор литературы. В частности, статический изгиб проволоки, устойчивость ее формы, свободные колебания рассматриваются в [9–13]. Принято, что в теории изгиба проволоки учитывается изгибающий момент, а струны – не учитывается.

Согласно указанным работам, продольная сила N выражается через деформацию ε осевой линии формулой

$$N = EF\varepsilon(1 + \beta), \quad F = \pi d^2/4, \quad \beta = 4E_s/Ed, \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости для основного объема струны, определяемый в классической теории упругости, параметр E_s относится к поверхностному слою. Размерность модуля E в МПа, а E_s – в МПа м. Толщина приповерхностного слоя в этой модели не вводится в рассмотрение. Она неявно входит в E_s , поэтому размерности E_s и E различаются.

Второй поверхностный эффект связан с образующейся разностью площадей выпуклой и вогнутой частей боковой поверхности струны в результате ее отклонения от прямой линии. Эта разность площадей приводит к появлению распределенной поперечной силы [14, 15]

$$q = pF\kappa, \quad (1.2)$$

где p – равномерное давление на боковую поверхность струны, κ – кривизна осевой линии. Сила q при $p > 0$ направлена в сторону вогнутости осевой линии, при $p < 0$ – в сторону выпуклости. Равновесие тонкостенных упругих тел в предположениях, приводящих к формуле (1.2), было рассмотрено в работах [16, 17].

В [18–24] рассмотрены различные задачи поперечных линейных и нелинейных колебаний струн, тросов, в том числе в динамике космических тросовых систем. Обратная задача по определению граничных условий по собственным частотам приведена в [25, 26]. В [27, 28] изучены разрывные волновые явления в сильно деформируемых нитях. Спектр частот продольных колебаний в нанострунах и нанопленках из интерметаллидов, обладающих сложной зависимостью между напряжением и деформацией, определен в [29].

В настоящей работе одновременно учитываются указанные поверхностные эффекты при рассмотрении линейных поперечных колебаний микро- и нанострун, находящихся под давлением газа. При этом задается закон изменения давления. Непериодические колебания струны возбуждаются в начальный период приложения давления. В случае его установления на определенном уровне с течением времени колебания струны переходят на периодический режим.

При анализе не учитываются другие факторы, оказывающие влияние на колебания (внутреннее трение в материале, излучение в окружающую среду, ее присоединенная масса и т.д.) Эти факторы пропорциональны плотности. Поэтому пренебрежение ими может быть приемлемым в случае легких газов. Кроме того хорошо известно, как учитывать влияние излучения и присоединенной массы на колебания тела.

2. Постановка задачи. Струна диаметром d и длиной L закреплена неподвижно на опорах с некоторым удлинением u_0 . Относительно продольной и поперечной компонент перемещения $u(x, t)$, $w(x, t)$ граничные и начальные условия имеют вид

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = u_0, \quad w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \partial w(x, 0)/\partial t = 0 \quad (2.2)$$

Эти условия характерны для двухопорных микро- и нанорезанаторов [2, 13]. Предполагается, что опоры исключают передачу силы сжатия от возможного торцевого давления на область $0 < x < L$. На рис. 1 приведены примеры таких опор, в которых торцевые площади изолированы от избыточного давления (а) или в случае его действия передача силы сжатия в область $0 < x < L$ не происходит из-за шарнирного закрепления (б) (то же самое в случае многоопорной струны (в)). Условия (2.2) реализуются, например, в момент наибольшего отклонения струны при ее свободных колебаниях. Этот момент принимается за начало отсчета времени.

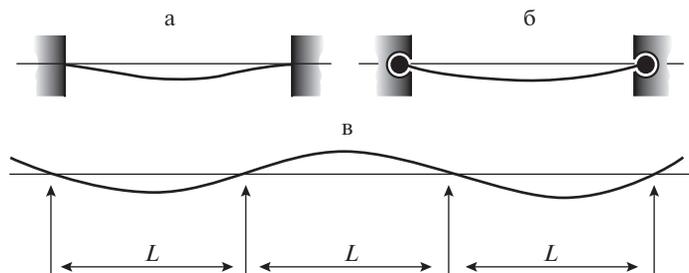


Рис. 1. Схема закрепления струны.

На круговую поверхность струны действует равномерное давление газов $p_0 + p(t)$. Под p_0 будем подразумевать постоянное давление, в частности, атмосферное давление. Струна под этим всесторонним давлением является прямой и растянутой в соответствии с первыми двумя условиями (2.1). Поэтому p_0 может быть названо давлением сборки системы струна–концевые опоры.

Малое отклонение от прямой линии струны при действии избыточного динамического давления $p(t)$ описывается уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{\pi E d^4}{64} \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2.3)$$

где ρ , E – плотность материала и модуль упругости, N – растягивающая сила (1.1). Таким образом, в уравнении (2.3) коэффициентом β в составе N учитывается первый поверхностный эффект, а распределенной поперечной силой q определяется второй поверхностный эффект.

Сила N образуется в результате указанного выше осевого растяжения, а также поперечного перемещения струны и является постоянной по всей длине L . Деформация осевой линии связана с компонентами перемещения формулой

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

Подстановка ее в выражение (1.1) и интегрирование по x от 0 до L дает

$$\frac{NL}{EF(1 + \beta)} = u(L) - u(0) + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.4)$$

В соответствии с первыми условиями (2.1) $u(L) - u(0) = u_0$.

Отношение первого члена ко второму в уравнении (2.3) при функции прогиба $w = \sin(\pi x/L)$ равно

$$\delta = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \left(\frac{E}{\sigma} \right) \left(\frac{d}{L} \right)^2,$$

где напряжение растяжения σ образуется за счет предварительного растяжения на величину u_0 и натяжения за счет отклонения от прямой согласно (2.4). Если $\delta \ll 1$, то влияние первого члена на изгиб мало по сравнению со вторым. Так как $\sigma = Eu_0/L$, то, например, при $d/L = 10^{-5}$, $u_0/d = 10^{-2}$, значение $\delta = 6 \times 10^{-4}$.

В дальнейшем ограничимся законом изменения избыточного давления в виде

$$p = p_0(t/t_0)^\alpha, \quad (2.5)$$

где t_0 некоторое характерное время, α – постоянное число ($\alpha > -1$). С учетом (2.4) и выражения (1.2), где необходимо положить $\kappa \approx \partial^2 w / \partial x^2$, уравнение (2.3) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \left[\tau^\alpha + \eta + \gamma \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = L \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}, \quad \eta = \frac{Eu_0(1 + \beta)}{p_0 L}, \quad \gamma = \frac{E(1 + \beta)}{2p_0}$$

В уравнении (2.6) и в условиях (2.1), (2.2) прогиб w отнесен к длине L . Первый поверхностный эффект при $\beta > 0$ увеличивает упругие силы (параметры η и γ возрастают), при $\beta < 0$ – уменьшает. В качестве примера приведем данные из [9]: $\beta d = 765$ нм (железо) и $\beta d = -4.5$ нм (железо на стеклянном субстрате). Эффект начинает проявляться при $d < 10^6$ нм в первом случае и $d < 10^2$ нм во втором. При $E = 10^5$ МПа, $p_0 = 0.1$ МПа и принятом выше отношении $u_0/L = 10^{-7}$ параметр $\eta = 10^{-1}(1 + \beta)$.

3. Колебания предварительно слаборастянутой струны. Рассмотрим сначала решение линейного уравнения (2.6) для случая слаборастянутой струны, под которым будем подразумевать $\eta \ll \tau^\alpha$ в (2.6). Это условие выполняется за исключением начального момента. В интервале $0 \leq \tau \leq 0.1$ происходит малое изменение w ввиду нулевой скорости в начальных условиях (2.2) и инерционности струны. Это имеет место особенно при больших значениях показателя α , когда давление мало отличается от p_0 до $\tau = 0.1$. Это можно показать по решению уравнения $w_{\tau\tau} - (\eta + 0.1)w_{\xi\xi} = 0$, следующего из (2.6) при $\alpha = 1$. В интервале до $\tau = 0.1$ оно дает значение прогиба с превышением. Принимая в условиях (2.2) $w_0(\xi) = W_1 \sin \pi \xi$ и решение уравнения в виде $w = W(\tau) \sin \pi \xi$, получаем $W = W_1 \cos \sqrt{\eta + 0.1} \tau$. При $\eta = 0.1$ и $\tau = 0.1$ находим $W = W_1 \times 0.999$. Таким образом, нарушение условия $\eta \ll \tau^\alpha$ при малых значениях τ не приводит к искажению дальнейшего колебательного процесса. Тогда решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условиям (2.1), (2.2), имеет вид [30]

$$w = \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_{-\mu}(kz) \sin(k\pi\xi); \quad z = 2\pi\mu\tau^{\frac{1}{2\mu}} \quad (3.1)$$

$$A_k = 2\Gamma(1 - \mu)(k\pi\mu)^\mu \int_0^1 w_0(\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi; \quad \mu = \frac{1}{2 + \alpha},$$

где Γ – гамма функция, $J_{-\mu}$ – функция Бесселя.

Как видно из (2.6) и вида параметров η и γ , в данной постановке первый поверхностный эффект не оказывает влияния на решение (второй эффект выражен в члене $\tau^\alpha \partial^2 w / \partial \xi^2$). Целью этой упрощенной постановки задачи является в частности анализ влияния показателя α в законе изменения давления на решение. Анализ сходимости ряда (3.1) показывает, что при плавных функциях $w_0(\xi)$ с достаточной точностью можно ограничиться первым членом ($k = 1$) [31]. Решение (3.1) при $k = 1$, $w_0(\xi) = W_1 \sin \pi \xi$ приводится к виду

$$w = W_1 \pi^\mu \mu^\mu \Gamma(1 - \mu) \tau^{\frac{1}{2}} J_{-\mu}(z) \sin \pi \xi \quad (3.2)$$

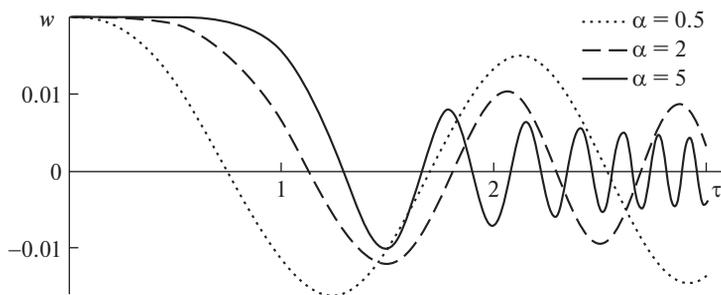


Рис. 2. Колебания струны при возрастающем давлении ($\alpha > 0$).

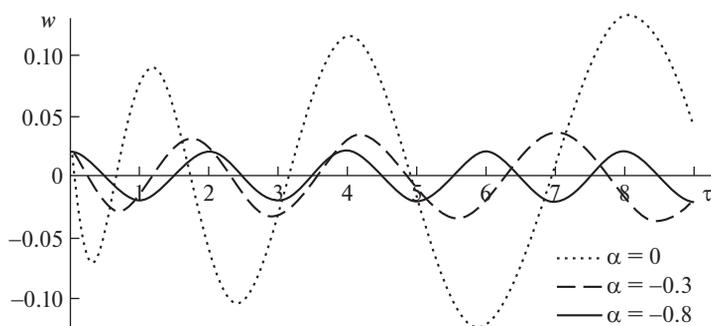


Рис. 3. Колебания струны при уменьшающемся давлении ($-1 < \alpha \leq 0$).

На рис. 2 представлено изменение безразмерного прогиба w в средней точке ($W_1 = 0.02$, $\xi = 1/2$ в (3.2)) по безразмерному времени τ при различных значениях показателя α и соответственно параметра μ . Чем больше показатель α (т.е. больше давление p), тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний струны с течением времени, а частота возрастает. В начале процесса (до $\tau \approx 1$) наблюдается малое изменение w , особенно для больших значений α . Это объясняется тем, что при больших значениях α давление p остается малым до $\tau = 1$.

Показателю $\alpha = 0$ ($p = p_0$) соответствуют гармонические колебания с постоянной частотой и амплитудой. Амплитуда определяется первым начальным условием (2.2). При отрицательных значениях α происходит увеличение амплитуды и уменьшение частоты колебаний, что объясняется снижением давления p (рис. 3). При такой расклатке колебаний линейное решение перестает быть удовлетворительным. Становится заметной роль нелинейного члена в (2.6). Он является положительным и соответствует растягивающей силе, возникающей при отклонении струны от прямой линии. При положительном значении параметра β первого поверхностного эффекта (в составе γ) эта сила обеспечивает большее ограничение амплитуды, чем при отрицательном значении β . Однако анализ нелинейных колебаний не входит в задачу данной работы.

Ограничиваемся тремя членами ряда Стирлинга гамма-функции

$$\Gamma(1 - \mu) = \sqrt{2\pi} e^{\mu-1} (1 - \mu)^{\frac{1}{2}-\mu} \left(1 + \frac{1}{12(1 - \mu)} + \frac{1}{288(1 - \mu)^2} - \dots \right)$$

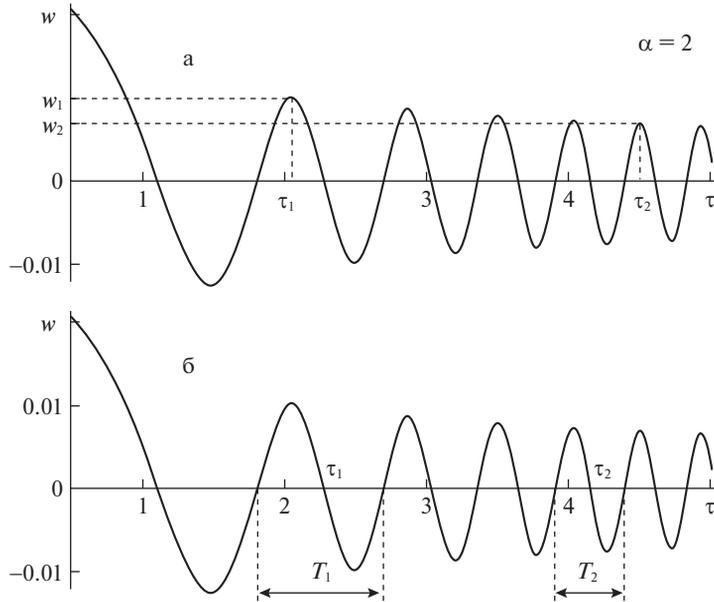


Рис. 4. Периоды (а) и амплитуды (б) функции прогиба в точке $\xi = 1/2$.

Известные точные значения $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ получаются из двух членов этого ряда без заметных погрешностей. Аргумент $1 - \mu = (1 + \alpha)(2 + \alpha)^{-1}$ изменяется от $1/3$ до $2/3$ при $-1/2 < \alpha < 1$. Воспользуемся также асимптотическими приближениями функции Бесселя для малого и большого аргументов

$$J_{-\mu}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z^{-\mu}}{2^{-\mu} \Gamma(1 - \mu)}, \quad J_{-\mu}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z + \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.3)$$

4. Определение скорости изменения давления. Представляет интерес определение показателя α по известному значению периода колебаний T , который в данной задаче зависит от времени. Из равенства $z = 2\pi\tau/T$ с учетом значения z из (3.1) получаем $T = (2 + \alpha)\tau^{-\alpha/2}$. Считая, что моментам времени τ_1 и τ_2 соответствуют периоды T_1 и T_2 , можно записать (из-за использования асимптотических представлений учет времени на рис. 4 начинается не с нуля)

$$\alpha = 2 \frac{\ln T_1 - \ln T_2}{\ln \tau_2 - \ln \tau_1} \quad (4.1)$$

В качестве моментов τ_1 и τ_2 принимаются значения τ при $w(\tau) = 0$. Поскольку определение (4.1) значения α является приближенным (ввиду неперIODичности процесса) целесообразно привлечь также другую процедуру. Например, можно использовать значение прогиба $w(\xi, \tau)$ в определенной точке ξ в разные моменты времени [31]. В соответствии с (3.2), (3.3) определяем амплитуду по длине струны и по времени $w(\xi, \tau)$. Моменты времени τ_1 и τ_2 соответствуют амплитудам w_1 и w_2 (рис. 4 (б)). Тогда

$$\alpha = 4 \frac{\ln w_1 - \ln w_2}{\ln \tau_2 - \ln \tau_1} \quad (4.2)$$

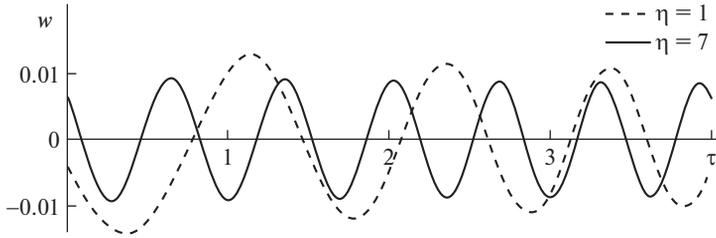


Рис. 5. Колебания предварительно растянутой струны ($\xi = 1/2$).

Из решения (3.2) прямой задачи получены: моментам $\tau_1 = 5.4933$, $\tau_2 = 8.5214$ соответствуют периоды $T_1 = 0.8542$, $T_2 = 0.6853$. По ним из (4.1) получаем $\alpha = 1.0034$ (вместо точного значения $\alpha = 1$). Пусть известны амплитуды $w_1 = 0.0100$, $w_2 = 0.0089$ и соответствующие моменты $\tau_1 = 5.2769$, $\tau_2 = 8.3488$. Тогда по формуле (4.2) $\alpha = 0.9999$. Объяснение большей погрешности (4.1) по сравнению с (4.2) состоит в том, что периоды T_1 и T_2 являются усредненными, в то время как величины w_1 и w_2 в (4.2) определяются более точно. Для давления $p = p_0 \tau^\alpha$ при $\tau = 5$ в первом случае имеем погрешность около 0.544% ($p = 5.027p_0$ вместо точного значения $5p_0$), во втором случае 0.023%. Погрешность уменьшается при уменьшении неперIODичности (с приближением показателя α к нулю).

5. Колебания предварительно растянутой струны. Рассмотрим случай предварительно растянутой струны при $\alpha = 1$. Из уравнения (2.6) следует

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_1^2} - \tau_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \tau_1 = \eta + \tau \quad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) имеет вид (3.2), (3.3), где вместо τ нужно подставить τ_1 (либо $\eta + \tau$). Входящие в них величины при $\alpha = 1$ равны: $\mu = 1/3$, $\Gamma(2/3) = 1.354$. Решение (3.2) при учете (3.3) приобретает вид:

$$w \approx W_1 \pi^{-\frac{2}{3}} 1.626 (\eta + \tau)^{\frac{1}{4}} \cos\left(z - \frac{\pi}{12}\right) \sin \pi \xi; \quad z = \frac{2\pi}{3} (\eta + \tau)^{\frac{3}{2}} \quad (5.2)$$

График этого решения в точке $\xi = 1/2$ при $W_1 = 0.02$ и различных значениях η дан на рис. 5.

Для определения параметра натяжения η может быть поставлена обратная задача. Положив $\tau_i = \tau_i + \eta$ в (5.2), находим:

$$\eta = \frac{T_1^2 \tau_1 - T_2^2 \tau_2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \eta = \frac{\tau_1 w_1^4 - \tau_2 w_2^4}{w_2^4 - w_1^4} \quad (5.3)$$

По найденному значению η может быть определено либо предварительное продольное перемещение u_0 (при известных данных E , p_0 , L , β)

$$u_0 = \frac{p_0 L \eta}{E(1 + \beta)}, \quad (5.4)$$

либо параметр первого поверхностного эффекта

$$\beta = \frac{\eta p_0 L}{E u_0} - 1 \quad (5.5)$$

Как во всякой обратной задаче, предъявляются повышенные требования к точности экспериментальных данных τ_1 , τ_2 , T_1 , T_2 , w_1 , w_2 , входящих в (4.1), (4.2), (5.3). То же самое относится к параметрам E , p_0 , L , входящим в (5.4) и (5.5). Отметим, в (5.5) имеется разность близких чисел.

Заключение. Приведенная постановка задачи отличается от обычной теории свободных колебаний струн тем, что учитываются два поверхностных эффекта. Первый из них, связанный различием упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема, приводит к изменению эффективной жесткости струны на растяжение, модуль упругости которой определяется безразмерным параметром β в (1.1).

Второй эффект характеризуется безразмерным параметром α , данным в (2.5). В зависимости от возрастания ($\alpha > 0$) или убывания ($\alpha < 0$) избыточного давления происходит увеличение или уменьшение эффективной жесткости и частот поперечных колебаний струны по сравнению с частотами, возбуждаемыми при давлении сборки системы струна–опоры ($\alpha = 0$). Без учета второго эффекта колебания струны могут быть только периодическими и обусловленными начальными условиями. Предложен способ определения параметра α изменения давления на поверхность струны по экспериментальным данным периодов и амплитуд колебаний в различные моменты времени. Разные формулировки соответствующей обратной задачи приводят к соотношениям (4.1), (4.2), позволяющим получать результаты с различной точностью.

Для многих материалов в литературе отсутствуют значения параметра первого поверхностного эффекта β . Их определение представляет очевидные сложности. Один из возможных способов определения параметра β (или величины E_s) состоит в решении обратной задачи для предварительно растянутой струны. Для этого служит формула (5.5). Если параметр β известен для материала, то в этом случае по формуле (5.4) может быть определена трудно измеряемая величина продольного перемещения.

Работа выполнена по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
2. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Phys. Rep.* 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
3. *Elnathan R., Kwiat M., Patolsky F., Voelcker N.H.* Engineering vertically aligned semiconductor nanowire arrays for applications in the life sciences // *Nano Today*. 2014. V. 9. № 2. P. 172–196.
4. *Guo L.J.* Nanoimprint lithography: methods and material requirements // *Adv. Mater.* 2007. V. 19. № 4. P. 495–513.
5. *Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanotribology and nanofabrication of MoO_3 structures by atomic force microscopy // *Science*. 1996. V. 272. № 5265. P. 1158–1161.
6. *Wong E., Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanobeam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes // *Science*. 1997. V. 277. № 5334. P. 1971–1975.
7. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // *Int. J. Solids Struct.* 1978. V. 14. № 6. P. 431–440.
8. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. 2000. V. 11. № 3. P. 139–147.
9. *Sharma P., Ganti S., Bhate N.* Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Appl. Phys. Lett.* 2003. V. 82. № 4. P. 535–537.
10. *He L.H., Lim C.W., Wu B.S.* A continuum model for size-dependent deformation of elastic films of nano-scale thickness // *Int. J. Solids Struct.* 2004. V. 41. № 3–4. P. 847–857.
11. *Hajjaj A.Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F.K., Younis M.I.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2020. V. 119. 103328.

12. *Lim C.W., He L.H.* Size-dependent non-linear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *Int. J. Mech. Sci.* 2004. V. 46. № 11. P. 1715–1726.
13. *Wu J.X., Li X.F., Tang A.Y., Lee K.Y.* Free and forced transverse vibration of nanowires with surface effects // *J. Vib. Control.* 2017. V. 23. № 13. P. 2064–2077.
14. *Link H.* Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv.* 1960. V. 31. № 3. P. 149–167.
15. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
16. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.* 1963. V. 1. № 6. P. 1458–1459.
17. *Ильгамов М.А.* Спектр частот проволочного микро- и нанорезонатора // *Докл. РАН.* 2020. Т. 494. № 1. С. 21–24.
18. *Белецкий В.В., Новикова Е.Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите // *Космич. исслед.* 1969. Т. 7. № 3. С. 377–384.
19. *Демьянов Ю.А., Кокорева Д.В., Малашин А.А.* Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах // *ПММ.* 2003. Т. 67. № 2. С. 273–283.
20. *Асланов В.С.* Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // *ПММ.* 2010. Т. 74. № 4. С. 582–593.
21. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* Влияние жесткости на поперечно-продольные движения музыкальных струн // *ПММ.* 2011. Т. 75. № 1. С. 95–100.
22. *Холодовский С.Е.* О движении полуограниченной струны с точечной массой на конце // *ПММ.* 2018. Т. 82. № 6. С. 751–756.
23. *Русских С.В., Шклярчук Ф.Н.* Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с устранением колебаний // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 4. С. 549–561.
24. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* О линейных поперечных колебаниях троса космического лифта // *ПММ.* 2020. Т. 84. № 5. С. 543–553.
25. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. С. 232–251.
26. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // *Акустич. ж.* 2015. Т. 61. № 6. С. 647–655.
27. *Ильгамов М.А., Ридель В.В.* Режимы разрывных колебаний в абсолютно гибкой нити // *Докл. РАН.* 1995. Т. 343. № 4. С. 478–481.
28. *Ридель В.В., Ильгамов М.А.* Нелинейные волны в абсолютно гибкой нити // *ПМТФ.* 1997. Т. 38. № 6. С. 139–146.
29. *Ильгамов М.А.* Скорость волны и спектр частот продольных колебаний растянутых нанопленок из интерметаллидов // *ФТТ.* 2015. Т. 57. № 5. С. 950–954.
30. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: МПО, 1996. 496 с.
31. *Утяшев И.М.* Анализ поперечных колебаний струны в зависимости от изменяющегося натяжения // *Вестн. Башкирского унив.* 2013. Т. 18. № 4. С. 973–977.

Non-Periodic Oscillations of Micro- and Nano-Strings in a Gaseous Medium

M. A. Ilgamov^{a,b,c,#} and I. M. Utyashev^{a,b,##}

^a Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC R.A.S, Ufa, Russia

^b Bashkir State University, Ufa, Russia

^c Institute of Mechanical Engineering. A.A. Blagonravova RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: ilgamov@anrb.ru

^{##}e-mail: utyashev@mail.ru

Oscillations of a micro- and nano-string with varying pressure in a gaseous medium are considered. In this case, two surface effects are taken into account. The first is due to the difference in elastic properties in the surface layer and in the bulk of the material. Depending on the material, the effective tensile stiffness may be greater or less than conventional stiffness. The second effect is due to the interaction of the pressure of the medium and the difference

of the areas of the convex and concave sides of the circular surface, which appears when the deviation from the straight line. These effects are determined by dimensionless parameters. The solution is determined depending on the given law of pressure change over time. An increase in pressure leads to a decrease in amplitude and an increase in the oscillation frequency. An increase in amplitude and a decrease in frequency are associated with vacuuming. In the inverse problem, the law of pressure change is determined, as well as the parameter of the first effect.

Keywords: micro- and nano-strings, gas medium, pressure change, transverse non-periodic oscillations, inverse problem

REFERENCES

1. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*, 2008, vol. 3, no. 1–2, pp. 20–27.
2. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Phys. Rep.*, 2011, vol. 503, no. 4–5, pp. 115–163.
3. *Elnathan R., Kwiat M., Patolsky F., Voelcker N.H.* Engineering vertically aligned semiconductor nanowire arrays for applications in the life sciences // *Nano Today*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 172–196.
4. *Guo L.J.* Nanoimprint lithography: methods and material requirements // *Adv. Mater.*, 2007, vol. 19, no. 4, pp. 495–513.
5. *Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanotribology and nanofabrication of MoO₃ structures by atomic force microscopy // *Science*, 1996, vol. 272, no. 5265, pp. 1158–1161.
6. *Wong E., Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanobeam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes // *Science*, 1997, vol. 277, no. 5334, pp. 1971–1975.
7. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // *Int. J. Solids Struct.*, 1978, vol. 14, no. 6, pp. 431–440.
8. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, no. 3, pp. 139–147.
9. *Sharma P., Ganti S., Bhate N.* Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Appl. Phys. Lett.*, 2003, vol. 82, no. 4, pp. 535–537.
10. *He L.H., Lim C.W., Wu B.S.* A continuum model for size-dependent deformation of elastic films of nano-scale thickness // *Int. J. Solids Struct.*, 2004, vol. 41, no. 3–4, pp. 847–857.
11. *Hajjaj A.Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F.K., Younis M.I.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2020, vol. 119, 103328.
12. *Lim C.W., He L.H.* Size-dependent non-linear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, vol. 46, no. 11, pp. 1715–1726.
13. *Wu J.X., Li X.F., Tang A.Y., Lee K.Y.* Free and forced transverse vibration of nanowires with surface effects // *J. Vibr. Control.*, 2017, vol. 23, no. 13, pp. 2064–2077.
14. *Link H.* Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv*, 1960, vol. 31, no. 3, pp. 149–167.
15. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
16. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 1458–1459.
17. *Ilgamov M.A.* The Frequency spectrum of a wire micro- and nanoresonator // *Dokl. Phys.*, 2020, vol. 65, pp. 308–311.
18. *Beletsky V.V., Novikova E.T.* On the relative motion of a bundle of two bodies in orbit // *Cosmic Res.*, 1969, vol. 7, no. 3, pp. 377–384. (in Russian)
19. *Dem'yanov Yu.A., Kokoreva D.V., Malashin A.A.* Mutual influence of transverse and longitudinal vibrations in musical instruments // *JAMM*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 273–283. (in Russian)
20. *Aslanov V.S.* The effect of the elasticity of an orbital tether system on the oscillations of a satellite // *JAMM*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 416–424. (in Russian)
21. *Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A.* The effect of stiffness on the transverse and longitudinal motions of a musical string: Commemorating the 100th anniversary of the birth of Kh.A. Rakhmatulin // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 65–68. (in Russian)

22. *Kholodovskii S.E.* On the Motion of a Semibounded String with a Point Mass Attached to the Free End // *Mech. of Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 266–270.
23. *Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N.* Movement of a Heavy Rigid Body Suspended on a Cable of Variable Length with Oscillation Elimination // *Mech. of Solids*, 2019, vol. 54, no 5, pp. 683–693.
24. *Sadov Y.A., Nuralieva A.B.* Linear Transverse Oscillations of the Space Elevator Cable // *Mech. of Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1185–1193.
25. *Akhtyamov A.M.* The Theory of Identification of Boundary Conditions and Its Applications (Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i yeye prilozheniya). Moscow: Fizmatlit, 2009. pp. 232–251. (in Russian)
26. *Akhtyamov A.M., Utyashev I.M.* Identification of boundary conditions at both ends of a string from the natural vibration frequencies // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 6, pp. 615–622.
27. *Ilgamov M.A., Ridel V.V.* Modes of discontinuous vibrations in an absolutely flexible thread // *Dokl. Phys.*, 1995, vol. 343, no. 4, pp. 478–481. (in Russian)
28. *Ridel V.V., Ilgamov M.A.* Nonlinear waves in an absolutely flexible fiber // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 38, no.6, pp. 936–942.
29. *Ilgamov M.A.* Wave velocity and frequency spectrum of longitudinal oscillations of stretched intermetallic nanofilms // *Phys. Solid State*, 2015, vol. 57, no. 5, pp. 962–966.
30. *Zaitsev V.F., Polyanin A.D.* Partial Differential Equations Handbook: Exact Solutions (*Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi: Tochnyye resheniya*). Moscow: MPO, 1996. 496 p. (in Russian)
31. *Utyashev I.M.* Analysis of transverse vibrations of a string depending on changing tension // *Vestn. Bashk. Univ.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 973–977. (in Russian)

УДК 514.8, 531.1, 531.8

ШАРНИРНЫЙ ЧЕТЫРЕХЗВЕННИК: ПРИВОДИМОСТЬ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

© 2022 г. М. Д. Ковалёв*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия***e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.

После доработки 13.08.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

Рассматривается идеальный плоский шарнирно-рычажный четырехзвенный механизм. Его конфигурационное пространство исследуется с точки зрения алгебраической геометрии. На этой основе проводится классификация конфигурационных пространств таких механизмов. Изучается связь передаточной функции механизма с приводимостью его конфигурационного пространства как алгебраического множества. Доказана теорема об однозначном с точностью до подобия определении шарнирного четырехзвенника с неприводимым конфигурационным пространством его передаточной функцией.

Ключевые слова: плоский шарнирный четырехзвенник, конфигурационное пространство, передаточная функция, приводимость алгебраического множества

DOI: 10.31857/S0032823522010064

1. Введение. Анализ кинематики шарнирных четырехзвенников, в частности, исследованию передаточной функции посвящено немало работ [1, 2]. В последнее время появились работы, исследующие приводимость конфигурационного пространства и использующие методы алгебраической геометрии [2–4]. Эти работы основаны на применении базисов Гребнера, дающих мощный инструмент исследования идеалов в кольцах многочленов над полем \mathbb{Q} рациональных чисел и его конечными расширениями. Метод связан с громоздкими вычислениями в пакетах символьной математики, которые невозможно проверить вручную. В данной работе с привлечением элементарных сведений из алгебраической геометрии путем простых рассуждений и вычислений проводится классификация четырехзвенных механизмов по геометрическим свойствам их конфигурационного пространства. На ее основе исследуется связь передаточной функции четырехзвенника с приводимостью его конфигурационного пространства.

Рассматриваем плоский шарнирный четырехзвенник с вращательными парами (шарнирами) p_i , $1 \leq i \leq 4$ (рис. 1). Пусть его закрепленные шарниры (обозначены на рис. 1 крестиками, свободные – кружочками) $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (1, 0)$, где координаты записаны в декартовой системе, которой мы будем пользоваться и впредь. Звенья (рычаги) четырехзвенника перенумеруем следующим образом: неподвижному звену p_1p_2 присвоим номер 0, звену p_1p_4 – номер 1, p_2p_3 – номер 2, p_4p_3 – номер 3. Зависимость $\psi = \psi(\varphi)$ углов, образуемых первым и вторым рычагами четырехзвенника и осью абсцисс, называют передаточной функцией четырехзвенника.

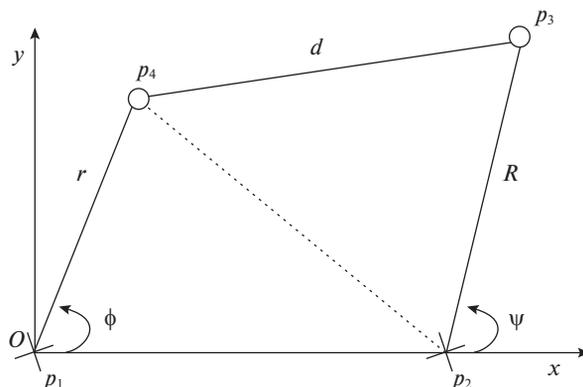


Рис. 1.

Мы решим вопрос: могут ли и когда различным четырехзвенникам отвечать одинаковые передаточные функции? Этот вопрос не так прост, как может показаться. Например, для двух различных шарнирных параллелограммов передаточная функция $\psi = \varphi$ одинакова. Но если непрерывно сдвинуть эти параллелограммы в антипараллелограммы, то передаточные функции станут различны. Они зависят от длины r первого рычага — боковой стороны параллелограмма: $\psi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{r-1}{r+1} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$. Мы исследуем связь передаточной функции с приводимостью как алгебраической кривой конфигурационного пространства четырехзвенника. Для четырехзвенников с неприводимым конфигурационным пространством будет доказана теорема о том, что для двух различных (с точностью до подобия) таких четырехзвенников передаточные функции различны.

Приведем определение конфигурационного пространства механизма (в ряде математических работ шарнирный механизм и его конфигурационное пространство определяются по другому) следуя [5–7]. Ключевым является понятие рычажного отображения, сопоставляющего положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов. Для нашего четырехзвенника с $p_4 = (x_4, y_4)$, $p_3 = (x_3, y_3)$ это отображение $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, задающееся формулами:

$$r^2 = x_4^2 + y_4^2, \quad R^2 = (x_3 - 1)^2 + y_3^2, \quad d^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 \quad (1.1)$$

Точку $\mathbf{d} = \{r^2, R^2, d^2\} \in \mathbb{R}^3$ называем *кинематической шарнирной схемой* (КШС), или сокращенно — кинематической схемой. Мы будем задавать КШС тройкой длин рычагов: $\{|p_1 p_4|, |p_2 p_3|, |p_3 p_4|\} = \{r, R, d\}$, записанной в приданном рычагам порядке. Выбрав единичное расстояние между закрепленными шарнирами, мы тем самым не рассматриваем геометрически подобных четырехзвенников с одинаковыми передаточными функциями.

Полный прообраз $K = F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении называем *конфигурационным пространством* КШС \mathbf{d} . Неодноточечную компоненту связности его мы называем *конфигурационным пространством шарнирного механизма*. Таким образом, шарнирный механизм есть подвижная конструкция, которую можно из одного положения непрерывно перевести в любое другое ее положение. Например, КШС $\left\{2, 2, \frac{1}{10}\right\}$

отвечает два шарнирных механизма с одной степенью свободы, отличающихся отражением относительно оси Ox .

Алгебраическим множеством называют множество общих нулей совокупности многочленов. Конфигурационные пространства КШС, будучи множествами решений полиномиальных систем уравнений, являются алгебраическими множествами. Алгебраическое множество называют *приводимым*, если оно является объединением двух меньших алгебраических множеств, и *неприводимым* в противном случае. Конфигурационное пространство шарнирного механизма, являясь, вообще говоря, частью алгебраического множества, не всегда есть алгебраическое множество. Назовем *алгебраическим замыканием* (часто его называют замыканием по Зарисскому) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ наименьшее алгебраическое множество из \mathbb{R}^n , содержащее M . И будем называть конфигурационное пространство K шарнирного механизма и сам механизм *приводимым* или *неприводимым*, если алгебраическое замыкание K приводимо, и соответственно, неприводимо.

Будем обозначать конфигурационное пространство четырехзвенника как: $K_i(r, R, d)$, где нижний индекс i различает механизмы с одной кинематической схемой $\{r, R, d\}$. Если конфигурационное пространство механизма состоит из нескольких неприводимых компонент (иногда их называют кинематическими модами механизма), то их будем дополнительно нумеровать верхним индексом.

2. Передаточная функция четырехзвенника. Нам удобно параметризовать окружности, по которым движутся шарниры p_3 и p_4 , через тангенсы половинных углов

$$u = \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \text{ и } t = \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}:$$

$$x_3 = 1 + R \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y_3 = R \frac{2u}{1+u^2}$$

Параметры t и u здесь изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, но точки окружностей $(-r, 0)$ и $(1-R, 0)$ не получаются ни при каких конечных значениях параметров. Вводя эту параметризацию, мы начинаем работать не с самим конфигурационным пространством, как мы его определили, а с бирационально изоморфным ему алгебраическим множеством. Но свойство приводимости не меняется при бирациональном изоморфизме.

Подставляя параметризации в уравнение (1.1) приходим к уравнению относительно t и u :

$$\frac{1}{(u^2 + 1)(t^2 + 1)} (Au^2 - 8Rrtu + C) = 0, \quad (2.1)$$

с достаточно громоздкими коэффициентами A, C , зависящими от r, R, d и t , и являющимися по t многочленами, вообще говоря, второй степени:

$$A = [(R - r - 1)^2 - d^2]t^2 + (R + r - 1)^2 - d^2$$

$$C = [(R + r + 1)^2 - d^2]t^2 + (R - r + 1)^2 - d^2$$

Решения уравнения (2.1) и дают передаточную функцию. Почти всегда их можно записать как корни числителя дроби, стоящей в левой части (2.1), — многочлена $P = P(u, t)$:

$$u = \frac{t \pm \sqrt{at^4 + bt^2 + c}}{ft^2 + g}, \quad (2.2)$$

где коэффициенты зависят от r, R и d . Два значения функции отвечают двум возможным углам ψ , для положений механизма с симметричной относительно прямой p_2p_4 двуповодковой группой $p_4p_3p_2$.

Однако, возможны и особые случаи. Ввиду того, что мы параметризовали не все точки окружностей, у исходной системы может оказаться решение $\psi \equiv \pi$, не зависящее от угла φ , которому отвечает значение $u = \infty$, не учитываемое формулой (2.2). Так оно и есть при $R = 1$, $d = r$. Этому решению отвечают положения четырехзвенника, в которых шарнир p_3 совпадает с p_1 . Угол φ меняется произвольно при постоянном ψ .

Иследуем эту возможность подробнее. В этом случае степень многочлена $P(u, t)$ по u должна быть ниже второй. Действительно, коэффициент A при u^2 в многочлене P тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда A есть нулевой многочлен от t . У него всего два ненулевых коэффициента при второй и нулевой степенях t :

$$a_2 = (-r - 1 - d + R)(-r - 1 + d + R), \quad a_0 = (r - 1 - d + R)(r - 1 + d + R)$$

При этом $a_0 - a_2 = 4r(R - 1)$, и поскольку $r > 0$, то $R = 1$. Подставляя $R = 1$ в $a_0 = 0$, получим $r^2 - d^2 = 0$, и $d = r$. Таким образом, получаем единственную кинематическую схему $\{r, 1, r\}$. Ей отвечает единственный механизм с приводимым конфигурационным пространством $K(r, 1, r)$. Оно состоит из двух компонент, на одной $K^1(r, 1, r)$ из которых $p_3 = (0, 0)$, а на другой $K^2(r, 1, r)$ координаты шарнира p_3 переменны. На $K^1(r, 1, r)$ передаточная функция постоянна: $\psi(\varphi) = \pi$, на $K^2(r, 1, r)$ она переменна и однозначна:

$$u = \frac{(r+1)t^2 + 1 - r}{2rt}, \quad \psi(\varphi) = \operatorname{arctg} \frac{(r+1)\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + 1 - r}{2r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

Приводимость конфигурационного пространства привела к существенно различным передаточным функциям для разных положений одного четырехзвенного механизма. Очевидно, необходимо исследовать все случаи приводимости конфигурационного пространства четырехзвенного механизма.

В случае произвольного поля \mathbb{K} критерием приводимости алгебраического множества $V \subset \mathbb{K}^n$ является существование в кольце $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных над полем \mathbb{K} таких многочленов f и g , что произведение $fg = 0$ на V , но ни один из этих многочленов не обладает таким свойством [8]. Будем опираться на лемму [8], справедливую для любого поля \mathbb{K} . Но далее мы будем работать лишь в полях \mathbb{R} и \mathbb{C} вещественных и комплексных чисел.

Лемма 1. Пусть $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ неприводимый, а $g(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ — произвольный многочлен. Если g не делится на f , то система уравнений $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ имеет разве лишь конечное число решений.

Над полем вещественных чисел неприводимый многочлен может задавать приводимое алгебраическое множество. Например, неприводимый над полем вещественных чисел многочлен $x^2(x-1)^2 + y^2$ задает приводимое алгебраическое множество, состоящее из двух точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Ведь каждая точка есть алгебраическое множество. Однако, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Если многочлен $f(x, y)$ положительной степени неприводим в поле \mathbb{C} комплексных чисел, то множество его нулей $V_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{C}^2$ неприводимо.

Заметим во-первых, что алгебраическое множество $V_{\mathbb{C}}(h)$ состоит из бесконечного числа точек. Действительно, если $f(x, y)$ содержит одночлен ax^k , $a \in \mathbb{C}$, $k > 0$, то в поле комплексных чисел при любом постоянном y_0 многочлен положительной степени

$f(x, y_0)$ имеет хотя бы один корень. Так же разбирается и случай наличия в $f(x, y)$ одночлена ay^k , $a \in \mathbb{C}$, $k > 0$. Если же таких одночленов в $f(x, y)$ нет, то многочлен $f(x, y_0)$ имеет ненулевую степень по x при любых кроме конечного числа значений y_0 . А значит, уравнение $f(x, y) = 0$ и в этом случае имеет бесконечно много решений.

Допустим теперь, что $V_{\mathbb{C}}(f)$ приводимо, и произведение $g(x, y)h(x, y)$ двух многочленов зануляется на $V_{\mathbb{C}}(f)$, но ни один из этих многочленов не зануляется на $V_{\mathbb{C}}(f)$. Поскольку $V_{\mathbb{C}}(f)$ содержит бесконечно много точек, то $g(x, y)h(x, y)$ по лемме 1 делится на $f(x, y)$. В силу неприводимости $f(x, y)$ на него делится хотя бы один из многочленов $g(x, y)$ и $h(x, y)$. Но тогда этот многочлен зануляется на $V_{\mathbb{C}}(f)$, что противоречит приводимости множества $V_{\mathbb{C}}(f)$. Лемма доказана.

Пусть вещественный многочлен $P(u, t)$ задает вещественную алгебраическую кривую $V_{\mathbb{R}}(P) \subset \mathbb{R}^2$, то есть одномерное алгебраическое множество.

Лемма 3. Если многочлен $P(u, t)$ неприводим над полем комплексных чисел, то кривая неприводима.

Многочлен $P(u, t)$ положительной степени, поскольку он задает кривую. В силу предыдущей леммы множество $V_{\mathbb{C}}(P)$ неприводимо. Допустим приводимость кривой $V_{\mathbb{R}}(P)$, тогда найдутся такие вещественные многочлены $R(u, t)$ и $Q(u, t)$, что произведение $RQ = 0$ на $V_{\mathbb{R}}(P)$, но ни один из этих многочленов не обладает таким свойством. Поскольку число точек в $V_{\mathbb{R}}(P)$ бесконечно, и $V_{\mathbb{C}}(P) \supset V_{\mathbb{R}}(P)$, то система уравнений $RQ = 0$, $P = 0$ имеет бесконечно много решений. По лемме 1 многочлен RQ делится на P . Следовательно, RQ зануляется на $V_{\mathbb{C}}(P)$, но ни один из многочленов R и Q не зануляется на $V_{\mathbb{R}}(P)$, а значит и на $V_{\mathbb{C}}(P)$. То есть, мы получили приводимость $V_{\mathbb{C}}(P)$ в противоречии лемме 2.

3. Исследование приводимости многочлена P . Разберем случаи приводимости $P(u, t)$ над полем комплексных чисел в зависимости от положительных параметров r, R, d . Заметим, что поскольку коэффициент $-8Rr \neq 0$, то степень $\deg P(u, t) \geq 2$. Как правило $\deg P(u, t) = 4$, но при некоторых значениях параметров она равна двум. Степень $P(u, t)$ по каждому из переменных u и t не превосходит двух.

I. Допустим $P(u, t) = Q(t)R(u, t)$, где многочлен $Q(t)$ зависит лишь от t . Если допустить $\deg Q(t) = 2$, то многочлен $R(u, t) = R(u)$ зависит лишь от u , иначе степень многочлена $P(u, t)$ по t была бы больше двух. Поскольку $P(u, t)$ содержит одночлен ut , то $R(u)$ содержит одночлен u . Но тогда произведение $Q(t)R(u)$ содержит член t^2u , которого нет в $P(u, t)$. Таким образом $\deg Q(t) = 1$, и можно считать $Q(t) = t + \beta$, $\beta \in \mathbb{C}$. Но тогда, поскольку $R(u, t)$ содержит первую степень u , то $\beta = 0$, ибо иначе $P(u, t)$ будет содержать моном u , которого в нем нет. Итак, коэффициенты $A, -8Rrt, C$ квадратного трехчлена $P(u, t)$ по u имеют общим множителем t . Свободные члены многочленов A и C от t равные соответственно

$$(R + r - 1)^2 - d^2 = b_A, \quad (R - r + 1)^2 - d^2 = b_C,$$

должны равняться нулю. Это дает $b_A - b_C = 4R(r - 1) = 0$, и поскольку $R > 0$, то $r = 1$. Подставляя $r = 1$ в $b_C = 0$, получим $R^2 - d^2 = 0$, и $R = d$. Таким образом, приходим к механизму $K(1, d, d)$ складывающегося четырехзвенника с конфигурационным пространством из двух неприводимых компонент. Здесь все подобно случаю, разобранному в предыдущем пункте.

II. Пусть $P(u, t) = Q(u)R(u, t)$, где многочлен $Q(u)$ зависит лишь от u . Если предположить $\deg Q(u) = 2$, то $R(u, t) = R(t)$, и мы приходим к уже разобранному случаю. В слу-

чае линейного многочлена $Q(u)$ получаем как и выше $P(u, t) = uR(u, t)$. В этом случае многочлен C должен быть нулевым. Но приравнивание его коэффициента при t^2 :

$$(R + r + 1)^2 - d^2 = (r + 1 + d + R)(r + 1 - d + R),$$

к нулю дает $d = r + 1 + R$, что отвечает ферме, а не механизму. Для механизмов этот случай приводимости не осуществляется.

III. Пусть $P(u, t)$ разлагается на два множителя, зависящих от обоих переменных: $P(u, t) = Q(u, t)R(u, t)$. Поскольку степень по переменному u $\deg_u P = 2$ и верно равенство $\deg_u QR = \deg_u Q + \deg_u R$, то $\deg_u Q = \deg_u R = 1$. То же самое верно и для степеней этих многочленов по t .

а) В случае $\deg P(u, t) = 4$ разложение имеет вид

$$(ut + au + bt + c)(fut + eu + gt + h)$$

Поскольку в $P(u, t)$ нет членов с u^2t и ut^2 , то $e = -fa$ и $g = -bf$. Поскольку в $P(u, t)$ нет членов с u и t , то

$$ah + ec = a(h - fc) = 0, \quad bh + gc = b(h - fc) = 0$$

И тогда, либо $a = b = 0$, и в этом случае:

$$P(u, t) = (ut + c)(fut + h)$$

Что приводит к

$$(R + r - 1 - d)(R + r - 1 + d) = 0, \quad (R + r + 1 - d)(R + r + 1 + d) = 0$$

Однако, второе равенство не может выполняться для механизма.

Следовательно, этот случай отпадает, и остается случай $h = fc$, и тогда

$$P(u, t) = f(ut + au + bt + c)(ut - au - bt + c)$$

Приравнивая коэффициенты, получаем систему уравнений:

$$f = (R - r - 1)^2 - d^2, \quad fc^2 = (R - r + 1)^2 - d^2, \quad fa^2 = -(R + r - 1)^2 + d^2$$

$$fb^2 = -(R + r + 1)^2 + d^2, \quad f(ab - c) = 4Rr$$

Возводя последнее равенство дважды в квадрат и подставляя при этом в него выражения для f , fc^2 , fa^2 , fb^2 из первых четырех равенств, приходим к равенству

$$R^2r^2d^2 = 0$$

Но это равенство у нас не выполняется.

б) Остается случай $\deg P(u, t) = 2$. Но тогда

$$(R - r - 1)^2 - d^2 = (R - r - 1 + d)(R - r - 1 - d) = 0$$

Случаю механизма отвечает лишь возможность $d = r + 1 - R$. После такой подстановки многочлен $\frac{1}{4}P(u, t)$ приобретает вид:

$$r(R - 1)u^2 + R(r + 1)t^2 - 2Rrut + R - r$$

Пусть он разлагается в произведение

$$(au + bt + c)(eu + gt + h)$$

Допустим, хотя бы один из свободных членов c , h не равен нулю. Поскольку $P(u, t)$ не содержит первых степеней u и t , то

$$ah + ec = 0, \quad bh + gc = 0$$

Эта однородная система линейных уравнений относительно неизвестных c, h имеет ненулевое решение, лишь если столбцы ее определителя пропорциональны. Но тогда квадратный трехчлен $r(R-1)u^2 + R(r+1)r^2 - 2Rrut$ является полным квадратом, что влечет равенство нулю его дискриминанта:

$$4R^2r^2 - 4r(R-1)R(r+1) = 4Rr(r+1-R) = 4Rrd = 0$$

Это при наших условиях невозможно. Таким образом, $c = h = 0$, откуда следует $R = r$ и $d = 1$. Что отвечает шарнирному параллелограмму.

Остается заметить, что во всех найденных случаях приводимости многочлена $P(u, t)$ над полем комплексных чисел он приводим и над полем вещественных чисел, и распадается в произведение множителей, определяющих вещественные алгебраические кривые. Конфигурационное пространство шарнирного параллелограмма $K(r, r, 1)$, $r \neq 1$ бирационально изоморфно кривой, задающейся уравнением $r(t-u)(rt-ru-t-u) = 0$, дельтоида $K(1, R, R)$, $R \neq 1$ — кривой $u(-Rt^2u + t^2u - 2Rt + Ru + u) = 0$, шарнирного ромба $K(1, 1, 1)$ — кривой $ut(u-t) = 0$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 4. Конфигурационное пространство шарнирного четырехзвеного механизма приводимо лишь в двух случаях: когда механизм — шарнирный параллелограмм, у нас $K(r, r, 1)$, либо когда это складывающийся механизм (дельтоид), у нас $K(r, 1, r)$ или $K(1, R, R)$ (ромб $K(1, 1, 1)$ является и параллелограммом и дельтоидом).

4. Классификация четырехзвенных механизмов. Перечислим все существенно различные с точки зрения геометрии конфигурационных пространств случаи КШС четырехзвенных механизмов, и отвечающих им механизмов. Эта классификация уточняет классификацию, приведенную в работе [5], заостряя внимание на случаях приводимости конфигурационного пространства. Ее легко представить наглядно, пользуясь рис. 2, 3.

На рис. 2, изображено множество C существенных КШС, то есть тех, которым отвечает хотя бы один шарнирник. Оно лежит в неотрицательном октанте координатной системы $OrRd$ и кроме координатных плоскостей ограничено плоскостями: $P_4 : r + R + d = 1$ со стороны вершины октанта, и $P_1 : -r - R + d = 1$; $P_2 : r - R - d = 1$; $P_3 : -r + R - d = 1$ с боков. На границе множества C лежат КШС, которым отвечают одна или две фермы. Внутри C лежат КШС, которым отвечают механизмы. Ранг дифференциала рычажного отображения падает лишь в тех положениях четырехзвеного механизма, где все его шарниры оказываются на одной прямой. Мы называем такие механизмы и их КШС распрямляемыми. Их КШС лежат в плоскостях $P_5 : r + R - d = 1$, $P_6 : -r + R + d = 1$, $P_7 : r - R + d = 1$ рис. 2, проходящих через точку $\mathbf{d}_0 = (1, 1, 1)$ и стороны треугольной грани множества C . На рис. 3 показаны сечения множества C плоскостями, параллельными плоскости P_4 ; первое — “ниже” точки \mathbf{d}_0 , второе — “выше”. Плоскости P_5, P_6, P_7 разбивают C на 8 частей (областей типов КШС), пронумерованных на рис. 3 римскими цифрами с индексами. Механизмы, отвечающие КШС, лежащей внутри области типа, являются нераспрямляемыми и правильными, а следовательно неприводимыми. Кривошипом будем называть рычаг механизма, совершающий полный оборот.

Опуская КШС, которым отвечают фермы, получим следующую классификацию.

I. Нераспрямляемые случаи. Конфигурационное пространство КШС правильно, следовательно не содержит особых точек.

a) Кинематическим схемам, лежащим в областях I, III₁, III₂, III₃ типов, отвечает по одному неприводимому шарнирному механизму с конфигурационным пространством гомеоморфным окружности. Эти механизмы не имеют кривошипов.

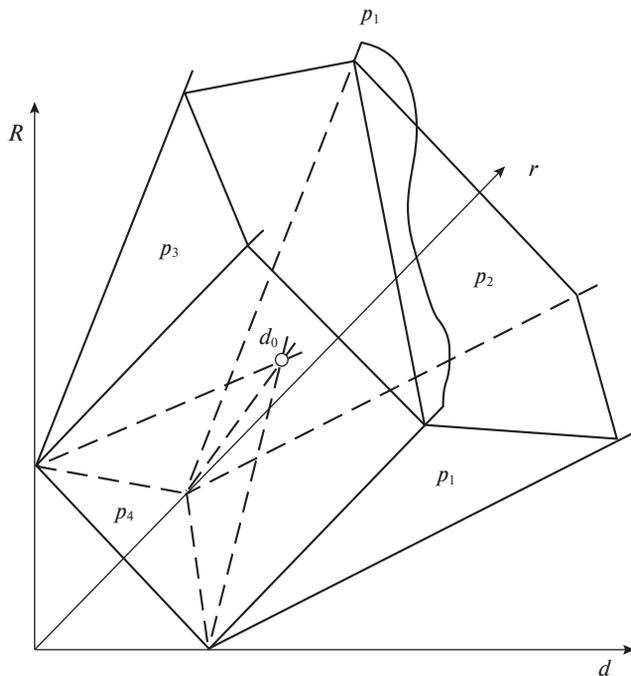


Рис. 2.

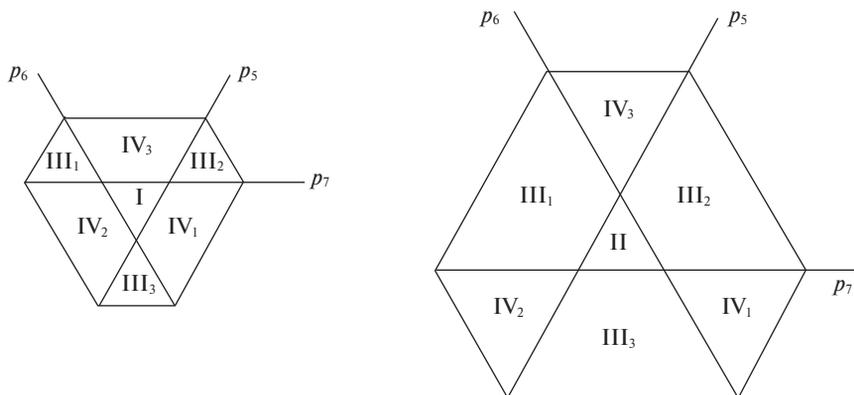


Рис. 3.

б) Кинематическим схемам из областей II, IV₁, IV₂, IV₃ отвечают по два неприводимых механизма с конфигурационными пространствами гомеоморфными окружностям. У механизмов из области II все три рычага кривошпы, у механизмов из остальных областей есть по одному кривошпы.

II. Распрямляемые случаи, им отвечают КШС, лежащие внутри в плоскостях P₅, P₆, P₇. Всем этим КШС отвечает один неправильный шарнирный механизм.

а) Конфигурационное пространство механизма неприводимо, если его КШС не лежит в пересечении плоскостей, то есть на прямых $\{R = r, d = 1\}$, $\{r = 1, R = d\}$ и $\{r = d, R = 1\}$. Конфигурационное пространство механизма гомеоморфно букету двух окружностей, то есть паре окружностей, склеенных в одной точке. Можно выделить 12 типов таких механизмов, отвечающих областям, вырезаемым в каждой из плоскостей P_i , $i = 5, 6, 7$ остальными плоскостями. Мы не будем их перечислять.

б) Конфигурационное пространство механизма приводимо $\{R = r, d = 1\}$, $\{r = 1, R = d\}$ или $\{r = d, R = 1\}$.

б1) Параллелограмм: $\{R = r, d = 1\}$, но $r \neq 1$. Конфигурационное пространство K состоит из пары неприводимых компонент: одна (K^1) отвечает параллелограммам, другая (K^2) – антипараллелограммам. Топологически K представляет собой две окружности, склеенные в двух точках. Для компоненты имеется два кривошипа. Для компоненты антипараллелограмма имеется два кривошипа при $r < d$, и три кривошипа при $r > d$. В случае $r < d$ механизм K имеет всего два кривошипа.

б2) Дельтоид: $\{r = 1, R = d\}$ но $d \neq 1$, или $\{r = d, R = 1\}$, но $r \neq 1$. Конфигурационное пространство состоит из пары неприводимых компонент: одна K^1 отвечает положениям механизма с остановившимся свободным шарниром, совпавшим с закрепленным, другая K^2 – положениям без остановившихся шарниров. Топологически также представляет собой две окружности, склеенные в двух точках. Имеется два кривошипа для компоненты K^1 . Для компоненты K^2 имеется два кривошипа при $r < 1$, и три кривошипа при $r > 1$. В случае когда пара рычагов меньшей длины имеет длину меньшую единицы механизм имеет всего два кривошипа.

б3) Ромб: $r = R = d = 1$. Конфигурационное пространство состоит из трех неприводимых компонент: две из которых K^1, K^2 отвечают положениям механизма со свободным шарниром, совпавшим с закрепленным, третья K^3 – ромбическим положениям (без совпавших шарниров). Топологически представляет собой три окружности, попарно склеенные в трех точках так, что в разных точках склеиваются разные пары окружностей. Имеется по два кривошипа для каждой из компонент. Для механизма в целом все три подвижных рычага кривошипы.

5. Теорема о единственности четырехзвенника с данной передаточной функцией.

Теорема 1. Пусть $K(r, R, d)$ неприводимый четырехзвенный механизм, тогда для любого четырехзвенника с единичным расстоянием между закрепленными шарнирами и набором $\{r', R', d'\}$ длин рычагов, отличным от $\{r, R, d\}$, на произвольном интервале изменения угла φ передаточная функция $\psi' = \psi'(\varphi)$ четырехзвенника $K(r', R', d')$ отлична от передаточной функции $\psi = \psi(\varphi)$ четырехзвенника $K(r, R, d)$.

Конфигурационное пространство $K(r, R, d)$ бирационально изоморфно компоненте связности кривой $P(u, t) = 0$, где многочлен $P(u, t)$ неприводим. Если конфигурационное пространство четырехзвенника $K(r', R', d')$ изоморфно кривой $P'(u, t)$, то передаточные функции могут совпадать на интервале, лишь если система уравнений $P(u, t) = 0, P'(u, t) = 0$ имеет бесконечное число решений. Вследствие леммы 1 это возможно, лишь если многочлен $P'(u, t)$ делится на $P(u, t)$. Поскольку $\deg P'(u, t) \leq \deg P(u, t)$, это возможно лишь в случае $P'(u, t) = aP(u, t)$, $a \in \mathbb{R} \setminus 0$. Доказательство нашей теоремы завершает следующая лемма.

Лемма 5. Пусть передаточная функция четырехзвенника $K(r, R, d)$ задается неприводимым многочленом $P(u, t)$, а передаточная функция четырехзвенника $K(r', R', d')$ – многочленом $P'(u, t) = aP(u, t)$, $a \in \mathbb{R} \setminus 0$, тогда $r' = r, R' = R, d' = d$.

Приравнявая нулю коэффициенты многочлена $F = P'(u, t) - aP(u, t)$, получаем систему уравнений на длины рычагов. Пусть k_{ij} — коэффициент при $u^i t^j$ в F . Тогда:

$$\begin{aligned} k_{11} = 8(aRr - R'r') = 0, \quad 2(k_{00} - k_{02}) - k_{11} = -8aR + 8R' = 0 \\ 2(k_{00} - k_{20}) - k_{11} = 8ar - 8r' = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в первое уравнение R' и r' , выраженные через R и r из двух последних, получим:

$$8aRr(a - 1) = 0,$$

откуда $a = 1$. Теперь два последних уравнения дают $R' = R$ и $r' = r$. Подставляя эти значения в k_{00} получаем

$$(d - d')(d + d') = 0$$

Таким образом, и $d' = d$, и лемма доказана.

Еще проще доказывается, что передаточные функции антипараллелограммов и передаточные функции дельтоидов на компоненте с несовпадающими шарнирами также при заданных закрепленных шарнирах однозначно определяются длинами их рычагов. Передаточная функция дельтоида с совпавшими шарнирами не зависит от длины вращающихся рычагов. Но здесь по существу есть лишь одна постоянная функция. В случае параллелограмма прямая и обратная передаточные функции совпадают и не зависят от длин боковых рычагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hayes J., Husty M., Pfulner M.* Input-output equation for planar four-bar linkages // in: Springer Proc. in Adv. Robotics. 2018. P. 12–19.
2. *Husty M., Pfulner M.* An algebraic version of the input-output equation of planar four-bar mechanisms // Adv. in Intell. Syst. & Comput. 2018. V. 809. P. 746–757.
3. *Piipponen S., Muller A., Hyry E., Tuomela J.* Application of intersection theory to singularity and motion mode analysis of mechanisms // Proc. 7th Int. Workshop on Comput. Kinem. at Futuroscope-Poitiers, France, 2017. P. 508–515.
4. *Arponen T., Piipponen S., Tuomela J.* Kinematical analysis of Wunderlich mechanism // Mech. & Machine Theory. V. 70. 2013. P. 16–31.
5. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.
6. *Ковалёв М.Д.* Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностр. 2001. № 4. С. 33–51.
7. *Ковалёв М.Д.* Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, 2019. 256 с.
8. *Шафаревич И.П.* Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.

Four-bar Linkage: Reducibility of the Configuration Space and Transfer Function

M. D. Kovalev^{a, #}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru*

An ideal planar four-bar linkage with rotating joints is considered. Its configuration space is studied from the algebraic geometry point of view. On this basis, we classify configuration spaces of such mechanisms. The relationship between the transfer function of a mechanism and the reducibility of its configuration space as an algebraic set is studied. We prove a theorem on the unique up to similarity determination of a four-bar mechanism with an irreducible configuration space by its transfer function.

Keywords: planar four-bar linkage, configuration space, transfer function, reducibility of an algebraic set

REFERENCES

1. *Hayes J., Husty M., Pflurner M.* Input-output equation for planar four-bar linkages // in: Springer Proc. in Adv. Robotics, 2018, pp. 12–19.
2. *Husty M., Pflurner M.* An algebraic version of the input-output equation of planar four-bar mechanisms // Adv. in Intell. Syst. & Comput., 2018, vol. 809, pp. 746–757.
3. *Piipponen S., Muller A., Hry E., Tuomela J.* Application of intersection theory to singularity and motion mode analysis of mechanisms // Proc. 7th Int. Workshop on Comput. Kinem. at Futuroscope-Poitiers, France, 2017, pp. 508–515.
4. *Arponen T., Piipponen S., Tuomela J.* Kinematical analysis of Wunderlich mechanism // Mechanism & Machine Theory, 2013, vol. 70, pp. 16–31.
5. *Kovalev M.D.* Geometric theory of hinged devices // Rus. Acad. Sci. Izv. Math., 1995, vol. 44, no. 1, pp. 43–68.
6. *Kovalev M.D.* Questions of geometry of hinged devices and schemes // Vestn. MGTU, Ser. Mashinost., 2001, no. 4, pp. 33–51. (in Russian)
7. *Kovalev M.D.* Geometric Questions of Kinematics and Statics. Moscow: Lenand, 2019. 256 p.
8. *Shafarevich I.R.* Foundations of Algebraic Geometry. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1988.

УДК 532.49

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ, СООБЩАЮЩЕЙСЯ С ПЛАСТОМ, ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ ГРП

© 2022 г. Р. А. Башмаков^{1,2,*}, Д. А. Насырова^{1,3,**}, В. Ш. Шагапов^{1,***}

¹ Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

² Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

³ Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*e-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru

**e-mail: dinasyrova@mail.ru

***e-mail: Shagapov@rambler.ru

Поступила в редакцию 02.06.2021 г.

После доработки 12.11.2021 г.

Принята к публикации 25.11.2021 г.

В работе проводится анализ собственных колебаний столба жидкости в нефтяной скважине, инициируемых гидроударом с учетом фильтрационных течений вблизи забоя скважины и по вертикальной трещине ГРП. Изучены зависимости частоты, коэффициента затухания собственных колебаний давления от значений проницаемости пласта и трещины ГРП. Проведено сравнение частотных характеристик, коэффициента затухания, декремента затухания при наличии и отсутствии трещины ГРП. Показана возможность практического применения полученных результатов.

Ключевые слова: собственные колебания жидкости, гидроразрыв пласта, нефтяная скважина, частота колебаний, гидроудар, стоячие волны

DOI: 10.31857/S0032823522010027

1. Введение. Одной из кардинальных мер, приводящих к существенному изменению дебита скважины, является гидроразрыв пласта (ГРП) [1]. При этом возникают задачи определения качества гидроразрыва, геометрии трещин, изменения коллекторских характеристик.

Представляется, что эффективным и удобным с точки зрения технической реализации способом определения качества перфорации, параметров трещины ГРП является способ, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине. При этом период колебаний, а также, особенно, интенсивность затухания колебаний будут определяться не только протяженностью столба жидкости в скважине, её диаметром и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами образованных трещин ГРП). Колебания могут инициироваться резким открытием или закрытием скважины (гидроударом). При этом время (период инициирования), должно быть сопоставимо со временем прохождения акустическим сигналом расстояния порядка протяженности столба жидкости в скважине. Если этот промежуток будет короче, чем время пробега акустического сигнала, то образуется одиночный импульсный сигнал, распространяющийся в скважине с отражением на ее границах.

Волны давления, возникающие при гидроударе, в научной литературе рассматриваются в основном с негативной точки зрения: изучаются разрушительные последствия и способы их предотвращения.

В работе [2] предложен метод гидравлического импедансного тестирования, идея которого заключается в интерпретации фактического изменения гидравлического сопротивления между стволом скважины и открытой трещиной ГРП. Для этого искусственно создается импульс давления в скважину и анализируется отраженный сигнал.

Волны Стоунли, излучаемые источником, и воспринимаемые приемником, расположенными в скважине рассматриваются в статье [3]. Импульс передается по трубе и обсадной колонне. Ствол скважины моделируется, как линия электропередачи с потерями, трещина моделируется, как сопротивление и емкость.

В [4] для моделирования процесса изменения давления в результате гидроудара объединили уравнение неразрывности и сохранения импульса в стволе скважины с представлением трещины ГРП в виде цепи с сопротивлением, емкостью и индуктивностью (контуром). Изменение емкости изменяет период колебаний, сопротивление влияет на амплитуду и скорость затухания колебаний, индуктивность также влияет на период. В этой работе также выведены уравнения, связывающие эти параметры с размерами трещины и ее коллекторскими характеристиками.

В работе [5] приведены результаты полевых измерений изменения давления в различных точках скважины при резком изменении скорости потока жидкости. Скважинные датчики фиксировали изменение давления в зависимости от времени со скоростью 100 проб в секунду. При этом вид полученных осциллограмм свидетельствует, что они соответствуют собственным колебаниям столба жидкости. В работе [6] предлагается математическая модель, описывающая фазовые и амплитудные характеристики волнового пакета, проведено сравнение численных расчетов, полученных на основе модели с данными работы [5]. Граничные условия на нижнем конце скважины учитывают либо ламинарный, либо турбулентный режим течения, связанный с трением в перфорационных каналах.

Впервые в работе [7] изучены собственные затухающие колебания столба жидкости в скважине при более полном учете фильтрационных течений в призабойной зоне, являющейся однородной пористой, проницаемой средой. Настоящая статья является продолжением и обобщением работы [7] при наличии трещины ГРП. Таким образом, здесь проводится анализ собственных колебаний столба жидкости с учетом фильтрационных течений вблизи забоя скважины и по вертикальной трещине, полученной путем гидроразрыва пласта. Изучены зависимости частоты, коэффициента затухания колебаний давления от значений проницаемости пласта и трещины ГРП. Установлено, что трещина в пласте кардинально меняет параметры собственных колебаний.

В работе [8], на основе обобщения квазиодномерной модели (см. [9]), Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН – модели [10, 11]), рассматриваются колебания давления на устье и забое скважины при прекращении подачи жидкости, приведены также промысловые данные показаний манометров реальной скважины длиной 2600 м. В [8] фиксируемые колебания давления объясняются собственными колебаниями трещины ГРП.

В настоящей же работе рассматриваются собственные колебания столба жидкости в скважине. При этом полагается, что амплитуда колебаний достаточно слабая, поэтому процессы, возникающие в системе “скважина–пласт” не влияют на фильтрационные характеристики в призабойной зоне. Отметим также, что сравнение и анализ теоретических результатов работы [8] с опытными данными показывают удивительно хорошее их совпадение в плане определения частот колебаний давления, а также коэффициентов затухания этих колебаний. В разделе 4 будут приведены наши оценки параметров колебаний, показывающие соответствие наблюдаемых колебаний собственным колебаниям столба жидкости в скважине, описываемым в настоящей рабо-

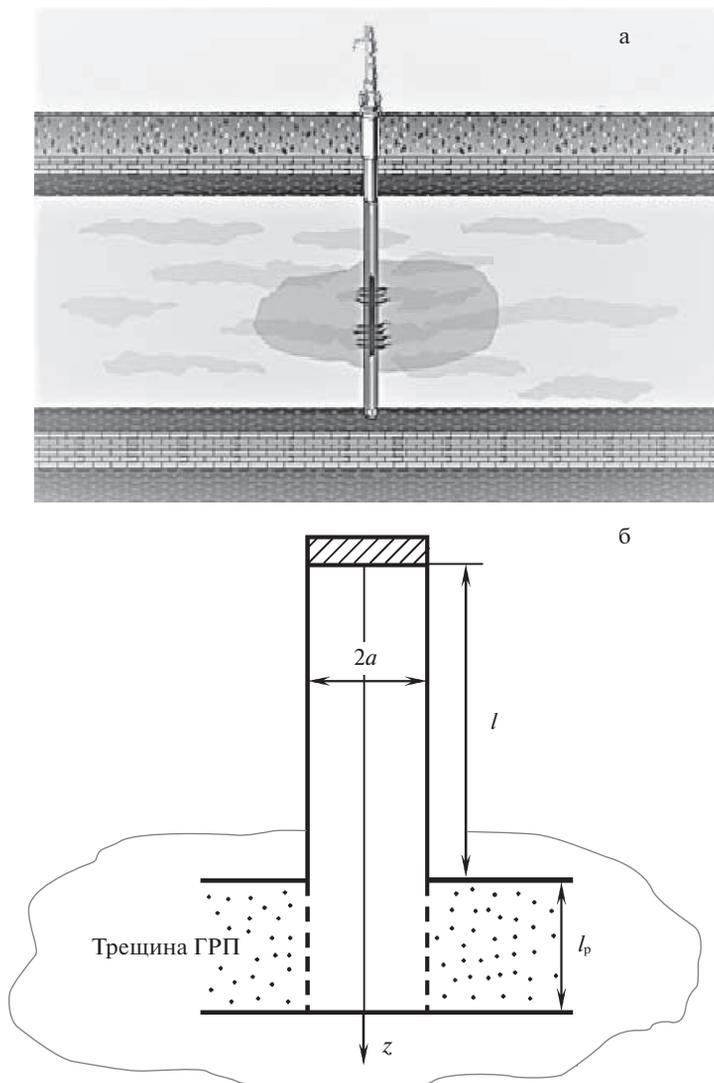


Рис. 1. Схема скважины с трещиной ГРП.

те. Роль трещин ГРП проявляется лишь в обеспечении хорошей фильтрационной проводимости.

2. Основные уравнения. Рассмотрим систему “вертикальная скважина–трещина ГРП–пласт” (рис. 1). Предполагается, что трещина вертикальная, симметричная, скважина, имеющая радиус a через перфорированный участок длины l_p сообщается с трещиной и, окружающим трещину и скважину, пористым, проницаемым пластом. Будем учитывать радиальное течение между скважиной и пластом и течение по трещине, а также линейное течение между трещиной и пластом (см. рис. 1б).

Примем, что в исходном состоянии жидкость, находящаяся в системе “скважина–пласт” находится в покое, т.е. течение в вертикальной скважине и горизонтальном

пласте отсутствует. Кроме того, протяженность столба жидкости в закрытом участке скважины l значительно превышает открытый ее участок протяженностью l_p ($l \gg l_p$).

Ось Oz направим вертикально вниз, начало координат поместим на верхнюю границу столба жидкости.

Запишем для жидкости, движущейся в скважине уравнения сохранения масс и импульсов для возмущений плотности ρ , давления P и скорости w в линеаризованном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{2\sigma}{a} \quad (0 < z < l) \\ \sigma &= \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial t}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{P}{C^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь C – скорость звука в жидкости, σ – касательное напряжение в жидкости на поверхности стенки скважины [12–14], μ и ν – динамическая и кинематическая вязкости жидкости. Принятое выражение для касательных напряжений означает, что при рассматривании собственных колебания столба жидкости в скважине влияние вязкости проявляется лишь в тонком слое вблизи стенки скважины, значительно меньшем, чем радиус скважины. Оценка толщины этого слоя может быть определена, как $\sqrt{\nu T}$, где T – период колебаний и примерно составляет для воды 1 мм, для нефти – 3 мм.

Выражение для силы вязкого трения, принятого в виде (2.1) обычно называют силой Бассе [12]. Эта сила играет важную роль в акустических задачах для газовзвесей при высоких частотах, когда вязкость проявляется в тонких слоях вблизи твердых частиц. Здесь отметим одно примечательное свойство этой силы: в некоторых промежутках времени при колебательных движениях частиц относительно несущей фазы, эта сила может быть сонаправлена относительно скорости, т.е. колебания относительной скорости силы вязкого течения происходят не в одной фазе. Аналогичный эффект имеет место при колебаниях газового пузырька в жидкости. В этом случае за счет появления температурных “ям” в газе вблизи поверхности пузырька тепловой поток может быть направлен внутрь пузырька, хотя средняя температура газа будет выше температуры окружающей жидкости [12, 13].

Зависимость возмущений плотности и давления от значений при гидростатическом распределении принята в акустическом приближении. Нижний индекс (0) означает, что значения параметра отнесены к невозмущённому состоянию.

Будем полагать, что на верхней границе течение столба жидкости ограничено неподвижным поршнем. Тогда граничное условие при $z = 0$ может быть записано в виде

$$w(t, 0) = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку протяженность l_p открытого участка скважины $l < z < l + l_p$ значительно меньше протяженности закрытого участка $0 < z < l$, то можем принять, что возмущение давления в открытом участке однородное. Поэтому в качестве граничного условия для системы (2.1) при $z = l$ примем

$$P(l, t) = P^{(l)}(t) \quad (2.3)$$

При этом $P^{(l)}(t)$ само является неизвестной функцией, следовательно, выражение (2.3) не замыкает систему граничных условий для (2.1).

Еще одно граничное условие следует из закона сохранения массы на открытом участке. Пусть $w(l, t) = w^{(l)}(t)$ при $z = l$. Тогда, с учетом однородности возмущений

давления в призабойной зоне скважины, можем записать следующее уравнение, следующее из закона сохранения масс:

$$\pi a^2 l_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \pi a^2 \rho_0 w^{(l)} - 2\pi a l_p \rho_0 u_{pa} - 2d_f l_p \rho_0 u_{f0} \quad (2.4)$$

Здесь a – радиус скважины, u_{pa} , u_{f0} – скорости фильтрации жидкости в окружающую проницаемую горную породу через стенку открытого участка скважины и в трещину, шириной d_f .

Для определения значений u_{pa} и u_{f0} , в свою очередь, необходимо рассмотреть внешнюю, от открытого участка скважины, фильтрационную задачу в пласте и в трещине. Поэтому основное уравнение упругого режима фильтрации для давления P_p в пласте вокруг скважины запишется, как

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_p}{\partial r} \right), \quad \varkappa_p = \frac{k_p \rho_0 C^2}{m_p \mu} \quad (l < z < l + l_p, \quad a < r < \infty) \quad (2.5)$$

где r – расстояние от оси скважины, k_p – проницаемость пласта. При граничных условиях на границе “скважина–пласт” и на большом удалении от скважины

$$P_p|_{r=a} = P^{(l)}(t) \quad \text{и} \quad P_p|_{r=\infty} = 0 \quad (2.6)$$

Тогда скорость фильтрации через стенку скважины будет определяться, согласно закону Дарси, как

$$u_{pa} = u_p|_{r=a} = -\frac{k_p}{\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (2.7)$$

Фильтрация флюида по трещине и в пласте описывается системой уравнений (см. [15–17]):

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\varkappa_p}{d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty) \quad (2.9)$$

Здесь $P_f = P_f(x, t)$ – давление в трещине, $P_p = P_p(x, y, t)$ – давление в пласте (координата y отсчитывается от стенки трещины), $\varkappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ ($i = f, p$) – коэффициент

пьезопроводности. В уравнении (2.8) второе слагаемое в правой части отвечает за фильтрацию флюида между стенками трещины и пластом. В работе [18] показано, что система уравнений (2.8)–(2.9) может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению, описывающему динамику давления в трещине:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} - 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\varkappa_p}{d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \varkappa_p (t - \tau)}} \quad (2.10)$$

Кроме того, в этой же работе показано, если характерные времена удовлетворяют условию $\tilde{t} \gg t_*$ $\left(t_* = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_f}{m_p} \right)^2 \frac{d_f^2}{\varkappa_p} \right)$, то слагаемое в левой части (2.10), отвечающее за упругость флюида в трещине несущественно. В рассматриваемой задаче харак-

терным временем является период собственных колебаний, и оно составляет обычно несколько секунд, и указанное условие для времен выполняется.

Поэтому в дальнейшем вместо (2.10) будем пользоваться упрощенным уравнением

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} = A_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad \left(A_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \sqrt{\frac{\alpha_p}{\alpha_f}} \right) \quad (2.11)$$

Согласно закону Дарси имеем

$$u_{f0} = -\frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (2.12)$$

С учетом (2.7), (2.12) и уравнения состояния жидкости (2.1) из (2.4) следует

$$\frac{1}{\rho_0 C^2} \frac{\partial P^{(l)}}{\partial t} = \frac{w^{(l)}}{l_p} + \frac{2k_p}{a\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} + \frac{2d_f k_f}{\pi a^2 \mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}$$

3. Решение в виде стоячих волн. Рассмотрим, в рамках выше представленных уравнений, задачу о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Будем искать решение уравнений (2.1) в комплексном виде:

$$P = A^{(P)}(z)e^{i\omega t}, \quad w = A^{(w)}e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

где $\omega = \Omega + i\delta$ комплексная частота собственных колебаний, причем действительная часть $\text{Re } \omega = \Omega$ отвечает за период колебаний $T = 2\pi/\Omega$, а мнимая часть $\text{Im } \omega = \delta$ – за интенсивность затухания.

Подставляя (3.1) в систему (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{C^2} A^{(p)} + \rho_0 \frac{d}{dz} A^{(w)} &= 0 \\ \rho_0 i\omega A^{(w)} + \frac{d}{dz} A^{(p)} &= -2 \frac{\mu i\omega A^{(w)} e^{-i\omega t}}{a\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ после очевидных замен приводит к интегралам Френеля (см. [19])

$$\int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{2e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} (\cos \xi^2 - i \sin \xi^2) d\xi = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - i)$$

Таким образом, из (3.2) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{i\omega}{\rho_0 C^2} A^{(P)} + \frac{d}{dz} A^{(w)} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 i\omega(1+2/y)} \frac{d}{dz} A^{(P)} + A^{(w)} = 0, \quad y = (i\omega a^2/\nu)^{1/2} \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.2), исключая $A^{(w)}$, получим

$$\frac{d^2 A^{(P)}}{dz^2} + K^2 A^{(P)} = 0 \quad (K^2 = (1+2/y)\omega^2/C^2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A^{(P)} = c_1 \cos(Kz) + c_2 \sin(Kz) \quad (3.4)$$

Из граничного условия (2.2) $w = 0$ при $z = 0$, следует $A^{(w)}(0) = 0$. Поэтому постоянная c_2 должна равняться нулю ($c_2 = 0$). Следовательно, для $A^{(P)}$ и $A^{(w)}$ (с учетом второго уравнения из (3.3) будем иметь

$$A^{(P)} = c_1 \cos(Kz), \quad A^{(w)} = i \frac{c_1}{\rho_0} \frac{K \sin(Kz)}{\omega(1 + 2/y)}$$

При $z = l$ для закона изменения $P^{(l)}$ и $w^{(l)}$ находим

$$P^{(l)} = P|_{z=l} = c_1 \cos(Kl) \quad \text{и} \quad w^{(l)} = w|_{z=l} = -i \frac{c_1}{\rho_0} \frac{K \sin(Kl)}{\omega(1 + 2/y)} e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

В призабойной зоне должно удовлетворяться граничное условие (2.6). Для нахождения градиента давления на стенке открытого участка скважины найдем решение уравнений (2.5) и (2.8), соответствующее граничным условиям

$$P_p|_{r=a} = P_f|_{x=0} = P^{(l)} = c_1 \cos(Kl) e^{i\omega t}, \quad P_p \rightarrow 0, \quad P_f \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x \rightarrow \infty$$

Решение (2.5) ищем в виде

$$P_p = A_p^{(P)}(r) e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad P_f = A_f^{(P)}(x) e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (2.5) и (2.8), получим

$$q^2 A^{(P)}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{d}{dr} A^{(P)}(r) \right), \quad \frac{d^2 A_f^{(P)}}{dx^2} + K_f^2 A_f^{(P)} = 0, \quad (3.7)$$

здесь $q = \sqrt{i\omega/\alpha_p}$, $K_f^2 = A_f \sqrt{i\omega}$.

Отметим, что из представленного выражения для комплексного волнового вектора K_f следует выбирать значение, находящееся в четвертом квадранте ($K_f = k_f - i\beta_f$, $\beta_f > 0$).

Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее граничным условиям (3.5), запишется как (см. [20])

$$A^{(P)}(r) = A^{(P)}(l) \frac{K_0(rq)}{K_0(aq)}, \quad A_f^{(P)} = A_p^{(P)} e^{-iK_f x} \quad (3.8)$$

Здесь $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi$ – функция Макдональда нулевого порядка, $K_f = A_f \sqrt{i\omega}$.

Подставляя выражения (3.6) в (2.11) с учетом (3.7), получим следующее характеристическое уравнение для определения ω в виде

$$\operatorname{tg}(Kl) = \left(-\frac{2m_p}{z_p} \frac{K_1(z_p)}{K_0(z_p)} - \frac{2m_f d_f i K_f}{\pi z_f^2} - 1 \right) Kl_p, \quad q = \sqrt{i\omega/\alpha_p}$$

$$z_p = a\sqrt{i\omega/\alpha_p}, \quad z_f = a\sqrt{i\omega/\alpha_f}$$

Здесь $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядка [20].

4. Собственные частоты для идеального резонатора. Будем пренебрегать проявлениями вязкости в скважине ($\nu = 0$). Относительно призабойной зоны рассмотрим два предельных случая.

Первый, когда предполагается, что протяженность открытого участка скважины равна нулю ($l_p = 0$), второй, когда считаем, что пласт имеет бесконечную проницае-

мость ($k_p \rightarrow \infty$, $\varkappa_p \rightarrow \infty$). В этих двух случаях мы от уравнения (3.7), соответственно, придем к уравнениям

$$\operatorname{tg}(\omega l/C) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}(\omega l/C) = 0 \quad (4.1)$$

Отсюда для собственных частот будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_{(n)}^{(0)} &= \frac{\pi n C}{l}, \quad \delta_{(n)}^{(0)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \Omega_{(n)}^{(0)} &= \frac{\pi C}{2l} + \frac{\pi n C}{l}, \quad \delta_{(n)}^{(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.2)$$

соответственно. Следовательно, для первой гармоники (для самых низких собственных частот) в первом и втором случаях получим

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)} &= \frac{\pi C}{l}, \quad k_{(1)} = \frac{\pi}{l} \\ \Omega_{(0)} &= \frac{\pi C}{2l}, \quad k_{(0)} = \frac{\pi}{2l} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечное количество собственных частот. Наибольший интерес представляют самые низкие частоты, поскольку колебания с этими частотами являются наиболее “долгоживущими”. Причем, они различаются ровно в два раза.

Решения вида (3.1) для распределения давления и скорости в скважине для двух рассматриваемых случаев запишутся как

$$\begin{aligned} P &= \tilde{C}_1 \cos \frac{\pi z}{l} \cos \frac{\pi C t}{l}, \quad w = -\frac{\tilde{C}_1}{C} \sin \frac{\pi z}{l} \sin \frac{\pi C t}{l} \\ P &= \tilde{C}_1 \cos \frac{\pi z}{2l} \cos \frac{\pi C t}{2l}, \quad w = -\frac{\tilde{C}_1}{C} \sin \frac{\pi z}{2l} \sin \frac{\pi C t}{2l} \end{aligned}$$

Как видно из этих решений, они определяются с точностью до произвольной постоянной. В дальнейшем эту постоянную примем равной единице. Это будет означать, что распределение давления нормировано относительно значения при $z = 0$.

5. Численные расчеты. Решение для закона изменения давления в скважине согласно (3.1) и (3.4) определено с точностью до произвольного постоянного множителя c_1 . В расчетах примем, что $c_1 = 1$, т.е. нормируем распределение давления относительно значения при $z = 0$ (вместо P будем использовать нормированное значение $P/A^{(P)}(0)$), тогда

$$P = \cos(Kz)e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

Здесь K – волновое число, которое определяется через комплексную частоту: $K = k + i\beta$ ($k = \operatorname{Re} K$, $\beta = \operatorname{Im} K$). Тогда действительную часть решения P из (5.1) можно записать, как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P) &= A(z)e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi) \\ A(z) &= \sqrt{\cos^2(kz) \operatorname{ch}^2(\beta z) + \sin^2(kz) \operatorname{sh}^2(\beta z)} \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\operatorname{tg}(kz) \operatorname{th}(\beta z) \end{aligned}$$

В расчетах в качестве жидкости принята вода, имеющая следующие физические параметры: $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $C = 1.5 \times 10^3$ м/с, $\mu = 10^{-3}$ Па с. Для скважины, трещины и пласта принято: $l = 1500$ м, $m_f = 10^{-1}$, $d_f = 3 \times 10^{-3}$ м, $k_f = 10^{-10}$ м². Пунктирные ли-

нии соответствуют случаям, когда трещина ГРП отсутствует и, следовательно, в призабойной зоне пласта рассматривается только радиальное фильтрационное течение.

На рис. 2а—в иллюстрируются зависимости собственной частоты Ω , коэффициента затухания δ , а также декремента затухания, определяемого, как $\Delta = (2\pi/\Omega)\delta$ от проницаемости пласта. Линии 1, 2 соответствуют значениям длины открытого участка скважины $l_p = 10$ и 40 метров, соответственно. На этом и последующих рисунках пунктирной линией приведены кривые, соответствующие случаю отсутствия трещины ГРП, т.е. жидкость от скважины растекается радиально.

Видно, что с ростом проницаемости пласта в рассматриваемом диапазоне частота собственных колебаний монотонно снижается между значениями, определяемыми формулами (4.1). Наиболее нетривиальным эффектом является немонотонная зависимость коэффициента затухания δ и декремента затухания Δ от проницаемости пласта. Причем, перескок к низким частотам происходит для значений параметров пласта и трещины, при которых реализуется максимальное значение коэффициента (а также декремента) затухания. Кроме того, затухание колебаний сильно увеличивается при наличии трещины.

На рис. 3 показано распределение амплитуд возмущений движения $A(z)$ от глубины z в скважине при значениях коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-13}, 10^{-12}$ м² и длине открытого участка скважины $l_p = 40$ м. При наличии трещины ГРП наиболее сильные изменения амплитуды колебаний заметны на датчике, расположенном на глубине 750 м (середина скважины) для низкопроницаемых пластов. При этом, для высокопроницаемых пластов изменения в показаниях датчиков при наличии и отсутствии трещины практически незаметны (кривые 3 и 3' почти совпадают).

На рис. 4 иллюстрируется распределение сдвига по фазе φ в скважине в зависимости от глубины z при различных значениях проницаемости. При малых значениях проницаемости с ростом глубины наблюдается сдвиг фаз колебаний в диапазоне от 0 до π . При больших значениях проницаемости наблюдаем сдвиг фаз в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

На рис. 5а—в даны осциллограммы для мысленных датчиков D_1, D_2 и D_3 , расположенных в точках с координатами $z = 0, 750$ и 1500 м. Кривые, обозначенные номерами 1, 2, 3 соответствуют значениям коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-12}$ и 10^{-10} м². При увеличении проницаемости частота снижается и наблюдается более интенсивное затухание колебаний.

На рис. 6 приводится распределение давления вдоль скважины в моменты времени $\Omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ и 4π . Фрагменты (а—в) соответствуют значениям коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-12}$ и 10^{-10} м². В случае $k_p = 10^{-10}$ м² наличие трещины ГРП практически не изменяет картину изменения давления в зависимости от глубины.

На рис. 7 показана зависимость собственной частоты колебаний (а), коэффициента затухания (б) от ширины трещины. Длина открытого участка скважины принята равной 20 м. Из графиков следует, что частота колебаний уменьшается при увеличении ширины трещины. Более нетривиальная картина наблюдается с коэффициентом затухания колебаний: для низкопроницаемых пластов ($k_p = 10^{-14}$ м²) с ростом ширины трещины увеличивается значение коэффициента затухания, при средних значениях проницаемости ($k_p = 10^{-12}$ м²) с ростом ширины трещины коэффициент затухания уменьшается, для высокопроницаемых пластов ширина трещины почти не влияет на частоту колебаний и коэффициент затухания, коэффициент затухания принимает в этом случае очень маленькие значения.

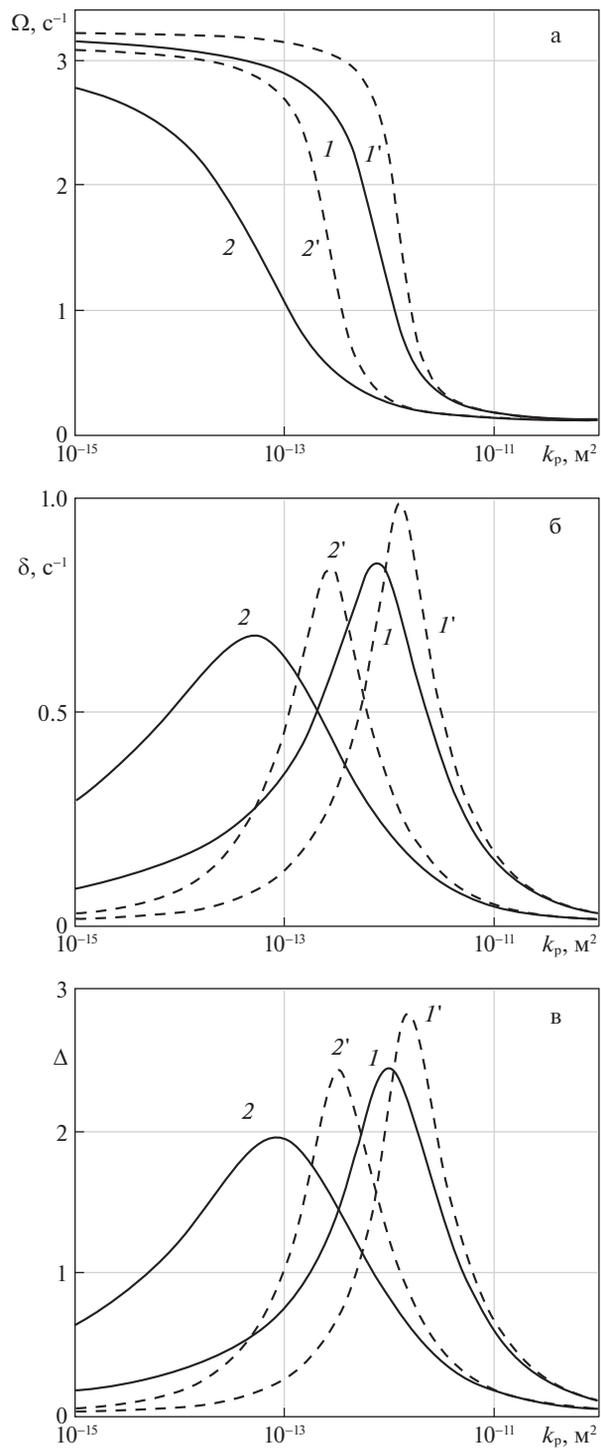


Рис. 2.

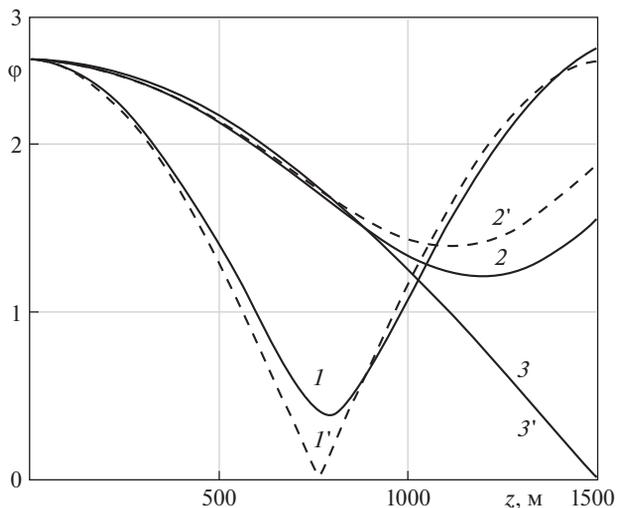


Рис. 3.

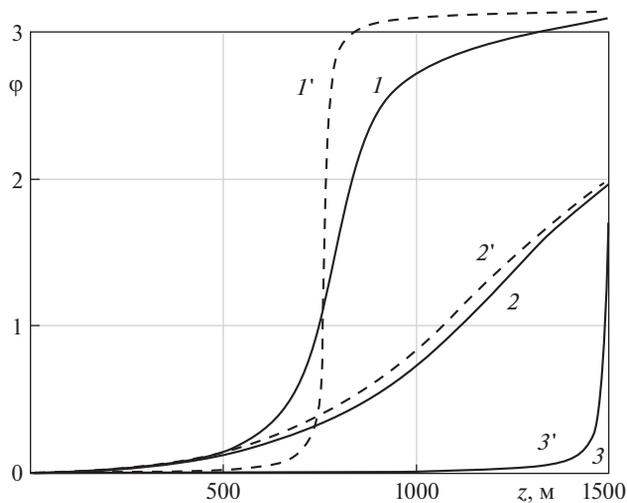


Рис. 4.

Получим некоторые оценки, следующие из результатов нашей работы, и сравним их с опытными данными [8]. Из этой работы были взяты следующие значения параметров: длина скважины $l = 2600$ м, радиус скважины $a = 0.035$ м, плотность жидкости $\rho_0 = 1000$ кг/м³, скорость звука $C = 1500$ м/с, вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с. По формулам [7] можно приближенно найти частоту колебаний $\Omega = \frac{\pi C}{2l}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \nu C}{l a^2}}$. Получаемые отсюда значения периода колебаний $T = 6.9$ с и времени

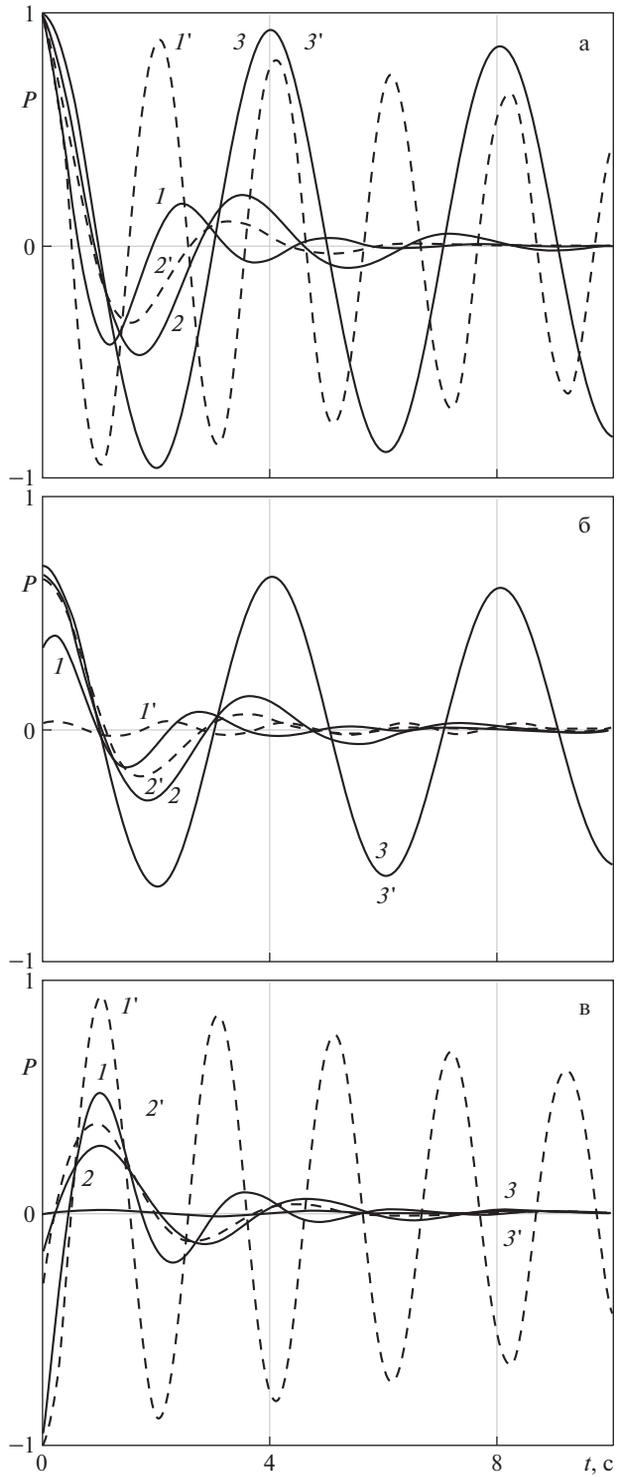


Рис. 5.

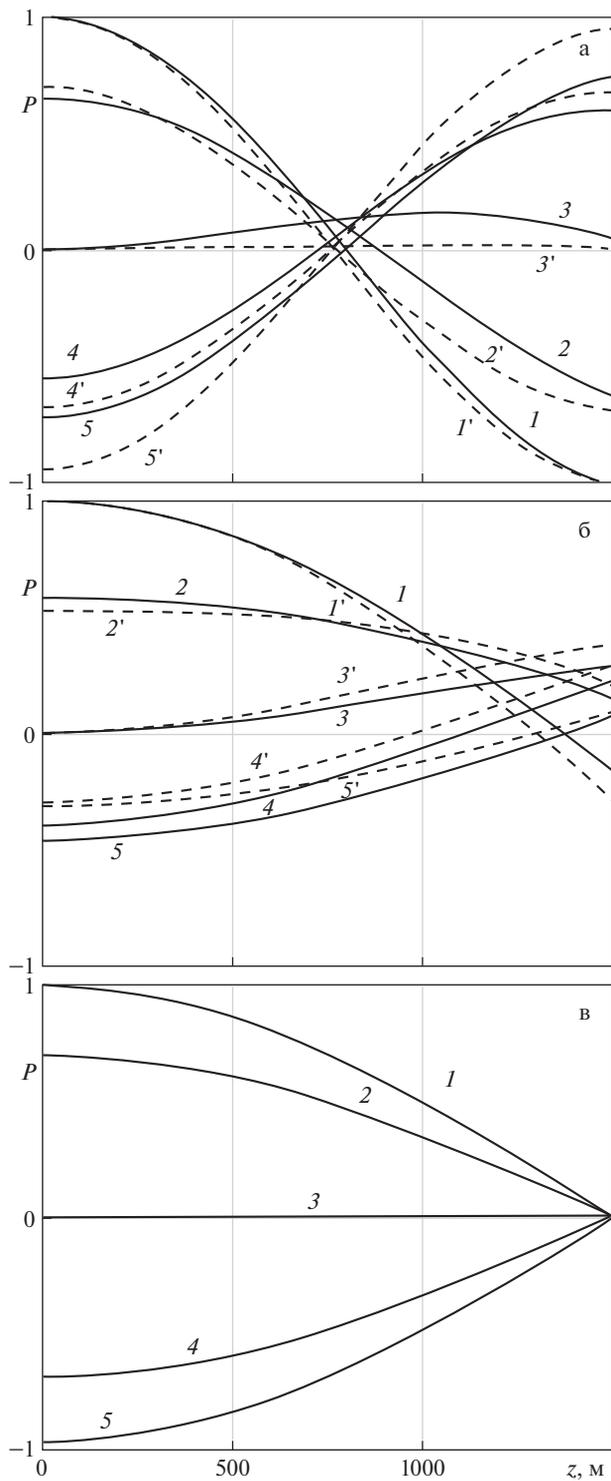


Рис. 6.

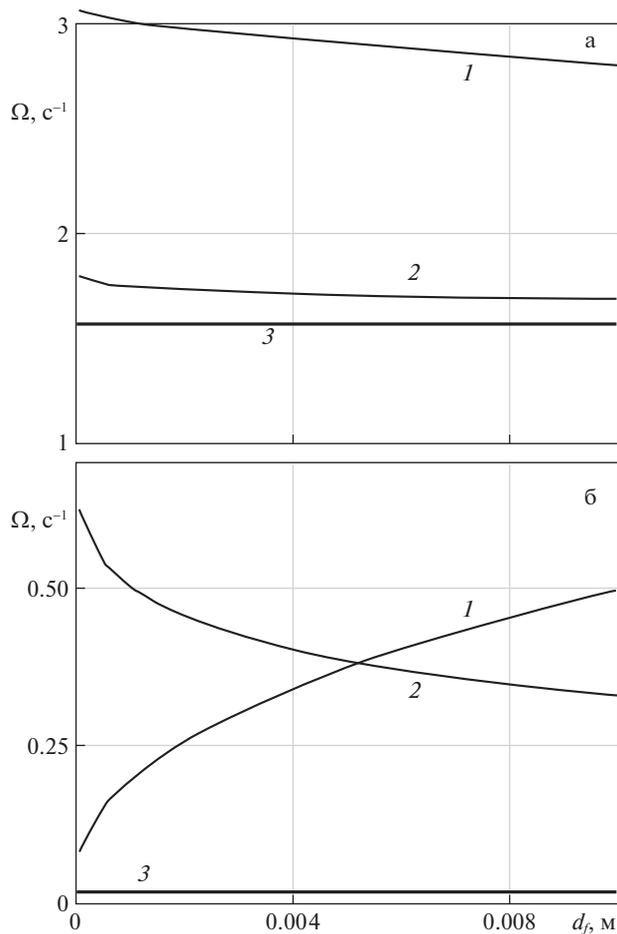


Рис. 7.

затухания $1/\delta = 52$ с совпадают с опытными значениями [8]. По нашему мнению, данные, зафиксированные на реальной скважине [8], скорее всего, соответствуют собственным колебаниям столба жидкости в скважине, трещина ГРП в этом случае дает условие высокой проводимости на забое скважины.

Заключение. Таким образом, по собственным колебаниям жидкости внутри скважины можно судить о качестве открытого участка скважины, геометрических характеристиках скважины, коллекторских свойствах призабойной зоны, сопоставляя наблюдаемые параметры изменения давления в различных точках скважины (основные частоты, коэффициент затухания, сдвиг по фазе, амплитуды) с расчетными значениями, получаемыми по рассматриваемой модели. Практическое применение полученных результатов возможно при выделении сигнала, соответствующего собственным колебаниям системы, из общего нестационарного волнового пакета. В [21] описана специализированная система сбора данных, позволяющая минимизировать шум и снимать показания с частотой 50 кГц. Для анализа колебаний столба жидкости в скважине показания снимаются с частотой 100–200 значений в секунду.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.: Ижевск: Ин-т компьютер. технол., 2007. 237 с.
2. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of hydraulic fractures: its measurement and use for estimating fracture closure pressure and dimensions // SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp., Denver, Colorado, 1985. Paper no. SPE-SPE-13892-MS.
3. *Patzek T., De Lossy A.* Transmission line model of hydrofractured well dynamics // J. Petrol. Sci. & Engng. 2000. V. 25. № 1–2. P. 59–77.
4. *Carey M., Mondal S., Sharma M.* Analysis of water hammer signatures for fracture diagnostics // SPE Annu. Techn. Conf. & Exh. Texas, USA, Sept. 28–30, 2015. Paper No. SPE-174866-MS.
5. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water hammer effects on water injection well performance and longevity // SPE Int. Symp. & Exh. on Formation Damage Control. 2008. SPE 2282.
6. *Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кривцов А.М.* Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696.
7. *Шаганов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З.* Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 4. С. 5–14.
8. *Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кашанов Д.В.* К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 64–75.
9. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Квазидномерная модель гиперболического типа гидроразрыва пласта // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 739–754.
10. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Techn. SPE-89-PA. 1961. V. 13 (09). P. 937–949.
11. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. SPE-3009-PA. 1972. V. 12 (04). P. 306–314.
12. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. 464 с.
13. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. II. М.: Наука, 1987. 360 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Шаганов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 121–130.
16. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh. & Techn. Symp., Beijing China, Mar 18–26, 1982. SPE 10043-MS
17. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестн. Башкир. унив. 2017. Т. 22. № 2. С. 309–314.
18. *Нагаева З.М., Шаганов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
19. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.
20. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
21. *Bogdan A.V., Keilers A., Oussoltsev D., Lecerf B.* Real-time interpretation of leak isolation with degradable diverter using high frequency pressure monitoring // Schlumberger. SPE Asia Pacific Oil & Gas Conf. & Exh. Perth, Australia, Oct. 25–27, 2016. SPE-182451-MS.

**Natural Vibrations of Fluid in a Well Connected to the Formation,
in the Presence of a Hydraulic Fracture**

V. Sh. Shagapov^{a,#}, R. A. Bashmakov^{a,b,##}, and D. A. Nasyrova^{a,c,###}

^a *Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa FRC RAS, Ufa, Russia*

^b *Bashkir State University, Ufa, Russia*

^c *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

[#] *e-mail: Shagapov@rambler.ru*

^{##} *e-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru*

^{###} *e-mail: dinasyrova@mail.ru*

The paper analyzes the natural fluctuations of the liquid column in the oil well, initiated by water hammer, taking into account filtration currents near the bottom of the well and along the vertical fracture of hydraulic fracturing. The dependences of the frequency, the damping coefficient of natural pressure oscillations on the values of formation permeability and hydraulic fracturing fracture are studied. Comparison of the frequency characteristics, damping coefficient, decrement of damping in the presence and absence of the fracture crack is carried out. The possibility of practical application of the obtained results is shown.

Keywords: natural fluid oscillations, hydraulic fracturing, oil well, oscillation frequency, water hammer, standing waves

REFERENCES

1. *Economides M., Oligney R., Valkó P.* Unified Fracture Design. Alvin: Orsa Press, 2004.
2. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of hydraulic fractures: its measurement and use for estimating fracture closure pressure and dimensions // SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp., Denver, Colorado, 1985. Paper no. SPE-SPE-13892-MS.
3. *Patzek T., De Lossy A.* Transmission line model of hydrofractured well dynamics // J. Petrol. Sci. & Engng., 2000, vol. 25 (1–2), pp. 59–77.
4. *Carey M., Mondal S., Sharma M.* Analysis of Water Hammer signatures for fracture diagnostics // SPE Annual Technical Conf. & Exhib. / Texas, USA, 2015. Paper no. SPE-174866-MS.
5. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water Hammer effects on water injection well performance and longevity // SPE Int. Symp. & Exhib. on Formation Damage Control, 2008, SPE 2282.
6. *Liapidevskii V.Y., Neverov V.V., Krivtsov A.M.* Mathematical model of water hammer in vertical wellbore // Sib. Electron. Math. Rep., 2018, no. 15. pp. 1687–1696.
7. *Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z.* Damped Natural Vibrations of Fluid in a Well Interfaced with a Reservoir // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2020, vol. 61, pp. 501–509.
8. *Baikov V., Bulgakova G., Ilyasov A., Kashapov D.* To the evaluation of the geometric parameters of hydraulic fracturing crack // Izv. RAS MZG, 2018, iss. 5, pp. 64–75.
9. *Ilyasov A.M., Bulgakova G.T.* The quasi-one-dimensional hyperbolic model of hydraulic fracturing // Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 739–754. (in Russian)
10. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., SPE-89-PA, 1961, vol. 13 (09), pp. 937–949.
11. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. SPE-3009-PA, 1972, vol. 12 (04), pp. 306–314.
12. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Pt. I. Moscow: Nauka, 1987. 464 p. (in Russian)
13. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Pt. II. Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian)
14. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics: V. 6. L.: Pergamon, 1959. 536 p.
15. *Shagapov V.S., Nagaeva Z.M.* On the theory of seepage waves of pressure in a fracture in a porous permeable medium // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2017, vol. 58, pp. 862–870.

16. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh. & Techn. Symp., Beijing China, 1982. SPE 10043-MS.
17. *Khabibullin I.L., Khisamov A.A.* Modeling of nonstationary filtration around a well with a vertical fracture frac // Bull. Bashkir. Univ., 2017, vol. 22, no. 2, pp. 309–314. (in Russian)
18. *Nagaeva Z., Shagapov V.* Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // JAMM, 2017, vol. 81, iss. 3, pp. 214–222.
19. *Lavrentev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Function of Complex Variable. SPb.: 2002, 749 p.
20. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of Heat in Solids. Oxford: Univ. Press, 1959. 520 p.
21. *Bogdan A.V., Keilers A., Oussoltsev D., Lecerf B.* Real-time interpretation of leak isolation with degradable diverter using high frequency pressure monitoring // Schlumberger. SPE Asia Pacific Oil & Gas Conf. & Exhib. held in Perth, Australia, 2016, SPE-182451-MS.

УДК 536.246:551.326.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРЭСНОВОДНОГО ЛЕДОВОГО ПОКРОВА ПРИ ВАРИАЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА

© 2022 г. В. К. Гончаров*

*Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: vkgonch@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.

После доработки 02.11.2020 г.

Принята к публикации 26.11.2020 г.

Процесс формирования поля температуры в толще ледового покрова моделируется уравнением теплопроводности, решение которого потребовало параметризации граничных условий на границах раздела с атмосферой и водной массой, допускающей получение аналитического решения. Наиболее сложным в этом отношении является условие на границе раздела с водой, где происходит кристаллизация, вследствие чего выделяется тепло, и увеличивается толщина льда (условие Стефана). Эта проблема решена параметризацией зависимости скорости намерзания льда от температуры воздуха и толщины льда по материалам наблюдений за ледовым покровом сибирских рек. Полученное аналитическое решение сопоставлено с полевыми измерениями температуры в ледовом покрове и темпом роста его толщины на реке Амур.

Ключевые слова: атмосфера, водная масса, ледовый покров, температура, прочность, поток тепла, кристаллизация

DOI: 10.31857/S0032823522010040

1. Введение. Прочность ледового покрова зависит от его температуры, которая определяется потоком тепла из водной среды в атмосферу, и меняется по его толщине: от температуры кристаллизации на границе раздела с водой — до температуры воздуха на границе раздела с атмосферой. Температура воздуха меняется весь период ледостава и на протяжении каждых суток. Понимание процесса вариации температуры в толще ледового покрова необходимо для прогнозирования ледового режима акваторий, а также для адекватной оценки его прочности при решении практических задач ледотехники.

Температура внутри пресноводного льда определяется процессами, происходящими на границах и в его толще, в том числе: вариацией температуры атмосферы, поглощением солнечной радиации в толще льда, потоком тепла от нижележащей водной среды и донного грунта, а также от происходящего на границе с водой намерзания льда [1–3].

Параметризация указанных процессов приводит к формулированию системы уравнений теплопроводности параболического типа для льда, водной массы и донного грунта, связанных условиями равенства потоков тепла и температуры на границах раздела [3]. Следует также учитывать осложняющий решение фактор: толщина льда является функцией времени, так как меняется вследствие намерзания. Это обстоятельство практически исключает возможность использовать для решения рассматриваемой задачи известные инженерные программы расчета тепловых процессов, например, ANSYS.

Приближенное решение системы уравнений теплопроводности возможно получить, если преобразовать уравнения в частных производных в обычные дифференциальные уравнения, пренебрегая производной температуры льда по времени. Это достигается осреднением во времени влияющих на температуру льда процессов. Такое осреднение может иметь различные масштабы: от суток [4] до сезонов [3]. В результате удастся понять взаимосвязь профиля температуры в толще льда с происходящими на его границах процессами.

Следует отметить, что подобные задачи: решение систем уравнений, описывающих потоки тепла в соприкасающихся средах, ставились и решались ранее применительно к ледовым режимам озер и рек [5, 6]. Процессы переноса тепла и динамика поля температуры в толще материкового ледника рассмотрены [7] в связи с процессом его развития (нарастания толщины из выпадающего снега) и движения по каменному склону.

В данном исследовании представлялось предпочтительным использовать известные точные решения уравнения теплопроводности вместо приближенных численных методов, основанных на замене дифференциальных уравнений в частных производных системами разностных алгебраических уравнений. Адекватность решения в этом случае определяется только формулировкой граничных условий, которая может адаптироваться применительно к специфике решаемой проблемы, и проверяется сопоставлением с физическим экспериментом.

Выполненные ранее исследования [8, 9] позволили связать скорость намерзания пресноводного льда и поток тепла его кристаллизации с температурой атмосферного воздуха и толщиной льда. В качестве основы была использована аналогичная формуле Зубова [6] зависимость, аппроксимирующая материалы наблюдений за толщиной льда на реках Сибири и связывающую толщину льда с накопленной суммой среднесуточных отрицательных температур воздуха, а также учитывающую толщину снежного покрова [1, 10].

Этот результат позволил перейти от решения системы уравнений теплопроводности в трех средах к решению единственного уравнения теплопроводности для льда. Условие Стефана было заменено алгебраической функцией температуры атмосферного воздуха и толщины льда в некоторый момент времени. В свою очередь, переход в уравнении теплопроводности к безразмерной вертикальной координате, нормированной по толщине льда, ликвидировал соответствующую неопределенность на нижней границе льда, связанную с изменением его толщины. В этом случае зависящим от толщины льда остался только коэффициент теплопроводности. В ходе численного моделирования процесса, учет этой зависимости не вызывает трудностей и может производиться на каждом шаге интегрирования по толщине льда в данный момент времени.

Проверка адекватности модели динамики температуры в ледовом покрове пресноводного водоема осуществлена на материалах полевых наблюдений, выполненных соисполнителями из Тайюаньского университета технологии (КНР) на реке Амур (Хэйлунцзян) в рамках совместного Проекта, поддержанного РФФИ и ГФЕН. Сравнение результатов компьютерного моделирования и данных полевых измерений показало их хорошее соответствие в части роста толщины льда, и по вертикальным профилям температуры в ледовом покрове.

2. Общая постановка проблемы. Пресноводный лед на водоемах представляет собой сочетание кристаллов льда с различными размерами и ориентацией и пузырьков воздуха. Для параметризации вариации температуры внутри льда в зависимости от происходящих на его границах и в толще процессов лед допустимо рассматривать как изотропную среду [3].

На границе льда с атмосферой происходит обмен теплом, определяющийся температурой воздуха и его динамическими характеристиками (ветром). В толще льда происходит поглощение солнечной радиации, зависящее от количества радиации, прони-

кающей в лед (альbedo поверхности), и поглощающих свойств льда. На границе льда с водной массой должна сохраняться постоянная температура замерзания воды и выполняться условие Стефана, характеризующее фазовый переход: вода—лед, и определяющее поток тепла кристаллизации льда или градиент температуры на границе. В водной среде происходит поглощение солнечной радиации, прошедшей сквозь лед, и перенос тепла из недр Земли, интенсивность которого определяется энергией турбулентных движений в водной массе, порождаемой течением. Поток тепла из недр Земли формирует профиль температуры в донном грунте и градиент температуры на границе с водной средой.

В общем виде система уравнений, параметризующая указанные выше процессы и характеризующих поле температуры в тех средах: лед—вода—грунт, следуя [3], в системе координат: $0 \leq z < \infty$ (начало на поверхности льда), $0 \leq t < \infty$, (при условии постоянства всех параметров в горизонтальной плоскости) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} c_1 \gamma_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + q_0 \frac{\alpha}{2\sqrt{z}} e^{-\alpha\sqrt{z}}; & 0 < z < h_1 \\ c_2 \gamma_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) + q_0 \frac{\alpha_1}{2\sqrt{z}} e^{-\alpha_1\sqrt{z}} \beta e^{-\beta(z-h_1)}; & h_1 < z < h_2 \\ c_3 \gamma_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} &= \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}; & h_2 < z < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этих формулах использованы следующие обозначения: T — температура, c_i — удельная теплоемкость, γ_i — плотность, λ_i — коэффициент теплопроводности, q_0 — интенсивность потока солнечной радиации, проникающей в лед, α — показатель ослабления солнечной радиации во льду, β — показатель ослабления солнечной радиации в воде, h_i — толщина слоя среды. Индексы 1, 2 и 3 относятся ко льду, воде и грунту, соответственно. Коэффициент теплопроводности в водной среде λ_2 является функцией глубины, так как плотность воды, связанная с температурой, и скорость течения, определяющая интенсивность турбулентности, меняются с глубиной.

Граничные условия для этой системы уравнений определяются характером энергетического взаимодействия граничащих сред. На поверхности льда — на границе с атмосферой условие имеет следующий вид

$$z = 0; \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \mu_a (T_a - T_1) \quad (2.2)$$

В этой формуле T_a — температура атмосферного воздуха, μ_a — коэффициент турбулентного теплообмена с воздухом на поверхности льда. Граничное условие на границе льда с водой — условие Стефана

$$z = h_1; \quad T_1 = T_2 = 0, \quad -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = \gamma_1 L_m \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (2.3)$$

В этой формуле L_m — теплота фазового перехода вода—лед. Граничное условие на границе: вода—грунт и для грунта — геотермический поток Q_E

$$z = h_2; \quad T_2 = T_3, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z}; \quad z \rightarrow \infty: \quad \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} = Q_E \quad (2.4)$$

В качестве начальных условий следует определить начальную температуру воздуха и профили температуры во всех трех средах, а также начальную толщину льда, то есть

$$t = 0: \quad T_a = T_{a0}, \quad T_i(z, 0) = T_{i0} f_i(z), \quad h_0 = h_0 \quad (2.5)$$

Дальнейшая вариация профиля температуры во всех средах будет происходить вследствие изменения температуры воздуха и интенсивности солнечной радиации и

должна быть определена функциями времени, построенными таким образом, чтобы учитывать реальные погодные и географические условия в рассматриваемой акватории.

$$t > 0: \quad T_a(t) = T_{a0}F_T(t), \quad q_0(t) = q_sF_s(t) \quad (2.6)$$

В этой формуле q_s – максимальное значение интенсивности солнечной радиации, попадающей в лед, зависящее от географической широты, облачности и альbedo поверхности льда.

3. Упрощение постановки проблемы. В полной постановке задача (2.1), описывающая вариацию температуры в трех средах под действием вариации температуры атмосферного воздуха и солнечной радиации, решена быть не может. Поэтому требуется ее существенное упрощение, которое в [3] было осуществлено, например, путем осреднения температуры воздуха и потока солнечной радиации по некоторому промежутку времени (сезон) и преобразованием уравнений (2.1) в обычные дифференциальные уравнения второй степени.

Далее использован другой вариант решения проблемы. Процессы распространения тепла и формирование поля температуры внутри льда параметризуются путем решения уравнения теплопроводности только для слоя льда. Формулирование условий на границах льда производится таким образом, чтобы не связывать их с процессами, происходящими в примыкающих средах: в атмосфере и в водной среде. Этот подход подразумевает, что воздействие процессов, происходящих в атмосфере и в водной среде, на термодинамические процессы во льду параметризуются некоторыми средними характеристиками, которые можно установить на основе анализа выполненных наблюдений в реальных условиях [1, 10].

Результаты исследований соотношения температуры атмосферного воздуха T_{air} и температуры поверхности льда T_{ice} на реках, приведенные в [1], показали, что эти величины связаны следующим линейным соотношением

$$T_{\text{ice}} = \beta T_{\text{air}} \quad (3.1)$$

Для больших толщин льда по многолетним наблюдениям на реках Сибири среднее значение коэффициента пропорциональности оказалось равным $\beta = 0.88$. Эти результаты позволяют значительно упростить выражение для граничного условия на верхней поверхности льда, пренебрегая эффектами, связанными со снежным покровом и термическим пограничным слоем. Допустимо задать изменение во времени температуры поверхности льда, считая, что она “следит” за температурой атмосферного воздуха, то есть температура поверхности льда меняется пропорционально температуре воздуха.

На границе раздела льда с водной средой происходит кристаллизация и намерзание льда. Интенсивность этого процесса по результатам наблюдений на реках [1, 10], и в морских акваториях (формула Зубова) [4, 11] зависит главным образом от температуры атмосферного воздуха, и может быть аппроксимирована зависимостью от “накопленной” суммы отрицательных среднесуточных температур воздуха. Это наблюдение позволяет параметризовать поток тепла кристаллизации льда функцией температуры атмосферного воздуха и толщины льда в рассматриваемый момент, или, соответственно, функцией времени.

Учитывая изложенное, система уравнений (2.1) переходит в одно уравнение, граничные условия (2.2) и (2.3) значительно упрощаются, и рассматриваемая проблема сводится к следующей известной [12, 13] краевой задаче математической физики:

$$\begin{aligned}
 c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_s \frac{\alpha f_s(t)}{2\sqrt{z}} \exp(-\alpha\sqrt{z}) \\
 T(0, t) &= T_{a0} f_a(t), \quad T(H, t) = 0 \\
 \lambda \frac{\partial T(H, t)}{\partial z} &= Q_f f_q(t) \\
 T(z, 0) &= T_{a0} f_z(z), \quad H(t) = H_0 f_h(t), \quad 0 < z < H, \quad 0 < t < \infty
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этих формулах использованы следующие обозначения: T – температура льда, c – удельная теплоемкость льда, γ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности льда, q_s – интенсивность потока солнечной радиации, проникающей в лед, Q_f – поток тепла кристаллизации льда, T_{a0} – начальная температура поверхности льда, H – толщина льда, α – показатель ослабления солнечной радиации во льду, $f_s(t)$, $f_a(t)$ и $f_q(t)$ – функции, характеризующие изменение во времени интенсивности солнечной радиации, температуры поверхности льда и потока тепла кристаллизации, соответственно, $f_z(z)$ – начальное распределение температуры (профиль) по толщине льда, функция $f_h(t)$ – характеризует изменение толщины льда вследствие его намерзания.

Используя обозначения: $K_T = \lambda/c\gamma$, $S = q_0/c\gamma$ и $R_f = Q_f/\lambda$, преобразуем выражения (3.2) к обычному для уравнения теплопроводности виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} &= K_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + S \frac{\alpha f_s(t)}{2\sqrt{z}} \exp(-\alpha\sqrt{z}); \quad 0 < z < H, \quad 0 < t < \infty \\
 T(0, t) &= T_{a0} f_a(t), \quad T(H, t) = 0; \quad 0 < t < \infty \\
 \frac{\partial T(H, t)}{\partial z} &= R_f f_q(t); \quad 0 < t < \infty \\
 T(z, 0) &= T_{a0} f_z(z), \quad H(t) = H_0 f_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого вертикальную координату нормируем по толщине льда: $\zeta = z/H$. Время нормируем на некоторый временной масштаб D , равный, например, 1 суткам ($\tau = t/D$). Тогда выражения (3.3) примут следующий вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \tau} &= R_T \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + Q_s \frac{\alpha_h f_{st}(\tau)}{2\sqrt{\zeta}} \exp(-\alpha_h\sqrt{\zeta}) \\
 T(0, \tau) &= T_{a0} f_{at}(\tau), \quad T(1, \tau) = 0 \\
 \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \zeta} &= R_{fh} f_{qt}(\tau) \\
 T(\zeta, 0) &= T_{a0} f_{zh}(\zeta)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$R_T = \frac{K_T D}{H^2}, \quad Q_s = \frac{q_s D}{c\lambda}, \quad R_{fh} = R_f H, \quad \alpha_h = \frac{\alpha}{\sqrt{H}}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau < \infty$$

В этих выражениях функции $f_{st}(\tau)$, $f_{at}(\tau)$ и $f_{qt}(\tau)$, а также $f_{zh}(\zeta)$ записаны в безразмерном виде.

Так как толщина льда является функцией времени, то, строго говоря, зависящими от времени являются величины R_T , R_{fh} и α_h . Намерзание льда – достаточно медленный процесс: по данным полевых измерений [1] при обычном зимнем температурном режиме толщина льда увеличивается в среднем на 1% в сутки. Поэтому во втором слагаемом в правой части уравнения (3.4) этим эффектом можно пренебречь в сравнении с суточной вариацией солнечной радиации. Зависимость величины R_{fh} от времени будет

учтена при параметризации скорости намерзания льда и соответствующего потока тепла кристаллизации.

Зависимость коэффициента теплопроводности R_T от времени представляет собой возможный устранить, если нормирование этого коэффициента и времени процесса представить в следующем виде

$$\bar{R}_T = \frac{K_T D}{H_0^2}, \quad \bar{\tau} = \int \frac{dt}{[f_h(t)]^2} \quad (3.5)$$

В этом случае уравнение (3.4) приобретает канонический вид, когда коэффициент при второй производной по координате является постоянной величиной. При таком подходе появляется проблема: переход в результирующем решении к обычной временной координате. Интеграл в (3.5) может быть получен в явном виде только при ограниченном наборе форм представления функции $f_h(t)$, которые, априорно очевидно, не позволят адекватно параметризовать поток тепла кристаллизации льда на основе материалов полевых наблюдений.

В то же время моделирование вариации поля температуры льда предполагается осуществлять численно. Поэтому на каждом шаге расчета по времени толщина льда, а, следовательно, и все связанные с ней нормированные величины остаются постоянными. Это позволяет использовать решение уравнения (3.4) как если бы толщина льда оставалась неизменной, внося соответствующие поправки на каждом шаге расчета — численного интегрирования. Этот подход представляется наиболее рациональным при решении рассматриваемой задачи.

Граничные условия для уравнения (3.4) являются граничными условиями третьего типа, поскольку на границе раздела с водой задаются и температура, и градиент температуры. Поэтому воспользуемся тем, что общее решение параболического дифференциального уравнения может быть представлено суммой его частных решений [13]. Разделим задачу (3.4) на отдельные подзадачи и, затем, скомбинируем общее решение из частных решений.

4. Эффект поглощения льдом солнечной радиации. Для исследования влияния поглощения льдом солнечной радиации на его температуру, уравнение и граничные условия (3.4) представим следующим образом

$$\frac{\partial T_{sn}}{\partial \tau} = R_T \frac{\partial^2 T_{sn}}{\partial \zeta^2} + Q_s \frac{\alpha_h f_{st}(\tau)}{2\sqrt{\zeta}} \exp(-\alpha_h \sqrt{\zeta}); \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau < \infty \quad (4.1)$$

$$T_{sn}(0, \tau) = 0, \quad T_{sn}(1, \tau) = 0; \quad 0 < \tau < \infty$$

Решение этой задачи известно [12], оно имеет следующий вид

$$T_{sn}(\zeta, \tau) = \alpha_h Q_{hd} \int_0^\tau f_{st}(\vartheta) d\vartheta \int_0^1 \frac{e^{-\alpha_h \sqrt{\eta} + \infty}}{\sqrt{\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \sin(n\pi\eta) \sin(n\pi\zeta) d\eta \quad (4.2)$$

Для использования решения следует определить величину Q_s и вид функции $f_{st}(t)$, которая характеризует зависимость от времени интенсивности солнечной радиации, проникающей в лед.

Величина Q_s связана с общим потоком солнечной радиации на рассматриваемой широте q_s и альбедо поверхности льда, которое максимально для свежеснежного льда и минимально для свободной от снега поверхности льда. При приложении этого решения к конкретным природным условиям следует учитывать состояние атмосферы, в первую очередь — облачность. При формировании вида функции $f_{st}(\tau)$ следует исходить из того, что солнечная радиация существует только в светлое время суток, и

достигает максимума в полдень. Поэтому функция $f_{st}(\tau)$ может быть представлена в таком виде

$$f_{st}(\tau) = \begin{cases} s_0 - k_s \sin(2\pi\tau + \sigma_s) & \text{при } \sin(2\pi\tau + \sigma_s) < 0 \\ 0 & \text{при } \sin(2\pi\tau + \sigma_s) < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

В этой формуле σ_s – сдвиг по фазе, который позволяет совместить должным образом начало отсчета времени с появлением солнечной радиации (с восходом солнца). Вариацией величины s_0 можно регулировать соотношение длительности светлого и темного времени суток, а величина k_s позволяет нормировать до “1” максимальное значение рассматриваемой функции $f_{st}(\tau)$.

5. Эффект вариации температуры атмосферного воздуха. Для исследования влияния вариации температуры воздуха на распределение (профиль) температуры в толще льда, из общей задачи и граничных условий (3.4) выделим следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= R_T \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}; \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau < \infty \\ T(0, \tau) &= T_{a0} f_{at}(\tau), \quad T(1, \tau) = 0; \quad 0 < \tau < \infty \\ T(\zeta, 0) &= T_0 f_{hh}(\zeta); \quad 0 < \zeta < 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Решение краевой задачи такого типа известно [12], и в рассматриваемом случае решение имеет следующий вид

$$\begin{aligned} T_{am}(\zeta, \tau) &= T_{a0} \left\{ f_{hh}(\zeta) + f_{at}(\tau) \Big|_{\zeta=0} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\sqrt{\pi R_T}} \int_0^\tau \frac{f_{at}(\vartheta)}{(\tau - \vartheta)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\zeta + 2n) \exp\left(-\frac{(\zeta + 2n)^2}{4R_T(\tau - \vartheta)}\right) d\vartheta \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Начальное распределение температуры по толщине льда для целей упрощения решения целесообразно принять в виде линейной зависимости, предполагая, что в предшествующий моделированию период времени температурный режим не менялся, и в результате внутри льда установился некоторый стационарный термический режим, при котором температура поверхности льда равна температуре воздуха βT_{a0} в соответствии с (3.1), а температура на границе с водной средой постоянна и равна температуре замерзания воды, то есть $T = 0^\circ\text{C}$. Соответствующая зависимость имеет такой вид

$$f_{hh}(\zeta) = 1 - \zeta \quad (5.3)$$

Вариацию температуры атмосферного воздуха следует представить в виде суммы: линейного тренда, или длиннопериодной гармоникой, которые характеризуют изменение среднесуточной температуры на протяжении рассматриваемого срока, и вариации температуры на протяжении суток относительно среднесуточного значения. В последнем компоненте учитывается повышение температуры днем, связанное с солнечным прогревом атмосферы, и понижение температуры воздуха в ночное время. Если также принять вариант равенства продолжительности дня и ночи, то зависимость температуры от времени имеет следующий вид

$$f_{at}(\tau) = 1 + k_T \tau + \delta T \sin(2\pi\tau + \sigma_T) \quad (5.4)$$

В этой формуле k_T характеризует понижение температуры воздуха относительно начальной T_{a0} каждые сутки, δT – вариация температуры на протяжении суток (некоторая доля начальной температуры T_{a0}), постоянная на протяжении всего срока,

σ_T – сдвиг по фазе для совмещения начала и характера вариации температуры (потепление/похолодание) с солнечной радиацией (2.3).

6. Эффект тепла кристаллизации льда (намораживания). Для исследования эффекта потока тепла от кристаллизации (намораживания) льда на температуру в ледовом покрове выделим из общей задачи и граничных условий (3.4) краевую задачу вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{cr}}{\partial \tau} &= R_T \frac{\partial^2 T_{cr}}{\partial \zeta^2}; \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau < \infty \\ T_{cr}(1, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial T_{cr}(1, \tau)}{\partial \zeta} = R_{fn} f_{qt}(\tau); \quad 0 < \tau < \infty \end{aligned} \quad (6.1)$$

Условия на границе с водой ($\zeta = 1$) соответствуют условию Стефана: постоянство температуры, равной температуре замерзания воды, и градиент температуры, определяющий поток тепла кристаллизации. Поток тепла кристаллизации является функцией времени, так как интенсивность наморзания льда, очевидно, связана с вариацией температуры на границе льда с атмосферой ($\zeta = 0$).

В канонической форме краевая задача (6.1) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{\zeta\zeta}; \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < t < \infty \\ u_z(1, t) &= -\varphi(t), \quad u(1, t) = 0; \quad 0 < t < \infty \end{aligned} \quad (6.2)$$

Задача относится к классу параболических уравнений на отрезке конечной длины $l = 1$, и ее решение можно получить с использованием функции Грина [12, 13]. Решение в данном случае имеет такую форму

$$\begin{aligned} u(\zeta, t) &= -a^2 \int_0^t \varphi(\tau) G(\zeta, t - \tau) d\tau \\ a^2 &= R_T, \quad \varphi(t) = -R_{fn} f_{qt}(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

В рассматриваемой задаче (отрезок конечной длины) функцию Грина следует представить в следующем виде

$$G(\zeta, \tau - \vartheta) = \frac{1}{H} + \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \quad (6.4)$$

Выполняя необходимые преобразования, получаем следующее решение, которое удовлетворяет граничному условию при $\zeta = 1$ ($z = H$), представляющему собой поток тепла, порождаемый кристаллизацией льда на границе с водной средой

$$\tilde{T}_{cr}(\zeta, \tau) = -R_T R_{fn} \int_0^t f_{qt}(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \right] d\vartheta \quad (6.5)$$

Для того, чтобы обеспечить равенство $T = 0$ на границе раздела с водой, следует вычесть из него частное решение уравнения (6.1) при $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} T_{cr}(\zeta, \tau) &= -R_T R_{fn} \left\{ \int_0^t f_{qt}(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \right] d\vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t f_{qt}(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \right] d\vartheta \Big|_{\zeta=1} \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

В решении (6.6) остается определить вид функции $\varphi(t) = R_{fn} f_{qt}(t)$, которая характеризует поток тепла от намораживания льда. С этой целью воспользуемся эмпирической

формулой [1, 10], основанной на материалах контроля толщины льда и температуры воздуха на сибирских реках. Для толщин снега менее 20 см имеем

$$h_{ice} = 2.4 \left(\sum |T_a| \right)^{1/2} \quad (6.7)$$

В этой формуле T_a – среднесуточная отрицательная температура атмосферного воздуха, $\sum |T_a|$ – абсолютная величина суммы среднесуточных температур воздуха к моменту регистрации толщины льда h_{ice} . Нужно отметить, что эта эмпирическая зависимость практически учитывает, и усредняет эффекты всех возможных факторов, влияющих на образование и рост толщины пресноводного речного льда.

Формула (6.7) позволяет численно смоделировать скорость увеличения толщины льда при различных режимах вариации температуры воздуха и начальных величинах толщины льда, а также для задаваемых приращений толщины льда. В работе [9] на основе моделирования этих параметров получены следующие формулы для скорости намерзания и толщины льда

$$W_{fr}(h_{ice0}, T_a) = 1.66 \times 10^{-4} (2.73h_{ice0}^{-0.68} - 1) |T_a| \quad (6.8)$$

$$h_{ice}(h_{ice0}, T_a) = 1.66 \times 10^{-4} (2.73h_{ice0}^{-0.68} - 1) N \sum_1^N |T_a| \quad (6.9)$$

В этих формулах h_{ice0} – начальная толщина льда, N – протяженность прогноза (сутки). По скорости намерзания льда (6.8) можно оценить поток тепла, вызванный кристаллизацией льда, следующим образом

$$Q_{fr} = W_{fr} L_{ice} \gamma_{ice} \quad (6.10)$$

В этой формуле L_{ice} – удельная теплота кристаллизации пресноводного льда, γ_{ice} – плотность пресноводного льда. Поток тепла кристаллизации льда распределяется между льдом и водной средой пропорционально теплопроводности этих сред [14]. В толщу льда тепло кристаллизации распространяется молекулярной теплопроводностью, а в водную среду за счет турбулентного перемешивания. Долю тепла кристаллизации, поступающую в лед можно определить коэффициентом

$$\delta_{i/w} = \frac{\lambda_{ice}}{\lambda_{ice} + \lambda_w} \quad (6.11)$$

В этой формуле λ_{ice} – теплопроводность льда. Теплопроводность водной среды можно оценить на основании исследований динамики речных течений. Для равнинной реки Амур целесообразно принять среднее по данным [15] значение $\lambda_w = 60$ Вт/м °С.

Для использования аппроксимации (6.10) и (6.11) в качестве граничного условия в задаче (6.1) этот поток следует отнести к теплопроводности пресноводного льда λ_{ice} . Кроме того, следует учесть, что температура воздуха является функцией времени. После подстановки значений констант получаем выражение

$$R_{fr}(h_0, T_a) = \delta_{i/w} \frac{Q_{fr}}{\lambda_{ice}} = \delta_{i/w} W_{fr} \frac{L_{ice} \gamma_{ice}}{\lambda_{ice}} = 0.276 \delta_{i/w} (2.73h_0^{-0.68} - 1) |T_a| \quad (6.12)$$

7. Модель вариации температуры льда. Общее решение краевой задачи (3.4), которое определяет вариацию температурного поля в толще пресноводного льда под действием солнечного прогрева и вариации температуры атмосферного воздуха записывается в виде линейной суперпозиции решений (4.2), (5.2) и (6.6)

$$T(\zeta, \tau) = T_{sn}(\zeta, \tau) + T_{am}(\zeta, \tau) + T_{cr}(\zeta, \tau)$$

$$\begin{aligned}
T(\zeta, \tau) = & \alpha_h Q_{hd} \int_0^\tau f_{st}(\vartheta) d\vartheta \int_0^1 \frac{e^{-\alpha_h \sqrt{\eta}}}{\sqrt{\eta}} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \sin(n\pi\eta) \sin(n\pi\zeta) \right\} d\eta + \\
+ T_0 & \left\{ f_{hh}(\zeta) + f_{at}(\tau) \Big|_{\zeta=0} + \frac{1}{2\sqrt{\pi R_T}} \int_0^\tau \frac{f_{at}(\vartheta)}{(\tau - \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\zeta + 2n) \exp\left(-\frac{(\zeta + 2n)^2}{4R_T(\tau - \vartheta)}\right) d\vartheta \right\} + \\
& - R_T R_{fh} \left\{ \int_0^t f_{qt}(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \right] d\vartheta - \right. \\
& \left. - \int_0^t f_{qt}(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 R_T (\tau - \vartheta)} \cos[n\pi(1 - \zeta)] \right] d\vartheta \Big|_{\zeta=1} \right\} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

Входящие в это выражение функции определены в следующем виде

$$\begin{aligned}
f_{at}(\vartheta) &= 1 + k_T \vartheta + \delta T \sin(2\pi\vartheta + \sigma_T) \\
f_{hh}(\eta) &= 1 - \eta \\
f_{qt}(\vartheta) &= \delta_{i/w} (2.73 H_0^{-0.68} - 1) |T_0| f_{at}(\vartheta) \\
f_{st}(\vartheta) &= \begin{cases} s_0 - k_s \sin(2\pi\vartheta + \sigma_s) & \text{при } \sin(2\pi\vartheta + \sigma_s) < 0 \\ 0 & \text{при } \sin(2\pi\vartheta + \sigma_s) > 0 \end{cases} \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Для оценки толщины льда в моделируемый период времени использовалась основанная на выражении (6.9) формула

$$H_j = H_0 + 0.276 |T_0| \sum_{j=1}^M (2.73 H_{j0}^{-0.68} - 1) \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_{at}(t) dt \quad (7.3)$$

Здесь M – количество интервалов времени, по прошествии которых оценивается приращение и новая толщина льда вследствие намораживания в этот период. Этот интервал времени, очевидно, должен равняться или превышать интервал численного интегрирования по времени в формулах (7.1). По результатам расчета толщины льда на каждом j -интервале уточняются значения коэффициентов, которые были нормированы по толщине льда при переходе от уравнения (3.3) к безразмерной его форме (3.4), т.е.

$$R_{Tj} = \frac{K_T D}{H_j^2}, \quad R_{fhj} = R_f H_j, \quad \alpha_{hj} = \frac{\alpha}{\sqrt{H_j}} \quad (7.4)$$

Проверка адекватности решения сопоставлением с материалами полевых измерений.

Для проверки адекватности полученных результатов было выполнено сопоставление расчетов по полученным формулам с материалами полевых измерений толщины льда и вертикального распределения температуры от воды до атмосферы на реке Амур (Хэйлуцзян) в январе 2014 и 2015 г., выполненных соисполнителями Проекта из Тайюаньского технологического университета (КНР). Описаны измерительные средства и методологии измерений [16]. Для моделирования приняты физические характеристики пресноводного льда [3].

На рис. 1 показана вариация температуры воздуха в январе 2014 г. и сопоставлены измеренные толщины льда (точки) и рассчитанные по формуле (7.3) величины (сплошная линия). Согласование измеренных и рассчитанных толщин льда можно признать вполне удовлетворительным как по величине, так и по характеру изменения, который соответствует характеру вариации температуры воздуха (проявляется в изменении кривизны расчетной кривой).

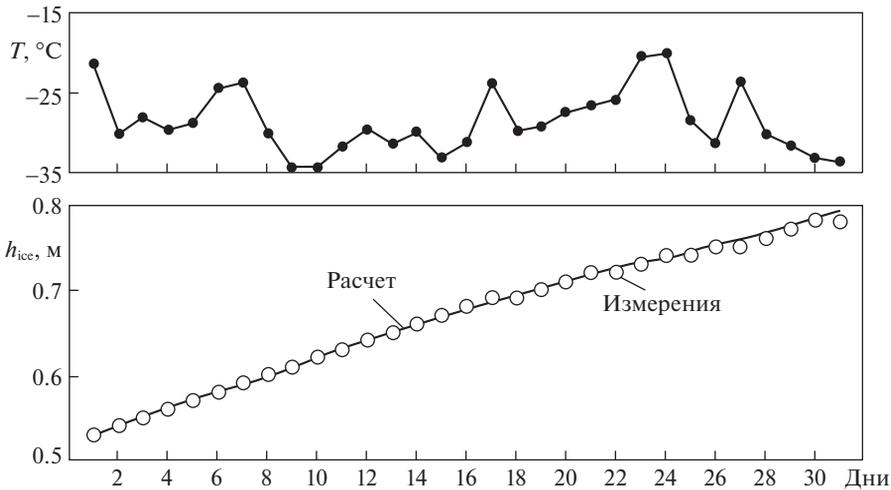


Рис. 1. Сравнение измеренных толщин льда (точки) и рассчитанных (сплошная кривая) толщин льда по среднесуточным температурам атмосферного воздуха (точки и ломаная линия).

В период 6–10 января 2015 г. выполнена регистрация вертикального распределения температуры от водной среды до атмосферы (каждые 8 ч) и измерения толщины льда. На рис. 2 показаны характерные вертикальные профили температуры: 1 – 16:00 (период потепления) и 2 – 08:00 (похолодание). Стрелками показаны границы слоев: вода–лед, лед–снег и снег–атмосфера, которые определены по резкому изменению градиента температуры [17].

На рис. 3 сопоставлены измеренные в январе 2015 г. (точки) и рассчитанные по формуле (7.3) (сплошная кривая) толщины льда, а также зарегистрированные температуры воздуха. Росту толщины льда по данным измерений достаточно хорошо соответствуют результаты расчета, при этом резким изменениям температуры воздуха соответствует изменение интенсивности намерзания льда.

Для моделирования вертикальных профилей температуры в ледовом покрове реки Амур в январе 2015 г. с использованием модели (7.1) и (7.2) требовалось задать вариацию температуры атмосферного воздуха, интенсивность солнечной радиации, начальную толщину ледового покрова и начальный профиль температуры.

Измеренные температуры воздуха были “приведены” к условиям отсутствия теплоизолирующего снежного покрова в соответствии с формулой (3.1), и результаты пересчета показаны на рис. 4.

Интенсивность солнечной радиации определена применительно к географической широте места полевых измерений формулой (4.3). Начальный профиль температуры внутри льда принят линейным, соответствующим начальному перепаду между водной средой и зарегистрированной температурой на поверхности льда. Результаты моделирования сопоставлены с данными полевых измерений на рис. 5 и 6. На рисунках в соответствующем масштабе показан слой снега, разделяющий лед и атмосферу. Вертикальная координата нормирована по толщине ледового покрова. Эти материалы показывают достаточно хорошее соответствие результатов расчетов по разработанной модели (7.1) и (7.2) результатам полевых измерений.

Исключение составляют слои, примыкающие к границе раздела лед–снег, где имеют место наиболее высокие градиенты температуры во времени. Это обстоятельство следует связывать с тем, что локальная теплопроводность пресноводного льда и снега

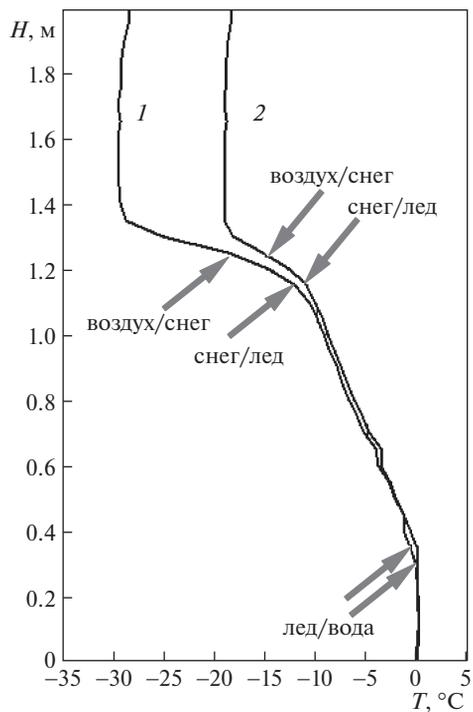


Рис. 2. Измеренные вертикальные профили температуры воздуха, снега, льда и водной массы, и границы их раздела.

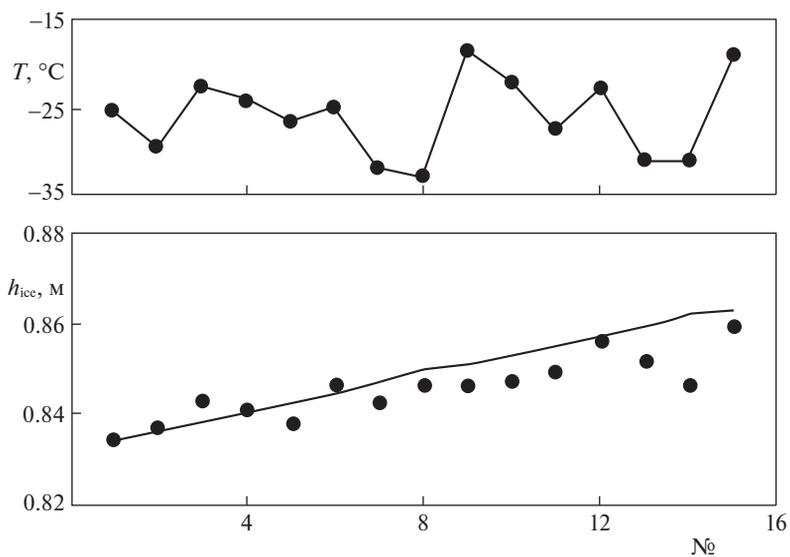


Рис. 3. Сравнение измеренных толщин льда (точки) и рассчитанных (сплошная кривая) толщин льда по среднесуточным температурам атмосферного воздуха (точки и ломаная линия).

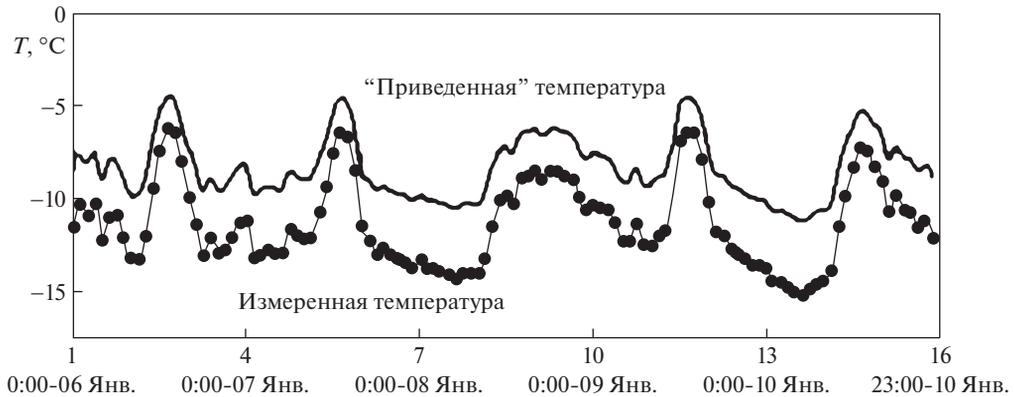


Рис. 4. Измеренная температура воздуха в период регистрации вертикальных профилей температуры в ледовом покрове и температура, “приведенная” к условиям отсутствия снежного покрова.

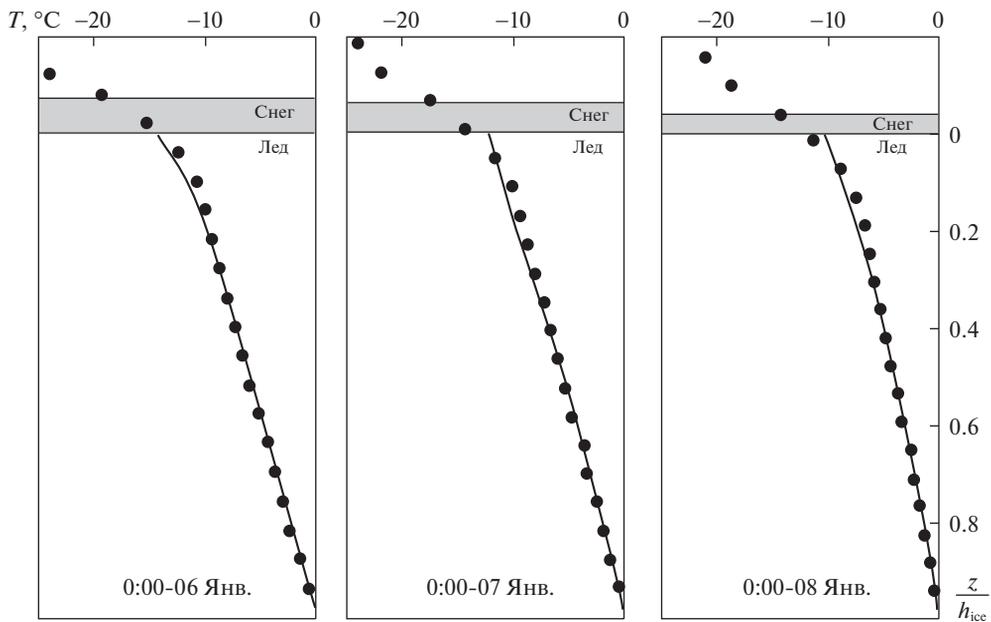


Рис. 5. Сопоставление моделирования температуры внутри ледового покрова (сплошная линия) с данными полевых измерений (точки).

зависят от их температуры, а процесс вариации их температуры обладает определенной “инерцией”. Этот эффект в наибольшей степени проявляется в результатах измерений, выполненных после повышения температуры атмосферного воздуха до максимальных значений в конце светового дня (рис. 7).

Заключение. Сформулирована и поставлена краевая задача в форме уравнения теплопроводности, характеризующая вариацию температуры льда под действием измене-

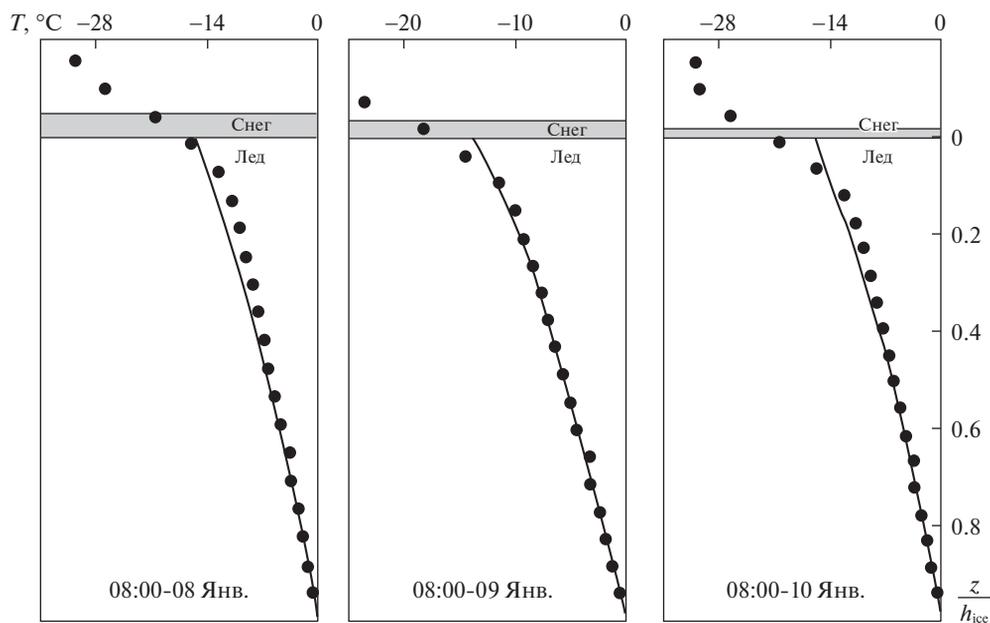


Рис. 6. Сопоставление моделирования температуры внутри ледового покрова (сплошная линия) с данными полевых измерений (точки).

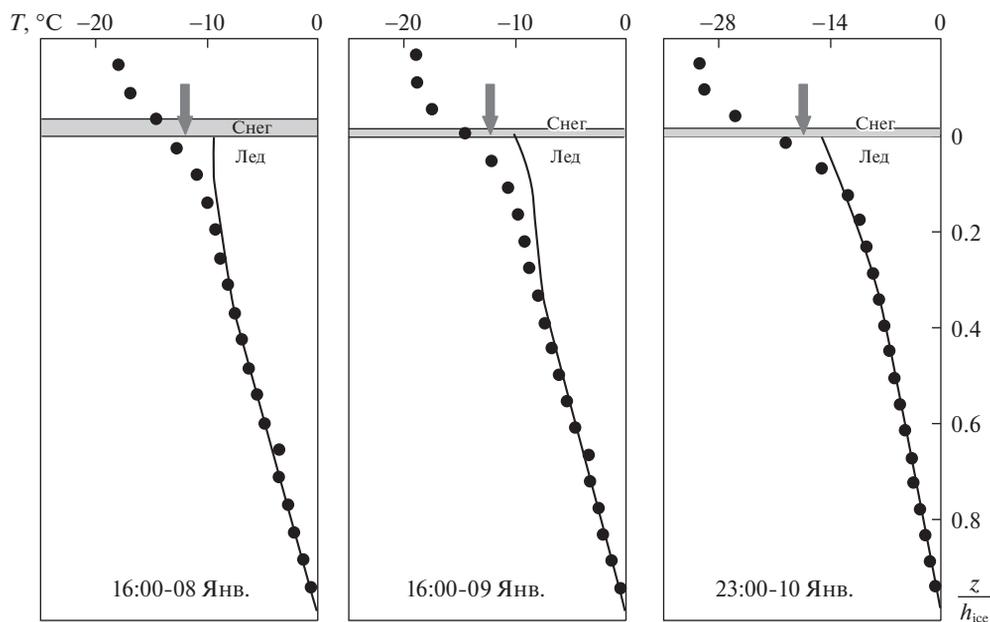


Рис. 7. Сопоставление моделирования температуры внутри ледового покрова (сплошная линия) с данными полевых измерений (точки), выполненных после резкого повышения температуры атмосферного воздуха.

ния температуры примыкающего атмосферного воздуха, солнечной радиации и потока тепла кристаллизации льда на границе с водной средой. Условие Стефана, определяющее этот поток и требующее совместного решения уравнений теплопроводности для льда и водной среды, заменено на функцию толщины льда и температуры воздуха, которая аппроксимирует установленную по результатам полевых измерений известную связь толщины речного льда с накопленной суммой среднесуточных отрицательных температур воздуха и толщиной снежного слоя на поверхности льда.

Построено решение краевой задачи в виде суммы частных решений, которые удовлетворяют всему комплексу граничных условий на границах с атмосферой и с водной средой. Сопоставление результатов с полевыми измерениями участников Проекта из КНР, выполненных на реке Амур (Хэйлунцзян), показало их хорошее согласование по росту толщины льда, по величинам температуры льда и по форме вертикальных профилей температуры в толще льда.

Созданная модель рекомендуется для практического использования с целью оценки прочности льда по данным прогноза температуры воздуха для расчета ледовых нагрузок на инженерные сооружения.

Исследования выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-58-53013-ГФЕН_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Донченко Р.В. Ледовый режим рек СССР. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 242 с.
2. Лепихин А.П. К расчету ледяного покрова на пресноводных водных объектах // Геогр. вестн. 2008. № 1. С. 1–13.
3. Красс М.С., Мерзликин В.Г. Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 262 с.
4. Доронин Ю.П. Физика океана. СПб.: РГГМУ, 2000. 340 с.
5. Leppäranta Matti. Freezing of Lakes and the Evolution of their Ice Cover. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015. 301 p.
6. Voyevodin A.F., Grankina T.B. Mathematical Modeling of the Ice-Thermal regime of Water Body // Proceedings of the 19th IAHR International Symposium on Ice, Vancouver, Canada, 2008. V. 1. P. 727–735.
7. Cuffey K.M., Paterson W.S.B. The Physics of Glaciers. Elsevier, 2010. 716 p.
8. Гончаров В.К., Клементьева Н.Ю., Jianmin Qin и др. Прогнозирование роста толщины пресноводного ледового покрова // Труды международной конференции по судостроению и океанотехнике НАОЕ2016, 2016. Сборник статей. С. 219–222.
9. Goncharov V.K., Klementeva N.Yu., Jianmin Qin et al. Investigation of correlation between the temperature on air-snow and snow-ice interfaces and the atmospheric air temperature // J.Earth Sci. and Eng. 2016. V. 6. № 5. P. 245–253.
10. Чижов А.Н. Формирование ледяного покрова и пространственное распределение его толщины. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 128 с.
11. Жуков Л.А. Общая океанология. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 376 с.
12. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
14. Kreith F., Black W.Z. Basic Heat Transfer. Harper and Row Publishers, 1980. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.
15. Великанов М.А. Динамика русловых потоков. Т. 1. Структура потока. М.: Гостехиздат, 1954. 323 с.
16. Qin Jianmin, Wang Lijuan, Goncharov V.K. et al. Realization of the Auto-Measurement of ice in riverway based on the difference of the air, ice and water // Proc. 23th IAHR Symp. on Ice, Lahti, Finland, 2010. V. 1. P. 571–580.
17. Hammonds K., Lieb-Lappen R., Baker I., Wang X. Investigating the thermophysical properties of the ice-snow interface under a controlled temperature and gradient. Part I: Experiments and observations // Cold Regions Sci.&Technol., 2015. V. 120. P. 157–167.

Modelling of the Freshwater Ice Cover Temperature when the Atmospheric Air Temperature Variation

V. K. Goncharov^{a,#}

^a Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russia

[#]e-mail: vkgonch@mail.ru

The thermal conductivity equation simulates the temperature field formation within ice cover column process and its solution require parameterization of the boundary conditions on the atmosphere – ice and ice – water interfaces that allowed the analytical solution. The most complicated in this respect is the condition on the ice – water space interface, where the process of ice crystallization takes place, and hereupon the heat releases and the ice thickness increase (Stephan condition). This problem was solved by means of the ice cover thickness growth rate dependence on atmospheric air temperature and ice thickness parameterization on the data base of the Siberian river ice cover observations. Obtained analytical solution is compared with the field measurements of temperature within ice cover and its thickness rate on the Amur River.

Keywords: atmosphere, water space, ice cover, temperature, strength, heat flow, crystallization

REFERENCES

1. *Donchenko R.V.* Ice Regime of the USSR Rivers. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1987. 242 p.
2. *Lepikhin A.P.* To Calculation of the ice cover on fresh-water basins // Geogr. Bull., 2008, no. 1, pp. 1–13.
3. *Krass M.S., Merzlikin V.G.* The Radiative Thermophysics of Snow and Ice. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1990. 262 p.
4. *Doronin Yu.P.* Physics of the Ocean. Saint-Petersburg: RSGMU, 2000. 340 p.
5. *Leppäranta Matti.* Freezing of Lakes and the Evolution of their Ice Cover. Heidelberg: Springer, 2015. 301 p.
6. *Voyevodin A.F., Grankina T.B.* Mathematical modeling of the ice-thermal regime of water body // Proc. 19th IAHR Int. Symp. on Ice, Vancouver, Canada, 2008. Vol. 1. pp. 727–735.
7. *Cuffey K.M., Paterson W.S.B.* The Physics of Glaciers. Elsevier, 2010. 716 p.
8. *Goncharov V.K., Klementeva N.Yu., Jianmin Qin et al.* Forecast of the fresh-water ice cover thickness increasing // Proc. Int. Conf. on Naval Architect and Oceantechnics NAOE2016, Saint-Petersburg, Russia, 2016. Pp. 219–222.
9. *Goncharov V.K., Klementeva N.Yu., Jianmin Qin et al.* Investigation of correlation between the temperature on air-snow and snow-ice interfaces and the atmospheric air temperature // J. Earth Sci. & Engng., 2016, vol. 6, no. 5, pp. 245–253.
10. *Chizhov A.N.* Formation of the Ice Cover and Its Thickness Spatial Distribution. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1990. 128 p.
11. *Zhukov L.A.* General Oceanology. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1976. 376 p.
12. *Budack B.M., Samarsky A.A., Tikhonov A.N.* Collection of Problems in Mathematical Physics. N.Y.: Dover, 1988. 768 p.
13. *Tichonov A.N., Samarsky A.A.* Equation of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1977. 736 p.
14. *Kreith F., Black W.Z.* Basic Heat Transfer. Harper and Row Publ., 1980. 512 p.
15. *Velicanov M.A.* Dynamics of Streamflows. Vol. 1. Structure of Flow. Moscow: Gostehizdat, 1954. 323 p.
16. *Qin Jianmin, Wang Lijuan, Goncharov V.K. et al.* Realization of the Auto-Measurement of ice in riverway based on the difference of the air, ice and water // Proc. 23th IAHR Symp. on Ice, Lahti, Finland, 2010. Vol. 1. pp. 571–580.
17. *Hammonds K., Lieb-Lappen R., Baker I., Wang X.* Investigating the thermophysical properties of the ice-snow interface under a controlled temperature and gradient. Part I: Experiments and observations // Cold Regions Sci.&Technol., 2015, vol. 120, pp. 157–167.

УДК 539.4

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН**

© 2022 г. А. П. Янковский*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия***e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 27.07.2021 г.

После доработки 10.11.2021 г.

Принята к публикации 25.11.2021 г.

Разработана модель термоупруговязкопластического деформирования композитного материала, перекрестно армированного непрерывными волокнами в произвольных направлениях. Материалы компонентов композиции изотропны, их пластическое деформирование описывается теорией течения с изотропным упрочнением при учете зависимости функции нагружения от температуры и скорости деформирования. Построена математическая модель термоупруговязкопластического изгибного поведения армированных пластин. Слабое сопротивление поперечным сдвигам таких тонкостенных конструкций учитывается в рамках теории Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность описывается в приближении Кармана. Учитывается связанность механической и теплофизической составляющих задачи о динамическом неупругом деформировании композитных пластин. Температура по толщине конструкций аппроксимируется полиномами разных порядков. Решение сформулированной двумерной задачи строится на основе явной численной схемы. Исследовано термоупруговязкопластическое поведение плоско-перекрестно и пространственно армированных стеклопластиковых и металлокомпозитных пластин, динамически избегаемых под действием воздушной взрывной волны. Показано, что для адекватного определения температуры в таких конструкциях ее необходимо аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков по толщине пластин. Продемонстрировано, что относительно тонкие композитные пластины нагреваются на 15...30°C, а относительно толстые – на 1.5...2.5°C. В силу такого малого уровня нагрева армированных конструкций их динамический расчет при действии нагрузок типа воздушной взрывной волны можно проводить без учета теплового воздействия при отсутствии дополнительных источников тепла немеханического происхождения. При этом обязательно необходимо учитывать чувствительность пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования.

Ключевые слова: гибкие пластины, пространственное армирование, термоупруговязкопластическое деформирование, связанные задачи, теория изгиба Амбарцумяна, нагрузки взрывного типа, явная численная схема

DOI: 10.31857/S003282352201009X

1. Введение. Тонкостенные армированные конструкции типа пластин и оболочек широко используются в инженерной практике [1–6]. Современные изделия из композиционных материалов (КМ) часто подвергаются интенсивному силовому и тепловому нагружению [5–7], при котором компоненты композиции могут вести себя неупруго [7–10]. Поэтому проблема моделирования термоупругопластического поведе-

ния КМ-конструкций является актуальной. Однако на данный момент времени теоретические исследования, выполненные в этом направлении, немногочисленны [7–11]. Обычно моделируется линейно-упругое поведение КМ-изделий [5–7, 12–16]. Упругопластическое динамическое деформирование слоистых тонкостенных элементов конструкций с изотропными слоями рассматривалось в [7]. Аналогичное механическое поведение армированных пластин моделировалось в [17]. Возникающий при этом тепловой отклик в [7, 17] не учитывался. Однако известно, что высокоинтенсивное кратковременное силовое воздействие на конструкцию может приводить к значительному выделению тепловой энергии [5]. При наличии же температурного поля компоненты композиции могут изменить свои физико-механические свойства [18, 19]. Кроме того, при динамическом нагружении пластин и оболочек необходимо учитывать и такой экспериментальный факт [18, 19], как чувствительность пластических свойств материалов к изменению скорости их деформирования (упруговязкопластичность [20]). Оба эти обстоятельства могут существенно отразиться на неупругом динамическом поведении тонкостенных КМ-конструкций. Некоторые варианты теории термоупругопластического поведения однородных материалов (в рамках теории пластического течения) рассматривались в [21], но при этом не учитывались их вязкопластические свойства. Упруговязкопластическое деформирование армированных пластин моделировалось в [22], но тепловой отклик при этом не рассматривался. Структурные модели механики композитов, учитывающие влияние теплового воздействия на упруговязкопластическое поведение материалов композиции, на данный момент времени не разработаны. Согласно терминологии, принятой в [20], такое деформирование КМ будем называть термоупруговязкопластическим. При этом следует принимать во внимание и связанность температурной и механической составляющей динамической задачи.

Для учета возможного ослабленного сопротивления тонкостенных КМ-конструкций поперечному сдвигу и расчета волновых процессов, которые возникают в них при динамическом нагружении, традиционно используют неклассические теории Рейснера [5, 7, 12, 23], Редди [13, 14] или Амбарцумяна [15, 17, 22]. Реже используются более точные теории, как правило, базирующиеся на гипотезе ломаной линии [7, 16].

Численное интегрирование физически и геометрически нелинейных динамических задач для тонкостенных конструкций обычно осуществляют, применяя явные схемы [7, 17, 22, 24] или неявные методы Ньюмарка [9, 25].

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено моделированию термоупруговязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин при учете возможного их слабого сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение возникающих при этом связанных термомеханических задач предполагается строить на основе явных пошаговых алгоритмов.

2. Численно-аналитическое моделирование термоупруговязкопластического деформирования КМ. Рассматривается КМ, состоящий из матрицы, регулярно усиленной N семействами волокон в разных направлениях с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Как и в [21, 22], предполагаем, что малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ однородного изотропного k -го материала композиции можно представить в виде упругих $e_{ij}^{(k)}$, несжимаемых пластических $p_{ij}^{(k)}$ и температурных $\delta_{ij}\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ составляющих:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + p_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\varepsilon_{\Theta}^{(k)}; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N \quad \left(p_{ii}^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \int_{t_0}^t \alpha_k \dot{\Theta} dt \right), \quad (2.1)$$

где Θ – температура; α_k – коэффициент линейного температурного расширения k -го компонента композиции ($k = 0$ – связующее, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); t_0 –

начальный момент времени t ; δ_{ij} – символ Кронекера; точка – производная по времени t . Упругие деформации $e_{ij}^{(k)}$ связаны с напряжениями в k -м материале композиции законом Гука

$$\bar{e}_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} / (2G_k), \quad e_0^{(k)} = \sigma_0^{(k)} / (3K_k); \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, & \bar{e}_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}e_0^{(k)}, & e_0^{(k)} &= \varepsilon_0^{(k)} - \varepsilon_\Theta^{(k)} \\ \sigma_0^{(k)} &= \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)}, & \varepsilon_0^{(k)} &= \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}^{(k)}, & 2G_k &= \frac{E_k}{1 + \nu_k}, & 3K_k &= \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$s_{ij}^{(k)}$, $\bar{e}_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиаторов напряжений и упругих деформаций; $\sigma_0^{(k)}$, $\varepsilon_0^{(k)}$, $e_0^{(k)}$ – средние напряжение, деформация и упругая деформация соответственно; E_k , ν_k – модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го компонента. При учете термочувствительности упругих свойств материала величины E_k , ν_k , G_k , K_k и α_k в соотношениях (2.1)–(2.3) являются функциями температуры ($G_k = G_k(\Theta)$ и т.д.).

Пластическое течение k -го материала композиции ассоциировано с поверхностью нагружения $f_k = 0$, соответствующей условию текучести Мизеса [20–22]:

$$f_k(T_k, \chi_k, H_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, H_k, \Theta) = 0; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} T_k &= \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, & \chi_k &= \int_0^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, & H_k &= \sqrt{2\xi_{ij}^{(k)}\xi_{ij}^{(k)}}, & \xi_{ij}^{(k)} &= \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} \\ & & & & & & i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\xi_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиатора скорости механических составляющих деформаций; χ_k – параметр упрочнения (параметр Одквиста); H_k – интенсивность скоростей деформаций сдвига; $\tau_s^{(k)}$ – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, равный значению интенсивности касательных напряжений T_k при определенных значениях температуры Θ , интенсивности скорости деформаций H_k и накопленной пластической деформации χ_k в текущий момент времени t . Начальная поверхность нагружения $\tau_s^{(k)}(H_k, \Theta) = \tau_s^{(k)}(0, H_k, \Theta)$ – это обычный предел текучести, зависящий от температуры Θ и скорости деформирования H_k [18, 19]. (В этом и следующем разделах, если не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.)

С одной стороны, в соотношении (2.4) при учете выражений (2.5) функция $\tau_s^{(k)}$ отличается от рассмотренной в [22] дополнительным аргументом Θ ; с другой стороны, $\tau_s^{(k)}$ отличается от случая, рассмотренного в [21], наличием аргумента H_k . Поэтому, повторяя рассуждения из [21, 22], в конечном итоге при учете формул (2.1) и (2.2) получим определяющие уравнения термоупруговязкопластического деформирования k -го компонента композиции, которые для удобства дальнейшего изложения целесообразно записать в матричной форме:

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{Y}_k \dot{\varepsilon}_k + \beta_k \dot{\Theta}; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.6)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \left(\sigma_1^{(k)} \sigma_2^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)} \sigma_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{31}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} \right)^T \\
\varepsilon_k &= \left(\varepsilon_1^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} \varepsilon_3^{(k)} \varepsilon_4^{(k)} \varepsilon_5^{(k)} \varepsilon_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} 2\varepsilon_{23}^{(k)} 2\varepsilon_{31}^{(k)} 2\varepsilon_{12}^{(k)} \right)^T \\
s_k &= \left(s_1^{(k)} s_2^{(k)} s_3^{(k)} s_4^{(k)} s_5^{(k)} s_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{23}^{(k)} s_{31}^{(k)} s_{12}^{(k)} \right)^T \\
\xi_k &= \left(\xi_1^{(k)} \xi_2^{(k)} \xi_3^{(k)} \xi_4^{(k)} \xi_5^{(k)} \xi_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\xi_{11}^{(k)} \xi_{22}^{(k)} \xi_{33}^{(k)} \xi_{23}^{(k)} \xi_{31}^{(k)} \xi_{12}^{(k)} \right)^T \\
Z_k &= \bar{Z}_k - G_k \bar{\bar{Z}}_k, \quad Y_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{Z}}_k; \quad k = 0, 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$Z_k, Y_k, \bar{Z}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{Z}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы, $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$ – шести-компонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых имеют выражения

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij}G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{il}^{(k)} = G_k \\
\beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_m^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right] \\
\beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right] \quad (i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}) \\
\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad \lambda_k = \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$A_k = \frac{c_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}$$

$$\tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k > 0 \end{cases}$$

$$W_k = G_k s_k^T \dot{\varepsilon}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \dot{\varepsilon}_k \tag{2.10}$$

$$T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

\bar{G}_k – касательный модуль сдвига при пластическом деформировании; индекс “т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам l в равенствах (2.9) суммирования нет. Соотношения (2.10) задают функцию переключения, которая при $c_k = 0$ определяет условия термоупругого деформирования, разгрузки или нейтрального нагружения, а при $c_k = 1$ – активное нагружение при пластическом деформировании k -го компонента композиции. Равенства (2.7) задают соответствия между шестью компонентами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектора-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}$).

Если пластические свойства материала не зависят от скорости деформирования ($\tau_H^{(k)} \equiv 0$), то уравнения (2.6) при учете соотношений (2.8)–(2.10) редуцируются в определяющие соотношения термоупругопластического деформирования k -го компонента композиции, которые полностью совпадают с уравнениями, полученными в [21]

при отсутствии трансляционного упрочнения. Если же рассматривается изотермическая задача ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то уравнение (2.6) редуцируется в матричное соотношение (2.2) из [22]. При $\dot{\Theta} \equiv 0$ равенство (2.6) связывает между собой скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$ и деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ и вторые производные по времени от деформаций $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$. Ранее в [27] на основе теории дислокаций было получено, что определяющее уравнение вязкопластичности в одномерном случае должно связывать между собой скорости напряжения и деформации и вторую производную по времени от деформации. Таким образом, соотношение (2.6) обобщает определяющие уравнения, полученные в [21, 22], и качественно полностью соответствует результатам работы [27].

Как и в [22], условия активного нагружения k -го материала композиции можно записать в форме, отличной от выражения (2.10):

$$c_k = 1 \quad \text{при} \quad T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) \quad \text{и} \quad \dot{T}_k - \tau_H^{(k)} \dot{H}_k - \tau_\Theta^{(k)} \dot{\Theta} > 0; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.11)$$

Из экспериментов известно [18, 19, 26], что $\tau_H^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) > 0$ и, как правило, $\tau_\Theta^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) < 0$ (исключение составляют разве что стали в диапазоне температур $0 \leq \Theta \leq 110 \dots 120^\circ\text{C}$), поэтому из соотношений (2.11) вытекает: 1) в упругопластическом случае ($\dot{\Theta} \equiv 0$ и $\tau_H^{(k)} \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при увеличении интенсивности касательных напряжений ($\dot{T}_k > 0$); 2) при постоянстве T_k ($\dot{T}_k \equiv 0$) и нечувствительности материала к скорости деформирования ($\tau_H^{(k)} \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при увеличении температуры ($\dot{\Theta} > 0$); 3) в изотермическом случае ($\dot{\Theta} \equiv 0$) при отсутствии приращений интенсивности напряжений ($\dot{T}_k \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при уменьшении скорости деформирования ($\dot{H}_k < 0, 0 \leq k \leq N$). Эти результаты полностью согласуются с известными экспериментальными данными [18, 19, 26].

Как отмечалось во Введении, решение моделируемой задачи предполагается строить с использованием явных численных схем [7, 22, 24, 28], поэтому значения неизвестных функций будем вычислять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Имея целью воспользоваться результатами работы [22], считаем, что при $t = t_{n-1}, t_n$ уже известны значения следующих величин

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\Theta}^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\ \Theta^m(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где \mathbf{r} – вектор места. По аналогии с [22] преобразуем второе и третье слагаемые в правой части соотношения (2.6), используя формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по Δ [29]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left(\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} \right), \quad \Theta^n - \Theta^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left(\dot{\Theta}^n + \dot{\Theta}^{n-1} \right); \quad 0 \leq k \leq N,$$

откуда следует

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \frac{2}{\Delta} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} \right), \quad \dot{\Theta}^n = \frac{2}{\Delta} \left(\Theta^n - \Theta^{n-1} \right); \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.13)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \quad \Theta \equiv \Theta + \frac{\Delta}{2} \dot{\Theta}; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.14)$$

Из равенств (2.14) при учете предположений (2.12) получаем, что шестикомпонентный вектор-столбец $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ и величины Θ , $\dot{\Theta}$ в правых частях соотношений (2.13) в текущий момент времени t_n уже известны. Подставим выражения (2.13) в правую часть уравнения (2.6), тогда при учете обозначений, аналогичных (2.12), при $t = t_n$ будем иметь

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{B}_k \equiv \mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv -\frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\Theta - \dot{\Theta} \right) \mathbf{p}_k; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.16)$$

\mathbf{B}_k – 6×6 -матрица; \mathbf{p}_k – шестикомпонентный вектор-столбец.

Матричное равенство (2.15) – это искомое определяющее уравнение для термоупруговязкопластического k -го материала композиции. Согласно соотношениям (2.8)–(2.10) и (2.16), матрицы \mathbf{Z}_k , \mathbf{Y}_k , \mathbf{B}_k и векторы-столбцы \mathbf{p}_k , \mathbf{p}_k зависят от решения задачи, поэтому уравнение (2.15) является нелинейным. Для его линеаризации, как и в [22], используем метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [24].

Тогда при $t = t_n$ на текущей итерации этого метода элементы матрицы $\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} n \\ D_{ij}^{(k)} \end{pmatrix}$ и

вектора $\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} n \\ p_i^{(k)} \end{pmatrix}$ в определяющем уравнении (2.15) будут известны.

Линеаризованное матричное равенство (2.15) формально полностью совпадает с соотношением (2.10) в [22]. Поэтому, используя для КМ исходные допущения, аналогичные принятым в [22, 30], и повторяя рассуждения из [22], на базе соотношения (2.15) в рассматриваемый момент времени t_n на текущей итерации получим следующее линеаризованное матричное уравнение, характеризующее термоупруговязкопластическое состояние КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{B} \equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k,$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы осредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции, по структуре аналогичные (2.7); \mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; ω_0 – относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции; \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k – 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матри-

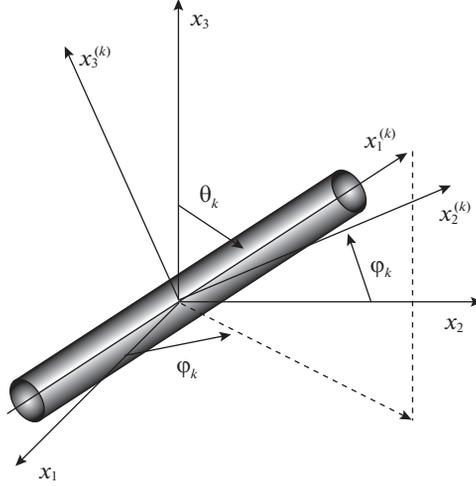


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с арматурой k -го семейства.

цам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , ζ_k – шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбцов $\zeta_k = (\zeta_i^{(k)})$ вычисляются по формулам:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.19)$$

$$\zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}); \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots \quad (2.20)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0 \quad (2.21)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k; \quad 1 \leq k \leq N$$

Не выписанные в равенствах (2.20) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [30]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k определяют преобразования вектор-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. соотношения (2.7)) при переходе от глобальной прямоугольной системы координат x_j к локальной прямоугольной системе $x_i^{(k)}$, связанной с волокнами k -го семейства. Ось $x_1^{(k)}$ при этом предполагается направленной вдоль арматуры и задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = 1, 2, 3$) определяются равенствами (2.21). (В выражениях (2.18) и (2.19) опущен верхний индекс n .)

Как и в [22], при выводе соотношений (2.17) и (2.18) попутно получаем линейризованные матричные равенства

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k; \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.22)$$

Первое равенство (2.22) при $t = t_n$ на данной итерации выражает скорости деформаций связующего материала $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ через скорости осредненных деформаций КМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Второе соотношение (2.22) определяет скорости деформаций арматуры k -го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

Согласно формулам (2.9), (2.10) и (2.18)–(2.21) в момент времени t_n на текущей итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и вектор-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в равенствах (2.17) и (2.22) известны. Если тепловое воздействие не учитывается ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то соотношение (2.17) при учете выражений (2.14), (2.16), (2.18) и (2.19) редуцируется в определяющее уравнение для КМ, полученное в [22] в предположении об упруговязкопластическом поведении компонентов композиции. Следовательно, соотношение (2.17) обобщает структурные уравнения, выведенные в [22].

Предположим, что в текущий момент времени t_n итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, т.е. в соотношении (2.17) известны скорости деформаций КМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$. Тогда по формулам (2.22) последовательно определяем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, а из равенств (2.15) – скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$ в этих же материалах. Используя центральные конечные разности по времени на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, получаем

$$\frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ \boldsymbol{\sigma}_k & - \boldsymbol{\sigma}_k \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n, \quad \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k & - \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.23)$$

где правые части уже вычислены, а в левых частях вектор-столбцы $\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n-1}$ предполагаются уже известными из решения рассматриваемой задачи в предыдущий момент времени t_{n-1} . Следовательно, из равенств (2.23) по явной схеме можем определить напряжения $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1}$ в k -м компоненте композиции в следующий момент времени t_{n+1} . После этого на основании закона Гука (см. формулы (2.2) и (2.3)) с учетом соответствий (2.7) при $t = t_{n+1}$ можем вычислить и упругие деформации

$$e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{E_k} \begin{pmatrix} n+1 & n+1 & n+1 \\ \boldsymbol{\sigma}_{ii}^{(k)} & - \nu_k \boldsymbol{\sigma}_{jj}^{(k)} & - \nu_k \boldsymbol{\sigma}_{ll}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2G_k} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} \quad (2.24)$$

$$i \neq j \neq l \neq i, \quad i, j, l = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N,$$

где суммирование по повторяющимся индексам нет.

Из соотношения (2.1) при учете выражения для $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}$ в момент времени t_{n+1} будем иметь

$$P_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \bar{\alpha}^{(k)} (\Theta - \Theta) - \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}, \quad \bar{\alpha}^{(k)} \equiv \frac{1}{2} \left(\alpha^{(k)} + \alpha^{(k)} \right) \quad (2.25)$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

где правые части известны из равенств (2.23), (2.24) и предположения о том, что температура Θ уже определена из уравнения теплового баланса для КМ по явной чис-

ленной схеме (см. ниже), а температурная деформация $\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ известна из решения в предыдущий момент времени t_{n-1} : $\varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \varepsilon_{\Theta}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)}(\Theta - \Theta)$.

Согласно второму соотношению (2.5), для вычисления параметра Одквиста χ_k при $t = t_{n+1}$ имеем равенство

$$\chi_k = \int_0^{t_{n+1}} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi_k + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{2dp_{ij}^{(k)} dp_{ij}^{(k)}} \approx \chi_k + \sqrt{2\Delta p_{ij}^{(k)} \Delta p_{ij}^{(k)}}, \quad (2.26)$$

где

$$\Delta p_{ij}^{(k)} \equiv p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.27)$$

В правой части выражений (2.27) значения пластических деформаций уже известны (см. соотношение (2.25)), а значит в равенстве (2.26) известно последнее слагаемое. Таким образом, по формуле (2.26) при учете выражений (2.23)–(2.25) и (2.27) можно рассчитать величину параметра Одквиста χ_k при $t = t_{n+1}$. С вычислительной точки зрения такой способ определения величины χ_k удобен тем, что в следующий момент времени t_{n+1} он не требует уточнения параметра Одквиста в процессе итерационной процедуры по методу переменных параметров упругости.

3. Теплофизическая структурная модель армированного материала. При моделировании динамического термоупруговязкопластического деформирования КМ необходимо учитывать связанность механической и теплофизической задач. Поэтому кроме определяющих механических соотношений (2.17) необходимо использовать закон теплопроводности Фурье для КМ, который в матричной форме можно записать так [31]:

$$\mathbf{q} = -\Lambda \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1 \ g_2 \ g_3)^T = \text{grad } \Theta, \quad \Lambda = \left(\omega_0 \Lambda_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \Lambda_k \bar{\mathbf{E}}_k \right) \bar{\mathbf{H}} \quad (3.2)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \left(\omega_0 \bar{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \bar{\mathbf{E}}_k \right)^{-1}, \quad \bar{\mathbf{E}}_k = \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \bar{\mathbf{C}}_k; \quad 1 \leq k \leq N,$$

q_i, g_i – компоненты вектора теплового потока и градиента температуры Θ ; $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – симметричная 3×3 -матрица эффективных коэффициентов теплопроводности КМ; $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^{(k)})$ – то же для k -го компонента композиции (в случае изотропного материала $\lambda_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \lambda_k, i, j = 1, 2, 3, 0 \leq k \leq N$); $\bar{\mathbf{I}}$ – единичная 3×3 -матрица; $\mathbf{L}_k = (l_{ij}^{(k)})$ – ортогональная 3×3 -матрица направляющих косинусов $l_{ij}^{(k)}$ (см. выражения (2.21)); $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$ – матрица, обратная 3×3 -матрице $\bar{\mathbf{V}}_k$; $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{E}}_k, \bar{\mathbf{C}}_k$ – 3×3 -матрицы, причем элементы $\bar{b}_{ij}^{(k)}$ и $\bar{c}_{ij}^{(k)}$ матриц $\bar{\mathbf{V}}_k$ и $\bar{\mathbf{C}}_k$ вычисляются по формулам

$$\bar{b}_{11}^{(k)} = 1, \quad \bar{b}_{ii}^{(k)} = 0, \quad \bar{b}_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}, \quad \bar{c}_{1j}^{(k)} = l_{1j}^{(k)}, \quad \bar{c}_{ij}^{(k)} = l_{im}^{(k)} \lambda_{mj}^{(0)} \quad (3.3)$$

$$i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq N$$

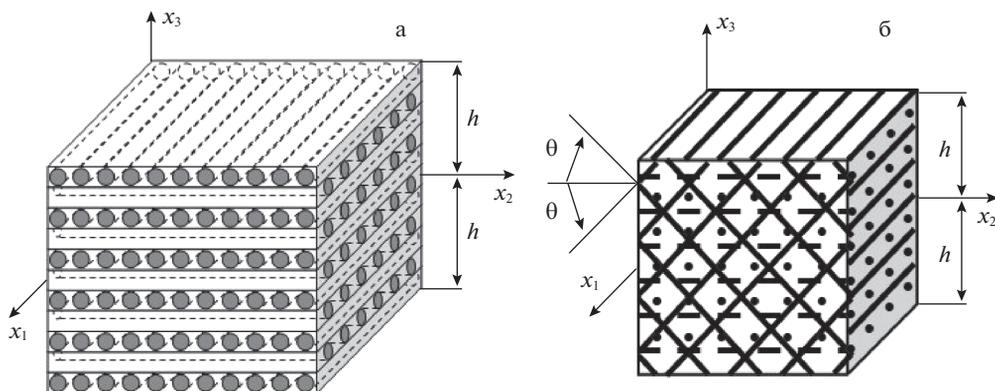


Рис. 2. Элемент КМ-пластины с ортогональной 2D-структурой армирования (а) и с пространственной 4D-структурой армирования (б).

Если материалы композиции термочувствительны, то $\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}(\Theta)$ ($0 \leq k \leq N$), поэтому согласно формулам (3.2), (3.3) и эффективные коэффициенты КМ в выражении (3.1) зависят от температуры ($\Lambda = \Lambda(\Theta)$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\Theta)$, $i, j = 1, 2, 3$).

4. Постановка задачи термоупруговязкопластического изгибного деформирования КМ-пластины. Рассматриваем динамическое поведение КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 2), с которой свяжем декартову прямоугольную систему координат x_i : плоскость Ox_1x_2 — срединная; ось Ox_3 — поперечная ($|x_3| \leq h$). Конструкция может быть армирована плоско-перекрестно (рис. 2а) или пространственно (рис. 2б). Структура армирования в направлении Ox_3 квазиоднородна.

Для моделирования волновых процессов и возможного слабого сопротивления гибкой КМ-пластины поперечному сдвигу (например в случаях плоско-перекрестных структур армирования или в случае пространственной структуры армирования, изображенной на рис. 2б, при сдвиге в плоскости Ox_1x_3) используем теорию Амбарцумяна [15, 17, 22], а геометрическую нелинейность задачи учтем в приближении Кармана.

Замечание. В [22] было показано, что в случае упруговязкопластического деформирования гибкой пластины с произвольными пространственными структурами армирования не удастся построить явную схему типа “крест” при использовании теории Амбарцумяна, если на лицевых поверхностях касательными внешними силами нельзя пренебречь. Очевидно, что этот результат переносится и на более общий случай термоупруговязкопластического деформирования КМ-пластин. В связи с этим в настоящем исследовании рассматриваем только частные случаи пространственных структур армирования и нагружения КМ-конструкций, при которых можно использовать явную численную схему типа “крест”. Поэтому далее предполагаем: исследуется частный, но практически важный случай нагружения пластины, когда на лицевых поверхностях можно пренебречь внешними касательными силами; структура пространственного армирования такова, что если волокно некоторого k -го семейства имеет наклонное направление ($0 < \theta_k < \pi/2$; см. соотношения (2.21) и рис. 1), то обязательно найдется другое m -е семейство наклонных волокон с параметрами армирования $\theta_m = \pi - \theta_k$, $\varphi_m = \varphi_k$ и $\omega_m = \omega_k$ ($1 \leq k, m \leq N$, $m \neq k$), изготовленных из того же материала, что и волокна k -го семейства. Структуры с такой особенностью армирования часто встречаются на практике [32]. В частности, к ним относится структура армиро-

вания, изображенная на рис. 2б, а также структуры с ортогональным пространственным армированием [32] или структуры с плоско-перекрестным армированием [26] (см. рис. 2а).

Согласно этому замечанию, в рамках теории Амбарцумяна осредненные деформации композиции ϵ_{ij} и перемещения точек КМ-пластины U_i аппроксимируем формулами [15, 22]:

$$\epsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \epsilon_{j3}^0 + \partial_j \epsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \quad (4.1)$$

$$\epsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \epsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \epsilon_{i3}^0 \quad (4.2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где u_i – перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; w – прогиб; ϵ_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках отсчетной плоскости; \mathbf{x} – вектор места точек этой плоскости; ∂_i – оператор частного дифференцирования по координате x_i ; Ω – область, занимаемая конструкцией в плане. В равенствах (4.1) и (4.2) неизвестны функции u_i , w и ϵ_{i3}^0 ($i = 1, 2$).

В данной работе моделируется механическое поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому поперечное нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с прилежностью для практических приложений точно можно аппроксимировать так [12]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (4.3)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых плоскостях, которые известны из силовых граничных условий.

Матричное определяющее уравнение (2.17) – это система шести алгебраических уравнений. Согласно соотношениям соответствия, аналогичным (2.7), из третьего уравнения этой системы в дискретный момент времени t_n определяем скорость поперечной линейной деформации композиции

$$\dot{\epsilon}_{33}^n \equiv \dot{\epsilon}_3 = \frac{1}{n} \left(\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\epsilon}_i - p_3 \right), \quad (4.4)$$

где b_{3i} , p_3 ($i = \overline{1, 6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в равенстве (2.17); производная $\dot{\sigma}_3$ известна из выражения (4.3) после дифференцирования по t . Скорости деформаций $\dot{\epsilon}_i$ в правой части равенства (4.4) получаются после дифференцирования по времени формул (4.1), т.е. выражаются через двумерные функции w , \dot{w} , \dot{u}_l и $\dot{\epsilon}_{l3}^0$ ($l = 1, 2$).

К кинематическим соотношениям (4.1) и (4.2) необходимо добавить двумерные уравнения движения гибкой пластины и соответствующие им начальные и граничные условия, которые общеизвестны [15] (см. формулы (16)–(19) в [17]), поэтому не будем их здесь приводить.

В случае связанности механической и теплофизической задач термоупруговязкопластического деформирования армированных пластин дополнительно необходимо использовать уравнение теплового баланса для КМ [33, 34]:

$$\rho c \dot{\Theta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + W(t, \mathbf{r}), \quad (4.5)$$

где

$$\rho \equiv \sum_{k=0}^N \omega_k \rho_k, \quad c \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N \omega_k c_k \rho_k, \quad W(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.6)$$

ρ_k , ρ – объемная плотность k -го компонента композиции и КМ; c_k , c – удельная теплоемкость тех же материалов; W – плотность мощности механической диссипации КМ. Связь между осредненным вектором теплового потока \mathbf{q} и температурой композиции Θ задается законом Фурье (3.1) при учете выражений (3.2) и (3.3).

Предполагаем, что на лицевых поверхностях пластины заданы комбинации тепловых граничных условий II и III рода [35]:

$$\begin{aligned} q_3^{(+)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, h) = \alpha^{(+)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(+)} \right) \Big|_{x_3=h} + q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}) \\ q_3^{(-)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, -h) = -\alpha^{(-)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(-)} \right) \Big|_{x_3=-h} + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициенты теплоотдачи со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостей; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $q_{\infty}^{(\pm)}$ – заданные проекции на ось Ox_3 внешних тепловых потоков через те же поверхности.

На торцевой поверхности Ω_* могут быть заданы тепловые граничные условия общего вида

$$\begin{aligned} q_1 n_1 + q_2 n_2 &= \alpha_* (\Theta - \Theta_{\infty}^*) + q_{\infty}^*(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{x} \in \Gamma \\ |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где α_* , Θ_{∞}^* , q_{∞}^* имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в равенствах (4.7), только на торцевой поверхности; Γ – контур, ограничивающий область Ω ; β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ . В формулах (4.7) и (4.8) q_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненты вектора \mathbf{q} (см. выражения (3.2)). Помимо граничных условий (4.7) и (4.8) в момент времени t_0 необходимо задать начальное условие для температуры Θ .

Для понижения размерности уравнения (4.5) аппроксимируем температуру пластины Θ полиномом M -й степени по поперечной координате x_3 :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^M \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (4.9)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq M$) – искомые двумерные функции; $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния КМ-конструкции.

Согласно сделанному замечанию, при рассматриваемых структурах армирования ось Ox_3 совпадает с одним из главных направлений теплофизической анизотропии КМ, поэтому

$$\lambda_{3i} = \lambda_{i3} \equiv 0; \quad i = 1, 2, \quad (4.10)$$

где λ_{ij} – элементы матрицы Λ в законе Фурье (3.1).

Подставим разложение (4.9) в граничные условия (4.7) и используем соотношение (3.1) при учете равенств (4.10), тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} -\sum_{l=0}^M (-1)^l h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(-)} \left(\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}) \\ \sum_{l=0}^M h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(+)} \left(\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t,\mathbf{x},\pm h)}, \quad (4.12)$$

$\lambda_{33}^{(\pm)}$ – коэффициенты поперечной теплопроводности КМ на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях. Соотношение (4.12) справедливо в случае термочувствительности коэффициента $\lambda_{33} = \lambda_{33}(\mathbf{x}; \Theta)$; в противном случае $\lambda_{33}^{(+)} = \lambda_{33}^{(-)} = \lambda_{33}(\mathbf{x})$ в силу однородности структуры армирования по толщине пластины.

Система двух уравнений (4.11) при учете соотношений (4.10) и (4.12) содержит $M + 1$ неизвестных двумерных функции $\Theta_l(t, \mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq M$). Для замыкания этой системы используем обобщенный метод Галеркина [36], т.е. проинтегрируем уравнение теплового баланса (4.5) по толщине пластины с весами x_3^m ($0 \leq m \leq M - 2$), тогда получим

$$\rho \dot{U}^{(m)} = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M - 2,$$

где

$$U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m \Big|_{-h}^h - m \int_{-h}^h q_3(t, \mathbf{r}) x_3^{m-1} dx_3 =$$

$$= h^m \left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3})$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h W(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta} = c(\Theta),$$

U – удельная внутренняя энергия КМ.

Анализ экспериментальных данных показывает [18, 37], что с приемлемой для практических приложений точностью в достаточно широком диапазоне температур теплоемкость k -го компонента композиции c_k можно аппроксимировать квадратной параболой от разности $\Theta - \Theta^0$ (могут быть использованы и более сложные зависимости $c_k(\Theta - \Theta^0)$, это не принципиально). Тогда согласно второму равенству (4.6) удельную теплоемкость композиции в случае учета термочувствительности можно представить в виде

$$c(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = C_0(\mathbf{x}) + C_1(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + C_2(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0)^2; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.15)$$

где

$$C_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_i^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}); \quad i = 0, 1, 2, \quad (4.16)$$

$c_i^{(k)}$ – коэффициенты разложения удельной теплоемкости k -го компонента композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле, аналогичной (4.15).

Из последней формулы (4.14) при учете выражений (4.15) и (4.16) получаем

$$U(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = U_0 + C_0(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + \frac{C_1(\mathbf{x})}{2}(\Theta - \Theta^0)^2 + \frac{C_2(\mathbf{x})}{3}(\Theta - \Theta^0)^3, \quad (4.17)$$

где U_0 – величина, не зависящая от температуры. Так как далее интерес представляет температура КМ Θ , а не внутренняя энергия U , то величину U_0 , соответствующую температуре Θ^0 , можно задать произвольно, например для удобства равной нулю.

Подставим разложение (4.17) в первое равенство (4.14) и учтем формулу (4.9), тогда получим

$$\begin{aligned} & C_0 \sum_{i=0}^M H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\ & + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M \sum_{l=0}^M H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}] \quad (4.19)$$

Если в текущий момент времени t из каких-то соображений известны значения функций $U^{(m)}$, то система нелинейных (в случае учета термочувствительности) уравнений (4.11) и (4.18) при учете выражений (4.12) и (4.19) замкнута относительно функций $\Theta_l(t, \mathbf{x})$, $0 \leq l \leq M$.

Для получения граничных условий, соответствующих двумерным уравнениям теплового баланса (4.13), необходимо проинтегрировать равенство (4.8) по толщине пластины с весами x_3^m , тогда с учетом обозначений (4.14) и разложения (4.9) получим

$$\begin{aligned} Q_1^{(m)} n_1 + Q_2^{(m)} n_2 - \alpha_* \sum_{l=0}^M H(l+m) \Theta_l = -\alpha_* H(m) (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M-2,$$

где

$$Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3; \quad 0 \leq m \leq M-2 \quad (4.21)$$

Начальные условия для уравнений (4.13) имеют вид

$$U^{(m)}(t_0, \mathbf{x}) = U_0^{(m)}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq M-2, \quad (4.22)$$

где $U_0^{(m)}$ – известные двумерные функции, которые вычисляются по первой формуле (4.14) при учете выражения (4.17), в котором Θ необходимо заменить известной начальной температурой пластины $\Theta_0^*(\mathbf{r})$.

Из замкнутой системы двумерных уравнений (4.11) и (4.13) при учете соотношений (4.14) и (4.18) следует, что число M в разложении (4.9) должно быть не меньше двух ($M \geq 2$), если учитываются теплофизические граничные условия на лицевых поверхностях пластины (см. равенства (4.11)).

5. Метод расчета. Как отмечалось во Введении, для интегрирования рассматриваемой задачи будем использовать явные пошаговые численные схемы, определяя решение в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). В связи с этим считаем, что при $t = t_m$ помимо функций (2.12) уже известны также и значения следующих величин

$$u_l^m(\mathbf{x}) \equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), \quad w^m(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \gamma_l^m(\mathbf{x}) \equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\
 \Theta_s(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_n, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
 \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}); \quad l = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\
 m = n - 1, n, \quad 0 \leq r \leq M - 2, \quad 0 \leq s \leq M, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w; \quad i = 1, 2 \tag{5.2}$$

– введены для удобства изложения функции [17, 22].

Производные по времени в механической составляющей исследуемой связанной термоупруговязкопластической задачи (за исключением левой части первого равенства (2.13)) будем аппроксимировать центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. Заменяя вторые производные по времени от кинематических переменных w , u_i и γ_i в уравнениях движения гибкой КМ-пластины их конечно-разностными аналогами и учитывая выражения (5.2) и обозначения, аналогичные (5.1), получим [22]

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left(F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij} - F_{j3} \partial_j w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \partial_i w^n \\
 \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}; \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad i, j = 1, 2, \tag{5.4}$$

Δ – шаг по времени; плотность ρ определена первой формулой (4.6). Объемные силы в КМ-пластине не учитываются.

Используя выражения (5.4) и предположения (5.1) в данный момент времени t_n можно вычислить все силовые факторы F_{ij} , F_{i3} , M_{ij} и внешние нагрузки $\sigma_{33}^{(\pm)}$, входящие в правые части равенств (5.3). Следовательно, при учете соответствующих граничных условий [15, 17, 22] из уравнений (5.3) можно вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w^{n+1} , u_i^{n+1} и γ_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} . После этого по формулам (4.1) при учете равенств (5.2) определяем осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . Согласно соотношениям (4.1) и (5.1), деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны при $t = t_{n-1}$, поэтому на основании формул численного дифференцирования по t при учете выражения (4.4) можно вычислить и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке пластины в момент времени t_n . Далее по формулам (2.22) при учете соответствий (2.7) опре-

деляем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, а из соотношений (2.15) при учете формул (2.16) – скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$. Используя аппроксимации (2.23) при учете предположений (5.1), вычисляем напряжения $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1}$ в k -м компоненте композиции, затем по формуле (2.26) при учете соотношений (2.24), (2.25) и (2.27) определяем значение параметра Одквиста $\chi^{(k)}$ в том же материале в следующий момент времени при t_{n+1} . Согласно равенствам (2.10) и (2.13) параметр переключения $c^{(k)}$ при $t = t_n$ зависит от $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, поэтому в текущий момент времени t_n определяющее соотношение (2.15) (или (2.6)) необходимо итерационно уточнять по методу переменных параметров упругости [24]. Проведенные расчеты показывают, что для получения приемлемой в практических приложениях точности достаточно использовать две итерации на каждом шаге по времени.

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой задачи будем также использовать явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Тогда система двумерных уравнений теплового баланса (4.13) при учете обозначений, аналогичных (5.1), примет вид [28]:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq M - 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

На основании формул (4.14) при учете предположений (5.1) в текущий момент времени t_n можно вычислить правые части в равенствах (5.5), а затем по явной схеме при

учете соотношений (4.20), (4.21) определяем значения функций $U^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Далее, рассматривая при $t = t_{n+1}$ уравнения (4.11) и (4.18) (в которых правые части уже известны) при учете обозначений (4.12) и (4.19), определяем коэф-

фициенты разложения температуры $\Theta_l(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq M$) в формуле (4.9). В случае учета термочувствительности материалов композиции система уравнений (4.11) и (4.18) нелинейна. Для ее линеаризации можно использовать метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости [24]. Расчеты показали, что для сходимости такого итерационного процесса с приемлемой для приложений точностью достаточно использовать две–три итерации.

Согласно структуре левых частей уравнений (5.3) и (5.5), для начала расчетов по предложенной численной схеме необходимо предварительно знать функции w^m, u_i^m, γ_i^m

($m = 0, 1$) и $U^{(l)}$. При этом функции w^0, u_i^0, γ_i^0 и $U^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M - 2$) определяются из начальных условий (см. равенства (4.22) и формулы (18) в [17]). Если при $t = t_0$ КМ-пла-

стина покоится в естественном состоянии и внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(0)} = \sigma_{33}^{(-)} = 0$), то по формуле Тейлора с точностью Δ^3 получаем $w^1 \approx u_i^1 \approx 0, \gamma_i^1 \approx 0, i = 1, 2$ [17, 22].

Заменяя в уравнениях (5.3) и (5.5) производные $\partial_i(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами и присоединяя к этим уравнениям необходимые граничные условия (см. равенства (4.20) и (4.21), а также формулы (19) в [17]) окончательно получим явную по-

шаговую схему численного интегрирования связанной задачи термоупруговязкопластического деформирования гибкой КМ-пластины.

6. Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров рассмотрим неизотермическое динамическое поведение прямоугольных удлиненных пластин (Ω : $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $a = 3b$) толщиной $2h = 2$ см и разной ширины $2b$. По всему контуру Γ конструкции жестко закреплены ($w = u_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $t \geq t_0$ [22]) и в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ покоятся ($w = u_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t = t_0$, $i = 1, 2$ [22]) при температуре естественного состояния ($\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$, $t = t_0$). Со стороны нижних лицевых поверхностей пластины нагружаются давлением, порожденным воздушной взрывной волной [25]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01 p_{\max},$$

где смысл параметров нагрузки p_{\max} , t_{\max} , t_{\min} и α вполне очевиден и подробно описан в [22]. Из последних соотношений (6.1) следует, что при $t > t_{\min}$ колебания КМ-конструкций можно рассматривать как свободные. Согласно экспериментальным данным [25], в расчетах примем $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Через лицевые поверхности ($x_3 = \pm h$) реализуется конвективный теплообмен с окружающей средой ($q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$) в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² К) [38]) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния пластин: $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ (см. равенства (4.7) и (4.11)). На торцевых поверхностях заданы граничные условия I рода, причем температура конструкций поддерживается равной температуре их естественного состояния: $\alpha_* \rightarrow \infty$, $\Theta_{\infty}^* = \Theta^0$ (см. соотношения (4.8), (4.20) и (4.21)).

Пластины изготовлены из высокопрочного магниевое сплава ВТ65 [18] и армированы высокопрочной стальной проволокой У8А [26] (металлокомпозиция) или из эпоксидной смолы [39] и усилены стекловолокнами [26] (стеклопластик). Упругопластическое деформирование материалов композиции на стадии активного нагружения при постоянстве скорости деформации $\dot{\epsilon}$ и температуры Θ характеризуется диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)} \\ \text{sign}(\epsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\epsilon - \text{sign}(\epsilon) \epsilon_s^{(k)}); & |\epsilon| > \epsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (6.2)$$

где σ и ϵ – напряжение и деформация при растяжении – сжатии, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – модуль упрочнения k -го компонента композиции, $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – предел текучести того же материала при фиксированной температуре ($\Theta = \text{const}$) и скорости деформации ($\dot{\epsilon} = \text{const}$). Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в табл. 1, где $\bar{c} = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука, $\bar{a} = 2\lambda/(c\rho)$ – удвоенная температуропроводность, а в скобках указана температура (Θ , °С), при которой определено значение соответствующей характеристики. Во второй и третьей частях табл. 1 (для $\dot{\epsilon} = 0.417$ с⁻¹ и $\dot{\epsilon} = 104$ с⁻¹) приведены только те значения характеристик пластических свойств материалов, которые отличаются от данных, указанных в первой части (при $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$ с⁻¹). При этом предполагается, что в рассматриваемом диапазоне изменения скорости деформации $\dot{\epsilon}$ теплофизические и упругие характеристики компонентов

композиции практически не зависят от $\dot{\epsilon}$ [18, 19]. Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, представленным в табл. 1, а аппроксимации зависимостей характеристик пластических свойств от $\dot{\epsilon}$ подробно описаны в [22].

Для проведения расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50$, а шаг по времени Δ выбирался равным 0.25 мкс. Рассматривались относительно тонкие ($b = 50$ см, $h/b = 1/50$) и относительно толстые ($b = 10$ см, $h/b = 1/10$) КМ-пластины, для которых

$$\begin{aligned} \Delta x_1/\Delta &= 40 \text{ км/с}, & 2h/\Delta &= 80 \text{ км/с}, & (\Delta x_1)^2/\Delta &= 400 \text{ м}^2/\text{с} & \text{ при } b &= 50 \text{ см} \\ \Delta x_1/\Delta &= 8 \text{ км/с}, & 2h/\Delta &= 80 \text{ км/с}, & (\Delta x_1)^2/\Delta &= 16 \text{ м}^2/\text{с} & \text{ при } b &= 10 \text{ см} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для обеспечения устойчивости явной схемы (5.3) необходимо выполнение условий Куранта–Фридрихса–Леви: $\Delta x_1/\Delta \geq \bar{c}$ и $2h/\Delta \geq \bar{c}$ [7], а для устойчивости явной схемы (5.5) необходимо, чтобы $(\Delta x_1)^2/\Delta \geq \bar{a}$ [28]. Согласно числовым данным, полученным в (6.3), указанные отношения существенно превосходят соответствующие значения \bar{c} и \bar{a} для материалов композиций, представленные в табл. 1. Следовательно, аналогичные необходимые условия устойчивости явной схемы (5.3)–(5.5) будут с запасом выполняться и для рассматриваемых композиций. Отметим, что схема (5.5) имеет первый порядок точности по Δ [28], однако малый шаг по времени ($\Delta = 0.25$ мкс), гарантирующий устойчивость всей численной схемы в целом (см. уравнения (5.3) и (5.5)), обеспечивает вполне приемлемую для практических расчетов точность.

Структуры армирования однородны, т.е. $\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq N$ (см. рис. 1). Рассматриваются два типа структур: 1) плоское ортогональное армирование (рис. 2а), когда два ($N = 2$) семейства волокон уложены по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$; 2) пространственное 4D-армирование (рис. 2б), когда два первых семейства волокон укладываются по направлениям Ox_1 и Ox_2 , а третье и четвертое семейства – наклонно по направлениям, определяемым углами (см. рис. 1): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (на рис. 2б угол $\theta = \pi/4$). Во второй структуре плотности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.2$, $\omega_3 = \omega_4 = 0.05$. В обоих случаях армирования общий расход арматуры одинаков.

Для выяснения вопроса о выборе значения M в разложении (4.9), обеспечивающем приемлемую точность расчетов температуры Θ , рассмотрим зависимости от M максимальных значений $\Theta_{\max}(M) = \max_{t,r} \Theta(t, r; M)$ ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$; расчеты проводились на интервале времени $0 \leq t \leq 0.1$ с). На рис. 3 изображены указанные зависимости для относительно тонких ($b = 50$ см) стеклопластиковых пластин (рис. 3а), рассчитанные при $p_{\max} = 4$ МПа (см. соотношения (6.1)), для относительно толстых ($b = 10$ см) стеклопластиковых конструкций при $p_{\max} = 7$ МПа (рис. 3б) и для относительно тонких металлокомпозитных пластин при $p_{\max} = 10$ МПа (рис. 3в). При указанных нагрузках p_{\max} во всех КМ-конструкциях возникают пластические деформации. На рис. 3 значению $M = 0$ условно соответствует случай, когда тепловое влияние вообще не учитывается, поэтому принято, что $\Theta_{\max}(0) = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$. Номера кривых на рис. 3 совпадают с номерами структур армирования; кривые, номера которых помечены штрихом, рассчитаны без учета влияния скорости деформирования на пластические свойства материалов композиции – термоупругопластический расчет (при этом

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов композиций [18, 26, 39]

Характеристика материала	Эпоксидная смола	Стекловолоконные волокна	Магний-сплав ВМ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
ρ , кг/м ³	1210.0 (20) 1208.0 (40)	2520.0 (20) 2519.6 (80)	1800.0 (20) 1796.2 (100)	7800.0 (20) 7791.8 (100)
E , ГПа	2.8 (20) 2.3 (40)	86.8 (20) 86.3 (80)	43.0 (20) 38.5 (100)	210.0 (20) 195.0 (100)
ν	0.330 (20) 0.333 (40)	0.250 (20) 0.254 (80)	0.330 (20) 0.334 (100)	0.300 (20) 0.305 (100)
σ_s , МПа	20 (20) 18 (40)	4500 (20) 4400 (80)	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
E_s , ГПа	1.114 (20) 0.783 (40)	6.230 (20) 5.168 (80)	0.379 (20) 0.367 (100)	6.973 (20) 5.014 (200)
λ , Вт/(м К)	0.243 (20) 0.240 (40)	0.89 (20) 0.86 (80)	117.23 (20) 121.42 (100)	42.7 (20) 41.7 (100)
$\alpha \times 10^6$, К ⁻¹	68.1 (20) 70.3 (40)	2.5 (20) 2.6 (80)	20.9 (20) 22.6 (100)	12.3 (20) 13.2 (100)
c , кДж/(кг К)	1.54 (20) 1.60 (40)	0.800 (20) 0.839 (80)	1.032 (20) 1.054 (100)	0.485 (20) 0.488 (100)
\bar{c} , м/с	1521 (20) 1380 (40)	5869 (20) 5852 (80)	4888 (20) 4635 (100)	5189 (20) 5003 (100)
\bar{a} , м ² /с	2.60×10^{-7} (20) 2.48×10^{-7} (40)	8.80×10^{-7} (20) 8.14×10^{-7} (80)	1.27×10^{-4} (20) 1.29×10^{-4} (100)	2.26×10^{-5} (20) 2.19×10^{-5} (100)
$\dot{\epsilon} = 0.417 \text{ c}^{-1}$				
σ_s , МПа	– –	– –	306 (20) 243 (100)	– –
E_s , МПа	– –	– –	0.589 (20) 0.596 (100)	– –
$\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$				
σ_s , МПа	22.0 (20) 19.5 (40)	4600 (20) 4550 (80)	385 (20) 340 (100)	4100 (20) 4075 (200)
E_s , ГПа	1.238 (20) 0.853 (40)	6.314 (20) 5.458 (80)	1.010 (20) 0.625 (100)	7.035 (20) 6.158 (200)

использовались данные из табл. 1, соответствующие случаю квазистатического нагружения: $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$). Кривые 2 и 2' на рис. 3б визуально почти не различаются.

Поведение всех кривых на рис. 3 свидетельствует о том, что при переходе от значения $M = 6$ к $M = 7$ приращение величины Θ_{\max} становится практически пренебрежимо малым. При значениях $M \geq 8$ линеаризованная система уравнений (4.11) и (4.18) (при учете выражений (4.19)), из которой в каждый момент времени определяются коэффициенты разложения температуры (4.9), является плохо обусловленной, в резуль-

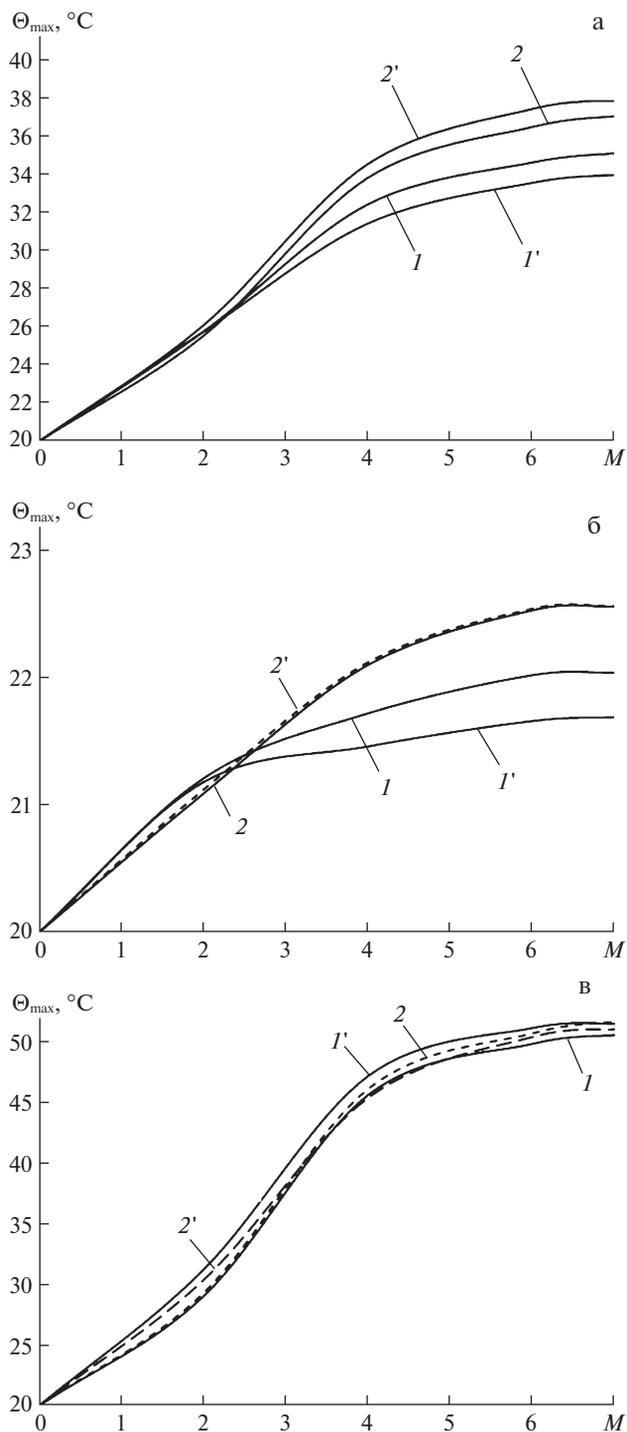


Рис. 3. Зависимость максимального значения температуры от порядка аппроксимирующего полинома в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции (в).

тате чего зависимость $\Theta_{\max}(M)$ становится расходящейся. Поэтому кривые на рис. 3 при $M \geq 8$ не изображены.

Традиционно принято считать, что для проведения практических расчетов с приемлемой точностью в тонкостенных конструкциях вполне достаточно использовать линейное ($M = 1$) или квадратичное ($M = 2$) распределение температуры по их толщине [5, 14]. Сравнение же ординат точек на кривых рис. 3 при $M = 1$ или $M = 2$ и при $M = 7$ показывает, что в случаях неупругого динамического изгибного деформирования КМ-пластин линейное и квадратичное распределение температуры в них приводит к существенному занижению максимальных расчетных значений температуры. Для получения же адекватных расчетов температурных полей в таких случаях деформирования тонкостенных КМ-конструкций температуру в них по толщине следует аппроксимировать полиномами 6-го или 7-го порядков (см. разложение (4.9) при $M = 6$ или $M = 7$).

Для получения более наглядного представления о различии температурных полей, рассчитанных в рассматриваемых КМ-пластинах при $M = 2$ и $M = 7$, на рис. 4 изображены осцилляции наибольших значений температуры $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$ в зависимости от времени t . Кривые на рис. 4а–в рассчитаны для тех же КМ-конструкций, что и на рис. 3а–в соответственно, но на рис. 4, чтобы его не загромождать, представлены зависимости $\Theta_m(t; M)$ только для пластин с 2D-структурами армирования. Все кривые на рис. 4 рассчитаны по термоупруговязкопластической теории; сплошные кривые 1 соответствуют случаю $M = 2$, а штриховые линии 2 – $M = 7$. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 4 свидетельствует о том, что расчет зависимости $\Theta_m(t; M)$ в простейшем случае при $M = 2$ лишь качественно (причем весьма приближенно), но не количественно, позволяет определить осцилляции максимальных значений температуры в рассматриваемых КМ-пластинах.

Поведение кривых на рис. 4а и 4в демонстрирует, что максимальные значения температуры в относительно тонких КМ-конструкциях достигаются в моменты времени (на рис. 4а – при $t \approx 31$ мс, а на рис. 4в – при $t \approx 18$ мс), которые много больше времени действия внешней интенсивной кратковременной нагрузки, т.е. значительно больше $t_{\min} = 2$ мс (см. выражения (6.1)). Отметим, что в некоторых расчетах, выполненных при $M = 2$ и $M = 7$, наблюдалось существенное различие моментов времени, в которые достигается наибольшее значение температуры Θ_{\max} . Следовательно, использование простейшей аппроксимации температуры по толщине КМ-пластины (при $M = 2$) может приводить к неверному определению момента времени, в который температура конструкции достигает максимального значения.

Поведение же кривых на рис. 4б показывает, что в случае относительно толстых стеклопластиковых пластин зависимости $\Theta_m(t; M)$ при разных M достигают своих наибольших значений на первой осцилляции, т.е. в моменты времени, близкие к $t_{\min} = 2$ мс. Качественно аналогичное поведение зависимостей $\Theta_m(t; M)$ при $M = 2$ и $M = 7$ наблюдается и в случае относительно толстых металлокомпозитных пластин (при $p_{\max} = 50$ МПа), поэтому соответствующие кривые на рис. 4 не приведены.

На рис. 5 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала $\epsilon_*^{(0)}$ рассматриваемых композиций ($\epsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \epsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$). Кривые на рис. 5а–в получены для тех же КМ-пластин, что и на рис. 3а–в соответственно. Номера кривых на рис. 5 имеют тот же смысл, что и на рис. 3. Все кривые на рис. 5 рассчитаны при значении $M = 7$ (см. разложение (4.9)).

В работе [22] рассматривались только относительно толстые КМ-пластины. На рис. 5а, 5в и 5г представлены результаты расчетов относительно тонких стеклопласти-

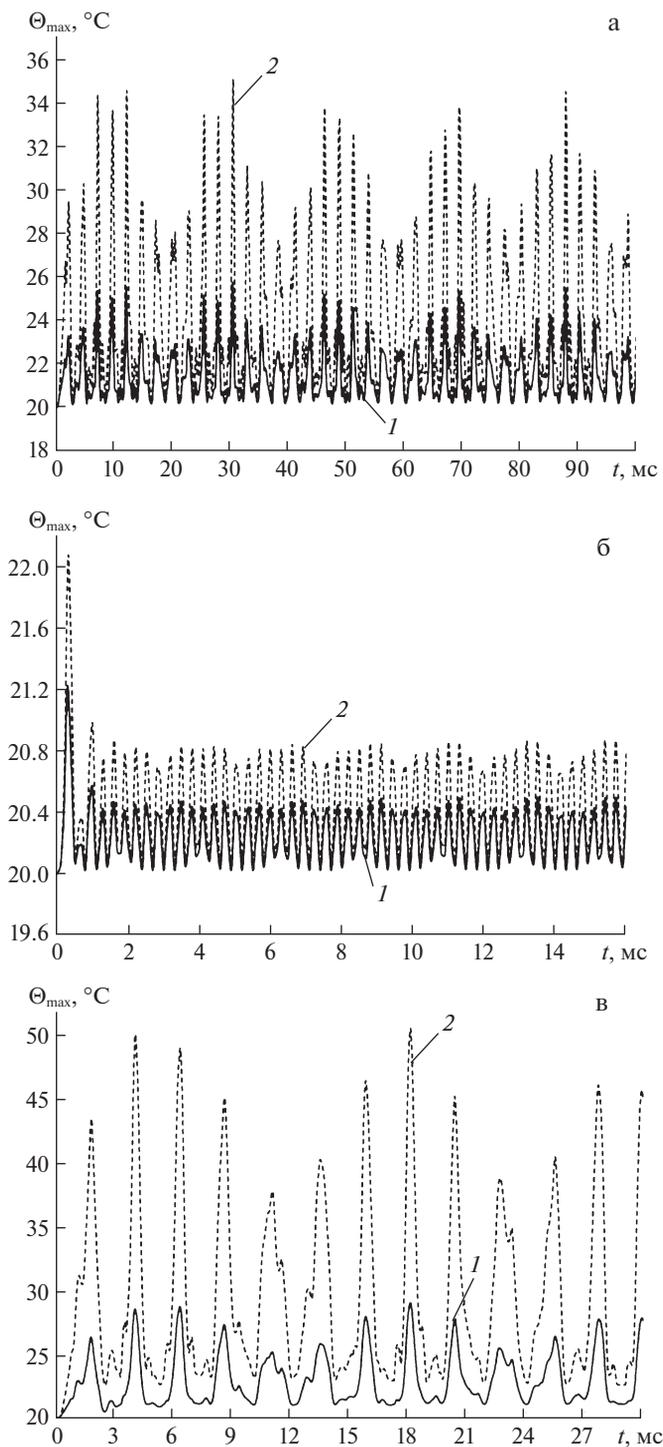


Рис. 4. Зависимости от времени наибольших значений температуры в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции (в), рассчитанные с использованием разных аппроксимаций температурного поля в поперечном направлении.

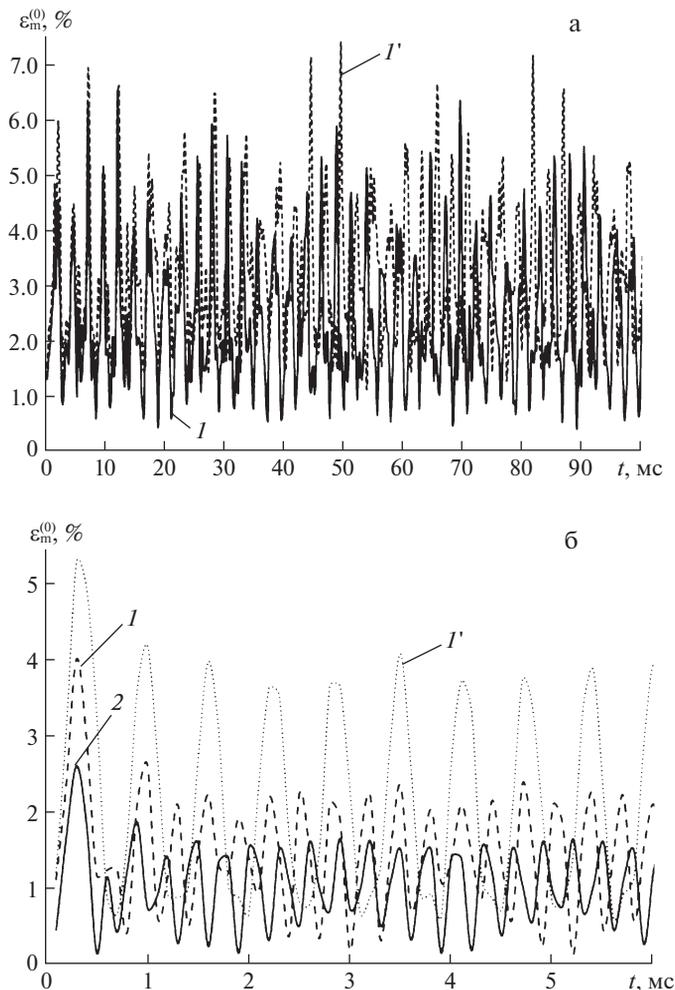


Рис. 5. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции при 2D-структуре (в) и при 4D-структуре армирования (г).

ковых и металлокомпозитных пластин соответственно, а на рис. 5б — относительно толстых стеклопластиковых конструкций. Сравнение кривых I и I' на рис. 5а–в показывает, что расчет по термоупругопластической теории (кривые I') приводит к существенному завышению наибольших значений $\varepsilon_m^{(0)}$ как в относительно тонких, так и в относительно толстых КМ-пластинах по сравнению с расчетами, выполненными по термоупруговязкопластической теории (кривые I), даже в случаях, когда пластические свойства компонентов композиции весьма слабо зависят от скорости деформирования, как это имеет место в случае стеклопластиковой композиции (см. табл. 1).

Несмотря на то, что кривые I и I' на рис. 5а–в существенно различаются, аналогичные кривые I и I' на рис. 3а–в различаются незначительно. Следовательно, неучет чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости дефор-

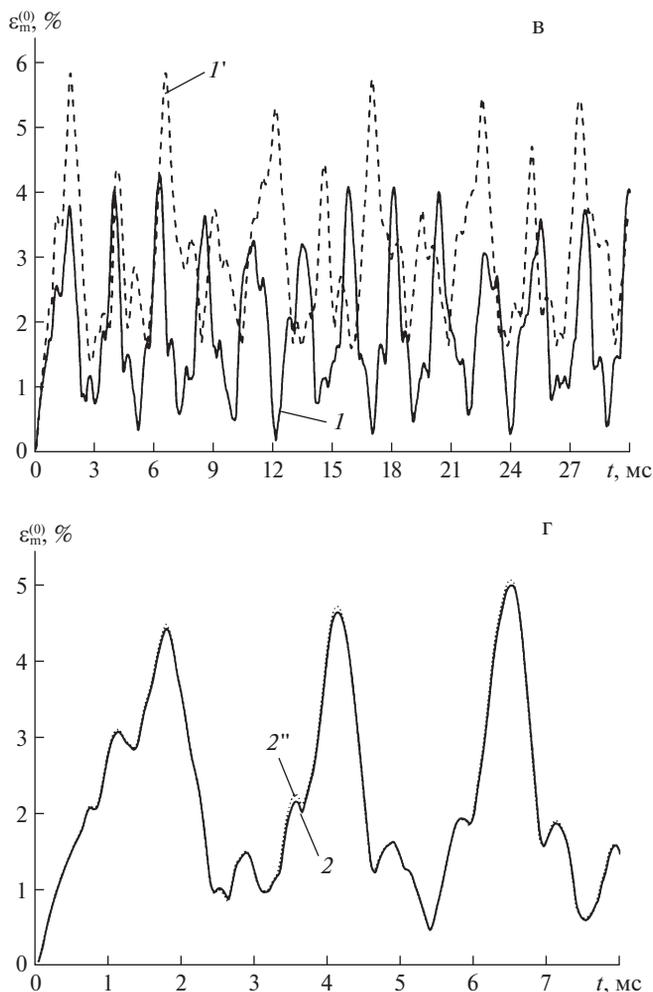


Рис. 5. Окончание

мирования не оказывает настолько существенного влияния на температурное поле в КМ-конструкции, как на деформированное состояние компонентов композиции в них.

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 5б свидетельствует о том, что в относительно толстой стеклопластиковой пластине замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис. 2а) на пространственную структуру 4D-армирования (см. рис. 2б) позволяет существенно уменьшить интенсивность деформаций связующего материала, но при этом, согласно поведению кривых 1 и 2 на рис. 3б, увеличивается максимальное значение температуры Θ_{\max} в КМ-пластине. Однако это увеличение значения Θ_{\max} невелико и составляет примерно 0.5°C .

Аналогичная замена структур армирования в относительно тонкой стеклопластиковой пластине также приводит к уменьшению наибольшего значения интенсивности деформаций связующего материала в ней. Однако это уменьшение практически пренебрежимо мало, поэтому соответствующая кривая 2 на рис. 5а не изображена, чтобы его не загромождать. В случаях металлокомпозитных пластин как относительно тон-

ких, так и относительно толстых указанная замена структур армирования является неэффективной, так как приводит к увеличению интенсивности деформаций связующего материала (ср. поведение кривых 1 и 2 на рис. 5в и 5г).

Поведение кривых на рис. 4а–в и 5а–в качественно схоже. Так, на рис. 5б наибольшее значение зависимости $\epsilon_m^{(0)}(t)$ достигается на первой осцилляции при $t \approx 0.4$ мс; аналогично и на рис. 4б наибольшее значение зависимости $\Theta_m(t)$ достигается на первой осцилляции в тот же момент времени, т.е. примерно тогда, когда внешняя нагрузка достигает своего наибольшего значения (см. формулу (6.1)). Наибольшие же значения величин Θ_m и $\epsilon_m^{(0)}$ на рис. 4а, 4в, 5а и 5в достигаются в моменты времени, существенно превосходящие значение t_{\min} , т.е. после прекращения действия внешней нагрузки. При этом моменты времени, в которые достигаются наибольшие значения величин Θ_m и $\epsilon_m^{(0)}$ не совпадают.

Тот факт, что при нелинейном динамическом деформировании тонкостенных КМ-конструкций деформации могут достигать своих наибольших значений значительно позже времени прекращения действия кратковременной интенсивной нагрузки, был обнаружен еще в [12] для упругих оболочек.

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рис. 5а и 5б показывает, что наибольшие значения интенсивности деформаций связующего материала в стеклопластиковых пластинах разной относительной толщины сопоставимы между собой. Однако сопоставление аналогичных кривых на рис. 3а и 3б свидетельствует о том, что относительно толстая конструкция (см. рис. 3б) нагревается существенно меньше, чем относительно тонкая (см. рис. 3а). Объясняется это тем, что в относительно толстой КМ-конструкции наиболее интенсивное деформирование материалов компонентов композиции происходит в узких зонах в окрестности жестко закрепленных кромок. При этом в указанных зонах доминируют деформации поперечных сдвигов. В относительно же тонких пластинах наиболее интенсивно деформируется основная часть конструкции (удаленная от опорных кромок), в которой доминируют изгибные деформации. Поэтому в относительно тонких КМ-пластинах механическая энергия более активно диссипирует в тепловую энергию, чем в относительно толстых конструкциях даже при сопоставимых уровнях максимальных деформаций в их компонентах композиции.

Все обсуждаемые выше результаты были получены при учете термочувствительности компонентов композиции. Расчеты, проведенные без учета термочувствительности (при использовании значений характеристик компонентов композиции, приведенных в табл. 1 для температуры естественного состояния $\Theta^0 = 20^\circ\text{C}$), показывают, что зависимости $\Theta_m(t)$ и $\epsilon_m^{(0)}(t)$ при этом визуально не отличаются от кривых, изображенных на рис. 3, 4а–в и 5а–в. Объясняется это малым приращением температуры при динамическом деформировании КМ-пластин (всего на 2...30°C) под воздействием воздушной взрывной волны. Подчеркнем, что аналогичный (порядка 10°C) уровень нагрева образцов из однородных материалов наблюдается и в экспериментах по ударному нагружению [19].

В связи с малым уровнем нагрева рассматриваемых конструкций целесообразно сравнить полученные выше результаты с расчетами, выполненными по упруговязкопластической теории [22], т.е. при полном неучете теплового воздействия. Было установлено, что для рассматриваемых КМ-пластин результаты таких расчетов по прогибам (соответствующие зависимости не изображены) визуально не отличаются от расчетов, выполненных по термоупруговязкопластической теории. Однако для зависимостей $\epsilon_m^{(0)}(t)$ наблюдается некоторое различие. Так, кривая 2 на рис. 5г получена при учете теплового воздействия, а кривая 2' – без учета этого воздействия. Видно,

что в этом случае уже в окрестности начального момента времени проявляется заметное различие в поведении кривых 2 и $2'$, однако ординаты точек глобальных максимумов на этих кривых, которые достигаются в момент времени $t = 6.5$ мс, различаются всего на 1.4%. Аналогичное пренебрежимо малое различие зависимостей $\epsilon_m^{(0)}(t)$, рассчитанных с учетом и без учета теплового воздействия, наблюдается во всех остальных рассмотренных выше случаях, причем с увеличением времени это различие становится все более заметным, но по-прежнему остается пренебрежимо малым.

На рис. 5 не приведены зависимости $\epsilon_m^{(k)}(t)$ для арматуры k -го семейства ($1 \leq k \leq N$), потому что они качественно аналогичны кривым, изображенным на рис. 5 для связующего материала, но имеют меньшие значения по оси ординат. Например, для арматуры второго семейства ($k = 2$), которая испытывает наибольшие деформации, максимальные значения $\epsilon_m^{(2)}$ примерно в 1.5 раза меньше, чем для зависимостей, приведенных на рис. 5.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что расчет неупругого динамического поведения изгибаемых КМ-пластин при нагружении их воздушной взрывной волной можно проводить без учета влияния тепловых полей, которые возникают за счет механической диссипации энергии в таких КМ-конструкциях.

Заклучение. Разработанная структурная модель, ориентированная на использование явных пошаговых схем, позволяет численно-аналитически моделировать поведение термоупруговязкопластически деформируемых КМ волокнистого строения в рамках теории течения с изотропным упрочнением, когда функция нагружения чувствительна к изменению температуры и скорости деформирования материала композиции. Полученные условия термоупругого деформирования, разгрузки, нейтрального и активного нагружения компонентов композиции с учетом изменения температуры и скорости деформирования позволяют проводить расчеты в условиях переменного во времени термосилового нагружения КМ.

Разработанная модель термоупруговязкопластического деформирования гибких пластин с произвольными структурами армирования позволяет учитывать возможное слабое сопротивление таких КМ-конструкций поперечным сдвигам и связанность теплофизической и механической составляющих задачи. Разработанный численный метод позволяет по явной схеме интегрировать сформулированную связанную начально-краевую задачу. Установлено, что величину шага по времени следует выбирать из необходимого условия устойчивости Куранта–Фридрикса–Леви для волнового уравнения, а не из необходимого условия устойчивости явной численной схемы для уравнения теплового баланса.

Установлено, что для адекватного расчета температурных полей в динамически изгибаемых неупругих КМ-пластинах температуру в поперечном направлении следует аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков.

Проведенные расчеты показали, что при поперечном нагружении КМ-пластин воздушной взрывной волной стеклопластиковые конструкции нагреваются на 2...18°C, а металлокомпозитные – на 30°C, причем относительно тонкие пластины нагреваются сильнее, чем относительно толстые (даже при сопоставимых величинах наибольших значений интенсивностей деформаций компонентов композиции). Замена плоской ортогональной структуры армирования (рис. 2а) на пространственную структуру армирования (рис. 2б) при сохранении общего расхода волокон в относительно толстой стеклопластиковой пластине позволяет уменьшить интенсивность деформаций связующего материала на 35.1%, однако максимальное значение температуры при такой замене возрастает, хотя и незначительно (от 2 до 2.5°C). Аналогичная замена структур армирования в относительно тонких стеклопластиковых, а также относительно тонких и относительно толстых металлокомпозитных пластинах является неэффектив-

ной, так как приводит к увеличению интенсивности деформаций связующего материала и к увеличению приращения температуры в них.

Для проведения адекватных динамических расчетов неупруго деформируемых изгибаемых КМ-пластин под действием нагрузки, порожденной воздушной взрывной волной, можно вполне обоснованно не учитывать влияние теплового воздействия, если отсутствуют дополнительные источники нагрева или охлаждения немеханического происхождения. Однако при этом нельзя пренебрегать чувствительностью пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования как в относительно толстых [22], так и в относительно тонких КМ-конструкциях.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Composites. 2001. Part A32. P. 901–910.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // Progr. in Aerospace Sci. 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // Frontiers Mech. Eng. 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
7. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
8. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31.
9. Kazancı Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non-Linear Mech. 2011. V. 46. P. 807–817.
10. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. A review // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
11. Mao-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // ASME. Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 3. P. 169–200.
12. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
13. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. New York: CRC Press, 2004. 831 p.
14. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Publ., 2013. 93 с.
15. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
16. Пиккуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
17. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 6. С. 112–122.
18. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. Гольденблата И.И. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
19. Белл Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
20. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, М.: Мир, 1979. 302 с.
21. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. М.: Физматлит, 2004. 144 с.

22. Янковский А.П. Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // ПММ. 2019. Т. 83. № 4. С. 660–686.
23. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
24. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
25. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput.&Struct. 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
26. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Карпиноса Д.М. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
27. Simmons J.A., Hauser F.E., Dorn J.E. Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading // Univ. Calif. Publ. in Engng. 1962. № 2. P. 177–230.
28. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
29. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
30. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
31. Янковский А.П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикл. физика. 2011. № 3. С. 32–38.
32. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
33. Киселев С.П. Механика сплошных сред. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. 164 с.
34. Грешнов В.М. Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
35. Кудинов А.А. Тепломассообмен. М.: ИНФРА-М, 2012. 375 с.
36. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
37. Новицкий Л.А., Кожевников И.Г. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. М.: Машиностроение, 1975. 216 с.
38. Луканин В.Н., Шатров М.Г. и др. Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
39. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под. ред. Любина Дж. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.

Modeling of Thermo-Elastic-Visco-Plastic Deformation of Flexible Reinforced Plates

A.P. Yankovskii[#]

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

[#]*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

A model of thermo-elastic-visco-plastic deformation of a composite material criss-cross-reinforced with continuous fibers in arbitrary directions has been developed. The materials of the components of the composition are isotropic; their plastic deformation is described by the theory of flow with isotropic hardening. The dependences of the loading functions on temperature and strain rate of these materials are taken into account. A mathematical model of thermo-elastic-visco-plastic bending behavior of reinforced plates has been built. The weak resistance to transverse shears of such thin-walled structures is taken into account in the framework of Ambartsumyan's theory. Geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The connectedness of the mechanical and thermophysical components of the problem of dynamic inelastic deformation of composite plates is taken into account. The temperature across the thickness of the constructions is approximated by polynomials of different orders. An explicit numerical scheme is used to solve the formulated two-dimensional problem. The thermo-elastic-visco-plastic behavior of plane-cross and spatially reinforced fiberglass and metal-composite plates, dynamically bent under the action of an air blast wave, has been investigated. It is shown that in order to adequately deter-

mine the temperature in such structures, it must be approximated by polynomials of the 6–7th order in the thickness of the plates. It has been demonstrated that relatively thin composite plates heat up by 15...30°C, and relatively thick ones – by 1.5...2.5°C. Due to such a low level of heating of reinforced constructions, their dynamic calculation under the action of loads such as an air blast wave can be carried out without taking into account the thermal effect if there are no additional heat sources of non-mechanical origin. In this case, it is necessary to take into account the sensitivity of the plastic properties of the components of the composition to the rate of their deformation.

Keywords: flexible plates, spatial reinforcement, thermoelastoviscoplastic deformation, coupled problems, Ambartsumyan's bending theory, explosive loads, explicit numerical scheme

REFERENCES

1. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.
2. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*, 2001, pt. A 32, pp. 901–910.
3. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progr. in Aerospace Sci.*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151.
4. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
5. *Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A.* Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells. (Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek) Moscow: Fizmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
6. *Dimitrienko Yu.I.* Mechanics of Composite Structures at High Temperatures. (Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh) Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
7. *Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.* Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs. (Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij) Nizhny Novgorod: Univ. Press, 2002. 400 p. (in Russian)
8. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Composite Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14–31.
9. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.
10. *Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.
11. *Mao-hong Yu.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *ASME. Appl. Mech. Rev.*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–200.
12. *Bogdanovich A.E.* Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells. (Nelinejnye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek) Riga: Zinatne, 1987. 295 p. (in Russian)
13. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004, 831 p.
14. *Andreev A.N.* Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis. (Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaja model i nekotorye aspekty chislennogo analiza) Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Publ., 2013. 93 p. (in Russian)
15. *Ambarcumian S.A.* The Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Fluctuations (Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebania) Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian)
16. *Pikul' V.V.* Mechanics of Shells (Mekhanika obolochek). Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 p. (in Russian)
17. *Yankovskii A.P.* Elastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures // *J. Appl. Mech. & Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1058–1066.
18. *Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M.* Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures. (Raschety na prochnost',

- ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur) Moscow: Mashinostroenie, 1965. 567 p. (in Russian).
19. Encyclopedia of Physics Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I / Ed. by *Truesdell C.* Heidelberg: Springer, 1973.
 20. *Kolarov D., Baltov A., Boncheva N.* Mechanics of Plastic Mediums. (Mekhanika plasticheskikh sred). Moscow: Mir, 1979. 302 p. (in Russian)
 21. *Bondar' V.S.* Inelasticity. Variants of the Theory. (Neuprugost'. Varianty teorii) Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p. (in Russian)
 22. *Yankovskii A.P.* Modeling the Elasto-Visco-Plastic Bending of Space-Reinforced Plates Taking into Account Sensitivity of Components of the Composition to Strain Rate (Modelirovaniye uprugoplasticheskogo izgiba prostranstvenno-armirovannykh plastin pri uchete chuvstvitel'nosti komponentov kompozitsii k izmeneniyu skorosti deformirovaniya) // JAMM, 2019, vol. 83, no. 4, pp. 660–686. (in Russian)
 23. *Reissner E.* The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69–77.
 24. *Khazhinskii G.M.* Model of Deformation and Fracture of Metals. (Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov) Moscow: Nauchny mir, 2011. 231 p. (in Russian)
 25. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput.&Struct., 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
 26. Composite Materials. Handbook. (Kompozitsionnye materialy. Spravochnik) / Ed. by *Karpinos D.M.* Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p. (in Russian)
 27. *Simmons J.A., Hauser F.E., Dorn J.E.* Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading // Univ. California. Publ. in Engng., 1962, no. 2, pp. 177–230.
 28. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference Methods for Initial-Value Problems. N.Y.: Wiley, 1967.
 29. *Dekker K., Verwer J.G.* Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation. Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p.
 30. *Malmmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Resistance of Rigid Polymeric Materials. (Soprotivlenie zhyestkikh polimernykh materialov) Riga: Zinatne, 1972. 500 p. (in Russian)
 31. *Yankovskii A.P.* Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres // Appl. Phys., 2011, no. 3, pp. 32–38. (in Russian)
 32. Spatially Reinforced Composite Materials. (Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik.) / Ed. by *Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A.* Moscow: Mashinostroenie, 1987. 224 p. (in Russian)
 33. *Kiselev S.P.* Continuum Mechanics. (Mekhanika sploshnykh sred) Novosibirsk: NSTU, 2017. 164 p. (in Russian)
 34. *Greshnov V.M.* Physical and Mathematical Theory of Large Irreversible Deformations of Metals. (Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimyykh deformatsiy metallov) Moscow: Fizmatlit, 2018. 232 p. (in Russian)
 35. *Kudinov A.A.* Heat and Mass Transfer. (Teplomassoobmen) Moscow: INFRA-M, 2012. 375 p. (in Russian)
 36. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford : Pergamon Press, 1982.
 37. *Novitsky L.A., Kozhevnikov I.G.* Thermophysical Properties of Materials at Low Temperatures. Handbook. (Teplofizicheskiye svoystva materialov pri nizkikh temperaturakh. Spravochnik) Moscow: Mech. Engng., 1975. 216 p. (in Russian)
 38. *Lukanin V.N., Shatrov M.G. et al.* Heat Engineering. (Teplotekhnika) Moscow: Higher School, 2003. 671 p. (in Russian)
 39. Handbook of Composites / Ed. by *G. Lubin.* N.Y.: Springer, 1982. 786 p.