

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 498, 2021

---

---

## МАТЕМАТИКА

Представление синтезируемых инвариантных относительно дифференцирования подпространств в пространстве Шварца

*Н. Ф. Абузярова* 5

Об аттракторах уравнений реакции–диффузии в пористой ортотропной среде

*К. А. Бекмаганбетов, В. В. Чепыжов, Г. А. Чечкин* 10

О неединственности вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

*В. И. Богачев, Т. И. Красовицкий, С. В. Шапошников* 16

Квантовые графы с малыми ребрами: голоморфность резольвент

*Д. И. Борисов* 21

О методе функции Беллмана для операторов на мартингалах

*В. А. Боровицкий, Н. Н. Осипов, А. С. Целищев* 27

Рандомизированное квантование гамильтоновых систем

*Дж. Гоф, Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов* 31

Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом

*Н. В. Зайцева* 37

Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А. Ладыженской

*М. А. Кисатов* 41

Три бесконечные серии графов Шилла не существуют

*А. А. Махнев, И. Н. Белоусов, М. П. Голубятников, М. С. Нирова* 45

О теореме Планса и периодичности якобианов циркулянтных графов

*А. Д. Медных, И. А. Медных* 51

Новый корреляционно рандомизированный алгоритм оценки влияния стохастичности среды на перенос частиц

*Г. А. Михайлов, И. Н. Медведев* 55

Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах

*И. Б. Петров, В. И. Голубев, В. Ю. Петрухин, И. С. Никитин* 59

О фундаментальных  $S$ -единицах и непрерывных дробях, построенных  
в гиперэллиптических полях по двум линейным нормированиям

*Г. В. Федоров*

65

---

## **ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Об обобщенной задаче Гарднера для систем фазовой автоподстройки в электрических сетях

*Н. В. Кузнецов, М. Ю. Лобачев, М. В. Юлдашев, Р. В. Юлдашев, С. И. Вольский, Д. А. Сорокин*

71

---

Правила для авторов

76

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 498, 2021

---

---

## MATHEMATICS

- Representation of Synthesable Differentiation-Invariant Subspaces of the Schwartz Space  
*N. F. Abuzyarova* 5
- On Attractors of Reaction–Diffusion Equations in a Porous Orthotropic Medium  
*K. A. Bekmaganbetov, V. V. Chepyzhov, and G. A. Chechkin* 10
- On Non-Uniqueness of Probability Solutions to the Cauchy Problem for the Fokker–Planck–Kolmogorov Equation  
*V. I. Bogachev, T. I. Krasovitskii, and S. V. Shaposhnikov* 16
- Quantum Graphs With Small Edges: Holomorphy of Resolvents  
*D. I. Borisov* 21
- On Bellman Function Method for Operators on Martingales  
*V. A. Borovitskiy, N. N. Osipov, and A. S. Tselishchev* 27
- Random Quantization of Hamiltonian Systems  
*J. Gough, Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and O. G. Smolyanov* 31
- Classical Solutions of Hyperbolic Equation with Nonlocal Potential  
*N. V. Zaitseva* 37
- System of Equations for the Marangoni Boundary Layer in Media with Rheological Law of O.A. Ladyzhenskaya  
*M. A. Kisatov* 41
- Three Infinite Families of Shilla Graphs Do Not Exist  
*A. A. Makhnev, I. N. Belousov, M. P. Golubyatnikov, and M. S. Nirova* 45
- Plans' Periodicity Theorem for Jacobian of Circulant Graphs  
*A. D. Mednykh and I. A. Mednykh* 51
- New Correlative Randomized Algorithm for Estimating the Influence of the Medium Stochasticity on the Particle Transport  
*G. A. Mikhailov and I. N. Medvedev* 55
- Seismic Waves Simulation in Anisotropic Media  
*I. B. Petrov, V. I. Golubev, V. Yu. Petrukhin, and I. S. Nikitin* 59

On Fundamental  $S$ -Units and Continued Fractions, Constructed in Hyperelliptic Fields  
by Two Linear Valuations

*G. V. Fedorov*

65

---

## **CONTROL THEORY**

On the Generalized Gardner Problem for Phase Locked-Loop Systems in Electrical Grids

*N. V. Kuznetsov, M. Y. Lobachev, M. V. Yuldashev, R. V. Yuldashev,  
S. I. Volskiy, and D. A. Sorokin*

71

---

For Authors

76

---

---

УДК 517.538.2+517.518.3+517.984.26+517.547.2

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНТЕЗИРУЕМЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА

© 2021 г. Н. Ф. Абузярова<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 16.12.2020 г.

Поступило 16.12.2020 г.

После доработки 27.04.2021 г.

Принято к публикации 28.04.2021 г.

Рассматривается инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство  $W$  в пространстве Шварца  $C^\infty(a; b)$ , допускающее слабый спектральный синтез. Нами получены условия, при которых  $W$  представляется в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы своего резидуального подпространства и замкнутого подпространства, порожденного содержащимися в  $W$  экспоненциальными одночленами.

**Ключевые слова:** спектральный синтез, инвариантные подпространства, медленно убывающая функция, плотность Берлинга–Мальявена

**DOI:** 10.31857/S2686954321030024

1. Пусть  $\mathcal{E}(a; b) := C^\infty(a; b)$  – пространство Шварца, наделенное метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств  $C^k[a_k; b_k]$ , где  $[a_1; b_1] \subseteq [a_2; b_2] \subseteq \dots$  – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал  $(a; b)$  вещественной прямой. Известно, что  $\mathcal{E}(a; b)$  – пространство Фреше.

Обозначим через  $W$  замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования  $D = \frac{d}{dt}$  (короче,  $D$ -инвариантное) подпространство пространства  $\mathcal{E}(a; b)$ . Резидуальный промежуток  $I_W$  подпространства  $W$  определяется как минимальный из всех относительно замкнутых в  $(a; b)$  непустых промежутков  $I$  со свойством  $W_I \subset W$ , где

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}: f^{(k)}(t) = 0, t \in I, k = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Существование  $I_W$  впервые было установлено в [1, теорема 4.1]; этот факт также нетрудно вывести из общей двойственной схемы, примененной нами при исследовании задачи спектрального синтеза для оператора  $D$  в  $\mathcal{E}(a; b)$  [2].

Пусть  $\Lambda$  – последовательность кратных точек комплексной плоскости с единственной предельной точкой в бесконечности и  $\mathcal{E}xp(\Lambda)$  – последовательность экспоненциальных одночленов, построенная по множеству показателей  $(-i\Lambda)$  (точке  $\lambda \in \Lambda$ , которая встречается в этой последовательности  $k$  раз, соответствует набор функций  $e^{-i\lambda t}$ ,  $t e^{-i\lambda t}$ , ...,  $t^{k-1} e^{-i\lambda t}$ ). Обозначим символом  $D_{BM}(\Lambda)$  плотность Берлинга–Мальявена последовательности  $\Lambda$  (см., например, [3, IX.D.2]). Согласно хорошо известной теореме Берлинга–Мальявена о радиусе полноты ([3, X.B.3]), если  $D_{BM}(\Lambda) < \frac{b-a}{2\pi}$ , то в  $\mathcal{E}(a; b)$  имеются нетривиальные  $D$ -инвариантные подпространства  $W$ , для которых спектр сужения оператора дифференцирования  $D: W \rightarrow W$  дискретен и равен  $(-i\Lambda)$ , а запас всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в  $W$ , есть, соответственно,  $\mathcal{E}xp(\Lambda)$ . При этом  $|I_W| \geq 2\pi D_{BM}(\Lambda)$ , где  $|I_W|$  – длина резидуального промежутка  $I_W$ .

Задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования  $D$  в пространстве  $\mathcal{E}(a; b)$  (см. [1]): выяснить, допускает ли заданное нетривиальное  $D$ -инвариантное подпространство  $W$  с дискретным спектром  $(-i\Lambda)$  представление

$$W = \overline{\text{span} \mathcal{E}xp(\Lambda) + W_{I_W}}? \quad (2)$$

<sup>1</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

\*E-mail: abnatf@gmail.com

Это представление обобщает возможность спектрального синтеза в классическом смысле:  $W = \overline{\text{span}} \mathcal{E}xp(\Lambda)$ . Оно было предложено авторами работы [1] из-за наличия в пространстве  $\mathcal{E}(a; b)$  нетривиальных  $D$ -инвариантных подпространств вида (1), спектр которых пуст.

Исследования возможности спектрального синтеза в слабом смысле (2) привели к следующим результатам.

**Теорема А** [2, следствие 2, замечание 3; 4, теоремы 1.1, 1.2]. Пусть  $W$  —  $D$ -инвариантное подпространство с дискретным спектром  $(-i\Lambda)$  и резидуальным промежутком  $I_W$ .

1) Если  $|I_W| > 2\pi D_{BM}(\Lambda)$ , то  $W$  допускает слабый спектральный синтез, т.е. имеет вид (2).

2) Если  $|I_W| < 2\pi D_{BM}(\Lambda)$ , то  $W = \mathcal{E}(a; b)$ .

3) Среди  $D$ -инвариантных подпространств с дискретным спектром  $(-i\Lambda)$  и резидуальным промежутком  $I_W$  длины  $2\pi D_{BM}(\Lambda)$  имеются как подпространства, допускающие слабый спектральный синтез (2), так и подпространства, не допускающие представления (2).

Из теоремы А следует, что  $D$ -инвариантное подпространство  $W$  с конечным спектром допускает слабый спектральный синтез (2), более того, в этом случае  $W$  есть прямая сумма (алгебраическая и топологическая) замкнутых подпространств  $\text{span} \mathcal{E}xp(\Lambda)$  и  $W_{I_W}$ :

$$W = \text{span} \mathcal{E}xp(\Lambda) \oplus W_{I_W} \quad (3)$$

(см. [1, предложение 6.1]).

В настоящей работе мы изучаем условия, при которых представление в виде прямой суммы (алгебраической и топологической):

$$W = \overline{\text{span}} \mathcal{E}xp(\Lambda) \oplus W_{I_W} ? \quad (4)$$

справедливо для  $D$ -инвариантного подпространства вида (2) с бесконечным спектром.

2. Алгебра Шварца  $\mathcal{P}$  определяется как образ сильного сопряженного  $\mathcal{E}'$  к пространству  $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$  при преобразовании Фурье—Лапласа

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(\mathcal{E}'), \quad \mathcal{F}(S) = S(e^{-it\zeta}), \quad S \in \mathcal{E}'.$$

С топологией и линейной структурой, индуцированными из  $\mathcal{E}'$ , алгебра  $\mathcal{P}$  может быть внутренне описана как индуктивный предел последовательности банаховых пространств  $\{P_k\}$ , где каждое пространство  $P_k$  есть совокупность всех целых функций  $\varphi$ , для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k e^{k|\text{Im}z|}}.$$

Функция  $\psi \in \mathcal{P}$  называется медленно убывающей (slowly decreasing function), если существует  $a > 0$ , такое, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists x' \in \mathbb{R}: |x - x'| \leq a \ln(2 + |x|), \quad |\psi(x')| \geq (a + |x'|)^{-a}. \quad (5)$$

Медленное убывание  $\psi \in \mathcal{P}$  равносильно тому, что главный идеал, алгебраически порожденный этой функцией в  $\mathcal{P}$ , замкнут (см. [5, 6]).

Пусть, как и выше,  $\Lambda = \{\lambda_j\}$  — комплексная последовательность с единственной предельной точкой в бесконечности, причем  $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$ . Это условие, согласно цитированной в предыдущем пункте теореме о радиусе полноты, эквивалентно существованию в алгебре  $\mathcal{P}$  ненулевой функции  $\varphi$ , обращающейся в нуль на  $\Lambda$ . Для последовательности  $\Lambda$  введем новую характеристику  $D_{sd}(\Lambda)$ .

Полагаем  $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$ , если  $\Lambda$  не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции  $\varphi \in \mathcal{P}$ . В противном случае,  $D_{sd}(\Lambda)$  определяется как инфимум множества всех положительных чисел  $a$ , таких, что в алгебре  $\mathcal{P}$  имеется медленно убывающая функция  $\varphi$  экспоненциального типа  $\rho a$ , равная нулю на  $\Lambda$ .

Из самого определения величины  $D_{sd}(\Lambda)$  следует, что всегда  $D_{BM}(\Lambda) \leq D_{sd}(\Lambda)$ . При этом неравенство может быть и строгим. Более того, возможна ситуация, когда для последовательности  $\Lambda$  выполнены соотношения  $D_{BM}(\Lambda) = 0$  и  $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$ . Рассмотрим соответствующий

**Пример.** Определим последовательность  $\Lambda$ , состоящую из точек  $j^2$ ,  $j = 2, 3, \dots$ , каждая из которых повторяется в последовательности  $\llbracket n^{3/2} j \rrbracket$  раз. Из леммы 2 работы [7], с учетом замечания 1 и леммы 1 этой же работы, нетрудно вывести, что  $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$ . С другой стороны, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется измеримая последовательность  $\Lambda''$ , такая, что  $\Lambda \subset \Lambda''$  и  $D_{BM}(\Lambda'') = 2\varepsilon$ . А именно, положим  $\Lambda'' = \Lambda \cup \Lambda'$ , где  $\Lambda' = \{n\varepsilon^{-1}\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Отметим, что характеристика  $D_{sd}(\Lambda)$ , по-видимому, является новой. Было бы интересно и полезно получить ее описание в каких-либо “геометрических” терминах.

Нами установлено, что в вопросе о представлении  $D$ -инвариантного подпространства, определяемого формулой (2), в виде прямой суммы (4), величина  $D_{sd}(\Lambda)$  играет ту же роль, что и плотность Берлинга—Мальева в теореме А. Ниже сформулированы соответствующие утверждения (теоремы 1, 2, 3).

Рассмотрим  $D$ -инвариантное подпространство  $W$  вида (2) с дискретным спектром  $(-i\Lambda)$  и резидуальным промежутком  $I_W$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что  $I_W \in (a; b)$ .*

*Тогда*

а) *если  $|I_W| > 2\pi D_{sd}(\Lambda)$  и справедливы соотношения*

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\ln |\lambda_j|} < +\infty, \quad \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\ln |\lambda_j|} > -\infty, \quad (6)$$

*то  $W$  представляется в виде (4);*

б) *если  $|I_W| < 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ , то представление (4) не имеет места; иными словами, включение  $(\operatorname{span} \operatorname{Exp}(\Lambda) \oplus W_{I_W}) \subset W$  – собственное.*

*Обратно, если  $W$  представляется в виде (4), то  $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$  и справедливы оба соотношения (6).*

**Теорема 2.** *Предположим, что  $b - a < +\infty$  и включение  $I_W \subset (a; b)$  не компактно.*

*Тогда справедливы оба прямых утверждения, а) и б) теоремы 1.*

*Обратно, верна импликация: если  $W$  представляется в виде (4) и  $b \in \overline{I_W}$  (или  $a \in \overline{I_W}$ ), то  $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$  и справедливо первое (или, соответственно, второе) из соотношений (6).*

**Теорема 3.** *Предположим, что  $I_W = (-\infty; d]$  (либо  $I_W = [c; +\infty)$ ).*

*Представление (4) для подпространства  $W$  имеет место тогда и только тогда, когда  $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$  и выполнено первое (соответственно, второе) из соотношений (6).*

3. Для дальнейшего изложения нам понадобится пространство Шварца  $\mathcal{E}(I)$ , где  $I$  – произвольный промежуток. Пространство  $\mathcal{E}(I)$  состоит из всех бесконечно дифференцируемых на  $I$  функций и снабжено метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств, аналогично случаю, когда  $I = (a; b)$ . Например, если  $I = [c; d]$ , то  $\mathcal{E}(I)$  – проективный предел банаховых пространств  $C^k[c; d]$ ; если  $I = [c; d)$ ,  $d < +\infty$ , то  $\mathcal{E}(I)$  – проективный предел банаховых пространств  $C^k[c; d - k^{(-1)}]$ .

Пространство  $\mathcal{E}(I)$  – полное и метризуемое, т.е. пространство Фреше. Сильное сопряженное пространство  $\mathcal{E}'(I)$  состоит из всех распределений  $S \in \mathcal{E}'$ , носители которых содержатся в  $I$ .

Рассмотрим последовательность  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  такую, что соответствующая система экспоненциальных одночленов  $\mathcal{E}xp(\Lambda)$  не полна в  $\mathcal{E}(I)$ . Обозначим замыкание множества  $\operatorname{span} \mathcal{E}xp(\Lambda)$  в пространстве  $\mathcal{E}(I)$  символом  $E(\Lambda, I)$ . С топологией, индуциро-

ванной из  $\mathcal{E}(I)$ , подпространство  $E(\Lambda, I)$  само становится пространством Фреше.

Пусть  $W$  –  $D$ -инвариантное подпространство в  $\mathcal{E}(a; b)$  со спектром  $(-i\Lambda)$  и резидуальным промежутком  $I_W$ ; и пусть  $U: E(\Lambda, (a; b)) \rightarrow E(\Lambda, I_W)$  – оператор сужения, ставящий в соответствие каждой функции  $f \in E(\Lambda, (a; b))$  ее сужение на промежуток  $I_W$ .

**Предложение 1.** *Для того чтобы  $D$ -инвариантное подпространство  $W$ , определенное соотношением (2), представлялось в виде прямой суммы (4), необходимо и достаточно, чтобы оператор сужения  $U$  был линейным топологическим изоморфизмом.*

Согласно теореме Пэли–Винера–Шварца [8, теорема 7.3.1], образ  $\mathcal{F}(\mathcal{E}'(I))$  сильного сопряженного пространства  $\mathcal{E}(I)$  при преобразовании Фурье–Лапласа  $\mathcal{F}$  есть пространство целых функций экспоненциального типа  $\mathcal{P}(I)$ , определяемое как индуктивный предел последовательности банаховых пространств  $\tilde{P}_k$ . В случае, когда  $I = [c; d]$ , пространство  $\tilde{P}_k$  состоит из всех целых функций  $\varphi$ , для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k \exp(dy^+ - cy^-)},$$

$$y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + iy.$$

Если же, скажем,  $I = [c; b)$ , то

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k \exp(d_k y^+ - cy^-)},$$

$$y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + iy,$$

где  $c < d_1 < \dots < d_k < \dots < b$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = b$ . Для промежутков  $I$  другого вида все определения даются с очевидными изменениями.

Вложения  $\tilde{P}_k \subset \tilde{P}_{k+1}$  вполне непрерывны, поэтому  $\mathcal{P}(I)$ , как и алгебра Шварца  $\mathcal{P}$ , есть локально-выпуклое пространство типа  $(LN^*)$ . Кроме того,  $\mathcal{P}(I)$  – топологический модуль над кольцом многочленов  $\mathbb{C}[z]$ .

Пусть промежутки  $I$  и  $I'$  не пусты и удовлетворяют условиям:  $I' \setminus I \neq \emptyset$ ,  $\partial I \cap \partial I' \neq \emptyset$ . Привлекая рассуждения с использованием следствия из теоремы 7 работы [9], аналогичные проведенным в работе [10], выведем следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Для того чтобы оператор сужения*

$$U: E(\Lambda, I') \rightarrow E(\Lambda, I)$$

*был линейным топологическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая интерполяционная задача: для любой функ-*

ции  $\Psi \in \mathcal{P}(I')$  существует функция  $\psi \in \mathcal{P}(I)$  такая, что разность  $(\Psi - \psi)$  обращается в нуль на  $\Lambda$ .

Пусть, как и выше,  $I = \langle c; d \rangle$  – конечный или бесконечный промежуток (символ “ $\langle$ ” может быть как круглой “ $\langle$ ”, так и квадратной “[” скобкой, аналогичный смысл имеет символ “ $\rangle$ ”). С учетом всего сказанного выше, основные результаты (теоремы 1–3) вытекают из следующего утверждения.

**Теорема 4.** Пусть последовательность  $\Lambda$  и промежуток  $I$  таковы, что экспоненциальная система  $\mathcal{E}_{\text{xp}}(\Lambda)$  не полна в  $\mathcal{E}(I)$ .

1) Если  $2\pi D_{sd}(\Lambda) < |I|$  и выполнены оба соотношения (6), то интерполяционная задача из предложения 2 разрешима для пары пространств  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}(I)$ .

2) Если  $2\pi D_{sd}(\Lambda) > |I|$  или  $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$ , то интерполяционная задача из предложения 2 не разрешима ни для какой пары пространств  $\mathcal{P}(I')$  и  $\mathcal{P}(I)$ .

3) Если  $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$  и выполнено первое (второе) из соотношений (6), то интерполяционная задача из предложения 2 разрешима для пары пространств  $\mathcal{P}((-\infty; d))$  (соответственно,  $\mathcal{P}(c; +\infty)$ ) и  $\mathcal{P}(I)$ .

II. Предположим, что существует промежуток  $I'$ , удовлетворяющий условиям:  $I' \setminus I \neq \emptyset$ ,  $\partial I' \cap \partial I \neq \emptyset$  – такой, что  $\sup_{t \in I'} t \in \bar{I}$  (или  $\inf_{t \in I'} t \in \bar{I}$ ) и для пары пространств  $\mathcal{P}(I')$  и  $\mathcal{P}(I)$  разрешима интерполяционная задача из предложения 2.

Тогда  $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ ,  $2\pi D_{sd}(\Lambda) \leq |I|$  и выполнено первое (соответственно, второе) из соотношений (6).

4. Заключительные замечания.

1. Если  $I = (-\infty; d)$  (или  $I = (c; +\infty)$ ), то выполнение первого (или, соответственно, второго) из соотношений (6), в совокупности с требованием  $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ , представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости интерполяционной задачи из предложения 2 для пары пространств  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}(I)$ .

2. В настоящий момент нам не известно, существует ли для заданного конечного промежутка  $I$  последовательность  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ , удовлетворяющая соотношениям (6) и такая, что  $2\pi D_{sd}(\Lambda) = |I|$ , а интерполяционная задача из предложения 2 не разрешима для пары пространств  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}(I)$ . Однако нами построена функция  $F \in \mathcal{P}$  со следующими свойствами:  $F$  не является медленно убывающей,  $D_{BM}(\Lambda_F) = D_{sd}(\Lambda_F)$ , где  $\Lambda_F$  – нулевое множество функции  $F$ .

3. В связи с приведенными в настоящей работе результатами (теоремы 1–4) представляет интерес умение определять, является ли заданная по-

следовательность  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ,  $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$ , нулевым (под-)множеством медленно убывающей функции? В работе [11] нами получен ряд результатов в этом направлении. Например, используя тот же подход, что и в [11], можно показать, что для последовательности  $\Lambda = \{\lambda_j\}$ , удовлетворяющей обоим неравенствам (6), требование  $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$  влечет следующее соотношение:

$$n_{\text{Re } \Lambda}(x, 1) = O(\ln|x|), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

где  $n_{\text{Re } \Lambda}(x, 1)$  – число точек последовательности  $\text{Re } \Lambda = \{\text{Re } \lambda_j\}$  в промежутке  $[x - 1; x + 1]$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор признателен рецензенту за полезные замечания и комментарии.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWI-2020-0027).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aleman A., Korenblum B. Derivation-Invariant Subspaces of  $C^\infty$ . Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. P. 493–512.
2. Абузьярова Н.Ф. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.
3. Koosis P. Logarithmic Integral II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
4. Aleman A., Baranov A., Belov Yu. Subspaces of  $C^\infty$  invariant under the differentiation // J. Functional Analysis. 2015. V. 268. P. 2421–2439.
5. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV // Amer. J. Math. 1960. V. 57. № 1. P. 522–588.
6. Berenstein C.A., Taylor B.A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. in Math. 1980. V. 33. P. 109–143.
7. Abuzyarova N.F. On conditions of invertibility in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 6. P. 1141–1153.
8. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
9. Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF). Математика. Сб. пер. иностр. ст. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–107.
10. Красичков-Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 931–945.
11. Абузьярова Н.Ф. Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца // ДАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 7–11.



**REPRESENTATION OF SYNTHESABLE DIFFERENTIATION-INVARIANT  
SUBSPACES OF THE SCHWARTZ SPACE****N. F. Abuzyarova<sup>a</sup>**<sup>a</sup> *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

We consider the differentiation-invariant subspace  $W$  in the Schwartz space  $C^\infty(a; b)$  which admits weak spectral synthesis. We obtain the conditions under which  $W$  is represented as the direct (algebraical and topological) sum of its residual subspace and the closed subspace spanned by the set of exponential monomials contained in  $W$ .

*Keywords:* spectral synthesis, invariant subspaces, slowly decreasing function, Beurling–Malliavin density

УДК 517.957

## ОБ АТТРАКТОРАХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. К. А. Бекмаганбетов<sup>1,2,\*</sup>, В. В. Чепыжов<sup>3,4,\*\*</sup>, Г. А. Чечкин<sup>2,5,6,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.02.2021 г.

Поступило 18.02.2021 г.

После доработки 18.02.2021 г.

Принято к публикации 09.03.2021 г.

В работе изучается система уравнений реакции–диффузии в перфорированной области с быстро осциллирующими членами в самом уравнении и в граничных условиях. Нелинейная функция в уравнениях может не удовлетворять условию Липшица, поэтому теорема единственности для соответствующей начально–краевой задачи для рассматриваемой системы уравнений реакции–диффузии может не выполняться. При этом доказано, что траекторные аттракторы этой системы слабо стремятся в соответствующей топологии к траекторным аттракторам усредненной системы реакции–диффузии со “странным членом” (потенциалом).

*Ключевые слова:* аттракторы, усреднение, уравнение реакции–диффузии, нелинейные уравнения, слабая сходимость, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, странный член

**DOI:** 10.31857/S2686954321030036

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к задачам в перфорированных областях возник в связи прикладными задачами биологии, механики и инженерии. Работы, посвященные асимптотическому анализу таких задач, см., например, [1–5] и библиографию в этих работах. Особенно интересно изучать задачи, в которых может не выполняться теорема единственности. В таких задачах проводится усреднение соот-

ветствующих аттракторов (см. рис. 1<sup>1</sup>, например). Аттракторы характеризуют всю динамику рассматриваемой модели (см., например, монографии [6–8] и ссылки в них). В работе [9] изучалось усреднение аттракторов скалярных эволюционных уравнений с диссипацией в периодически перфорированной области. В настоящей работе мы рассматриваем начально–краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими членами в перфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей.

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Нур-Султан, Казахстан

<sup>2</sup> Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>3</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>4</sup> Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

<sup>5</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>6</sup> Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

\*E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

\*\*E-mail: chep@iitp.ru

\*\*\*E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , с кусочно–гладкой границей  $\partial\Omega$ . Пусть  $G_0$  – область, принадлежащая  $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$ , такая, что  $\bar{G}_0$  является компактом, диффеоморфным шару.

Пусть  $\delta > 0$  и  $M$  – некоторое множество, введем следующее обозначение:  $\delta M = \{x: \delta^{-1}x \in M\}$ . Предположим, что  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, чтобы

$$\varepsilon^{n/(n-2)}G_0 \subset \varepsilon Y.$$

<sup>1</sup> Из открытых источников.

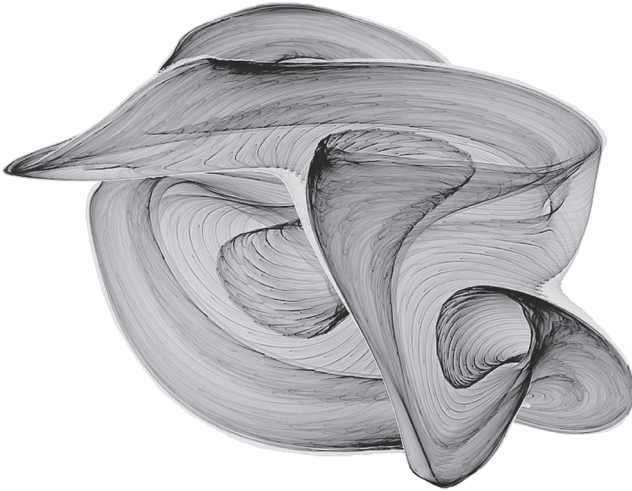


Рис. 1. Аттрактор.

Для  $j \in \mathbb{Z}^n$  определим

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^{n/(n-2)} G_0.$$

Определим область  $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{n\varepsilon}\}$  и множество допустимых индексов

$$\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n: G_\varepsilon^j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \emptyset\}.$$

Заметим, что  $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$ , где  $d > 0$  – некоторая постоянная. Рассмотрим область

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{G}_\varepsilon, \quad \text{где} \quad G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j.$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, +\infty), \quad Q = \Omega \times (0, +\infty).$$

Мы изучаем асимптотическое поведение траекторных аттракторов начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} &= H \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^{n/(2-n)} B_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ j &\in \Upsilon_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon &= U(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u = (u^1, \dots, u^N)^\top$ ,  $f = (f^1, \dots, f^N)^\top$  и  $g = (g^1, \dots, g^N)^\top$ ,  $\nu$  – вектор единичной внешней нормали к границе. Функция  $a(x, y) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$  такая, что  $0 < a_0 \leq a(x, y) \leq A_0$  с некоторыми постоянными  $a_0, A_0$ ,

а функция  $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  имеет среднее  $\bar{a}(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  в пространстве  $L_{\infty, *w}(\Omega)$ , т.е.

$$\int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega \bar{a}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \tag{2}$$

для любой функции  $\varphi \in L_1(\Omega)$ . Матрица кросс-диффузии  $H$  – это квадратная матрица размера  $N \times N$  с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметричную часть  $\frac{1}{2}(H + H^\top) \geq \alpha I$ , где  $\alpha > 0$ , а  $I$  – единичная матрица порядка  $N$ . Отметим, что матрица  $H$  не обязательно симметрична, также отметим, что принцип максимума может не выполняться для нашей задачи.

Для вектор-функции  $g(x, y)$  будем считать, что функции  $g_\varepsilon^i(x) = g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  и имеют средние  $\bar{g}^i(x)$  в пространстве  $V' = H^{-1}(\Omega)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , т.е.

$$\int_\Omega g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega \bar{g}^i(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \tag{3}$$

для любой функции  $\varphi \in V = H_0^1(\Omega)$  и для всех  $i = 1, \dots, N$ .

В работе [10] приведены примеры функций вида  $a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  и  $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ , которые удовлетворяют условиям усреднения (2) и (3).

Здесь  $B_\varepsilon^j(x)$  – диагональная матрица с ограниченными элементами вида

$$b^{11}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \dots, b^{NN}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \quad j \in \Upsilon_\varepsilon,$$

где  $b^{kk}(x, y) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  – 1-периодические по  $y$  функции такие, что

$$0 < b_0 \leq b^{kk}(x, y) \leq B_0 \tag{4}$$

с некоторыми постоянными  $b_0, B_0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Обозначим также вектор

$$\bar{B}(x, y) := (b^{11}(x, y), \dots, b^{NN}(x, y))^\top,$$

а диагональную матрицу с элементами  $b^{11}(x, y), \dots, b^{NN}(x, y)$  – через  $B(x, y)$ .

Предположим, что вектор-функция  $f(v) \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{p_i/(p_i-1)} \leq C_0 \left( \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i} + 1 \right), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C \leq \sum_{i=1}^N f^i(v) v^i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, \quad (6)$$

где  $\gamma_i > 0$  для всех  $i = 1, \dots, N$ . Для определенности будем считать, что  $p_N \geq p_{N-1} \geq \dots \geq p_1 \geq 2$ . Заметим, что выполнение условия Липшица для функции  $f(v)$  относительно  $v$  не предполагается.

Введем следующие обозначения для пространств  $\mathbf{H} := [L_2(\Omega)]^N$ ,  $\mathbf{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^N$ ,  $\mathbf{V} := [H_0^1(\Omega)]^N$ ,  $\mathbf{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^N$  – множество всех вектор-функций из  $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^N$  с нулевым следом на  $\partial\Omega$ . Нормы в этих пространствах определяют, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_\varepsilon^2 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^N |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_1^2 &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\nabla v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_{1\varepsilon}^2 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^N |\nabla v^i(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Напомним, что  $\mathbf{V}' := [H^{-1}(\Omega)]^N$  – двойственное пространство к пространству  $\mathbf{V}$ , кроме того,  $\mathbf{V}'_\varepsilon$  – двойственное пространство для  $\mathbf{V}_\varepsilon$ .

Пусть  $q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$  для всех  $i = 1, \dots, N$ . Будем использовать следующие векторные обозначения  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ , а также определим пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p &:= L_{p_1}(\Omega) \times \dots \times L_{p_N}(\Omega), \\ \mathbf{L}_{p,\varepsilon} &:= L_{p_1}(\Omega_\varepsilon) \times \dots \times L_{p_N}(\Omega_\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) &:= L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega)) \times \dots \times L_{p_N}(\mathbb{R}_+; L_{p_N}(\Omega)), \\ \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p,\varepsilon}) &:= L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega_\varepsilon)) \times \dots \times L_{p_N}(\mathbb{R}_+; L_{p_N}(\Omega_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Как и в [7], будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x, s) \in \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p,\varepsilon}),$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \cdot \psi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} H \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx dt + \\ &+ \int_{Q_\varepsilon} a_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon) \cdot \psi dx dt + \\ &+ \varepsilon^{n/(2-n)} \sum_{j \in \mathbb{Y}_\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^j} B_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon \cdot \psi dx dt = \\ &= \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dx dt \end{aligned} \quad (7)$$

для любых функций  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$ . Здесь  $y_1 \cdot y_2$  означает скалярное произведение векторов  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$ .

Если  $u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_p(0, M; \mathbf{L}_{p,\varepsilon})$ , тогда из условия (5) следует, что  $f(u_\varepsilon(x, t)) \in \mathbf{L}_q(0, M; \mathbf{L}_{q,\varepsilon})$ . В то же время, если  $u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}_\varepsilon)$ , тогда

$$\Delta u_\varepsilon(x, t) + g_\varepsilon(x) \in \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon).$$

Поэтому для произвольного слабого решения  $u_\varepsilon(x, s)$  задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \in \mathbf{L}_q(0, M; \mathbf{L}_{q,\varepsilon}) + \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon).$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\mathbf{L}_q(0, M; \mathbf{L}_{q,\varepsilon}) + \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon) \subset \mathbf{L}_q(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}}),$$

где пространство  $\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}} := H_\varepsilon^{-r_1} \times \dots \times H_\varepsilon^{-r_N}$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$  и  $r_i = \max \left\{ 1, n \left( \frac{1}{q_i} - \frac{1}{2} \right) \right\}$  для всех  $i = 1, \dots, N$  (соболевское пространство с отрицательным показателем). Следовательно, для любого слабого решения  $u_\varepsilon(x, t)$  задачи (1) имеем  $\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \in \mathbf{L}_q(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}})$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Существование слабого решения  $u(x, s)$  задачи (1) для любой функции  $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$  и фиксированного  $\varepsilon$ , такого, что  $u(x, 0) = U(x)$ , может быть доказано стандартным способом (см., например, [6]). Это решение может быть не единственным, поскольку функция  $f(v)$  удовлетворяет условиям (5), (6) и для нее не предполагается выполнение условия Липшица относительно  $v$ .

Для удобства будем опускать индекс  $\varepsilon$  в обозначениях пространств, там, где это не вызывает непонимания. Положим  $E_1 = \mathbf{L}_p \cap \mathbf{V}$ ,  $E_0 = \mathbf{H}^{-\mathbf{r}}$ ,  $E = \mathbf{H}$  и  $A(u) = H \Delta u - a(\cdot) f(u) + g(\cdot)$  и определим банаховы пространства для каждого отрезка  $[t_1, t_2] \in R$

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := \mathbf{L}_p(t_1, t_2; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\} \quad (8)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{\mathbf{L}_p(t_1, t_2; \mathbf{L}_p)} + \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(0, M; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r})}. \quad (9)$$

Положив  $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r})$ , получаем, что  $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$ , а если  $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$ , тогда  $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$ . Далее обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{\text{loc}} &= \mathbf{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}, \\ \mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}} &= \mathbf{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p, \varepsilon}) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}) \right. \right\}, \end{aligned}$$

а через  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции  $U \in \mathbf{H}$  существует хотя бы одна траектория  $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$  такая, что  $u(0) = U(x)$ . Следовательно, пространство траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что  $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  и пространство траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  является трансляционно-инвариантным, т.е. если  $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ , тогда и  $u(h + s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$  для любых  $h \geq 0$ . Далее, используя норму пространства  $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$ , определим метрики  $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$  в пространствах  $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$  следующим образом:

$$\rho_{0, M}(u, v) = \left( \int_0^M \|u(s) - v(s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}.$$

Эти метрики порождают топологию  $\Theta_+^{\text{loc}}$  в пространстве  $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  (соответственно  $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$  в  $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ ). Напомним, что последовательность  $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  сходится к функции  $v \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , если  $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{H})} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) для любого  $M > 0$ . Топология  $\Theta_+^{\text{loc}}$  метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  задачи (1). Полугруппа сдвигов  $\{S(t)\}$ , дей-

ствующая на  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ , непрерывна в рассматриваемой топологии  $\Theta_+^{\text{loc}}$ .

Определим ограниченные множества в  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ , используя банаховы пространства

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}, \quad (10)$$

$\mathcal{F}_+^b$  – подпространство пространства  $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ .

Рассмотрим полугруппу сдвигов  $\{S(t)\}$  на  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ ,  $S(t): \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+$ ,  $t \geq 0$ .

Пусть  $\mathcal{K}_\varepsilon$  означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений  $u(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}.$$

Имеет место

**Л е м м а 1.** При выполнении условий (5), (6) задача (1) имеет траекторные аттракторы  $\mathcal{A}_\varepsilon$  в топологическом пространстве  $\Theta_+^{\text{loc}}$ . Множество  $\mathcal{A}_\varepsilon$  равномерно (по  $\varepsilon \in (0, 1)$ ) ограничено в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактно в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ . Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \Pi_+ K_\varepsilon,$$

ядро  $\mathcal{K}_\varepsilon$  – непусто и равномерно (по  $\varepsilon \in (0, 1)$ ) ограничено в  $\mathcal{F}^b$ . Напомним, что пространства  $\mathcal{F}_+^b$  и  $\Theta_+^{\text{loc}}$  зависят от  $\varepsilon$ .

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [8], для более частного случая. Существование поглощающего множества, ограниченного в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактного в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , доказывается так же, как и в [7].

## 2. УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

Чтобы определить “странный член” (потенциал в предельном уравнении), рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_y v &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_y} + B(x, y)v &= \bar{B}(x, y), \quad y \in \partial G_0, \\ v &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где матрица  $B(x, y)$  и вектор  $\bar{B}(x, y)$  были определены выше. В этой задаче переменная  $x$  играет роль медленного параметра. Определим предельный потенциал по следующей формуле:

$$V^{kk}(x) = \int_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial v_y} v^k(x, y) d\sigma_y, \quad k = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= H \Delta u - \bar{a}(x) f(u) - V(x) u + \bar{g}(x), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial \Omega, \\ u &= U(x), \quad t = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $V(x)$  — диагональная матрица с элементами  $V^{kk}(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Очевидно, что задача (12) также имеет траекторный аттрактор  $\bar{\mathcal{A}}$  в пространстве траекторий  $\bar{\mathcal{K}}^+$ , соответствующем задаче (12), и

$$\bar{\mathcal{A}} = \Pi_+ \bar{\mathcal{K}},$$

где  $\bar{\mathcal{K}}$  — ядро задачи (12) в  $\mathcal{F}^b$ .

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

**Т е о р е м а 1.** *В топологическом пространстве  $\Theta_+^{\text{loc}}$  справедливо предельное соотношение*

$$\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Более того

$$\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \text{в} \quad \Theta_+^{\text{loc}}.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Напомним, что пространства в теореме 1 зависят от  $\varepsilon$ . Все функции могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм.

Если рассмотреть уравнения реакции–диффузии, для которых имеет место теорема единственности в задаче Коши. Для этого достаточно предположить, что нелинейный член  $f(u)$  в системе уравнений (1) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) &\geq -C|v_1 - v_2|^2 \\ \text{для всех} \quad v_1, v_2 &\in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (13)$$

(см. [7]). В [7] было доказано, что если выполнено (13), тогда уравнения (1) и (12) генерируют динамические полугруппы в  $\mathbf{H}$ , имеющие глобальные аттракторы  $\mathcal{A}_\varepsilon$  и  $\bar{\mathcal{A}}$ , ограниченные в пространстве  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  (см. также [8]). Пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) | u \in \mathcal{A}_\varepsilon\}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \{u(0) | u \in \bar{\mathcal{A}}\}.$$

При этом выполняется следующее

**С л е д с т в и е 1.** *В условиях теоремы 1 имеет место предельное соотношение*

$$\text{dist}_{\mathbf{H}^\varepsilon}(\mathcal{A}_\varepsilon, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0+).$$

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора поддержана КН МОН РК (грант AP08855579). Научные результаты второго автора в первом параграфе поддержаны грантом РФФИ (проект 20-01-00469). Научный вклад третьего автора в результаты второго параграфа поддержан грантом РНФ (проект 20-11-20272).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North–Holland; 1992.
3. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
4. Cioranescu D., Murat F. Un terme étrange venu d'ailleurs I & II. In Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar, Volume II & III, ed. H. Berzis, J.L. Lions. Research Notes in Mathematics, 60 & 70, London: Pitman, 98–138 & 154–178; 1982.
5. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 7. С. 3–20.
6. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
7. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc.; 2002.
8. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag; 1988.
9. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140.
10. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 1. С. 13–50.

## ON ATTRACTORS OF REACTION–DIFFUSION EQUATIONS IN A POROUS ORTHOTROPIC MEDIUM

**K. A. Bekmaganbetov<sup>a,b</sup>, V. V. Chepyzhov<sup>c,d</sup>, and G. A. Chechkin<sup>b,e,f</sup>**

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Nur-Sultan, Kazakhstan*

<sup>b</sup> *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

<sup>c</sup> *Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>d</sup> *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

<sup>e</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>f</sup> *Institute of Mathematics with Computing Center – Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper we study a system of reaction–diffusion equations in a perforated domain with rapidly oscillating terms in the equation and in the boundary conditions. A nonlinear function in the equations may not satisfy the Lipschitz condition and hence, the uniqueness theorem for the corresponding initial–boundary value problem for the considered system of reaction-diffusion equations may not be satisfied. It was proved that the trajectory attractors of this system weakly converge in the corresponding topology to the trajectory attractors of the homogenized reaction-diffusion system with a “strange term” (potential).

*Keywords:* attractors, homogenization, reaction-diffusion equation, nonlinear equations, weak convergence, perforated domain, rapidly oscillating terms, strange term

УДК 517.955

## О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

© 2021 г. В. И. Богачев<sup>1,2,3,4,\*</sup>, Т. И. Красовицкий<sup>1,4</sup>, С. В. Шапошников<sup>1,2,4</sup>

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 21.03.2021 г.

Поступило 26.03.2021 г.

После доработки 26.03.2021 г.

Принято к публикации 04.04.2021 г.

В работе дан положительный ответ на вопрос о возможности существования нескольких вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова при всех начальных условиях: построен первый пример уравнения с единичной матрицей диффузии и гладким коэффициентом сноса, для которого задача Коши при всяком вероятностном начальном условии имеет бесконечномерный симплекс вероятностных решений.

*Ключевые слова:* уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, задача Коши, единственность вероятностного решения

**DOI:** 10.31857/S2686954321030048

Мы рассматриваем вероятностные решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова следующего вида:

$$\partial_t \mu_t = \Delta \mu_t - \operatorname{div}(b \mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \quad (1)$$

где  $\nu$  – борелевская вероятностная мера на  $\mathbb{R}^d$ , коэффициент  $b(x) = (b^i(x))_{1 \leq i \leq d}$  не зависит от  $t$  и  $b^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Пусть  $T > 0$ . Вероятностным решением задачи (1) называется семейство борелевских вероятностных мер  $\{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$  на  $\mathbb{R}^d$ , борелевски измеримое по  $t$  и удовлетворяющее равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta \varphi - \langle b, \nabla \varphi \rangle) d\mu_s ds$$

для всякого  $t \in [0, T]$  и всякой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Отметим, что в рассматриваемой ситуации гладкого сноса  $b$  существует такая бесконечно гладкая положительная функция  $\varrho(x, t)$  на  $\mathbb{R}^d \times (0, T)$ , что

$\mu_t = \varrho(x, t) dx$  для почти всех  $t \in (0, T)$  и функция  $\varrho$  является классическим решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Далее мы используем обозначения

$$Lu = \Delta u + \langle b, \nabla u \rangle, \quad L^*u = \Delta u - \operatorname{div}(bu)$$

и записываем уравнение (1) для меры  $\mu_t = \varrho(x, t) dx$  следующим образом:

$$\partial_t \varrho = L^* \varrho.$$

Вопрос о единственности вероятностного решения данной задачи был поставлен еще А.Н. Колмогоровым (см. [1, 2]). Известные достаточные условия единственности и примеры неединственности в размерности  $d \geq 3$  приведены в [3, глава 9]. Проблема единственности в одномерном случае ( $d = 1$ ) была рассмотрена такими классиками, как У. Феллер [4], К. Иосида [5] и Э. Хилле [6], но в иной постановке, связанной с полугруппами. В недавних работах [7, 8] показано, что в одномерном случае для всякой локально ограниченной борелевской функции  $b$ , не зависящей от времени  $t$ , вероятностное решение единственно. В той же работе впервые построен пример неединственности для  $d = 2$ . В одномерном случае в [8, замечание 4.6] приведен пример уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, для которого задача Коши не для всех начальных вероятностных условий имеет вероятностное решение. В [3, глава 9] при  $d \geq 3$  и в [8] при  $d \geq 2$  примеры неединственности вероятностных решений построены для очень специальных начальных условий, причем специальный вид начального условия существенно ис-

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

<sup>4</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*E-mail: vibogach@mail.ru



пользуется в построении. Оставалось неясным, может ли задача Коши (1) иметь несколько вероятностных решений для каждого вероятностного начального условия. В настоящем сообщении мы даем положительный ответ на этот вопрос.

Пусть  $d \geq 2$ . Положим

$$b(x, y, z) = (B(x), C(y), D(z)),$$

где  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{d-2}$  и

$$B(x) = -x - 6e^{x^2/2},$$

$$C(y) = -(1 + y^2)\operatorname{arctg}y + \frac{2y}{1 + y^2}, \quad D(z) = -z.$$

Если  $d = 2$ , то компонента  $D(z)$  отсутствует.

**Т е о р е м а 1.** *Для всякой вероятностной меры  $\nu$  задача Коши (1) с коэффициентом сноса  $b = (B, C, D)$  (или  $b = (B, C)$  в случае  $d = 2$ ) и начальным условием  $\nu$  имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений.*

Положим

$$L_x = \partial_x^2 + B(x)\partial_x, \quad L_y = \partial_y^2 + C(y)\partial_y,$$

$$L_z = \partial_z^2 + D(z)\partial_z,$$

$$L = L_x + L_y + L_z.$$

Если  $d = 2$ , то  $L = L_x + L_y$ .

Пусть сначала  $\nu = \delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} \otimes \delta_{z_0}$ . Даже для таких  $\nu$  ранее не было известно примеров неединственности. Построим бесконечно много линейно независимых вероятностных решений задачи Коши в виде произведений

$$u(x, t)v(y, t)w(z, t),$$

где

$$\partial_t u = L_x^* u, \quad \partial_t v = L_y^* v, \quad \partial_t w = L_z^* w$$

$$\text{и } u|_{t=0} = \delta_{x_0}, \quad v|_{t=0} = \delta_{y_0}, \quad w|_{t=0} = \delta_{z_0}.$$

Ясно, что функция  $\rho = uvw$  удовлетворяет уравнению  $\partial_t \rho = L^* \rho$  с начальным условием  $\nu$ . Для построения  $u$  и  $w$  нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения из [3, глава 5] о полугруппах, порождаемых операторами  $L_x$  и  $L_z$ .

Несложно проверить, что стандартные гауссовские меры  $\gamma_x$  и  $\gamma_z$  с плотностями  $(2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$  и  $(2\pi)^{(2-d)/2} e^{-|z|^2/2}$  удовлетворяют уравнениям

$$L_x^* \gamma_x = 0, \quad L_z^* \gamma_z = 0.$$

Согласно [3, теорема 5.2.2], оператор  $L_x$  порождает сильно непрерывную субмарковскую операторную полугруппу  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  в  $L^1(\gamma_x)$ , причем мера  $\gamma_x$  субинвариантна для  $T_t$ , т.е. интеграл от  $T_t f$  по мере  $\gamma_x$  не превосходит интеграл от  $f$  для всех огра-

ниченных измеримых функций  $f \geq 0$ . Согласно [3, задача 4.5.7] (полное решение этой задачи приведено в [8]), мера  $\gamma_x$  не инвариантна для операторов  $T_t$ .

В силу [3, теорема 5.4.5] для всякого  $f \in L^1(\gamma_x)$  существует непрерывная по  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  версия  $T_t f(x)$ , задаваемая равенством

$$T_t f(x) = \int k(t, x, a) f(a) da,$$

где функция  $k$  является гладкой и положительной на  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Именно с такой версией  $T_t f$  мы работаем дальше. Выражение

$$T_t^* \sigma = \int k(t, x, a) \sigma(dx) da$$

определяет сопряженную полугруппу на мерах, причем

$$\partial_t T_t^* \sigma = L_x^* T_t^* \sigma, \quad T_t^* \sigma|_{t=0} = \sigma.$$

Согласно [8, следствие 2.5], для всякой вероятностной меры  $\sigma$  не все меры  $T_t^* \sigma$  являются вероятностными. Положим  $u(x, t) dx = T_t^* \delta_{x_0}$ , т.е.

$$u(x, t) = k(t, x_0, x).$$

Пусть

$$q(t) = \int u(x, t) dx = \int k(t, x_0, x) dx = T_t 1(x_0).$$

**Л е м м а 1.** *Функция  $q$  отлична от константы, бесконечно дифференцируема на  $[0, T]$ ,  $q'(t) \leq 0$ ,  $q(0) = 1$ ,  $q^{(j)}(0) = 0$  при  $j \geq 1$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Функция  $h(x, t) = T_t 1(x)$  является решением задачи Коши  $\partial_t h = L_x h$ ,  $h|_{t=0} = 1$ . Коэффициенты оператора  $L_x$  и начальное условие бесконечно гладкие, что влечет гладкость функции  $h$  вплоть до  $t = 0$ . Поясним это подробнее. Пусть  $\psi_j$  – гладкие функции с компактным носителем, которые поточечно сходятся к 1, причем  $\psi_j(x) = 1$  на  $[-j, j]$ ,  $0 \leq \psi_j \leq 1$ . Функции  $h_j = T_t \psi_j$  сходятся к  $h = T_t 1$  при каждом  $t$  в  $L^1(\gamma_x)$ . Согласно [8, лемма 2.2], функция  $h_j$  равна пределу решений  $h_{j,m}$  краевых задач  $\partial_t h_{j,m} = L_x h_{j,m}$ ,  $h_{j,m}(-m, t) = h_{j,m}(m, t)$ ,  $h_{j,m}(x, 0) = \psi_j(x)$ . При достаточно большом  $m$  решения этих краевых задач являются гладкими на  $[-m, m] \times [0, T]$ , а в силу локальных априорных оценок (см. [9, теорема 10.1]) предельные функции  $h_j$  также являются гладкими и их производные по  $x$  и  $t$  всякого фиксированного порядка равномерно ограничены по  $j$  на всяком множестве вида  $[0, T] \times [-m, m]$ .

Следовательно, предельная функция  $h$  является гладкой вплоть до  $t = 0$ . В частности, функция  $q(t) = h(x_0, t)$  бесконечно дифференцируема на  $[0, T]$ . Пусть  $s > 0$ . Так как  $T_s 1 \leq 1$ , то

$$q(t + s) = T_{t+s}1(x_0) = T_t(T_s1)(x_0) \leq T_t1(x_0) = q(t).$$

Таким образом, функция  $q$  убывает, поэтому  $q' \leq 0$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \partial_t h(x, 0) &= L_x h(x, 0) = L_x 1 = 0, \\ \partial_t^2 h(x, 0) &= L_x \partial_t h(x, 0) = 0, \dots, \partial_t^j h(x, 0) = \\ &= L_x \partial_t^{j-1} h(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $q^{(j)}(0) = 0$  при  $j \geq 1$ . Функция  $q$  отлична от константы, так как  $q(0) = 1$  и  $q(t) < 1$  при  $t > 0$ . Последнее вытекает из того, что если  $q(t) = 1$  при некотором  $t > 0$ , то  $q(s) = 1$  при  $s \leq t$ , поэтому мера  $\gamma_x$  инвариантна.

Оператор  $L_z$  порождает полугруппу Орнштейна–Уленбека  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  на  $L^1(\gamma_z)$ . Для всякой вероятностной меры  $\sigma$  соответствующая полугруппа  $\{S_t^*\}_{t \geq 0}$  на мерах задает вероятностное решение  $S_t^* \sigma$  уравнения  $\partial_t S_t^* \sigma = L_z^* S_t^* \sigma$  с начальным условием  $S_t^* \sigma|_{t=0} = \sigma$ . Положим

$$w(z, t) dz = S_t^* \delta_{z_0}.$$

Заметим, что при каждом  $t$  функция  $w(\cdot, t)$  является вероятностной плотностью, а функция  $u(\cdot, t)$  не является вероятностной плотностью. Для построения вероятностного решения нам необходимо задать функцию  $v$  так, чтобы произведение  $uvw$  стало вероятностной плотностью. Кроме того, меняя множитель  $v$ , мы построим бесконечно много линейно независимых вероятностных решений. Решение  $v$  построим в виде суммы двух функций  $v_1$  и  $v_2$ , где функция  $v_1$  – вероятностное решение уравнения  $\partial_t v = L_y^* v$  с начальным условием  $v|_{t=0} = \delta_{y_0}$  (это решение фиксировано для дальнейшего), а функция  $v_2$  – некоторое специальное неотрицательное интегрируемое решение уравнения  $\partial_t v = L_y^* v$  с начальным условием  $v|_{t=0} = 0$ , которое далее будет меняться, причем

$$\int v(y, t) dy = 1 + \int v_2(y, t) dy = \frac{1}{q(t)}.$$

Вероятностное решение  $v_1$  существует согласно [3, следствие 6.6.6]. Действительно, функция  $y^2$  является функцией Ляпунова для оператора  $L_y$ : для нее имеем  $L_y y^2 = 2 + 2C(y)y \leq 6$ , ибо

$$C(y)y = -(1 + y^2)y \arctg y + \frac{2y^2}{1 + y^2} \leq 2.$$

Существование функции  $v_2$  обеспечивает следующая лемма, в которой применяется теория вырождающихся параболических уравнений. Использование вырождающихся уравнений для построе-

ния примеров неединственности вероятностных решений стационарного уравнения Колмогорова было предложено в работе [10].

Положим

$$p(t) = -\frac{q'(t)}{q(t)^2}.$$

*Лемма 2.* Пусть  $p_1$  и  $p_2$  – гладкие неотрицательные функции на  $[0, T]$ , причем  $p_1(0) = p_2(0) = 0$ ,  $p_1^{(k)}(0) = p_2^{(k)}(0) = 0$  при всех  $k \geq 1$  и

$$p_1(t) + p_2(t) = \frac{2}{\pi} p(t).$$

Тогда существует бесконечно гладкая функция  $v$  на  $[0, T] \times \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \partial_t v &= L_y^* v, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v \geq 0, \\ \int v(y, t) dy &= \frac{1}{q(t)} - 1. \end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} v(y, t)(1 + y^2) &= p_2(t), \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} v(y, t)(1 + y^2) &= p_1(t). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\psi(s) = s$ . Сделаем замену переменной  $\eta = \psi(y)$  в задаче Коши  $\partial_t v = L_y^* v$ ,  $v|_{t=0} = 0$ . Тогда уравнение преобразуется в вырожденное уравнение на прямоугольнике  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, T)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \partial_\eta^2 (\mathcal{A}V) - \partial_\eta (\mathcal{B}V) \\ \text{или} \quad \partial_t V &= \alpha \partial_\eta^2 V + \beta \partial_\eta V + \gamma V, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} V(t, \eta) &= v(t, \psi^{-1}(\eta))(\psi^{-1}(\eta))', \\ \mathcal{A} &= (\psi'(\psi^{-1}(\eta)))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \psi''(\psi^{-1}(\eta)) + C(\psi^{-1}(\eta))\psi'(\psi^{-1}(\eta)), \\ \alpha &= A, \quad \beta = 2\partial_\eta \mathcal{A} - \mathcal{B}, \quad \gamma = \partial_\eta^2 \mathcal{A} - \partial_\eta \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Отметим, что после обратной замены переменной всякое неотрицательное решение  $V(\eta, t)$  уравнения (2) дает неотрицательное решение  $v(y, t)$  исходного уравнения. Для каждого  $t \in [0, T]$  интеграл функции  $V(\cdot, t)$  по отрезку  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  равен интегралу функции  $v(\cdot, t)$  по всей прямой.

Далее рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2). Уравнение вырождается на границе, поэтому краевые условия должны ставиться лишь на части границы, обозначаемой через  $\Sigma_2$  и определяемой посредством функции Фикеры. Мы проверим, что в данном случае это дает

обычные краевые условия, как и для невырожденного уравнения.

Напомним, что если уравнение имеет вид  $aD^2 + bD + c = 0$ , то функция Фикеры определяется в точках границы области, где  $a^{ij}n_i n_j = 0$  для внутренней нормали  $n$ , и равна  $(b^k - a^{kj})n_k$ , см. [11, гл. 1, § 1, § 5, теорема 1.5.1]. Поскольку коэффициент  $\alpha$  уравнения (2) при продолжении нулем вне интервала  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  есть функция класса  $C^2$  на всей прямой, равная нулю в концах интервала вместе с производными первого и второго порядка, получаем, что функция Фикеры имеет вид  $\varphi(\eta) = -\text{sign}(\eta)\beta(\eta)$ , поэтому  $\Sigma_2 = \{(\eta, t): \text{sign}(\eta)\beta(\eta) > 0\}$ . Для выбранного выше коэффициента сноса  $C(y)$  боковые отрезки  $\frac{\pi}{2} \times [0, T]$  и  $-\frac{\pi}{2} \times [0, T]$  лежат в  $\Sigma_2$ . Таким образом, из теории вырожденных параболических уравнений (см. [11, 12]) следует, что здесь можно поставить начальное условие при  $t = 0$  и граничные условия при  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \alpha \partial_\eta^2 V + \beta \partial_\eta V + \gamma V, & V(\eta, 0) &= 0, \\ v\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) &= p_1(t), & v\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= p_2(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Домножая уравнение на  $e^{\lambda t}$  с некоторой константой  $\lambda$ , можно считать, что  $\gamma \leq -\gamma_0 < 0$  для некоторой константы  $\gamma_0$ . Далее, вычитая из решения  $V$  некоторую гладкую функцию  $Q$ , можно свести задачу к однородным граничным условиям. Теперь применимо следствие теоремы 4 из [12]. Итак, существует гладкое решение  $V$  задачи (3). Кроме того, для задачи (3) применима теорема 1.1.2 из [11], по которой для решения  $V$  выполнен принцип максимума, поэтому из неотрицательности  $p_1$  и  $p_2$  следует неотрицательность  $V$ . Проверим, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t) d\eta = \frac{1}{q(t)} - 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t) d\eta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \partial_t V d\eta = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \partial_y (\mathcal{B}V) d\eta = \\ &= -\mathcal{B}\left(\frac{\pi}{2}\right)V\left(\frac{\pi}{2}, t\right) + \mathcal{B}\left(-\frac{\pi}{2}\right)V\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = p(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t) d\eta - \frac{1}{q(t)} \right) = 0,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, 0) d\eta - \frac{1}{q(0)} = -1.$$

Наконец, отметим, что  $v(y, t) = V(\arctg y, t)(1 + y^2)^{-1}$  и

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} v(y, t)(1 + y^2) &= p_1(t), \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} v(y, t)(1 + y^2) &= p_2(t), \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Пусть теперь  $\{p^j\}$  – бесконечный набор гладких линейно независимых неотрицательных функций на отрезке  $[0, T]$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq p^j(t) \leq \frac{2p(t)}{\pi}$  для всех  $t$  и равенствам  $p^j(0) = 0$ ,  $(p^j)^{(k)}(0) = 0$  при всех  $k \geq 1$ . Для каждой пары

$$p_1(t) = p^j(t), \quad p_2(t) = \frac{2}{\pi} p(t) - p^j(t)$$

с помощью последней леммы построим решение  $v_2^j$  и положим

$$v^j(y, t) = v_1(y, t) + v_2^j(y, t).$$

Тогда соответствующие функции

$$\varrho^j(x, y, z, t) = u(x, t)v^j(y, t)w(z, t)$$

(в случае  $d = 2$  функции  $\varrho^j(x, y, t) = u(x, t)v^j(y, t)$ ) являются линейно независимыми решениями задачи Коши

$$\partial_t \varrho = L^* \varrho, \quad \varrho|_{t=0} = \delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} \otimes \delta_{z_0}.$$

Обоснуем линейную независимость. По построению

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + y^2) \iint (\varrho^j(x, y, z, t) - \\ - u(x, t)v_1(y, t)w(z, t)) dx dz = \\ = q(t) \lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + y^2)v_2^j(y, t) = q(t)p^j(t). \end{aligned}$$

Следовательно, линейная зависимость  $\varrho^j$  привела бы к линейной зависимости функций  $p^j$ , что невозможно.

Теперь рассмотрим случай произвольного начального условия  $v$ . Пусть  $a = (x_0, y_0, z_0)$  и  $\varrho_a^j$  – построенные выше решения задачи Коши с начальным условием  $\delta_a$ . Из построения видно, что решения борелевски измеримы по  $a$ . Рассмотрим функцию

$$\omega^j(x, y, z, t) = \int \varrho_a^j(x, y, z, t) \nu(da).$$

Ясно, что  $\omega^j$  является вероятностным решением задачи Коши

$$\partial_t \omega^j = L^* \omega^j, \quad \omega^j|_{t=0} = v.$$

Пусть  $u_{x_0}(x, t)$ ,  $v_{1, y_0}(y, t)$ ,  $w_{z_0}(z, t)$  – построенные выше функции для начальных условий  $\delta_{x_0}$ ,  $\delta_{y_0}$ ,  $\delta_{z_0}$ , где  $(x_0, y_0, z_0) = a$ . Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} & \iint \left( \omega^j(x, y, z, t) - \right. \\ & \left. - \int u_{x_0}(x, t) v_{1, y_0}(y, t) w_{z_0}(z, t) v(da) \right) dx dz = \\ & = \iiint (\varrho_a^j(x, y, z, t) - \\ & - u_{x_0}(x, t) v_{1, y_0}(y, t) w_{z_0}(z, t)) dx dz v(da) = q(t) v_2^j(y, t). \end{aligned}$$

Умножая

$$\begin{aligned} & \iint \left( \omega^j(x, y, z, t) - \right. \\ & \left. - \int u_{x_0}(x, t) v_{1, y_0}(y, t) w_{z_0}(z, t) v(da) \right) dx dz \end{aligned}$$

на  $(1 + y^2)$  и устремляя  $y$  к  $-\infty$ , получаем  $q(t) p^j(t)$ .

Следовательно, линейная независимость  $p^j$  влечет линейную независимость  $\omega^j$ . Таким образом, построено бесконечно много линейно независимых вероятностных решений задачи Коши.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00432 и Московским центром фундаментальной и прикладной

математики, третий автор поддержан фондом Саймонса и грантом победителя конкурса “Молодая математика России” и благодарит ее жюри и спонсоров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. Колмогоров А.Н. // В кн. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 149–161.
3. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2015. 480 p.
4. Феллер В. // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 57–96.
5. Yosida K. // Ark. Mat. 1949. V. 1. P. 71–75.
6. Hille E. // J. Analyse Math. 1954. V. 3. P. 81–196.
7. Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 22–25.
8. Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В. // Матем. сб. (принято в печать).
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
10. Красовицкий Т.И. // ДАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 361–364.
11. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: Изд-во МГУ, 2010. 359 с.
12. Фатеева Г.М. // Матем. сб. 1968. Т. 76. № 4. С. 537–565.

## ON NON-UNIQUENESS OF PROBABILITY SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FOKKER–PLANCK–KOLMOGOROV EQUATION

V. I. Bogachev<sup>a,b,c,d</sup>, T. I. Krasovitskii<sup>a,d</sup>, and S. V. Shaposhnikov<sup>a,b,d</sup>

<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

<sup>c</sup> St.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation

<sup>d</sup> Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryayev

In this paper we give a positive answer to the question about the possibility of existence of several probability solutions to the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for all initial conditions: we have constructed the first example of an equation with the unit diffusion matrix and a smooth drift coefficient for which the Cauchy problem with every probability initial condition has an infinite-dimensional simplex of probability solutions.

**Keywords:** Fokker–Planck–Kolmogorov equation, Cauchy problem, uniqueness of a probability solution

УДК 517.984.5

## КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ: ГОЛОМОРФНОСТЬ РЕЗОЛЬВЕНТ

© 2021 г. Д. И. Борисов<sup>1,2,3,\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым 30.03.2021 г.

Поступило 30.03.2021 г.

После доработки 30.03.2021 г.

Принято к публикации 05.04.2021 г.

Рассматривается скалярный самосопряженный эллиптический оператор второго порядка общего вида с общими краевыми условиями на произвольном метрическом графе, содержащий подграф, длины ребер которого пропорциональны малому параметру. Показано, что резольвента такого оператора голоморфна по малому параметру, и приводятся ее представления в виде рядов Тейлора. Коэффициенты рядов удается найти достаточно явно.

*Ключевые слова:* граф, малое ребро, резольвента, голоморфность по малому параметру

**DOI:** 10.31857/S268695432103005X

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теория квантовых графов, а именно, теория эллиптических операторов на метрических графах, достаточно активно развивается, и одним из направлений является теория возмущений для таких операторов. Графы допускают специфическое возмущение геометрического характера — наличие малых ребер. Влияние таких ребер на резольвенты и спектры рассматриваемых эллиптических операторов исследовалось ранее с точки зрения установления сходимости резольвенты к резольвенте некоторого предельного оператора на предельном графе или множестве, см., например, [1–3]. Общие результаты о резольвентной сходимости операторов Шрёдингера на графах с малыми ребрами были недавно опубликованы в статье [1]. Эта статья мотивировала настоящую работу, и нашей целью являются рассмотрение общих эллиптических скалярных операторов второго порядка на графах с малыми ребрами и детальное изучение зависимости их резольвент от длин малых ребер. Частные результаты такого характера для простейших модельных графов были получены в [5, 6].

Опишем постановку задачи. Пусть  $\Gamma$  — метрический граф с конечным числом ребер и вершин, не имеющий изолированных вершин. Ребра могут иметь конечную или бесконечную длину. Выберем произвольно вершину  $M_0 \in \Gamma$  и через  $e_i^0$ ,  $i = 1, \dots, d_0$ , обозначим ребра, выходящие из  $M_0$ , причем петли пересчитываются дважды. Через  $\gamma$  обозначим еще один метрический конечный граф с ребрами конечной длины, а через  $\gamma_\varepsilon$  — граф, полученный из  $\gamma$  сжатием каждого из ребер в  $\varepsilon^{-1}$  раз с сохранением структуры и вершин графа, где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Выберем произвольный набор вершин  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в графе  $\gamma_\varepsilon$ , где  $n \leq d_0$ , и произвольно разобьем ребра  $e_i^0$ ,  $i = 1, \dots, d_0$ , на  $n$  непустых групп  $\{e_i^0\}_{i \in J_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $J_j$  — соответствующие множества индексов. Вершину  $M_0$  заменим на  $n$  ее копий, по одной для каждой из групп  $\{e_i^0\}_{i \in J_j}$ , и каждую копию отождествим с вершиной  $M_j$  в графе  $\gamma_\varepsilon$ . В результате получим новый граф, обозначаемый символом  $\Gamma_\varepsilon$ , который возник в результате описанного приклеивания графа  $\gamma_\varepsilon$  с малыми ребрами к исходному графу  $\Gamma$ . На каждом из ребер всех рассматриваемых графов произвольно выберем направление и соответствующую ему переменную. Далее мы отождествляем исходные графы  $\Gamma$  и  $\gamma_\varepsilon$  с соответствующими подграфами в графе  $\Gamma_\varepsilon$ .

<sup>1</sup> Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

<sup>2</sup> Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

<sup>3</sup> Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика

\*E-mail: borisovdi@yandex.ru

Настоящая работа посвящена исследованию оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  в  $L_2(\Gamma_\varepsilon)$  с дифференциальным выражением

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(\varepsilon) &:= -\frac{d}{dx} V_\varepsilon^{(2)} \frac{d}{dx} + i \left( \frac{d}{dx} V_\varepsilon^{(1)} + V_\varepsilon^{(1)} \frac{d}{dx} \right) + V_\varepsilon^{(0)}, \\ V_\varepsilon^{(i)} &:= V_\Gamma^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \quad \text{на } \Gamma, \\ V_\varepsilon^{(i)} &:= \varepsilon^{i-2} \mathcal{S}_\varepsilon V_\gamma^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V_\Gamma^{(i)} \in W_\infty^1(\Gamma)$ ,  $V_\gamma^{(i)} \in W_\infty^1(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $V_\Gamma^{(0)} \in L_2(\Gamma)$ ,  $V_\gamma^{(1)} \in L_2(\gamma)$  – вещественные функции, голоморфные по  $\varepsilon$  в норме указанных пространств,  $\mathcal{S}_\varepsilon: L_2(\gamma) \rightarrow L_2(\gamma_\varepsilon)$  – линейный оператор, действующий по правилу  $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $x \in e_\varepsilon$  на каждом ребре  $e_\varepsilon \in \gamma_\varepsilon$ , и выполнено условие эллиптичности:  $V_\varepsilon^{(2)}(x, \varepsilon) \geq c_{\mathcal{H}} > 0$  на  $\Gamma_\varepsilon$ , где  $c_{\mathcal{H}}$  – константа, не зависящая от  $x$  и  $\varepsilon$ .

Краевые условия в произвольной вершине  $M \in \Gamma_\varepsilon$ , из которой выходят ребра  $e_i(M)$ ,  $i = 1, \dots, d(M)$ , задаем следующим образом. Пусть  $u_i := u|_{e_i(M)}$ ,  $i = 1, \dots, d(M)$  – сужения заданной на  $\Gamma_\varepsilon$  функции  $u$  на ребра  $e_i(M)$  и

$$\mathcal{U}_M(u) := \begin{pmatrix} u_1(M) \\ \vdots \\ u_{d(M)}(M) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}'_M(u) := \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx_1}(M) \\ \vdots \\ \frac{du_{d(M)}}{dx_{d(M)}}(M) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $x_i$  – переменная на ребре  $e_i(M)$ . В вершине  $M$  затем задается краевое условие общего вида

$$A_M(\varepsilon) \mathcal{U}_M(u) + B_M(\varepsilon) \mathcal{U}'_M(u) = 0, \quad (3)$$

где  $A_M(\varepsilon)$  и  $B_M(\varepsilon)$  – заданные матрицы размера  $d(M) \times d(M)$ , голоморфные по  $\varepsilon$ . Предполагается, что матрица

$$iB_M(\varepsilon)(V_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}V_M^{(1)}(\varepsilon)(V_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}B_M^*(\varepsilon) + A_M(\varepsilon)(V_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}B_M^*(\varepsilon)$$

самосопряжена, где обозначено

$$V_M^{(j)}(\varepsilon) := \text{diag}\{v_i(M)V_\varepsilon^{(j)}|_{e_i(M)}(M)\}_{i=1, \dots, d(M)}, \quad (4)$$

$v_i(M) := 1$ , если направление от вершины  $M$  на ребре  $e_i(M)$  совпадает с выбранным направлением на этом ребре и  $v_i(M) := -1$  иначе.

Матрицы  $A_M(\varepsilon)$  и  $B_M(\varepsilon)$  в (3) определены с точностью до умножения слева на произвольную невырожденную квадратную матрицу размера  $d(M) \times d(M)$ . Поэтому, обозначив  $r(M) := \text{rank} B_M(0)$ , далее предполагаем, что первые  $r(M)$  строк матрицы  $B_M(0)$

линейно независимы, а остальные строки обращаются в нуль, а каждая из последних  $d(M) - r(M)$  строк матрицы  $A_M(0)$  не равна нулю. Также налагаем следующее условие:  $\text{rank}(A_M(0)B_M(0)) = d(M)$ .

Область определения оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  состоит из функций из  $\dot{W}_2^2(\gamma_\varepsilon)$ , удовлетворяющих краевым условиям (3), где обозначено  $\dot{W}_2^j(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} W_2^j(e)$ ,  $j = 1, 2$ . Действие оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  на таких функциях определяется дифференциальным выражением (1). Описанные условия на функции  $V_\Gamma^{(i)}$ ,  $V_\gamma^{(i)}$  и матрицы  $A_M$ ,  $B_M$  являются критерием самосопряженности оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через  $\gamma_\infty$  обозначим граф, полученный приклеиванием полубесконечных ребер  $e_i^\infty$ ,  $i \in J_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , к вершинам  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , графа  $\gamma$ , считая данные вершины началами ребер  $e_i^\infty$ . Переменную на графе  $\gamma_\infty$  обозначим через  $\xi$  и рассмотрим на нем оператор  $\mathcal{H}_\gamma$  с дифференциальным выражением:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_\gamma &:= -\frac{d}{d\xi} V_{\gamma,0}^{(2)} \frac{d}{d\xi} + i \left( \frac{d}{d\xi} V_{\gamma,0}^{(1)} + V_{\gamma,0}^{(1)} \frac{d}{d\xi} \right) + V_{\gamma,0}^{(0)} \quad \text{на } \gamma, \\ \hat{\mathcal{H}}_\gamma &:= -v_i \frac{d^2}{d\xi^2} \quad \text{на } e_i^\infty, \quad i \in J_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$V_{\gamma,0}^{(i)}(\xi) := V_\gamma^{(i)}(\xi, 0), \quad v_i := V_\Gamma^{(2)}|_{e_i}(M_0, 0),$$

и краевыми условиями в вершинах  $M \in \gamma_\infty$ :

$$A_M^{(0)} \mathcal{U}_M(u) + B_M^{(0)} \mathcal{U}'_M(u) = 0, \quad (5)$$

где векторы  $\mathcal{U}_M(u)$  и  $\mathcal{U}'_M(u)$  вводятся также, как и в (2) с заменой производных  $\frac{du_i}{dx_i}$  на  $\frac{du_i}{d\xi_i}$ , а матрицы имеют вид

$$A_M^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ A_M^-(0) \end{pmatrix}, \quad B_M^{(0)} := \begin{pmatrix} B_M^+(0) \\ \frac{dB_M^-}{d\varepsilon}(0) \end{pmatrix}$$

при  $B_M(0) \neq 0$ ,

$$A_M^{(0)} := A_M(0), \quad B_M^{(0)} := \frac{dB_M}{d\varepsilon}(0) \quad \text{при } B_M(0) = 0.$$

Здесь  $A_M^+$  и  $B_M^+$  – матрицы, состоящие из первых  $r(M)$  строк матриц  $A_M$  и  $B_M$ , соответственно, а матрицы  $A_M^-$  и  $B_M^-$  образованы оставшимися  $d(M) - r(M)$  строками матриц  $A_M$  и  $B_M$ . Область определения оператора  $\mathcal{H}_\gamma$  состоит из функций из

$W_2^2(\gamma)$ , удовлетворяющих краевым условиям (5). Оператор  $\mathcal{H}_\gamma$  самосопряжен. С учетом структуры графа  $\gamma_\infty$  и вида дифференциального выражения  $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$  на ребрах  $e_i^\infty$ , существенный спектр оператора  $\mathcal{H}_\gamma$  совпадает с полупрямой  $[0, +\infty)$ .

Основное и по сути единственное условие, которое мы налагаем в работе, звучит следующим образом:

(А) край существенного спектра оператора  $\mathcal{H}_\gamma$  не является собственным значением.

Данное условие эквивалентно тому, что задача для уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma \Psi = 0 \quad \text{на } \gamma_\infty \quad (6)$$

с условиями (5) не имеет нетривиальных решений из  $W_2^2(\gamma) \oplus \bigoplus_{i=1, \dots, d_0} W_{2,loc}^2(e_i^\infty)$ , которые бы тожде-

ственно обращались в нуль на ребрах  $e_i^\infty$ . При этом задача (5), (6) может иметь нетривиальные решения из  $W_2^2(\gamma) \oplus \bigoplus_{i=1, \dots, d_0} W_{2,loc}^2(e_i^\infty)$ , которые по-

стоянны на ребрах  $e_i^\infty$ . В терминах оператора  $\mathcal{H}_\gamma$  это означает, что он может иметь виртуальный уровень на краю существенного спектра.

Пусть  $\psi^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , — линейно независимые ограниченные нетривиальные решения задачи (5), (6), не равные тождественно нулю на ребрах  $e_i^\infty$ . Ясно, что в силу условия (А) выполнено неравенство  $k \leq d_0$ . Если таких решений нет, то полагаем  $k = 0$ .

Для произвольной функции  $u$ , заданной и непрерывной на ребрах  $e_i^\infty$  в окрестности вершин  $M_j$ , обозначим

$$\mathcal{U}_\gamma(u) := (u|_{e_i^\infty}(M_j))_{i \in J, j=1, \dots, n},$$

где  $u|_{e_i^\infty}$  — сужение  $u$  на ребро  $e_i^\infty$ . В силу своего определения функции  $\psi^{(j)}$  удовлетворяют условию  $\Psi^{(j)} := \mathcal{U}_\gamma(\psi^{(j)}) \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Выберем функции  $\psi^{(j)}$  так, чтобы вектора  $\Psi^{(j)}$  были ортонормированы в  $\mathbb{C}^{d_0}$ . Если  $k < d_0$ , то дополнительно произвольно выберем векторы  $\Psi^{(j)} \in \mathbb{C}^{d_0}$ ,  $j = k + 1, \dots, d_0$ , так, что набор  $\Psi^{(j)} \in \mathbb{C}^{d_0}$ ,  $j = 1, \dots, d_0$ , образует ортонормированный базис в  $\mathbb{C}^{d_0}$ , а матрица  $\Psi := (\Psi^{(1)} \dots \Psi^{(k)} \Psi^{(k+1)} \dots \Psi^{(d_0)})$  унитарна.

Для каждой вершины  $M \in \gamma_\infty$  определим матрицы:

$$A_M^{(1)} := \begin{pmatrix} A_M^+(0) \\ \frac{dA_M^-(0)}{d\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad B_M^{(1)} := \begin{pmatrix} \frac{dB_M^+(0)}{d\varepsilon} \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 B_M^-(0)}{d\varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

при  $B_M(0) \neq 0$ ,

$$A_M^{(1)} := \frac{dA_M}{d\varepsilon}(0), \quad B_M^{(1)} := \frac{1}{2} \frac{d^2 B_M}{d\varepsilon^2}(0)$$

при  $B_M(0) = 0$ ,

$$\tilde{A}_M^{(0)} := A_M^{(0)} + iB_M^{(0)}(V_M^{(2)}(0))^{-1}V_M^{(1)}(0),$$

$$\tilde{B}_M^{(0)} := B_M^{(0)}(V_M^{(2)}(0))^{-1},$$

$$U_M^{(0)} = -(\tilde{A}_M^{(0)} - i\tilde{B}_M^{(0)})^{-1}(\tilde{A}_M^{(0)} + i\tilde{B}_M^{(0)}),$$

$$\mathcal{Q}_M(\psi) := 2i(A_M^{(0)} - iB_M^{(0)})^{-1}(A_M^{(1)}\mathcal{U}_M(\psi) + B_M^{(1)}\mathcal{U}'_M(\psi)),$$

$$V_{\gamma, M}^{(j)}(\varepsilon) := \text{diag}\{v_i(M)V_\gamma^{(j)}|_{e_i(M)}(M, \varepsilon)\}_{i=1, \dots, d(M)},$$

где  $e_i(M)$  — ребра, выходящие из вершины  $M$ , числа  $v_i(M)$  определяются как и в (4), а функции  $V_\gamma^{(j)}$  считаем продолженными на ребра  $e_i^\infty$ ,  $i \in J_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , по формулам  $V_\gamma^{(2)}(\cdot, \varepsilon) \equiv V_i^{(2)}(\varepsilon)$ ,  $V_\gamma^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \equiv \varepsilon V_i^{(1)}(\varepsilon)$ .

Матрица  $U_M^{(0)}$  унитарна. Через  $P_M^{(0)}$  обозначим проектор в  $\mathbb{C}^{d(M)}$  на собственное подпространство матрицы  $U_M^{(0)}$ , соответствующее собственному значению  $-1$ , и пусть  $P_{M, \perp}^{(0)} := E_{d(M)} - P_M^{(0)}$ . Через  $\mathcal{Q}$  обозначим самосопряженную матрицу размера  $k \times k$  элементами

$$Q^{(ij)} := Q_\gamma^{(ij)} + \sum_{M \in \gamma_\infty} Q_M^{(ij)},$$

$$Q_\gamma^{(ij)} := \left( \frac{dV_\gamma^{(2)}}{d\varepsilon}(\cdot, 0) \frac{d\psi^{(i)}}{d\xi}, \frac{d\psi^{(j)}}{d\xi} \right)_{L_2(\gamma)} + \left( \frac{d\psi^{(i)}}{d\xi}, i \frac{dV_\gamma^{(1)}}{d\varepsilon}(\cdot, 0)\psi^{(j)} \right)_{L_2(\gamma)} +$$

$$+ \left( i \frac{dV_\gamma^{(1)}}{d\varepsilon}(\cdot, 0)\psi^{(i)}, \frac{d\psi^{(j)}}{d\xi} \right)_{L_2(\gamma)} + \left( \frac{dV_\gamma^{(0)}}{d\varepsilon}(\cdot, 0)\psi^{(i)}, \psi^{(j)} \right)_{L_2(\gamma)},$$

$$Q_M^{(ij)} := (q_M^{(i)}, \mathcal{U}_M(\psi^{(j)}))_{\mathbb{C}^{d(M)}} - \frac{i}{2} (\mathcal{Q}_M(\psi^{(i)}), \mathcal{V}_{\gamma, M}^{(0)}(\psi^{(j)}))_{\mathbb{C}^{d(M)}},$$

$$q_M^{(i)} := \frac{dV_{\gamma, M}^{(2)}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}'_M(\psi^{(i)}) - i \frac{dV_{\gamma, M}^{(1)}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}_M(\psi^{(i)}) +$$

$$+ (U_M^{(0)} + E_{d(M)})^{-1}P_{M, \perp}^{(0)}\mathcal{Q}_M(\psi^{(i)}),$$

$$\mathcal{V}_{\gamma, M}^{(0)}(\cdot) := V_{\gamma, M}^{(2)}(0)\mathcal{U}'_M(\cdot) - iV_{\gamma, M}^{(1)}(0)\mathcal{U}_M(\cdot).$$

Определим еще две блочные матрицы размера  $d_0 \times d_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{M_0}^{(0)} &:= \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{d_0-k} \end{pmatrix} \Psi^* + i \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi^* \mathbf{V}_{\Gamma, M_0}^{(1)}(0), \\ \mathbf{B}_{M_0}^{(0)} &:= - \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi^* \mathbf{V}_{\Gamma, M_0}^{(2)}(0), \end{aligned} \quad (7)$$

где символом  $\mathbf{E}_p$  обозначаем единичные матрицы размера  $p \times p$ , символ 0 в первой строке матрицы  $\mathbf{A}_{M_0}$  обозначает матрицу размера  $k \times (d_0 - k)$ , а во второй строке – матрицу размера  $(d_0 - k) \times k$ . Символами 0 в определении матрицы  $\mathbf{B}_{M_0}$  обозначаем нулевые матрицы соответственно размеров  $k \times (d_0 - k)$ ,  $(d_0 - k) \times k$  и  $(d_0 - k) \times (d_0 - k)$ . Матрицы  $\mathbf{V}_{\Gamma, M_0}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , задаются равенством

$$\mathbf{V}_{\Gamma, M_0}^{(j)}(\varepsilon) := \text{diag}\{v_i(M_0) V_{\Gamma}^{(j)}|_{e_i^0}(M, \varepsilon)\}_{i=1, \dots, d_0},$$

где числа  $v_i(M_0)$  вводятся согласно (4).

Пусть  $\mathcal{H}_0$  – оператор на графе  $\Gamma$  с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}_0 := -\frac{d}{dx} V_0^{(2)} \frac{d}{dx} + i \left( \frac{d}{dx} V_0^{(1)} + V_0^{(1)} \frac{d}{dx} \right) + V_0^{(0)},$$

$V_0^{(i)} := V_{\Gamma}^{(i)}(\cdot, 0)$ , с краевыми условиями

$$\mathbf{A}_M^{(0)} u_M(u) + \mathbf{B}_M^{(0)} u'_M(u) = 0 \quad \text{в} \quad M \in \Gamma, \quad (8)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_{M_0}^{(0)}$ ,  $\mathbf{B}_{M_0}^{(0)}$  заданы в (7), а для  $M \neq M_0$  они вводятся формулами  $\mathbf{A}_M^{(0)} := \mathbf{A}_M(0)$ ,  $\mathbf{B}_M^{(0)} := \mathbf{B}_M(0)$ . Оператор  $\mathcal{H}_0$  действует в  $L_2(\Gamma)$  на области определения, состоящей из функций из  $\dot{W}_2^2(\Gamma)$ , удовлетворяющих краевым условиям (8). Данный оператор самосопряжен.

Пусть  $\mathcal{P}_{\Gamma}: L_2(\Gamma_{\varepsilon}) \rightarrow L_2(\Gamma)$  и  $\mathcal{P}_{\gamma_{\varepsilon}}: L_2(\Gamma_{\varepsilon}) \rightarrow L_2(\gamma_{\varepsilon})$  операторы сужения на подграфы  $\Gamma$  и  $\gamma_{\varepsilon}$  в  $\Gamma$ , действующие на каждую  $f \in L_2(\Gamma_{\varepsilon})$  по правилам  $\mathcal{P}_{\Gamma} f := f|_{\Gamma}$ ,  $\mathcal{P}_{\gamma_{\varepsilon}} f := f|_{\gamma_{\varepsilon}}$ . В смысле прямой суммы  $L_2(\Gamma_{\varepsilon}) = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma_{\varepsilon})$  для этих операторов верно равенство

$$\mathcal{P}_{\Gamma} \oplus \mathcal{P}_{\gamma_{\varepsilon}} = \mathcal{I}_{\Gamma_{\varepsilon}}, \quad (9)$$

где  $\mathcal{I}_{\Gamma_{\varepsilon}}$  – тождественный оператор в  $L_2(\Gamma_{\varepsilon})$ .

Так как оператор  $\mathcal{H}_{\varepsilon}$  самосопряжен, то для каждого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  его резольвента  $(\mathcal{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1}$  корректно определена, что позволяет определить еще пару операторов

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Gamma}(\varepsilon, \lambda) &:= \mathcal{P}_{\Gamma} (\mathcal{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1} (\mathcal{I}_{\Gamma} \oplus \mathcal{I}_{\varepsilon}^{-1}), \\ \mathcal{R}_{\gamma}(\varepsilon, \lambda) &:= \mathcal{I}_{\varepsilon} \mathcal{P}_{\gamma_{\varepsilon}} (\mathcal{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1} (\mathcal{I}_{\Gamma} \oplus \mathcal{I}_{\varepsilon}^{-1}), \end{aligned}$$

линейных и ограниченных как действующих из  $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$  в  $\dot{W}_2^2(\Gamma)$  и  $\dot{W}_2^2(\gamma)$  соответственно. Здесь прямые суммы понимаются в смысле равенства (9), а исходная резольвента оператора  $\mathcal{H}_{\varepsilon}$  легко восстанавливается с помощью введенных операторов по формуле

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1} &= \\ &= (\mathcal{R}_{\Gamma}(\varepsilon, \lambda) \oplus \mathcal{I}_{\varepsilon} \mathcal{R}_{\gamma}(\varepsilon, \lambda)) (\mathcal{I}_{\Gamma} \oplus \mathcal{I}_{\varepsilon} \mathcal{I}_{\gamma_{\varepsilon}}). \end{aligned} \quad (10)$$

Определим еще один оператор  $\mathcal{R}_{\gamma}^{(0)}(\lambda): L_2(\Gamma) \rightarrow \dot{W}_2^2(\gamma)$ , действующий по правилу

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\gamma}^{(0)}(\lambda) f &:= \sum_{i=1}^k c_i(f) \Psi^{(i)}, \\ \begin{pmatrix} c_1(f) \\ \vdots \\ c_k(f) \end{pmatrix} &:= \Psi_0^* u_{M_0}((\mathcal{H}_{\Gamma} - \lambda)^{-1} f), \end{aligned}$$

где  $\Psi_0 := (\Psi^{(1)} \dots \Psi^{(k)})$ . Введем следующие пространства непрерывных функций на графах:

$$\begin{aligned} \dot{C}(\cdot) &:= \bigoplus_{e \in \cdot} C(\bar{e}) \cap L_{\infty}(e), \quad \dot{C}^1(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C^1(\bar{e}) \cap W_{\infty}^1(e), \\ \dot{C}^2(\cdot) &:= \bigoplus_{e \in \cdot} C^2(\bar{e}) \cap W_{\infty}^2(e), \quad \|u\|_{\dot{C}^i(\cdot)} := \sum_{e \in \cdot} \|u\|_{W_{\infty}^i(e)}, \end{aligned}$$

где считаем  $\dot{C}^0 := \dot{C}$ . Если функции  $V_{\Gamma}^{(i)}$  и  $V_{\gamma}^{(i)}$  имеют гладкость  $V_{\Gamma}^{(i)} \in \dot{C}^1(\Gamma)$ ,  $V_{\gamma}^{(i)} \in \dot{C}^1(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $V_{\Gamma}^{(0)} \in \dot{C}(\Gamma)$ ,  $V_{\gamma}^{(0)} \in \dot{C}(\gamma)$  и голоморфны по  $\varepsilon$  в норме этих пространств, то тогда полагаем

$$\dot{C}^2(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C^2(\bar{e}) \cap W_{\infty}^2(e).$$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены описанные выше условия на функции  $V_{\Gamma}^{(i)}$ ,  $V_{\gamma}^{(i)}$  и матрицы  $\mathbf{A}_M(\varepsilon)$ ,  $\mathbf{B}_M(\varepsilon)$  и выполнено условие (A). Тогда для любого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  существует  $\varepsilon_0(\lambda) > 0$ , такое что при  $\varepsilon < \varepsilon_0(\lambda)$  операторы  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\varepsilon, \lambda)$  и  $\mathcal{R}_{\gamma}(\varepsilon, \lambda)$  ограничены и голоморфны по  $\varepsilon$  как действующие из  $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$  в  $\dot{W}_2^2(\Gamma) \cap \dot{C}^2(\Gamma)$  и  $\dot{W}_2^2(\gamma) \cap \dot{C}^2(\gamma)$ . Первые члены рядов Тейлора этих операторов имеют вид

$$\mathcal{R}_{\Gamma}(0, \lambda) = (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{P}_{\Gamma}, \quad \mathcal{R}_{\gamma}(0, \lambda) = \mathcal{R}_{\gamma}^{(0)}(\lambda) \mathcal{P}_{\Gamma}. \quad (11)$$

Поясним действие операторов  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\varepsilon, \lambda)$  и  $\mathcal{R}_{\gamma}(\varepsilon, \lambda)$ . Пусть  $f \in L_2(\Gamma_{\varepsilon})$ ,  $u_{\varepsilon} := (\mathcal{H}_{\varepsilon} - \lambda)^{-1} f$  и рассмотрим сужения этих функций на подграфы  $\Gamma$  и  $\gamma_{\varepsilon}$ ; сужения на  $\gamma_{\varepsilon}$  дополнительно будем рассматривать как функции переменной  $\xi := x\varepsilon^{-1}$ ,  $\xi \in \gamma$ .



Эти сужения очевидно имеют вид  $\mathcal{R}_\Gamma f$ ,  $\mathcal{P}_\Gamma u_\varepsilon$  и  $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1} \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f$ ,  $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1} \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon$ . Операторы  $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda)$  и  $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda)$  отображают пару  $(\mathcal{P}_\Gamma f, \mathcal{S}_\varepsilon^{-1} \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f)$  соответственно в  $\mathcal{P}_\Gamma u_\varepsilon$  и  $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1} \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon$ . С учетом формулы (10) их можно рассматривать как части резольвенты  $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ , соответствующие подграфам  $\Gamma$  и  $\gamma_\varepsilon$ . Теорема 1 утверждает голоморфность по  $\varepsilon$  этих частей, а формулы (11) дают первые члены их рядов Тейлора.

Нам также удалось разработать эффективный рекуррентный алгоритм определения всех коэффициентов рядов Тейлора для операторов  $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda)$  и  $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda)$ . А именно, для произвольной пары функций  $(f_\Gamma, f_\gamma) \in L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$  данные ряды Тейлора имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma, & u_0^\Gamma &:= (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f_\Gamma, \\ \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\gamma, & u_0^\gamma &:= \sum_{i=1}^k c_i(f_\Gamma) \Psi^{(i)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где функции  $u_p^\Gamma$  и  $u_p^\gamma$  являются решениями рекуррентной системы однозначно разрешимых краевых задач на  $\Gamma$  и  $\gamma$  соответственно. В этих задачах уравнения на  $u_p^\Gamma$  и  $u_p^\gamma$  описываются с помощью дифференциальных выражений  $\hat{\mathcal{H}}_0$  и  $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$  соответственно. Правые части уравнений и краевые условия для функций  $u_p^\Gamma$  зависят только от функций  $u_q^\Gamma$ ,  $q < p$ , а аналогичные правые части для функций  $u_p^\gamma$  — от функций  $u_q^\gamma$ ,  $q < p$ . Краевые условия в вершине  $M_0$  для функций  $u_p^\Gamma$  определяются функциями  $u_p^\gamma$ , а краевые условия в вершинах  $M_j$  для функций  $u_p^\gamma$  — функциями  $u_{p-1}^\Gamma$ . Последовательно решая эти краевые задачи, можно найти все функции  $u_p^\Gamma$  и  $u_p^\gamma$ .

Наша схема построения коэффициентов рядов Тейлора (12) по сути является адаптацией метода согласования асимптотических разложений [7] для графов. Наша работа первая, где этот метод применяется для исследования квантовых графов. Отдельно следует подчеркнуть, что наличие малых ребер в графе является сингулярным возмущением. Вместе с тем, в отличие от большинства задач с сингулярными возмущениями, см., например, модели в [7], получающиеся здесь асимптотические ряды для решения одновременно оказываются равномерно сходящимися по параметру рядами Тейлора, что весьма редкий случай в сингулярно возмущенных краевых задачах.

Наличие рядов Тейлора (12) и формула (10) позволяют найти представление для резольвенты  $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$  в виде равномерно сходящегося ряда, частичные суммы которого дают сколько угодно точные аппроксимации резольвенты. Данный результат сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 2.** *В предположениях теоремы 1, резольвента  $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$  представляется равномерно сходящимся в  $\dot{W}_2^2(\Gamma_\varepsilon)$  и  $\dot{C}^2(\Gamma_\varepsilon)$  рядом*

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1} u_p^\gamma, \quad f \in L_2(\Gamma_\varepsilon),$$

где функции  $u_p^\Gamma$  и  $u_p^\gamma$  — коэффициенты рядов Тейлора (12) с  $f_\Gamma := \mathcal{P}_\Gamma f$ ,  $f_\gamma := \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f$ . Для  $N \in \mathbb{Z}_+$  верны оценки:

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^N \varepsilon^p u_p^\Gamma \right\|_{\dot{W}_2^2(\Gamma)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^N \varepsilon^p u_p^\Gamma \right\|_{\dot{C}^2(\Gamma)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^N \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \right\|_{\dot{W}_2^i(\gamma_\varepsilon)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+1-i} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^N \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \right\|_{\dot{C}^i(\gamma_\varepsilon)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N-i+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

где  $i = 0, 1, 2$ , а  $C$  — константа, не зависящая от  $\varepsilon$ ,  $N$  и  $f$ .

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berkolaiko G., Latushkin Yu., Sukhtaiev S. // Adv. Math. 2019. V. 352. P. 632–669.
2. Cacciapuoti C. // Symmetry. 2019. V. 11. № 3. id 359.
3. Cheon T., Exner P., Turek O. // Ann. Phys. 2010. V. 325. № 3. P. 548–578.
4. Комаров А.В., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. // ДАН. 2003. Т. 390. № 2. С. 151–153.
5. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. // Пробл. матем. ан. 2020. Вып. 106. С. 17–42.
6. Борисов Д.И., Коньркулжаева М.Н. // Уфимский матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 56–71.
7. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

## QUANTUM GRAPHS WITH SMALL EDGES: HOLOMORPHY OF RESOLVENTS

**D. I. Borisov<sup>a,b,c</sup>**

<sup>a</sup> *Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Bashkir State Pedagogical University named after M. Akhmulla, Ufa, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

We consider a scalar self-adjoint general elliptic second order operator with general boundary conditions on an arbitrary metric graph containing a subgraph with edges of lengths proportional to a small parameter. We show that the resolvent of such operator is holomorphic in the small parameter and provide its representations by Taylor series. The coefficients of the series are found rather explicitly.

*Keywords:* graph, small edge, resolvent, holomorphy in a small parameter

УДК 519.216.8, 517.977.54, 517.983.23

## О МЕТОДЕ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ НА МАРТИНГАЛАХ

© 2021 г. В. А. Боровицкий<sup>1,2</sup>, Н. Н. Осипов<sup>1,3,\*</sup>, А. С. Целищев<sup>1,2</sup>

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым 12.03.2021 г.

Поступило 19.03.2021 г.

После доработки 19.03.2021 г.

Принято к публикации 06.04.2021 г.

Показано, как применить метод функции Беллмана к заданным на мартингалах операторам общего вида, т.е. к операторам, которые не обязательно являются мартингалными преобразованиями. В качестве примеров таких операторов рассмотрены преобразования Хаара и оператор, к вопросу об  $L^p$ -ограниченности которого сводится доказательство неравенства Рубио де Франсия для системы Уолша. Для соответствующей функции Беллмана проведена беллмановская индукция и построен беллмановский кандидат.

*Ключевые слова:* метод Буркхольдера, теорема Ганди, система Уолша, неравенство Рубио де Франсия, преобразование Хаара

**DOI:** 10.31857/S2686954321030061

Мы будем рассматривать функции, действующие на единичном интервале, и для краткости писать  $L^p$  вместо  $L^p([0,1])$  и  $L^p(l^2)$  вместо  $L^p([0,1], l^2)$  (во втором случае речь идет об  $l^2$ -значных функциях, заданных на единичном интервале).

### 1. МОТИВИРОВОЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

В работе [1] Д.Л. Буркхольдер применяет метод функции Беллмана, заимствованный из теории оптимального управления, для получения точных  $L^p$ -оценок мартингалных преобразований ( $1 < p \leq 2$ ). Прежде всего мы приведем два примера операторов, заданных на мартингалах, но при этом не являющихся мартингалными преобразованиями.

Символом " $\sqsubseteq$ " будем обозначать отношение "является диадическим подынтервалом", а через

$J^\pm$  будем обозначать левую и правую половины интервала  $J$ . Рассмотрим систему Хаара

$$h_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1_{[0,1]} \quad \text{и} \quad h_J \stackrel{\text{def}}{=} |J|^{-1/2} (1_{J^+} - 1_{J^-}), \quad J \sqsubseteq [0,1].$$

Нетрудно видеть, что для любого  $m \in \mathbb{Z}_+$  можно определить унитарный оператор

$$H_m : L^2 \rightarrow L^2,$$

который устанавливает взаимно однозначное соответствие между

$$\{h_0, h_J\}_{\substack{J \sqsubseteq [0,1] \\ |J| \geq 2^{-m}}} \quad \text{и} \quad \{e_e\}_{\substack{e \sqsubseteq [0,1] \\ |e| = 2^{-m-1}}},$$

остальные базисные функции Хаара переводит в себя, и при этом обладает свойством

$$\text{supp } H_m h_J \subseteq J \quad \text{для всех} \quad J \sqsubseteq [0,1].$$

Отметим, что матрица в базисе Хаара, которая определяет действие оператора  $H_m$  на первых  $2^{m+1}$  базисных векторах, совпадает с матрицей преобразования Хаара порядка  $2^{m+1}$  со столбцами, переставленными подходящим образом. Как мы увидим ниже, для  $1 < p \leq 2$  равномерная по  $m$   $L^p$ -ограниченность операторов  $H_m$  может быть установлена в рамках классической теории операторов на мартингалах ("дискретной" версии теории операторов типа Кальдерона–Зигмунда). Однако функция Беллмана, построенная Буркхольдером в [1], не позволяет получить такую ограниченность.

<sup>1</sup> Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Исследовательская лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Международная лаборатория теории игр и принятия решений, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: nicknick@pdmi.ras.ru

Приведем другой пример. Пусть  ${}^{\mathcal{W}} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  – стандартно упорядоченная система Уолша. Такая система, состоящая из всех возможных произведений функций Радемахера, по своим свойствам напоминает базис Фурье из экспонент и в определенном смысле может рассматриваться как его дискретный аналог (подробности см., например, в [2, § 4.5]). Одним из примеров, подтверждающих такую аналогию, является следующий результат работы [3], который говорит о том, что неравенство Рубио де Франсиа [4] можно перенести с базиса Фурье на систему Уолша.

**Т е о р е м а.** Пусть  $\{f_m\}$  – не более чем счетный набор функций, спектры Уолша которых лежат в попарно непересекающихся интервалах  $I_m \subseteq \mathbb{Z}_+$ :

$$f_m = \sum_{n \in I_m} (f_m, w_n) w_n.$$

Если  $1 < p \leq 2$ , то

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p} \leq C_p \| \{f_m\} \|_{L^p(I^2)},$$

где константа  $C_p$  не зависит от наборов  $\{f_m\}$  и  $\{I_m\}$ .

Доказательство этой теоремы в [3] с помощью комбинаторных рассуждений сводится к проверке  $L^p$ -ограниченности оператора, который будет нашим вторым примером. Прежде чем описывать этот оператор, мы приведем два простых и хорошо известных свойства функций Уолша.

1. Для функции  $g \in L^1$  ее мартингалные разности  $\Delta_k g$  в стандартной диадической фильтрации совпадают с мультипликаторами Уолша для

отрезков  $\delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$  и  $\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \{2^{k-1}, \dots, 2^k - 1\}$ ,  $k > 0$ :

$$\Delta_0 g = (g, h_0) h_0 = (g, w_0) w_0;$$

$$\Delta_k g = \sum_{J \in \delta_k} (g, h_J) h_J = \sum_{n \in \delta_k} (g, w_n) w_n.$$

2. Для  $a, b \in \mathbb{Z}_+$  выполняется “экспоненциальное” свойство  $w_a(x) w_b(x) = w_{a \dot{+} b}(x)$ , где  $a \dot{+} b$  – побитовое XOR (соответствующие биты в двоичном разложении  $a$  и  $b$  суммируются по модулю 2). Другими словами, имеет место изоморфизм между двумя группами:  $(\mathbb{Z}_+, \dot{+}) \cong ({}^{\mathcal{W}}, \times)$ .

Пусть мультииндексы  $(j, k)$  пробегает некоторое подмножество  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}_+^2$ , и пусть числа  $a_{j,k} \in \mathbb{Z}_+$  такие, что множества  $a_{j,k} \dot{+} \delta_k$  попарно не пересекаются и полностью покрывают  $\mathbb{Z}_+$ . Мы рассмотрим оператор  $G$ , который размещает в этих множествах части спектров Уолша функций из последовательности  $f = \{f_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{A}} \in L^2(I^2)$ , а затем собирает то, что получилось, в одну функцию:

$$Gf \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(j,k) \in \mathcal{A}} w_{a_{j,k}} \Delta_k f_{j,k}.$$

Приведенная выше теорема из работы [3] сводится к вопросу об оценке

$$\|Gf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p(I^2)}, \quad 1 < p \leq 2,$$

с константой  $C_p$ , зависящей только от  $p$ . Так же как и в случае операторов  $H_m$ , такая оценка непосредственно вытекает из классической теории операторов на мартингалах, но не следует из результатов Буркхольдера [1].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $h_j^i \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) h_j$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте (аналогично определим функции  $h_0^i$ ). Тогда система  $\{h_0^i, h_j^i\}_{i \in \mathbb{N}, J \subseteq [0,1]}$  является ортонормированным

базисом для функций  $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in L^2(I^2)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем говорить, что линейный ограниченный оператор  $T: L^2(I^2) \rightarrow L^2$  принадлежит классу  $\mathcal{G}(I^2)$ , если для него выполняются следующие условия:

1. Для системы  $\{Th_0^i, Th_j^i\}_{i \in \mathbb{N}, J \subseteq [0,1]}$  выполняется равенство Парсеваля: для любой функции  $g \in L^2$  имеем

$$\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} (g, Th_0^i)^2 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{J \subseteq [0,1]} (g, Th_J^i)^2.$$

2. Оператор  $T$  не увеличивает носители базисных функций:  $\text{supp } Th_j^i \subseteq J$  для  $J \subseteq [0,1]$ .

Класс  $\mathcal{G}$  линейных операторов  $T: L^2 \rightarrow L^2$  определяется аналогично (и проще) – рассматривается базис Хаара без участия индекса  $i$  и суммирование производится только по  $J$ .

Что касается условия 1, то оно требует от оператора больше, чем  $L^2$ -ограниченность, но меньше, чем унитарность в  $L^2$ . Условие 2, в свою очередь, совпадает с основным условием теоремы Ганди для фильтрации Хаара (в которой интервалы делятся пополам последовательно слева направо). Мы здесь сошлемся на вариант теоремы Ганди для векторнозначных мартингалов, сформулированный и доказанный в [5, теорема 1] (исходный скалярный вариант теоремы содержится в [6]). Если факт ограниченности мартингалных преобразований рассматривать как дискретный аналог ограниченности преобразования Гильберта, то теорему Ганди можно рассматривать как аналог результата об ограниченности операторов типа Кальдерона–Зигмунда общего вида, а упо-

мянутае выше основное условие из нее — как аналог условия гладкости на ядро оператора. Из теоремы Ганди сразу вытекает равномерная  $L^p$ -ограниченность ( $1 < p \leq 2$ ) операторов из классов  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}(l^2)$ . С другой стороны, общность условий 1 и 2 в значительной мере приближается к общности условий самой теоремы Ганди.

Теперь заметим, что  $H_m \in \mathcal{G}$  и  $G \in \mathcal{G}(l^2)$ . Действительно, операторы  $H_m$  унитарны и удовлетворяют скалярному варианту условия 2 по построению. Что касается оператора  $G$ , то нетрудно убедиться, что система  $\{Gh_0^i, Gh_j^i\}_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in [0,1]}}$  включает в себя ортонормированный базис в  $L^2$ , а остальные ее элементы —

нулевые. Условие 2 для оператора  $G$  также будет выполнено.

Наша задача — распространить метод Буркхольдера на классы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}(l^2)$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть  $1 < p \leq 2$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Перенормируя функции Хаара, можем перенести классы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}(l^2)$  на любой интервал  $I \subset \mathbb{R}$ . Обозначим  $\langle h_I \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|I|} \int_I h$ . Функция Беллмана, которая позволяет получить оценку для операторов из класса  $\mathcal{G}$ , определяется следующим образом:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, x_4) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \left\langle gTf \right\rangle_I - \left\langle f \right\rangle_I \left\langle gT1_I \right\rangle_I \left| \begin{array}{l} f, g \in L^2(I), \quad T \in \mathcal{G}, \\ \left\langle f \right\rangle_I = x_1, \quad \left| \left\langle gT1_I \right\rangle_I \right|^2 = x_2, \\ \left\langle |f|^p \right\rangle_I = x_3, \quad \left\langle |g|^q \right\rangle_I = x_4 \end{array} \right. \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что функция  $\mathbf{B}$  не зависит от выбора интервала  $I$  и что для области  $\Omega_{\mathbf{B}}$ , состоящей из точек  $x$ , для которых супремум берется по непустому множеству, выполняется включение

$$\Omega_{\mathbf{B}} \subseteq \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3 \mid |x_1|^p \leq x_3, x_2 \leq x_4^{2/q}\}.$$

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем говорить, что функция  $B \in C(\Omega)$  принадлежит классу  $\mathcal{K}$ , если она удовлетворяет граничному условию и геометрическому условию типа вогнутости, которые выглядят следующим образом:

1. Если  $|x_1|^p = x_3$ , то  $B(x) \geq 0$ .
2. Если для  $x, x^\pm \in \Omega$  и  $\Delta \in \mathbb{R}$  выполняется

$$\frac{x^+ + x^-}{2} - x = (0, \Delta^2, 0, 0),$$

то

$$B(x) \geq \frac{|x_1^+ - x_1^-| |\Delta|}{2} + \frac{B(x^+) + B(x^-)}{2}.$$

Используя метод беллмановской индукции, можно доказать, что любая такая функция является мажорантой для  $\mathbf{B}$ .

**Т е о р е м а 1.** Если  $B \in \mathcal{K}$ , то  $\mathbf{B}(x) \leq B(x)$  для всех  $x \in \Omega_{\mathbf{B}}$ .

С помощью формулы Тейлора условие типа вогнутости из определения класса  $\mathcal{K}$  можно записать в дифференциальной форме:

$$d^2 B \leq \frac{|dx_1|^2}{2B_{x_2}} \leq 0.$$

Здесь мы подразумеваем, что слева вычисляется гессиан в произвольной точке из  $\Omega$  и что он действует как квадратичная форма на произвольный вектор  $(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ . Опираясь на дифференциальную форму основного условия и используя рассуждения, сходные с теми, которые приведены в [7], мы можем найти конкретного представителя класса  $\mathcal{K}$ . А именно, для  $y \in \mathbb{R}_+^4$  положим

$$B_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} 2(y_3 + y_4) - y_1^p - y_2^{q/2} - \delta \begin{cases} y_1^{2-p} y_2 + y_1^{2-p-2t(p-1)} y_2^{t+1}, & y_1^p \geq y_2^{q/2}; \\ \frac{2}{q}(2+t)y_2^{q/2} + \frac{2}{p}(2-p-t(p-1))y_1^p, & y_1^p \leq y_2^{q/2}. \end{cases}$$

Тогда для каждого  $1 < p \leq 2$  можно подобрать неотрицательные константы  $t, \delta$  и  $C_p$ , такие что функция  $B(x) = C_p B_0(|x_1|, x_2, x_3, x_4)$ ,  $x \in \Omega$ , окажется в классе  $\mathcal{K}$ . Используя эту функцию, теорему 1 и однородность функции  $\mathbf{B}$ , нетрудно для операторов  $T \in \mathcal{G}$  получить оценку

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C'_p \|f\|_{L^p},$$

где

$$C'_p = 2p^{1/p} q^{1/q} C_p + 1.$$

Описанный метод потенциально позволяет вычислить точные константы в  $L^p$ -оценках. Для

этого нужно найти непосредственно саму функцию  $\mathbf{B}$ . Авторами данной работы уже установлено, что  $\Omega_{\mathbf{B}} = \Omega$  и что функция  $\mathbf{B}$  удовлетворяет свойствам 1 и 2 из определения класса  $\mathcal{H}$ . Поэтому ее следует искать как поточечный минимум всех функций из этого класса.

Пусть теперь  $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in L^2(I, l^2)$  и  $T \in \mathcal{G}(l^2)$ . Обозначим

$$1_I^i \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) 1_I,$$

где 1 стоит на  $i$ -м месте. Под  $f_I$  будем понимать последовательность  $\{\langle f_i \rangle_I\}_{i \in \mathbb{N}}$ , а под  $\langle g T 1_I \rangle_I$  — последовательность  $\{\langle g T 1_I^i \rangle_I\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Под модулем вектора из  $l^2$  будем понимать его  $l^2$ -норму, а под произведением таких векторов — их скалярное произведение. С этими оговорками все вышесказанное остается дословно верным вплоть до  $L^p$ -оценки оператора  $T \in \mathcal{G}(l^2)$ . Подчеркнем, что  $x_1$  и  $dx_1$  — теперь векторы из  $l^2$ , а все остальные переменные остаются скалярными (включая  $y_1$  из определения функции  $B_0$ ).

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.И. Васюнина и Д.М. Столярова за ценные замечания, позволившие выбрать правильное направление в рассуждениях. Второй автор также благодарит А.Л. Вольберга за продуктивное обсуждение во время своего визита в MSU.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”. Второй автор также поддержан Программой фундаментальных исследований ВШЭ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burkholder D.L.* Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms // *Ann. Prob.* 1984. V. 12. № 3. P. 647–702. <https://doi.org/10.1214/aop/1176993220>
2. *Каушин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
3. *Osipov N.N.* Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system // *Алгебра и анализ.* 2016. V. 28. № 5. P. 236–246. <https://doi.org/10.1090/spmj/1469>
4. *Rubio de Francia J.L.* A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals // *Rev. Mat. Iberoam.* 1985. V. 1. № 2. P. 1–14. <https://doi.org/10.4171/RMI/7>
5. *Кисляков С.В.* Мартингалные преобразования и равномерно сходящиеся ортогональные ряды // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1985. Т. 141. С. 18–38. <https://doi.org/10.1007/BF01327037>
6. *Gundy R.F.* A decomposition for  $L^1$ -bounded martingales // *Ann. Math. Stat.* 1968. V. 39. № 1. P. 134–138. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177698510>
7. *Назаров Ф.Л., Трейль С.Р.* Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа // *Алгебра и анализ.* 1996. Т. 8. Вып. 5. С. 32–162.

## ON BELLMAN FUNCTION METHOD FOR OPERATORS ON MARTINGALES

V. A. Borovitskiy<sup>a,b</sup>, N. N. Osipov<sup>a,c,\*</sup>, and A. S. Tselishchev<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Saint-Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Saint-Petersburg State University, Chebyshev Laboratory, Saint Petersburg, Russian Federation*

<sup>c</sup> *HSE University, International Laboratory of Game Theory and Decision Making, Saint Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

It is shown how to employ Bellman function method to general operators on martingales, i.e. to operators that are not necessarily martingale transforms. The following examples of such operators are considered: the Haar transforms and the operator whose  $L^p$ -boundedness implies the Rubio de Francia inequality for the Walsh system. For the corresponding Bellman function, the Bellman induction is carried out and a Bellman candidate is constructed.

*Keywords:* Burkholder method, Gundy theorem, Walsh system, Rubio de Francia inequality, Haar transform

УДК 517.972

## РАНДОМИЗИРОВАННОЕ КВАНТОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. Дж. Гоф<sup>1</sup>, Ю. Н. Орлов<sup>2,3</sup>, В. Ж. Сакбаев<sup>2,4,\*</sup>, О. Г. Смолянов<sup>4,5</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.02.2021 г.

Поступило 19.02.2021 г.

После доработки 05.04.2021 г.

Принято к публикации 05.04.2021 г.

В связи с неоднозначностью процедуры квантования гамильтоновых систем вводится понятие случайного квантования и связанные с ним случайные величины со значениями в пространстве самосопряженных операторов и случайные процессы со значениями в группе унитарных преобразований. Определяется процедура усреднения случайных унитарных групп и случайных самосопряженных операторов. Вводится обобщение понятия слабой сходимости последовательности мер и соответствующее обобщение понятия сходимости по распределению. Устанавливается сходимость по распределению последовательности композиций независимых случайных преобразований. В случае последовательности композиций независимых случайных преобразований сдвига на вектор евклидова пространства полученные результаты совпадают с центральной предельной теоремой для сумм независимых случайных векторов. Результаты применяются к динамике квантовых систем, возникающих при случайном квантовании классической гамильтоновой системы.

*Ключевые слова:* случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, центральная предельная теорема, марковские процессы, уравнение Колмогорова

**DOI:** 10.31857/S2686954321030085

Квантование гамильтоновой системы не является однозначно определенной процедурой, поэтому мы вводим понятие рандомизированного (случайного) квантования. Случайным квантованием гамильтоновой системы будем называть отображение линейного пространства функций Гамильтона, заданных на симплектическом фазовом пространстве, сопоставляющее каждой функции Гамильтона случайную величину, значениями которой являются самосопряженные операторы, действующих в гильбертовом пространстве квантовой системы. Предложенная схема охватывает все известные способы квантования, поскольку значение случайной величины на каждом элемен-

те вероятностного пространства описывает некоторое квантование. При этом случайная подгруппа, генерируемая случайным гамильтонианом, представляет собой случайный процесс со значениями в группе унитарных операторов.

В сообщении рассматриваются линейные квантования гамильтоновых систем, введенные в работе [1] и развитые в работах [2]). Линейное квантование представляет собой линейное отображение некоторого векторного пространства функций Гамильтона, заданных на симплектическом фазовом пространстве, в некоторое векторное пространство квантовых гамильтонианов, представляющих собой самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве квантовой системы.

Интерес к изучению случайных величин со значениями в множестве неограниченных операторов в банаховых пространствах и случайных процессов со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов возникает в ряде задач математической физики [3–5]. Так, если в функциональной механике функция Гамильтона может быть случайной величиной [6], то квантовым аналогом функциональной механики является квантовая система, гамильтониан которой представляет собой случайную величину со значениями в множестве самосопряжен-

<sup>1</sup>Aberystwyth University, Wales, United Kingdom

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>4</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>5</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: fumi2003@mail.ru

ных операторов [7]. Случайность гамильтониана квантовой системы является следствием неоднозначности процедуры квантования классических гамильтоновых систем ([1, 7]). Таким образом, имеют место два источника случайности при исследовании динамики квантовых систем.

1. Гамильтониан классической системы представляет собой случайную величину со значениями в пространстве непрерывно дифференцируемых функций на фазовом пространстве;

2. Квантование классической гамильтоновой системы является случайной величиной со значениями в пространстве линейных отображений линейного многообразия пространства гладких функций на фазовом пространстве в линейное многообразие в пространстве самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве квантовой системы.

Представляет интерес изучение влияния как каждого из двух источников случайности, так и их совместного влияния на такие характеристики квантовой динамики системы, как среднее значение случайной динамической полугруппы, ее ковариационные характеристики и распределения вероятности на множестве допустимых квантовых состояний.

В работе дано определение слабой сходимости последовательности мер в терминах сходимости последовательности связанных с этими мерами линейных операторов, действующих в подходящем топологическом векторном пространстве пробных функций. Показано, что данное определение включает в себя определение слабой сходимости мер, если в качестве пространства пробных функций выбирать пространство ограниченных непрерывных функций, наделенное топологией поточечной сходимости. С помощью введенного обобщения слабой сходимости мер получены утверждения о сходимости по распределению векторнозначных случайных процессов. Показано, что теорема Чернова об аппроксимации операторных полугрупп представляет собой предельную теорему, описывающую предельные распределения векторнозначных случайных процессов, и включает в себя центральную предельную теорему как одну из реализаций утверждения теоремы Чернова.

1. Случайные операторы и полугруппы. Для изучения случайных операторнозначных функций введем следующую терминологию. Случайной величиной мы называем  $\mathcal{A}$ -измеримую функцию  $\xi$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  со значениями в некотором измеримом пространстве. Случайная величина  $\xi$  принимает значения в некотором топологическом пространстве, снабженном борелевской  $\sigma$ -алгеброй подмножеств. Например, если такая случайная величина  $\xi$  принимает значения в

множестве самосопряженных операторов, то она называется случайным гамильтонианом; аналогично определяется и понятие случайной полугруппы (определения 1 и 4).

Пусть  $Y_s(X)$  – топологическое векторное пространство сильно непрерывных отображений  $\mathbf{F}$  полуоси  $R_+ = [0, +\infty)$  в банахово пространство  $B(X)$  линейных преобразований банахова пространства  $X$ , топология  $\tau_s$  на котором определяется семейством функционалов  $\phi_{T,u}$ ,  $T \geq 0$ ,  $u \in X$ , действующих по правилу  $\phi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$ ; пусть также  $X_*$  – такое банахово пространство, что  $(X_*)^* = X$ .

Определение 1. Случайной операторнозначной функцией называется случайная величина со значениями в топологическом векторном пространстве  $Y_s(X)$ . Случайной полугруппой называется случайная величина  $G$ , принимающая значения в множестве  $\mathcal{S}(X)$  сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в пространстве  $X$ .

Средним значением случайной полугруппы  $G$  называется интеграл Петтиса  $M[G] = \int_{\Omega} G_{\omega} d\mu(\omega)$ , где  $M[G]$  – такой элемент пространства  $Y_s(X)$ , что для любых  $t \in R_+$ ,  $f \in X$ ,  $g \in X_*$  выполняется равенство

$$\langle M[G](t)f, g \rangle = \int_{\Omega} \langle G_{\omega}(t)f, g \rangle d\mu(\omega).$$

Через  $\langle f, g \rangle$  обозначено значение функционала  $f \in X_*^*$  на элементе  $g \in X_*$ .

Теорема 1 [7]. Пусть  $\mu$  – вещественнозначная мера на алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  с ограниченной вариацией. Пусть случайная величина  $\xi$  со значениями в пространстве  $Y_s(X)$  является равномерно ограниченной и плотно сильно равномерно непрерывной, т.е. существует такое плотное линейное подпространство  $D \subset X$ , что для любого  $f \in D$  и любого  $\sigma > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in R_+$  и любого  $\Delta t \in (0, \delta)$ :  $t + \Delta t \in R_+$  выполняется следующее неравенство:

$$\sup_{t \in R_+, \omega \in \Omega} \|\xi_{\omega}(t + \Delta t)f - \xi_{\omega}(t)f\|_X \leq \sigma.$$

Тогда  $M\xi(t) \in Y_s(X)$ .

Теорема (P. Chernoff, 1968, [8, 9]). Пусть  $X$  – банахово пространство,  $B(X)$  – банахово пространство линейных ограниченных операторов в  $X$  и пусть функция  $\mathbf{F}: [0, +\infty) \rightarrow B(X)$  удовлетворяет условию  $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$ , непрерывна в сильной операторной



топологии и удовлетворяет оценке  $\|F(t)\|_{B(X)} \leq e^{\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ , при некотором  $\alpha \geq 0$ . Тогда если оператор  $F'(0)$  замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов  $U(t), t \geq 0$ , то для любого  $u \in X$  и любого  $T > 0$  выполняется равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| U(t)u - \left( F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u \right\|_X = 0.$$

Пусть  $\Pi(X)$  – множество сильно непрерывных отображений  $F$  полуоси  $R_+ \equiv [0, +\infty)$  в банахово пространство  $B(X)$  таких, что  $F(0) = I$ .

Определение 2 [7]. Операторнозначные функции  $F, G \in \Pi(X)$  называются эквивалентными по Чернову, если для любого  $T > 0$  и любого  $u \in X$  выполняется условие

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left( G\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n - \left( F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u \right\| = 0.$$

Определение 3 [7]. Обобщенным математическим ожиданием случайной полугруппы операторов  $\xi$  называется однопараметрическая полугруппа  $U$ , эквивалентная по Чернову математическому ожиданию  $M[\xi]$ .

Теорема 2. Пусть  $\xi$  – случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве  $H$  и пусть  $U(\omega, t) = \exp(i\xi(\omega)t), t \geq 0, \omega \in \Omega$ , – соответствующая случайная полугруппа. Пусть существует такое плотное в пространстве  $H$  подпространство  $\mathcal{D}$ , что  $\int_{\Omega} \|\xi(\omega)u\|_H d\mu(\omega) < \infty$  для любого  $u \in \mathcal{D}$ . Тогда если определенный на пространстве  $\mathcal{D}$  равенством  $\hat{H}u = \int_{\Omega} \xi(\omega)u d\mu(\omega)$  оператор существенно самосопряжен, то среднее значение  $\hat{F}(t) = \int_{\Omega} U(\omega, t) d\mu(\omega), t \geq 0$  эквивалентно по Чернову полугруппе  $\hat{U} = e^{i\hat{H}t}, t \geq 0$ .

Если на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  определена случайная полугруппа  $G$ , то ее генератором называется случайная величина  $H_G$  на том же вероятностном пространстве, определяемая условием: для каждого  $\omega \in \Omega$  значение  $H_G(\omega)$  случайной величины  $H_G$  представляет собой генератор полугруппы  $G(\omega) \in \mathcal{S}(X)$ . Случайная величина  $H_G$  принимает значение в множестве  $\mathcal{G}(X)$  генераторов сильно непрерывных однопараметрических полугрупп, действующих в пространстве  $X$ . Топология  $\tau_{\mathcal{G}}$  на множестве  $\mathcal{G}(X)$  определяется условием, чтобы биекция  $\mathcal{F}$  между

$\mathcal{S}(X)$  и  $\mathcal{G}(X)$ , при которой каждой полугруппе соответствует ее генератор, была гомеоморфизмом топологических пространств  $(\mathcal{S}(X), \tau_{\mathcal{S}})$  и  $(\mathcal{G}(X), \tau_{\mathcal{G}})$ . Таким образом,  $H_G = \mathcal{F} \circ G$ .

Определение 4. Случайным гамильтонианом будем называть измеримую функцию на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , принимающую значения в топологическом пространстве генераторов  $(\mathcal{G}(X), \tau_{\mathcal{G}})$ .

Если математическим ожиданием случайной полугруппы  $G$  является операторнозначная функция  $F_G$ , эквивалентная по Чернову некоторой полугруппе  $U_G$ , то генератор полугруппы  $U_G$  называется средним по Фейнману – Чернову случайного генератора  $H_G$  случайной полугруппы  $G$ .

2. Линейное квантование. В качестве мотивировки для развития анализа случайных операторов рассмотрим процедуру квантования как случайную величину со значениями в множестве самосопряженных операторов. Существуют различные определения квантования такой гамильтоновой системы. Мы рассмотрим симметричные линейные квантования  $Q_{\omega}, \omega \in \Omega$ , (см. [1, 2]), каждое из которых сопоставляет функции Гамильтона  $h$  самосопряженный оператор  $H_{\omega} = Q_{\omega}(h)$  в гильбертовом пространстве  $E$ .

Определение 5. Задание на множестве линейных квантований структуры вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется случайным линейным квантованием.

Случайное линейное квантование позволяет рассматривать квантовый гамильтониан системы как случайный самосопряженный оператор, а семейство унитарных групп  $\exp(-itH_{\omega}), t \in R, \omega \in \Omega$ , – как случайную группу, при условии, что при всех  $t \in R$  отображение  $\omega \rightarrow \exp(-itH_{\omega})$  является измеримым относительно слабой операторной топологии отображением  $\Omega \rightarrow B(H)$ . Последнее условие выполняется, если пространство  $\Omega$  является дискретным.

Рассмотрим пример, когда случайный генератор может принимать лишь два значения  $\hat{H}_1$  и  $\hat{H}_2$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ . Здесь  $\hat{H}_1$  и  $\hat{H}_2$  – эрмитовы операторы (гамильтонианы), порождающие полугруппы  $\hat{U}_1(t) = e^{i\hat{H}_1 t}, t \geq 0$ , и  $\hat{U}_2(t) = e^{i\hat{H}_2 t}, t \geq 0$ . Рассмотрим оператор  $\hat{H} = p_1 \hat{H}_1 + p_2 \hat{H}_2, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$ . Такая ситуация возникает, например, тогда, когда вид квантового оператора зависит от правила квантования. Это, в частности, типичная ситуация для линейного квантования (см. [7]), когда гамильтониан представляет собой линейную комбинацию эрмитовых операторов, полученных по различным правилам квантования, например,

по Йордану и по Вейлю. Пусть операторы  $\hat{H}_{1,2}$  таковы, что условия теоремы 1 выполнены. Тогда в соответствии с формулой (2) полугруппа  $\hat{U}(t) = e^{t\hat{H}}$ ,  $t \geq 0$ , эквивалентна по Чернову линейной комбинации  $p_1\hat{U}_1 + p_2\hat{U}_2$  указанных полугрупп.

3. Предельные теоремы. Пусть  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве  $H$ . Предельные теоремы характеризуют асимптотику при  $n \rightarrow \infty$  распределений вероятности последовательности случайных величин  $\{\eta_n\}$ , представляющих некоторое усреднение последовательности  $\{\xi_k\}$ . Так, закон больших чисел характеризует предельное распределение усредненной случайной величины  $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\xi_n + \dots + \frac{1}{n}\xi_1$ , а центральная предельная теорема – предельное распределение случайной величины  $\hat{\xi}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_n + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_1$ .

Пусть  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов  $B(H)$  в гильбертовом пространстве  $H$ . Исследуем асимптотику при  $n \rightarrow \infty$  распределений вероятности последовательности случайных величин  $\{\Xi_n\}$ , представляющих некоторые усредненные композиции операторнозначных случайных величин  $\xi_k$ . Например, при исследовании закона больших чисел для композиции независимых одинаково распределенных случайных полугрупп исследовалась асимптотика распределений усредненной случайной величины  $\bar{\xi}_n = (\xi_n)^{\frac{1}{n}} \circ \dots \circ (\xi_1)^{\frac{1}{n}}$  (см. [10]).

Определение 6. Пусть  $\{U_n(t), t \geq 0\}$  – последовательность независимых случайных полугрупп. Тогда последовательность  $\{U_n(t), t \geq 0\}$  удовлетворяет закону больших чисел в сильной операторной топологии, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left\| \left( U_n \left( \frac{t}{n} \right) \circ \dots \circ U_1 \left( \frac{t}{n} \right) - U_n \left( \frac{t}{n} \right) \circ \dots \circ U_1 \left( \frac{t}{n} \right) \right) x \right\|_H > \epsilon \right) = 0 \quad (1)$$

при любых  $x \in H$ ,  $t > 0$  и  $\epsilon > 0$ .

Теорема 3. Пусть  $\xi$  – случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве  $H$ , удовлетворяющая условиям теоремы 2. Пусть  $\{\xi_n\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных гамильтонианов, распределение каждого из которых совпадает с распределением случайного

гамильтониана  $\xi$ . Тогда для последовательности  $\{e^{i\frac{t}{n}\xi_n} \circ \dots \circ e^{i\frac{t}{n}\xi_1}, t \geq 0\}$  композиций независимых одинаково распределенных случайных полугрупп выполняется закон больших чисел в сильной операторной топологии (1).

Исследуем топологии на пространстве мер на банаховых пространствах, задаваемых по следующей схеме. задается отображение  $\Psi$ , сопоставляющее мере  $\mu$  на банаховом пространстве  $E$  линейный оператор  $\Phi_\mu \in \mathcal{L}(X)$  свертки с мерой  $\mu$  произвольной функции  $u$  из некоторого топологического векторного пространства  $X$  измеримых числовых функций на пространстве  $E$ :

$$\Phi_\mu u(x) = (MS_\xi)u(x) = \int_E u(x - y) d\mu(y), \quad u \in X.$$

Отображение  $\Psi$  индуцирует топологию на пространстве мер на пространстве  $E$  по некоторой топологии на пространстве линейных операторов  $\mathcal{L}(X)$ , действующих в пространстве  $X$ .

Пусть  $E$  – вещественное сепарабельное гильбертово пространство,  $\mathcal{B}(E)$  –  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $E$ . Пусть  $ca(E, \mathcal{B}(E))$  – банахово пространство борелевских мер ограниченной вариации на измеримом пространстве  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Пусть  $X$  – некоторое локально выпуклое пространство функций  $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ , а  $\mathcal{L}(X)$  – локально выпуклое пространство линейных ограниченных операторов в пространстве  $X$ .

Теорема 4. Слабая сходимость последовательности борелевских мер  $\{\mu_n\}$  на пространстве  $E$  равносильна поточечной сходимости операторов в топологическом векторном пространстве  $(C_b(E), \tau)$ , где  $\tau$  – топология поточечной сходимости на  $E$ .

Пусть  $E = R^d$ ,  $X = C_b(R^d)$  надлено топологией поточечной сходимости. Последовательность  $\{\mu_n\}$  борелевских мер на пространстве  $E$  с ограниченной вариацией называется сходящейся слабо к мере  $\mu \in ca(E, \mathcal{B}(E))$ , если для каждой функции  $f \in C_b(E)$  выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x) d\mu_n(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$ . Это условие равносильно тому, что для каждого  $f \in C_b(E)$  и каждого  $h \in E$  выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x - h) d\mu_n(h) = \int_E f(x - h) d\mu(h)$ . Это и означает, что последовательности линейных операторов  $\{\Psi(\mu_n)\}$ , действующих в топологическом векторном пространстве  $(C_b(E), \tau)$ , сходится поточечно к оператору  $\Psi(\mu)$ .

**Определение 7.** Последовательность мер  $\{\mu_n\}: \mathbb{N} \rightarrow ca(E, \mathcal{B}(E))$  называется сходящейся в  $\mathcal{L}(X)$ -слабо к мере  $\mu \in ca(E, \mathcal{B}(E))$ , если последовательность операторов  $\Phi_{\mu_n}$ , действующих в пространстве  $X$  по правилу  $\Phi_{\mu_n} u(x) = \int_E u(x - y) d\mu_n(y)$ ,  $u \in X$ ,  $x \in E$ , сходится в пространстве  $\mathcal{L}(X)$  к оператору  $\Phi_\mu$ , действующему по правилу  $\Phi_\mu u(x) = \int_E u(x - y) d\mu(y)$ ,  $u \in X$ ,  $x \in E$ .

**Определение 8.** Последовательность случайных величин  $\xi_n$  со значениями в пространстве  $E$  называется сходящейся по распределению  $\mathcal{L}(X)$ -слабо к случайной величине  $\xi$ , если последовательность борелевских мер  $\mu_n$ , определяемых равенствами  $\mu_n(A) = P(\xi_n^{-1}(A))$ ,  $A \in \mathcal{B}(E)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , сходится  $\mathcal{L}(X)$ -слабо к мере  $\mu$ , определяемой равенством  $\mu(A) = P(\xi^{-1}(A))$ ,  $A \in \mathcal{B}(E)$ .

Если топология  $\tau_X$  пространства  $X$  задается семейством полунорм  $\{\phi_a, a \in A\}$ , а топология  $\tau_{sof}$  в пространстве ограниченных линейных операторов  $B(X)$  является сильной операторной, то  $(B(X), \tau_{sof})$ -слабая топология на пространстве мер  $ca(E, \mathcal{B}(E))$  задается семейством функционалов  $\{\Phi_{a,u}, a \in A, u \in X\}$ , определяемых равенствами

$$\Phi_{a,u}(\mu) = \phi_a \left( \int_E u(x - y) d\mu(y) \right), \quad \mu \in ca(E, \mathcal{B}(E)).$$

**Теорема 5.** Пусть  $\xi(t), t \geq 0$ , — случайный процесс со значениями в пространстве  $E$ ;  $\{\xi_n\}$  — последовательность независимых случайных процессов, распределение каждого из которых совпадает с распределением процесса  $\xi$ . Пусть  $X$  — банахово пространство функций  $u: E \rightarrow \mathbb{C}$  такое, что для любого  $t \geq 0$  линейный оператор  $u \rightarrow \mathbf{F}(t)u = M(S_{\xi(t)} u)$  определен на пространстве  $X$ . Тогда если оператор-функция  $\mathbf{F}(t), t \geq 0$ , удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то последовательность случайных процессов  $\{\eta_n(t), t \geq 0\}$ , где  $\eta_n(t) = \xi_n \left( \frac{t}{n} \right) + \dots + \xi_1 \left( \frac{t}{n} \right)$ , сходится по распределению  $(B(X), \tau_{sof})$ -слабо к марковскому случайному процессу, порождающему полугруппу  $\exp(\mathbf{F}'(0)t), t \geq 0$ .

Равенство  $M(S_{\xi_n(t)} \circ \dots \circ S_{\xi_1(t)} u) = (\mathbf{F}(t))^n u$  справедливо при всех  $t \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  в силу независимости процессов  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  [10]. Так как функция  $\mathbf{F}$  удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то для любого  $u \in X$  имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| M(S_{\xi_n \left( \frac{t}{n} \right) + \dots + \xi_1 \left( \frac{t}{n} \right)} u) - \exp(\mathbf{F}'(0)t)u \right\|_X = 0 \quad \forall T > 0.$$

Это означает  $(B(X), \tau_{sof})$ -слабую сходимость по распределению последовательности случайных процессов  $\{\eta_n(t), t \geq 0\}$  к марковскому случайному процессу, порождающему полугруппу  $\exp(\mathbf{F}'(0)t), t \geq 0$ .

**Замечание.** Для последовательности композиций независимых случайных операторов сдвига на вектор евклидова пространства утверждение теоремы 5 включает утверждение центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов, если в качестве пространства  $X$  выбрать пространство  $C_b(E)$  с топологией поточечной сходимости.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Дж. Гоф благодарит за финансовую поддержку Национальное Агентство Исследований Франции, грант Q-COAST ANR- 19-CE48-0003.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф.А. Невинеровские континуальные интегралы // ТМФ. 1971. Т. 6. № 2. С. 194–212.
2. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. М.: МФТИ, 2004. 236 с.
3. Bonaccorsi S., Cottini F., Mugnolo D. Random Evolution Equations: Well-Posedness, Asymptotics, and Applications to Graphs // Appl Math Optim. 2021. <https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w>
4. Butko Ya.A. Chernoff approximation of subordinate semigroups // Stochastics and Dynamics. <https://doi.org/10.1142/S0219493718500211>
5. Remizov I.D. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients // J. of Mathematical Physics. 2019. V. 60. № 7. 071505.
6. Волович И.В. Уравнения Боголюбова и функциональная механика // ТМФ. 2010. Т. 164. № 3. С. 354–362.
7. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
8. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
9. Sinha K.B., Srivastava S. Theory of Semigroups and Applications / Texts and Readings in Mathematics. 2017. V. 74. Hindustan Book Agency.
10. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.

**RANDOM QUANTIZATION OF HAMILTONIAN SYSTEMS****J. Gough<sup>a</sup>, Yu. N. Orlov<sup>b,c</sup>, V. Zh. Sakbaev<sup>b,d</sup>, and O. G. Smolyanov<sup>d,e</sup>**<sup>a</sup> *Aberystwyth University, Wales, United Kingdom, Moscow, Russian Federation*<sup>b</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*<sup>c</sup> *Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*<sup>d</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*<sup>e</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A quantization of Hamiltonian system is an ambiguous procedure. Therefore we introduce the notion of random quantization, related random variables with values in the set of self-adjoint operators and random processes with values in the group of unitary operators. The procedures of averaging of random unitary group and averaging of random self-adjoint operators are defined. The generalized convergence of the sequence of measures and the corresponding generalized convergence of the sequence of random variables by distribution are introduced. The generalized convergence in distribution for some sequences of compositions of random mappings is obtained. In the case of the sequence of compositions of shifts on independent random vectors of euclidean space the obtained convergence coincides with the statement of central limit theorem for a sum of independent random vectors. Obtained results are applied to the dynamics of quantum systems arising in random quantization of Hamiltonian system.

*Keywords:* random linear operator, random operator valued function, operator valued random process, law of large numbers, central limit theorem, Markovian process, Kolmogorov equation

УДК 517.956.32+517.929

## КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2021 г. Н. В. Зайцева<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 24.02.2021 г.

Поступило 26.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принято к публикации 16.03.2021 г.

Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с нелокальным потенциалом построено трехпараметрическое семейство глобальных решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими.

*Ключевые слова:* гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение

**DOI:** 10.31857/S2686954321030152

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено И. Бернулли [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., например, [2] и имеющуюся там библиографию). В книге [3] приведен обширный материал по теории линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, часто встречающимися в теории автоматического регулирования.

Изучение задач механики сплошных сред привело в дальнейшем к рассмотрению дифференциально-разностных уравнений с частными производными. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для указанных уравнений в ограниченных областях (см., например, [4, 5] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях подробно изучены задачи для параболических [6] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [7–11]. В частности, в работах [10, 11] рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по пе-

ременной времени [12]. В работах [13–15] рассмотрены гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной.

В настоящей работе рассмотрим в полуплоскости  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$  гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, согласно терминологии [3], содержащее сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - bu(x - h, t), \quad (1)$$

где  $a, b, h \neq 0$  – заданные вещественные числа.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора  $L$  уравнения (1) равна  $\text{Re}L(\xi) = -a^2\xi^2 - b \cos(h\xi)$ . Будем называть оператор  $-L$  положительным, если выполняется условие  $-\text{Re}L(\xi) > 0$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^1$ , т.е. справедливо неравенство

$$a^2\xi^2 + b \cos(h\xi) > 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать оператор  $-L$  положительным.

**Определение 1.** Функция  $u(x, t)$  называется классическим решением уравнения (1), если в каждой точке полуплоскости  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$  существуют классические, т.е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей, производные  $u_t$  и  $u_{xx}$ , и в каж-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: zaitseva@cs.msu.ru

дой точке этой полуплоскости выполняется соотношение (1).

Применив к равенству (1) преобразование Фурье  $F_x$ , перейдем к двойственной переменной  $\xi$ , и с учетом формул

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f], \quad F_x[f(x-h)] = e^{ih\xi} F_x[f],$$

получим для функции  $\hat{u}(\xi, t) = F_x[u](\xi, t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \hat{u}(\xi, t)}{dt^2} = -(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}) \hat{u}(\xi, t), \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \pm \sqrt{-(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi})} = \\ &= \pm i \sqrt{a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}} = \pm i \rho(\xi) e^{i\varphi(\xi)}, \end{aligned}$$

где

$$\rho(\xi) := [(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)]^{1/4}, \quad (4)$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)}. \quad (5)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= C_1(\xi) e^{i\rho(\xi)[\cos \varphi(\xi) + i \sin \varphi(\xi)] t} + \\ &+ C_2(\xi) e^{-i\rho(\xi)[\cos \varphi(\xi) + i \sin \varphi(\xi)] t} = \\ &= C_1(\xi) e^{-i\rho(\xi)[\sin \varphi(\xi) - i \cos \varphi(\xi)] t} + \\ &+ C_2(\xi) e^{i\rho(\xi)[\sin \varphi(\xi) - i \cos \varphi(\xi)] t}, \end{aligned}$$

где  $C_1(\xi)$  и  $C_2(\xi)$  – произвольные постоянные, зависящие от параметра  $\xi$ . Положим  $C_1(\xi) = 1$  и  $C_2(\xi) = 0$ , тогда из последнего равенства будем иметь

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-iG_1(\xi)} e^{iG_2(\xi)}, \quad (6)$$

где

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin(h\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos(h\xi). \quad (7)$$

Применив к равенству (6) обратное преобразование Фурье  $F_\xi^{-1}$ , получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} e^{iG_2(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - x\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi.$$

На основании (8), рассуждая так же, как и в [10], докажем теорему.

**Теорема.** При выполнении условия (2) функции

$$F(x, t; \xi) := e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (9)$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (10)$$

где  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  определяются равенствами (7), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

**Доказательство.** Подставим сначала функцию (9) непосредственно в уравнение (1). Для этого найдем

$$F_x(x, t; \xi) = \xi e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_{xx}(x, t; \xi) = -\xi^2 e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_t(x, t; \xi) = -G_1(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) - G_2(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_{tt}(x, t; \xi) = [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi). \quad (11)$$

С учетом (7) будем иметь  $2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi)$ . Так как аргумент  $\varphi(\xi)$  определяется выражением (5), то имеет место неравенство  $|2\varphi(\xi)| < \frac{\pi}{2}$ , а следовательно,  $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ . Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi(\xi) &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ &= \operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \times \\ &\times \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \left[ 1 + \frac{b^2 \sin^2(h\xi)}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \times \\ &\times \left[ \frac{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия (2) и формулы (4) из последнего равенства получим  $\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b \sin(h\xi)}{\rho^2(\xi)}$ , откуда следует, что  $2G_1(\xi)G_2(\xi) = b \sin(h\xi)$ .

При установленном выполнении неравенства  $\cos 2\varphi(\xi) > 0$  и условия (2) вычислим теперь

$$\begin{aligned} G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) &= \rho^2(\xi)[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)] = \\ &= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ &= -\rho^2(\xi)\left[\frac{(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))^2}{(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))^2 + b^2\sin^2(h\xi)}\right]^{1/2} = \\ &= -a^2\xi^2 - b\cos(h\xi). \end{aligned}$$

С учетом найденных выражений  $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$  и  $2G_1(\xi)G_2(\xi)$  из равенства (11) получим

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= \\ &= -(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив найденные производные  $F_{tt}$  и  $F_{xx}$  в уравнение (1), будем иметь

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) - a^2F_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}[\cos(tG_2(\xi) - x\xi)\cos(h\xi) - \\ &- \sin(tG_2(\xi) - x\xi)\sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bF(x - h, t; \xi), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций  $F(x, t; \xi)$  при любом вещественном значении параметра  $\xi$ .

Аналогично проверим, что и функция (10) удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке полуплоскости  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ . Вычислим

$$\begin{aligned} H_x(x, t; \xi) &= -\xi e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{xx}(x, t; \xi) &= -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)]e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &- 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) = \\ &= -(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &- b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив производные  $H_{tt}$  и  $H_{xx}$  в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} H_{tt}(x, t; \xi) - a^2H_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}[\sin(tG_2(\xi) - x\xi)\cos(h\xi) + \\ &+ \cos(tG_2(\xi) - x\xi)\sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bH(x - h, t; \xi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

*С л е д с т в и е.* При выполнении условия (2) семейство функций

$$\begin{aligned} G(x, t; \alpha, \beta, \xi) &:= \alpha e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ \beta e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi), \end{aligned}$$

где  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  определяются равенствами (7), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров  $\alpha, \beta$  и  $\xi$ .

Выясним теперь, какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты уравнения  $a, b$  и сдвиг  $h$ , чтобы выполнялось условие (2) для любого вещественного значения  $\xi$ . Рассмотрим функцию  $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$  при  $\xi \in [0, +\infty)$ . Производная этой функции равна

$$2a^2\xi - bh\sin(h\xi) = 2a^2\xi\left(1 - \frac{bh^2\sin(h\xi)}{2a^2h\xi}\right).$$

Так как  $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , то производная неотрицательна на промежутке  $\xi \in [0, +\infty)$  при выполнении условия

$$0 < b \leq \frac{2a^2}{h^2}, \tag{12}$$

тогда функция  $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$  при  $\xi \in [0, +\infty)$  не убывает и принимает наименьшее значение, равное  $b > 0$ . В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ . Тем самым мы показали, что условие (2), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения  $a, b$  и сдвиг  $h$  удовлетворяют соотношению (12).

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность участникам научно-исследовательского семинара факультета ВМК МГУ по спектральной теории дифференциальных операторов и актуальным вопросам математической физики под руководством академика РАН Е.И. Моисеева и проф. И.С. Ломова, а именно Ш.А. Алимову, А.В. Боровских, В.Н. Денисову, С.М. Ситнику за полезные обсуждения данной работы, а также А.Б. Муравнику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernoulli J.* Meditationes. De chordis vibrantibus / Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1728. V. 3. P. 13–28.
2. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Jahresber. Deutsch. Math. 1908. V. 10. S. 1–1804.
3. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley and Los Angeles: University of California press, 1958. 262 p.
4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Basel, Boston, B.: Birkhauser, 1997. 294 p.
5. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
6. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–143.
7. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 4. С. 566–576.
8. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several non-local terms // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.
9. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Соврем. мат. фундам. направл. 2017. V. 63. № 4. С. 678–688.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
11. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. <https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372>
12. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. фундам. направл. 2008. Т. 30. С. 3–173.
13. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 44–46.
14. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
15. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.

## CLASSICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLOCAL POTENTIAL

N. V. Zaitseva<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

A three-parametric family of global solutions of a two-dimensional hyperbolic differential-difference equation with non-local potential is constructed. The theorem that the obtained solutions are classical is proved.

*Keywords:* hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution



УДК 517.946

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МАРАНГОНИ В СРЕДЕ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

© 2021 г. М. А. Кисатов<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.01.2021 г.

Поступило 25.01.2021 г.

После доработки 19.03.2021 г.

Принято к публикации 21.03.2021 г.

Изучается система уравнений пограничного слоя нелинейной обобщенно-ньютоновской вязкой жидкости, модификацию которой предложила О.А. Ладыженская. Для доказательства корректной разрешимости поставленной задачи в работе применяется метод преобразования фон Мизеса, который переводит систему пограничного слоя в одно квазилинейное выражающееся параболическое уравнение.

*Ключевые слова:* преобразование Мизеса, пограничный слой Марангони, реология, неньютоновские среды

**DOI:** 10.31857/S2686954321030097

Слоем К. Марангони называется одна из разновидностей внутренних пограничных слоев (см. работы [1], [2]), возникающих вблизи границы раздела двух вязких сплошных сред (см. рис. 1). Марангони в 1865 г. исследовал такое явление, связанное с различием коэффициентов поверхностного натяжения в средах, которое возникает с изменением концентрации веществ или температуры.

Позже, в 1961 г., эффект Марангони был описан в терминах термогидродинамики С. Чандрасекаром. Вытекающие из этой теории задачи решались в ряде работ на физическом уровне строгости. Математически строгий подход к решению задач, связанных с эффектом Марангони, имеется, к примеру, в [3]. При этом применяется также теория Л. Прандтля, весьма эффективная при рассмотрении тонких слоев жидкости.

Во всех этих работах среда предполагается ньютоновской (см. также недавние работы [4–6]). В данной работе излагаются результаты о корректной разрешимости задачи о слое Марангони в нелинейно вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской. Подобные задачи для пограничного слоя типа Прандтля рассматривались в работах [7–10]. Задачи были исследованы с помощью преобразования Крокко в рабо-

тах [11, 12] и с помощью преобразования фон Мизеса в [13].

Примером такой неньютоновской среды могут служить некоторые виды лиотропных жидких кристаллов (см., например, [14]).

Для исследования мы применяем преобразование Мизеса, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное выражающееся параболическое уравнение.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассматривается модифицированная стационарная система уравнений двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости вида (см. [7])

$$\begin{aligned} & -\nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} ((1 + kB^2(u))B_{ij}(u)) + \\ & + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$B_{ij}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad B^2(u) = \sum_{i,j=1}^2 B_{ij}^2(u),$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $k$  – малая положительная постоянная,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность (без ограничения общности считаем, что

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: kisatov@mail.ru



Рис. 1. Пограничный слой Марангони на стенках.

плотность равна единице);  $x_1, x_2$  – координаты, а  $u_1$  и  $u_2$  – соответствующие этим направлениям компоненты скорости. Далее компоненты скорости для удобства обозначим следующим образом:

$$u_1(x, y) = u(x, y), \quad u_2(x, y) = v(x, y)$$

и будем рассматривать систему уравнений (1) в полуполосе  $\Pi = \{0 < x < X, 0 < y < +\infty\}$ .

К уравнениям (1) добавляются граничные условия:

$$v|_{y=0} = v_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u_0(y), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \hat{A}(x), \tag{4}$$

$$(u, v) \rightarrow (U, 0) \quad \text{при} \quad y \rightarrow +\infty. \tag{5}$$

Условие (4) описывает поверхностное натяжение жидкости на границе  $y = 0$ . Это условие является отличительной особенностью задачи Марангони от задачи Прандтля. Предполагается, что число Рейнольдса  $Re = \frac{UX}{\nu}$  достаточно большое (число

$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}}$  – малое). Вводя новые переменные

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\varepsilon}$$

и новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x', y') &= u(x', \varepsilon y'), \\ \tilde{v}(x', y') &= \frac{v(x', \varepsilon y') - v_0(x')}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

преобразуем систему, группируя слагаемые по порядку малости, относительно  $\varepsilon$ . Затем, возвращаясь к старым переменным, убрав некоторые малые слагаемые, получаем систему уравнений пограничного слоя, которая имеет следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( 1 + 3k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Система уравнений (6), (7) рассматривается в области

$$D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}. \tag{8}$$

К уравнениям (6), (7) присоединяются граничные условия вида (2)–(5):

$$v|_{y=0} = v_0(x), \quad u|_{x=0} = u_0(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \hat{A}(x), \quad u \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow +\infty.$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют системе (6), (7) в области  $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ , непрерывны в  $\bar{D}$  и удовлетворяют условиям (2)–(5); пусть, кроме того, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 < u < C_1, \quad y > 0, \\ C_2 y \leq u \leq C_3 y, \quad 0 < y < y_0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq C_4, \quad (x, y) \in D, \tag{10}$$

где  $C_j, j = 1, \dots, 4$ , и  $y_0$  – некоторые положительные постоянные. Тогда  $u, v$  – единственное решение задачи (6), (7), (2)–(5) с указанными свойствами.

## 2. ПЕРЕМЕННЫЕ МИЗЕСА

Система уравнений (6), (7) с помощью замены переменных (см. [7])

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y),$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v - v_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi|_{y=0} = 0,$$

$$w(x, \psi) = u^2(x, y),$$

сводится к квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial x} = v\sqrt{w} \left( 1 + \frac{3}{4} k \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - v_0 \frac{\partial w}{\partial \psi} + W'(x), \quad (11)$$

где  $W(x) = U^2(x)$ , в области  $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < +\infty\}$ . Граничные условия (2)–(5) принимают вид

$$w|_{x=0} = w_0(\psi), \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = A(x) = 2\hat{A}(x), \quad (13)$$

$$w(x, \psi) \rightarrow W(x) \text{ равномерно при } \psi \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Пусть в области  $G$  выполняется уравнение (11) вместе с граничными условиями (12)–(14), тогда справедлива

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$A(x), W(x) \in C^1[0, X],$$

$$w_0(\psi) \in C^{2+\beta}[0, \infty), \quad \beta > 0;$$

$$A(x) \leq 0, \quad W(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, X]; \quad (15)$$

$$w_0(\psi) > W(0) \quad \forall \psi \in [0, \infty), \quad w'_0(0) = A(0);$$

$$w_0(\psi) \rightarrow W(0) \quad \text{при } \psi \rightarrow \infty,$$

и пусть существует постоянная  $C > 0$ , такая что

$$\left| v\sqrt{w_0} \left( 1 + \frac{3}{4} k (w'_0)^2 \right) w''_0 - v_0 w'_0 \right| \leq C(w_0(\psi) - W(0)). \quad (16)$$

Тогда существует единственное решение задачи (11)–(14), такое что  $w, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}, \frac{\partial w}{\partial x}$  непрерывны и ограничены в замкнутой области  $\bar{G}$ .

На основе этой теоремы с помощью обратной замены переменных получаем доказательство основного результата.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определенный интерес представляют обобщения рассмотренной задачи на случай электропроводных сред в магнитных полях различной направленности и с учетом явлений теплопередачи и параметров, зависящих от температуры.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 20-11-20272).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. symp. on material sci. in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.
2. *Batishchev V.A., Kuznetsov V.V., Pukhnachov V.V.* Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.
3. *Кузнецов В.В.* Пограничные слои Марангони: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Новосибирск, 1984. С. 29–42.
4. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 651.
5. *Пухначев В.В.* Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского гос. ун-та. 2011. № 1–2. С. 62.
6. *Ortiz-Pérez A.S., Dávalos-Orozco L.A.* Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // Phys. Fluids. 2011. № 28 (3). P. 084107–084111.
7. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 329–361.
8. *Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 158–176.
9. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 83–100.
10. *Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N.* On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non-Newtonian MHD medium // C R Mécanique. 2018. Т. 346. № 9. P. 807–814.
11. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // ДАН. 2019. Т. 487. № 2. С. 119–125.
12. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О нестационарном пограничном слое вязкой реологически сложной жидкости // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 310. С. 40–77.
13. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 508 с.
14. *Кирсанов Е.А., Матвеев В.Н.* Неньютоновское течение дисперсных, полимерных и жидкокристаллических систем. Структурный подход. М.: Техносфера, 2016. 384 с.

# SYSTEM OF EQUATIONS FOR THE MARANGONI BOUNDARY LAYER IN MEDIA WITH RHEOLOGICAL LAW OF O.A. LADYZHENSKAYA

**M. A. Kisatov<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

One studies the system of equations of the boundary layer of nonlinearly generalized Newtonian viscous fluid with the O.A. Ladyzhenskaya law. To prove the corrected solution of the problem, we use the von Mises transform method, which transform the system of equations of the boundary layer into a quasilinear degenerate parabolic equation.

*Keywords:* Von Mises transformation, the Marangoni boundary layer, rheologi, non-Newtonian media

УДК 519.17

## ТРИ БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕРИИ ГРАФОВ ШИЛЛА НЕ СУЩЕСТВУЮТ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН А. А. Махнев<sup>1,\*</sup>, И. Н. Белоусов<sup>1,\*\*</sup>,  
М. П. Голубятников<sup>1,\*\*\*</sup>, М. С. Нирова<sup>2,\*\*\*\*</sup>

Поступило 30.03.2021 г.  
После доработки 30.03.2021 г.  
Принято к публикации 27.04.2021 г.

Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением  $\theta_1$ , равным  $a_3$ . Для графа Шилла  $\Gamma$  число  $a = a_3$  делит  $k$  и полагают  $b = b(\Gamma) = k/a$ . Ранее были найдены три бесконечные серии графов Шилла с допустимыми массивами пересечений:  $\{b(b^2 - 1), b^2(b - 1), b^2; 1, 1, (b^2 - 1)(b - 1)\}$  (И.Н. Белоусов),  $\{b^2(b - 1)/2, (b - 1)(b^2 - b + 2)/2, b(b - 1)/4; 1, b(b - 1)/4, b(b - 1)^2/2\}$  (Кулен, Пак), и  $\{(s + 1)(s^3 - 1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3 - 1)\}$  (И.Н. Белоусов). В работе доказано, что в первой серии существует единственный граф – обобщенный шестиугольник порядка 2, а во второй и третьей сериях графов нет.

*Ключевые слова:* дистанционно-регулярный граф, граф Шилла, тройные числа пересечений

DOI: 10.31857/S2686954321030115

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если  $a, b$  – вершины графа  $\Gamma$ , то через  $d(a, b)$  обозначается расстояние между  $a$  и  $b$ , а через  $\Gamma_i(a)$  – подграф графа  $\Gamma$ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  от вершины  $a$ . Подграф  $\Gamma_i(a)$  называется окрестностью вершины  $a$  и обозначается через  $[a]$ . Дистанционно-регулярные графы с массивом пересечений  $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$  определены в [1]. Пусть  $k = b_0, a_i = k - b_i - c_i$ .

Для дистанционно-регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение  $\theta_1$  не меньше  $\max\{a_3, (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2\}$ , причем в случае  $\theta_1 = a_3$  по [2] имеем  $\theta_1 = (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2$ . Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением  $\theta_1$ ,

равным  $a_3$ . Для графа Шилла  $\Gamma$  число  $a = a_3$  делит  $k$  и полагают  $b = b(\Gamma) = k/a$ .

Пусть  $\Gamma$  является графом Шилла. Тогда  $a_1 = a - b$ ,  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$  и собственные значения  $\theta_2, \theta_3$ , являющиеся корнями уравнения  $x^2 - (a_2 + a - b - ab)x + (b - 1)b_2 - a_2 = 0$ . Если  $\theta_2, \theta_3$  – целые числа, то  $(a_2 + a - b - ab)^2 - 4((b - 1)b_2 - a_2)$  является квадратом натурального числа, в противном случае кратности  $\theta_2$  и  $\theta_3$  совпадают.

Известные графы Шилла – это нечетный граф  $O(4)$  с массивом пересечений  $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$ , граф Хэмминга  $H(3, 3)$  с массивом пересечений  $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$ , обобщенный шестиугольник  $GH(2, 2)$  с массивом пересечений  $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$ , граф Тервиллигера с массивом пересечений  $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ , граф Доро с массивом пересечений  $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ , унитарные графы на множестве неизотропных векторов с массивами пересечений  $\{q(q + 1), (q + 2)(q - 1), q + 2; 1, 1, q^2 - 1\}$ ,  $q$  – степень простого числа, или граф Джонсона  $J(9, 3)$  с массивом пересечений  $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$ .

Пусть  $\Gamma$  является графом Шилла с  $b_2 = c_2$ . Если собственные значения графа  $\theta_2, \theta_3$  графа  $\Gamma$  имеют одинаковые кратности, то  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{b^2(b - 1)/2, (b - 1)(b^2 - b + 2)/2, b(b - 1)/4; 1,$

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup> Кабардино-Балкарский государственный университет им. Бербекова, Нальчик, Россия

\*E-mail: makhnev@imm.uran.ru

\*\*E-mail: i\_belousov@mail.ru

\*\*\*E-mail: mike\_ru1@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: nirova\_m@mail.ru

$b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ ,  $b$  сравнимо с 0 или 1 по модулю 4 [2].

Графы Шилла с  $b_2 = c_2$  изучались также в [3, 4]. Для двупараметрического семейства массивов пересечений  $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)), (2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1), r^2l(2r-1); 1, r^2l(2r-1), r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$  существует лишь конечное число графов  $((l, r) \in \{(1, 2), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\})$  (см. [4, теорема 2]).

В работе [5] найдены следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла:

- (1)  $\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1), 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1), 2c_2^2; 1, c_2, (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1)\}$ ;
- (2)  $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$ ;
- (3)  $\{b(b+1), (b+2)(b-1), b+2; 1, 1, b^2-1\}$ ;
- (4)  $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$ ;
- (5)  $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ ,  $s > 2$ .

Предлагается программа изучения графов Шилла с массивами пересечений из этих серий.

Заметим, что в серии  $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$  имеется только 3 допустимых массива пересечений  $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$ ,  $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$  и  $\{84, 78, 13; 1, 1, 72\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений  $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$ . Тогда  $b \in \{2, 3\}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений  $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$ . Тогда  $b = 2$  и  $\Gamma$  — обобщенный шестиугольник порядка  $(2, 2)$  с массивом пересечений  $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$ .

**Теорема 2.** Дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$  не существует.

Граф Шилла  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$  является  $Q$ -полиномиальным.

**Теорема 3.** Дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$  не существует.

Доказательство следствия 1 и теоремы 2 опирается на вычисление тройных чисел пересечений [6].

Пусть  $\Gamma$  — дистанционно-регулярный граф диаметра  $d$ . Если  $u_1, u_2, u_3$  — вершины графа  $\Gamma$ ,

$r_1, r_2, r_3$  — неотрицательные целые числа, не большие  $d$ . Через  $\left\{ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right\}$  обозначим множество вер-

шин  $w \in \Gamma$  таких, что  $d(w, u_i) = r_i$ , а через  $\left[ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right]$  — число вершин в  $\left\{ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right\}$ . Числа  $\left[ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right]$  называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин  $u_1, u_2, u_3$  вместо  $\left[ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right]$

будем писать  $[r_1 r_2 r_3]$ . К сожалению, для чисел  $[r_1 r_2 r_3]$  нет общих формул. Однако в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел  $[r_1 r_2 r_3]$ .

Пусть  $u, v, w$  — вершины графа  $\Gamma$ ,  $W = d(u, v)$ ,  $U = d(v, w)$ ,  $V = d(u, w)$ . Так как имеется точно одна вершина  $x = u$  такая, что  $d(x, u) = 0$ , то число  $[0jh]$  равно 0 или 1. Отсюда  $[0jh] = \delta_{jw} \delta_{hv}$ . Аналогично,  $[i0h] = \delta_{iw} \delta_{hU}$  и  $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$ .

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из  $\{u, v, w\}$  и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \quad \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h],$$

$$\sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0](+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При  $|i-j| > W$  или  $i+j < W$  имеем  $p_{ij}^W = 0$ , поэтому  $[ijh] = 0$  для всех  $h \in \{0, \dots, d\}$ .

Положим  $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \left[ \begin{matrix} uvw \\ rst \end{matrix} \right]$ . Если

параметр Крейна  $q_{ij}^h = 0$ , то  $S_{ijh}(u, v, w) = 0$ .

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  дистанционно-регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 и положим  $\{ijh\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}$ ,  $[ijh] = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right]$ ,  $[ijh]' = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ihj \end{matrix} \right]$ ,  $[ijh]^* = \left[ \begin{matrix} vuw \\ jih \end{matrix} \right]$  и  $[ijh]^- = \left[ \begin{matrix} wvu \\ hji \end{matrix} \right]$ . В случаях  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$  или  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$  вычисление параметров  $[ijh]' = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ihj \end{matrix} \right]$ ,  $[ijh]^* = \left[ \begin{matrix} vuw \\ jih \end{matrix} \right]$  и  $[ijh]^- = \left[ \begin{matrix} wvu \\ hji \end{matrix} \right]$  (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Пусть  $\Gamma$  является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений  $\{b(b^2 - 1), b^2(b - 1), b^2; 1, 1, (b^2 - 1)(b - 1)\}$ . Тогда  $a_1 = b^2 - b - 1$  и окрестность любой вершины в  $\Gamma$  является объединением  $b + 1$  изолированных  $(b^2 - b)$ -клик.

Пусть  $a, z$  – вершины, находящиеся на расстоянии 3 в  $\Gamma$ . Если  $[z] \cap \Gamma_2(a)$  содержит  $(b + 2)$ -клику  $K$ , то две подходящие вершины из  $K$  смежны с вершинами некоторой клики из  $[a] \cap \Gamma_2(z)$ . Противоречие с тем, что тогда  $\Gamma$  содержит четырехугольник.

Значит, порядок любой клики из  $[z] \cap \Gamma_2(a)$  не больше  $b + 1$  и  $(b^2 - 1)(b - 1)/(b + 1) \leq b + 1$ . Отсюда  $(b - 1)^2 \leq b + 1$  и  $b \leq 3$ . Теорема 1 доказана.

Пусть  $b = 3$  и  $\Gamma$  – дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ . Тогда  $\Gamma$  имеет  $1 + 24 + 432 + 243 = 700$  вершин, спектр:  $24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300}$  и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 175 & 224 & 300 \\ 1 & \frac{175}{3} & -\frac{28}{3} & -50 \\ 1 & 0 & -\frac{28}{3} & \frac{25}{3} \\ 1 & -\frac{175}{27} & \frac{448}{27} & -\frac{100}{9} \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 1. Числа пересечений графа  $\Gamma$  равны

- 1)  $p_{11}^1 = 5, p_{21}^1 = 18, p_{32}^1 = 162, p_{22}^1 = 252, p_{33}^1 = 81;$
  - 2)  $p_{11}^2 = 1, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 9, p_{22}^2 = 264, p_{23}^2 = 153, p_{33}^2 = 81;$
  - 3)  $p_{12}^3 = 16, p_{13}^3 = 8, p_{22}^3 = 272, p_{23}^3 = 144, p_{33}^3 = 90.$
- Доказательство. Прямые вычисления.

Пусть  $u, v, w$  – вершины графа  $\Gamma, [rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}, \Delta = \Gamma_2(u)$  и  $\Lambda = \Delta_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени 264 на 432 вершинах.

Л е м м а 2. Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$ . Тогда выполняются равенства:

$$\begin{aligned} [111] &= -r_5 + 1, & [112] &= [121] = r_5, \\ [122] &= -r_4 - r_5 + 14, & [123] &= [132] = r_4, \\ & & [133] &= -r_4 + 9; \\ [211] &= r_5 - r_6 - r_7 + 148, \\ [212] &= [221] = -r_5 + r_6 + r_7 - 135, \\ [222] &= r_4 + r_5 - r_7 + 237, \\ [223] &= [232] = -r_4 - r_6 + 162, & [233] &= r_4 + r_6 - 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [311] &= r_6 + r_7 - 144, \\ [312] &= [321] = -r_6 - r_7 + 153, & [322] &= r_7, \\ [323] &= [332] = r_6, & [333] &= -r_6 + 81, \end{aligned}$$

где  $r_4 \in \{0, 1, \dots, 9\}, r_5 \in \{0, 1\}, r_6 \in \{0, 1, \dots, 81\}$  и  $r_7 \in \{63, 64, \dots, 149\}$ .

Доказательство. Упрощения формул (+).

Имеем  $p_{23}^2 = 153$ , поэтому  $[223] = -r_4 - r_6 + 162 \leq 153$  и  $9 \leq r_4 + r_6$ . По лемме 2 имеем  $88 \leq [222] = r_4 + r_5 - r_7 + 237 \leq 184$ . Так как  $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$  содержит  $530 - [222]$  вершин, то  $98 \leq [222] \leq 184$ .

Л е м м а 3. Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$ . Тогда либо  $r_{25} = 0$  и выполняются равенства:

- 1)  $[112] = [121] = 0, [113] = [131] = 1, [122] = -r_{22} + 14, [123] = [132] = r_{22}, [133] = -r_{22} + 8;$
- 2)  $[212] = r_{26} + 7, [213] = -r_{26} + 7, [221] = -r_{27} + 14, [222] = -r_{24} - r_{26} + 257, [223] = r_{24} + r_{26} + r_{27} - 7, [231] = r_{27}, [232] = r_{24}, [233] = -r_{24} - r_{27} + 152;$
- 3)  $[312] = -r_{26} + 9, [313] = r_{26}, [321] = r_{27} + 2, [322] = r_{22} + r_{24} + r_{26}, [323] = -r_{22} - r_{24} - r_{26} - r_{27} + 151, [331] = -r_{27} + 7, [332] = -r_{22} - r_{24} + 144, [333] = r_{22} + r_{24} + r_{27} - 70,$   
 $r_{22} \in \{0, 1, \dots, 8\}, r_{24} \in \{55, 56, \dots, 151\}, r_{27} \in \{0, 1, \dots, 7\},$   
 $r_{26} \in \{0, 1, \dots, 7\},$

либо  $r_{25} = 1$  и выполняются равенства:

- 4)  $[112] = [121] = 1, [113] = [131] = 0, [122] = -r_{22} + 13, [123] = [132] = r_{22}, [133] = -r_{22} + 9;$
- 5)  $[212] = r_{26} + 6, [213] = -r_{26} + 8, [221] = -r_{27} + 14, [222] = -r_{24} - r_{26} + 258, [223] = r_{24} + r_{26} + r_{27} - 8, [231] = r_{27}, [232] = r_{24}, [233] = -r_{24} - r_{27} + 152;$
- 6)  $[312] = -r_{26} + 9, [313] = r_{26}, [321] = r_{27} + 1, [322] = r_{22} + r_{24} + r_{26}, [323] = -r_{22} - r_{24} - r_{26} - r_{27} + 152, [331] = -r_{27} + 8, [332] = -r_{22} - r_{24} + 144, [333] = r_{22} + r_{24} + r_{27} - 71,$   
 $r_{22} \in \{0, 1, \dots, 9\}, r_{24} \in \{54, 55, \dots, 151\}, r_{27} \in \{0, 1, \dots, 8\},$   
 $r_{26} \in \{0, 1, \dots, 8\}.$

Доказательство. Упрощения формул (+) дают равенства

$$\begin{aligned} [112] &= r_{25}, & [113] &= -r_{25} + 1, & [121] &= r_{23}, & [122] &= -r_{22} - r_{23} + 14, & [123] &= r_{22}, & [131] &= -r_{23} + 1, \\ [132] &= r_{22} + r_{23} - r_{25}, & [133] &= -r_{22} + r_{25} + 8; \\ [212] &= -r_{25} + r_{26} + 7, & [213] &= r_{25} - r_{26} + 7, & [221] &= -r_{27} + 14, & [222] &= -r_{24} + r_{25} - r_{26}, & [223] &= r_{24} - r_{25} + r_{26} + r_{27} - 7, & [231] &= r_{27}, & [232] &= r_{24}, & [233] &= -r_{24} - r_{27} + 152; \\ [312] &= -r_{26} + 9, & [313] &= r_{26}, & [321] &= -r_{23} + r_{27} + 2, & [322] &= r_{22} + r_{23} + r_{24} - r_{25} + r_{26}, & [323] &= -r_{22} - r_{24} + r_{25} - r_{26} - r_{27} + 151, & [331] &= r_{23} - r_{27} + 7, & [332] &= \end{aligned}$$

$$= -r_{22} - r_{23} - r_{24} + r_{25} + 144, [333] = r_{22} + r_{24} - r_{25} + r_{27} - 70,$$

где  $r_{22}, r_{27} \in \{0, 1, \dots, 14\}$ ,  $r_{23} \in \{0, 1, \dots, 7\}$ ,  $r_{24} \in \{0, 1, \dots, 152\}$ ,  $r_{25} \in \{0, 1\}$ ,  $r_{26} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ .

Симметризация. Верны равенства  $[112] = r_{25} = [121]' = r'_{23}$ ,  $[122] = -r_{22} - r_{23} + 14$ , поэтому  $r_{22} + r_{23} = r'_{22} = r'_{23}$ ,

Далее,  $[212] = -r_{25} + r_{26} + 7 = [221]' = -r'_{27} + 14$ , поэтому  $-r_{25} + r_{26} + r'_{27} = 7$ ,  $[233] = -r_{24} - r_{27} + 152$  и  $r_{24} + r_{27} = r'_{24} + r'_{27}$ .

Пусть  $r_{25} = 0$ . Тогда  $r'_{23} = 0$ ,  $r_{22} + r_{23} = r'_{22} = r_{22}$  и  $r_{26} + r'_{27} = 7$ . Отсюда  $r_{23} = 0$  и выполняются равенства (1–3).

Пусть  $r_{25} = 1$ . Тогда  $r'_{23} = 1$ ,  $r_{22} + r_{23} = r'_{22} + 1 = r_{22} + 1$  и  $r_{26} + r'_{27} = 8$ . Отсюда  $r_{23} = 1$  и выполняются равенства (4–6). Лемма доказана.

По лемме 3 имеем  $99 \leq [222] = -r_{24} + r_{25} - r_{26} + 257 \leq 204$ .

**Л е м м а 4.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ . Тогда либо  $r_{16} = 1$  и выполняются равенства:

1)  $[111] = 0, [112] = [121] = 1, [113] = [131] = 0, [122] = 13 - r_{14}, [123] = [132] = r_{14}, [133] = 9 - r_{14}$ ;

2)  $[211] = 1, [212] = [221] = 13 - r_{14}, [213] = [231] = r_{14}, [222] = r_{14} - r_{15} + 250, [223] = [232] = r_{15}, [233] = -r_{14} - r_{15} + 153$ ;

3)  $[311] = 0, [312] = [321] = r_{14}, [313] = [331] = -r_{14} + 9, [322] = r_{15}, [323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153, [333] = 2r_{14} + r_{15} - 81$ ,

либо  $r_{20} = 1$  и выполняются равенства:

4)  $[111] = [112] = [121] = 0, [113] = [131] = 1, [122] = 14 - r_{14}, [123] = [132] = r_{14}, [133] = 8 - r_{14}$ ;

5)  $[211] = 0, [212] = [221] = 14 - r_{14}, [213] = [231] = r_{14}, [222] = r_{14} - r_{15} + 249, [223] = [232] = r_{15}, [233] = -r_{14} - r_{15} + 153$ ;

6)  $[311] = 1, [312] = [321] = r_{14}, [313] = [331] = -r_{14} + 8, [322] = r_{15}, [323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153, [333] = 2r_{14} + r_{15} - 80$ ,

либо  $r_{16} = r_{20} = 0$  и выполняются равенства:

7)  $[111] = 1, [112] = [121] = [113] = [131] = 0, [122] = 14 - r_{14}, [123] = [132] = r_{14}, [133] = 9 - r_{14}$ ;

8)  $[211] = 0, [212] = [221] = 14 - r_{14}, [213] = [231] = r_{14}, [222] = r_{14} - r_{15} + 249, [223] = [232] = r_{15}, [233] = -r_{14} - r_{15} = 153$ ;

9)  $[311] = 0, [312] = [321] = r_{14}, [313] = [331] = -r_{14} + 9, [322] = r_{15}, [323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153, [333] = 2r_{14} + r_{15} - 81$ ,

где  $r_{14} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $r_{15} \in \{63, 64, \dots, 153\}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Упрощения формул (+) дают равенства

$$[111] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{18} - r_{20} + r_{21} + 1, [112] = r_{16}, [113] = r_{14} + r_{15} - r_{18} + r_{20} - r_{21}, [121] = r_{19}, [122] = r_{17}, [123] = -r_{17} - r_{19} + 14,$$

$$[131] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{19} + r_{20} - r_{21}, [132] = -r_{16} - r_{17} + 14, [133] = -r_{14} - r_{15} + r_{17} + r_{18} + r_{19} - r_{20} + r_{21} - 5;$$

$$[211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}, [212] = -r_{14} - r_{16} + 14, [213] = -r_{15} + r_{18} + r_{21}, [221] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{21} + 14, [222] = r_{14} + r_{16} - r_{21} + 249, [223] = r_{15}, [231] = r_{18}, [232] = r_{21}, [233] = -r_{18} - r_{21} + 153;$$

$$[311] = r_{20}, [312] = r_{14}, [313] = -r_{14} - r_{20} + 9, [321] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{19} - r_{21}, [322] = -r_{14} - r_{16} - r_{17} + r_{21} + 14, [323] = -r_{15} + r_{17} + r_{19} + 139, [331] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{19} - r_{20} + r_{21} + 9, [332] = r_{16} + r_{17} - r_{21} + 139, [333] = r_{14} + r_{15} - r_{17} - r_{19} + r_{20} - 67,$$

где  $r_{14}, r_{20} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $r_{15} \in \{0, 1, \dots, 167\}$ ,  $r_{16}, r_{17}, r_{19} \in \{0, 1, \dots, 14\}$ ,  $r_{18}, r_{21} \in \{0, 1, \dots, 153\}$ .

Симметризация. Верны равенства  $[112] = r_{16} = r_{16}^*$ ,  $[121] = r_{19} = r_{19}^{\sim}, r_{16} = r_{19}^{\sim}, [122] = r_{17} = r_{17}^{\sim}, [223] = r_{15} = r_{15}^*, [232] = r_{21} = r_{21}^{\sim}, [311] = r_{20} = r_{20}^{\sim}, [231] = r_{18}, [312] = r_{14}$  и  $r_{18}^* = r_{14}^*$ .

Так как  $[112] = r_{16} = r_{16}^*$ , то  $r_{16}^{\sim} = r_{16}^*$ , поэтому  $[121]^* = r_{19}^* = [211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}$  и  $r_{14} + r_{15} + r_{16} = r_{18} + r_{19} + r_{21}$ . Аналогично,  $[121] = r_{19} = r_{19}^{\sim}$  влечет  $r_{19}^* = r_{19}^{\sim}$ , поэтому  $[112] = r_{16} = [211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}$  и  $r_{16} = r_{19}$ . Отсюда  $r_{16} = r_{19}^* = r_{16}^* = r_{16}^{\sim}$  и  $r_{19} = r_{19}^{\sim} = r_{19}^* = r_{19}^{\sim}$ .

Далее,  $[122] = r_{17} = r_{17}^{\sim}$  влечет  $r_{17}^* = r_{17}^{\sim}$ , поэтому  $[212] = -r_{14} - r_{16} + 14 = [221]' = -r'_{14} - r'_{15} - r'_{16} + r'_{21} + 14$  и  $r_{15} = r_{21}$ . Теперь из равенства  $r_{14} + r_{15} + r_{16} = r_{18} + r_{19} + r_{21}$  следует, что  $r_{14} = r_{18}$ . Аналогично,  $[223] = r_{15} = r_{15}^*$  влечет  $r_{15}^{\sim} = r_{15}^*$ , следовательно,  $[232] = r_{21} = [322] = -r_{14} - r_{16} - r_{17} + r_{21} + 14$  и  $r_{14} + r_{16} + r_{17} = 14$ .

Отсюда следуют равенства

$$[111] = -r_{16} - r_{20} + 1, [112] = [121] = r_{16}, [113] = [131] = r_{20}, [122] = r_{17}, [123] = [132] = r_{14}, [133] = 9 - r_{14} - r_{20};$$

$$[211] = r_{16}, [212] = [221] = r_{17}, [213] = [231] = r_{14}, [222] = -r_{17} - r_{15} + 263, [223] = [232] = r_{15}, [233] = -r_{14} - r_{15} + 153;$$

$$[311] = r_{20}, [312] = [321] = r_{14}, [313] = [331] = -r_{14} - r_{20} + 9, [322] = r_{15}, [323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153, [333] = 2r_{14} + r_{15} + r_{20} - 81,$$



где  $r_{16} + r_{20} \leq 1$ ,  $r_{14} + r_{20} \leq 9$ ,  $r_{14} + r_{15} \leq 153$ ,  $r_{15} + r_{17} \leq 167$ .

Допустим, что  $r_{16} = 1$ . Тогда  $r_{20} = 0$ ,  $r_{14} + r_{17} = 13$  и выполняются равенства из пунктов (1)–(3) заключения леммы 4.

Допустим, что  $r_{20} = 1$ . Тогда  $r_{16} = 0$ ,  $r_{14} + r_{17} = 14$  и выполняются равенства из пунктов (4)–(6) заключения леммы 4.

Допустим, что  $r_{20} = r_{16} = 0$ . Тогда  $r_{14} + r_{17} = 14$  и выполняются равенства из пунктов (7)–(9) заключения леммы 4. Лемма 4 доказана.

По лемме 4 имеем  $96 \leq [222] \leq 190$ .

Пусть  $d(u, v) = 2$ . Подсчитаем число  $g$  пар вершин  $u, z$  на расстоянии 2 в графе  $\Gamma$ , где  $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$  и  $z \in \begin{Bmatrix} 22 \end{Bmatrix}$ . С одной стороны,  $p_{21}^2 = 14$ , по лемме 2

имеем  $[212] = -r_5 + r_6 + r_7 - 135 \leq 95$  ( $r_5 \in \{0, 1\}$ ,  $r_6 \in \{0, 1, \dots, 81\}$ ,  $r_7 \in \{63, 64, \dots, 149\}$ ) и  $g \leq 1330$ . С другой стороны,  $p_{22}^2 = 264$ , по лемме 4 имеем  $[212] = 14 - r_{14}$  и  $g = 3696 - \sum_i r_{14}^i \leq 1330$ . Поэтому  $2366 \leq \sum_i r_{14}^i$  и  $10.1 \leq \sum_i r_{14}^i / 264$ . Противоречие с тем, что  $r_{14} \leq 9$ .

Полученное противоречие завершает доказательство следствия 1.

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ . Тогда число вершин равно  $(b^2-b+1)(b^2+1)$ ,  $\Gamma$  имеет спектр  $(b^3-b^2)/2^1, (b^2-b)/2^{(b^2-b+1)b}, (-b \pm \sqrt{b^3-b^2+b})/2^{(b^2-b+2)(b-1)b/2}$ , и дуальную матрицу  $Q$  собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & (b^2-b+1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b \\ 1 & b^2-b+1 & -\frac{(b^2-b+2)(b-\sqrt{b^3-b^2+b})}{2b} & -\frac{(b^2-b+2)(b+\sqrt{b^3-b^2+b})}{2b} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} \\ 1 & -b^2+b-1 & \frac{1}{2}(b+\sqrt{b^3-b^2+b})(b-1) & \frac{1}{2}(b-\sqrt{b^3-b^2+b})(b-1) \end{pmatrix}.$$

**Лемма 5.** Для чисел пересечений графа  $\Gamma$  верны равенства

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= (b-3)b/2, p_{21}^1 = (b^2-b+2)(b-1)/2, \\ p_{32}^1 &= (b^2-b+2)(b-1)/2, p_{22}^1 = (b^2-b+2)(b-1)^2, \\ p_{33}^1 &= (b^2-b+2)/2; \\ p_{11}^2 &= (b-1)b/4, p_{12}^2 = (b-1)^2b/2, p_{13}^2 = (b-1)b/4, \\ p_{22}^2 &= b^4-3b^3+5b^2-4b-1, p_{23}^2 = (b^2-2b+3)b/2, \\ p_{33}^2 &= (b-1)b/4; \\ p_{12}^3 &= (b-1)^2b/2, p_{13}^3 = (b-1)b/2, \\ p_{22}^3 &= (b^2-2b+3)(b-1)b, p_{23}^3 = (b-1)^2b/2, \\ p_{33}^3 &= b-1. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ ,  $[ijh] = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ .

**Лемма 6.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2$ ,  $d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [111] &= b^4-7b^3/2+13b^2/2-6b-r_2-r_3-r_4, [121] = \\ &= [211] = -b^4+7b^3/2-25b^2/4+23b/4+r_2+r_3+r_4, \\ [122] &= b^4-7b^3/2+13b^2/2-7b-r_1-r_2-r_3+1, \\ [123] &= [132] = b^3/2-5b^2/4+7b/4+r_1-r_4-1, [133] = \\ &= -b^3/2+3b^2/2-2b-r_1+r_4+1; \\ [211] &= -b^4+7b^3/2-6b^2+9b/2+r_3+r_4, [212] = \\ &= [221] = b^4-3b^3+5b^2-4b-r_3-r_4-1, [222] = r_3, \\ [223] &= [232] = r_4, [233] = b^3/2-b^2+3b/2-r_4; \\ [311] &= r_2, [312] = [321] = b^2/4-b/4-r_2, [322] = \\ &= b^3/2-3b^2/2+2b+r_1+r_2, [323] = [332] = b^2/4- \\ &-b/4-r_1, [333] = r_1. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 6 имеем  $[233] = b^3/2 - b^2 + 3b/2 - r_4 \geq 0$ , поэтому  $[222] = r_4 \leq b^3/2 - b^2 + 3b/2$ .

Положим  $\Delta = \Gamma_2(u)$ ,  $\Lambda = \Delta_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени  $p_{22}^2 = b^4 - 3b^3 + 5b^2 - 4b - 1$  на  $k_2 = (b^2 - b + 2)(b^2 - b) = b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 2b$  вершинах. Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2$ ,  $d(v, w) = 1$ . Тогда

$\Lambda(v) \cap \Lambda(w)$  содержит не менее  $b^4 - 4b^3 + 7b^2 - 6b - 1$  вершин. Поэтому  $b^4 - 4b^3 + 7b^2 - 6b - 1 \leq b^3/2 - b^2 + 3b/2$  и  $b^4 + 8b^2 \leq 9b^3/2 + 15b/2 + 1$ . Отсюда  $b \leq 4$ .

Но в случае  $b = 3$  имеем  $b^4 + 8b^2 = 153$ ,  $9b^3/2 + 15b/2 + 1 = 121.5 + 22.5 + 1 = 145$ , противоречие. Аналогично, в случае  $b = 4$  имеем  $b^4 + 8b^2 = 256 + 128 = 384$ ,  $9b^3/2 + 15b/2 + 1 = 288 + 30 + 1 = 319$ , противоречие.

Теорема 2 доказана.

Пусть  $\Gamma$  является графом Шилла с массивом пересечений  $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ . Многочлен Тервелигера (см. [7]) графа  $\Gamma$  равен  $-s(s^3 - s^2 - s - x - 1)(s^3 - sx - s - x - 1)(s + x + 1)(x + 1)$ , поэтому собственные значения локального подграфа принадлежат  $[-s - 1, -1] \cup [(s^3 - s - 1)/(s + 1), s^3 - s^2 - s - 1]$ . С другой стороны, по предложению 4.4.3 из [1] собственные значения локального подграфа принадлежат отрезку  $[-s^4/(s^3 - 1) - 1, s^4/(s^2 + s + 1) - 1]$ .

Положим  $A = (s^3 - s - 1)/(s + 1)$ ,  $B = s^4/(s^2 + s + 1) - 1$ . Тогда  $B - A = (s^4(s + 1) - (s^3 - s - 1)(s^2 + s + 1) - (s + 1)(s^2 + s + 1))/((s + 1)(s^2 + s + 1)) = -s^3/((s + 1)(s^2 + s + 1)) < 0$ , поэтому  $B < A$  и все неглавные собственные значения локального подграфа отрицательны. Отсюда локальный подграф является объединением изолированных  $(a_1 + 1)$ -

клик. Противоречие с тем, что  $a_1 + 1 = s^3 - s - 1$  не делит  $k = (s + 1)(s^3 - 1)$ .

Теорема 3 доказана.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. В., Heidelberg, N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 489 p.
2. *Koolen J.H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // *Eur. J. Comb.* 2010. V. 31. P. 2064–2073.
3. *Махнев А.А., Нирова М.С.* Дистанционно-регулярные графы Шилла // *Мат. заметки.* 2018. Т. 103, вып. 5. С. 730–744.
4. *Belousov I.N., Makhnev A.A.* To the theory of Shilla graphs with  $b_2 = c_2$  // *Sib. Electron. Math. Reports.* 2017. V. 14. P. 1135–1146.
5. *Белусов И.Н.* Дистанционно-регулярные графы Шилла с  $b_2 = sc_2$  // *Труды ИММ УрО РАН.* 2018. Т. 24. № 3. С. 16–26.
6. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // *J. Comb. Theory, Series A.* 2008. V. 115. P. 1086–1095.
7. *Gavrilyuk A., Koolen J.* A characterization of the graphs of bilinear  $d \times d$ -forms over  $F_2$  // *Combinatorica.* 2019. V. 39. № 2. P. 289–321.

## THREE INFINITE FAMILIES OF SHILLA GRAPHS DO NOT EXIST

Corresponding Member of the RAS A. A. Makhnev<sup>a</sup>, I. N. Belousov<sup>a</sup>,  
M. P. Golubyatnikov<sup>a</sup>, and M. S. Nirova<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Berbekov Kabardino-Balkarskii State University, Nalchik, Russian Federation*

Distance-regular graph of diameter 3 with the second eigenvalue  $\theta_1 = a_3$  is called Shilla graph. For the Shilla graph  $\Gamma$  the number  $a = a_3$  divides  $k$  and we set  $b = b(\Gamma) = k/a$ . Early three infinite families of Shilla graphs were founded:  $\{b(b^2 - 1), b^2(b - 1), b^2; 1, 1, (b^2 - 1)(b - 1)\}$  (I.N. Belousov),  $\{b^2(b - 1)/2, (b - 1)(b^2 - b + 2)/2, b(b - 1)/4; 1, b(b - 1)/4, b(b - 1)^2/2\}$  (Koolen, Park) and  $\{(s + 1)(s^3 - 1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3 - 1)\}$  (I.N. Belousov). In this paper it is proved that in the first series there exist the unique graph — generalized hexagon of order 2, in the second and in the third series there graphs no exist.

*Keywords:* distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers

УДК 517.545+517.962.2+519.173

## О ТЕОРЕМЕ ПЛАНСА И ПЕРИОДИЧНОСТИ ЯКОБИАНОВ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

© 2021 г. А. Д. Медных<sup>1,2</sup>, И. А. Медных<sup>1,2,\*</sup>

Представлено академиком РАН Ю. Г. Решетняком 04.03.2021 г.

Поступило 10.03.2021 г.

После доработки 10.03.2021 г.

Принято к публикации 18.03.2021 г.

Теорема Планса утверждает, что первая группа гомологий  $n$ -листного циклического накрытия трехмерной сферы, разветвленного над заданным узлом, является прямой суммой двух экземпляров абелевой группы, если  $n$  – нечетно. Этот же результат верен для гомологий четно-листных накрытий, профакторизованных по группе гомологий 2-листного накрытия. Цель настоящего сообщения – установить аналогичные результаты для якобианов (критических групп) циркулянтных графов. Будет установлено также, что якобианы циркулянтных графов на  $n$  вершинах, приведенные по заданной конечной абелевой группе, являются периодическими функциями от  $n$ .

*Ключевые слова:* полином Александера, узел, разветвленное накрытие узла, циркулянтный граф, критическая группа, циклическое накрытие, группа гомологий

DOI: 10.31857/S2686954321030127

Пусть  $G$  – связный конечный граф на  $h$  вершинах. Обозначим через  $D(G)$  диагональную матрицу, составленную из валентностей вершин  $G$ , а через  $A(G)$  – матрицу смежности графа  $G$ . Матрица  $L(G) = D(G) - A(G)$  называется матрицей Лапласа графа  $G$ . Отметим, что  $L(G)$  представляет из себя симметрическую матрицу размером  $h \times h$ , все собственные значения которой, за исключением одного нулевого, – положительны. Якобиан  $Jac(G)$  графа  $G$  определим как группу кручения коядра  $\mathbb{Z}$ -линейного оператора  $L(G): \mathbb{Z}^h \rightarrow \mathbb{Z}^h$ . Конусом  $\hat{G}$  над графом  $G$  назовем соединение  $\{v\} \star G$  одноточечного графа  $\{v\}$  с графом  $G$ , т.е. граф, в котором вершина  $v$  соединена единственным ребром с каждой из вершин графа  $G$ .

Известно, что  $Jac(\hat{G})$  и коядро оператора  $I + L(G)$  изоморфны ([1, замечание 3]), [2]. Отсюда,  $Jac(\hat{G})$ , как абелева группа, задается невырожденной матрицей  $I + L(G)$ . Определитель этой матрицы является важным инвариантом и совпадает с числом отмеченных остовных лесов в  $G$ .

Пусть  $s_1, s_2, \dots, s_k$  – целые неотрицательные числа. Циркулянтным графом  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  на  $n$  вершинах  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  называется мультиграф, у которого вершина  $i, 0 \leq i \leq n - 1$ , соединена ребром с каждой из вершин  $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod{n}$ . При этом все вершины графа имеют четную валентность  $2k$ .

В данной работе мы устанавливаем параллель между результатами, описывающими гомологии разветвленных циклических накрытий над узлами и теорией сложности циклических накрытий над графами.

Для удобства читателя приведем следующий глоссарий, позволяющий устанавливать соответствие между объектами из теории узлов и их аналогами в теории графов:

узел  $K$  в сфере  $\mathbb{S}^3$  соответствует вершине  $v$  конуса  $\hat{G} = \{v\} \star G$ ;

дополнение узла  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  соответствует графу  $G$ ;

накрытие многообразия  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  соответствует накрытию графа  $G$ ;

полином Александера узла  $K$  соответствует ассоциированному полиному Лорана графа  $G$ ;

циклическое накрытие  $M_n$  сферы  $\mathbb{S}^3$ , разветвленное над  $K$ , соответствует циклическому накрытию  $\hat{G}_n$  конуса  $\hat{G} = \{v\} \star G$ , разветвленному над  $v$ ;

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск, Россия

\*E-mail: ilyamednykh@mail.ru

группа гомологий  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$  соответствует якобиану  $Jac(\hat{G}_n)$ .

### 1. ТЕОРЕМА ПЛАНСА ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

Наиболее просто теорема Планса для графов формулируется в случае, когда  $G$  – граф с одной вершиной и  $k$  петлями. В этом случае  $G_n$  – циркулярный граф вида  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ , а  $\hat{G}_n$  – конус над ним.

**Теорема 1.** Пусть  $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  – циркулярный граф на  $n$  вершинах, а  $\hat{G}_n$  – конус над ним. Тогда для любого нечетного  $n$  группа  $Jac(\hat{G}_n)$  является прямой суммой двух экземпляров конечной абелевой группы. Если  $n$  – четно, то группа  $Jac(\hat{G}_2)$  естественным образом вкладывается в группу  $Jac(\hat{G}_n)$ , а фактор группа  $Jac(\hat{G}_n)/Jac(\hat{G}_2)$  представляется в виде прямой суммы двух экземпляров конечной абелевой группы.

Доказательство основано на следующих соображениях. Рассмотрим ассоциированный с графом  $G_n$  полином Лорана  $L(z) = 2k - \sum_{j=1}^k (z^{s_j} + z^{-s_j})$ .

Воспользуемся тем, что абелева группа  $Jac(\hat{G}_n)$  представима невырожденной матрицей  $I + L(G_n)$ . Напомним [3], что лапласиан циркулярного графа  $G_n$  имеет вид  $L(G_n) = L(T_n)$ , где  $T_n$  – циркулярная  $n \times n$  матрица вида  $T_n = circ(0, 1, 0, \dots, 0)$ . Отсюда  $I + L(G_n) = A(T_n)$ , где  $A(z) = 1 + L(z)$ . Отметим, что  $A(z)$  – полином Лорана с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющий условиям  $A(z) = A\left(\frac{1}{z}\right)$  и  $A(1) = 1$ . Следовательно [4],  $A(z)$  является полиномом Александра некоторого узла  $K$ . Пусть  $M_n$  – семейство циклических накрытий сферы  $S^3$ , разветвленных над узлом  $K$ . Согласно [4], группа гомологий  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$  вычисляется как  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\langle A(t), t^n - 1 \rangle$ , где  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  – кольцо лорановских полиномов от  $t$  с целочисленными коэффициентами. Поэтому (см., например [5, лемма 3.2]),  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$  как абелева группа задается матрицей  $A(T_n)$ . Отсюда группы  $Jac(\hat{G}_n)$  и  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$  изоморфны. Следовательно, утверждения теоремы 1 о разложении якобиана в прямую сумму двух экземпляров абелевой группы следуют из теоремы Планса [6], современное доказательство которой можно найти в [7] и [8].

Заметим, что  $\det(A(T_n))$  совпадает с числом отмеченных остовных лесов в графе  $G_n$  и, следовательно, всегда отличен от нуля. Это означает, что

$Jac(\hat{G}_n)$  – конечная абелева группа, как и прямые сомножители, на которые она раскладывается.

Важно отметить, что в случае произвольного узла  $K$  группа  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$  не обязательно конечна [7].

Теорема 1 и ее доказательство без существенных изменений могут быть перенесены на обобщенные графы Петерсена,  $I$ -графы, сэндвичи циркулярных графов и другие классы полициркулярных графов.

### 2. ТЕОРЕМЫ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ ГОМОЛОГИЙ И ЯКОБИАНОВ

В текущем разделе приводятся известные результаты о периодичности групп гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_m$  или, более обще, в произвольной конечной абелевой группе  $\mathbb{A}$ , и устанавливаются их аналоги для якобианов графов.

Известно, что группы гомологий  $n$ -листных разветвленных накрытий над узлом, вычисленные с коэффициентами в заданной циклической группе  $\mathbb{Z}_m$ , образуют периодическую последовательность. Следуя [8], представим это утверждение в более общей форме. Пусть  $M_n$  – последовательность  $n$ -листных циклических накрытий, разветвленных над заданным узлом, и  $\mathbb{A}$  – конечная абелева группа. Тогда последовательность групп гомологий  $H_1(M_n, \mathbb{A})$  с коэффициентами в группе  $\mathbb{A}$  – периодична. Аналогичная теорема имеет место и для неразветвленных накрытий дополнения узла до гомологической сферы [9]. Напомним, что по универсальной теореме о коэффициентах  $H_1(M_n, \mathbb{A}) = H_1(M_n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{A}$ .

Для формулировки аналогичного утверждения для графов назовем приведенным якобианом  $Jac_{\mathbb{A}}(G)$  графа  $G$  по абелевой группе  $\mathbb{A}$  группу, заданную тензорным произведением  $Jac(G) \otimes \mathbb{A}$ .

Представим конечную абелеву группу  $\mathbb{A}$  в виде примарного произведения  $\mathbb{Z}_{q_1} \oplus \mathbb{Z}_{q_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_k}$ , где  $q_1, q_2, \dots, q_k$  – подходящие степени простых чисел, и положим  $Jac_q(G) = Jac(G) \otimes \mathbb{Z}_q$ . Тогда приведенный якобиан  $Jac_{\mathbb{A}}(G)$  графа  $G$  по группе  $\mathbb{A}$  равен  $Jac_{q_1}(G) \oplus Jac_{q_2}(G) \oplus \dots \oplus Jac_{q_k}(G)$ .

Отметим, что приведенные якобианы играют важную роль в дискретной теории динамических систем [10].

Имеет место следующая теорема. Приведенное ниже доказательство достаточно элементарно и не опирается на теорию гомологий. Однако использованные в нем идеи, несомненно, могут быть применены и для доказательства периодичности групп гомологий.

**Теорема 2.** Пусть  $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – последовательность циркулянтных графов, а  $\hat{G}_n$  – соответствующая ей последовательность конусов. Предположим, что  $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{k-1} < s_k$ .

Пусть  $\mathbb{A}$  – произвольная конечная абелева группа. Тогда последовательности приведенных по группе  $\mathbb{A}$  якобианов  $Jac_{\mathbb{A}}(G_n)$  и  $Jac_{\mathbb{A}}(\hat{G}_n)$  – периодичны.

Доказательство теоремы 2 проводится по следующей схеме. Поскольку группа  $\mathbb{A}$  разлагается в конечную прямую сумму примарных циклических групп, первое утверждение теоремы достаточно доказать для случая  $\mathbb{A} = Jac_q(G_n)$ , где  $q = p^k$  – положительная степень простого числа  $p$ . Рассмотрим

полином Лорана  $L(z) = 2k - \sum_{j=1}^k (z^{s_j} + z^{-s_j})$ , ассоциированный с графом  $G_n$ . Пусть  $\mathcal{A}$  – его сопровождающая матрица вида  $\begin{pmatrix} 0 & | & I_{2s_k-1} \\ \hline & & \ell \end{pmatrix}$ , где строка  $\ell$  имеет вид  $(\epsilon_{s_k}, \epsilon_{s_k-1}, \dots, \epsilon_1, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{s_k-1})$ , где  $\epsilon_i$  равен коэффициенту полинома  $L(z)$  при  $z^i$ .

Тогда по теореме 2.1 из [3] якобиан графа  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  изоморфен группе кручения коядра оператора  $\mathcal{A}^n - I_s: \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}^s$ , где  $s = 2s_k$ . Указанное коядро – это абелева группа, представимая матрицей  $\mathcal{A}^n - I_s = \{a_{i,j}(n)\}_{i,j=1,\dots,s}$ . Отметим, что обе матрицы  $\mathcal{A}$  и  $I_s$  удовлетворяют уравнению  $P(z) = 0$ , где

$$P(z) = L(z)(1 - z) = z^{-s_k} (z^{s+1} + p_1 z^s + \dots + p_s z + 1)$$

есть полином Лорана с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Отсюда непосредственно следует, что матрица  $\mathcal{A}^n - I_s$  и каждый из ее коэффициентов  $a_{i,j}(n)$  удовлетворяют разностному уравнению

$$u(n + s + 1) + p_1 u(n + s) + \dots + p_s u(n + 1) + u(n) = 0. \tag{1}$$

Таким образом, при фиксированных  $i$  и  $j$  коэффициенты  $a_{i,j}(n)$  образуют линейную рекуррентную последовательность. Хорошо известно [11], что линейная рекуррентная последовательность, взятая по любому модулю  $m$ , – периодична. При этом [12] ее период эффективно выражается через число  $m$  и коэффициенты полинома  $P(z)$ . Воспользуемся равенством  $\text{coker}(\mathcal{A}^n - I_s) = Jac(G_n) \oplus \mathbb{Z}$  и заметим, что абелева группа  $\text{coker}(\mathcal{A}^n - I_s) \oplus \mathbb{Z}_q = Jac_q(G_n) \oplus \mathbb{Z}_q$  задается матрицей  $\{(a_{i,j}(n), q)\}_{i,j=1,\dots,s}$ , где  $(a_{i,j}(n), q)$  – наибольший общий делитель  $a_{i,j}(n)$  и  $q$ . Тогда ее периодичность,

равно как и периодичность группы  $Jac_q(G_n)$ , обеспечиваются следующей леммой.

**Лемма 1.** Пусть  $q$  – целое положительное число, а  $u(n)$  – линейная рекурсивная последовательность, удовлетворяющая уравнению (1). Тогда последовательность  $(u(n), q)$  периодична по  $n$ .

Для доказательства леммы воспользуемся периодичностью последовательности  $u(n)$  по модулю  $q$ . Тогда найдется период  $m$  такой, что для всех натуральных  $n$  имеет место сравнение  $u(n + m) \equiv u(n) \pmod q$ . Отсюда для некоторых целых  $d(n)$  справедливы равенства  $u(n + m) = u(n) + d(n)q$ . Следовательно,  $(u(n + m), q) = (u(n) + d(n)q, q) = (u(n), q)$ , т.е. последовательность  $(u(n), q)$  периодична с периодом  $m$ .

Второе утверждение теоремы доказывается по той же схеме с заменой лорановского полинома  $L(z)$  на  $1 + L(z)$ .

Теорема 2 и идея ее доказательства могут быть перенесены на широкий класс полициркулянтных графов, включающих в себя обобщенные графы Петерсена,  $I$ -,  $Y$ -,  $H$ -графы и, более обще, на дискретные расслоения Зейферта, рассмотренные в работе [13].

### 3. ПРИМЕРЫ

1. Циклический граф  $G_n = C_n$ . В этом случае якобиан конуса  $\hat{G}_n$  имеет вид  $Jac(\hat{G}_n) = \mathbb{Z}_{L_m} \oplus \mathbb{Z}_{L_m}$ , если  $n = 2m + 1$  нечетно, и  $Jac(\hat{G}_n) = \mathbb{Z}_{F_m} \oplus \mathbb{Z}_{5F_m}$ , если  $n = 2m$  четно. Здесь  $L_m$  и  $F_m$  – это числа Люка и Фибоначчи соответственно. Заметим, что сопровождающий полином графа  $\hat{G}_n$  равен  $-z^{-1} + 3 - z$  и совпадает с полиномом Александра узла “восьмерка”. Хорошо известно [14, 15], что группа гомологий  $n$ -листного циклического накрытия трехмерной сферы  $S^3$ , разветвленного над узлом “восьмерка”, совпадает с указанной выше абелевой группой.

2. Граф  $G_n = C_n(1, 2)$ . Напомним, что [3] якобианы данного семейства графов заданы формулой  $Jac(C_n(1, 2)) = \mathbb{Z}_{\text{НОД}(n, F_n)} \oplus \mathbb{Z}_{F_n} \oplus \mathbb{Z}_{\text{НОК}(n, F_n)}$ , где  $F_n$  – это числа Фибоначчи. Для нахождения якобиана конуса  $Jac(\hat{G}_n)$  введем в рассмотрение две последовательности  $s(n)$  и  $t(n)$ , удовлетворяющие единому рекуррентному соотношению

**Таблица 1**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$s(n)$	0	2	2	17	12	162	103	1395
$t(n)$	0	0	0	3	2	30	19	259

$$u(n) - 17u(n+2) + 34u(n+4) - 12u(n+6) + u(n+8) = 0$$

и начальным данным, приведенным в табл. 1.

Тогда теорема 1 позволяет установить, что группа  $Jac(\hat{G}_n)$  в случае нечетного  $n$  и фактор-группа  $Jac(\hat{G}_n)/Jac(\hat{G}_2)$  в случае четного  $n$  разлагаются в прямую сумму абелевых групп  $H_n \oplus H_n$ , где  $H_n \cong \mathbb{Z}_{\alpha(n)} \oplus \mathbb{Z}_{\beta(n)}$ ,  $\alpha(n) = \text{НОД}\left(t(n), \frac{s(n)+t(n)}{2}\right)$ ,  $\beta(n) = \frac{s(n)^2 - 29t(n)^2}{4\alpha(n)}$  и  $Jac(\hat{G}_2) \cong \mathbb{Z}_5$ .

В качестве иллюстрации теоремы 2 заметим, что периоды последовательностей приведенных якобианов  $Jac(G_n) \otimes \mathbb{Z}_6$  и  $Jac(\hat{G}_n) \otimes \mathbb{Z}_6$  равны 12 и 5, а периоды последовательностей  $Jac(G_n) \otimes \mathbb{Z}_7$  и  $Jac(\hat{G}_n) \otimes \mathbb{Z}_7$  равны 56 и 12.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goel G., Perkinson D.* // Linear Algebra Appl. 2019. V. 567. P. 138–142.
2. *Grunwald L.A., Mednykh I.A.* // On complexity and Jacobian of cone over a graph. Preprint. 2020. arXiv:2004.07452 [math.CO].
3. *Медных А.Д., Медных И.А.* // ДАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 539–543.
4. *Kawauchi A.* // A survey of knot theory. Basel: Birkhauser Verlag, 1996.
5. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* // Linear Algebra Appl. 2017. V. 529. P. 355–373.
6. *Plans A.* // Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Natur. Madrid. 1953. V. 47. P. 161–193.
7. *Gordon C.McA.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 85–87.
8. *Stevens W.H.* // On the Homology of Branched Cyclic Covers of Knots. Louisiana State University. PhD thesis. (1996). [https://digitalcommons.lsu.edu/grad-school\\_disstheses/6282](https://digitalcommons.lsu.edu/grad-school_disstheses/6282)
9. *Sakuma M.* // Can. J. Math. 1995. V. 47. No 1. P. 201–224.
10. *Neumärker N.* // The Arithmetic Structure of Discrete Dynamical Systems on the Torus. PhD thesis. Univ. Bielefeld, 2012.
11. *Carmichael R.D.* // Quart. J. Pure Appl. Math. 1920. V. 48. P. 343–372.
12. *Ward M.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35. P. 600–628.
13. *Квон Ё.С., Медных А.Д., Медных И.А.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 411–415.
14. *Fox R.H.* // Ann. Math. 1960. V. 71. № 1. P. 187–196.
15. *Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L.* // J. Lie Theory. 1998. V. 8. № 1. P. 1–23.

## PLANS' PERIODICITY THEOREM FOR JACOBIAN OF CIRCULANT GRAPHS

A. D. Mednykh<sup>a,b</sup> and I. A. Mednykh<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>b</sup> Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

Plans theorem states that for  $n$  odd the first homology group of the  $n$ -fold cyclic covering of the three-dimensional sphere branched over a knot is the direct product of two copies of an Abelian group. A similar statement holds for even  $n$ . In this case, one has to factorize the homology group of  $n$ -fold covering by the homology group of two-fold covering of the knot. The aim of this note is to establish the similar results for Jacobians (critical group) of a circulant graph. Moreover, it is shown that the Jacobian group of a circulant graph on  $n$  vertices reduced module a given finite Abelian group is a periodic function of  $n$ .

**Keywords:** Alexander polynomial, knot, knot branched covering, circulant graph, critical group, sandpile group, cyclic covering, homology group

УДК 519.245

## НОВЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ СТОХАСТИЧНОСТИ СРЕДЫ НА ПЕРЕНОС ЧАСТИЦ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН Г. А. Михайлов<sup>1,2,\*</sup>, И. Н. Медведев<sup>1,2,\*\*</sup>

Поступило 15.03.2021 г.

После доработки 16.03.2021 г.

Принято к публикации 04.04.2021 г.

Новый корреляционно рандомизированный алгоритм строится путем несложной рандомизации алгоритма максимального сечения (выравнивания, дельта-рассеяния) с использованием одномерного распределения и корреляционной длины случайной среды. Значение этого параметра можно корректировать с помощью простых тестовых исследований. Проведенные расчеты подтвердили практическую эффективность нового алгоритма.

*Ключевые слова:* корреляционно рандомизированный алгоритм, корреляционная длина, стохастическая среда, метод максимального сечения, перенос гамма-квантов, трудоемкость алгоритма

DOI: 10.31857/S2686954321030139

1. Рассматривается односкоростной (для краткости изложения) процесс переноса частиц (квантов излучения), математическая модель которого определяется кинетическим уравнением [1, 2]

$$(\omega, \text{grad}\Phi) + \rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \int \rho(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r})w(\omega, \omega'; \mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \omega')d\omega' + \Phi_0(\mathbf{r}, \omega). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r} \in R^3$ ,  $\omega$  – единичный вектор направления скорости,  $\Phi(\mathbf{r}, \omega)$  – плотность потока частиц-квантов;  $\rho(\mathbf{r})$  – плотность среды,  $\rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})$  – коэффициент ослабления (полное сечение),  $\rho(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r})$  – сечение рассеяния,  $\Phi_0(\mathbf{r}, \omega)$  – плотность распределения частиц в источнике,  $w(\omega, \omega'; \mathbf{r})$  – индикатриса рассеяния кванта в точке  $\mathbf{r}$ . Для решения задач переноса численно-статистически моделируется цепь Маркова столкновений частицы с элементами вещества, свободный пробег  $l$  между которыми распределен с плотностью  $f(l) = \rho(\mathbf{r}(l))\sigma(\mathbf{r}(l))\exp(-\tau(l))$ , где  $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}' + l\omega$ , а  $\tau(l) = \int_0^l \rho(\mathbf{r}(t))\sigma(\mathbf{r}(t))dt$  [3, 2]. Если  $\rho\sigma \equiv \text{const}$ , то про-

бег можно моделировать по формуле  $l = \frac{-\ln \alpha}{\rho\sigma}$ , где  $\alpha$  – случайное число, равномерно распределенное в интервале (0, 1). Если же плотность среды существенно меняется, то может быть полезным метод максимального сечения (выравнивания, дельта-рассеяния) [4–6]. Этот метод основан на том, что в уравнении (1)  $\rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})$  заменяется на  $\sigma_{\max} \geq \rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})$  и в точке столкновения с вероятностью  $\frac{\sigma_{\max} - \rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})}{\sigma_{\max}}$  частица не меняет скорость,

т.е. реализуется индикатриса  $w(\omega, \omega'; \mathbf{r}) \equiv \delta(\omega - \omega')$ . Адекватность метода следует из уравнения (1), а также из известного свойства сохранения пуассоновости при случайном прореживании пуассоновского потока столкновений [6].

2. Рассматриваемый метод применяется для решения стохастических задач теории переноса со случайным полем  $\rho(\mathbf{r})$ , которое для простоты изложения в основном будем предполагать изотропным с нормированной корреляционной функцией  $k(r)$  и корреляционной длиной (корреляционным радиусом)  $L = \int_0^\infty k(r)dr$ . Предполагается, что при этом

$\sigma(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\sigma$ . Для решения стохастических задач теории переноса эффективен “метод двойной рандомизации” [7], в котором для каждой реализации среды моделируется одна или несколько (для уменьшения трудоемкости) траекторий частиц и строятся несмещенные оценки линейных функционалов, например, осредненной по реализациям среды вероятности прохождения. Трудоемкость

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

\*E-mail: gam@sscc.ru

\*\*E-mail: min@osmf.sscc.ru

(сложность) такого алгоритма может быть очень большой и даже неограниченной при  $L \rightarrow 0$ , например, для “мозаичных” моделей  $\rho(\mathbf{r})$  (пуассоновских, Вороного и т.п.) (см., например, [8–10]). В связи с этим далее формулируется несложный корреляционно рандомизированный алгоритм (КР-алгоритм) для оценки влияния стохастичности поля  $\rho$  на перенос частиц, эвристически основанный на том факте, что вероятность прохождения в значительной степени определяется корреляционной длиной  $L$  и одномерным распределением поля  $\rho$  [8].

3. КР-алгоритм определяется пунктами S1, S2:

S1) В процессе переноса пробег из  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$  моделируется по формуле  $l = -\frac{\ln \alpha}{\sigma_{\max}}$ ;

S2) Если  $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < L$ , то фиксируется  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$ , иначе значение  $\rho(\mathbf{r})$  выбирается случайно из одномерного распределения поля  $\rho$ .

Как показывают приведенные выше эвристические соображения, а также модельные исследования и численные эксперименты, такой алгоритм дает удовлетворительные результаты при малых значениях  $L$ , когда стандартное моделирование слишком трудоемко. При этом значение  $L$  можно корректировать на основе упрощенных тестовых задач (см. далее пункт 4). Ясно, что трудоемкость КР-алгоритма ограничена при  $L \rightarrow 0$  и его можно использовать для исследования соответствующей скорости сходимости в стохастических задачах переноса. Отметим, что в случае неизотропного однородного поля  $\rho$  можно также использовать КР-алгоритм, заменив  $L$  на  $L(\omega)$ ,  $\omega = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ .

4. Далее эффективность КР-алгоритма изучается для модельной задачи о переносе частиц через плоский слой:  $\mathbf{H} = \{\mathbf{r} = (x, y, z): 0 \leq z \leq H\}$ , заполненный веществом с единичной плотностью  $\rho_V = 1$ , “разбавленным” случайным ансамблем пустых ( $\rho = 0$ ) шаров радиуса  $r_b$ , центры которых  $\{\mathbf{r}_i\}$  образуют пуассоновский точечный поток интенсивности  $\lambda$ . Процесс переноса является предельно анизотропным, т.е.  $w(\omega, \omega') = \delta(\omega - \omega')$ . Пусть  $\mathbf{V}$  – случайная непустая подобласть слоя. Предположим, что  $\sigma_V = \sigma \equiv 1$ , вероятность выживания при столкновении  $q_V(\mathbf{r}) \equiv q = \frac{\sigma_s}{\sigma}$  и  $\Phi_0(z, \omega) = \delta(z)\delta(\omega - \omega_z)$ . Тогда средняя (при  $\rho_V = 1$ ) плотность  $\rho$  среды в слое равна вероятности  $P(\mathbf{r} \in \mathbf{V})$ ,  $\forall \mathbf{r} \in \mathbf{H}$ . Согласно распределению Пуассона отсюда имеем

$$\rho = \exp\left(-\lambda \frac{4}{3} \pi r_b^3\right) \quad \text{и} \quad \lambda = -\frac{\ln \rho}{\frac{4}{3} \pi r_b^3}. \quad (2)$$

Введем обозначение:  $\xi(z)$  для однородной случайной функции со значениями:  $\xi(z) = 1$  при  $\mathbf{r}_z = (0, 0, z) \in \mathbf{V}$  и  $\xi(z) = 0$  при  $\mathbf{r}_z \notin \mathbf{V}$  и, следовательно, с одномерным распределением:  $P(\xi = 1) = \rho$ ,  $P(\xi = 0) = 1 - \rho$ . При этом длина части отрезка

$[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_H]$ , находящейся в веществе, равна  $\zeta = \int_0^H \xi(z) dz$ .

Хорошо известно (см., например, [2]), что соответствующая вероятность прохождения (при  $\rho_V = 1$ ) равна  $P_\zeta = \exp\{-(1 - q)\zeta\}$ , и, следовательно,

$$P = EP_\zeta = E \exp\{-(1 - q)\zeta\}. \quad (3)$$

Элементарные геометрические соображения с учетом свойств пуассоновского потока показывают, что корреляционная функция для  $\xi(z)$  равна

$$k(t) = \frac{e^{-\lambda V_b} (e^{\lambda V_t} - 1)}{1 - e^{-\lambda V_b}}, \quad \text{где} \quad V_b = \frac{4}{3} \pi r_b^3 \quad \text{и} \quad V_t = 2 \frac{\pi h^2}{3} \left(3r_b - \frac{2r_b - t}{2}\right) - \text{объем общей части пересекающихся шаров радиуса } r_b \text{ с центрами, отстоящими на расстоянии } t \leq 2r_b.$$

Перейдем теперь к построению оценок осредненной вероятности  $P$  прохождения для рассматриваемой задачи. Согласно сказанному выше, вероятность прохождения через осредненную среду равна  $P_0 = \exp\{-(1 - q)\rho H\}$ . Далее, на основе (3), используя предельную теорему для однородного случайного процесса  $\xi(z)$  [11], получаем следующую асимптотическую (при  $H/L \rightarrow \infty$ ) оценку:

$$\frac{P}{P_0} \asymp \exp\left(\frac{d^2}{2}(1 - q)^2\right), \quad \text{где} \quad d^2 = 2L\rho(1 - \rho)H. \quad \text{КР-ал-}$$

горитм с  $L = \int_0^\infty k(t) dt$  при  $\sigma_{\max} = 1$  реализуется со-

гласно сказанному выше последовательным моделированием пробегов по формуле  $l = -\ln \alpha$ . Используя весовое моделирование, следует при столкновении в области  $\mathbf{V}$  вес домножать на  $q$ . Результативный вес дает несмещенную статистическую оценку величины  $P_s$ .

Верификация оценки  $P_s$  осуществлялась сравнением с несмещенной оценкой величины  $P$ , получаемой стандартным методом двойной рандомизации при  $\sigma_{\max} = 1$  с реализацией пуассоновского ансамбля шаров в цилиндре  $\{0 \leq z \leq H, x^2 + y^2 \leq r_b^2\}$ . Как и в КР-алгоритме, при столкновении в области  $\mathbf{V}$  вес частицы домножался на  $q$ . Трудоемкость при этом соответственно (2) определяется средним числом  $\frac{3H}{4r_b} \ln \rho$  шаров в цилиндре.



**Таблица 1.** Оценка величин  $P/P_0$ ,  $P_s/P_0$  и значения  $P_{as}/P_0$  для данных  $r_b$  и  $L$

$r_b$	0	0.2	0.5	0.788	1
$L$	0	0.147	0.367	0.579	0.735
$P_{as}/P_0$	1	1.027	1.068	1.109	1.142
$P/P_0$	1	1.026	1.071	1.114	1.147
$P_s/P_0$	1	1.027	1.077	1.147	1.21

В табл. 1 приведены для  $H = 200$ ,  $q = \rho = 0.9$  значения  $P_{as}/P_0$  и статистические оценки  $P/P_0$ ,  $P_s/P_0$ , среднеквадратические погрешности которых составляют единицу последнего приведенного разряда.

Эти оценки показывают удовлетворительность здесь КР-алгоритма при  $L \leq 0.4/\sigma_{\max}$ . Видно также, что при  $L \geq 0.4/\sigma_{\max}$  в КР-алгоритме параметр  $L$  целесообразно уменьшать, например, в случае  $r_b = 1$ ,  $L = 0.735$  использовать  $L = 0.579$ . Отметим, что трудоемкость оценки  $P_s$  ограничена при  $r_b \rightarrow 0$ , в то время как для несмещенной оценки  $P$  она, согласно сказанному выше, растет до бесконечности. Например, при  $r_b = 0.1$  соответствующее отношение составляет примерно 100.

Решалась также задача [12] о переносе (в направлении  $Oz$ ) гамма-квантов с комптоновским рассеянием и поглощением через призму ( $-50 \text{ см} \leq x$ ,  $y \leq 50 \text{ см}$ ,  $0 \leq z \leq 200 \text{ см}$ ), заполненную водой, “разбавленной” пуассоновским ансамблем пустых шаров радиуса  $r_b$  (см. пункт 4) со средней плотностью среды  $\rho = 0.9 \text{ г/см}^3$ ; начальная энергия кванта  $E_0 = 1 \text{ МэВ}$ . Полученные КР-алгоритмом оценки  $P_s$  для  $r_b = 5 \text{ см}$  и  $r_b = 2 \text{ см}$  совпали с соответствующими несмещенными оценками  $P$  в пределах достаточно малой погрешности. Это объясняется тем, что, как оказалось, в этой задаче практически выполняется соотношение  $L \leq 0.4/\sigma_{\max}(E)$ . Расчеты для меньших значений  $r_b$  продемонстрировали сходимость  $P_s$  (и тем самым  $P$ ) к  $P_0$  при  $r_b \rightarrow 0$ , которую доказать теоретически здесь не представляется возможным. Отношение трудоемкостей несмещенной оценки  $P$  и оценки  $P_s$  при этом оказалось близким к  $(10r_b^{-1})^3$ . Ясно, что КР-алгоритм можно использовать для аналогичных расчетов в неограниченных областях.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0251-2021-0002.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
2. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.
3. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
4. Coleman W.A. Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. and Engng. 1968. V. 32. № 1. P. 76–81.
5. Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S. Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. 1965. V. 557. P. 2.
6. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // ДАН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163–165. <https://doi.org/10.1134/S1064562409050111>
7. Михайлов Г.А. Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”) // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 2. С. 187–200. <https://doi.org/10.15372/SJNM20190205>
8. Ambos A.Y., Mikhailov G.A. Numerically statistical simulation of the intensity field of the radiation transmitted through a random medium // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2018. V. 33. Is. 3. P. 161–171. <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0014>
9. Coline Larmier, Andrea Zoia, Fausto Malvagi, Eric Dumonteil, Alain Mazzolo. Monte Carlo particle transport in random media: The effects of mixing statistics // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2017. V. 196. P. 270–286. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2017.04.006>
10. Глазов Г.Н., Тутов Г.А. Статистические характеристики коэффициента ослабления в разорванной облачности. I. Модель с шарами одинакового радиуса // Вопросы лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск, 1976. С. 126–139.
11. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
12. Medvedev I.N., Mikhailov G.A. Randomized exponential transformation algorithm for solving the stochastic problems of gamma-ray transport theory // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2020. V. 35. Is. 3. P. 153–162. <https://doi.org/10.1515/rnam-2020-0012>

## NEW CORRELATIVE RANDOMIZED ALGORITHM FOR ESTIMATING THE INFLUENCE OF THE MEDIUM STOCHASTICITY ON THE PARTICLE TRANSPORT

Corresponding Member of the RAS **G. A. Mikhailov<sup>a,b</sup>** and **I. N. Medvedev<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

The new correlative randomized algorithm is constructed by uncomplicated randomization of the maximum cross-section (alignment, delta tracking) algorithm using the one-dimensional distribution and the correlation length of the random medium. The value of this parameter can be adjusted using simple test analysis. The performed computations have confirmed the practical efficiency of the new algorithm.

*Keywords:* correlative randomized algorithm, correlation length, stochastic medium, maximum cross-section method (delta tracking), gamma radiation transport, computation cost

УДК 519.63

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров<sup>1,\*</sup>, В. И. Голубев<sup>1,2,\*\*</sup>,  
В. Ю. Петрухин<sup>1</sup>, И. С. Никитин<sup>2</sup>

Поступило 26.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принято к публикации 24.03.2021 г.

Рассматривается задача о распространении сейсмических волн в гетерогенном геологическом массиве. Для описания динамического поведения среды используются уравнения линейной теории упругости. Учет слоистой структуры массива производится на основе поперечно-изотропной модели геологического разреза. Для численного решения определяющей системы уравнений используется сеточно-характеристический метод на параллелепипедных сетках. Авторами реализован подход, позволяющий в явном виде решить контактную задачу между изотропной и анизотропной средами. Представлен алгоритм, позволяющий провести полномасштабное моделирование всех типов поверхностных и объемных волн. Его работоспособность подтверждена на примере анизотропной модели Marmousi II.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, сейсморазведка, анизотропная среда, сейсмические волны

DOI: 10.31857/S2686954321030140

Первые сейсмические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых появились более 100 лет назад. За эти годы сейсмическая разведка стала одним из ведущих геофизических методов. Основанная изначально на простейшем лучевом представлении о распространении сейсмических волн, сегодня она использует все более сложные и реалистичные модели динамического поведения геологических сред [1–4]. При этом повышение точности восстановления внутренней структуры среды наиболее важно для залежей нетрадиционных углеводородов. Полученные оценки используются для оптимизации схемы разработки месторождений. Ввиду невозможности проведения натуральных полномасштабных экспериментальных исследований геологических структур с заданной геометрией на практике активно применяются математическое моделирование и численный эксперимент.

Хорошие обзоры современных методов вычислительной физики, применяемых для решения задач о распространении сейсмических волн, представлены в работах [5–7]. При этом, ввиду гиперболичности волновой задачи, естественным является применение класса сеточно-характеристических методов [8], учитывающих распространение разрывов решения вдоль характеристик. Они доказали свою эффективность при решении задач акустики [9] и упругости [10], а также динамики трещиноватых [11] и нелинейных слоистых сред [12].

В настоящей работе рассматривается задача динамической нагрузки гетерогенного геологического массива. Целью исследования является построение вычислительного алгоритма, позволяющего учитывать тонкослоистую структуру отдельных криволинейных геологических слоев. В работе используется модель поперечно-изотропной линейно-упругой среды в двумерной постановке. Для нахождения численного решения на первом шаге используется расщепление по пространственным направлениям. В дальнейшем отдельные одномерные линейные уравнения переносятся на сеточно-характеристическим методом повышенного порядка точности. Для верификации построенного алгоритма используются результаты расчетов в однородных средах, представленные в работе [13]. В работе описан алго-

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>2</sup> Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: petrov@mipt.ru

\*\*E-mail: w.golubev@mail.ru

ритм, позволяющий построить точное решение на контакте изотропная–анизотропная среды, основанный на аналитическом решении задачи Римана о распаде разрыва [14]. Проведено сопоставление полученных полей смещений. Разработанный расчетный алгоритм успешно применен для решения задачи о точечном источнике в сложно построенной горизонтально-изотропной модели, основанной на изотропной упругой модели Marmousi II [15].

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнения, описывающие динамическое поведение бесконечно малого объема изотропной линейно-упругой среды, могут быть записаны в виде

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla), \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости среды,  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие параметры Ламе.

Ввиду особенностей формирования (осадко-накопление и эрозия) реальные геологические среды являются поперечно-изотропными (VTI). Для них связь между тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и тензором деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  выражается следующим реологическим соотношением (в двумерной постановке):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $C_{ij}$  – упругие параметры среды, а ось  $OY$  направлена вертикально.

Система уравнений в частных производных первого порядка (1)–(3) может быть приведена к каноническому виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + A_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} + A_y \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{q} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$  – вектор неизвестных функций,  $\mathbf{f}$  – источник сейсмического сигнала, а матрицы  $A_x$  и  $A_y$  имеют вид

$$A_x = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A_y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Обе представленные матрицы могут быть записаны в виде  $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ , где матрица  $\Omega$  состоит из собственных векторов, а  $\Lambda$  – из соответствующих им собственных значений. Отличные от нуля собственные значения равны  $\pm \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \pm \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \pm \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ , что обуславливает зависимость скорости распространения сейсмических волн от направления.

Обе приведенные выше системы уравнений являются гиперболическими, и после проведения расщепления по направлениям каждая из них может быть решена сеточно-характеристическим методом с переходом в инварианты Римана и обратно. При этом устойчивость полученного вычислительного алгоритма определяется критерием Куранта–Фридрихса–Леви. Порядок аппроксимации схемы совпадает с порядком восстанавливаемого интерполяционного полинома в одномерном случае и снижается до второго в двумерном случае из-за расщепления по направлениям.

Рассмотрим подробнее случай контакта между изотропной и горизонтально-изотропной (анизотропной) средами, который может реализовываться, например, при детальном описании строения верхней части разреза и более грубом описании объема нефтяной залежи. На границе между средами должно быть задано необходимое число контактных условий – по количеству выходящих из сред на границу характеристик. Таким образом, в рассматриваемом нами случае достаточно четырех условий. Они формулируются в следующем виде:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^a, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^a \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{v}^i$  – вектор скорости изотропной среды,  $\mathbf{v}^a$  – вектор скорости анизотропной среды,  $\boldsymbol{\sigma}^i$  – тензор напряжений изотропной среды,  $\boldsymbol{\sigma}^a$  – тензор напряжений анизотропной среды,  $\mathbf{n}$  – нормаль, направленная из изотропной среды в анизотропную среду.

В настоящей работе был развит подход, предложенный в работе [10] для изотропной упругой среды. Корректировочные формулы, обеспечивающие точное равенство скорости точек на границе расчетной области заданному вектору  $\mathbf{V}^{ext}$ , имеют вид

$$\sigma_{xx}^- = \pm \sqrt{\rho C_{11}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (9)$$

$$\sigma_{yy}^- = \pm C_{13} \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (10)$$

$$\sigma_{xy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{44}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (11)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^{ext}, \quad (12)$$

если нормаль к границе совпадает с горизонтальной осью, и

$$\sigma_{xx}^- = \pm C_{13} \sqrt{\frac{\rho}{C_{33}}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (13)$$

$$\sigma_{yy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{33}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (14)$$

$$\sigma_{xy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{44}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^{ext}, \quad (16)$$

если нормаль к границе совпадает с вертикальной осью. Здесь знак плюс соответствует положительно направленной нормали, а знак минус – отрицательно направленной нормали. Тогда из условий (7)–(8) может быть найден такой вектор  $\mathbf{V}^{ext}$ , использование которого в граничном корректуре обеспечит точное выполнение физических условий на контакте двух разнородных сред. Если внешняя нормаль к анизотропной среде направлена вдоль оси  $OX$ :

$$V_x^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xx}^i - \sigma_{xx}^a) + \sqrt{\rho^a C_{11}} v_x^a + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)} v_x^i}{\sqrt{\rho^a C_{11}} + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)}}, \quad (17)$$

$$V_y^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xy}^i - \sigma_{xy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{44}} v_y^a + \sqrt{\rho^i \mu} v_y^i}{\sqrt{\rho^a C_{44}} + \sqrt{\rho^i \mu}}, \quad (18)$$

и вдоль оси  $OY$ :

$$V_x^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xy}^i - \sigma_{xy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{44}} v_x^a + \sqrt{\rho^i \mu} v_x^i}{\sqrt{\rho^a C_{44}} + \sqrt{\rho^i \mu}}, \quad (19)$$

$$V_y^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{yy}^i - \sigma_{yy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{33}} v_y^a + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)} v_y^i}{\sqrt{\rho^a C_{33}} + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)}}, \quad (20)$$

где знак плюс соответствует положительно направленной нормали, а знак минус – отрицательно направленной нормали.

### РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

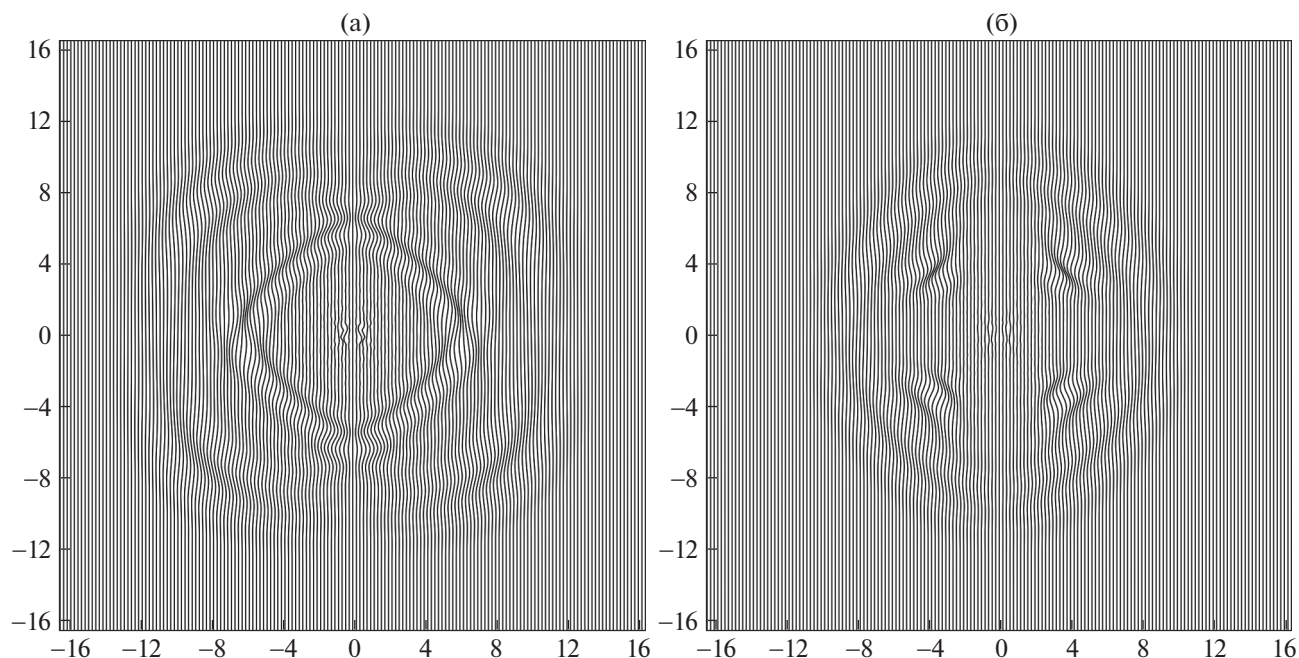
В работе было выполнено тестирование разработанного алгоритма на задаче о точечном источнике, расположенном в двух материалах, значительно отличающихся параметрами анизотропии. В обоих случаях расчетная область представляла собой квадрат размерами  $33 \times 33$  см. Была построена расчетная сетка с шагом  $2 \times 2$  мм. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости и составлял 0.1 мкс. При решении отдельных урав-

нений переноса на инварианты Римана использовалась схема Русанова с монотонизатором  $\text{minimax}$  третьего порядка точности. В качестве источника возмущения использовался точечный источник вертикально направленной силы, приложенный в центре расчетной области и имеющий временную зависимость вида

$$f(t) = e^{-0.5f_0^2(t-t_0)^2} \cos \pi f_0(t-t_0), \quad (21)$$

с параметрами  $f_0 = 5 \times 10^5$  Гц,  $t_0 = 6$  мкс. В первом расчете использовался апатит с параметрами  $C_{11} = 16.7 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{13} = 6.6 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{33} = 14.0 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{44} = 6.63 \times 10^{10}$  Н/м,  $\rho = 3200$  кг/м<sup>3</sup>. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 7224, 4551 и 6614 м/с. Во втором расчете использовался кобальт с параметрами  $C_{11} = 30.7 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{13} = 10.3 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{33} = 35.8 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{44} = 7.55 \times 10^{10}$  Н/м,  $\rho = 8900$  кг/м<sup>3</sup>. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 5873, 2912 и 6342 м/с. На границах области моделирования использовались неотражающие граничные условия. В расчетах записывались обе компоненты скорости смещения среды во всех узлах расчетной сетки. В дальнейшем, на основе полученных данных, вычислялось поле горизонтальных смещений путем интегрирования сигнала по времени. Для обоих расчетов результаты представлены на рис. 1. Они полностью совпали с результатами, представленными в работе [9], в которой использовался псевдоспектральный метод.

Представленный в работе метод позволяет в явном виде находить решение динамической задачи о контакте изотропной и анизотропной сред. Была рассмотрена следующая постановка задачи. Левая половина расчетной области заполнена цинком с параметрами  $C_{11} = 16.5 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{13} = 5.0 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{33} = 6.2 \times 10^{10}$  Н/м,  $C_{44} = 3.96 \times 10^{10}$  Н/м,  $\rho = 7100$  кг/м<sup>3</sup>. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 4820, 2361 и 2955 м/с. Правая половина расчетной области заполнена изотропным материалом, обладающим такой же плотностью, скоростью распространения продольных волн 4820 м/с и скоростью распространения поперечных волн 2361 м/с. Вблизи контактной границы в анизотропном материале задавался точечный источник вертикальной силы с временной зависимостью (21). Вся расчетная область имела размеры  $32 \times 32$  см, пространственный шаг сетки составлял 0.8 мм, временной шаг был равен 0.1 мкс. На рис. 2 представлена волновая картина, построенная по вертикальной компоненте вектора смещений. Четко



**Рис. 1.** Поле смещений  $u_x$ , рассчитанное в апатите через 20 мкс после начала воздействия (а). Поле смещений  $u_x$ , рассчитанное в кобальтите через 24 мкс после начала воздействия (б).

видны изотропия расходящейся волны справа и вытянутая пространственная форма сигнала слева.

В работе был проведен численный расчет распространения сейсмических волн в реалистичной модели сложно построенного геологического массива. За основу была взята свободно распро-

страняемая упругая модель Marmousi II. В нее была внесена VTI анизотропия с использованием следующих соотношений:

$$\varepsilon = 0.25\rho - 0.3, \quad (22)$$

$$\delta = 0.125\rho - 0.1, \quad (23)$$

$$C_{11} = \rho(1 + 2\varepsilon)V_P^2, \quad (24)$$

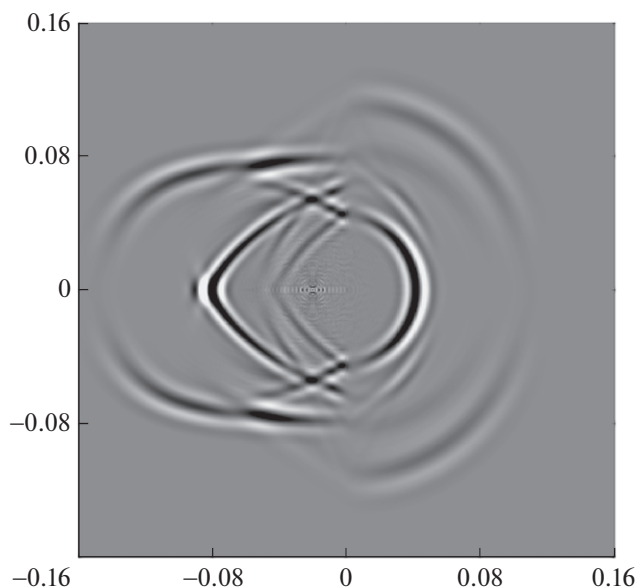
$$C_{33} = \rho V_P^2, \quad (25)$$

$$C_{44} = \rho V_S^2, \quad (26)$$

$$C_{13} = \rho V_P^2 \sqrt{\left(1 - \frac{V_S^2}{V_P^2}\right) \left(1 - \frac{V_S^2}{V_P^2} + 2\delta\right)} - \rho V_S^2, \quad (27)$$

где плотность рассчитывается в г/см<sup>3</sup>, а  $\varepsilon$  и  $\delta$  — параметры Томсена.

Для покрытия модели расчетной сеткой был выбран шаг по пространству 5 м и  $3401 \times 701$  узлов. Шаг по времени определялся условием Куранта и составлял 0.8 мс. В каждой ячейке расчетной сетки хранились все параметры анизотропного материала. В качестве возмущения использовался точечный источник (центр давления), расположенный вблизи дневной поверхности. На рис. 3 представлено распределение модуля скорости в фиксированный момент времени. Слоистость геологической модели, наличие резких границ и анизотропия обуславливают сложную волновую картину.



**Рис. 2.** Поле смещений  $u_y$ , рассчитанное при контакте цинка (левая половина) и изотропной среды (правая половина) через 32 мкс после начала воздействия.

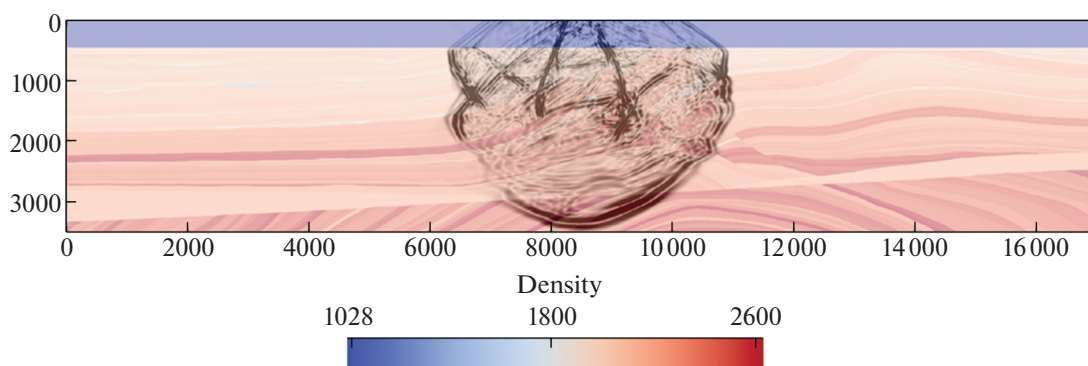


Рис. 3. Распределение модуля скорости в анизотропной модели Marmousi II в фиксированный момент времени.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен подход, позволяющий проводить учет ВТИ анизотропии при математическом моделировании процесса распространения сейсмических волн в геологическом массиве. Построена явная разностная схема, основанная на расщеплении по пространственным направлениям и сеточно-характеристическом методе. Предложен способ, позволяющий обеспечить выполнение контактных условий на границе изотропной и анизотропной сред. Корректность вычислительного алгоритма была подтверждена сопоставлением полученного решения для однородной и неоднородной сред. Был проведен расчет процесса распространения сейсмических волн в ВТИ модели Marmousi II. Неоднородность геологического строения среды обуславливает сложную волновую картину объемных волн. Дальнейшее развитие идей, изложенных в работе, может быть направлено на их обобщение на трехмерный случай и учет трещиноватости анизотропной среды.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-10060).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carcione J.M., Morency C., Santos J.E.* Computational poroelasticity – A review // *Geophysics*. 2010. V. 75. A229-A243.
2. *Ba J., Carcione J.M., Cao H., Yao F., Du Q.* Poro-acoustoelasticity of fluid-saturated rocks // *Geophys. Prosp.* 2012. V. 61. P. 599–612.
3. *Gauzellino P., Carcione J.M., Santos J.E., Picotti S.* A rheological equation for anisotropic-anelastic media and simulation of synthetic seismograms // *Wave Motion*. 2014. V. 51. P. 743–757.
4. *Carcione J.M., Wang Z., Ling W., Salusti E., Ba J., Fu L.-Y.* Wave simulation in linear thermoelastic media // *Geophysics*. 2019. V. 84 (1). T1–T11.
5. *Virieux J., Calandra H., Plessix R.E.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // *Geophysical Prospecting*. 2011. V. 59 (5). P. 794–813.
6. *Carcione J.M., Herman C.G., Kroode P.E.* Y2K Review Article: Seismic Modeling // *Rev. Lit. Arts Amer.* 2002. V. 67 (4). P. 1304–1325.
7. *Jing Ba et al.* Seismic Exploration of Hydrocarbons in Heterogeneous Reservoirs: New Theories, Methods and Applications. Elsevier, 2015. 362 p.
8. *Холодов А.С.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // *ЖВМиМФ*. 1980. Т. 20. № 6. С. 1601–1620.
9. *Петров И.Б., Голубев В.И., Шевченко А.В.* О задаче акустической диагностики прискважинной зоны // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
10. *Favorskaya A., Golubev V.* Study the elastic waves propagation in multistory buildings, taking into account dynamic destruction // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2020. V. 193. P. 189–199.
11. *Golubev V., Nikitin I., Ekimenko A.* Simulation of seismic responses from fractured MARMOUSI2 model // *AIP Conference Proceeding*. 2020. 2312, № 050006.
12. *Golubev V., Nikitin I., Golubeva Yu., Petrov I.* Numerical simulation of the dynamic loading process of initially damaged media // *AIP Conf. Proc.* 2020. 2309, 020006 <https://doi.org/10.1063/5.0033949>
13. *Carcione J.M., Kosloff D., Kosloff R.* Wave propagation simulation in an anisotropic (transversely isotropic) medium // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* 1988. V. 41. P. 320–345.
14. *Golubev V., Shevchenko A., Petrov I.* Simulation of Seismic Wave Propagation in a Multicomponent Oil Deposit Model // *Intern. J. Appl. Mech.* 2020. V. 12 (8). № 2050084.
15. *Qingyang Li, Guochen Wu, Jianlu Wu, Peiran Duan.* Finite difference seismic forward modeling method for fluid–solid coupled media with irregular seabed interface // *J. Geophysics and Engineering*. 2019. V. 16. № 1. P. 198–214.

## SEISMIC WAVES SIMULATION IN ANISOTROPIC MEDIA

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov<sup>a,b</sup>, V. I. Golubev<sup>a,b</sup>,  
V. Yu. Petrukhin<sup>a</sup>, and I. S. Nikitin<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Institute of Computer Aided Design of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

The problem of the seismic waves propagation in heterogeneous geological media is considered. For describing its dynamic behavior, the linear elastic system of equations is applied. The medium stratification is taken into account with the usage of the vertical transverse isotropic (VTI) model. The numerical solution is obtained by the grid-characteristic method on parallelepiped meshes. The authors developed a new approach for the explicit solution of the contact isotropic–anisotropic problem. The computational algorithm for the full-wave simulation of volumetric and surface waves was presented. It was successfully applied to the two-dimensional anisotropic Marmousi II model.

*Keywords:* mathematical modeling, grid-characteristic method, seismic survey process, anisotropic medium, seismic waves



УДК 511.6

## О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ $S$ -ЕДИНИЦАХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ, ПОСТРОЕННЫХ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ ПО ДВУМ ЛИНЕЙНЫМ НОРМИРОВАНИЯМ

© 2021 г. Г. В. Федоров<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 10.03.2021 г.

Поступило 10.03.2021 г.

После доработки 10.03.2021 г.

Принято к публикации 14.03.2021 г.

Для элементов гиперэллиптических полей впервые сформулирована теория функциональных непрерывных дробей обобщенного типа, связанная с двумя линейными нормированиями. Для произвольного элемента гиперэллиптического поля непрерывная дробь обобщенного типа сходится к этому элементу по каждому из выбранных двух линейных нормирований гиперэллиптического поля. Обозначим через  $S$  множество, состоящее из этих двух линейных нормирований. Найдены эквивалентные условия, описывающие взаимосвязь условия квазипериодичности непрерывной дроби обобщенного типа, наличия фундаментальной  $S$ -единицы и наличия соответствующего класса дивизоров конечного порядка в группе классов дивизоров гиперэллиптического поля. Последнее условие эквивалентно наличию точки кручения в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой. Найденные результаты завершают алгоритмическое решение проблемы периодичности в якобианах гиперэллиптических кривых рода два.

*Ключевые слова:* непрерывная дробь, фундаментальная  $S$ -единица, гиперэллиптическое поле, группа классов дивизоров

**DOI:** 10.31857/S2686954321030073

Пусть  $K$  – произвольное поле характеристики, отличной от 2. Пусть  $f \in K[x]$  – некоторый свободный от квадратов многочлен,  $L = K(x)(\sqrt{f})$  – гиперэллиптическое поле. Обозначим множество нормирований поля  $L$ , определенных над полем  $K$ , через  $\mathcal{V}$ , и  $S$  – некоторое конечное его подмножество.

В.П. Платонов в статье [1] предложил новый подход к проблеме кручения, основанный на глубокой связи трех проблем: проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых, проблема поиска и построения фундаментальных  $S$ -единиц колец  $S$ -целых элементов гиперэллиптических полей, проблема периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля. В эллиптическом случае над полем рациональных чисел проблема кручения решена Б. Мазуром [2] в 1978 г. В статье [3] исследована связь указанных трех проблем в эллиптическом случае, а в статье [4] полностью решена проблема периодичности непрерывных дробей элементов эллиптических по-

лей над полем рациональных чисел. Для кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел проблема кручения в настоящее время является открытой.

Связь проблемы кручения в якобианах гиперэллиптических кривых с проблемой периодичности функциональных непрерывных дробей известна по работам [5, 6]. В общем случае теория непрерывных дробей и связь с указанными проблемами были существенно развиты в статьях [7, 8]. В этих статьях рассматриваются непрерывные дроби, построенные в полях формальных степенных рядов  $K((x))$  или  $K((1/x))$  с помощью, соответственно, линейного нормирования или бесконечного нормирования поля  $L$ . В статьях [9–11] глубоко изучена теория функциональных непрерывных дробей с точки зрения дивизориального анализа. Продолжая этот подход, в статье [12] построена новая теория непрерывных  $h$ -дробей, определенных с помощью нормирования  $v_h^-$  поля  $L$  степени два.

В данной работе впервые формулируется теория непрерывных дробей обобщенного типа, построенных сразу по двум линейным нормированиям, а также найдены соответствующие эквивалентные условия в терминах указанных трех проблем.

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: fedorov@mech.math.msu.ru

1. ДИВИЗОРЫ  
ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Обозначим  $v = v_h$  нормирование поля  $K(x)$ , соответствующее неприводимому многочлену  $h \in K[x]$ , и  $K(x)_v$  – пополнение поля  $K(x)$  по нормированию  $v$ . Предположим, что нормирование  $v$  поля  $K(x)$  имеет два продолжения  $v^-$  и  $v^+$  на поле  $L$ . Это означает, что поле  $L$  может быть вложено в  $K(x)_v$  двумя способами, которые соответствуют нормированиям  $v^-$  и  $v^+$ , и каждый элемент  $\beta \in L$  имеет два разложения в степенные ряды в поле формальных степенных рядов, которые также соответствуют нормированиям  $v^-$  и  $v^+$ :

$$\beta = \sum_{j=s_0}^{\infty} e_j^{\pm} h^j, \quad e_j^{\pm} \in K[x], \quad \deg e_j^{\pm} < \deg h,$$

причем для любого  $s \geq s_0$  имеем

$$v^{\pm} \left[ \beta - \sum_{j=s_0}^s e_j^{\pm} h^j \right] > s,$$

где в обозначениях  $v^{\pm}$  и  $e_j^{\pm}$  везде выбирается знак + или знак – соответственно. Будем полагать, что  $\deg v^- = \deg v^+ = \deg h$ .

Обозначим  $\text{Div}(L) = \left\{ D = \sum_{v \in \mathcal{V}} n_v v, n_v \in \mathbb{Z} \right\}$  – группа  $K$ -дивизоров поля  $L$ , где каждому дивизору  $D$  взаимно однозначно соответствует набор целых чисел  $\{n_v\}_{v \in \mathcal{V}}$ , в котором только конечное количество элементов отлично от нуля. Там, где ясно, что суммирование берется по  $v \in \mathcal{V}$ , будем его опускать. Все дивизоры, о которых далее пойдет речь, определены над  $K$  и лежат в  $\text{Div}(L)$ .

Для  $D \in \text{Div}(L)$ ,  $D = \sum n_v v$ , определим  $\deg D = \sum n_v \deg v$ ,  $\deg_z D = \sum_{n_v > 0} n_v \deg v$ . Для фиксированного нормирования  $v \in \mathcal{V}$  определим число  $v(D) = n_v = n_v(D)$ . Дивизор  $D \in \text{Div}(L)$  называется эффективным, если  $v(D) \geq 0$  для всех  $v \in \mathcal{V}$ . Скажем, что для дивизоров  $D, E \in \text{Div}(L)$  выполнено сравнение  $D \leq E$ , если  $E - D$  эффективный дивизор. Для двух эффективных дивизоров  $D, E \in \text{Div}(L)$  определим эффективный дивизор  $\text{gcdiv}(D, E) \in \text{Div}(L)$  следующим образом:

$$\text{gcdiv}(D, E) = \sum \min(v(D), v(E)) \cdot v.$$

Если  $\min(v(D), v(E)) = 0$  для всех  $v \in \mathcal{V}$ , то будем писать  $\text{gcdiv}(D, E) = 0$ .

Для главного дивизора  $(\alpha)$  функции  $\alpha \in L$ ,  $\alpha \neq 0$ , обозначим  $(\alpha)_o$  и  $(\alpha)_\infty$ , соответственно, эффективный дивизор нулей и эффективный дивизи-

зор полюсов функции  $\alpha$  так, что  $(\alpha) = (\alpha)_o - (\alpha)_\infty$ , причем  $v((\alpha)_o) \cdot v((\alpha)_\infty) = 0$  для всех  $v \in \mathcal{V}$ . Для функций  $\alpha, \beta \in L$  определим  $\text{gcdiv}(\alpha, \beta) = \text{gcdiv}((\alpha)_o, (\beta)_o)$ .

Для нормирования  $v_h$  поля  $K(x)$ , заданного с помощью неприводимого многочлена  $h \in K[x]$ , имеющего два неэквивалентных продолжения  $v_h^-$  и  $v_h^+$  на поле  $L$ , обозначим соответствующие эффективные дивизоры  $(h)_o^- = 1 \cdot v_h^-$ ,  $(h)_o^+ = 1 \cdot v_h^+$ ,  $(h)_o^-, (h)_o^+ \in \text{Div}(L)$ . Если же продолжения  $v_h^-$  и  $v_h^+$  нормирования  $v_h$  поля  $K(x)$  на поле  $L$  эквивалентны, то будем писать  $v_h = v_h^- = v_h^+$ ,  $(h)_o^- = (h)_o^+ \in \text{Div}(L)$ . Аналогично, для продолжений  $v_\infty^-$  и  $v_\infty^+$  бесконечного нормирования  $v_\infty$  поля  $K(x)$ , будем использовать обозначения эффективных дивизоров  $\infty^- = 1 \cdot v_\infty^-$  и  $\infty^+ = 1 \cdot v_\infty^+$ , причем  $\infty^- \neq \infty^+$ , если  $v_\infty^- \neq v_\infty^+$ , и  $\infty^+ = \infty^- = \infty$ , если  $v_\infty^- = v_\infty^+ = v_\infty$ . Таким образом, например, запись  $\infty^- + \infty^+$  мы будем использовать, как для случая  $\infty^- \neq \infty^+$ , так и для случая  $\infty^- = \infty^+$ , когда  $\infty^- + \infty^+ = 2\infty$ .

Инволюция  $\iota$  поля  $L$ , действующая  $\iota: \sqrt{f} \rightarrow -\sqrt{f}$ ,  $\iota^2 = \text{id}$ , может быть естественным образом определена на множестве нормирований поля  $L$ . Действительно, если нормирование  $v$  поля  $K(x)$  имеет два продолжения  $v^-$  и  $v^+$  (возможно эквивалентных), то для любого  $\alpha \in L$  имеем  $v^-(\alpha) = v^+(\iota\alpha) = \iota v^+(\alpha)$ , поэтому корректно писать  $v^- = \iota v^+$  и  $v^+ = \iota v^-$ . Следовательно, инволюция  $\iota$  естественным образом продолжается на  $\text{Div}(L)$  – группу  $K$ -дивизоров поля  $L$ . В частности,  $\infty^+ = \iota \infty^-$ ,  $(h)_o^+ = \iota(h)_o^-$ .

Обозначим  $g = [(\text{deg} f - 1) / 2]$ . Следующая лемма является аналогом утверждения, сформулированного Мамфордом (см. [13, шаг II § 2 гл. IIIa]).

**Л е м м а 1.** Если  $\alpha \in L$ ,  $\alpha \neq 0$ , причем  $\deg_z(\alpha) \leq g$ , то  $\alpha \in K(x)$ .

Группу дивизоров степени ноль поля  $L$  обозначим  $\text{Div}^\circ(L)$ , группу главных дивизоров поля  $L$  обозначим  $\text{Princ}(L)$ , группу классов дивизоров степени ноль поля  $L$  обозначим  $\Delta^\circ(L) = \text{Div}^\circ(L) / \text{Princ}(L)$ . Скажем, что дивизоры  $D, E \in \text{Div}^\circ(L)$  эквивалентны  $D \sim E$ , если они принадлежат одному классу в группе классов дивизоров  $\Delta^\circ(L)$ .

Для эффективного дивизора  $D \in \text{Div}(L)$  тако- го, что  $v_\infty^-(D) = v_\infty^+(D) = 0$ , обозначим  $\text{Pol}(D) \in K[x]$  многочлен минимальной степени такой, что

$(\text{Pol}(D))_o \geq D$  и старший коэффициент многочлена  $\text{Pol}(D)$  равен 1. Поскольку дивизор  $D + \iota D - \text{deg} D(\infty^- + \infty^+)$  является главным дивизором некоторого многочлена из  $K[x]$ , то такой многочлен  $\text{Pol}(D)$  корректно определен.

Для функции  $\alpha \in K[x][\sqrt{f}]$  и  $t \in \mathbb{N}$  обозначим  $(\alpha)_{|t|}$  такой дивизор, что  $\text{deg}(\alpha)_{|t|} = 2t$ , и главный дивизор функции  $\alpha$  имеет вид  $(\alpha) = (\alpha)_{|t|} - t(\infty^- + \infty^+)$ . Назовем дивизор  $D \in \text{Div}(L)$  приведенным, если  $D$  эффективный дивизор степени  $g$ , такой, что  $2\text{gcdiv}(D, \iota D) \leq (f)_{|2g+2|}$ . Если для приведенного дивизора  $D$  справедливо  $v_x^-(D) = v_h^+(D) = 0$ , то корректно определен многочлен  $U = \text{Pol}(D) \in K[x]$ , причем  $\text{deg} U = g$  и главный дивизор многочлена  $U$  имеет вид  $(U) = D + \iota D - g(\infty^- + \infty^+)$ .

Пусть  $V \in K[x]$ ,  $\text{deg} V \leq g+1$ , тогда имеем  $v_x^\pm(V - \sqrt{f}) \geq -g-1$ . Значит, дивизор  $(V - \sqrt{f})_{|g+1|}$  эффективный и  $\text{deg}(V - \sqrt{f})_{|g+1|} = 2(g+1)$ .

Пусть дан многочлен  $U \in K[x]$ ,  $\text{deg} U \leq g$ . Для эффективного дивизора  $(U)_o^-$  такого, что дивизор нулей многочлена  $U$  имеет вид  $(U)_o = (U)_o^- + \iota(U)_o^+$ , определим эффективные дивизоры  $(U)_o^+$ ,  $(U)_{|g|}^-$ ,  $(U)_{|g|}^+ \in \text{Div}(L)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (U)_o^+ &= \iota(U)_o^-, & (U)_{|g|}^- &= (U)_o^- + (g - \text{deg} U)\infty^-, \\ (U)_{|g|}^+ &= (U)_o^+ + (g - \text{deg} U)\infty^+. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее мы будем везде использовать сокращенную запись  $(U)_o^-$ ,  $(U)_o^+$ , подразумевая под ней дивизоры  $(U)_{|g|}^-$  и  $(U)_{|g|}^+$  степени  $g$  соответственно. Также под сокращенной записью  $(V - \sqrt{f})_o$  для  $V \in K[x]$ ,  $\text{deg} V \leq g+1$ , мы будем иметь в виду дивизор  $(V - \sqrt{f})_{|g+1|}$  степени  $2(g+1)$ .

**Предложение 1.** Пусть  $g \geq 1$  и неэквивалентные нормирования  $v_x, v_h$  поля  $K(x)$  имеют по два неэквивалентных продолжения  $v_x^- \neq v_x^+, v_h^- \neq v_h^+$  на поле  $L$ , которым соответствуют эффективные дивизоры  $(x)_o^- \neq (x)_o^+, (h)_o^- \neq (h)_o^+$  такие, что  $\text{deg}(x)_o^- = \text{deg}(h)_o^- = 1$ . Пусть  $D \in \text{Div}(L)$  — некоторый приведенный дивизор такой, что  $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$ . Тогда

1) существует единственный многочлен  $V \in K[x]$ ,  $\text{deg} V \leq g+1$ , такой, что

$$D + (x)_o^- + (h)_o^- \leq (V - \sqrt{f})_{|g+1|};$$

2) существует единственный с точностью до умножения на постоянную из  $K^*$  многочлен  $U \in K[x]$ ,  $\text{deg} U \leq g$ , такой, что главный дивизор

$$U = D + \iota D - g(\infty^- + \infty^+);$$

3) дивизор  $E = (V - \sqrt{f})_{|g+1|} - D - (x)_o^- - (h)_o^-$  является приведенным;

4) если  $\infty^- \neq \infty^+$ , то  $v_x^\pm(V - \sqrt{f}) = \delta^\pm - (g+1)$ , причем  $\delta^\pm \in \mathbb{N}_0$ ,  $\delta^\pm \geq v_x^\pm(D)$ ,  $\delta^- \cdot \delta^+ = 0$ ;

5) корректно определен многочлен  $T \in K[x]$ :

$$T = \frac{f - V^2}{Uxh} \in K[x], \quad \text{deg} T \leq g;$$

6) справедливо равенство

$$T = E + \iota E - g(\infty^- + \infty^+).$$

Для данного приведенного дивизора  $D \in \text{Div}(L)$ ,  $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$ , и данных дивизоров  $(x)_o^-$ ,  $(h)_o^-$ , соответствующих линейным нормированиям  $v_x^-, v_h^-$ , назовем представлением Мамфорда дивизора  $D + (x)_o^- + (h)_o^-$  набор из двух многочленов  $(Uxh, V)$ , корректно определенных по предложению 1. Представление Мамфорда данного приведенного дивизора определено однозначно с точностью до умножения многочлена  $U$  на постоянную из  $K^*$ . Из предложения 1 следует, что представлением Мамфорда дивизора

$$E + (x)_o^- + (h)_o^- = (V - \sqrt{f})_{|g+1|} - D$$

является набор  $(T \cdot x \cdot h, V)$ .

Теперь покажем, как по представлению Мамфорда — набору из двух многочленов, удовлетворяющих специальным условиям, — построить соответствующий приведенный дивизор.

Пусть даны многочлены  $T, U, V \in K[x]$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} UxhT &= f - V^2, & \text{deg} U &\leq g, \\ \text{deg} T &\leq g, & \text{deg} V &\leq g+1. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как  $xh|f - V^2$ , то без ограничения общности считаем обозначения нормирований  $v_x^- \neq v_x^+, v_h^- \neq v_h^+$  таковыми, что  $v_x^-(V - \sqrt{f}) > 0$  и  $v_h^-(V - \sqrt{f}) > 0$ . Положим

$$D = \text{gcdiv}((V - \sqrt{f})_{|g+1|}, (U)_{|g|}). \quad (3)$$

Тогда  $D$  — приведенный дивизор, и представление Мамфорда дивизора  $D + (x)_o^- + (h)_o^-$  имеет вид  $(U \cdot x \cdot h, V)$ . Действительно, по определению  $D$  — эффективный дивизор, для которого справедливо соотношение  $2\text{gcdiv}(D, \iota D) \leq (f)_{|2(g+1)|}$ , и в силу

$$(U)_{|g|} \leq (V - \sqrt{f})_{|g+1|} + (V + \sqrt{f})_{|g+1|}$$

имеем  $\deg D = g$ . Кроме того, по предложению 1 единственным образом определен приведенный дивизор  $E$ , для которого представлением Мамфорда является набор  $(T \cdot x \cdot h, V)$ .

Таким образом, справедливо следующее

**Предложение 2.** *Существуют взаимно однозначные соответствия между следующими множествами:*

*множеством приведенных дивизоров  $D \in \text{Div}(L)$ ,  $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$ ;*

*множеством пар многочленов  $U, V \in K[x]$ ,  $\text{lc}U = 1$ , удовлетворяющих (2) для некоторого  $T \in K[x]$ ;*

*множеством элементов  $\alpha = \frac{\sqrt{f} + V}{T} \in L$ , где многочлены  $T, V \in K[x]$ ,  $\text{lc}(T) = 1$ , удовлетворяют условиям (2) для некоторых  $U \in K[x]$ .*

**2. ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАМФОРДА**

Пусть дан элемент  $\alpha = (\sqrt{f} + V)/T \in L$ , где многочлены  $T, V \in K[x]$  удовлетворяют условиям (2) для некоторого  $U \in K[x]$ . Покажем, как построить обобщенную непрерывную дробь для элемента  $\alpha$ , которая сходится к  $\alpha$  сразу по двум линейным нормированиям  $v_x^-$  и  $v_h^-$ .

Положим  $U_{-1} = U, V_{-1} = V, T_0 = T$ .

**Теорема 1.** *Существуют и единственны последовательности многочленов  $U_j, T_j, V_j, e_j \in K[x]$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $U_j \neq 0, T_j \neq 0, e_j \neq 0$ , и приведенных дивизоров  $D_j, E_j \in \text{Div}(L)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , удовлетворяющих следующим условиям для  $j \in \mathbb{N}_0$ :*

$$U_j = T_j x^{s_j - r_j} h^{r_j - s_j}, \tag{4}$$

$$V_j = e_j T_j x^{-r_j} h^{-s_j} - V_{j-1},$$

$$f - V_j^2 = U_j x h T_{j+1}, \quad \deg U_j \leq g, \tag{5}$$

$$\deg T_{j+1} \leq g, \quad \deg V_j \leq g + 1,$$

$$(U_{j-1}) = D_j + \iota D_j - g(\infty^- + \infty^+), \tag{6}$$

$$(T_j) = E_j + \iota E_j - g(\infty^- + \infty^+), \tag{7}$$

$$D_j = \text{gcdiv}((V_{j-1} - \sqrt{f})_{|g+1|}, (U_{j-1})_{|g|}), \tag{8}$$

$$E_j = \text{gcdiv}((V_{j-1} - \sqrt{f})_{|g+1|}, (T_j)_{|g|}), \tag{9}$$

$$(V_{j-1} - \sqrt{f})_{|g+1|} = D_j + (x)_o^- + (h)_o^- + E_j, \tag{10}$$

$$D_{j+1} = \iota E_j - r_j((x)_o^+ - (h)_o^-) - s_j((h)_o^+ - (x)_o^-), \tag{11}$$

где  $r_j = v_x(T_j), s_j = v_h(T_j)$ .

Пусть последовательности многочленов  $U_j, T_j, V_j, e_j \in K[x], j \in \mathbb{N}_0$ , и приведенных дивизоров  $D_j, E_j \in \text{Div}(L), j \in \mathbb{N}_0$ , определены условиями теоремы 1. Положим  $\alpha_j = (\sqrt{f} + V_{j-1})/T_j \in L, a_j = e_j x^{-r_j} h^{-s_j}, j \in \mathbb{N}_0$ . Тогда  $\alpha_0 = \alpha$  и справедливы следующие утверждения:

$(U_{j-1} x h, V_{j-1})$  – представление Мамфорда дивизора  $D_j + (x)_o^- + (h)_o^-$ ;

$(T_j x h, V_{j-1})$  – представление Мамфорда дивизора  $E_j + (x)_o^- + (h)_o^-$ ;

$$(x/h)^{r_j - s_j} (\alpha_j - a_j) = x h / \alpha_{j+1}.$$

Поскольку величины  $r_j, s_j$  и приведенные дивизоры  $E_j, D_{j+1}$  могут быть единственным образом восстановлены по многочленам  $T_j$  и  $V_{j-1}$ , то “неполное частное”  $a_j$  есть функция от элемента  $\alpha_j$ . Поэтому корректно использовать обозначение  $a_j = [\alpha_j]_{x,h}^-$ .

Пусть теперь дан приведенный дивизор  $D_0 \in \text{Div}(L)$  такой, что  $v_x^+(D_0) = v_h^+(D_0) = 0$ . По предложению 1 корректно определены многочлены  $U_{-1}, V_{-1} \in K[x]$  такие, что  $(U_{-1} x h, V_{-1})$  – представление Мамфорда дивизора  $D_0 + (x)_o^- + (h)_o^-$ . Многочлены  $U_{-1}, V_{-1}$  определены единственным образом с точностью до домножения многочлена  $U_{-1}$  на постоянную из  $K^*$ . Справедливы условия (5) при  $j = -1$  для некоторого многочлена  $T_0 \in K[x]$ . Следовательно, единственным образом определены последовательности многочленов  $U_j, T_j, V_j, e_j \in K[x], j \in \mathbb{N}_0, U_j \neq 0, T_j \neq 0, e_j \neq 0$ , и приведенных дивизоров  $D_j, E_j \in \text{Div}(L), j \in \mathbb{N}_0$ , удовлетворяющих условиям (4)–(11) для  $j \in \mathbb{N}_0$ .

Таким образом, понятие непрерывной дроби может быть идентифицировано с каждой из трех связанных друг с другом последовательностей:

последовательность пар многочленов  $U_j, V_j$ , удовлетворяющих (5) и (4) для некоторых многочленов  $e_j, T_j$ , однозначно восстанавливающихся по паре  $U_j, V_j$ ;

последовательность приведенных дивизоров  $D_j$ , удовлетворяющих (10)–(11) для некоторого многочлена  $V_{j-1}$  и приведенного дивизора  $E_j$  такого, что  $v_x^-(E_j) = r_j, v_h^-(E_j) = s_j$ ;

последовательность полных частных  $\alpha_j$ , удовлетворяющих

$$a_j = [\alpha_j]_{x,h}^-, \quad r_j = -v_x^-(a_j), \quad s_j = -v_h^-(a_j),$$

$$\left(\frac{x}{h}\right)^{r_j-s_j} (\alpha_j - a_j) = \frac{xh}{\alpha_{j+1}}. \quad (12)$$

В итоге получаем обобщенную непрерывную дробь

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{x^{1+s_0-r_0} h^{1+r_0-s_0}}{a_1 + \frac{x^{1+s_1-r_1} h^{1+r_1-s_1}}{a_2 + \dots}}, \quad (13)$$

полные и неполные частные которой удовлетворяют соотношениям (12) для  $j \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем рассматривать только такие обобщенные непрерывные дроби, поэтому далее для краткости будем называть выражение (13) непрерывной дробью и обозначать ее следующим образом:

$$[a_0; a_1 | x^{1+s_0-r_0} h^{1+r_0-s_0}, a_2 | x^{1+s_1-r_1} h^{1+r_1-s_1}, \dots].$$

**Теорема 2.** Пусть  $D_0 \in \text{Div}(L)$  – такой приведенный дивизор, что  $v_x^+(D_0) = v_h^+(D_0) = 0$ . Пусть  $(U_{-1}xh, V_{-1})$  – представление Мамфорда дивизора  $D_0 + (x)_o^- + (h)_o^-$ . Пусть  $D_j$  – последовательность приведенных дивизоров, построенная в теореме 1. Тогда при  $n \in \mathbb{N}$  справедливы соотношения

$$E_0 - E_n \sim D_n - D_0 \sim \sum_{j=0}^{n-1} (1 + r_j + s_j)((x)_o^- - (h)_o^-). \quad (14)$$

### 3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Пусть свободный от квадратов многочлен  $f \in K[x]$ , такой, что нормирования  $v_x$  и  $v_h$  поля  $K(x)$  имеют два неэквивалентных продолжения  $v_x^- \neq v_x^+$  и  $v_h^- \neq v_h^+$  на поле  $L = K(x)(\sqrt{f})$ .

**Теорема 3.** Пусть  $D_0 \in \text{Div}(L)$  – такой приведенный дивизор, что  $r_0 = v_x^-(D_0) = g$  или  $s_0 = v_h^-(D_0) = g$ . Пусть  $(U_{-1}xh, V_{-1})$  – представление Мамфорда дивизора  $D_0 + (x)_o^- + (h)_o^-$  и справедливы построения (4)–(11) для  $j \in \mathbb{N}_0$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) найдется минимальный номер  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $D_n = D_0$ ;
- 2) найдется минимальный номер  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $U_{n-1} = cU_{-1}$  для некоторой постоянной  $c \in K^*$ ;
- 3) найдется минимальный номер  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $V_{n-1} = V_{-1}$  и  $T_n = c^{-1}T_0$  для некоторой постоянной  $c \in K^*$ ;
- 4) найдется минимальный номер  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $E_n = E_0$ ;

5) классы эквивалентных дивизоров  $(h)_o^- - (x)_o^+ \sim (x)_o^- - (h)_o^+$  имеют конечный порядок  $t$  в группе классов дивизоров  $\Delta^o(L)$ ;

6) непрерывные дроби типа (13) элементов  $\sqrt{f}/x^g$  и  $\sqrt{f}/h^g$  квазипериодические с длиной квазипериода  $n$ ;

7) в гиперэллиптическом поле  $L$  существует фундаментальная S-единица степени  $t$ , где  $S = \{v_x^-, v_h^+\}$ ;

8) для некоторого  $b \in K^*$  уравнение

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 f = bx^m h^m, \quad \max(2\deg \mu_1, 2\deg \mu_2 + \deg f) = 2m, \quad (15)$$

имеет решение  $\mu_1, \mu_2 \in K[x]$  такое, что  $v_x(\mu_2) = v_h(\mu_2) = 0, \mu_2 \neq 0$ .

Если существуют  $n, m \in \mathbb{N}$ , указанные в эквивалентных условиях 1)–6), то они связаны соотношением

$$m = \sum_{j=0}^{n-1} (1 + r_j + s_j),$$

где для  $j \in \mathbb{N}_0$  справедливы равенства

$$r_j = -v_x^-(\alpha_j) = -v_x(\alpha_j) = v_x^-(E_j) = v_x(T_j) = v_h(U_j) = v_h^-(D_{j+1}), \quad (16)$$

$$s_j = -v_h^-(\alpha_j) = -v_h(a_j) = v_h^-(E_j) = v_h(T_j) = v_x(U_j) = v_x^-(D_{j+1}).$$

В следующем примере приведено гиперэллиптическое поле  $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ , в котором непрерывная дробь вида (13) для элемента  $\sqrt{f}/x^2$  квазипериодическая, но не периодическая. Это обстоятельство еще раз подчеркивает существенное отличие непрерывной дроби вида (13) от непрерывных дробей в полях  $\mathbb{Q}(x)$  и  $\mathbb{Q}(h)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим  $g = 2, h = x - 1$  и многочлен

$$f(x) = -(x^2 + x + 1)(4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4) = -(h^2 + 3h + 3)(4h^4 + 9h^3 + 7h^2 + 3h - 3) = \phi(h).$$

Положим  $S = \{v_x^-, v_h^+\}$ ,  $S' = \{v_x^-, v_h^-\}$ . Для элемента  $\sqrt{f}/x^g$  непрерывная дробь вида (13) с положительными разложениями  $\sqrt{f}$  в степенные ряды в полях  $\mathbb{Q}(x)$  и  $\mathbb{Q}(h)$  имеет вид:

$$\left[ \frac{-7x^3 - 12x^2 + 3x - 4}{2}, \frac{x-2}{5} | x^{-1}h^3, -(x-2)(13x^2 + 3x + 8) | xh \right]^{1/4}.$$

Эта непрерывная дробь квазипериодическая, но не периодическая. Длина квазипериода равна 2, коэффициент квазипериода  $c = \frac{1}{4}$ . Степень соответствующей фундаментальной  $S$ -единицы равна 4. В качестве фундаментальной  $S$ -единицы можно выбрать  $(\omega_1 + \omega_2\sqrt{f})x^{-4}$  или  $(\omega_1 + \omega_2\sqrt{f})h^{-4}$ , где  $\omega_1 = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8$ ,  $\omega_2 = 2(x-2)$ .

Для элемента  $\sqrt{f}/h^g$  непрерывная дробь вида (13) с положительными разложениями  $\sqrt{f}$  в степенные ряды в полях  $\mathbb{Q}((x))$  и  $\mathbb{Q}((h))$  имеет вид

$$\left[ \frac{h^3 + 2h^2 + 5h + 12}{4}, \frac{4(h-1)}{5} | x^3h^{-1}, -\frac{(h-1)(13h^2 + 29h + 24)}{16} | xh \right]^{1/4}.$$

Для элемента  $\sqrt{f}/x^g$  непрерывная дробь вида (13) с разложениями  $\sqrt{f}$  в степенные ряды в полях  $\mathbb{Q}((x))$  и  $\mathbb{Q}((h))$  разных знаков неквазипериодическая, следовательно, в поле  $L$  нет нетривиальных  $S'$ -единиц. Непрерывные дроби элементов  $\sqrt{f(x)}/x^{g+1}$  и  $\sqrt{f(x)}/h^{g+1}$  соответственно в полях  $\mathbb{Q}((x))$  и  $\mathbb{Q}((h))$  не являются квазипериодическими, поэтому в поле  $L$  нет нетривиальных  $S_x$ -единиц и  $S_h$ -единиц, где  $S_x = \{v_x^-, v_x^+\}$  и  $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 19-71-00029.

## ON FUNDAMENTAL S-UNITS AND CONTINUED FRACTIONS, CONSTRUCTED IN HYPERELLIPTIC FIELDS BY TWO LINEAR VALUATIONS

G. V. Fedorov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

In this paper, for the elements of hyperelliptic fields, the theory of functional continued fractions of generalized type associated with two linear valuations is formulated for the first time. For an arbitrary element of the hyperelliptic field, the continued fraction of the generalized type converges to this element for each of the two selected linear valuations of the hyperelliptic field. Denote by  $S$  the set consisting of these two linear valuations. We find equivalent conditions describing the relationship between the condition of a continued fraction of generalized type, the existence of a fundamental  $S$ -unit, and the existence of a class of divisors of finite order in the divisor class group of a hyperelliptic field. The last condition is equivalent to the existence of a torsion point in the Jacobian of a hyperelliptic curve. These results complete the algorithmic solution of the periodicity problem in the Jacobians of hyperelliptic curves of genus two.

**Keywords:** continued fraction, fundamental  $S$ -unit, hyperelliptic field, divisor class group

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Platonov V.P.* Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field // *Russian Math. Surveys.* 2014. V. 69. № 1. P. 1–34.
2. *Mazur B.* Rational isogenies of prime degree // *Invent. Math.* 1978. V. 44. № 2. P. 129–162.
3. *Platonov V.P., Fedorov G.V.* On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields // *Sb. Math.* 2018. V. 209. № 4. P. 519–559.
4. *Platonov V.P., Fedorov G.V.* On the problem of classification of periodic continued fractions in hyperelliptic fields // *Russian Mathematical Surveys.* 2020. V. 75. № 4. P. 785–787.
5. *Artin E.* Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I // *Math. Z.* 1924. V. 19. №1. P. 153–246.
6. *Adams W. W., Razar M. J.* Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // *Proc. London Math. Soc.* 1980. V. 41. №3. P. 481–498.
7. *Platonov V.P., Petrunin M.M.* Groups of  $S$ -units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2018. V. 302. P. 336–357.
8. *Fedorov G.V.* On the period length of a functional continued fraction over a number field // *Dokl. Math.* 2020. V. 102. № 3. P. 513–517.
9. *Berry T.G.* On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // *Arch. Math.* 1990. V. 55. P. 259–266.
10. *Zhgoon V.S.* On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields // *Chebyshevskii Sbornik.* 2017. V. 18. № 4. P. 208–220. (In Russ.)
11. *Zannier U.* Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // *American Journal of Mathematics.* 2019. V. 141. № 1. P. 1–40.
12. *Fedorov G.V.* On the  $S$ -units for the valuations of the second degree in hyperelliptic fields // *Izvestiya. Mathematics.* 2020. V. 84. № 2. P. 392–435.
13. *Mumford D.* *Tata Lectures on Theta I, II* // *Progress in Mathematics.* 1983, 1984. V. 28, 43.

УДК 519.71

## ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ГАРДНЕРА ДЛЯ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

© 2021 г. Н. В. Кузнецов<sup>1,2,3,\*</sup>, М. Ю. Лобачев<sup>1</sup>, М. В. Юлдашев<sup>1</sup>,  
Р. В. Юлдашев<sup>1</sup>, С. И. Вольский<sup>4</sup>, Д. А. Сорокин<sup>4</sup>

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 18.02.2021 г.

Поступило 27.02.2021 г.

После доработки 27.02.2021 г.

Принято к публикации 30.03.2021 г.

Развиты методы нелинейного анализа и синтеза систем управления синхронизацией для электрических сетей. Применение методов усреднения и критериев устойчивости ляпуновского типа для цилиндрического фазового пространства позволило впервые в задаче Гарднера учесть изменения амплитуд сигналов и получить аналитические оценки параметров системы для обеспечения допустимых значений отклонений фаз.

*Ключевые слова:* управление фазовой синхронизацией, настраиваемый диапазон быстрого захвата, функция Ляпунова, задача Гарднера, электрические сети

DOI: 10.31857/S2686954321030103

Системы фазовой автоподстройки являются нелинейными системами управления, реализующими принцип “ведущий-ведомый” синхронизации фаз периодических сигналов. Применение таких систем получило широкое распространение в современных электронных, электромеханических и электрических системах для автоподстройки генераторов [1–3]. В электроэнергетике используются системы фазовой автоподстройки, позволяющие дополнительно определять амплитуду (амплитудная и фазовая автоподстройка, АФАП) [4–7]. АФАП применяются в составе активных корректоров мощности, например, при эксплуатации электропоездов переменного тока на электрифицированных участках дорог с однофазным напряжением. При этом ошибки в измерении фазы приводят к появлению разности напряжений на выходе корректора и сети, а возникающие в результате токи могут приводить к

перегреву или поломкам корректора мощности и подключенных устройств.

В данной работе впервые показано, как развитие основанных на применении теории усреднения и критериев устойчивости ляпуновского типа для цилиндрического фазового пространства методов нелинейного анализа позволяет в задаче Ф. Гарднера о быстрой синхронизации [8, 9] дополнительно учесть изменение амплитуды и определить эффективные параметры АФАП, для которых отклонение разности фаз на переходных процессах не превышает заданного допустимого значения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим схему АФАП, используемую в электроэнергетике [4] (рис. 1).

Входной сигнал имеет фазу  $\theta_{ref}(t)$ , амплитуду  $u_{ref} > 0$  и частоту  $\dot{\theta}_{ref}(t) \equiv \omega_{ref} > 0$ . Подстраиваемый генератор имеет собственную частоту  $\omega^{free}$  и формирует сигнал с фазой  $\theta(t)$ . Амплитуда подстраиваемого сигнала  $u(t)$  формируется с помощью интегратора с передаточной функцией  $\frac{K}{s}$ . Амплитудно-фазовый детектор определяет разность входного и подстраиваемого сигналов  $u_{ref}\sin(\theta_{ref}(t)) - u(t)\sin(\theta(t))$  для формирования управляющих сигналов  $s_{1,2}(t)$ , корректирующих амплитуду и фазу. Управляющий сигнал  $s_2(t)$  дополнительно

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*E-mail: n.v.kuznetsov@spbu.ru

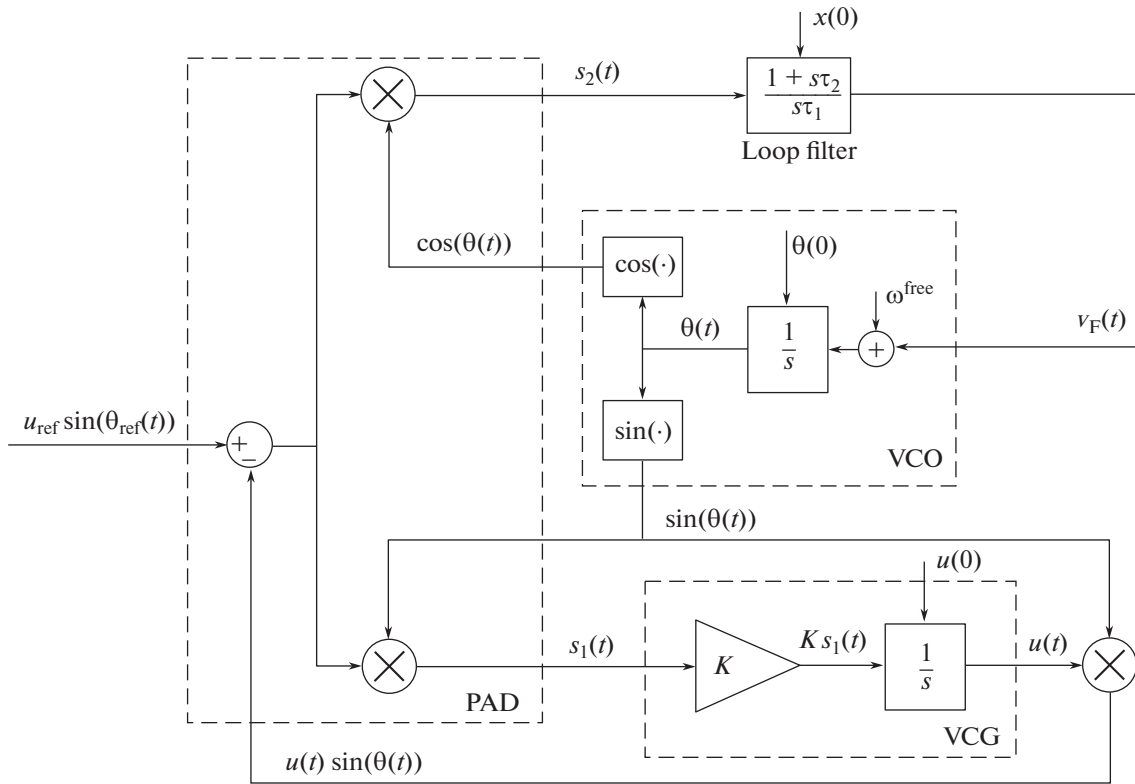


Рис. 1. Схема амплитудной и фазовой автоподстройки АФАП.

пропускается через пропорционально-интегрирующий фильтр (передаточная функция  $\frac{1 + s\tau_2}{s\tau_1}$ ,  $\tau_{1,2} > 0$ ). До включения схемы устанавливаются начальные состояния фильтра  $x(0) = 0$  и амплитуды  $u(0) = u_{\text{ном}}$  (ожидаемая амплитуда). Если на вход поступает сигнал с  $\theta_{\text{ref}}(0) = \theta(0)$ ,  $\omega_{\text{ref}} = \omega^{\text{free}}$  и  $u_{\text{ref}} = u_{\text{ном}}$ , то управляющие сигналы  $s_{1,2}(t) \equiv 0$ . В противном случае управляющие сигналы должны обеспечить процесс подстройки и переход состояния системы к стационарному (синхронному) режиму.

## 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННОГО РЕЖИМА И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Согласно схеме на рис. 1 получим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{K}{2}(-u + u_{\text{ref}} \cos(\theta_{\text{ref}}(t) - \theta) + \\ &+ u \cos(2\theta) - u_{\text{ref}} \cos(\theta_{\text{ref}}(t) + \theta)), \\ \dot{x} &= \frac{1}{2}(u_{\text{ref}} \sin(\theta_{\text{ref}}(t) - \theta) + \\ &+ u_{\text{ref}} \sin(\theta_{\text{ref}}(t) + \theta) - u \sin(2\theta)), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega^{\text{free}} + \frac{1}{\tau_1} \left( x + \frac{\tau_2}{2} (u_{\text{ref}} \sin(\theta_{\text{ref}}(t) - \theta) + \right. \\ &\left. + u_{\text{ref}} \sin(\theta_{\text{ref}}(t) + \theta) + u \sin(2\theta)) \right) \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению отклонений состояния системы (1) от синхронного режима:  $y(t) = (u_e(t), x(t), \theta_e(t))$ , где  $u_e(t) = u_{\text{ref}} - u(t)$  и  $\theta_e(t) = \theta_{\text{ref}}(t) - \theta(t)$ . При предположении о полном подавлении высокочастотных компонент фильтром можно перейти к анализу автономной модели:

$$\begin{aligned} \dot{u}_e &= \frac{K}{2}(-u_e + u_{\text{ref}}(1 - \cos \theta_e)), \\ \dot{x} &= \frac{1}{2} u_{\text{ref}} \sin \theta_e, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_e^{\text{free}} - \frac{1}{\tau_1} \left( x + \frac{\tau_2}{2} u_{\text{ref}} \sin \theta_e \right),$$

где  $\omega_e^{\text{free}} = \omega_{\text{ref}} - \omega^{\text{free}}$ . Система (2) имеет стационарные состояния  $z(t) = (u_e(t), x(t), \theta_e(t)) \equiv 0$  вида

$$\begin{aligned} z_{\text{st}}^{\text{eq}} &= (0, \tau_1 \omega_e^{\text{free}}, 2\pi k), \\ z_{\text{un}}^{\text{eq}} &= (2u_{\text{ref}}, \tau_1 \omega_e^{\text{free}}, \pi + 2\pi k), \quad k \in Z. \end{aligned} \quad (3)$$

Стационарные состояния  $z_{\text{st}}^{\text{eq}}$  асимптотически устойчивы и совпадают со стационарными состо-



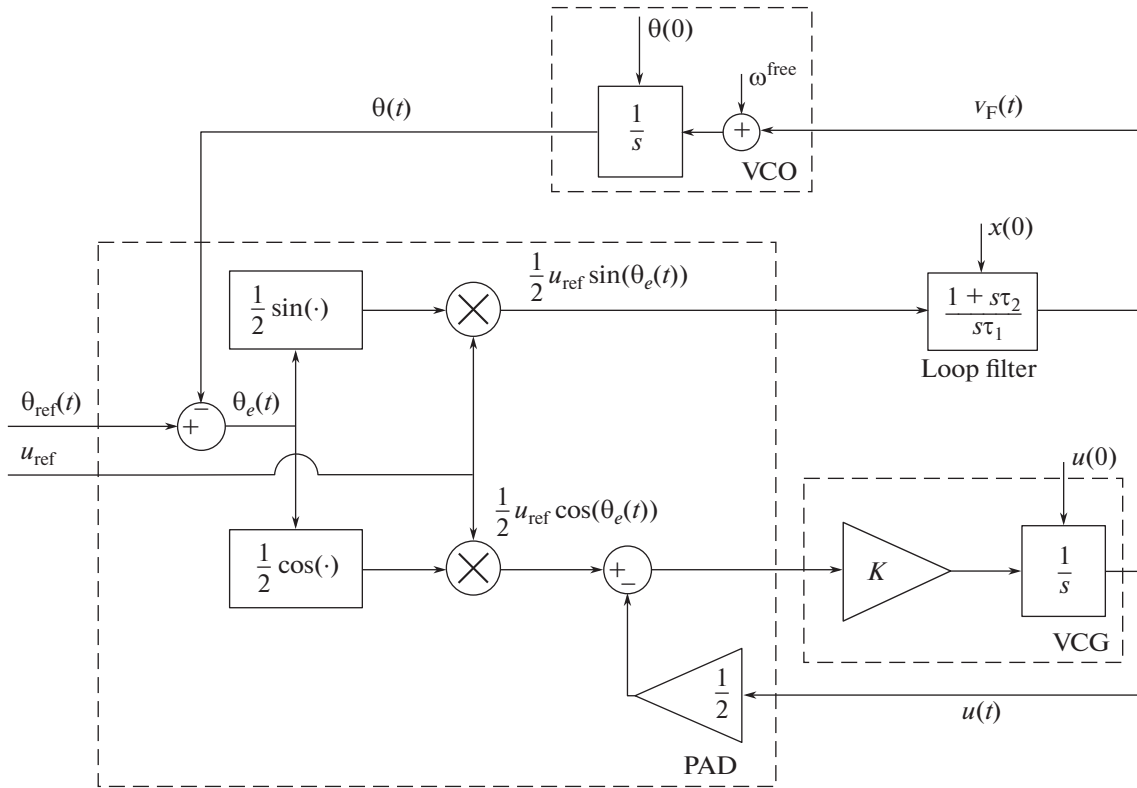


Рис. 2. Схема усредненной модели АФАП.

нениями исходной неавтономной модели (1), а  $z_{un}^{eq}$  — неустойчивы при всех допустимых значениях параметров схемы. Следующий результат позволяет обосновать переход от системы (1) к системе (2) для анализа устойчивости стационарного (синхронного) режима.

**Лемма.** *Существует такое  $\delta > 0$ , что при  $\|z_0 - z_{st}^{eq}\| < \delta$  выполнено соотношение  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t, z_0) - z(t, z_0)\| = 0$  для достаточно большого значения  $\omega_{ref}$ . Для произвольных  $z_0, \varepsilon > 0$  и  $T > 0$  при достаточно большом  $\omega_{ref}$  выполнена оценка  $\|y(t, z_0) - z(t, z_0)\| < \varepsilon$  для  $t \in [0, T]$ .*

**Схема доказательства.** Рассмотрим систему (1) в виде  $\dot{y} = (2\omega_{ref})^{-1} F(\tau, y)$ , где  $\tau = 2\omega_{ref}t$ ,  $F(\tau, y)$  —  $2\pi$ -периодическая функция  $\tau$ . Используя метод усреднения [10], получим систему (2)

$\dot{z} = \frac{1}{2\omega_{ref}} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_0^L F(\tau, z) d\tau$ , у которой решения близки с решениями неавтономной системы на конечном интервале времени, а устойчивые состояния равновесия совпадают с  $z_{st}^{eq}$ .

Система (2) описывает работу модели АФАП на рис. 2. Здесь блок амплитудно-фазового детектора заменен на нелинейный блок с соответствующими характеристиками, на вход которого по-

ступают амплитуда и фаза входного сигнала; выходом подстраиваемого генератора является фаза подстраиваемого сигнала.

Для анализа глобальной устойчивости отдельных и связанных систем автоподстройки естественными являются развитие и применение методов функций Ляпунова (см., например, [11–13]).

**Теорема 1.** *Все решения системы (2) стремятся к стационарному множеству (3).*

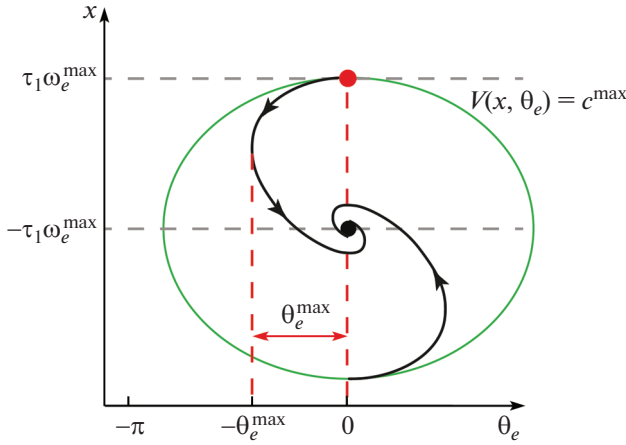
**Доказательство.** Уравнения для  $x(t)$  и  $\theta_e(t)$  в системе (2) не зависят от  $u_e(t)$ . Используя теорему [11] о глобальной устойчивости систем с цилиндрическим фазовым пространством и функцию Ляпунова

$$V(x, \theta_e) = \frac{1}{u_{ref} \tau_1} (x - \tau_1 \omega_e^{free})^2 + \int_0^{\theta_e} \sin s ds, \quad (4)$$

получим, что  $x(t) \rightarrow \tau_1 \omega_e^{free}$  и  $\theta_e(t) \rightarrow \pi k$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$u_e(t) = \exp\left(-\frac{Kt}{2}\right) \times \left( u_e(0) + \frac{Ku_{ref}}{2} \int_0^t (1 - \cos(\theta_e(\tau))) \exp\left(\frac{K\tau}{2}\right) d\tau \right) \rightarrow u_{ref} \pm u_{ref}$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .



**Рис. 3.** Оценка наибольшей расфазировки  $\theta_e^{\max}$  полуосью эллипса на переходном процессе после изменения параметров входного сигнала  $\omega_e^{\max} \rightarrow -\omega_e^{\max}$  и  $u_1 \rightarrow u_2$  из начального стационарного состояния системы  $(u_e(0), x(0), \theta_e(0)) = (0, \omega_e^{\max}, 0)$  к новому стационарному состоянию  $(0, -\omega_e^{\max}, 0)$ .

Для заданных допустимых диапазонов отклонения частоты  $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_e^{\max}]$  и входной амплитуды  $u_{\text{ref}} \in [u_{\min}, u_{\max}]$  решим задачу определения в системе (2) наибольшего отклонения разности фаз  $\theta_e^{\max}$  (максимальной расфазировки) на переходных процессах при мгновенном изменении частоты  $\omega_{\text{ref}}$  и амплитуды  $u_{\text{ref}}$  входного сигнала внутри заданных диапазонов:  $\theta_e^{\max} = \sup_{t>0} |\theta_e(0) - \theta_e(t)|$ .

**Теорема 2.** Если выполнено условие

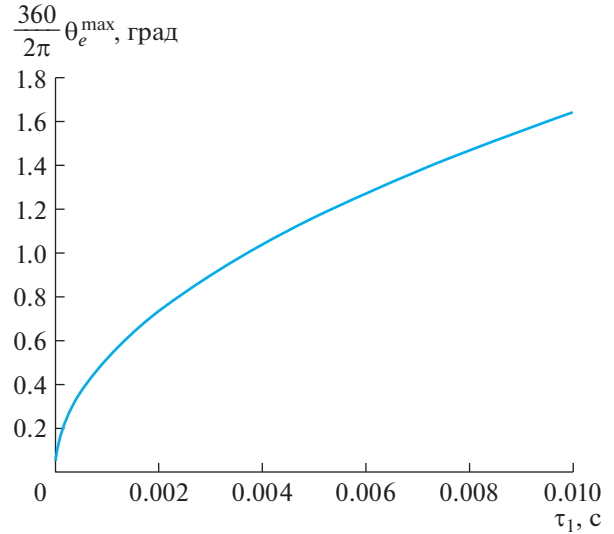
$$\left| 1 - \frac{4\tau_1(\omega_e^{\max})^2}{u_{\min}} \right| \leq 1, \quad (5)$$

то

$$\theta_e^{\max} \leq \arccos \left( 1 - \frac{4\tau_1(\omega_e^{\max})^2}{u_{\min}} \right). \quad (6)$$

**Схема доказательства.** Пусть система находилась в устойчивом стационарном состоянии при  $\omega_e^{\text{free}} = \omega_e^{\max} > 0$  и  $u_{\text{ref}} = u_1$ , а после изменения параметров входного сигнала на  $\omega_e^{\text{free}} = -\omega_e^{\max} < 0$  и  $u_{\text{ref}} = u_2$  перешла в новое устойчивое стационарное состояние. Рассмотрим линии уровня функции Ляпунова (4) для уравнений системы (2) относительно  $(x, \theta_e)$  после переключения:

$$V(x, \theta_e) = \frac{1}{u_2\tau_1} (x + \tau_1\omega_e^{\max})^2 + 1 - \cos \theta_e = c.$$



**Рис. 4.** Оценка (6) при  $u_{\min} = 24$  кВ,  $\omega_e^{\max} = 2\pi \times 2.5$  рад/с.

Тогда при

$$c^{\max} = V(\tau_1\omega_e^{\max}, 0) = \frac{4\tau_1(\omega_e^{\max})^2}{u_2}$$

линия уровня  $V(x, \theta_e) = c^{\max}$  является замкнутой и содержит состояние равновесия  $(\omega_e^{\max}\tau_1, 0)$  системы до переключения (рис. 3).

Поскольку построенная замкнутая область является положительно инвариантной, то координата  $\theta_e(t)$  траекторий с начальными данными из этой области не превысит максимальной координаты  $\theta_e(t)$  среди точек области. Из монотонности оценки по  $u_2$  получаем утверждение теоремы.

Заметим, что если условие (5) не выполнено, то рассматриваемая линия уровня будет не замкнутой и предложенная техника не позволяет провести аналитическую оценку. При этом теорема 1 обеспечивает отсутствие скрытых колебаний [14, 15] в фазовом пространстве системы, что позволяет проводить достоверные численные оценки. Пусть необходимо при известном диапазоне изменения частоты  $\omega_{\text{ref}} \in 2\pi[47.5, 52.5]$  рад/с и амплитуды напряжения  $u_{\text{ref}} \in [24, 43.8]$  кВ контактной сети определить эффективные параметры АФАП<sup>1</sup>. Положим собственную частоту подстраиваемого генератора равной номинальной  $\omega^{\text{free}} = 2\pi \times 50$  рад/с. Тогда  $\omega_e^{\text{free}} \in 2\pi[-2.5, 2.5]$  рад/с. Из оценки (6) на рис. 4 следует, что, например, для желаемой расфазировки в три градуса [7]

<sup>1</sup> Решение задачи для таких значений параметров, например, используется при проектировании электрооборудования компаниями ООО "Трансконвертер" и ООО "Сименс".

можно взять  $\tau_1 \leq 0.025$ . В инженерной литературе для уменьшения расфазировки часто берут значительно меньшие значения  $\tau_1$  (например,  $\tau_1 = 0.00005$  [4, с. 18]). Однако уменьшение  $\tau_1$  может приводить к существенному уменьшению соотношения сигнал/шум и деградации работоспособности системы [8, с. 132]. В заключение отметим, что блок-схемы на рис. 1 и 2 могут быть реализованы в виде цифровых алгоритмов на микроконтроллере. Для этого от системы с непрерывным временем можно перейти к системе с дискретным временем, применив, например, метод Эйлера или Тастина.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению “Передовые цифровые технологии” СПбПУ (соглашение от 17.11.2020 № 075-15-2020-934).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Фазовая автоподстройка частоты. М.: Связь, 1966.
2. Viterbi A. Principles of coherent communications. N.Y.: McGraw-Hill, 1966.
3. Best R.E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application. 6th ed. N.Y.: McGraw-Hill, 2007.
4. Karimi-Ghartemani M. Enhanced phase-locked loop structures for power and energy applications. John Wiley & Sons, 2014.
5. Golestan S., Guerrero J., Vasquez J. Single-phase PLLs: A review of recent advances // IEEE Transactions on Power Electronics. 2017. V. 32. № 12. P. 9013–9030.
6. Burton T., Jenkins N., Sharpe D., Bossanyi E. Wind energy handbook. John Wiley & Sons, 2011.
7. Kuznetsov N.V., Volskiy S.I., Sorokin D.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Power supply system for aircraft with electric traction // 2020. 21st Intern. Sci. Conf. on Electric Power Engineering. 2020. P. 1–5.
8. Gardner F.M. Phaselock Techniques. N.Y.: John Wiley & Sons, 3rd edition, 2005.
9. Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты // ДАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 541–544.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.
11. Матросов В.М., Маликов А.И. Развитие идей А.М. Ляпунова за 100 лет: 1892–1992 // Известия вузов. Математика. 1993. № 4. С. 3–47.
12. Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А. Устойчивость многорежимных формаций // ДАН. 2014. Т. 455. № 3. С. 269–274.
13. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and oscillations. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2014.
14. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. V. 51. P. 39–49.
15. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.

## ON THE GENERALIZED GARDNER PROBLEM FOR PHASE LOCKED-LOOP SYSTEMS IN ELECTRICAL GRIDS

N. V. Kuznetsov<sup>a,b,c</sup>, M. Y. Lobachev<sup>a</sup>, M. V. Yuldashev<sup>a</sup>, R. V. Yuldashev<sup>a</sup>,  
S. I. Volskiy<sup>d</sup>, and D. A. Sorokin<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>d</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

Methods of nonlinear analysis and synthesis of synchronization control systems for electrical grids have been developed. The use of averaging methods and Lyapunov-type stability criteria for the cylindrical phase space made it possible for the first time in the Gardner problem to obtain analytical estimates of the system parameters to ensure acceptable values of phase errors and to take into account changes in the reference signal amplitude.

*Keywords:* phase-locked loop, tunable lock-in range, Lyapunov function, Gardner problem, electrical grids

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” – 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлекгией, повторно не рассматриваются.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954321020090

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

**Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.**

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке <https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/> или направляются в редакцию по электронной почте [doklady\\_mathematics@mail.ru](mailto:doklady_mathematics@mail.ru).

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

*Для книг:* фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

*Для периодических изданий:* фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии

публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикация и фальсификация данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке <https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/>

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте <https://link.springer.com/> (для англоязычных журналов) и <https://elibrary.ru> (для русскоязычных журналов).

## ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

## НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. Академик РАН В. П. Иванов<sup>1,\*</sup>, Г. В. Сидоров<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Московская обл., Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия\*E-mail: [ivanov@niisi.ras.ru](mailto:ivanov@niisi.ras.ru)\*\*E-mail: [sidorov@msu.su](mailto:sidorov@msu.su)

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

*Ключевые слова:* необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов С.М., Петров В.С. Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

## THE TITLE OF ARTICLE

© 2021 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov<sup>a</sup>, G. V. Sidorov<sup>b</sup><sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

## СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

[https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license\\_agreement.doc](https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc)

- Авторский договор для английской версии

<https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/>

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.