СОДЕРЖАНИЕ

Номер 6, 2021

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 3–12

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

МЕТОД КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА К ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИНХРОННОГО ВАРЬИРОВАНИЯ

© 2021 г. А. А. Костоглотов[a], С. В. Лазаренко[b,*]

[a] *Ростовский государственный ун-т путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*

[b] *Донской государственный технический ун-т, Ростов-на-Дону, Россия*

**e-mail: lazarenkosv@icloud.com*

Поступила в редакцию 16.10.2020 г.
После доработки 09.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается решение задачи структурного синтеза квазиоптимальных законов управления на основе редукции задачи Лагранжа к изопериметрической задаче. Анализ вариации расширенного интеграла действия базируется на исследовании асинхронной (полной) вариации и приводит к краевой задаче, решение которой удовлетворяет условию максимума функции обобщенной мощности и требованию выполнения энергетического баланса на экстремальной траектории. На примере задачи А.Т. Фуллера показано, что множество квазиоптимальных управлений, построенных с использованием разработанного метода, содержит оптимальные решения.

DOI: 10.31857/S0002338821060111

Введение. Практическое использование принципа максимума Л.С. Понтрягина при создании оптимальных систем требует решения двухточечной краевой задачи. В общем случае она аналитически неразрешима, а ее численное решение связано с вычислительными трудностями. С помощью принципа максимума решаются задачи программного управления, а результаты синтеза оптимальных управлений известны лишь для редких случаев [1–3].

Для снижения сложности задачи синтеза могут быть использованы постулаты, обеспечивающие выделение допустимого класса решений и построения разумного приближения при поиске оптимального [2]. Совокупность конструктивных результатов получена на основе квазиоптимального синтеза, например, решения оптимизационной задачи с применением функционала обобщенной работы, что связано с введением дополнительного ограничения и рассмотрением соответствующей изопериметрической задачи. Это позволяет свести поиск решения оптимизационной задачи к необходимости анализа линейного уравнения Ляпунова, что является одной из причин интереса к методам квазиоптимального синтеза [2, 4, 5].

Изучение свойств объекта по результатам анализа приращения функционала [6] “позволяет составить определенное представление о характерных особенностях оптимальных условий” [7]. При этом, как правило, вследствие упрощающих допущений реализация подобных процедур возможна не единственным способом, что порождает множество решений. В отдельных случаях удается установить их связь с известными результатами теории оптимального управления и аналитической механики [8]. Так, например, в [9] рассматривается “теория оптимальных процессов на основе методов аналитической механики”.

В настоящей работе в основу анализа условий оптимальности положен принцип Гамильтона–Остроградского, в соответствии с которым движению динамической системы можно поставить в соответствие интеграл действия [9], имеющий стационарное значение на экстремали. Его использование как ограничения приводит к изопериметрической задаче отыскания условий минимума целевого функционала [10, 11]. На основе редукции исходной оптимизационной задачи Лагранжа к изопериметрической можно получить метод квазиоптимального структурного синтеза с помощью анализа вариации [6, 9, 12] расширенного функционала – свертки критерия качества с действием по Гамильтону [6, 13–15].

Анализ варьируемой траектории делает необходимым использование аппарата асинхронного варьирования [8, 9, 12]. Исследование асинхронной (полной) вариации расширенного целевого функционала позволяет получить краевую задачу, решение которой удовлетворяет требованиям максимума функции обобщенной мощности и энергетического баланса на экстремальной траектории. Это дает возможность предложить структуру множества квазиоптимальных решений, полученных в форме синтеза, для рассмотренного класса задач управления. На примере классической задачи А.Т. Фуллера показано, что данное множество содержит оптимальное решение.

Цель исследования – разработка метода квазиоптимального структурного синтеза законов управления лагранжевой динамической системой и проверка его конструктивности.

Задача исследования – редукция исходной задачи оптимального управления к изопериметрической задаче с ограничением в виде интеграла действия и поиск ее решения на основе анализа асинхронной вариации расширенного целевого функционала.

1. Постановка задачи синтеза управления. Рассматривается совокупность динамических систем, движение которых удовлетворяет уравнению Лагранжа второго рода [9, 12]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = u_s(t), \quad s = \overline{1,n}, \quad t \in [t_0, t_1] \subset R, \tag{1.1}$$

где $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – кинетическая энергия; $\mathbf{q} = [q_1, \dots q_n]^{\mathrm{T}} \in R^n$ – вектор обобщенных координат; $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n]^{\mathrm{T}} \in R^n$ – вектор обобщенных скоростей; $\mathbf{u}(t) = [u_1, \dots, u_n]^{\mathrm{T}}$ – вектор управляющих обобщенных сил; $n = \dim \mathbf{q}$ – число степеней свободы динамической системы; $^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования; точкой обозначена производная по времени. Такой случай “играет центральную роль при рассмотрении систем вида (1.1) и их обобщений” [4]. Кинетическая энергия динамической системы (1.1) является положительно-определенной квадратичной формой обобщенных скоростей $\psi_0(\dot{q}_1^2 + \ldots + \dot{q}_n^2) \le T \le \psi_1(\dot{q}_1^2 + \ldots + \dot{q}_n^2)$, $\psi_j = \mathrm{const}$, $\psi_j > 0$, $j = \overline{0,1}$, и коэффициенты матрицы кинетической энергии непрерывно дифференцируемы.

Положим, что управляющие обобщенные силы выбираются из множества суммируемых на любом конечном интервале функций, принимающих значение в ограниченной замкнутой выпуклой области

$$\mathbf{u} \in \bar{G}, \tag{1.2}$$

и для любых двух заданных точек расширенного координатного пространства

$$\begin{aligned} t = t_0, \quad \mathbf{q}(t_0) = [q_{10}, \dots q_{n0}]^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = [\dot{q}_{10}, \dots \dot{q}_{n0}]^{\mathrm{T}}, \\ t = t_1, \quad \mathbf{q}(t_1) = [q_{11}, \dots q_{n1}]^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \dots \dot{q}_{n1}]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

переводят динамическую систему (1.1) из начального состояния $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ в конечное состояние $(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1))$; $\bar{G}$ – ограниченная замкнутая выпуклая область.

Пусть для определенности

$$\bar{G} = \{u_s(t) : |u_s| \le h_s, h_s = \mathrm{const}, s = \overline{1,n}\}$$

и $h_0 = \min\limits_{1 \le s \le n} h_s > 0$. Тогда в соответствии с [5] выполняется необходимое и достаточное условие управляемости исследуемого класса лагранжевых динамических систем (1.1). Пусть также задана скалярная непрерывная вместе со своими частными производными определенно-положительная целевая функция $F(\mathbf{q})$. Задача синтеза управления системой (1.1) состоит в поиске управляющих обобщенных сил, доставляющих минимум целевому функционалу:

$$\mathrm{I}[\mathbf{q}] = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q})\, dt \to \min_{\mathbf{u} \in \bar{G}} \tag{1.4}$$

при условиях (1.2), (1.3).

2. Редукция задачи Лагранжа к изопериметрической задаче при заданном значении интеграла действия. В соответствии с вариационным способом описания динамики систем и утверждением принципа Гамильтона–Остроградского истиной траектории управляемой лагранжевой динамической системы (1.1), (1.4) поставим в соответствие экстремальное значение интеграла действия $\tilde{r}$ [9, 12]. Рассмотрим вектор обобщенных сил $\mathbf{Q}$ и соответствующую ему траекторию $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, проходящую через точки расширенного фазового пространства $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ и $(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1))$, для которого задано значение интеграла действия [9, 12]:

$$\mathrm{S}[\mathbf{q}, \mathbf{Q}] = \int_{t_0}^{t_1} (T + A)\,dt = r, \quad r = \mathrm{const}, \quad r > \tilde{r}, \tag{2.1}$$

где

$$A = \sum_{s=1}^{n} \int_{q_s(t_0)}^{q_s(t_1)} Q_s dq_s$$

– работа обобщенных сил.

Рассмотрим изопериметрическую задачу: среди всех соответствующих обобщенным силам $\mathbf{Q}$ траекторий, удовлетворяющих условиям (1.3), на которых функционал (2.1) принимает значение r, найти те, которые обеспечивают минимум целевому функционалу (1.4). В соответствии с [10, 15] решение экстремальной задачи (1.4), (2.1) предполагает исследование на экстремум расширенного целевого функционала

$$\mathrm{I}_1[\mathbf{q}, \mathbf{Q}] = \mathrm{I}[\mathbf{q}] + \lambda \mathrm{S}[\mathbf{q}, \mathbf{Q}], \tag{2.2}$$

где λ – множитель Лагранжа.

3. Исследование асинхронной вариации расширенного функционала. Пусть существуют такие множитель Лагранжа λ, вектор обобщенных сил $\tilde{\mathbf{Q}}$ и соответствующий ему вектор обобщенных координат $\tilde{\mathbf{q}}$, которые удовлетворяют (2.1) и обеспечивают минимум (1.4). К сравнению привлекается вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \delta\mathbf{Q}$, получаемый варьированием по Макшейну [2, 3]:

$$\delta\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \mathbf{C}, & t \in [\tau, \tau + \varepsilon], \\ \mathbf{0}, & t \,\overline{\in}\, [\tau, \tau + \varepsilon], \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{C}$ – произвольный вектор постоянных; $\tau \in [t_0, t_1]$ – момент времени, который задает замкнутый интервал времени $[\tau, \tau + \varepsilon] \subseteq [t_0, t_1]$; $\varepsilon \geq 0$ – малая величина. Вариация (3.1) также называется игольчатой. Обобщенной силе $\mathbf{Q}$ соответствует траектория $\mathbf{q}$.

Обусловленная действием варьированной обобщенной силы $\mathbf{Q}$ асинхронная вариация траектории с точностью до величин первого порядка малости в общем случае определяется выражением [9, 12]

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(t) = \delta\mathbf{q}(t) + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\,\Delta t(t), \tag{3.2}$$

где $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t)$ – синхронная вариация траектории; $\Delta t(t)$ – произвольная неотрицательная бесконечно малая функция времени относительно ε; асинхронное варьирование обозначено символом $\boldsymbol{\Delta}$.

На интервале $[t_0, \tau)$ $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$, поэтому траектории в расширенном конфигурационном пространстве совпадают и (3.2) принимает вид

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(t) = 0, \quad \delta\mathbf{q}(t) = 0, \quad t \in [t_0, \tau).$$

При $t = \tau$ $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}$, траектории $\tilde{\mathbf{q}}$, $\mathbf{q}$ проходят через одну и ту же точку фазового пространства [9]

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(\tau) = 0, \quad \delta\mathbf{q}(\tau) = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\tau)\,\Delta t(\tau). \tag{3.3}$$

На интервале $(\tau, \tau + \varepsilon]$ асинхронная вариация траектории определяется выражением (3.2).

На интервале $(\tau + \varepsilon, t_1]$ $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ и приращение обобщенных координат задается решением n дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода в вариациях с начальными условиями [6]

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(\tau + \varepsilon) = \delta\mathbf{q}(\tau + \varepsilon).$$

Вариация кинетической энергии, элементарное приращение работы и приращение целевой функции могут быть вычислены с точностью до величин первого порядка малости следующим образом:

$$\begin{gathered}\delta T=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial\tilde{q}_s}\delta q_s+\frac{\partial T}{\partial\dot{\tilde{q}}_s}\delta\dot{q}_s\right],\quad t\in[t_0,t_1],\\ \delta'\tilde{A}=\sum_{s=1}^{n}\tilde{Q}_s\delta q_s,\quad t\notin[\tau,\tau+\varepsilon],\\ \delta'A=\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\left(\tilde{Q}_s+\delta Q_s\right)\delta q_s=\delta'\tilde{A}+\sum_{s=1}^{n}\delta Q_s\delta q_s,\quad t\in[\tau,\tau+\varepsilon],\\ \delta'F=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial\tilde{q}_s}\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\tilde{V}_s\delta q_s,\quad t\in[t_0,t_1],\end{gathered}\tag{3.4}$$

где δ' – знак бесконечно малой величины для обозначения элементарной работы, которая не является вариацией соответствующей функции [12]; $\tilde{V}_s$ – фиктивная обобщенная сила.

В рамках решения поставленной изопериметрической задачи будем искать условия, при которых обусловленное вариацией обобщенной силы и соответствующей ей траектории приращение расширенного целевого функционала удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{I}_1[\mathbf{q},\mathbf{Q}]-\mathrm{I}_1[\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{Q}}]\geq 0.$$

На интервале $t\in[t_0,\tau)$ в силу (3.1) траектория не изменяется и расширенный целевой функционал приращения не получает.

В соответствии с [12] операция асинхронного варьирования позволяет получить асинхронную вариацию расширенного целевого функционала при любых допустимых вариациях обобщенной силы по следующему правилу:

$$\begin{gathered}\Delta I_1=\Delta\left(\int_{t_0}^{\tau}[F+\lambda(T+A)]dt+\int_{\tau}^{t_1}[F+\lambda(T+A)]dt\right)=\delta\int_{\tau}^{t_1}[F+\lambda(T+A)]dt+\\ +[F+\lambda(T+A)]\Delta t'\Big|_{\tau}^{t_1},\end{gathered}\tag{3.5}$$

где

$$\delta\int_{\tau}^{t_1}[F+\lambda(T+A)]dt$$

– главная линейная часть приращения расширенного функционала; функции времени $\Delta t'(\tau)$, $\Delta t'(t_1)$ произвольны и независимы.

На интервале $t\in[\tau,\tau+\varepsilon]$ главная линейная часть приращения расширенного целевого функционала с учетом (3.4) определяется следующим выражением:

$$\begin{gathered}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}[\lambda(\delta T+\delta'A)+\delta'F]dt=\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\left(\sum_{s=1}^{n}\lambda\delta Q_s\delta q_s+\left[\lambda\left(\delta T+\delta'\tilde{A}\right)+\delta'F\right]\right)dt=\\ =\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\left(\lambda\delta Q_s\delta q_s+\left[\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\tilde{q}_s}+\lambda\tilde{Q}_s+\tilde{V}_s\right)\delta q_s+\lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{\tilde{q}}_s}\delta\dot{q}_s\right]\right)dt.\end{gathered}\tag{3.6}$$

С учетом выражения (3.6) и аддитивности определенного интеграла слагаемое главной линейной части приращения расширенного целевого функционала на интервале $t\in[\tau+\varepsilon,t_1]$ записывается так:

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{t_1}[\lambda(\delta T+\delta'\tilde{A})+\delta'F]dt=\int_{\tau+\varepsilon}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\tilde{q}_s}+\lambda\tilde{Q}_s+\tilde{V}_s\right)\delta q_s+\lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{\tilde{q}}_s}\delta\dot{q}_s\right]dt.\tag{3.7}$$

Принимая во внимание (3.6) и (3.7), выражение (3.5) представим в следующем виде:

$$\Delta I_1 = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s \delta q_s dt + \int_{\tau}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} + \lambda \tilde{Q}_s + \tilde{V}_s \right) \delta q_s + \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \delta \dot{q}_s \right] dt + \\ + \left[\lambda (A+T) + F \right] \Delta t' \Big|_{\tau}^{t_1}. \tag{3.8}$$

Зависящие от обобщенных скоростей слагаемые вариации кинетической энергии из (3.8) интегрируются по частям:

$$\int_{\tau}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \delta \dot{q}_s dt = -\int_{\tau}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left(\dot{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} + \lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \right) \delta q_s dt + \sum_{s=1}^{n} \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \delta q_s \Bigg|_{\tau}^{t_1}. \tag{3.9}$$

По теореме Эйлера об однородных функциях с учетом связи синхронной и асинхронной вариаций обобщенных координат имеем

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \delta q_s \Bigg|_{\tau}^{t_1} = -\sum_{s=1}^{n} \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} \dot{\tilde{q}}_s \Delta t' \Bigg|_{\tau}^{t_1} = -2\lambda T \Delta t' \Big|_{\tau}^{t_1}. \tag{3.10}$$

Множитель Лагранжа для изопериметрической задачи [10, 16] $\lambda = \mathrm{const}$, $\dot{\lambda} = 0$.

В соответствии с (3.1) получаем

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s \delta q_s dt = \sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s(\tau) \delta q_s(\tau) \varepsilon + o(\varepsilon), \tag{3.11}$$

где $o(\varepsilon)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем ε [3]. Поскольку при $t \in [t_0, \tau)$ $\Delta I_1 = 0$, множитель Лагранжа – константа, зависящие от обобщенных скоростей слагаемые вариации кинетической энергии приводятся к выражениям (3.9), (3.10), то с учетом (3.3), (3.11) имеем

$$\Delta I_1 = -\sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s \dot{\tilde{q}}_s(\tau) \Delta t \varepsilon + \int_{\tau}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left[\lambda \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} + \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} + \tilde{Q}_s \right) + \tilde{V}_s \right] \delta q_s dt + \\ + \left[\lambda (A-T) + F \right] \Delta t' \Big|_{\tau}^{t_1} + o(\varepsilon).$$

Поскольку $\Delta t'(\tau)$, $\Delta t'(t_1)$ не равны нулю и независимы, то для определения стационарного значения расширенного целевого функционала I_1 следует считать равными нулю множители при $\Delta t'(\tau), \Delta t'(t_1)$, тогда [10, 16]

$$\left[\lambda (A-T) + F \right] \Big|_{\tau}^{t_1} = 0. \tag{3.12}$$

По исходному построению обобщенная сила выбрана так [7], что

$$\int_{\tau}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left[\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} + \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} + \tilde{Q}_s \right) + \lambda^{-1} \tilde{V}_s \right] \delta q_s dt = 0, \tag{3.13}$$

множитель Лагранжа в соответствии с [11, 16]

$$\lambda = \frac{-\sum_{s=1}^{n} \tilde{V}_s}{\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} + \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} + \tilde{Q}_s \right)}, \quad t \in [\tau, t_1], \tag{3.14}$$

и для достижения минимума расширенного целевого функционала необходимо, чтобы при $\varepsilon \to 0$ выполнялось условие

$$-\sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s \dot{\tilde{q}}_s(\tau) \geq 0. \tag{3.15}$$

Таким образом, при ограничениях (2.1) доставляющие минимум целевому функционалу (1.4) обобщенные силы и соответствующая им траектория при $\varepsilon \to 0$ удовлетворяют (3.12)–(3.14) и условию (3.15). Поскольку по построению траектория является оптимальной, то, принимая во внимание принцип динамического программирования Р. Беллмана в силу произвольности момента времени τ [2] получим следующую краевую задачу, стесненную условиями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} = \tilde{Q}_s + \lambda^{-1}\tilde{V}_s, \quad s = \overline{1,n},$$
$$\tilde{q}_s(t_0) = \tilde{q}_{s0}, \quad \dot{\tilde{q}}_s(t_0) = \dot{\tilde{q}}_{s0}, \quad \tilde{q}_s(t_1) = \tilde{q}_{s1}, \quad \dot{\tilde{q}}_s(t_1) = \dot{\tilde{q}}_{s1}, \tag{3.16}$$

$$\left[\lambda(A - T) + F\right]_t^{t_1} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{3.17}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s(t)\dot{\tilde{q}}_s(t) \le 0, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{3.18}$$

$$\lambda = \frac{-\sum\limits_{s=1}^{n}\tilde{V}_s}{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_s} + \dfrac{\partial T}{\partial \tilde{q}_s} + \tilde{Q}_s\right)} = \text{const}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.19}$$

Анализ необходимых условий экстремума (3.16)–(3.19) позволяет сделать выводы, которые могут служить основой процедуры синтеза квазиоптимального управления.

Уравнение (3.16) – уравнение Лагранжа второго рода, полученное варьированием расширенного целевого функционала (2.2), который можно трактовать как расширенный функционал действия. Условие (3.17) – требование выполнения энергетического баланса на экстремальной траектории.

Анализ условия, определяющего вариацию обобщенной силы

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda \delta Q_s(t)\dot{\tilde{q}}_s(t) \le 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

приводит к следующим заключениям. Величина

$$\delta\Phi = \sum_{s=1}^{n} \delta Q_s(t)\dot{\tilde{q}}_s(t)$$

является вариацией функции обобщенной мощности $\tilde{\Phi} = \tilde{Q}_1(t)\dot{\tilde{q}}_1(t) + \ldots + \tilde{Q}_n(t)\dot{\tilde{q}}_n(t)$ в момент t при значении обобщенной скорости, определенной на экстремальной траектории. Требование отрицательности вариации можно трактовать как необходимое условие обеспечения максимума функции обобщенной мощности всюду на экстремальной траектории

$$\tilde{\Phi} = \sum_{s=1}^{n} \tilde{Q}_s(t)\dot{\tilde{q}}_s(t) \to \max, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.20}$$

Тогда краевая задача может быть представлена в виде системы уравнений (3.16), (3.17), (3.19), (3.20). Ее разрешение и построение программной экстремальной траектории является достаточно сложной задачей, которая может быть решена различными численными методами – пристрелки, итераций и т.д. с текущим поиском максимума функции обобщенной мощности. Но вместе с этим система (3.16), (3.17), (3.19), (3.20) дает возможность решения задачи квазиоптимального структурного синтеза.

4. Квазиоптимальный структурный синтез управления. С учетом редукции исходной задачи и решения изопериметрической задачи структуру квазиоптимального управления можно определить следующим образом:

$$\tilde{u}_s(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) = \tilde{Q}_s(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) + \lambda^{-1}\tilde{V}_s(\tilde{\mathbf{q}}(t)), \quad s = \overline{1,n}.$$

Условие максимума функции обобщенной мощности позволяет утверждать, что в квазиоптимальной системе знак обобщенной силы определяется знаком обобщенной скорости, что позволяет установить следующую связь:

$$\tilde{Q}_s(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) = \lambda^{-1}\mu_s(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t))\dot{\tilde{q}}_s(t),$$

где $\mu_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)$ – знакопостоянная синтезирующая функция. Имеем следующую структуру управления:

$$\tilde{u}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)=\lambda^{-1}\left[\mu_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)\dot{\tilde{q}}_s(t)+\tilde{V}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t)\right)\right],\quad s=\overline{1,n}.$$

Знак управления определяется в процессе синтеза на основе требований устойчивости управляемого движения [4]. Использование прикладных способов учета ограничений на класс допустимых управлений позволяет записать [17, 18]

$$\tilde{u}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)=h_s\mathrm{sat}[\lambda^{-1}\Psi_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)]=\begin{cases}h_s, & \lambda^{-1}\Psi_s>h_s,\\ \lambda^{-1}\Psi_s, & |\lambda^{-1}\Psi_s|\le h_s,\\ -h_s, & \lambda^{-1}\Psi_s<-h_s,\end{cases}\tag{4.1}$$

где функция

$$\Psi_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)=\mu_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)\dot{\tilde{q}}_s(t)+\tilde{V}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t)\right)$$

определяет поверхность переключения.

Заметим, что при $\lambda\to 0$ управление (4.1) имеет релейный характер

$$\tilde{u}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)=h_s\mathrm{sign}[\mu_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t),\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right)\dot{\tilde{q}}_s(t)+\tilde{V}_s\left(\tilde{\mathbf{q}}(t)\right)].$$

5. Построение линии переключения. В соответствии (4.1) синтезирующая функция задает линию переключения. Рассматривается вариант ее построения.

При стационарных связях закон изменения кинетической энергии имеет вид [12]

$$\frac{d}{dt}T=\sum_{s=1}^{n}\tilde{Q}_s\dot{\tilde{q}}_s.$$

Откуда по теореме о среднем [19]

$$T(t)=\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}\tilde{Q}_s\dot{\tilde{q}}_s dt+T(t_0)=\sum_{s=1}^{n}Q_s'\int_{t_0}^{t}\dot{\tilde{q}}_s dt+T(t_0)=\sum_{s=1}^{n}(Q_s'\tilde{q}_s(t)+C_s),\quad t\in[t_0,t_1],$$

где Q_s' – среднее значение функции $\tilde{Q}_s$ на интервале $[t_0,t]$.

Для голономной лагранжевой динамической системы со стационарными связями $T=0.5\dot{\tilde{q}}_1p_1+\ldots+0.5\dot{\tilde{q}}_np_n$, где $p_s=a_{s1}(\tilde{\mathbf{q}})\dot{\tilde{q}}_1+\ldots+a_{sn}(\tilde{\mathbf{q}})\dot{\tilde{q}}_n$ – обобщенные импульсы; $a_{sk}(\tilde{\mathbf{q}})$ – коэффициенты, ограниченные при всех обобщенных координатах вместе с частными производными первого порядка [12]. Поэтому имеем следующую систему уравнений для построения синтезирующей функции:

$$\begin{cases}0.5\sum_{s=1}^{n}\dot{\tilde{q}}_sp_s=\sum_{s=1}^{n}(Q_s'\tilde{q}_s+C_s),\\ \mu_s\dot{\tilde{q}}_s+\tilde{V}_s=0.\end{cases}$$

Откуда приходим к соотношению:

$$\mu_s\left(\left[\sum_{s=1}^{n}(Q_s'\tilde{q}_s+C_s)\right]+0.5\left[\dot{\tilde{q}}_sp_s-\sum_{s=1}^{n}\dot{\tilde{q}}_sp_s\right]\right)+0.5V_sp_s=0.\tag{5.1}$$

Из (5.1) с учетом знакопостоянства синтезирующей функции имеем

$$\mu_s=\frac{|V_sp_s|}{\left|\left(2\left[\sum_{s=1}^{n}(Q_s'\tilde{q}_s(t)+C_s)\right]+\left[\dot{\tilde{q}}_sp_s-\sum_{s=1}^{n}\dot{\tilde{q}}_sp_s\right]\right)\right|}.\tag{5.2}$$

6. Пример. Рассматривается задача А.Т. Фуллера минимизации целевого функционала [15, 20]

$$\mathrm{I} = \int_0^{t_1} (q)^2 dt \to \min_{u\in[-1,1]}$$

на траекториях управляемой динамической системы

$$\begin{gathered} \ddot{q} = u, \\ t = t_0 = 0, \quad q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 1, \\ t = t_1, \quad q(t_1) = \dot{q}(t_1) = 0, \end{gathered}$$

уравнения которой следуют из принципа Гамильтона–Остроградского для $T = 0.5\dot{q}^2$. Для такой динамической системы и целевого функционала изопериметрическая задача предполагает исследование на экстремум расширенного целевого функционала

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{t_1} \left[q^2 + \lambda \left(\frac{\dot{q}^2}{2} + \int_{q(0)}^{q(t)} Q dq \right) \right] dt,$$

где Q – обобщенная сила.

Управление в рассматриваемой задаче нужно строить так, чтобы производная кинетической энергии была отрицательно-определенной функцией [4]. Тогда выражение (4.1) позволяет определить структуру квазиоптимального управления с точностью до синтезирующей функции:

$$u = -\mathrm{sat}[Q + 2\lambda^{-1} q] = -\mathrm{sat}[\lambda^{-1}(\mu\dot{q} + 2q)].$$

Поскольку линия переключения проходит через второй и четвертый квадранты [3], то с учетом (5.2) и выражения для кинетической энергии при $C_1 = 0$ имеем

$$\ddot{q} = -\mathrm{sat}\left[\lambda^{-1} \left(\frac{|\dot{q}|\dot{q}}{|Q'|} + 2q \right) \right] = -\,\mathrm{sat}[2\lambda^{-1}(k_1|\dot{q}|\dot{q} + q)],$$

где Q' – среднее значение Q; $k_1 = 1/2|Q'|$.

При $\lambda \to 0$

$$u = -\mathrm{sign}[k_1|\dot{q}|\dot{q} + q].$$

Параметр k_1 определяется по результатам анализа движения изображающей точки фазовой плоскости. В первом квадранте

$$\ddot{q} = -1. \tag{6.1}$$

Тогда в конце первого интервала управления длительностью Δ_1 при смене знака обобщенная координата q^1 и обобщенная скорость $\dot{q}^1$ находятся из (6.1) интегрированием:

$$\begin{gathered} \dot{q}^1 = -\Delta_1 + \dot{q}(0), \\ q^1 = -\frac{\Delta_1^2}{2} + \dot{q}(0)\Delta_1 - k_1\dot{q}^2(0). \end{gathered}$$

Подставляя решения в условие переключения, получим квадратное уравнение. С учетом анализа его решений [21] запишем как

$$\tau_1 = 1 + \sqrt{\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}}, \quad \tau_1 = \frac{\Delta_1}{\dot{q}(0)},$$

а фазовые переменные на кривой переключения имеют значения

$$\dot{q}^1 = -\dot{q}(0)(\tau_1 - 1), \quad q^1 = k_1\dot{q}(0)^2(\tau_1 - 1)^2.$$

Аналогично, рассматривая второй участок траектории, который начинается в точке $(q^1(\tau_1),$ $\dot q^1(\tau_1))$, приходит в точку $(q^2(\tau_2), \dot q^2(\tau_2))$, лежащую в области, где $u = +1$, сформируем условие переключения в форме

$$\tau_2 = (\tau_1 - 1)\left[1 + \sqrt{\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}}\right] = (\tau_1 - 1)\tau_1$$

и значения фазовых переменных

$$\dot q^2 = -\dot q(0)(\tau_1 - 1)^2, \quad q^2 = k_1 \dot q(0)^2 (\tau_1 - 1)^4.$$

Производя подобные преобразования для m переключений, по индукции получим

$$\tau_m = (\tau_1 - 1)^m \tau_1,$$
$$q^m = (-1)^m k_1 \dot q(0)^2 (\tau_1 - 1)^{2m},$$
$$\dot q^m = (-1)^m \dot q(0)(\tau_1 - 1)^m.$$

Промежутки времени между соседними переключениями в этой задаче образуют геометрическую прогрессию

$$\tau_m = \tau_{m-1}(\tau_1 - 1)$$

со знаменателем

$$\tau_1 - 1 = \sqrt{\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}}.$$

Пусть при $t = t_1$ происходит смена знака управления. Тогда при $u = -1$ для траектории имеем

$$\dot q(t_1) = -\Delta_m + \dot q^m,$$
$$q(t_1) = -\frac{\Delta_m^2}{2} + \dot q^m \Delta_m - k_1 (\dot q^m)^2,$$
$$\Delta_m = t_1 - t_m.$$

Исключая из этих уравнений промежуток времени Δ_m, запишем уравнения для определения k_1:

$$\delta_{m,k} = -\frac{1}{2}[(\tau_1 - 1)^m + \dot\delta_k]^2 + (\tau_1 - 1)^m [(\tau_1 - 1)^m + \dot\delta_k] - (\tau_1 - 1)^{2m} k_1,$$
$$\dot\delta_k = \frac{\dot q(t_1)}{\dot q(0)}, \quad \delta_k = \frac{q(t_1)}{\dot q(0)^2},$$

которые после преобразований записываются в форме геометрической прогрессии [19]:

$$b_m = b_{m-1}\left(\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}\right) = \frac{1}{2}\dot\delta_k^2 + \delta_{m,k},$$
$$b_{m-1} = \frac{1 + 2k_1}{2}\left(\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}\right)^{m-1}. \tag{6.2}$$

Оптимальному решению соответствуют кривые в фазовом пространстве, которые при $m \to \infty$ имеют вид закручивающихся к началу координат спиралей [20]. Приближенное значение k_1 определяется по первым двум членам геометрической прогрессии (6.2): $m = 2$. Пусть $\frac{1}{2}\dot\delta_k^2 + \delta_{m,k} =$ $= 0.05$. Тогда $k_1 \approx 0.4446$, а знаменатель геометрической прогрессии [20]

$$\sqrt{\frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}} \approx 0.2421,$$

что соответствует известному решению А.Т. Фуллера [20]

$$u = -\operatorname{sign}[0.4446 \dot q |\dot q| + q].$$

Заключение. Рассмотрена редукция задачи Лагранжа к изопериметрической задаче. На основе анализа асинхронной вариации расширенного функционала получена краевая задача с условием максимума функции обобщенной мощности и требованием выполнения энергетического баланса на экстремальной траектории. Установлена структура управляющей обобщенной силы для лагранжевой динамической системы при стационарных связях с точностью до синтезирующей функции. Предложен метод ее построения. Показано, что на оптимальной траектории синтез управляющей обобщенной силы лагранжевой динамической системы может быть построен на основе условия максимума функции обобщенной мощности.

Получено известное оптимальное решение задачи А.Т. Фуллера об управлении с учащающимися переключениями [15, 20]. Это позволяет утверждать, что множества квазиоптимальных управлений, синтезированные с использованием разработанного метода, содержат оптимальные решения.

Принцип максимума Л.С. Понтрягина имеет потенциал решения широкого круга оптимизационных задач, но при его применении возникают существенные сложности в случае динамических систем с большим числом степеней свободы, особенно нелинейных. По мнению авторов, разработанный метод синтеза квазиоптимальных законов управления дает возможность искать приближенное решение оптимизационной задачи без необходимости решения краевой задачи большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. II // АиТ. 1959. Т. 20. № 11. С. 1441–1458.
2. *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. *Пятницкий Е.С.* Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими системами управления на основе принципа декомпозиции // АиТ. 1989. № 1. С. 87–99.
5. *Пятницкий Е.С.* Управляемость классов лагранжевых систем с ограниченными управлениями // АиТ. 1996. № 12. С. 29–37.
6. *Костоглотов А.А.* Метод идентификации параметров голономных систем на основе аппарата асинхронного варьирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 2. С. 86–92.
7. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. № 1. С. 5–32.
8. *Голубев Ю.Ф.* Метод Охоцимского–Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Ч. 1. Метод Охоцимского–Понтрягина в теории управления // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2008. № 6. С. 49–55.
9. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 72 с.
10. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 248 с.
11. *Трухачев Р.И., Хоменюк В.В.* Теория неклассических вариационных задач. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970. 168 с.
12. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
13. *Костоглотов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В.* Синтез модели процесса с нестационарными возмущениями на основе максимума функции обобщенной мощности // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 12. С. 133–142.
14. *Костоглотов А.А., Лазаренко С.В.* Синтез адаптивных систем сопровождения на основе гипотезы о стационарности Гамильтониана гиперповерхности переключения // РЭ. 2017. Т. 62. № 2. С. 121–125.
15. *Kostoglotov A.A.* Solution of Fuller's Problem on the Basis of the Joint Pontryagin–Hamilton–Ostrogradskii Principle // Automatic Control and Computer Sciences. 2007. V. 41. № 4. P. 179–187.
16. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.–Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 1. 476 с.
17. *Фуртат И.Б.* Синтез алгоритма управления объектами с параметрической неопределенностью, возмущениями и насыщением входного сигнала // АиТ. 2017. № 12. С. 100–117.
18. *Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Непрерывное управление механической системой на основе метода декомпозиции // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 3–17.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
20. *Майкова О.Е.* Субоптимальные режимы в задаче Фуллера // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2002. Т. 236. С. 226–229.
21. *Алдакимов Ю.В., Меликян А.А., Наумов Г.В.* Перестройка режима в однопараметрическом семействе задач оптимального управления // ПММ. 2001. Т. 65. № 3. С. 400–407.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 13–23

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 531.11+531.011+51-72+517.977

ФОРМИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЗА СЧЕТ УПРАВЛЕНИЯ РЕАКЦИЯМИ ГОЛОНОМНЫХ КВАЗИИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Е. С. Брискин[a,b,*], В. В. Павловский[d], В. Е. Павловский[c], Л. Д. Смирная[a,b]

[a] *Волгоградский государственный технический ун-т, Волгоград, Россия*

[b] *Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис, Иннополис, Россия*

[c] *ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

[d] *Российский экономический ун-т им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия*

**e-mail: dtm@vstu.ru*

Поступила в редакцию 29.10.2020 г.
После доработки 15.12.2020 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Предлагается метод исследования динамики движения управляемых механических систем. Метод основан на введении управляющих воздействий как функций реакций голономных неидеальных связей. Физический смысл введенных функций – силы, виртуальная работа которых на возможных перемещениях исходной механической системы равна нулю. Введение таких сил позволяет составлять дифференциальные уравнения движения в традиционной форме уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, а определение оптимального управления по тому или иному критерию сводится к определению экстремума функции многих переменных, в простейшем случае к установлению коэффициентов линейного преобразования реакций связей. Приведены примеры модельных задач.

DOI: 10.31857/S0002338821060068

0. Введение. Как известно, в случае выбора избыточных координат уравнения движения механической системы, на которые накладываются голономные связи, можно получить из общего уравнения динамики [1, 2]. В обобщенных координатах q_j, $i = \overline{1, S}$, эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} = Q_j + R_j, \quad j = \overline{1, S}. \tag{0.1}$$

В (0.1) T – кинетическая энергия системы, Q_j – обобщенные силы, обусловленные известными активными силами, в общем случае зависящими от обобщенных координат q_j, включая и избыточные, скоростей $\dot{q}_j$ и времени, R_j – обобщенные реакции дополнительных голономных связей, описываемых следующим образом:

$$f_n(q_1, \ldots, q_S, t) = 0, \quad n = \overline{1, N} \quad (N < S). \tag{0.2}$$

При составлении уравнений (0.1) используется принцип освобождаемости от связей, в соответствии с которым связи (0.2) отбрасываются, а их действие заменяется реакциями R_j.

Таким образом, S уравнений (0.1) в совокупности с N уравнениями (0.2) содержат $2S$ неизвестных q_j и R_j. Поэтому для решения поставленной задачи привлекаются дополнительные уравнения. Обычно эти уравнения получают на основе постулирования идеальности связей:

$$\sum_{j=1}^{S} R_j \delta q_j = 0. \tag{0.3}$$

Варьируя уравнения связей (0.2)

$$\sum_{j=1}^{S} \frac{\partial f_n}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \tag{0.4}$$

домножая их затем на неопределенные множители Лагранжа λ_n и складывая с (0.3), получают

$$R_j = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_j}. \tag{0.5}$$

Подставляя затем (0.5) в (0.1) и учитывая (0.2) находят замкнутую систему уравнений, содержащую $S + N$ уравнений с $S + N$ неизвестными $q_1, ..., q_s, \lambda_1, ..., \lambda_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial q_j}. \\ f_n(q_1, \ldots, q_S, t) \end{cases} \tag{0.6}$$

1. Постановка задачи. Реакции связей R_j можно рассматривать как управляющие воздействия, реализующие программу движения (0.2) [3]. Условие (0.3) выражает требование минимальности затрат энергии на реализацию такой программы. Действительно, в этом случае сумма элементарных работ всех сил реакций связей равна нулю на любом возможном перемещении. Однако могут быть и другие условия, накладываемые на реакции R_j. В частности, вместо (0.3) можно потребовать, чтобы

$$\sum_{j=1}^{S} \Psi_j(R_j, \ldots, R_S) \delta q_j = 0. \tag{1.1}$$

В (1.1) Ψ_j можно определить как “квазиобобщенные” реакции связей, а уравнение (1.1) – как преобразование обобщенных реакций связей и определение “квазиидеальных связей”. Такие связи могут рассматриваться как управляющие воздействия на механическую систему, а метод их учета отличается от учета реакций сервосвязей [4–9] тем, что сохраняются исходные виртуальные перемещения, но реакции изменяются в соответствии с (1.1) таким образом, что виртуальная работа по-прежнему равна нулю. При этом изучение управляемых систем остается в рамках традиционного описания механических систем со связями.

Закон преобразования реакций связей может быть различным и, в частности, линейным:

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^{S} R_k a_{jk}. \tag{1.2}$$

Тогда вместо (1.1) имеет место уравнение

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\sum_{k=1}^{S} R_k a_{jk} \right] \delta q_j = 0. \tag{1.3}$$

Ставится задача составления уравнений движения, позволяющих формировать управляющие воздействия на механическую голономную систему с S степенями свободы, на которую накладываются голономные связи типа (0.2) и требуется определение оптимальных режимов перемещения механических систем по тому или иному критерию, например роботов, за счет целенаправленного выбора управляющих воздействий R_k, входящих в уравнения (1.1).

2. Метод решения. Как и при выводе уравнений Лагранжа 1-го рода за основу берется общее уравнение динамики в обобщенных координатах, отбрасываются дополнительные связи типа (0.2), а их действие заменяется реакциями R_j. В результате, как и ранее, получаются уравнения типа (0.1), которые теперь дополняются не уравнениями (0.3), а уравнениями типа (1.1). Тогда реакции R_k определяются из решения системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{S} a_{jk} R_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_j}, \quad k = 1, \ldots, S. \tag{2.1}$$

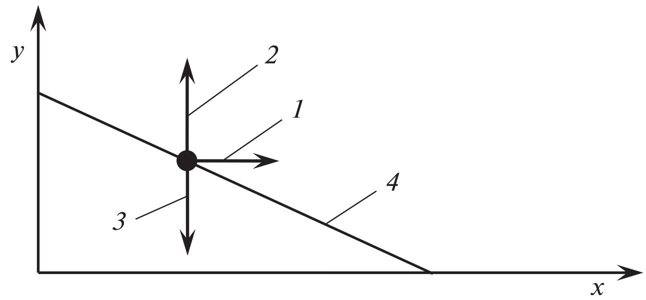


Рис. 1. Прямолинейное движение материальной точки: *1*, *2* – реакции R_x и R_y соответственно, *3* – внешняя активная сила G, *4* – траектория движения

Отсюда

$$R_k = \sum_{j=1}^{S} c_{jk} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_j}, \tag{2.2}$$

где c_{jk} – элементы матрицы, обратной матрице с элементами a_{kj}.

Если в (2.2) поменять местами индексы j и k и подставить значение R_j в дифференциальные уравнения движения в (0.1), то оно будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{k=1}^{S} c_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial q_k}. \tag{2.3}$$

При $c_{jk} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символы Кронекера, уравнения (2.3) совпадают с уравнениями Лагранжа 1-го рода.

Совместное решение (2.3) и (0.2) позволяет однозначно определить уравнения движения $q_j(t)$ и неопределенные множители Лагранжа λ_n. Что касается реакций R_j, то, в отличие от уравнений Лагранжа 1 рода, они, в общем случае, зависят не только от элементов программного движения (0.2) и действующих активных сил Q_j, но и от вида задаваемой функции Ψ_j $(R_1,...,R_S)$ (1.1), а в рассматриваемом случае – от элементов матрицы a_{jk}. Это предоставляет дополнительные возможности для формирования управляющих воздействий за счет целенаправленного выбора элементов матрицы a_{jk}.

3. Модельные задачи. 3.1. Прямолинейное движение материальной точки. Рассматривается задача формирования управляющих воздействий R_x, R_y (рис. 1), действующих на механическую систему, которая моделируется материальной точкой массы m с программным движением по прямолинейной траектории, лежащей в плоскости XOY:

$$y = b - kx. \tag{3.1}$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x, \\ m\ddot{y} = -G + R_y, \end{cases} \tag{3.2}$$

где G – внешняя активная сила, например сила тяжести.

Эти уравнения решаются совместно с уравнениями (3.1). Для реакций R_x и R_y в соответствии с (2.1) имеют место уравнения

$$\begin{cases} a_{11}R_x + a_{12}R_y = \lambda k, \\ a_{21}R_x + a_{22}R_y = \lambda. \end{cases} \tag{3.3}$$

Матрица $\|a_{jk}\|$ задается в форме

$$\|a_{jk}\| = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Такая форма (3.4) соответствует понятию “квазиидеальности” относительно преобразованных обобщенных сил, которые фактически являются неидеальными (не выполнено условие (0.3)), а при $\alpha = \beta = 0$ это соответствует обычным идеальным связям.

Решением являются

$$\begin{aligned} \lambda &= G\frac{1-\alpha\beta}{k^2+1-k(\alpha+\beta)}, \\ R_x &= G\frac{(k-\alpha)}{1+k^2-k(\alpha+\beta)}, \\ R_y &= G\frac{1-\beta k}{1+k^2-k(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь из (3.2) можно найти ускорения точки a_x, a_y:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = \frac{G}{m}\frac{(k-\alpha)}{1+k^2-k(\alpha+\beta)}, \\ a_y &= \ddot{y} = \frac{G}{m}\frac{k(\alpha-k)}{1+k^2-k(\alpha+\beta)}, \\ a &= \sqrt{a_x^2+a_y^2} = \frac{G|k-\alpha|}{m[1+k^2-k(\alpha+\beta)]}\sqrt{1+k^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Уровень тепловых потерь W за время τ в приводных двигателях, генерирующих управляющие силы (реакции связей) R_x, R_y, определяется из выражений [10]

$$W = \mu_x\int_0^\tau R_x^2dt + \mu_y\int_0^\tau R_y^2dt = \mu_x\frac{G^2(k-\alpha)^2\tau}{[1+k^2-k(\alpha+\beta)]^2} + \mu_y\frac{G^2(1-\beta k)^2\tau}{[1+k^2-k(\alpha+\beta)]^2}, \tag{3.7}$$

где μ_x, μ_y – параметры двигателей горизонтального и вертикального перемещения (для двигателей постоянного тока эти параметры зависят от активного сопротивления обмотки). Механическая работа A реакций связей (управляющих сил) R_x, R_y равна

$$A = \int_0^l R_xdx + \int_b^{b-kl} R_ydy = \frac{l(\beta k-\alpha)}{1+k^2-k(\alpha+\beta)}, \tag{3.8}$$

где l – расстояние, пройденное материальной точкой вдоль оси X.

Как и следовало ожидать, при $\alpha = \beta = 0$ (случай идеальных связей) полная работа равна нулю.

В отличие от уравнений Лагранжа 1-го рода результаты (3.5)–(3.8) позволяют осуществлять многокритериальную оптимизацию [11, 12] по показателям: величина управляющих сил R_x, R_y; ускорение точки a_x, a_y, a; уровень тепловых потерь в приводах; полная работа управляющих сил и др. Это возможно за счет целенаправленного варьирования параметров α и β.

На рис. 2, 3 представлены некоторые зависимости показателей движения.

Анализ графиков подтверждает, что при $\alpha = \beta = 0$ все анализируемые характеристики движения совпадают с характеристиками, соответствующими идеальным связям, а дополнительные возможности управления описываемой системой обеспечивают введенные “квазиидеальные” связи. Геометрический смысл “квазиидеальных” связей можно установить из условия того, что, как и для идеальных связей, равнодействующая активных сил и реакций связей F коллинеарна прямой, задаваемой уравнением связи (3.1).

Полученные результаты позволяют также определять необходимые оптимальные управляющие воздействия для обеспечения экстремума комплексного критерия качества:

$$I = I(R_x, R_y, a, a_x, a_y, W, A). \tag{3.9}$$

Такая возможность обусловлена зависимостью всех показателей, входящих в (3.9) от элементов α, β матрицы управляющих воздействий.

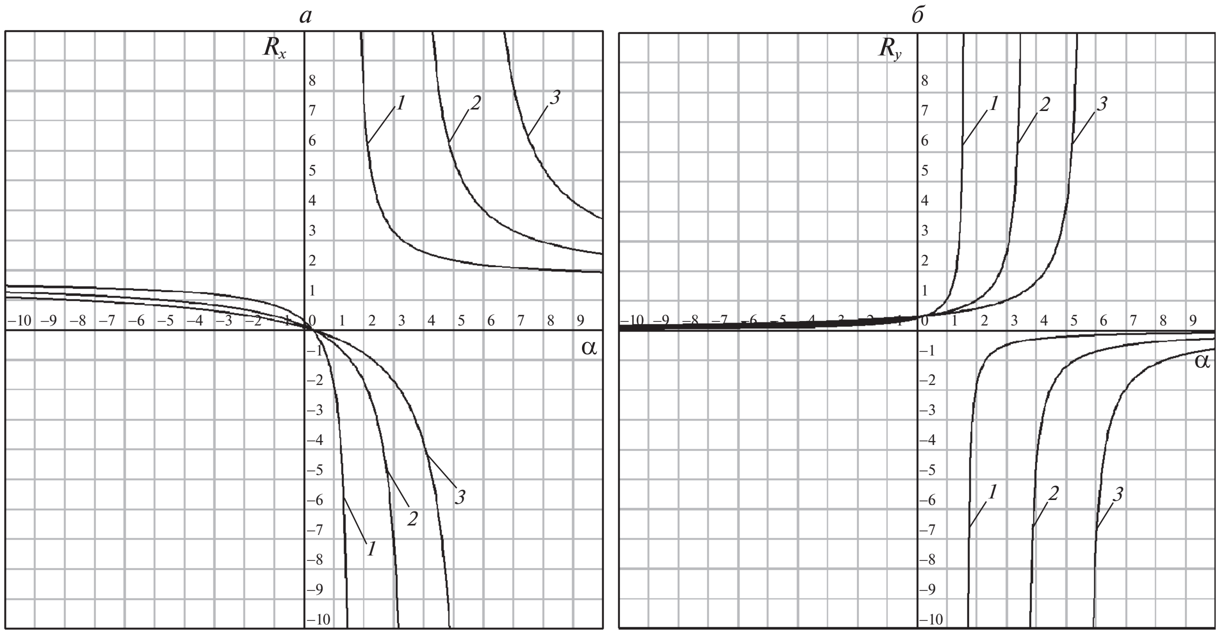


Рис. 2. Зависимости реакций R_x (*а*), R_y (*б*) от α: *1* – β=2, *2* – β = 0, *3* – β = –2

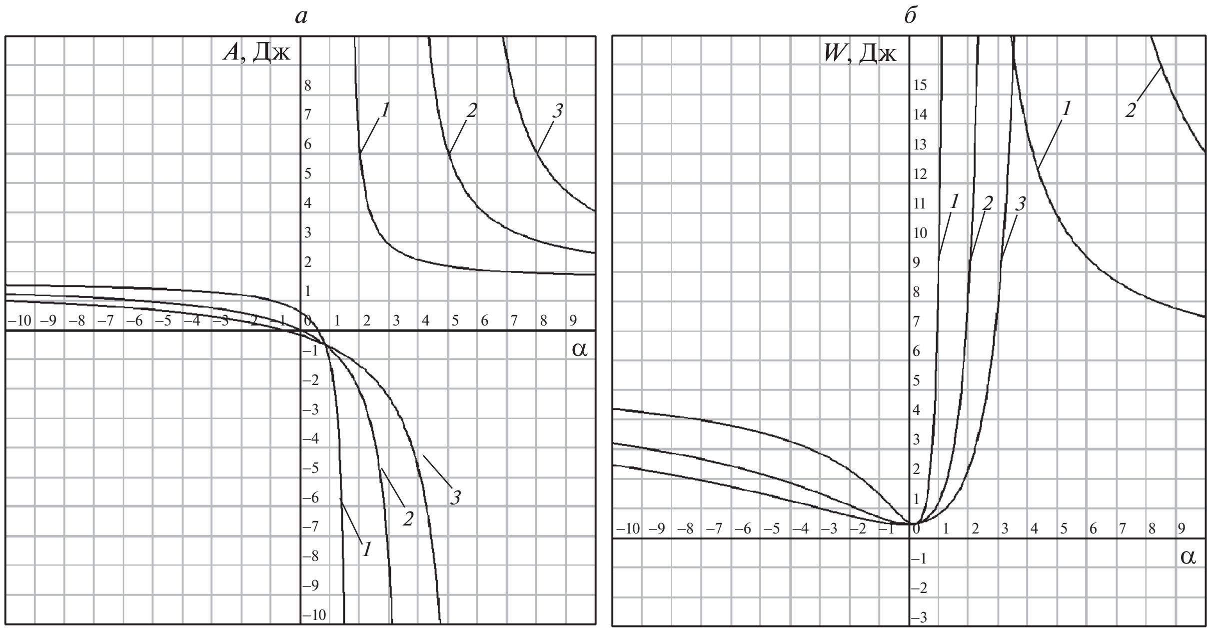


Рис. 3. Работа реакций связей (*а*) и тепловые потери в двигателе (*б*): *1* – β = 2, *2* – β = 0, *3* – β = –2

На графиках рис. 4 представлена зависимость комплексного показателя от элемента α матрицы управляющих воздействий при β = –2, 0 ,2:

$$I = |A| + \chi W, \tag{3.10}$$

где χ – весовой коэффициент, в расчетах χ = 1.

3.2. Движение материальной точки по окружности. Рассматривается задача формирования управляющих воздействий R_r, R_φ (рис. 5), которые действуют на механическую систему, моделируемую материальной точкой массы m с программным движением по

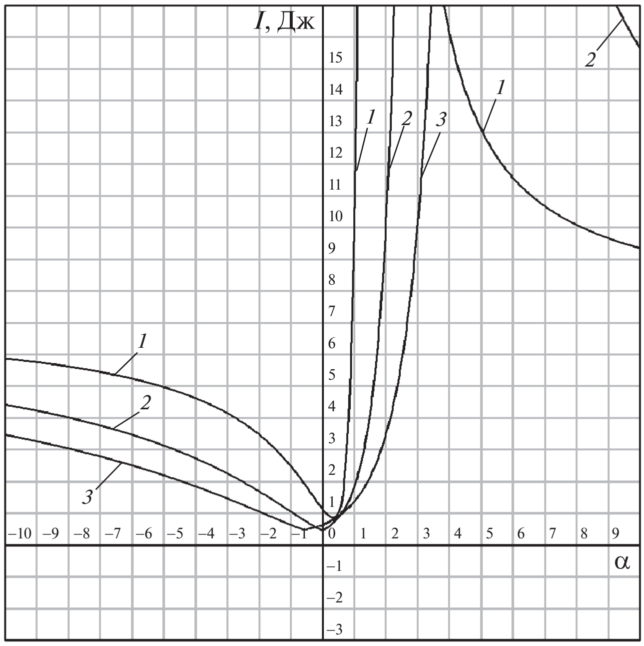


Рис. 4. Комплексный показатель I: *1* – $\beta = 2$, *2* – $\beta = 0$, *3* – $\beta = -2$

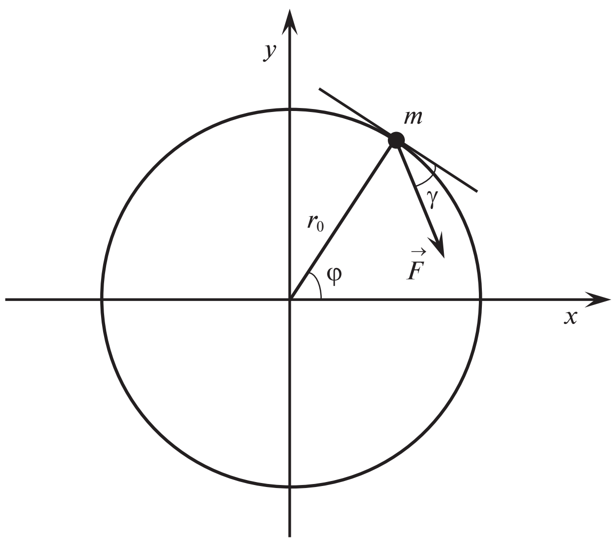


Рис. 5. Движение материальной точки по окружности

окружности радиуса r_0. На материальную точку действует внешняя активная сила $\vec{F}$, направленная под углом γ к касательной в каждой точке траектории движения.

В полярной системе координат r, φ дифференциальные уравнения движения и уравнение связи имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -F\sin\gamma + R_r, \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = -Fr\cos\gamma + R_\varphi, \\ f(r,\varphi) = r - r_0 = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Таблица 1. Параметры, определяющие вид решения уравнения Риккати (3.13)

β	$A = \beta/r_0$	$B = (1 - A)/\sqrt{2}$	B/A	Случай
−1	−0.5	$1.5/\sqrt{2} \approx 1.06$	−2.18	3
0	0	$1/\sqrt{2} \approx 0.7$	–	4
1	0.5	$0.5/\sqrt{2} \approx 0.35$	0.7	1
2	1	0	0	2
3	1.5	$-0.5/\sqrt{2} \approx -0.35$	−0.236	3

Как и в предыдущем случае, матрица $\|a_{jk}\|$ задается в форме (3.4). Тогда для реакций связи имеют место уравнения

$$R_r = \frac{\lambda}{1-\alpha\beta}; \quad R_\varphi = -\frac{\beta\lambda}{1-\alpha\beta}. \tag{3.12}$$

Следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче α, β – размерные коэффициенты: $[\alpha] = м^{-1}$; $[\beta] = м$.

Дифференциальное уравнение, описывающее движение точки по окружности, имеет вид уравнения Риккати с постоянной правой частью [13]:

$$\frac{d\omega}{dt} - A\omega^2 = B, \tag{3.13}$$

где

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad A = \frac{\beta}{r_0}, \quad B = \frac{F\sin\gamma}{mr_0^2}\beta + \frac{F\cos\gamma}{mr_0}. \tag{3.14}$$

В зависимости от знака величины B/A его решение может быть записано в одном из следующих четырех видов:

1) при $B/A > 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}}\operatorname{tg}(\sqrt{AB}\,t + C), \tag{3.15}$$

2) при $B/A = 0$ ($B = 0$)

$$\omega = -\frac{1}{At + C}, \tag{3.16}$$

3) при $B/A < 0$

$$\omega = \sqrt{-\frac{B}{A}}\frac{1 - Ce^{2\sqrt{-AB}t}}{1 + Ce^{2\sqrt{-AB}t}} = -\sqrt{-\frac{B}{A}}\operatorname{th}(\sqrt{-AB}\,t + C), \tag{3.17}$$

4) при $A = 0$ (специальный случай)

$$\frac{d\omega}{dt} = B, \quad \omega = Bt + C, \quad \varphi = B\frac{t^2}{2} + Ct + C_1.$$

Во всех случаях C, C_1 – произвольные постоянные.

В случае 1) ω за конечное время “уходит на бесконечность”, следовательно, имеет место так называемый “режим с обострением”. Для такого режима необходима “подкачка энергии” в систему, очевидно, она осуществляется силами реакций дополнительных “квазиидеальных” связей. В случае 3) угловая скорость ω по формуле (3.15) при $t \to \infty$ стремится к постоянному значению, как это следует из соответствующего свойства гиперболического тангенса.

Графики полученных решений представлены на рис. 6. Они построены для следующих значений параметров системы: $m = 1$, $F = 2$, $r_0 = 2$, $\gamma = \pi/4$. Все зависимости построены для $C = C_1 = 0$, что означает $\omega(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ (кроме случая 2)).

Параметры, определяющие выбор случая из числа приведенных выше, даны в таблице 1.

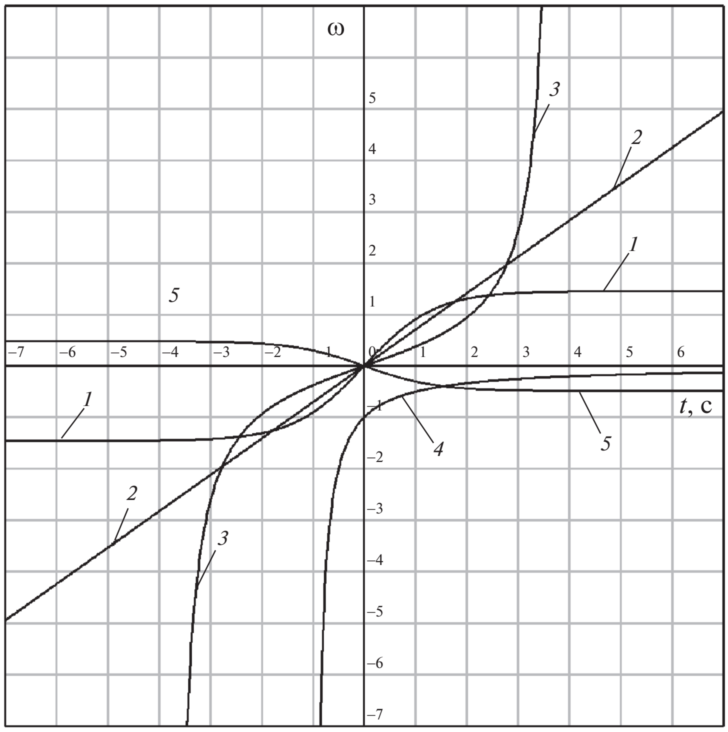


Рис. 6. Зависимость скорости изменения угла φ от времени ω(*t*): *1* – β = –1, *2* – β = 0, *3* – β = 1, *4* – β = 2, *5* – β = 3

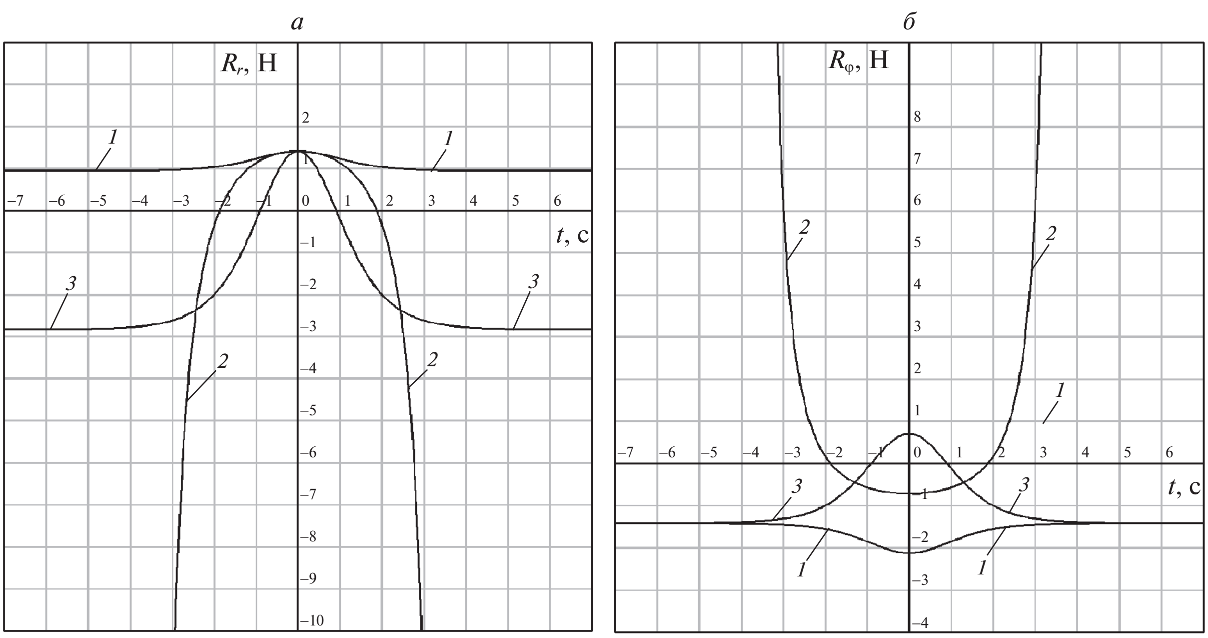


Рис. 7. Радиальные R_r (*а*) и трансверсальные R_φ (*б*) реакции: *1* – β = 3, *2* – β = 1, *3* – β = –1

Зная решение уравнения (3.11) из уравнений (3.9) с учетом (3.10) можно определить R_r и R_φ:

$$\begin{cases} R_r = F\sin\gamma - mr_0\dot{\varphi}^2, \\ R_\varphi = mr_0\ddot{\varphi} - F\cos\gamma. \end{cases} \tag{3.18}$$

На графиках рис. 7 представлены зависимости $R_r = R_r(\beta, t)$ и $R_\varphi = R_\varphi(\beta, t)$.

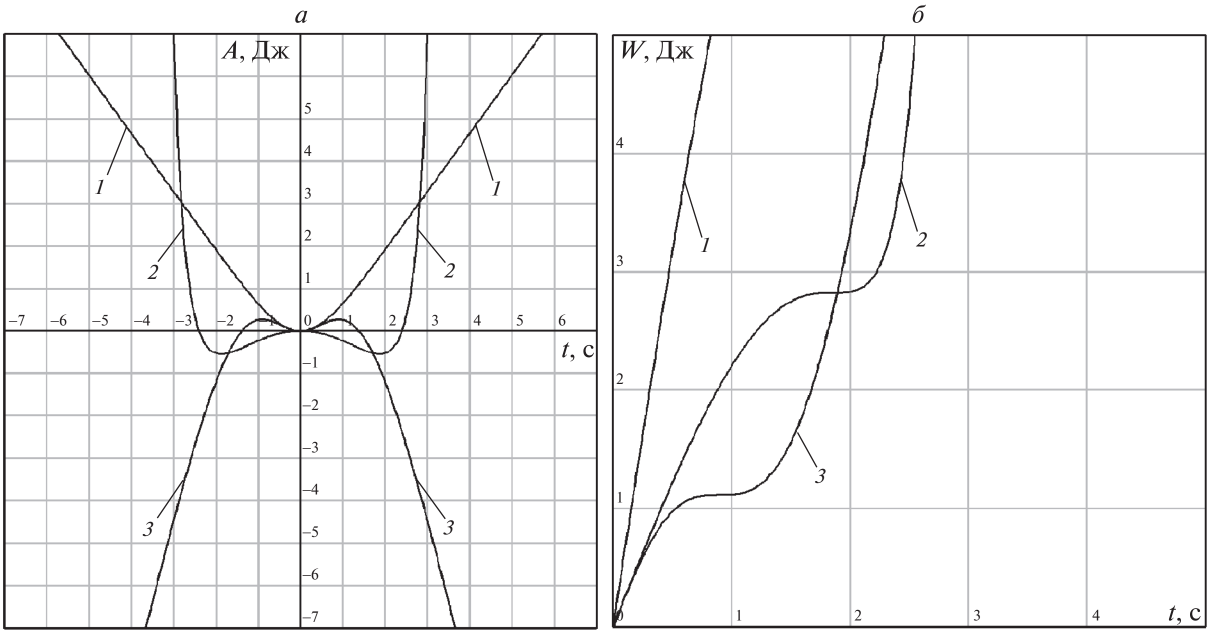


Рис. 8. Работа дополнительных реакций связей (*а*), тепловые потери в двигателе (*б*): *1* – $\beta = 3$, *2* – $\beta = 1$, *3* – $\beta = -1$

Уровень тепловых потерь A за время t в приводных двигателях радиального и трансверсального перемещений определяется из выражений, аналогичных (3.7), и графически представлен на графиках (рис. 8) в зависимости от β.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что на проведение многокритериальной оптимизации влияет только один элемент β из элементов матрицы управляющих воздействий $\|a_{jk}\|$.

3.3. Плоское движение тела при наложении голономной связи. Рассматривается задача формирования управляющих воздействий на твердое тело, совершающее плоское движение под действием постоянной следящей силы $\vec{F}$, на одну из точек которого накладывается голономная связь (рис. 9):

$$y_A = H. \tag{3.19}$$

Положение твердого тела описывается координатами центра масс x_C, y_C и углом φ, образованным отрезком CA с горизонтальной осью OX.

В обобщенных координатах x_C, y_C, φ уравнение связи имеет вид

$$f\left(x_C, y_C, \varphi\right) = y_C + l\sin\varphi = 0, \tag{3.20}$$

где l – длина отрезка CA.

Как и в предыдущих примерах, при линейном преобразовании реакций связей (1.2) уравнения (2.1) имеют вид

$$\begin{cases} R_1 + \alpha R_2 = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_C} = 0, \\ \beta R_1 + R_2 = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y_C} = \lambda, \\ R_3 = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \lambda l \cos\varphi. \end{cases} \tag{3.21}$$

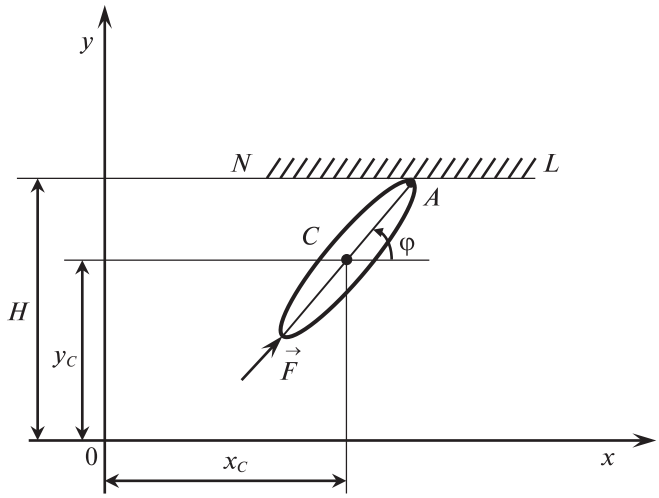


Рис. 9. Расчетная схема плоского движения твердого тела под действием следящей силы F: C – центр масс тела, x_C, y_C, φ – обобщенные координаты, NL – отрезок прямой, являющейся голономной (геометрической) связью, накладываемой на движение точки A твердого тела

Тогда уравнения движения рассматриваемой механической системы можно представить в форме

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = F\cos\varphi - \dfrac{\alpha\lambda}{1-\alpha\beta}, \\ M\ddot{y}_C = F\sin\varphi - \dfrac{\lambda}{1-\alpha\beta}, \\ J\ddot{\varphi} = \lambda l\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.22}$$

Дифференциальные уравнения (3.22) дополняются дважды продифференцированными уравнениями связей

$$\ddot{y}_C + l\ddot{\varphi}\cos\varphi = l\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \tag{3.23}$$

Совместное решение (3.22) и (3.23) позволяет найти неопределенный множитель λ и получить дифференциальное уравнение относительно $\varphi = \varphi(t)$:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(1-\alpha\beta)\,J[l\dot{\varphi}^2M\cos\varphi\sin\varphi - F\sin\varphi]}{J + M\,(1-\alpha\beta)\,l^2\cos\varphi\sin\varphi}, \\ J\ddot{\varphi} = \dfrac{(1-\alpha\beta)\,J[Ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - F\sin\varphi]}{J + M\,(1-\alpha\beta)\,l^2\cos\varphi\sin\varphi}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Особенность второго уравнения (3.24) состоит в том, что оно позволяет исследовать устойчивость программного движения $\varphi = 0$. Действительно, соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$J\delta\ddot{\varphi} + (1-\alpha\beta)\,Fl\delta\varphi = 0. \tag{3.25}$$

Если связи идеальные ($\alpha = \beta = 0$), то устойчивый режим обеспечивается только в случае "толкающего" режима воздействия внешней силы F на твердое тело ($F > 0$). Однако в случае учета управляющих "квазиидеальных" связей, таких, что

$$1 - \alpha\beta < 0, \tag{3.26}$$

и "тянущий" режим воздействия внешней силы F ($F < 0$) также оказывается устойчивым. Такая особенность является положительным фактором при проектировании движителей мобильных роботов, работающих в "тянущем" режиме [14], а использование понятия "квазиидеальных" связей служит удобным инструментом для исследования устойчивости движения.

Заключение. Предложено определение “квазиидеальных” связей, отличающихся от идеальных тем, что их реакциями являются “квазиобобщенные” силы, но виртуальная работа которых, так же, как и для реакций идеальных связей, равна нулю. Получены уравнения Лагранжа для механической системы с избыточными координатами и с дополнительными уравнениями голономных “квазиидеальных” связей. Рассмотренный метод составления уравнений движения представляет дополнительные возможности для построения оптимального программного движения по критерию, состоящего из различных показателей. Применение “квазиидеальных” связей в системе управления расширяет возможности обеспечения устойчивости движения механических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. 592 с.
2. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 720 с.
3. *Добронравов В.В.* Основы аналитической механики. М.: Выс. шк., 1976. 263 с.
4. *Бёген А.* Теоретическое исследование гироскопических компасов Аншютца и Сперри: Диссертация защищена в ноябре 1922 г. перед Факультетом наук в Париже. Париж, 1922.
5. *Козлов В.В.* Динамика систем с сервосвязями. I // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 353–376.
6. *Козлов В.В.* Динамика систем с сервосвязями. II // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 579–611.
7. *Голубев Ю.Ф.* Динамика систем с сервосвязями // Препринт № 19. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2000. 28 с.
8. *Голубев Ю.Ф.* Механические системы с сервосвязями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 211–224.
9. *Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с разгоняющей силой // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 13–23.
10. *Брискин Е.С., Калинин Я.В.* Об энергетически эффективных алгоритмах движения шагающих машин с цикловыми движителями // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 2. С. 170–176.
11. *Малолетов А.В., Брискин Е.С.* Оптимизация структуры, параметров и режимов движения шагающих машин со сдвоенными движителями: монография. Волгоград: ВолгГТУ, 2015. 174 с.
12. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учеб. пособие для вузов. М.: Дрофа, 2006. 175 с.
13. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11-е. испр. М.: Изд-во ДКИ, 2016. 512 с.
14. *Брискин Е.С., Артемьев К.С., Вершинина И.П., Малолетов А.В.* Об устойчивости плоского движения мобильных роботов // Изв. Волгоградск. гос. тех. ун-та. 2020. № 9 (244). С. 11–16.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 24–34

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 681.51.015

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК САМОЛЕТА ПО ПОЛЕТНЫМ ДАННЫМ[1]

© 2021 г. **В. Н. Овчаренко[a,*], Б. К. Поплавский[b]**

[a] *МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*

[b] *ЛИИ, МАИ, МО, г. Жуковский, Россия*

**e-mail: owcharenko.v@yandex.ru*

Поступила в редакцию 14.01.2021 г.
После доработки 23.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается проблема описания нестационарных аэродинамических коэффициентов самолета. Предложен подход, основанный на параметризации и последующей идентификации аэродинамических переходных функций частотно-временным методом. Эффективность подхода показана на примере идентификации коэффициента подъемной силы ближнемагистрального самолета по полетным данным.

DOI: 10.31857/S0002338821060147

Введение. В эксплуатационных диапазонах изменения кинематических переменных аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются мгновенными значениями аэродинамических углов, угловых скоростей и положением аэродинамических органов управления. Эта зависимость аэродинамических характеристик может выражаться линейными или нелинейными функциями от переменных движения.

При энергичном маневрировании или при интенсивных внешних воздействиях (например, при попадании в сильный порыв ветра в полете в неблагоприятных погодных условиях) условия установившегося полета нарушаются и значения кинематических переменных могут выйти за пределы допустимых эксплуатационных ограничений. На больших углах атаки или на больших угловых скоростях возникают нелинейные аэродинамические эффекты, обусловленные отрывом набегающего потока от несущих поверхностей и разрушением системы вихрей. Любой из этих случаев приводит к нестационарным аэродинамическим нагрузкам [1]. Поэтому исследование вопросов безопасности полета, отработка навыков пилотирования в этих условиях приобретают чрезвычайную важность. Эти факторы приводят к необходимости разработки адекватных математических моделей аэродинамических характеристик, которые можно было бы применить как при решении задач динамики полета, так и в программном обеспечении пилотажных стендов и тренажеров.

Можно выделить два основных подхода к построению математических моделей для моделирования нестационарных аэродинамических характеристик самолетов.

Первый подход (в хронологическом порядке) был предложен в работе [2] и основан на использовании аэродинамических переходных функций. В дальнейшем этот подход получил развитие в публикациях [3, 4]. Неопределенность в задании аэродинамических переходных функций для конкретного самолета на заданном маневре составляет основную трудность применения этого подхода.

Второй подход предложен в [5, 6] и основан на знании координаты точки отрыва потока и разрушении вихревой системы на аэродинамическом профиле, которая в летном эксперименте не наблюдается. Применительно к нестационарным аэродинамическим характеристикам самолета этот подход рассмотрен в [7, 8]. По существу в этом случае самолет отождествляется с некоторым аэродинамическим профилем с эквивалентными аэродинамическими характеристиками.

[1] Работа выполнена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение от 16 ноября 2020 г. № 075-15-2020-924).

В настоящее время получил развитие метод искусственных нейронных сетей для моделирования динамических эффектов, обусловленных отрывом и разрушением вихрей [9]. В этом случае понятия аэродинамических переходных функций и точки отрыва потока не применяются. Кроме того, рассматриваются и другие подходы к описанию динамики самолета на больших углах атаки [10].

В предлагаемой статье аэродинамические переходные функции аппроксимируются линейным дифференциальным уравнением первого порядка и полиномиальным входным сигналом по углу атаки и угловой скорости тангажа с неизвестными коэффициентами. Значения этих коэффициентов определяются в процессе решения задачи идентификации по полетным данным, полученным в натурном летном эксперименте.

1. Математическая модель нестационарных аэродинамических характеристик самолета. Рассмотрим математическую модель только коэффициента подъемной силы летательного аппарата в целом в условиях нестационарного обтекания. Пусть выполнены следующие предположения:

• аэродинамические характеристики самолета в установившемся движении известны с высокой точностью;

• на интервале обработки полетных данных конфигурация самолета остается постоянной;

• аппроксимация нестационарных аэродинамических коэффициентов зависит от постоянных параметров, значения которых можно уточнить по полетным данным;

• для описания нестационарных аэродинамических коэффициентов можно применить метод аэродинамических переходных функций [3].

Пусть зависимость коэффициента подъемной силы самолета c_y от параметров полета (угла атаки α, числа M, угловой скорости тангажа ω_z) и параметров конфигурации на неустановившемся режиме полета может быть представлена в виде

$$c_y = c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}) + \Delta c_y(t, \alpha, M, \delta_{\text{конф}}; \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z); \quad t \in [0, T],$$

где $c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}})$ – коэффициент подъемной силы, полученный в аэродинамических продувках или расчетным путем с учетом полетной конфигурации самолета; $\Delta c_y(t, \alpha, M, \delta_{\text{конф}}; \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$ – поправка коэффициента подъемной силы в условиях неустановившегося движения с учетом полетной конфигурации самолета; $\delta_{\text{конф}} = (\delta_{\text{в}}, \delta_{\text{пр}}, \delta_{\text{закр}}, \delta_{\text{и}}, \delta_{\text{т.щ}}, \delta_{\text{ш}}, \text{и т.д.})$ – вектор переменных, определяющих полетную конфигурацию самолета (отклонение руля высоты, предкрылков, закрылков, интерцепторов, тормозных щитков, шасси и т.д).

В силу предположения а) следует ожидать, что поправка $\Delta c_y(t, \alpha, M, \delta_{\text{конф}}; \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$ мала по абсолютному значению и может быть представлена в виде

$$\Delta c_y(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}; \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z) = \Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}) + \Delta c_{y\text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z),$$

где $\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}})$ – поправка коэффициента подъемной силы в установившемся движении; $\Delta c_{y\ \text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$ – динамическая поправка коэффициента подъемной силы, обусловленная нестационарными аэродинамическими эффектами в неустановившемся движении.

Поправку $\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}})$ удобно представить в виде суммы некоторых функций от наиболее значимых переменных с неизвестными коэффициентами:

$$\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}) = \sum_{i=1}^{N_g} c_i g_i(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}), \tag{1.1}$$

где $g_i(\alpha, M, \delta_{\text{конф})}$ – известные функции и их количество N_g, которые подбираются в процессе решения задачи идентификации; $c_1, c_2, \ldots$ – неизвестные коэффициенты, значения которых оцениваются по полетным данным на неустановившемся маневре. Примером суммы (1.1) может служить выражение $\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}}) = c_1\alpha + c_2\delta_{\text{в}}$.

Для определения поправки $\Delta c_{y\,\text{дин}}(t,\dot{\alpha},\dot{\omega}_z)$ применим метод аэродинамических переходных функций. Рассмотрим $\Delta c_{y\,\text{дин}}$ вида

$$\Delta c_{y\,\text{дин}}(t,\dot{\alpha},\dot{\omega}_z) = \frac{b_a}{V}\int_0^t h_\alpha(t-\tau;\alpha(\tau),\omega_z(\tau))\frac{d\alpha}{d\tau}d\tau + \\ +\frac{b_a}{V}\int_0^t h_{\omega_z}(t-\tau;\alpha(\tau),\omega_z(\tau))\frac{d\omega_z}{d\tau}d\tau, \tag{1.2}$$

где h_α, h_{ω_z} – аэродинамические переходные функции; b_a – средняя аэродинамическая хорда; V – скорость полета.

Выражение (1.2) в уравнения динамики продольного движения самолета впервые введено в работе [2] и является результатом эвристических рассуждений о структуре аэродинамических коэффициентов как функционалов от угла атаки α и угловой скорости тангажа ω_z. Однако ни из теории нестационарного обтекания, ни из аэродинамического эксперимента не ясно как задавать аэродинамические переходные функции в аналитическом виде на конкретном маневре самолета. Поэтому для выявления вида аэродинамических переходных функций и накопления статистической информации необходимо идентифицировать h_α, h_{ω_z} вместе с другими аэродинамическими поправками на различных тестовых маневрах в натурном эксперименте. В такой постановке задача идентификации нестационарных аэродинамических характеристик остается все еще сложной. Однако, учитывая достаточно общий характер структуры уравнения (1.2), заменим его выражением

$$\Delta c_{y\,\text{дин}}(t,\dot{\alpha},\dot{\omega}_z) = \frac{b_a}{V}\int_0^t h_\alpha(t-\tau;\alpha(\tau))\frac{d\alpha}{d\tau}d\tau + \frac{b_a}{V}\int_0^t h_{\omega_z}(t-\tau;\omega_z(\tau))\frac{d\omega_z}{d\tau}d\tau. \tag{1.3}$$

Интегралы в (1.3) имеют одинаковую структуру и могут быть изучены как один интеграл с переменным верхним пределом

$$\Delta C(t) = \int_0^t h(t-\tau;u(\tau))\dot{u}(\tau)d\tau, \tag{1.4}$$

где $u(\tau) = (\alpha(\tau)$ или $\omega_z(\tau))$.

Продифференцируем $\Delta C(t)$ по t, получим

$$\frac{d}{dt}\Delta C(t) = \int_0^t \frac{\partial h(t-\tau;u(\tau))}{\partial t}\dot{u}(\tau)d\tau + h(0;u(t))\frac{du}{dt}. \tag{1.5}$$

Выберем переходную функцию такой, что

$$\frac{\partial h(t-\tau;u(\tau))}{\partial t} = ah(t-\tau;u(\tau)), \quad \tau \le t, \tag{1.6}$$

где $a = \text{const}$. Тогда совокупность выражений (1.4)–(1.6) может быть записана в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $\Delta C(t)$:

$$\frac{d}{dt}\Delta C(t) = a\Delta C(t) + \varphi(u(t))\frac{du}{dt} \tag{1.7}$$

с нулевым начальным условием $\Delta C(0) = 0$. В этом уравнении выполнена замена обозначений $h(0;u(t)) = \varphi(u(t))$. Предположим, что $\varphi(u(t)) \not\equiv 0$ на интервале наблюдений. По условиям устойчивости решений уравнения (1.7) рассматриваются только отрицательные значения параметра $a < 0$.

Решая уравнение (1.7) с нулевым начальным условием и входным сигналом $\phi(u(\tau))\dot{u}(\tau)$, получим

$$\Delta C(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}\varphi(u(\tau))\dot{u}(\tau)d\tau. \tag{1.8}$$

Функция $\varphi(u(\tau))$ является неизвестной. Предположим, что на интервале $[0, T]$ функция $\varphi(u(t))$ допускает аппроксимацию ее полиномом по $u(t)$ с неизвестными коэффициентами:

$$\varphi(u(t)) = \sum_{m=0}^{M} K_m^{(u)} u^m(t),$$

где $K_m^{(u)}$ – неизвестные коэффициенты полинома; M – наивысшая степень полинома, задается исследователем в процессе решения задачи идентификации.

Подстановка функции $\varphi(u(t))$ в (1.8) приводит к выражению

$$\Delta C(t) = \sum_{m=0}^{M} K_m^{(u)} \int_0^t e^{a(t-\tau)} u^m(\tau)\dot{u}(\tau)d\tau. \tag{1.9}$$

Вычислим интеграл в (1.9) по частям, получим

$$\Delta C(t) = \sum_{m=0}^{M} \frac{K_m^{(u)}}{m+1}[u^{m+1}(t) - u^{m+1}(0)e^{at}] + a\Delta C^*(t), \tag{1.10}$$

где

$$\Delta C^*(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} v_u(\tau)d\tau; \quad v_u(\tau) = \sum_{m=0}^{M} \frac{K_m^{(u)}}{m+1} u^{m+1}(\tau),$$

что является решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\Delta C^*(t) = a\Delta C^*(t) + v_u(t), \quad \Delta C^*(0) = 0.$$

В отличие от (1.9) выражение (1.10) не содержит производной процесса $u(t)$, которая либо не наблюдается в натурном эксперименте, либо вычисляется с большими погрешностями. Поэтому выражение (1.10) является предпочтительным для получения различных расчетных соотношений.

Выполняя в (1.10) замену переменной $u(t)$ на $\alpha(t)$ и $\omega_z(t)$, получим систему выражений, описывающих динамические поправки (1.2) коэффициента аэродинамической подъемной силы:

$$\begin{gathered}
\Delta c_{y\text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z) = \frac{b_a}{V}\left[\Delta c_{y1}(t, \dot{\alpha}) + \Delta c_{y2}(t, \omega_z)\right]; \\
\Delta c_{y1}(t, \dot{\alpha}) = \sum_{m=0}^{M_\alpha} \frac{K_m^{(\alpha)}}{m+1}[\alpha^{m+1}(t) - \alpha^{m+1}(0)e^{a_\alpha t}] + a_\alpha \Delta c_{y1}^*(t); \\
\Delta c_{y2}(t, \omega_z) = \sum_{m=0}^{M_\omega} \frac{K_m^{(\omega)}}{m+1}[\omega_z^{m+1}(t) - \omega_z^{m+1}(0)e^{a_\omega t}] + a_\omega \Delta c_{y2}^*(t); \\
\frac{d}{dt}\Delta c_{y1}^*(t) = a_\alpha \Delta c_{y1}^*(t) + v_\alpha(t), \quad \Delta c_{y1}^*(0) = 0; \\
\frac{d}{dt}\Delta c_{y2}^*(t) = a_\omega \Delta c_{y2}^*(t) + v_\omega(t)_{,4}\, \Delta c_{y2}^*(0) = 0,
\end{gathered} \tag{1.11}$$

где все обозначения понятны из предыдущего текста. Здесь параметры $a_\alpha, a_\omega, K_m^{(\alpha)}, K_m^{(\omega)}, M_\alpha$ и M_ω неизвестны и должны определяться в процессе решения задачи идентификации по полетным данным.

Совокупность выражений (1.1) и (1.11) образует замкнутую систему уравнений и определяет все поправки коэффициента аэродинамической подъемной силы на произвольном неустановившемся режиме полета. Уравнения зависят только от наблюдаемых в полете переменных и не содержат скрытых переменных. Ниже на примере обработки тестовых полетов магистрального самолета показано, что математическая модель (1.11) справедлива как в стационарных, так и в нестационарных условиях полета.

Для определения неизвестных параметров в выражениях (1.1) и (1.11) по полетным данным применим частотно-временной метод [8] (см. Приложение). Вычислим на множестве частот Ω

финитные преобразования Фурье F_T (с учетом обозначений, указанных ниже) всех составляющих поправок коэффициента аэродинамической подъемной силы:

$$s_k = j\omega_k; \quad j = \sqrt{-1};$$
$$\mathcal{F}_{\Delta cy}(s_k) = \mathcal{F}_T(c_y - c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}})) = \mathcal{F}_{\Delta cy\infty}(s_k) + \mathcal{F}_{\Delta cy\,\text{дин}}(s_k);$$
$$\mathcal{F}_{\Delta cy\infty}(s_k) = \sum_i c_i \mathcal{F}_{gi}(s_k); \quad \mathcal{F}_{\Delta cy\,\text{дин}}(s_k) = \frac{b_a}{V}\left[\mathcal{F}_{\Delta cy1}(s_k) + \mathcal{F}_{\Delta cy2}(s_k)\right];$$
$$\mathcal{F}_{\Delta cy1}(s_k) = \frac{1}{s_k - a_\alpha}\left\{\sum_{m=0}^{M_\alpha}\frac{K_m^{(\alpha)}}{m+1}[\alpha^{m+1}(T) - \alpha^{m+1}(0) + s_k\mathcal{F}_T(\alpha^{m+1}(t))] - \Delta c_{y1}(T)\right\};$$
$$\mathcal{F}_{\Delta cy2}(s_k) = \frac{1}{s_k - a_\omega}\left\{\sum_{m=0}^{M_\omega}\frac{K_m^{(\omega)}}{m+1}[\omega_z^{m+1}(T) - \omega_z^{m+1}(0) + s_k\mathcal{F}_T(\omega_z^{m+1}(t))] - \Delta c_{y2}(T)\right\},$$

где $\Delta c_{y1}(T), \Delta c_{y2}(T)$ – значения $\Delta c_{y1}(t), \Delta c_{y2}(t)$ в конечный момент времени T.

Таким образом, вектор неизвестных параметров θ имеет вид

$$\theta = (c_1, c_2, \ldots; a_\alpha, a_\omega; K_0^{(\alpha)}, \ldots, K_{M_\alpha}^{(\alpha)}; K_0^{(\omega)}, \ldots, K_{M_\omega}^{(\omega)}; \Delta c_{y1}(T), \Delta c_{y2}(T)).$$

Множество допустимых значений параметров определяется условиями устойчивости решений дифференциальных уравнений $a_\alpha < 0$, $a_\omega < 0$, остальные параметры могут принимать любые значения. В зависимости от полетной конфигурации некоторые параметры могут отсутствовать.

Сформируем невязку и критерий метода наименьших квадратов (МНК) в частотной области

$$\varepsilon(s_k, \theta) = F_{\Delta cy}(s_k) - F_{\Delta cy\infty}(s_k) - F_{\Delta cy\,\text{дин}}(s_k);$$
$$J(\theta) = (\lambda_\alpha a_\alpha)^2 + (\lambda_\omega a_\omega)^2 + \sum_{i=1}^{N_g}(\lambda_i c_i)^2 + \sum_{\omega_k}\varepsilon(-s_k, \theta)\varepsilon(s_k, \theta),$$

где $\lambda_\alpha, \lambda_\omega, \lambda_i$ – весовые коэффициенты, подбираются опытным путем; заранее верхний предел суммирования указать не представляется возможным, суммирование ведется по всем доступным частотам ω_k. Первые три слагаемых в критерии $J(\theta)$ служат для регуляризации решения задачи идентификации. Решение о включении регуляризирующих составляющих принимается в процессе решения задачи идентификации.

Задача идентификации неизвестных параметров сводится к задаче минимизации критерия МНК:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} J(\theta), \tag{1.12}$$

которая решается методами нелинейного математического программирования (например, программой fmincon математического пакета MATLAB).

На множестве частот Ω финитное преобразование Фурье постоянных, которые могут входить в составляющие коэффициента подъемной силы в установившемся движении самолета, равны нулю (см. ПРИЛОЖЕНИЕ). Поэтому для полной оценки всех постоянных дополнительно необходимо решить задачу идентификации во временной области на уже вычисленных оценках поправок $\Delta\hat{c}_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{\text{конф}})$ и $\Delta\hat{c}_{y\,\text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$.

2. Идентификация коэффициента подъемной силы ближнемагистрального самолета. Рассмотрим идентификацию коэффициента подъемной силы ближнемагистрального самолета по полетным данным. Тестовые полеты проводились по программе исследований устойчивости и управляемости самолета в процессе его выхода на большие углы атаки в различных полетных конфигурациях. Тестовый маневр заключался в выводе самолета на большие углы атаки при сохранении балансировки по моменту тангажа, т.е. $\dot{\omega}_z \sim 0$. Балансировка нарушалась только на коротких временных интервалах, когда самолет возвращался к условиям полета на малых углах атаки. Все тестовые маневры выполнялись на высотах примерно $H = 5000$ м и числах $M = 0.3\cdots0.4$. На рис. 1 показан пример полетных данных во взлетной конфигурации $\delta_{\text{пр}} = 24°$; $\delta_{\text{закр}} = 16°$. Далее рассмотрим определение математической модели только динамической поправки $\Delta c_{y\,\text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$.

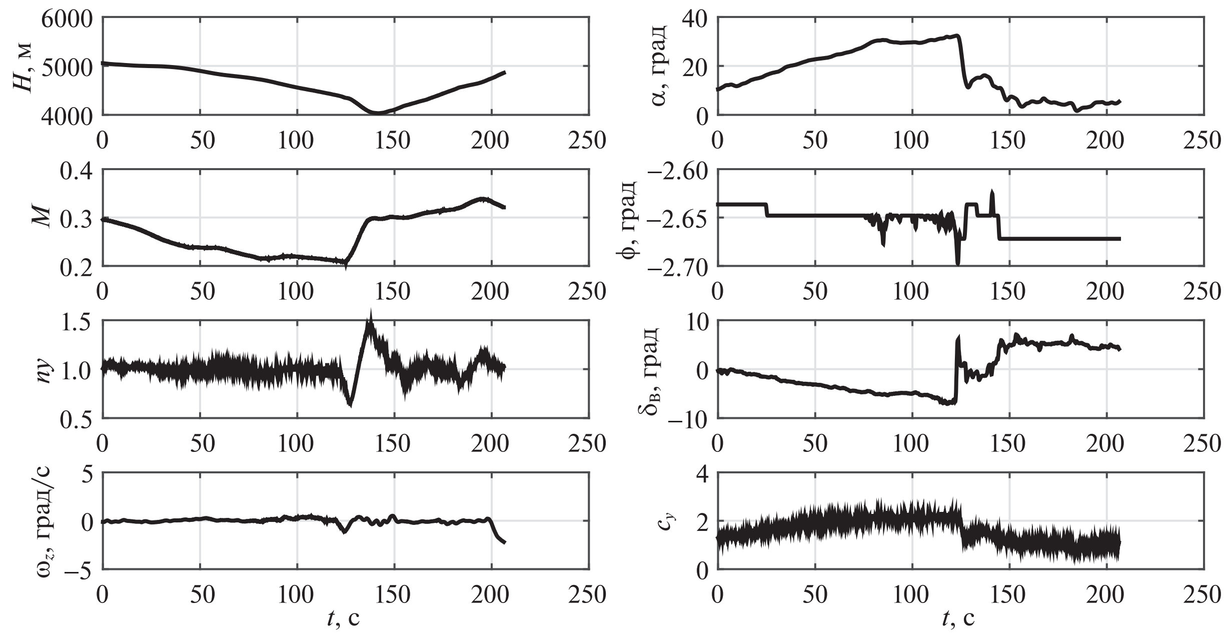


Рис. 1. Полетные данные во взлетной конфигурации $\delta_{пр} = 24°$; $\delta_{закр} = 16°$ (ω_z – угловая скорость тангажа; α – угол атаки; φ – угол установки горизонтального оперения; $\delta_в$ – угол отклонения руля высоты)

Измерялись все переменные движения и параметры полетной конфигурации. Полетный коэффициент подъемной силы $c_y^*(\alpha, M, \delta_{конф})$ (без учета тяги двигателя) вычислялся по формуле

$$c_y^*(\alpha, M, \delta_{конф}) = c_y(\alpha, M, \delta_{конф}) + c_P \sin(\alpha + \varphi_P) = \frac{mgn_y}{qS}, \qquad (2.1)$$

где c_y – коэффициент аэродинамической подъемной силы; c_P – коэффициент тяги двигателей; φ_P – угол установки двигателей в плоскости OXY связанной системы координат. Для каждой полетной конфигурации известны продувки в аэродинамической трубе (АДТ) и, следовательно, априорные значения коэффициента подъемной силы в установившемся движении $c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{конф})$, которые можно принять за начальное приближение.

Требуется по измеренным данным, полученным в тестовом полете, уточнить значение коэффициента подъемной силы в установившемся движении и идентифицировать составляющую $\Delta c_{y\,дин}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$, обусловленную нестационарными аэродинамическими эффектами.

Рассматривались следующие полетные конфигурации самолета: крейсерская, взлетная, заход на посадку, посадка. Поправку $\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{конф})$ будем искать в виде

$$\Delta c_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{конф}) = (c_1 + c_2|\alpha|)\alpha + (c_3 + c_4|\delta_в|)\delta_в.$$

В процессе решения задачи идентификации были выбраны следующие порядки полиномов $M_\alpha = M_\omega = 4$; определялись оценки неизвестных параметров $(c_1, \ldots, c_4, a_\alpha, a_\omega)$, коэффициентов полиномов $(K_0^{(\alpha)}, \ldots, K_4^{(\alpha)}; K_0^{(\omega)}, \ldots, K_4^{(\omega)})$ и дополнительных параметров $(\Delta c_{y1}(T), \Delta c_{y2}(T))$; все углы и угловые скорости имеют размерности рад и рад/с соответственно.

Результаты идентификации коэффициента подъемной силы самолета по полетным данным с учетом конфигурации, статических и динамических поправок показаны на рис. 2–6. На рис. 2, *а*–6, *а* помечены следующие данные: полетные данные – сплошная линия светлого оттенка, вычисленная по формуле (2.1); оценка коэффициента подъемной силы в установившемся движении с учетом поправки $\Delta\hat{c}_{y0} + \Delta\hat{c}_{y\infty}(\alpha, M, \delta_{конф})$ – пунктирная линия; оценка коэффициента подъемной силы $\hat{c}_y^*(\alpha, M, \delta_{конф})$ в неустановившемся движении – сплошная линия. На рис. 2, *б*–6, *б* показаны

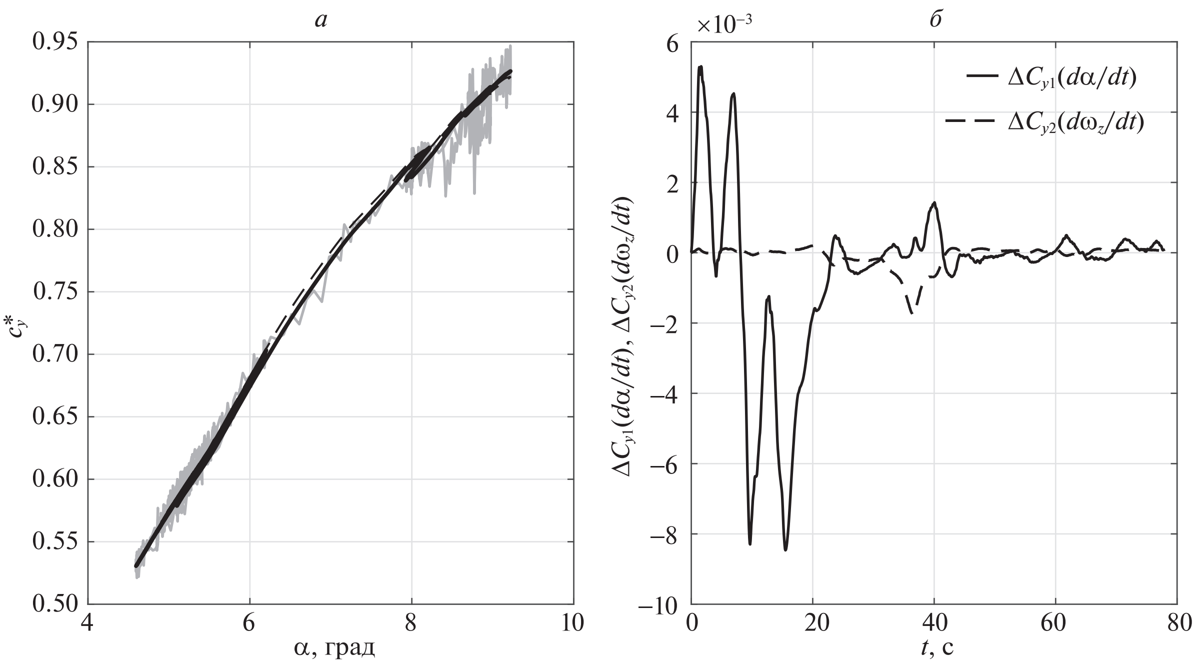


Рис. 2. Коэффициент подъемной силы (*а*) и динамические поправки (*б*) в установившемся полете на малых углах атаки (крейсерская конфигурация)

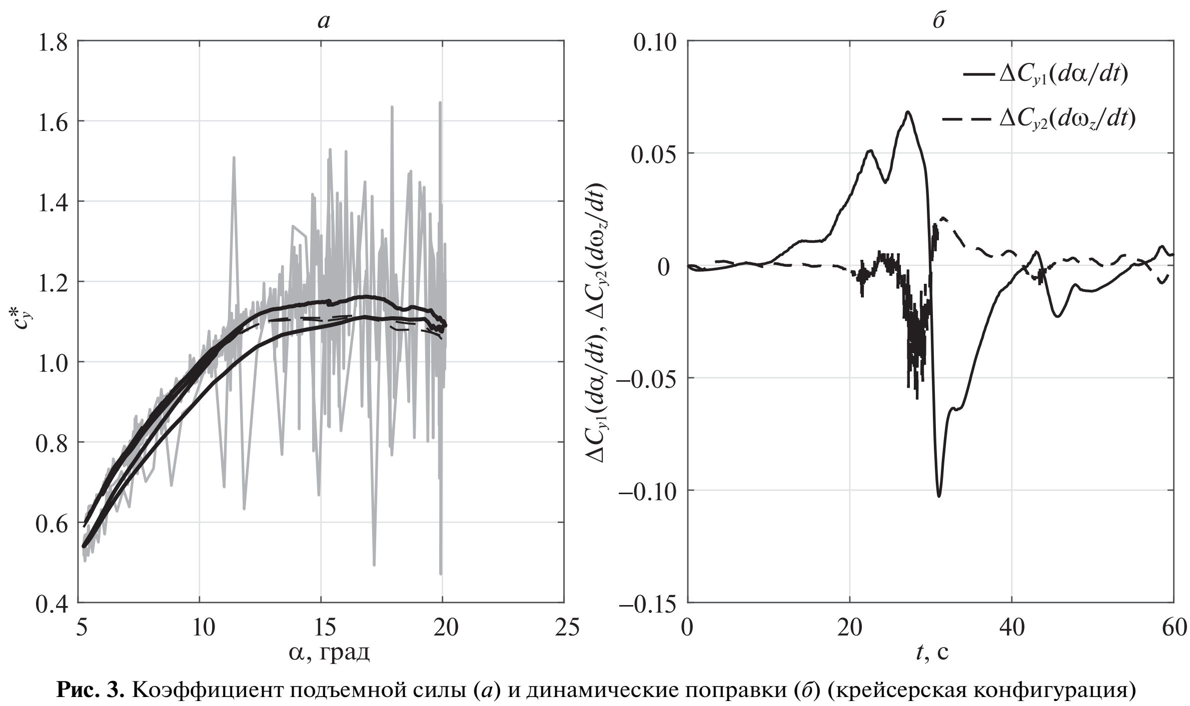


Рис. 3. Коэффициент подъемной силы (*а*) и динамические поправки (*б*) (крейсерская конфигурация)

оценки динамических поправок: сплошная линия – динамическая поправка $\Delta\hat{c}_{y1}(t,\dot{\alpha})$; пунктирная линия – динамическая поправка $\Delta\hat{c}_{y2}(t,\dot{\omega}_z)$.

На рис. 2, *а* представлен коэффициент подъемной силы и его оценки в области малых углов атаки при безотрывном обтекании, полностью совпадающие с аэродинамическими продувками. На рис. 2, *б* даны оценки динамических поправок. Видно, что динамическая поправка $\Delta\hat{c}_{y2}(t,\dot{\omega}_z) = 0$, а

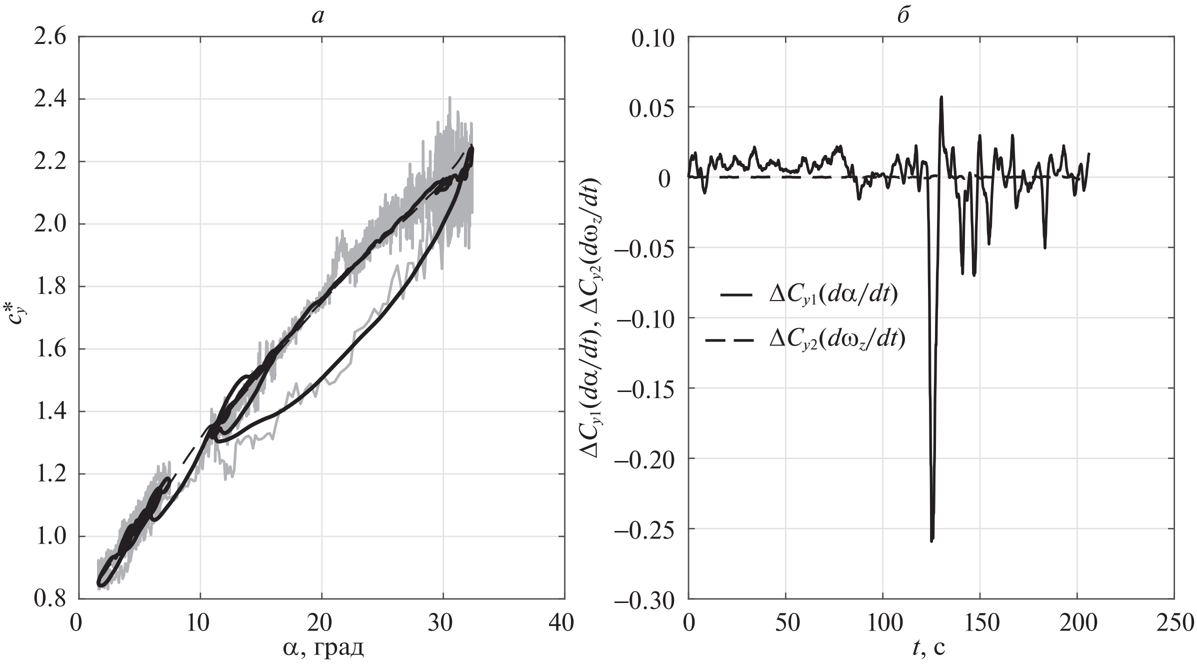


Рис. 4. Коэффициент подъемной силы (*а*) и динамические поправки (*б*), где взлет $\delta_{пр} = 24°$; $\delta_{закр} = 16°$

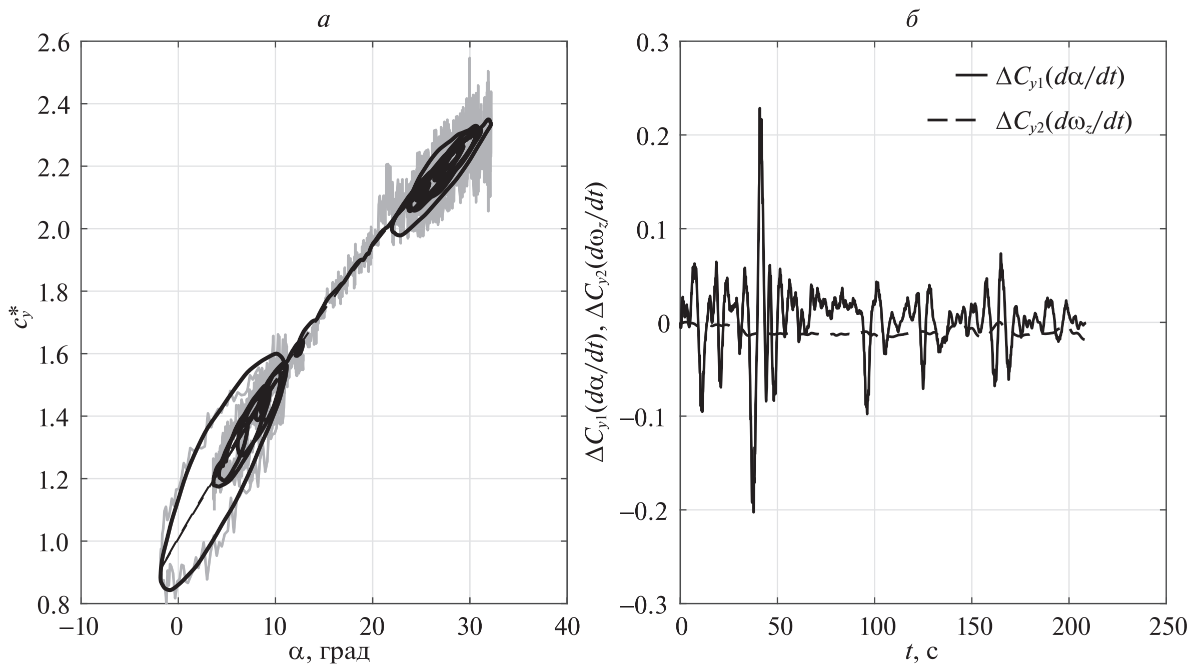


Рис. 5. Коэффициент подъемной силы (*а*) и динамические поправки (*б*), где заход на посадку $\delta_{пр} = 24°$; $\delta_{закр} = 25°$

поправка $\Delta\hat{c}_{y1}(t, \dot{\alpha})$ имеет порядок 10^{-3} и ее влиянием на оценку коэффициента подъемной силы можно пренебречь.

На рис. 3, *а*–6, *а* показаны коэффициент подъемной силы и его оценки в диапазоне изменения углов атаки $0 < \alpha \le 35°$ с учетом полетной конфигурации. Разность сплошной и штриховой линий на рис. 3, *а*–6, *а* указывает на влияние нестационарных аэродинамических эффектов на

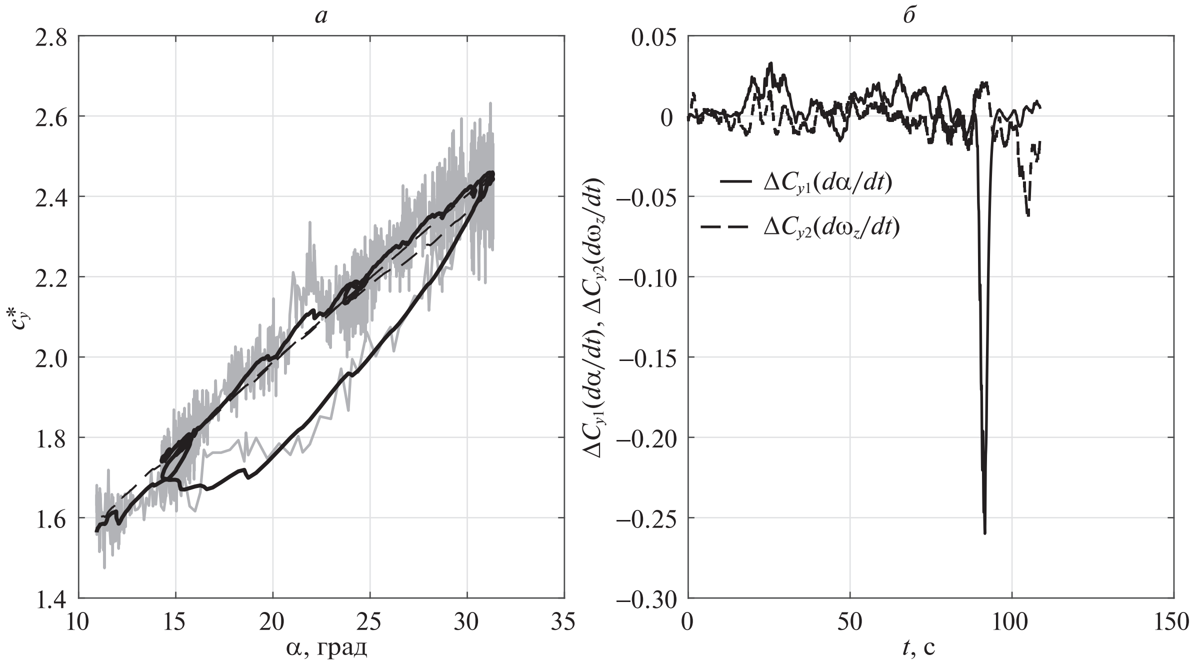


Рис. 6. Коэффициент подъемной силы (*а*) и динамические поправки (*б*), где посадка $\delta_{\text{пр}} = 24°$; $\delta_{\text{закр}} = 34°$

аэродинамические характеристики самолета. Возврат самолета на малые углы атаки происходит с потерей подъемной силы. Наблюдается аэродинамический гистерезис (рис. 3, *а*; 4, *а*; 6, *а*). На рис. 5, *а* показана аэродинамическая нестационарность в виде автоколебаний по коэффициенту подъемной силы при гармоническом изменении угла атаки: автоколебания возникают как на малых, так и на больших углах атаки.

Соизмеримые динамические поправки, обусловленные $\dot{\alpha}$ и $\dot{\omega}_z$ приведены на рис. 3, *б*. На остальных рассмотренных тестовых режимах полета (см. рис. 4, *б*–6, *б*) динамические поправки, обусловленные $\dot{\omega}_z$, практически отсутствуют (т.е. на тестовом режиме самолет сбалансирован в продольном движении). Поэтому динамические поправки оценки коэффициента подъемной силы целиком определяются угловой скоростью угла атаки $\dot{\alpha}$.

В табл. 1 и 2 приведены оценки коэффициентов полиномов по $\alpha(t)$ и $\omega_z(t)$, упорядоченные по возрастанию степени полинома, и коэффициенты поправок, полученные на выбранных тестовых маневрах. Регуляризирущая добавка в критерии МНК имела вид $(0.1a_\alpha)^2 + (0.05a_\omega)^2$.

Коэффициенты первой строки табл. 1 соответствуют динамической поправке $\Delta c_{y\,\text{дин}}(t, \dot{\alpha}, \dot{\omega}_z)$, которая является откликом линейной динамической системы только на входные сигналы $\dot{\alpha}(t)$

Таблица 1. Оценки коэффициентов полиномов

n/m	Полетная конфигурация самолета							
	крейсерская		взлетная		заход на посадку		посадка	
	$K_m^{(\alpha)}$	$K_m^{(\omega)}$	$K_m^{(\alpha)}$	$K_m^{(\omega)}$	$K_m^{(\alpha)}$	$K_m^{(\omega)}$	$K_m^{(\alpha)}$	$K_m^{(\omega)}$
0	−50.25	−84.32	207.2	−1.09	453.67	−123.25	−127.7	−35.4
1	297.5	−43.23	125.8	1.77	−245.6	1.84	680.4	1668
2	80.9	−0.38	78.6	−0.081	−236.9	0.46	−58.7	44.3
3	10.75	−0.012	20.9	−0.06	−122.7	−0.008	−364.7	1.7
4	−1.95	0.005	−5.09	0	−60.56	−0.035	−353.0	0.4

Таблица 2. Оценки коэффициентов поправок

Параметр	Полетная конфигурация самолета			
	крейсерская	взлетная	заход на посадку	посадка
c_1	2.75	1.04	0.19	−1.02
c_2	−5.24	−1.21	−1.18	−0.47
c_3	−0.22	−1.46	−1.31	−1.26
c_4	0.77	13.14	7.37	7.1
a_α	−0.20	−4.64	−8.77	−2.22
a_ω	−0.20	−4.70	−4.70	−0.009

и $\dot\omega_z(t)$ [2, 3]. Это частный случай описания нестационарных аэродинамических эффектов при безотрывном обтекании [6], соответсвующее выражение имеет вид

$$\Delta c_{y\,\text{дин}}(t,\dot\alpha,\dot\omega_z) = \frac{b_a}{V}\int_0^t h_\alpha(t-\tau)\frac{d\alpha}{d\tau}d\tau + \frac{b_a}{V}\int_0^t h_{\omega_z}(t-\tau)\frac{d\omega_z}{d\tau}d\tau.$$

Заключение. Предложен новый подход к описанию математической модели нелинейных и нестационарных аэродинамических эффектов, обусловленных интенсивным изменением в полете угла атаки самолета и угловой скорости тангажа в продольном движении. Подход основан на применении аэродинамических переходных функций. Новизна подхода заключается в том, что структура аэродинамических переходных функций фиксируется и подбираются входные сигналы, нелинейные по углу атаки и угловой скорости тангажа. Получена замкнутая система уравнений, зависящая только от наблюдаемых в полете переменных. На примере обработки полетных данных магистрального самолета показано, что система уравнений приемлемо описывает как аэродинамический гистерезис, так и автоколебания по коэффициенту подъемной силы при гармоническом изменении угла атаки. Задача идентификации неизвестных параметров решалась частотно-временным методом.

Представленные численные результаты идентификации нестационарного аэродинамического коэффициента подъемной силы относятся только к рассмотренным данным натурного эксперимента и не могут быть обобщены на все полетные случаи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Частотно-временной метод идентификации служит для вычисления оценок параметров динамических систем по наблюдаемым данным [8]. К особенностям метода в задаче идентификации математических моделей динамики летательных аппаратов по полетным данным, которая рассматривается как задача параметрической оптимизации, относятся:

- замена дифференциальных уравнений динамической системы на алгебраические выражения;
- простота вычислений частотных характеристик наблюдаемых переменных в присутствии измерительных шумов;
- возможность независимого и неупорядоченного выбора точек частотного диапазона для каждой пары входного и выходного сигналов;
- возможность применения к идентификации неустойчивых динамических систем.

Частотные методы идентификации дают возможность построить совокупность математических моделей различной целевой направленности, имеющих свои достоинства и недостатки, свои области применимости. Метод основан на переходе в частотную область с помощью финитного преобразования Фурье на специально выбранном дискретном множестве частот. Дискретное множество частот, на которых вычисляется финитное преобразование Фурье функции $x(t), t \in [0, T]$, имеет вид

$$\Omega = \left\{\omega_k : \omega_k = \frac{2\pi}{T}k, k = \overline{1, K}\right\}, \tag{П.1}$$

где $K \le Tf_N$; $f_N = 1/2h$ – частота Найквиста; h – шаг измерений.

Нетрудно видеть, что на этом множестве частот выполнено условие

$$e^{-j\omega_k T} = e^{-j2\pi k} = 1, \quad \forall \omega_k \in \Omega.$$

Формулы финитного преобразования Фурье функции $x(t)$ на дискретном множестве частот (П.1) с учетом граничных условий принимают вид

$$\begin{gathered} X_T(j\omega) = \mathcal{F}_T(x(t)) = \mathcal{F}_x(j\omega) = \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt; \\ \mathcal{F}_T(C) = 0; \quad \mathcal{F}_T\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = j\omega X_T(j\omega) + \Delta x; \\ \mathcal{F}_T\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{j\omega}\left[X_T(j\omega) - \int_0^T x(\tau) d\tau\right]; \\ \mathcal{F}_T(e^{at}) = \frac{e^{aT} - 1}{a - j\omega}; \quad \Delta x = x(T) - x(0). \end{gathered} \tag{П.2}$$

Здесь необходимо отметить следующие полезные свойства финитного преобразования Фурье на множестве частот $\Omega \ni \omega$:

1) $\forall C \ne 0$ имеет место равенство $\mathcal{F}_T(C) = 0$ на Ω, что указывает на эквивалентность $\forall C \ne 0$ и нуля;

2) влияние граничных значений переходных процессов на финитное преобразование Фурье определяется только их разностью Δx и не зависит от частоты $\omega_k, \forall k \in \overline{1, K}$.

Интеграл Фурье таблично заданной функции $x(t), t \in [0, T]$ рекомендуется вычислять по формулам Филона [11]. В монографии [8] приведена соответствующая программа на языке математического пакета MATLAB.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канышев А.В., Корсун О.Н., Овчаренко В.Н., Стуловский А.В.* Идентификация аэродинамических коэффициентов продольного движения и оценка погрешностей бортовых измерений на закритических углах атаки. Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 33–47.
2. *Tobak M.* On The use of the Indicial Function Concept in the Analysis of Unsteady Motions of Wings and Wing-tail Combinations // NACA. Report 1188. 1954.
3. *Tobak M., Schiff L.B.* On the Formulation of the Aerodynamic Characteristics in Aircraft Dynamics // NASA. TR R-456. Washington. 1976.
4. *Klein V., Morelli E.A.* Aircraft System Identification. Theory and Practice. Education Series. Hampton: AIAA. 2006. С. 499.
5. *Гоман М.Г.* Математическое описание аэродинамических сил и моментов на неустановившихся режимах обтекания с неединственной структурой // Тр. ЦАГИ. 1983. Вып. 2195. С. 14–27.
6. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физматлит, 1998.
7. *Jategaonkar R.V.* Flight Vehicle System Identification:A Time Domain Methodology. Arlington: AIAA, Inc., Reston., 2006. С. 410.
8. *Овчаренко В.Н.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов. Идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАНД, 2019. 236 с.
9. *Игнатьев Д.И., Храбров А.Н.* Использование искусственных нейронных сетей для моделирования динамических эффектов аэродинамических коэффициентов трансзвукового самолета // Уч. зап. ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 6. С. 84–91.
10. *Кузьмин П.В., Мелешин Б.А., Шелюхин Ю.Ф., Шуховцов Д В.* Инженерная модель нестационарных продольных аэродинамических характеристик на больших углах атаки // Уч. зап. ЦАГИ. 2015. Т. 46. № 4. С. 61–70.
11. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 35–42

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ[1]

© 2021 г. А. С. Агапова[a], М. М. Хрусталев[a,б,*]

[a]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

[б]МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: mmkhrustalev@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.
После доработки 19.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Метод синтеза оптимальной по квадратичному критерию стратегии управления квазилинейной стохастической динамической системой, функционирующей на неограниченном интервале времени, обобщается на игровую задачу с векторным критерием оптимальности, для которой получены условия равновесия по Нэшу.

DOI: 10.31857/S0002338821060020

Введение. На практике часто встречаются достаточно сложные динамические системы, состоящие из нескольких подсистем, для исследования которых требуется точность описания динамики с учетом действия внешних возмущений, ошибок управления и т.д. Одним из вариантов описания таких систем служат так называемые квазилинейные стохастические динамические системы, которые иногда называют системами с мультипликативными возмущениями. По-существу это нелинейные системы, которые доступны эффективному исследованию. В данной статье изучается поведение таких систем на неограниченном интервале времени, что позволяет эффективно решать задачи стабилизации при длительном функционировании.

Кроме того, зачастую передача информации между подсистемами затруднена или не целесообразна. Примером такой задачи является задача синхронизации движения летательных аппаратов (ЛА) при дозаправке в воздухе. Для решения таких прикладных задач стабилизации динамической системы, состоящей из нескольких подсистем, целесообразно использовать не скалярный критерий качества стабилизации, а векторный, оптимизируемый по Нэшу [1]. При таком подходе оказывается достаточно для решения общей задачи стабилизации каждой подсистеме оптимизировать свои затраты на стабилизацию и положение относительно другого объекта.

Исследования основываются на работе [2], где рассматривается проблема равновесия по Нэшу в игровой задаче многих лиц для диффузионных стохастических систем общего вида. Настоящая статья продолжает исследования авторов [1], где получены приведенные в разд. 2 необходимые условия равновесия по Нэшу в квазилинейной стохастической системе, и [3, 4], где получены необходимые условия оптимальности квазилинейных систем, функционирующих на неограниченном интервале времени, в случае скалярного критерия оптимальности.

Примерами применения указанных условий равновесия могут служить задача управления группой ЛА и задача дозаправки в воздухе. Об актуальности таких задач говорит то, что по настоящий день кроме разработки все более совершенных физических систем дозаправки в воздухе [5], также активно разрабатываются и алгоритмы автоматического управления ЛА при дозаправке топливом в воздухе [6–8]. Самые большие перспективы при использовании систем дозаправки открываются перед беспилотными летательными аппаратами (БЛА), которые смогут практически неограниченное время патрулировать воздушное пространство над территорией противника, вести наблюдение и атаковать появляющиеся цели [5].

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-08-00400).

Процесс дозаправки делится на три этапа [7]:

1) этап сближения ЛА с танкером и стыковки;

2) этап заправки и поддержания относительного положения ЛА и танкера;

3) этап расстыковки и отхода.

В настоящем исследовании в качестве приложения предлагаемой теории рассмотрен второй этап. На примере подробно рассматриваемой задачи стабилизации по высоте движения двух ЛА производится сравнение различных подходов к решению задачи совместной стабилизации. Показано, что предлагаемый метод дает лучшие результаты по сравнению с традиционными.

1. Постановка задачи управления. Пусть управляемый процесс описывается уравнением Ито

$$dx(t) = (A_{0c}x(t) + B_{0c}u(x(t)) + B_{0c}^1)dt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_{kc}x(t) + B_{kc}u(x(t)) + B_{kc}^1)dw_k(t). \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – случайное состояние системы в момент времени t; $u(x(t)) \in R^{n_u}$ – вектор-функция управления; $w(t) \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $t \in [0,+\infty)$ – время функционирования системы; A_{kc}, B_{kc}, B_{kc}^1, $k = \overline{0,n_w}$, – постоянные матрицы соответствующих размеров. Начальное распределение состояния $x_0 = x(0)$ считается заданным и имеет конечную матрицу вторых центральных моментов. Здесь и далее нижний индекс c подчеркивает принадлежность матриц уравнению управляемого процесса (1.1).

Рассматривается неантагонистическая игра q лиц-игроков. Каждый игрок выбирает свою стратегию управления $u^s(x)$, $s = \overline{1,q}$, $u^s(x) = (u_1^s(x), u_2^s(x), \ldots, u_{n_{u_s}}^s(x))^{\mathrm{T}} \in R^{n_{u_s}}$ так, чтобы минимизировать свой квадратичный критерий:

$$\begin{gathered} J^s(u(\cdot)) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}M\left[\int_0^T f^s(x(t),u^s(x(t)))dt\right], \\ f^s(x,u^s) = x^{\mathrm{T}}Q_c^s x + 2x^{\mathrm{T}}S_c^s u^s + u^{s\mathrm{T}}D_c^s u^s, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $f^s(x,u^s) \geq 0$; Q_c^s, S_c^s, $D_c^s > 0$ – постоянные матрицы соответствующих размеров; а M – операция матожидания.

Чтобы замкнутая стратегией $u(x)$ система (1.1) была квазилинейной, доступной эффективному исследованию, мы вынуждены ограничиться классом линейных по состоянию стратегий.

В общем случае стратегии игроков формируются в условиях неполноты информации о состоянии.

Стратегия s-го игрока $u^s(x)$ задается равенством

$$u^s(x) = -L^s y^s + \nu^s, \quad y^s = C^s x, \tag{1.3}$$

где $y^s \in R^{n_{y_s}}$ – выход системы для s-го игрока, L^s, ν^s, C^s – матрицы соответствующих размеров, матрица C^s задана. Функцию вида (1.3) будем называть регулятором или стратегией управления s-го игрока.

Общая стратегия $u(x)$ в (1.1) есть совокупность стратегий $u^s(x)$, $u(x) = (u^{1\mathrm{T}}(x), u^{2\mathrm{T}}(x), \ldots, u^{q\mathrm{T}}(x))^{\mathrm{T}} \in R^{n_u}$, $n_u = n_{u_1} + n_{u_2} + \ldots + n_{u_q}$.

2. Условия оптимальности (равновесия по Нэшу). Для компактности записи введем следующие обозначения:

$$A_k = A_{kc} - B_{kc}LC, \quad B_k = B_{kc}\nu + B_{kc}^1, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} Q^s = Q_c^s - S_c^s L^s C^s - C^{s\mathrm{T}}L^{s\mathrm{T}}S_c^{s\mathrm{T}} + C^{s\mathrm{T}}L^{s\mathrm{T}}D_c^s L^s C^s, \\ S^s = \nu^{s\mathrm{T}}S_c^{s\mathrm{T}} - \nu^{s\mathrm{T}}D_c^s L^s C^s, \\ D^s = \nu^{s\mathrm{T}}D_c^s \nu^s, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $L = (L^{1\mathrm{T}}, L^{2\mathrm{T}}, \ldots, L^{q\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in R^{n_u} \times R^{n_y}$, $C = (C^{1\mathrm{T}}, C^{2\mathrm{T}}, \ldots, C^{q\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in R^{n_y} \times R^n$, $n_y = n_{y_1} + n_{y_2} + \ldots + n_{y_q}$, $\nu = (\nu^{1\mathrm{T}}, \nu^{2\mathrm{T}}, \ldots, \nu^{q\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in R^{n_u}$.

О п р е д е л е н и е 1. Обозначим через U_a множество стратегий управления $u(x)$, для которых уравнения первого $m(t)$ и второго центрального $\Gamma(t)$ моментов асимптотически устойчивы относительно положения равновесия m^∞, Γ^∞, определяемое равенствами:

$$A_0 m^\infty + B_0 = 0,$$

$$A_0\Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k\Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w}(A_k m^\infty + B_k)(A_k m^\infty + B_k)^{\mathrm{T}} = 0,$$

где матрицы A_k и вектор-столбцы B_k задаются равенствами (2.1). Очевидно, что для стратегий $u(x)$ из U_a решения этих уравнений существуют и система (1.1) устойчива в среднеквадратичном. Стратегии $u(\cdot) \in U_a$ будем называть допустимыми.

Справедлива следующая теорема [3].

Т е о р е м а 1. Если стратегия управления $u(x)$, т.е. совокупность стратегий $u^s(x)$, $s = \overline{1,q}$, задаваемых равенством (1.3), принадлежит множеству U_a, то для каждого игрока критерий (1.2) для всех распределений начального состояния $x(0) = x_0$ определен и принимает одно и то же значение, которое может быть вычислено по формуле

$$J^s = B_0^{\mathrm{T}}\xi^s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M^s B_k + \frac{1}{2}D^s. \tag{2.3}$$

Здесь симметрическая неотрицательная матрица M^s и вектор ξ^s находятся из уравнений

$$A_0^{\mathrm{T}} M^s + M^s A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M^s A_k + Q^s = 0, \tag{2.4}$$

$$\xi^{s\mathrm{T}} A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M^s A_k + B_0^{\mathrm{T}} M^s + S^s = 0, \tag{2.5}$$

которые имеют решения, а матрицы A_k, B_k, Q^s, S^s, D^s определяются равенствами (2.1), (2.2).

С л е д с т в и е и з т е о р е м ы 1. При фиксированных стратегиях всех игроков, кроме s-го, критерий J^s, значение которого определяется формулой (2.3), является функцией набора параметров $\lambda^s = (L^s, \nu^s)$, задающих стратегию s-го игрока:

$$J^s = F^s(\lambda^s), \quad \lambda^s \in U_\alpha^s, \tag{2.6}$$

где U_α^s – множество значений λ^s, таких, что сумарная стратегия $u(\cdot) \in U_\alpha$.

Совершенно очевидно, что множество U_a^s зависит от выбора стратегий $u^k(x)$, $k \neq s$, других игроков. Будем иметь это в виду, не вводя эти стратегии в качестве аргументов множества U_a^s явно.

Задача оптимизации состоит в отыскании, исходя из условий минимума критериев оптимальности (1.2), допустимой стратегии $u(\cdot) \in U_a$, которая есть совокупность стратегий $u^s(x)$, $s = \overline{1,q}$, обеспечивающей равновесие по Нэшу.

Следуя [9], дадим следующие определения.

О п р е д е л е н и е 2. Допустимая стратегия $\bar{u}(\cdot) \in U_a$, представляющая собой совокупность стратегий $\bar{u}^s(x)$, $s = \overline{1,q}$, называется приемлемой для s-го игрока, если стратегия s-го игрока $\bar{u}^s(x)$ минимизирует критерий (1.2) на множестве U_a^s при фиксированных стратегиях других игроков.

О п р е д е л е н и е 3. Допустимая стратегия $\bar{u}(\cdot) \in U_a$ называется равновесной по Нэшу, если она приемлема для всех игроков.

В результате справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы стратегия $\bar{u}(\cdot) \in U_a$ была приемлемой для s-го игрока, необходимо и достаточно выполнения условия

$$F^s(\bar{\lambda}^s) = \min_{\lambda^s \in U_\alpha^s} F^s(\lambda^s)$$

при фиксированных стратегиях других игроков.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 представляет собой запись определения 2 с учетом следствия из теоремы 1 (равенство (2.6)).

Условия теоремы 2 необходимы и достаточны, но довольно-таки сложны для использования в связи с тем, что функции $F^s(\lambda^s)$ содержат матричные переменные M^s и ξ^s, зависимость которых от λ^s задается неявно уравнениями (2.4), (2.5).

Несколько проще необходимые условия экстремума функций $F^s(\lambda^s)$ [3, 4], приводящие к необходимым условиям приемлемости.

Теорема 3. Если стратегия управления $\bar{u}(x)$, представляющая собой совокупность стратегий $\bar{u}^s(x) = -\bar{L}^s y^s(x) + \bar{\nu}^s$, $s = \overline{1,q}$, принадлежит множеству U_a и является приемлемой для s-го игрока, то выполнены следующие условия:

$$C^s\Gamma^\infty\Pi_1^s = 0, \quad m^{\infty\mathrm{T}}\Pi_1^s + \Pi_2^s = 0,$$

где матрица M^s и вектор ξ^s находятся из уравнений (2.4), (2.5),

$$\Pi_1^s = -M^s B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} A_{kc}^{\mathrm{T}} M^s B_{kc} - S_c^s + C^{s\mathrm{T}}\bar{L}^{s\mathrm{T}}\left(\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M^s B_{kc} + D_c^s\right),$$

$$\Pi_2^s = -\xi^{s\mathrm{T}} B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{1\mathrm{T}} M^s B_{kc} - \bar{\nu}^{s\mathrm{T}}\left(\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M^s B_{kc} + D_c^s\right).$$

Оптимальное значение критерия вычисляется по формуле (2.3) при $L^s = \bar{L}^s$, $\nu^s = \bar{\nu}^s$.

Из определений 1, 2 следует, что для поиска оптимальной по Нэшу стратегии нужно применить теорему 2 или 3 для каждого из q игроков при фиксированных стратегиях остальных. Этот факт сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Для того, чтобы стратегия $\bar{u}(\cdot) \in U_a$ была равновесной по Нэшу, необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 2 и необходимо выполнение условий теоремы 3 для каждого из q игроков.

Как в любых задачах на экстремум, в задаче равновесия по Нэшу возникает проблема существования решения. В общей теории равновесия по Нэшу проблему существования решают с использованием рандомизированных стратегий. Однако если теория применяется к конкретной ситуации, то рандомизированные стратегии неприемлемы. Предложить достаточно содержательные условия существования нерандомизированного решения рассмотренной задачи авторам не удалось вследствие существенной нелинейности функции $F^s(\lambda^s)$, $s = \overline{1,q}$.

Целесообразно отметить, что в отличие от задачи на экстремум со скалярным критерием необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу допускают наличие нескольких решений с различными значениями критериев игроков.

3. Синхронизация движения двух ЛА по высоте. Рассматривается задача синхронизации движения двух одинаковых ЛА по высоте при дозаправке в воздухе. Пример носит демонстративный характер, поэтому приводится плоская задача: модель учитывает отклонение по высоте H_k k-го ЛА от заданной траектории и вертикальную скорость V_k k-го ЛА, $k = 1, 2$. Предполагается, что самолет-заправщик и заправляемый самолет движутся в вертикальной плоскости. Считается, что номинальное движение – горизонтальный полет с постоянной скоростью при постоянном расстоянии между самолетами. Будем предполагать, что канал стабилизации скорости ЛА поддерживает с необходимой точностью постоянное расстояние между самолетами вдоль номинальной траектории. В данной задаче рассмотрим канал стабилизации высоты полета и поддержания разности высот ЛА близкой к нулю при действии внешних шумов (ветровых возмущений) и реализации управления с ошибками.

При необходимости практического применения результатов аналогичную задачу можно решить и для канала стабилизации скорости, а также использовать математическую модель, описывающую в том числе и ЛА с различными характеристиками.

Возможны несколько вариантов решения этой задачи. Первый вариант – достаточно жестко стабилизировать вблизи нуля отклонение по высоте H_k и вертикальную скорость V_k независимо для каждого из ЛА, используя квадратичный критерий. Недостатком такого подхода является отсутствие приоритета на стабилизацию взаимного положения ЛА, которое гораздо важнее выдерживать вблизи нуля, чем каждую из переменных. Второй вариант, рекомендованный многими авторами [10, 11], несколько сглаживает недостаток первого варианта. В нем предлагается стабилизировать движение ведущего ЛА (танкера) относительно опорной траектории (как в первом варианте). Затем при фиксированной стратегии ведущего решается задача синхронизации движения за счет ведомого (заправляемого ЛА). И наконец, третий вариант – передавать всю доступную информацию о положении каждого ЛА каждому из участников движения. Недостатком является зачастую переизбыток передаваемой информации, к тому же передача информации между подсистемами может быть затруднена и нецелесообразна.

Нами предлагается вариант взаимной стабилизации с разумным объемом передаваемой и используемой при управлении информации. В этом варианте каждый из двух ЛА оптимизирует свои затраты на стабилизацию и величину $(H_1 - H_2)^2$, характеризующую отклонение по высоте от партнера. Математически это неантагонистическая игра двух лиц – предмет изучаемой здесь теории оптимизации (равновесия) по Нэшу.

Далее произведено сравнение трех подходов к решению поставленной задачи. В задаче 1 реализуется указанный выше последний вариант оптимизации по Нэшу. В задаче 2 стабилизируется движение каждого из двух ЛА по отдельности. В задаче 3 рассматривается второй вариант: ведущий ЛА (танкер) – ведомый.

Для сравнения результатов решения задач 1–3 предложена методика, опирающаяся на разделение критерия оптимальности на сумму составляющих его компонент, отражающих различные характеристики процесса. Такой подход часто встречается в теории дифференциальных игр [12–14]. В нашем случае интересно выделение из критериев каждого из двух ЛА компонент, связанных с отклонением по высоте $(H_1 - H_2)$ и затратами на управление. При этом задача синтеза стратегии управления решается исходя из объединенного критерия качества, на решение которой не влияет подсчет частных критериев, необходимых лишь для сравнения полученных решений. Такой подход, связанный с выделением частных критериев, позволяет отказаться от принципа взвешенного вклада отдельных отклонений и дает мощный инструмент для поиска и анализа компромиссных решений [12].

Задача 1. Упрощенные линеаризованные уравнения движения двух одинаковых ЛА ($k = 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} dH_k &= V_k dt, \\ dV_k &= u_k dt + \varepsilon u_k dw_{k1} + c dw_{k2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где u_k – управление; H_k – отклонение высоты k-го ЛА от заданной траектории; V_k – вертикальная скорость k-го ЛА; w_{ki}, $i = 1, 2$ – независимые стандартные винеровские процессы; ε, c – заданные константы.

В квадратичном критерии учитывается взаимное отклонение по высоте $\Delta H = H_1 - H_2$:

$$J^k = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} M \left[\int_0^T (a_1 H_k^2 + a_2 V_k^2 + a_3 u_k^2 + a_4 (H_1 - H_2)^2) dt \right],$$

где a_i, $i = \overline{1,4}$, – заданные константы.

При численных расчетах были выбраны следующие значения констант: $a_1 = 0.5$, $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $c = 1$.

Требуется найти управление в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L_1 H_1 - L_2 V_1 - L_3 (H_1 - H_2), \\ u_2 &= -L_1 H_2 - L_2 V_2 - L_3 (H_2 - H_1). \end{aligned}$$

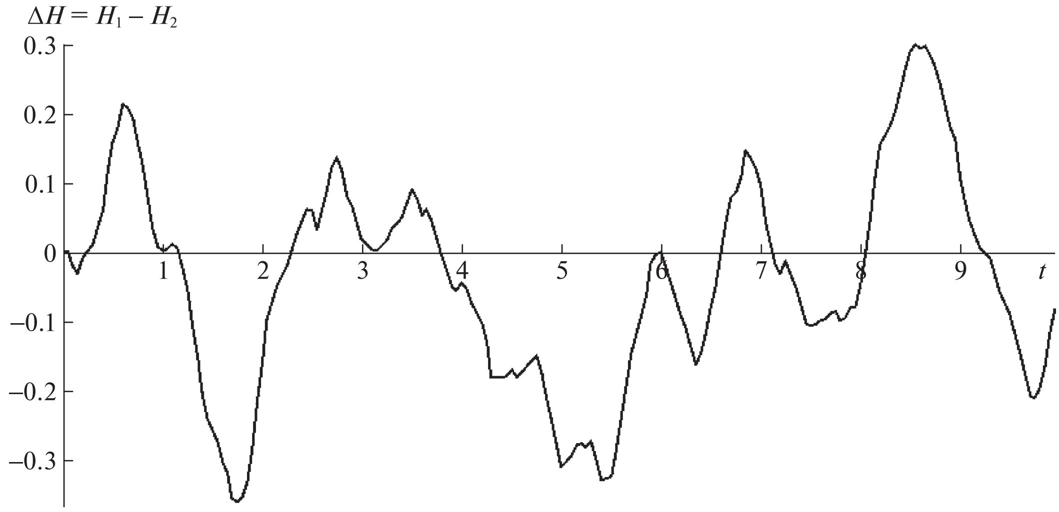


Рис. 1. Взаимное отклонение ЛА по высоте в задаче 1

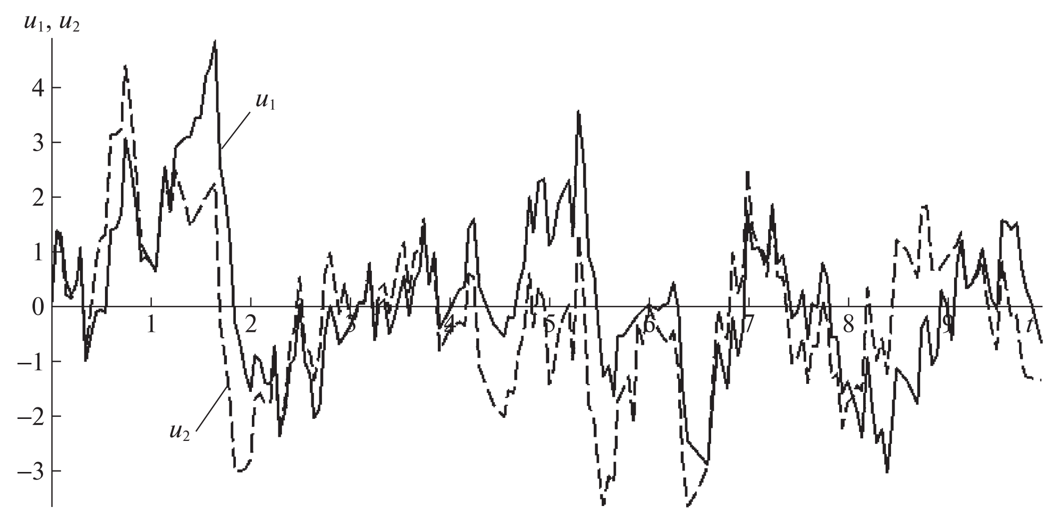


Рис. 2. Реализация процессов управления в задаче 1

Применяя полученные выше необходимые условия оптимальности (равновесия) по Нэшу найдем коэффициенты оптимального управления $L_1 = 0.696$, $L_2 = 3.239$, $L_3 = 4.065$ и оптимальные значения критериев $\overline{J}^k = 1.67$, $k = 1, 2$.

На рис. 1, 2 представлена одна из реализаций взаимного отклонения движения ЛА по высоте $\Delta H = H_1 - H_2$ и процессов управления u_1, u_2, полученная в соответствии с предложенной теорией.

Подсчитаем два дополнительных критерия:

$$J_{\Delta H}^{(1)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} M\left[\int_0^T (H_1 - H_2)^2 \, dt\right], \tag{3.2}$$

$$J_{u_k}^{(1)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} M\left[\int_0^T u_k^2 dt\right], \tag{3.3}$$

которые характеризуют вклад относительного отклонения высоты и расхода энергии на управление в значение критерия соответственно. Верхний индекс в круглых скобках в обозначении критериев (3.2), (3.3) указывает на номер задачи (задача 1). Аналогичные обозначения будут использоваться и для задач 2, 3.

Значения частных критериев (3.2), (3.3) при заданных коэффициентах управления L_1, L_2, L_3 вычисляются достаточно просто с использованием равенств (2.3), (2.4) (ξ^s в данном примере равно нулю).

В рассматриваемой задаче значения дополнительных критериев составили $J_{\Delta H}^{(1)} = 0.018$, $J_{u_k}^{(1)} = 1.206$, $k = 1, 2$.

Далее решим задачи 2, 3 и произведем сравнение дополнительных критериев. Задачи 2, 3 решаются с помощью того же изложенного выше математического аппарата, что и задача 1, так как в случае одного игрока условия равновесия по Нэшу совпадают с условиями оптимальности скалярного критерия.

З а д а ч а 2. Рассмотрим алгоритм стабилизации, состоящий в том, что каждый из двух (одинаковых) ЛА независимо стабилизирует свою высоту. Уравнения движения одного из ЛА имеют вид

$$\begin{gathered} dH_1 = V_1 dt, \\ dV_1 = u_1 dt + \varepsilon u_1 dw_{11} + c dw_{12}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Управление запишем как

$$u_1 = -L_1 H_1 - L_2 V_1. \tag{3.5}$$

Введем дополнительные критерии

$$J_{H_1}^{(2)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} M\left[\int_0^T H_1^2 dt\right],$$

$$J_{u_k}^{(2)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} M\left[\int_0^T u_k^2 dt\right],$$

$k = 1, 2$, которые также характеризуют отклонение ЛА по высоте от заданной траектории и расход энергии.

Желая добиться того же качества стабилизации по высоте движения ЛА в паре, что и в задаче 1, потребуем выполнение условия

$$J_{H_1}^{(2)} = \frac{1}{2} J_{\Delta H}^{(1)} \cong \frac{1}{2} 0.018 \cong 0.009. \tag{3.6}$$

Коэффициенты управления L_1, L_2 подберем так, чтобы при выполнении условия (3.6) затраты на управление $J_{\Delta u_k}^{(2)}$ были минимальны.

Решая эту задачу, получим коэффициенты управления $L_1 = 3.85$, $L_2 = 7.42$. При этом расход энергии при индивидуальной стабилизации составляет $J_{u_k}^{(2)} = 1.488$, $k = 1,2$.

З а д а ч а 3. Первая часть задачи для ведущего ЛА (танкера) аналогична задаче 2. Уравнения движения и вид искомого управления имеют вид, аналогичный (3.4), (3.5) соответственно. Коэффициенты управления $L_1 = 3.85$, $L_2 = 7.42$ и значения частных критериев $J_{H_1}^{(3)} = 0.009$, $J_{u_1}^{(3)} = 1.488$.

Затем при фиксированных значениях L_1, L_2 решим задачу синхронизации движения ведомого ЛА. Уравнения движения имеют вид (3.1), а управление –

$$u_2 = -L_3 H_2 - L_4 V_2 - L_5 (H_2 - H_1).$$

Соблюдая выполнение равенства частого критерия

$$J_{\Delta H}^{(3)} \cong 0.018,$$

найденного по формуле (3.2), получим коэффициенты управления $L_3 = 3.8$, $L_4 = 3.8$, $L_5 = 2.3$, исходя из минимума частного критерия $J_{u_2}^{(3)}$, вычисленного для управления u_2 ведомого ЛА. Оптимальное значение этого критерия $\overline{J}_{u_2}^{(3)} = 1.401$.

Произведем сравнение дополнительных критериев, полученных в задачах 1–3. Найденные решения во всех трех задачах дают одинаковое качество стабилизации по высоте движения ЛА в паре. Сравним частные критерии, характеризующие затраты на управление.

Суммарные затраты на управление двух ЛА следующие: в задаче 1 $J_u^{(1)} = J_{u_1}^{(1)} + J_{u_2}^{(1)} = 2J_{u_1}^{(1)} = 2.412$, в задаче 2 $J_u^{(2)} = J_{u_1}^{(2)} + J_{u_2}^{(2)} = 2J_{u_1}^{(2)} = 2.976$, в задаче 3 $J_u^{(3)} = J_{u_1}^{(3)} + J_{u_2}^{(3)} = 1.488 + 1.401 = 2.881$.

Итак,

$$\frac{J_u^{(2)}}{J_u^{(1)}} = \frac{2.976}{2.412} = 1.234,$$

$$\frac{J_u^{(3)}}{J_u^{(1)}} = \frac{2.881}{2.412} = 1.194.$$

Таким образом по сравнению с оптимизацией по Нэшу (задача 1) вариант независимой стабилизации ЛА (задача 2) имеет расход энергии на управление больше на 23.4%, а вариант с использованием метода ведущий–ведомый (задача 3) – больше на 19.4%. Настоящие результаты свидетельствуют об эффективности предлагаемого метода.

Заключение. Получены необходимые и одновременно достаточные, а также необходимые первого порядка условия равновесия по Нэшу в игровой задаче q лиц для квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени в условиях неполноты информации о состоянии.

Произведено сравнение различных подходов к решению задачи синхронизации движения двух ЛА по высоте в процессе дозаправки. При решении модельного примера применен метод выделения пары частных критериев для каждой компоненты векторного критерия, который представляет собой мощный инструмент для поиска и анализа компромиссных решений в более сложных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Равновесие по Нэшу в квазилинейной стохастической системе, функционирующей на неограниченном интервале времени // Матер. 14-й Междунар. конфер. "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2018. С. 462–465. *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Nash Equilibrium for Quasi-linear Stochastic Systems Operating on Infinite Time Intervals // Proc. 2018 14th Intern. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). M.: IEEE, 2018. https://ieeexplore.ieee.org/document/8408363/
2. *Хрусталев М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информации о состоянии. Метод Лагранжа // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 1. С. 72–79.
3. *Халина А.С., Хрусталев М.М.* Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 1. С. 56–79.
4. *Хрусталев М.М., Агапова А.С.* Эффект смещения оптимального управления в задачах стабилизации квазилинейных стохастических систем диффузионного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 5–13.
5. *Чепурных И.В.* Системы дозаправки летательных аппаратов в воздухе: методические указания для выполнения заданий. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО "КнАГТУ", 2015. 36 с.
6. *Воронов Е.М., Оболенский Ю.Г., Чеглаков Д.И.* Адаптивное автоматическое управление беспилотным летательным аппаратом на этапе сближения и стыковки процесса дозаправки топливом в воздухе // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 3. С. 129–147.
7. *Оболенский Ю.Г., Похваленский В.Л., Чеглаков Д.И.* Алгоритм автоматического управления летательным аппаратом при дозаправке топливом в воздухе // Тр. МАИ. 2013. № 65. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35966.
8. *Небожатко Е.П.* Стабилизация прямолинейного движения самолетов с учетом запаздывания в информационном канале // Процессы управления и устойчивость. 2015. № 1. Т. 2. С. 71–77.
9. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
10. *Гусев Д.И.* Решение задачи автоматизации полета группы самолетов // Тр. МАИ. 2012. № 51. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29077
11. *Рыбников С.И., Тин П.Ч., Степаньянц Г.А., Горбачев Ю.В.* Назначение динамических приоритетов при обслуживании самолетов с произвольным курсом во время захода на посадку и полета в строю // Тр. МАИ. 2011. № 49. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=28113.
12. *Романова И.К.* Об одном подходе к определению весовых коэффициентов метода пространства состояний // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 4. С. 105–129.
13. *Engwerda J.* LQ Dynamic Optimization and Differential Games. John Wiley & Sons Ltd, 2005. 511 p.
14. *Reddy P.V., Engwerda J.C.* Necessary and Sufficient Conditions for Pareto Optimal Solutions of Cooperative Differential Games // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59. № 9. P. 2536–2543.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 43–51

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 65.012.122

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗРЕШИМЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ДЖИТТЕРА[1]

А. М. Грузликов[a], Н. В. Колесов[a,*]
[a]ГНЦ РФ АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", Санкт-Петербург, Россия
*e-mail: kolesovnv@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2021 г.
После доработки 08.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается подход к планированию вычислительного процесса в распределенных системах реального времени с минимизацией джиттера ("дрожания" момента старта или завершения некоторой задачи от периода к периоду). В основе подхода лежит понятие разрешимого класса систем, для которого существуют оптимальные алгоритмы планирования полиномиальной сложности.

DOI: 10.31857/S000233882106010X

Введение. В современной научной литературе проблеме планирования уделяется большое внимание. При этом разнообразие рассматриваемых задач весьма велико [1–3]. Среди них, конечно, значатся традиционные приложения в планировании производства, где можно выделить, например, планирование для одного прибора и для технологических линий ((flow shop)-планирование) [4–6]. С этим базовым направлением на идейном уровне естественным образом переплетается планирование вычислений как в центрах коллективного пользования [7], так и в системах реального времени (СРВ) [8, 9]. В настоящей работе обсуждается последнее направление, а точнее, планирование вычислений в распределенных СРВ. Под планированием вычислений обычно понимают определение для каждой решаемой задачи из заданного множества временного интервала исполнения на выделенном для нее процессоре. При этом если на одном процессоре оказываются две или более задач, не связанных отношением предшествования, попутно возникает вопрос об очередности их выполнения, которая определяется наилучшим образом с точки зрения заданного критерия. Для систем управления и обработки информации реального времени характерна периодичность процессов управления и обработки. В результате при планировании дополнительно должно учитываться ограничение, вызванное периодичностью процессов и требующее учета производительности процессоров и пропускной способности каналов обмена на периоде. Оптимальное решение проблемы планирования может быть получено переборными алгоритмами, однако все они характеризуются экспоненциальной вычислительной сложностью, и в силу этого их применение в целом ряде приложений оказывается невозможным. По этой причине широкое распространение на практике получили субоптимальные алгоритмы.

Среди известных работ широко представлено направление, посвященное планированию в многоканальных системах обработки информации, отождествляемое с (flow shop)-планированием. При этом если в классической постановке рассматриваемая система представляет собой вычислительный конвейер с линейным графом информационных межпроцессорных связей, то в предыдущих наших работах этот граф – ациклический. По данной теме опубликовано значительное число работ, различающихся, конечно, прежде всего, особенностями предлагаемых алгоритмов, но также и видом критерия, в соответствии с которым формируется план. При этом наиболее часто используется минимум общего времени выполнения плана. Для систем реального времени могут применяться и другие характерные только для них критерии, например минимум потребляемой энергии или минимум джиттера ("дрожание" момента старта или завершения некоторой задачи от периода к периоду). Для многих систем реального времени этот пара-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00052).

метр имеет важное значение, когда некоторые задачи системы должны быть “привязаны” к заданным моментам времени. Характерным примером может служить ситуация, когда организуется обмен между двумя системами реального времени, причем, по крайней мере, одна из этих систем является распределенной. Пусть дополнительно требуется, чтобы обмен происходил в пределах заданного и весьма ограниченного интервала времени. На практике одной из систем может быть, например, навигационный комплекс, а другой – потребитель навигационной информации.

Именно данной теме и посвящено основное содержание настоящей статьи, где проблема рассматривается в отношении распределенных (flow shop)-систем в отличие от работы [10], исследующей однопроцессорные системы. При этом в ее фокусе лежит подход, основанный на использовании так называемых разрешимых классов систем – РКС-алгоритм. Показывается, что базовая идея РКС-алгоритма, предложенного для (flow shop)-планирования с минимизацией общей длительности плана или максимального отклонения от заданных директивных сроков, оказывается эффективной и при минимизации джиттера. Далее в настоящей статье будут использованы термины (flow shop)-системы и (flow shop)-планирования, несмотря на то, что имеются в виду приложения, далекие от сферы автоматизированных производств.

1. Предварительные сведения. Опишем постановку задачи (flow shop)-планирования. Рассматривается распределенная вычислительная система, которая включает процессоры, имеющие индивидуальную память для хранения кода программ и обменивающиеся информацией через каналы передачи данных.

Предполагается, что множество задач разбито на независимые группы задач, связанных отношением предшествования (далее задания). В результате планированию подлежат n независимых равноприоритетных заданий $\tau = \{\tau_j | \ j = \overline{1, n}\}$, обрабатывающих входные данные, которые поступают с периодом T. Каждое j-е задание состоит из m задач $\tau_{j,i}$ длительностью $e_{j,i}$ $i = \overline{1, m}$. Также предполагается, что значения длительностей известно точно. С практической точки зрения это означает, что используются, например, средние значения или верхние границы этих длительностей. Все применяемые процессоры из множества P являются универсальными и имеют одинаковую производительность. Произведенное назначение заданий соответствует случаю (flow shop)-системы. Согласно данной работе, все графы заданий одинаковы и имеется n изоморфизмов $\varphi_j{:}G_j(S_j,T_j) \to F(Q,P)$ $j = \overline{1, n}$, где $G_j(S_j,T_j)$ – граф межзадачных связей j-го задания, S_j – множество ребер, T_j – множество вершин (задач), $F(Q,P)$ – граф межпроцессорных связей, Q – множество ребер, P – множество процессоров.

Все введенные графы являются направленными, ациклическими, содержащими в общем случае не один путь между любыми выделенными вершинами. Графы характеризуются выделенным подмножеством входных вершин и одной выходной вершиной. Далее для рассматриваемой системы будем использовать обозначение $C(F,\tau)$.

Предполагается, что при назначении задач на процессоры было выполнено условие, гарантирующее независимость обработки разных порций входной информации. В этом случае исключается образование очередей на процессоры из-за незавершенности обработки предыдущей порции входной информации. Охарактеризуем коротко исследуемый ниже алгоритм (flow shop)-планирования – РКС-алгоритм.

Этот алгоритм основан на использовании понятия разрешимого класса системы, обсуждаемого ниже. Важным следствием принадлежности системы к разрешимому классу является существование для нее оптимального алгоритма (flow shop)-планирования линейной сложности [11]. В рассматриваемой системе каждый входной процессор P_i связан с выходным процессором P_o хотя бы одним вычислительным путем (последовательностью процессоров) $p = P_i, P_k, \ldots, P_o$. Назовем $E(p_j)$ временем выполнения вычислительного пути p на j-м задании. Определим его как сумму времен $e_{j,i}$ выполнения задач j-го задания процессорами, принадлежащими этому пути. Назовем вычислительный путь p_j^* критическим для j-го задания, если время его выполнения на j-м задании является максимальным среди всех остальных путей системы. Очевидно, что для разных заданий, решаемых в одной и той же системе, критические вычислительные пути могут быть различными.

С использованием нумерации процессоров вдоль пути p_j выражение для $E(p_j)$ можно записать в виде

$$E(p_j) = \sum_{i=1}^{m^*} e_{j,i},$$

где m^* – число процессоров, принадлежащих пути p_j.

Для определения разрешимых классов предварительно введем на множестве процессоров отношение доминирования ">".

Определение 1. Процессор P_q доминирует над процессором P_r $(P_q > P_r)$, если $\min\limits_j e_{j,q} \geq \max\limits_j e_{j,r}$, $j = \overline{1,n}$.

Общее свойство рассматриваемых далее разрешимых классов распределенных систем состоит в следующем: для любого задания, реализуемого в системе, критический путь единственен и проходит по одним и тем же процессорам $P_1, P_2, \ldots, P_{m^*}$. Теперь приведем определяющие свойства для каждого из разрешимых классов.

Определение 2 (класс 1). Множество процессоров критического пути представляет собой последовательность $P_1 > P_2 > \ldots > P_{m^*}$, убывающую по отношению доминирования.

Определение 3 (класс 2). Множество процессоров критического пути представляет собой последовательность $P_1 < P_2 < \ldots < P_{m^*}$, возрастающую по отношению доминирования.

Определение 4 (класс 3). Множество процессоров критического пути представляет собой пару соединенных последовательностей

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_{h^*} > \ldots > P_{m^*-1} > P_{m^*}, \quad 1 \leq h^* \leq m^*,$$

первая из которых возрастает, а вторая убывает по отношению доминирования (h^* – номер процессора стыковки двух последовательностей).

Определение 5 (класс 4). Множество процессоров критического пути представляют собой пару соединенных последовательностей

$$P_1 > P_2 > \ldots > P_{h^*} < \ldots < P_{m^*-1} < P_{m^*}, \quad 1 \leq h^* \leq m^*,$$

первая из которых убывает, а вторая возрастает по отношению доминирования.

Класс 4 не является в полном смысле разрешимым, поскольку для него неизвестно оптимального алгоритма планирования линейной сложности, а известный алгоритм субоптимален.

Известно, что длительности плана π для разрешимых классов 1–3 определяются выражениями (1.1)–(1.3) соответственно:

$$E_1(\pi) = \sum_{j=1}^{n} e_{j,1}^* + \sum_{i=2}^{m^*} e_{n,i}^*, \tag{1.1}$$

$$E_2(\pi) = \sum_{i=1}^{m^*-1} e_{1,i}^* + \sum_{k=1}^{n} e_{k,m^*}^*, \tag{1.2}$$

$$E_3(\pi) = \sum_{i=1}^{h^*-1} e_{1,i}^* + \sum_{k=1}^{n} e_{k,h^*}^* + \sum_{i=h^*+1}^{m^*} e_{n,i}^*, \tag{1.3}$$

где задачи, длительности которых отмечены звездочками, решаются процессорами критического пути, n – число заданий, m^* – число процессоров в критическом пути, h^* – номер процессора стыковки. Эти выражения можно получить, если записать для некоторого процессора критического пути сумму времен работы и простоя. Для класса 1 таковым процессором будет первый от входа, для класса 2 – последний, для класса 3 – процессор стыковки.

Для класса 4 в рамках рассматриваемого подхода известно лишь выражение для верхней границы длительности плана:

$$E_4(\pi) \leq \overline{E}_4(\pi) = \sum_{j=1}^{n} (e_{j,h^*}^* + e_{j,h^*+1}^*) + \sum_{i=1}^{h^*-1} e_{1,i}^* + \sum_{i=h^*+2}^{m^*} e_{n,i}^*. \tag{1.4}$$

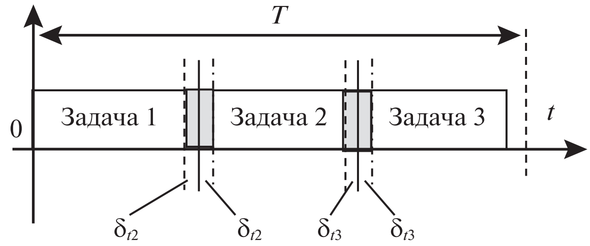


Рис. 1. Иллюстрация неточности временной привязки задач

По отношению к традиционным предлагаемое ниже решение отличается особенностями, заключающимися не только в применении нового критерия, но также и в оперировании фактически интервальными длительностями задач, а именно задача $\tau_{j,i}$ имеет длительность $\tilde{e}_{j,i} = [\underline{e}_{j,i}, \overline{e}_{j,i}]$. При этом величину $\Delta(\tau_{j,i}) = \overline{e}_{j,i} - \underline{e}_{j,i}$ будем называть джиттером задачи $\tau_{j,i}$.

Говорят, что j-я задача привязана к моменту времени t_j с точностью δ_j, если время начала решения этой задачи лежит в интервале $[t_j - \delta_j, t_j + \delta_j]$. Это понятие поясняется на рис. 1, где представлена временная диаграмма исполнения трех задач τ_1, τ_2, τ_3. Задача τ_1, стоящая первой в цикле обработки, имеет точную временную привязку ($\delta_1 = 0$) в рамках данной постановки проблемы. Однако уже привязка второй задачи τ_2 характеризуется погрешностью δ_2, равной неопределенности длительности выполнения первой задачи $\delta_2 = \Delta(\tau_1) \neq 0$, привязка третьей задачи характеризуется погрешностью δ_3, равной сумме неопределенностей длительностей выполнения первой и второй задач $\delta_3 = \Delta(\tau_1) + \Delta(\tau_2) \neq 0$, и т.д.

Приведенные соображения требуют небольшой корректировки традиционного определения отношения доминирования и, как следствие, содержания, но не определений разрешимых классов.

Определение 6. Процессор P_q доминирует над процессором P_r ($P_q > P_r$), если $\min\limits_j \underline{e}_{j,q} \geq$ $\geq \max\limits_j \overline{e}_{j,r}$, $(j = \overline{1,n})$.

Далее будем различать входной и выходной джиттеры задания. В первом случае имеется в виду неточность привязки начала задания, а во втором случае — неточность привязки его конца.

Обсудим выходной джиттер $\Delta_k(\pi)$ для момента окончания плана π. Запишем выражения для выходных джиттеров планов, представленных через джиттеры задач, в системах из разрешимых классов. Очевидно, что выражения для верхней и нижней границ длительностей планов, а следовательно, и выражение для джиттеров с точностью до обозначений будут совпадать с выражениями (1.1)–(1.4):

$$\Delta_1(\pi) = \sum_{j=1}^{n} \Delta(\tau^*_{j,1}) + \sum_{i=2}^{m^*} \Delta(\tau^*_{n,i}), \tag{1.5}$$

$$\Delta_2(\pi) = \sum_{i=1}^{m^*-1} \Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n} \Delta(\tau^*_{k,m^*}), \tag{1.6}$$

$$\Delta_3(\pi) = \sum_{i=1}^{h^*-1} \Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n} \Delta(\tau^*_{k,h^*}) + \sum_{i=h^*+1}^{m^*} \Delta(\tau^*_{n,i}), \tag{1.7}$$

$$\hat{\Delta}_4(\pi) = \sum_{j=1}^{n} (\Delta(\tau^*_{j,h^*}) + \Delta(\tau^*_{j,h^*+1})) + \sum_{i=1}^{h^*-1} \Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{i=h^*+2}^{m^*} \Delta(\tau^*_{n,i}). \tag{1.8}$$

Последнее выражение в силу вышесказанного представляет оценку для джиттера плана системы из класса 4.

2. Алгоритмы планирования по критерию минимума среднего по заданиям джиттера в (flow shop)-системах из разрешимых классов. В настоящем разделе предлагаются оптимальные алгоритмы (flow shop)-планирования для определенных в предыдущем разделе разрешимых классов систем при использовании в качестве критерия минимума среднего по заданиям джиттера, характерного для систем реального времени. Подытожим вышесказанное компактной постановкой задачи.

Постановка задачи. Рассматривается распределенная вычислительная (flow shop)-система $C(F,\tau)$, состоящая из m универсальных одинаковых процессоров. Система исполняет n заданий, характеризующихся одинаковыми ациклическими графами предшествования. Требуется найти наилучший план вычислений по критерию минимума среднего по заданиям джиттера, т.е.

$$J = \min_k \overline{\Delta}_k.$$

У т в е р ж д е н и е 1. Минимальное значение среднего по заданиям выходного джиттера $\overline{\Delta}_1(\pi)$ для системы из класса 1 достигается в плане π, в котором задания упорядочены по неубыванию джиттера их первых задач критического пути, т.е.

$$\Delta(\tau^*_{1,1}) \le \Delta(\tau^*_{2,1}) \le \ldots \le \Delta(\tau^*_{n,1}). \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем с использованием (1.5) выражение для среднего по заданиям выходного джиттера $\overline{\Delta}_1(\pi)$ в случае системы из класса 1:

$$\overline{\Delta}_1(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,1}) + \sum_{i=2}^{m^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,1}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{m^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right]. \tag{2.2}$$

Поскольку цель заключается в поиске плана, минимизирующего полученное выражение, то второе слагаемое в скобках можно отбросить и перейти к минимизации выражения

$$\overline{\Delta}'_1(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,1}). \tag{2.3}$$

Действительно, проанализируем отброшенную двойную сумму. Каждое k-е слагаемое ее внешней суммы представляет собой суммарный джиттер для всех задач, кроме первой (ее джиттер равен нулю), решаемых в k-м задании на критическом пути. Поскольку в сумме присутствует суммарный джиттер всех задач для каждого задания, значение двойной суммы не зависит от упорядоченности заданий, а значит, его можно исключить из рассматриваемого критерия.

Если далее в выражении (2.3) развернуть внутреннюю сумму и привести подобные члены, то приходим к выражению

$$\overline{\Delta}'_1(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(n-k+1)\Delta(\tau^*_{k,1})]. \tag{2.4}$$

В этом выражении суммируются почленные произведения двух числовых последовательностей $\{n-k+1\}$ и $\{\Delta(\tau^*_{k,1})\}, k=\overline{1,n}$, причем первая из них убывающая. Известно [12], что сумма (2.4) будет иметь минимум, если вторая последовательность будет неубывающей. Отсюда следует, что задания должны упорядочиваться по неубыванию джиттера первых задач критического пути.

У т в е р ж д е н и е 2. Минимальное значение среднего по заданиям выходного джиттера $\overline{\Delta}_2(\pi)$ для системы из класса 2 достигается в плане π, для которого выполняется:

1) задания упорядочены по неубыванию джиттера последних задач критического пути, т.е.

$$\Delta(\tau^*_{1,m^*}) \le \Delta(\tau^*_{2,m^*}) \le \ldots \le \Delta(\tau^*_{n,m^*}), \tag{2.5}$$

2) первое задание плана π удовлетворяет условию

$$j^* = \arg\min_j \sum_{i=1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{j,i}). \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем с использованием (1.6) выражение для среднего по заданиям выходного джиттера в системах из класса 2:

$$\overline{\Delta}_2(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,m^*})\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,m^*})\right]. \quad (2.7)$$

Преобразуем первое слагаемое в этом выражении, учитывая, что его внутренняя сумма не зависит от k. Во втором слагаемом развернем внутреннюю сумму и приведем подобные члены. В результате получаем

$$\overline{\Delta}_2(\pi) = \frac{1}{n}\left[n\sum_{i=1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\Delta(\tau^*_{k,m^*})\right] = \sum_{i=1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\Delta(\tau^*_{k,m^*}).$$

Отсюда следует, что минимизация первого слагаемого определяется условием (2.6), а минимизация второго слагаемого (по аналогии с доказательством утверждения 1) – условием (2.5).

У т в е р ж д е н и е 3. Минимальное значение среднего по заданиям выходного джиттера $\overline{\Delta}_3(\pi)$ для системы из класса 3 достигается в плане π, для которого выполняется:

1) задания упорядочены по неубыванию джиттера задач стыковки критического пути, т.е.

$$\Delta(\tau^*_{1,h^*}) \le \Delta(\tau^*_{2,h^*}) \le \ldots \le \Delta(\tau^*_{n,h^*}), \quad (2.8)$$

2) первое задание плана π удовлетворяет условию

$$j^* = \arg\min_j \sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{j,i}). \quad (2.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем с использованием (1.7) выражение для среднего по заданиям выходного джиттера в системах из класса 3:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_3(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,h^*}) + \sum_{i=h^*+1}^{m^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right] = \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,h^*}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=h^*+1}^{m^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right].\end{aligned} \quad (2.10)$$

Как и при анализе систем из класса 1, в этом выражении третье слагаемое в скобках может быть отброшено, как независящее от упорядоченности заданий. В результате можно перейти к минимизации функции:

$$\overline{\Delta}'_3(\pi) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,h^*})\right].$$

Оставшиеся слагаемые можно преобразовать в соответствии с использованными в предыдущем утверждении приемами. В результате получаем

$$\overline{\Delta}'_3(\pi) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta(\tau^*_{j,h^*})\right] = \sum_{i=1}^{h^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\Delta(\tau^*_{k,h^*}).$$

Отсюда следует, что минимизация первого слагаемого определяется условием (2.9), а минимизация второго слагаемого – условием (2.8).

У т в е р ж д е н и е 4. Минимальное значение оценки $\hat{\overline{\Delta}}_4(\pi)$ среднего по заданиям выходного джиттера $\overline{\Delta}_4(\pi)$ для системы из класса 4 достигается в плане π, для которого выполняется:

1) задания упорядочены по неубыванию суммарного джиттера первых и последних задач критического пути, т.е.

$$(\Delta(\tau^*_{1,1^*}) + \Delta(\tau^*_{1,m^*})) \le (\Delta(\tau^*_{2,1^*}) + \Delta(\tau^*_{2,m^*})) \le \ldots \le (\Delta(\tau^*_{n,1^*}) + \Delta(\tau^*_{n,m^*})), \quad (2.11)$$

2) первое задание плана π удовлетворяет условию

$$j^* = \arg\min_j \sum_{i=h^*+1}^{m^*-1} \Delta(\tau^*_{j,i}). \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем с использованием (1.8) выражение для оценки среднего по заданиям выходного джиттера в системах из класса 4:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\Delta}}_4(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(\Delta(\tau^*_{j,1}) + \Delta(\tau^*_{j,m^*})) + \sum_{i=h^*+1}^{n^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}) + \sum_{i=2}^{h^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right] = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(\Delta(\tau^*_{j,1}) + \Delta(\tau^*_{j,m^*}))\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=h^*+1}^{n^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i})\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=2}^{h^*}\Delta(\tau^*_{k,i})\right].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Как и при анализе систем из класса 1, в этом выражении третье слагаемое может быть отброшено, как независящее от упорядоченности заданий. В результате можно перейти к минимизации функции:

$$\hat{\bar{\Delta}}'_4(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(\Delta(\tau^*_{j,1}) + \Delta(\tau^*_{j,m^*}))\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=h^*+1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i})\right].$$

Оставшиеся слагаемые можно преобразовать в соответствии с использованными ранее приемами. В результате получаем

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\Delta}}'_4(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(\Delta(\tau^*_{j,1}) + \Delta(\tau^*_{j,m^*}))\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=h^*+1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i})\right] = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(\Delta(\tau^*_{k,1}) + \Delta(\tau^*_{j,m^*})) + \sum_{i=h^*+1}^{m^*-1}\Delta(\tau^*_{1,i}).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что минимизация первого слагаемого определяется условием (2.12), а минимизация второго слагаемого – условием (2.11).

Если в конкретном случае условия в утверждениях 2–4 противоречат друг другу, то лучший из планов может быть определен путем сопоставления двух вариантов. При этом первый план строится в соответствии с первым условием, а второй план получается из первого путем переноса на первую позицию задания, удовлетворяющего второму условию.

Обсудим асимптотическую сложность описанных выше алгоритмов. Для алгоритма класса 1 базовой процедурой является сортировка, сложность которой можно оценить как $O(n\log n)$. Для остальных алгоритмов без учета перебора вариантов добавляется процедура выбора минимальной линейной сложности. Перебор в данном случае также имеет линейную сложность.

3. Алгоритм планирования по критерию минимума джиттера в (flow shop)-системе общего вида. Очевидно, что на практике для распределенной (flow shop)-системы общего вида, описанной в разд. 2 (Постановка задачи), условия ее принадлежности к тому или иному разрешимому классу чаще всего не выполняются. В частности, могут не совпадать критические пути разных заданий, может нарушаться отношение доминирования между процессорами, а если оно и выполняется, то может не быть упорядоченных по этому отношению цепочек процессоров, характерных для разрешимых классов. В результате исчезают гарантии оптимальности приведенных выше алгоритмов. В связи с этим предлагается пусть приближенный, но справедливый для любой из систем итерационный алгоритм планирования, выполняемый за число шагов, не большее, чем число заданий. На каждом шаге итерации определяется некоторый аналог критического пути, называемый псевдокритическим. Далее используется алгоритм планирования (утверждения 1–4), соответствующий тому разрешимому классу, к которому наиболее близка рассматриваемая на данном шаге система $C' = \{P, \tau'\}$, где τ' – множество неразмещенных заданий ($\tau' \subseteq \tau$). При этом выбранное задание занимает первую позицию из интервала свободных позиций формируемого плана. Заметим, что размещение j-го задания на l-й позиции плана означает, что на каждом процессоре системы задача из j-го задания будет находиться на l-й позиции. После размещения это задание исключается из исходного множества и осуществляется переход к следующей итерации, реализуемой уже для оставшегося множества заданий на множестве свободных позиций плана. В случае если достигнутая на k-м шаге достоверность классификации окажется меньше

Algorithm 1 РКС-алгоритм

Вход: P - процессоры системы, $\tau' = \{\overline{1, n}\}$ - множество неразмещенных заданий
Выход: π - план заданий

Инициализация переменных:
  $\pi = \{\}$
  $C' = P, \tau'$
for $k = 1$ to n **do**
  Вычисление средней длительности выполнения задач для каждого процессора: $\check{e}_i = \frac{1}{|\tau'|}\sum_{j\in\tau'}\overline{e}_{j,i}$, где $i = \overline{1, n}$
  Вычисление критического пути p^* на $\{P\}$ с использованием средней длительности выполнения задач $\check{e} = \{\check{e}_i | i = \overline{1, n}\}$
  Определение класса системы и характеристики достоверности: $CL_k, \delta_k = GetClass(p^*, \check{e})$.
  if $k > 1$ **then**
    if $\delta_k > \delta_{k-1}$ **then**
      Упорядочить все оставшиеся задания в соответтсвии с классом CL_{k-1}: $\pi.append(GetJobs(CL_{k-1}, C'))$
      return π
    end if
  end if
  Определить текущее задание: $\tau_k = GetJobs(CL_{k-1}, C'))[0]$
  Добавить задание в конец плана: $\pi.append(\tau_k)$
  Исключить задание τ_k из множества τ'
  $C' = \{P, \tau'\}$
end for
return π

Рис. 2. Иллюстрация алгоритма планирования РКС

Algorithm 2 GetClass - правило классификации и определение её достоверности

Вход: p^* - критический путь, $\check{e}$ - средняя длительность
Выход: CL - класс, δ - достоверность класса

Аппроксимация параболой зависимости $\check{e}$ от номера процессора вдоль критического пути p^* с использованием метода наименьших квадратов:$y = x^2 * a + x * b + c$.
Вычисление достоверности класса: $\delta = \frac{1}{|p^*|}\sum_{i\in p^*}(y(i) - \check{e})^2$
if $a > 0$ **then**
  if $(-b/2a) < 1$ **then**
    $CL = 1$ (Первый класс)
  else if $(-b/2a) > |p^*|$ **then**
    $CL = 2$ (Второй класс)
  else
    $CL = 3$ (Третий класс)
  end if
else
  if $(-b/2a) < 1$ **then**
    $CL = 2$ (Второй класс)
  else if $(-b/2a) > |p^*|$ **then**
    $CL = 1$ (Первый класс)
  else
    $CL = 4$ (Четвертый класс)
  end if
end if
return CL, δ

Рис. 3. Алгоритм определения правила классификации и ее достоверности

значения достоверности на предыдущем шаге, то планирование завершается с сохранением упорядоченности $(k - 1)$-го шага. В результате алгоритм последовательно размещает в плане все рассматриваемые задания в направлении от начала плана к его концу.

Algorithm 3 GetJobs - формирование плана в соответствии с классом системы

Вход: CL - класс, C - система

Выход: π - упорядочивание заданий в соответствии с классом CL

1: π - упорядочивание заданий системы C в соответствии с требованиями оптимального алгоритма соответствующего класса CL (утверждения 1-4).

2: **return** π

Рис. 4. Алгоритм формирования плана в соответствии с классом системы

4. Результаты моделирования. Для исследования эффективности РКС-алгоритма при минимизации джиттера был осуществлен модельный эксперимент, основанный на случайной генерации примеров. При этом использовалась случайная генерация графов заданий, длительностей составляющих их задач, а также джиттеров этих задач. В целях увеличения достоверности результата было сгенерировано порядка 35 тыс. примеров, представленных тремя группами: заданиями, имеющими графы в виде цепочек, деревьев и ациклических графов. Число заданий в примерах варьировалось от 10 до 50 при числе процессоров, равном 20. Длительности задач, измеряемых в условных единицах, задавались интервалами. При этом разность между верхней и нижней границами интервала трактовалась как джиттер. Значения границ формировались как случайные равномерно распределенные величины из интервала [200–1000]. Для каждого примера составлялся план на основе предложенного алгоритма. Для вычисления верхней и нижней границ длительностей плана использовалась алгебра max-plus [13], после чего как разность границ вычислялся джиттер плана. Далее для получения оценки эффективности алгоритма это значение джиттера следовало бы сопоставить с минимальным, полученным в результате полного перебора вариантов плана. Однако известно, что при большом числе заданий поиск оптимального плана путем перебора становится нереализуемым за приемлемое время. По этой причине в модельном эксперименте использовались оценки Тэйларда [14] и их обобщение на случай ациклических графов. Для всех исследованных трех групп примеров средний проигрыш оптимальному результату оказался порядка 8%, при этом наихудшие варианты соответствовали уровню 20%.

Заключение. В статье были рассмотрены вопросы (flow shop)-планирования вычислительного процесса в распределенных СРВ. При планировании в качестве критерия был использован минимум джиттера (“дрожание” старта или завершения некоторой задачи). Особенностью РКС-алгоритма является простота. Моделирование продемонстрировало достаточную эффективность предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. Berlin: Springer, 2007. 378 c.
2. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: Изд-во МГУ, 2011. 222 с.
3. *Hossain S., Asadujjaman, Nayon A.A.* Minimization of Makespan in Flow Shop Scheduling Using Heuristics // Intern. Conf. on Mechanical, Industrial and Energy Engineering, Khulna, Bangladesh. 2014.
4. *Nawaz M., Enscore Jr. E.E., Ham I.* A Heuristic Algorithm for the *m*-Machine, *n*-Job Flow-shop Sequencing Problem // Omega – International J. Management Science. 1983. № 11. P. 91–95.
5. *Bocewicz G., Banaszak Z.A.* Declarative Approach to Cyclic Steady State Space Refinement: Periodic Process Scheduling // Intern. J. Adv. Manuf. Technol. 2013. V. 67. № 1–4. P. 137–155.
6. *Korytkowski P., Rymaszewski S., Wiśniewski T.* Ant Colony Optimization for Job Shop Scheduling Using Multi-Attribute Dispatching Rules // Intern. J. Adv. Manuf. Technol. 2013. V. 67. № 1–4. P. 231–241.
7. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Управление ресурсоемкими разнородными вычислительными заданиями с директивными сроками окончания // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 5. С. 15–22.
8. *Liu J.W.S.* Real-Time Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs. NJ, 2000. 600 p.
9. *Cottet F., Kaiser J., Mammeri Z.* Scheduling in Real-Time Systems. John Wiley & Sons Ltd., 2002.
10. *Колесов Н.В., Толмачева М.В., Юхта П.В.* Минимизация джиттера при планировании вычислений в системах реального времени // Программирование. 2014. № 1. С. 28–34.
11. *Wang J.-B., Xia Z.-Q.* Flow Shop Scheduling with Deteriorating Jobs under Dominating Machines // Omega. 2006. V. 34. P. 327–336.
12. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
13. *Braker J.G.* Max-algebra Modeling and Analysis of Time-table Dependend Transportation Networks // Proc. 1-st European Control Conf., Grenoble, France, 1991. P. 1831–1836.
14. *Taillard E.* Benchmarks for Basic Scheduling Problems // Europ. J. Operational Research. 1993. V. 64. № 2. P. 278–285.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 52–60

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.11, 519.171.2, 519.175.3, 519.179.1

СИГНАТУРЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ 2-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ[1]

© 2021 г. Т. Ю. Гольцова[a,b], Е. К. Егорова[a,b], А. В. Мокряков[a,b,*], В. И. Цурков[c]

[a] МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

[b] РГУ им. А.Н. Косыгина, Москва, Россия

[c] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: MokryakovAlVik@gmail.com

Поступила в редакцию 28.05.2021 г.
После доработки 08.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Хранение гиперграфов в памяти компьютера является достаточно неэффективным, так как основной способ хранения – матрица инцидентности или список гиперребер. Для n-вершинных k-однородных гиперграфов есть возможность задания матрицы смежности, но ее объем равен n^k. Для экстремальных однородных гиперграфов появляется возможность использовать базу в виде объекта хранения, она занимает в памяти меньше места, чем список гиперребер, но не всегда удобна с практической точки зрения. Здесь рассматривается новое понятие – сигнатура экстремального 2-однородного гиперграфа, которая представляет собой целое неотрицательное число и однозначно характеризует гиперграф. Для данного представления описаны алгоритмы построения экстремального 2-однородного гиперграфа в виде матрицы смежности или базы из сигнатуры. Также приведены алгоритмы получения сигнатуры из произвольной матрицы смежности или базы экстремального 2-однородного гиперграфа.

DOI: 10.31857/S0002338821060093

Введение. В теории графов важное место занимают вопросы оценки мощности множества графов, обладающих определенными характеристиками. В разное время эти вопросы исследовались в работах [1–5]. Оценка мощности множества графов определенных классов важна не только в рамках теоретической, но и в практической области. Например, дерево легко хранить с помощью алгоритма Прюфера [6] в виде определенной последовательности. Данный механизм подходит, например, для генерации случайных деревьев, а также случайных графов общего вида путем объединения набора случайных деревьев.

Однако далеко не все классы графов и гиперграфов [7] могут быть точно оценены по мощности и имеют механизм перечисления. Например, практическая задача хранения гиперграфов и работы с ними является достаточно важной для анализа социальных сетей. При этом хранение гиперграфов в общем случае не особенно эффективно, так как основной способ хранения – матрица инцидентности или список гиперребер. Если объем такого хранения не слишком велик, то работа с ними не удобна. Для k-однородных гиперграфов [8] есть возможность задания матрицы смежности, но ее объем равен n^k. Для экстремальных однородных гиперграфов появляется возможность использовать базу [8] в виде объекта хранения, она занимает в памяти меньше места, чем список гиперребер, но не всегда удобна с практической точки зрения. При этом однородные гиперграфы используются в различных областях математики [9–12] от комбинаторики до математического представления баз данных.

Рассматривается определенный класс гиперграфов – экстремальные однородные гиперграфы. Здесь описано новое понятие – сигнатура экстремального 2-однородного гиперграфа, которая представляет собой целое неотрицательно число и однозначно характеризует гиперграф. Кроме того, приводится доказательство теоремы о мощности множества соответствующих объектов, а также представлены алгоритмы, связанные с их перечислением. Предоставление данных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-53019 ГФЕН_а).

алгоритмов позволит упростить хранение экстремальных 2-однородных гиперграфов в памяти компьютера, так как механизм преобразования из сигнатуры в матрицу смежности или базу позволяет легко получать из числа матрицу или список ребер, что дает возможность максимально эффективно хранить и обрабатывать экстремальные 2-однородные гиперграфы.

1. Экстремальные однородные гиперграфы. Для дальнейшего обсуждения приведем определения гиперграфов, их однородности и экстремальности.

Определение 1. *Гиперграф* $H = H(V, E) = H(V_n, E)$ – совокупность множества из n вершин V_n и множества непустых подмножеств множества вершин E [7], e_i – элементы множества E, где $i = \overline{1, |E|}$ – *гиперребра*.

Определение 2. Гиперграф $H^k = H^k(V_n, E)$ называют *k-однородным* гиперграфом (uniform hypergraph (UH)), если $|e_i| = k$, $\forall e_i \in E$.

Определенные классы UH известны также под другими именами. При $k = 2$ можно говорить о ненаправленных графах без петель. При больших k однородные гиперграфы известны как $k - 1$ комплексы [13]. Этот термин пришел из топологии [10].

Одной из важных особенностей UH является их представление в виде k-индексной матрицы смежности $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$, где индексы $i_j = \overline{1, n}$ при $j = \overline{1, k}$. Это позволяет эффективнее взаимодействовать с ними. Однако память тратится менее эффективно, чем при использовании матрицы инцидентности.

Особый интерес для исследования представляют экстремальные UH. Пусть $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел и n – количество координат вектора **A.** Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}_+^n = \{\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{Z}_+ \ \forall i\}$ – множество неотрицательных n-координатных векторов и $\overline{\mathbb{Z}}_+^n = \{\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n : a_i \geq a_{i+1}, \forall i, i = \overline{1, n-1}\}$ – множество неотрицательных n-координатных векторов с упорядоченными по невозрастанию координатами.

Определение 3. *Реализацией* вектора $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n$ в k-однородный гиперграф $H = H(\mathbf{A}) = H(V, E)$ называется такой гиперграф, что вектор степеней его вершин есть вектор **A**.

Пусть вектор **A** из $\mathbb{Z}_+^n$ есть реализуемый в k-однородный гиперграф вектор и $\Gamma^k = \{H(\mathbf{A})\}$ – множество всех реализаций (с множеством вершин V_n).

Определение 4. Вектор **A** из $\mathbb{Z}_+^n$, где $n \geq 2$, называется *k-совершенным*, если $|\Gamma^k| = 1$. При этом единственная реализация $H(\mathbf{A})$ обозначается *k-совершенным однородным гиперграфом*.

Для определения экстремальности вектора (и гиперграфа) удобно перейти к вектору, координаты которого упорядочены по невозрастанию.

Определение 5. Вектор **A** из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geq 2$, называется *k-экстремальным*, если **A** – k-совершенный вектор. Единственная реализация $H(\mathbf{A})$ будет *экстремальным k-однородным гиперграфом* (EUH_n^k).

Определение 6. Множество всех EUH_n^k обозначим как $\mathfrak{A}_n^k$.

Основное преимущество использования экстремальных гиперграфов состоит в том, что между множеством k-экстремальных векторов и множеством экстремальных k-однородных гиперграфов установлено взаимно-однозначное соответствие. Кроме того, существуют быстрые редукционные алгоритмы восстановления k-экстремальных векторов в k-однородный гиперграф при $k = 2$ [14], $k = 3$ [13] и частично для произвольного k [15]. При этом EUH_n^k – база [8] экстремального k-однородного гиперграфа.

Пусть $n, k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Для множества индексов $I_n = \{i \in \mathbb{Z} : i = \overline{1, n}\}$ (номеров) введем обозначение k-индексных упорядоченных подмножеств множества I_n: $I_n^k = \{(i_1, \dots i_k) : i_j = \overline{1, n}, i_j < i_{j+1} \forall j\}$. Определим на I_n^k частичный порядок: положим $(i_j : j = \overline{1, k}) \geq (m_j : j = \overline{1, k})$, если $i_j \geq m_j \ \forall j$, и $(i_j : j = \overline{1, k}) > (m_j : j = \overline{1, k})$ при $(i_j : j = \overline{1, k}) \geq (m_j : j = \overline{1, k})$ и $(i_j : j = \overline{1, k}) \neq (m_j : j = \overline{1, k})$.

Таблица 1. Траектория и элементы базы из примера 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2	1		1	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$
3	1	1		1	1	1	1	0	0
4	1	1	1		1	1	$\boxed{1}$	0	0
5	1	1	1	1		0	0	0	0
6	1	1	1	1	0		0	0	0
7	1	1	1	1	0	0		0	0
8	1	1	0	0	0	0	0		0
9	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Построим конструкцию, позволяющую алгебраическим способом описать EUH^k. Для $UH_n^k = H^k(V_n, E)$ и $X^k(H^k) = (x_{i_1 \ldots i_k})$ зададим $\hat{I}_n^k(H^k) = \{(i_1, \ldots, i_k) \in I_n^k : x_{i_1 \ldots i_k} = 1\} = \{(i_1, \ldots, i_k) \in$ $\in I_n^k : \{v_{i_j} : j = \overline{1, k}\} \in E\}$.

Определение 7. Пусть $H^k(V_n, E)$ – непустой экстремальный k-однородный гиперграф ($E \neq \varnothing$), а $X^k(H^k) = (x_{i_1 \ldots i_k})$ – его матрица смежности. Подмножество индексов $\overline{I}_n^k(H^k) = \{(i_1, \ldots, i_k)\}$ из I_n^k называется *базой* для комплекса H^k, если выполняются следующие условия:

– для разных элементов $(i_1, \ldots, i_k)$ и $(m_1, \ldots, m_k)$ из $\overline{I}_n^k(H^k)$ отношение порядка в $I_n^k(H^k)$ не определено;

– для $\forall (i_1, \ldots, i_k) \in I_n^k(H^k) \backslash \overline{I}_n^k(H^k)$ имеется такой $(m_1, \ldots, m_k) \in \overline{I}_n^k(H^k)$, что существует отношение частичного порядка: $(i_1, \ldots, i_k) < (m_1, \ldots, m_k)$.

Определение 8. Подмножество индексов $(m_1, \ldots, m_k)$ из $\hat{I}_n^k(H^k)$ (т.е. $x_{m_1 \ldots m_k} = 1$) называется *максимальным*, если $x_{i_1 \ldots i_k} = 0$, $\forall (i_1, \ldots, i_k) > (m_1, \ldots, m_k)$.

Теорема 1. Теорема состоит из четырех частей.

1. База содержит все максимальные подмножества индексов.

2. Любой экстремальный $UH_n^k = H^k(V_n, E)$ имеет единственную базу.

3. Пусть $\tilde{I}_n^k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in I_n^k\}$ и между элементами $\tilde{I}_n^k$ отсутствует отношение частичного порядка. Тогда $\tilde{I}_n^k$ – база некоторого экстремального k-однородного гиперграфа.

4. UH_n^k является экстремальным тогда и только тогда, когда имеет базу.

Доказательство данной теоремы представлено в [8].

Рассмотрим на примере то, как база соответствует вектору степеней вершин EUH_n^k.

Пример 1. Возьмем 4-экстремальный вектор $\mathbf{A} = (5, 5, 4, 2, 2, 1, 1)$. Построим его единственную реализацию $H^4 = H^4(V_7, E) = H^4(\mathbf{A})$, где множество гиперребер $E = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}, \{v_1, v_2, v_4, v_5\}\}$. Следовательно, $\overline{I}_7^4(H^4) = \{(1, 2, 3, 7), (1, 2, 4, 5)\}$.

Продемонстрируем, как база отображается в матрице смежности экстремального 2-однородного гиперграфа.

Пример 2. Пусть дана база $B = \{(2, 9), (4, 7)\}$. Матрица смежности для нее представлена в табл. 1. На матрице смежности пунктиром выделены элементы базы.

Отдельно стоит обозначить множество баз k-экстремальных однородных гиперграфов на n вершинах как $\mathfrak{B}^k(n)$.

2. Мощность множества 2-экстремальных однородных гиперграфов. В данном разделе рассматриваются вопросы перечисления экстремальных графов. Экстремальный граф – это частный случай EUH_n^k для $k = 2$. В [14] упоминалось, что $|\mathfrak{A}_n^2| = 2^{n-1}$. Доказательство данного факта опиралось на свойства экстремальных векторов и ограничения на их координаты. Рассмотрим другой способ доказательства данной теоремы — через базы.

Т е о р е м а 2. Мощность множества экстремальных графов, построенных на n вершинах, равна 2^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество баз однозначно соответствует множеству $\mathfrak{A}_n$, то найдем $|\mathfrak{B}^2(N)|$. Базы могут состоять из нескольких элементов. Так как между элементами базы отсутствует отношение частичного порядка [8], то при n вершинах количество элементов в базе не превосходит $n/2$. Это легко увидеть, если предположить, что первый элемент базы равен $(1, n)$, второй – $(2, n-1)$, а i – $(i, n-i)$ при $i \le n/2$. Если количество вершин четно, то последним в данной цепочке будет элемент $(n/2, n/2+1)$. В обратном случае последний элемент в цепочке может принимать три варианта: $((n-1)/2, (n-1)/2+1)$, $((n-1)/2, (n-1)/2+2)$ и $((n-1)/2+1, (n-1)/2+2)$.

Обозначим через $\mathfrak{B}_i^2(n) = \mathfrak{B}_i(n)$ множество баз экстремальных графов на n вершинах, при этом каждая база состоит из i элементов.

Теперь нужно найти $\left|\mathfrak{B}^2(n)\right|$. Так как множество баз можно разложить на непересекающиеся множества, то справедливо следующее утверждение:

$$\left|\mathfrak{B}^2(n)\right| = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathfrak{B}_i^2(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathfrak{B}_i(n). \tag{2.1}$$

Легко заметить, что $\left|\mathfrak{B}_0(n)\right| = 1$, так как база, в которой нет элементов описывает вполне несвязный граф, т.е. граф без ребер. Для множества $\mathfrak{B}_1(n)$ также легко найти мощность. Так как единственный элемент базы состоит из двух различных чисел, упорядоченных по возрастанию, то их количество равно числу сочетаний из n по 2, т.е. C_n^2.

Аналогично можно найти $\left|\mathfrak{B}_2(n)\right|$. Пусть база состоит из двух элементов (x, y) и (t, s), то, не нарушая общности, мы можем предположить, что $x < t$ и $y > s$. Это связано с тем, что между элементами базы не может быть установлено отношение частичного порядка. Соответственно, задача формулируется так: сколько комбинаций можно получить из четырех чисел $1 < x < t < s < y \le n$? Ответом является C_N^4. Продолжая рассмотрения частных случаев, придем к следующему выражению:

$$\left|\mathfrak{B}_i(n)\right| = C_n^{2i}. \tag{2.2}$$

Используя значения (2.2), преобразуем формулу (2.1):

$$\left|\mathfrak{B}^2(n)\right| = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2i}. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) можно упростить, если воспользоваться правилом суммирования чисел сочетаний: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Тогда из (2.3) вытекает следующее:

$$\left|\mathfrak{B}^2(n)\right| = C_n^0 + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n-1}^{2i} + C_{n-1}^{2i-1}. \tag{2.4}$$

Благодаря замене $2i = p$ и известному свойству бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \tag{2.5}$$

представляем (2.4) в следующей форме:

$$\left|\mathfrak{B}^2(n)\right| = C_{n-1}^0 + \sum_{p=1}^{n-1} C_{n-1}^p = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p = 2^{n-1}. \tag{2.6}$$

Таким образом доказано, что $\left|\mathfrak{A}_n^2\right| = 2^{n-1}$.

3. Сигнатура экстремального 2-однородного гиперграфа. Обозначим множество целых неотрицательных чисел меньше t как $\mathbb{Z}_t$. Тогда исходя из теоремы 2 мы могли бы установить взаимооднозначное соответствие между множеством $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ и множеством $\mathfrak{A}_n^2$. Это позволяет определить понятие сигнатуры экстремального графа и сигнатурной характеристики множества экстремальных графов.

Определение 9. Назовем n-битное неотрицательное число $x \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$, однозначно характеризующее экстремальный граф по описанному далее алгоритму 1, сигнатурой соответствующего ему экстремального графа, а множество $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ — сигнатурной характеристикой множества $\mathfrak{A}_n^2$.

Перейдем к описанию алгоритмов определения сигнатуры.

Алгоритм 1. Восстановление матрицы смежности n-вершинного экстремального графа по сигнатуре.

Входные данные: x — сигнатура (целое неотрицательное число), n — количество вершин в экстремальном графе.

Локальные переменные: индексы $0 \le i, j, k \le n$.

Выходные данные: $M = (m_{pq})$ — матрица смежности результирующего экстремального графа.

Шаг 1. Если $x \ge 2^{n-1}$, то построить экстремальный граф на данном множестве вершин по указанному числу невозможно.

Шаг 2. Установим $i = 0$, $j = n$ и $k = n-2$, а также $m_{pq} = 0, \forall p, q = \overline{1, n}$.

Шаг 3. Если k-й бит числа равен 0, то увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 5.

Шаг 4. Увеличиваем i на 1, устанавливаем m_{pq} и $m_{qp} = 1$, где $p = i$, а $q = \overline{i+1, j}$.

Шаг 5. Если $k > 0$, то уменьшаем k на 1 и переходим к шагу 3.

Шаг 6. Матрица смежности экстремального графа получена.

Суть алгоритма состоит в анализе сигнатуры, представленной в двоичном виде. Начинаем перебирать разряды числа от большего к меньшему. Если разряд равен 1, то сдвигаемся по узлам матрице вниз, иначе — влево. Построенная граница разделяет домены единиц и нулей в результирующей матрице смежности.

Замечание. Перечисление битов можно проводить в двух направлениях от $n-1$ к 1 и наоборот. В первом случае (алгоритм 1) при подаче на вход одной и той же сигнатуры x и разных n (n_1 и n_2) результирующие графы будут отличаться только наличием дополнительных изолированных вершин. Их количество равно $|n_1 - n_2|$.

При переборе битов сигнатуры в возрастающем порядке результирующие графы при тех же условиях будут существенно различными, что не позволяет легко прогнозировать их характеристики по сигнатуре.

Также стоит заметить, что вполне несвязный граф, являясь экстремальным, соответствует сигнатуре 0, а полный соответствует сигнатуре $2^{n-1}-1$. Данные свойства несомненно способствуют упорядочиванию и перечислению экстремальных графов.

Рассмотрим действие алгоритма 1 на примере.

Пример 3. Пусть на вход подается $x = 201$ и $n = 10$. Сначала проверим, что при данных значениях граф существует: $x = 201 < 2^{10-1} = 512$. Теперь можно перейти к непосредственному построению матрицы, но сначала представим x в двоичном виде: $x = 011001001_2$. Здесь x начинается с 0, так как количество бит должно быть равно $n-1$. Дальнейший процесс построения приведем в виде табл. 2 со строками: k, значение k-го бита (x_k), i и j.

Результирующая матрица M (табл. 3) представлена и содержит траекторию, которую можно построить, если поставить начальную точку в правый верхний угол правой верхней ячейки матрицы, и сдвигать точку, согласно правилам алгоритма 1. Как видно, построенная ломанная отделяет домен единиц от домена нулей, что является одним из критериев экстремальности графа. Также данная ломаная всегда упирается в ячейки главной диагонали, которые в случае экстремального графа всегда имеют нулевые и не значимы.

Таблица 2. Пример работы алгоритма 1

k	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x_k	0	1	1	0	0	1	0	0	1
i	0	1	2	2	2	3	3	3	4
j	9	9	9	8	7	7	6	5	5

Таблица 3. Результирующая матрица смежности из примера 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	1		1	1	1	1	1	1	1	0
3	1	1		1	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1		1	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1		0	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0		0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0		0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0		0	0
9	1	1	0	0	0	0	0	0		0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Для построения взаимооднозначного отображения между сигнатурной характеристикой и множеством экстремальных графов необходимо описание и обратного алгоритма – получение числа из матрицы смежности экстремального графа.

А л г о р и т м 2. Нахождение сигнатуры по матрице смежности n-вершинного экстремального графа.

Входные данные: $M = (m_{pq})$ – матрица смежности n вершинного экстремального графа.

Локальные переменные: индексы $0 \le i, j, k \le n$.

Выходные данные: x – сигнатура (целое неотрицательное число).

Ш а г 1. Установим $i = 1$, $j = n$, $k = n - 2$ и $x = 0$.

Ш а г 2. Если $m_{ij} = 0$, то уменьшаем j на 1 и переходим к шагу 4.

Ш а г 3. Увеличиваем i на 1, устанавливаем k-й бит числа x в 1.

Ш а г 4. Уменьшаем k на 1. Если $k > 0$, то перейдем к шагу 2.

Ш а г 5. Текущее значение x – искомая сигнатура.

Суть данного алгоритма состоит в поиске границы единичного домена матрицы смежности: идем с конца строки влево пока не найдем единицу, потом вниз пока не найдем ноль. Пока ищем ноль, устанавливаем соответствующие биты в числе. Повторяем, пока не дойдем до главной диагонали. Рассмотрим работу алгоритма 2 на примере.

П р и м е р 4. Пусть дана матрица смежности M размерности 7 × 7 (табл. 4).

Процесс нахождения сигнатуры, соответствующей заданной матрице смежности, представлен в табл. 5. Отметим, что последовательность пройденных ячеек матрицы смежности соответствует двоичным разрядам найденной сигнатуры от старшего к младшему.

Так как базы являются эффективным средством представления экстремальных графов, то желательно установить соответствие между множествами $\mathfrak{B}^2(n)$ и $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$. Таким образом можно упорядочить множество баз и упростить манипулирование ими. Для этого приведем алгоритм построения базы на основе сигнатуры.

А л г о р и т м 3. Восстановление базы n-вершинного экстремального графа по сигнатуре.

Входные данные: x – сигнатура (целое неотрицательное число), n – количество вершин в соответствующем экстремальном графе.

Локальные переменные: индексы $0 \le i, j, k \le n$.

Таблица 4. Матрица смежности M из примера 4

	1	2	3	4	5	6	7
1		1	1	1	1	1	1
2	1		1	1	1	1	0
3	1	1		1	1	0	0
4	1	1	1		1	0	0
5	1	1	1	1		0	0
6	1	1	0	0	0		0
7	1	0	0	0	0	0	

Таблица 5. Пример работы алгоритма 2

k	5	4	3	2	1	0
i	1	2	2	3	3	4
j	7	7	6	6	5	5
m_{ij}	1	0	1	0	1	1
x_k	1	0	1	0	1	1

Таблица 6. Траектория и элементы базы из примера 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										

Выходные данные: $B = \{b_t\}$ – база из t-элементов, соответствующая экстремальному графу.

Ш а г 1. Если $x \geq 2^{n-1}$, то построить экстремальный граф (и соответственно его базу) на данном множестве вершин по указанной сигнатуре – невозможно.

Ш а г 2. Установим $i = 0$, $j = n$ и $k = n - 3$.

Ш а г 3. Если k-й бит числа равен 1, то увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 6.

Ш а г 4. Если k – 1-й бит равен 1, то добавляем к B элемент (i, j).

Ш а г 5. Уменьшаем j на 1.

Ш а г 6. Если $k > 0$, то уменьшаем k на 1 и переходим к шагу 3.

Ш а г 7. Если нулевой бит сигнатуры равен 1, то добавляем в B элемент (i, j).

Ш а г 8. База экстремального графа получена.

Основная особенность алгоритма состоит в поиске сочетания переходов между ячейками: сначала вниз потом вправо. В этом случае граница образует выступ, угол которого и есть элемент базы. Покажем это на примере работы алгоритма 3.

П р и м е р 5. Пусть сигнатура $x = 332$ и $n = 10$. Найдем базу соответствующего сигнатуре графа.

Для нахождения базы сначала переведем сигнатуру в двоичный вид: $x = 101001100_2$. Теперь постепенно будем проходить по разрядам и определять координаты базы. Для этого покажем траекторию движения точки из верхнего правого угла по правилам алгоритма 3. Траекторию и элементы базы можно увидеть в табл. 6, а процесс вычислений покажем в виде табл. 7. Здесь траектория завершается достигнув верхнего правого угла ячейки (5, 5), а элементами базы являются пары индексов (1, 10), (2, 9) и (4, 7). Таким образом база по сигнатуре построена.

Таблица 7. Пример работы алгоритма 3

k	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x_k	1	0	1	0	0	1	1	0	0
i	1	1	2	2	2	3	4	4	4
j	10	9	9	8	7	7	7	6	5

Таблица 8. Матрица смежности для базы из примера 6 и траектория сигнатуры

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	1		1	1	1	1	1	1	0	0
3	1	1		1	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1		0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	0		0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0		0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0		0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0		0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0		0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Теперь перейдем к завершающему алгоритму: нам данный алгоритм нужен для быстрой идентификации базы и нахождения ее сигнатуры.

Алгоритм 4. Нахождение сигнатуры по базе n-вершинного экстремального графа.

Входные данные: $B = (b_t)$ — база экстремального графа, n — количество вершин в графе, t — количество элементов в базе.

Локальные переменные: индексы $0 \le i, j, k, p \le n$.

Выходные данные: x — сигнатура (целое неотрицательное число).

Шаг 1. Отсортируем элементы базы по возрастанию первого элемента.

Шаг 2. Установим $i = 1$, $j = n$, $k = n - 2$, $p = 0$ и $x = 0$.

Шаг 3. Если $p = t$, то переходим к шагу 8, иначе увеличиваем p на 1.

Шаг 4. Если $b_{p_2} < j$, то уменьшаем j на 1 и переходим к шагу 8.

Шаг 5. Увеличиваем i на 1, устанавливаем k-й бит числа x в 1.

Шаг 6. Уменьшаем k на 1.

Шаг 7. Если $i > b_{p_1}$, то перейдем к шагу 3, иначе перейдем к шагу 4.

Шаг 8. Полученное значение x — искомая сигнатура.

Алгоритм основан на следующей процедуре: каждый элемент базы на матрице смежности можно представить как нижний правый угол прямоугольника из единиц. Таким образом мы сначала двигаемся к правой границе прямоугольника, а потом идем вдоль нее вниз. После этого выбираем следующий элемент базы и повторяем процедуру уже с текущей точки. Когда мы идем вниз, то устанавливаем соответствующие биты в сигнатуре в единицу.

Продемонстрируем работу данного алгоритма на примере.

Пример 6. Пусть дана база $B = \{(2,8),(3,5)\}$ для 10-вершинного графа. Найдем для нее сигнатуру.

Матрица смежности графа, которая соответствует указанной базе, представлена в табл. 8. Процесс нахождения самой сигнатуры состоит в последовательном определении значений двоичных разрядов и приведен в табл. 9.

Таблица 9. Пример работы алгоритма 4

k	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x_k	0	0	1	1	0	0	0	1	0
i	0	0	1	2	2	2	2	3	3
j	9	8	8	8	7	6	5	5	4

Заключение. Понятие сигнатуры предоставляет следующие возможности:

эффективный метод хранения экстремальных графов в виде n-битного числа;

применение сигнатуры в качестве ключа при шифровании, основанном на топологической структуре экстремальных графов, на текущий момент в качестве ключа используется n-координатный вектор степеней вершин экстремального графа;

выполнение операций объединения и пересечения над сигнатурами, а не над матрицами смежности графов, что позволит снизить сложность операции с $O(n^2)$ до $O(n)$, где n – количество вершин графа (сейчас разработаны алгоритмы частичного упрощения булевых операций через векторы степеней вершин);

сигнатура предполагается к использованию в алгоритме нахождения $|\mathfrak{A}_n^3|$ и общего случая $|\mathfrak{A}_n^k|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Póilya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Math. 1937. V. 68. P. 145–254.
2. *Gilbert E.N.* Enumeration of Labelled Graphs // Canad. J. Math. 1956. V. 8. P. 405–411.
3. *Nijenhuis A., Wilf H.S.* The Enumeration of Connected Graphs and Linked Diagrams // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1979. V. 27. № 3. P. 356–359.
4. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов М.: МИР, 1977. 326 с.
5. *Миронов А.А.* Равномерные обобщенные графы // ДАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 465–468.
6. *Prüfer H.* Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. V. 27. P. 742–744.
7. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
8. *Мокряков А.В.* Представление гиперграфов в качестве алгебраической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 53–59.
9. *Mironov A.A.* Minimax under Transportation Constraints Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 309 p.
10. *Александров П.С.* Комбинаторная топология. М.: Гостехтеориздат, 1947. 660 с.
11. *Мокрозуб В.Г., Немтинов В.А., Мордвин А.С., Илясов А.А.* Применение n-ориентированных гиперграфов и реляционных баз данных для структурного и параметрического синтеза технических систем // Прикладная информатика. 2010. № 4 (28). С. 115–122.
12. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечением // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53. № 4. С. 16–42.
13. *Мокряков А.В., Цурков В.И.* Восстановление 2-комплексов по целочисленному неотрицательному вектору // АиТ. 2011. № 12. С. 130–143.
14. *Миронов А.А.* Геометрия точек пространства R^n, реализуемых в граф // УМН. Т. XXXII. № 6 (198). 1977. С. 232–233.
15. *Костяной Д.С., Мокряков А.В., Цурков В.И.* Алгоритмы восстановления гиперграфов по заданному вектору степеней вершин // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 43–48.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.854.6

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ СТРЕЛЬБЕ[1]

© 2021 г. Л. П. Ванг[a], А. С. Есенков[b], Е. С. Стрелкова[c], А. П. Тизик[d,*]

[a] Нанкинский ун-т аэронавтики и космонавтики, Нанкин, КНР

[b] Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

[c] Московский физико-технический ин-т, Долгопрудный, МО, Россия

[d] Центральный научно-исследовательский ин-т связи, Москва, Россия

*e-mail: tizik_ap@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
После доработки 17.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Метод последовательной модификации коэффициентов целевой функции для задач транспортного типа распространяется на класс задач об эффективной стрельбе. На каждом шаге итеративного процесса решаются задачи с двумя ограничениями и одной связывающей переменной. Рассматривается вырождение из-за неединственности решения упомянутых промежуточных задач. Дается процедура снятия вырождения. Окончательный алгоритм строит точное решение исходной задачи булевого программирования. Экспериментально устанавливается степенной рост времени счета в зависимости от размерности исходной задачи.

DOI: 10.31857/S0002338821060160

Введение. В [1] упоминается о постановках задач об эффективной стрельбе и их связи с классическими задачами транспортного типа. В [2] предлагается метод последовательной модификации коэффициентов целевых функций задач транспортного типа. В настоящей работе, в отличие от последовательного изменения допустимых решений или двойственных переменных, итеративно пересчитываются коэффициенты целевой функции. Строится монотонный по целевой функции процесс, который окончательно приводит к оптимуму, хотя последовательные решения (так называемые псевдорешения) не допустимы к исходным ограничениям. В [3–5] алгоритм применяется к различным задачам транспортного типа. Особым местом является вырождение, когда из промежуточных задач невозможно сформировать исходный оптимум. Это преодолевается для каждого конкретного случая по-разному.

В работе этот подход применяется для так называемой задачи об эффективной стрельбе. Имеется некоторое количество батарей, каждая из которых делает несколько выстрелов по различным целям. Общее количество выстрелов всех батарей равно количеству целей. Для выстрела по каждой цели у каждой батареи имеется коэффициент эффективности стрельбы. Задача состоит в том, чтобы определить такой план стрельбы, при котором достигается максимум суммы эффективностей.

1. Постановка задачи. Формально задача выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = n, \tag{1.2}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 21-51-53019) и Государственного фонда естественных наук Китая (гранты 11971231; 1211153001).

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

$$x \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max. \tag{1.5}$$

Здесь индекс i нумерует цели, количество которых n. Имеется m батарей, которые производят a_j выстрелов, где j – номер батареи. Неизвестная величина x_{ij} равна единице, если по цели i производится выстрел из батареи j, в противном случае эта величина равна нулю. По каждой цели i делается только один выстрел из батареи j. Задача (1.1)–(1.5) является линейной оптимизационной задачей с булевыми переменными.

2. Алгоритм решения задачи (1.1)–(1.5). Для решения этой задачи построим последовательность ее так называемых псевдорешений [2].

Первое псевдорешение получим следующим образом. Полагаем

$$c_{ij}^1 = \frac{c_{ij}}{2}, \quad c_{ij}^2 = \frac{c_{ij}}{2}$$

и рассмотрим m одномерных задач с ограничениями (1.1), (1.4):

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \max, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

а также n одномерных задач с ограничениями (1.3), (1.4):

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}^2 x_{ij} \to \max, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Для решения одномерной задачи (1.1), (1.4), (2.1) при произвольном $i = i'$ необходимо найти $a_{i'}$ наибольших коэффициентов $c_{i'j}^1$ из ее целевой функции:

$$c_{i'j_1}^1 = \max_j c_{i'j}^1,$$
$$c_{i'j_2}^1 = \max_{j, j \neq j_1} c_{i'j}^1,$$

и т.д. Соответственно решением одномерной задачи (1.1), (1.4), (2.1) будет

$$x_{i'j_1} = 1,$$
$$x_{i'j_2} = 1$$

и т.д. Для решения одномерной задачи вида (1.3), (1.4), (2.2) при произвольном $j = j'$ необходимо найти максимальный коэффициент соответствующей целевой функции:

$$c_{ij'}^2 = \max_i c_{ij'}^2, \quad x_{ij'} = 1.$$

Пусть у всех одномерных задач есть конкретные решения. Объединим эти решения в одно и назовем его *псевдорешением* исходной задачи. Сумму значений целевых функций одномерных задач будем считать значением целевой функции псевдорешения. Заметим, что эта сумма не меньше значения целевой функции для оптимального решения исходной задачи (1.1)–(1.5). И это верно для любого разбиения каждого c_{ij} на два слагаемых.

Если псевдорешение задачи об эффективной стрельбе является допустимым решением задачи (1.1)–(1.5), то оно будет и ее оптимальным решением.

Пусть верно обратное: допустимое псевдорешение не является оптимальным решением задачи (1.1)–(1.5). Тогда существует оптимальное решение, отличное от данного, для которого значение целевой функции больше значения целевой функции псевдорешения. Отсюда следует, что хотя бы в одной из одномерных задач, на которые была разбита исходная задача, оптимальное решение дает большее значение целевой функции, чем в псевдорешении, что противоречит определению псевдорешения. Разумеется, первое псевдорешение может оказаться недопустимым в исходной задаче. Для построения последовательности псевдорешений станем циклически решать множество задач с двумя ограничениями.

Рассмотрим первый шаг цикла при $i = 1,\ j = 1$. Решается двумерная задача с ограничениями (1.1), (1.4) при $i = 1$ и с ограничениями (1.3), (1.4) при $j = 1$ с общей переменной x_{11}:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 1, (2.4) \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}^{1} x_{1j} + \sum_{i=1}^{m} c_{i1}^{2} x_{i1} \to \max, \tag{2.5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.6}$$

Для решения двумерной задачи (2.3)–(2.6) необходимо найти $a_1 - 1$ наибольших по величине коэффициентов целевой функции из группы первой суммы $c_{1j}^{1},\ j \neq 1$. Обозначим их индексы $j \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{a_1-1}\}$. Тогда частью решения будет $x_{1j_1} = x_{1j_2} = \ldots = x_{1j_{a_1-1}}$.

Далее возможны два варианта: либо в решение попадут переменные, соответствующие a_1 по величине коэффициентов из группы c_{1j}^{1} и максимальному коэффициенту из второй суммы целевой функции c_{i1}^{2}, либо общая переменная двух ограничений. Обозначим

$$\max_{j,\, j\neq 1,\, j\notin\{j_1, j_2, \ldots j_{a_1-1}\}} c_{1j}^{1} = c_{1j*}^{1},$$
$$\max_{i,\, i\neq 1} c_{i1}^{2} = c_{i*1}^{2}.$$

Возможны три случая соотношения этих коэффициентов.

П е р в ы й с л у ч а й:

$$c_{11} > c_{1j*}^{1} + c_{i*1}^{2}.$$

Тогда в решение дополнительно войдет $x_{11} = 1$ и двумерная задача (2.3)–(2.6) решена. Рассчитаем новые коэффициенты c_{11}^{1} и c_{11}^{2} в соответствии с системой:

$$\begin{cases} c_{11}^{1} + c_{11}^{2} = c_{11}, \\ c_{1j*}^{1} - c_{11}^{1} = c_{i*1}^{2} - c_{11}^{2}. \end{cases}$$

Это обеспечивает объединение оптимальных решений одномерных задач с ограничениями (2.3), (2.6) и (2.4), (2.6), а значит, совпадение с оптимальным решением задачи (2.3)–(2.6).

В т о р о й с л у ч а й:

$$c_{11} = c_{1j*}^{1} + c_{i*1}^{2}.$$

При этом дополнить решение до однозначного невозможно, и если коэффициент c_{1j*}^{1} имеется только у x_{1j*}, то получаем ограничения

$$x_{11} + x_{1j*} = 1,$$
$$x_{11} + x_{i*1} = 1.$$

Такое соотношение коэффициентов будем называть вырождением. В общем случае в первом из этих ограничений может быть несколько переменных и правая часть больше единицы. Во втором ограничении тоже может быть несколько переменных, но правая часть при этом остается единицей. Находим новые значения коэффициентов $c_{11}^{1} = c_{1j*}^{1},\ c_{11}^{2} = c_{i*1}^{2}$.

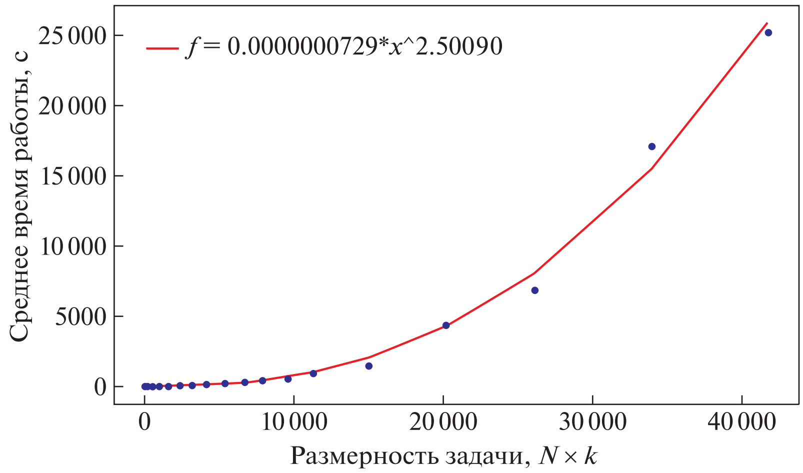


Рисунок. Зависимость среднего времени работы алгоритма от размерности задачи

Третий случай:

$$c_{11} < c^1_{1j*} + c^2_{i*1}.$$

Тогда в решение войдут дополнительно $x_{1j*} = x_{i*1} = 1$ и двумерная задача (2.3)–(2.6) решена. Новые значения коэффициентов c^1_{11} и c^2_{11} с той же целью вычисляем в соответствии с системой:

$$\begin{cases} c^1_{11} + c^2_{11} = c_{11}, \\ c^1_{1j*} - c^1_{11} = c^2_{i*1} - c^2_{11}. \end{cases}$$

Заметим, что после пересчета коэффициентов новое значение целевой функции псевдорешения в общем случае уменьшится по сравнению с предыдущим.

На этом первый шаг заканчивается. Далее переходим к шагу $i = 1,\ j = 2$, затем берем $i = 1$, $j = 3$ и т.д. до $i = 1,\ j = n$. Переходим к шагу $i = 2,\ j = 1$ и т.д. до $i = m,\ j = n$. На этом первый цикл заканчивается, переходим ко второму циклу, где опять начинаем со значений индексов $i = 1,\ j = 1$.

Циклический процесс останавливается тогда, когда в двух последовательных циклах каждая одномерная задача имеет одинаковые решения или одинаковые ограничения (вырождение). Если вырождения нет, то тем самым получено оптимальное решение задачи (1.1)–(1.5). Наличие вырождения в некоторых ограничениях требует дополнительных процедур.

3. Вырождение. Рассмотрим ситуацию вырождения, которая имеет место по окончании циклического процесса. Отметим важное свойство вырождения (см. второй случай в разд. 2). Если решать задачу с двумя ограничениями с общей переменной x_{1j*}, то возникает вырождение, при этом одной из переменных, входящих в первое ограничение, будет x_{11}. Если решать задачу с двумя ограничениями с общей переменной x_{i*1}, то и здесь появляется вырождение, а переменная x_{11} участвует во втором ограничении. На этом свойстве и основана процедура определения конкретного решения при вырождении. Если положить общую переменную (x_{11} в рассмотренном примере) равной единице, то в первом ограничении будет $x_{1j*} = 0$ (или неопределенность уменьшится), а во втором $x_{i*1} = 0$, а также и остальные переменные, у которых коэффициент в целевой функции равен c^2_{i*1}. Переходя далее в другие ограничения, которые дают вырождение, определяем значения других переменных. Если после этого вырождение все еще имеет место, процедура продолжается, начиная с другой переменной, попавшей в ограничения вырождения.

4. Результаты численных расчетов. Размерность задачи равна произведению количества целей на количество батарей. Решалась серия задач, в том числе одинаковой размерности с различными случайными коэффициентами эффективности в заданном диапазоне. Время решения задач одинаковой размерности усреднялось. Времена решения задач при различных размерностях приведены на рисунке. Кривая хорошо аппроксимируется степенной фунцией вида

$$y = Cx^B$$

при значениях $C = 0.0000000729$, $B = 2.50090$.

Заключение. Метод последовательной модификации коэффициентов целевой функции строит точное решение для интересного класса задач об эффективной стрельбе. Дальнейшее рассмотрение может быть направлено на более общий случай трех и более индексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
2. *Тизик А.П., Цурков В.И.* Метод последовательной модификации функционала для решения транспортной задачи // АиТ. 2012. № 1. С. 148–158.
3. *Кузовлев Д.И., Тизик А.П., Тресков Ю.П.* Метод последовательных изменений параметров функционала при решении задачи о назначении // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 67–78.
4. *Кузовлев Д.И., Тизик А.П., Тресков Ю.П.* Декомпозиционный алгоритм для решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 1. С. 45–48.
5. *Тизик А.П., Кузовлев Д.И., Соколов А.А.* Метод последовательной модификации функционала для транспортной задачи с дополнительными пунктами производства и потребления // Вестн. ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2012. № 4. С. 91–98.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 66–105

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 629.735

ВЫБОР СТРУКТУРЫ ВОЗДУШНОГО ПРОСТРАНСТВА И ИНФРАСТРУКТУРЫ АЭРОДРОМОВ ПРИ ИХ МОДЕРНИЗАЦИИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© 2021 г. Л. В. Вишнякова[a], А. С. Попов[a,*]

[a]ФГУП "ГосНИИАС", Москва, Россия

*e-mail: andrey.popov@gosniias.ru

Поступила в редакцию 21.08.2020 г.
После доработки 30.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Представлена задача поиска наилучших путей обеспечения эффективного и безопасного трафика воздушных судов на основе применения методов математического компьютерного моделирования. Рассматривается выбор одного из альтернативных вариантов структуры воздушного пространства и инфраструктуры аэродрома. Предложены постановка задачи и группы показателей эффективности для различных заинтересованных лиц в использовании структуры воздушного пространства и инфраструктуры аэродрома, на основе которых формируется критерий эффективности. Каждая группа представлена количественными показателями, которые могут быть вычислены с помощью компьютерного математического моделирования. Определена структура воздушного пространства и инфраструктура аэродрома в виде векторов, состоящих из множества элементов, таких, как: сеть воздушных трасс, секторы диспетчерского управления, маршруты прибытия и вылета и др. Представлена математическая постановка задачи многомерной условной оптимизации с учетом предложенных ограничений и условий применения, в которых функционируют рассматриваемые варианты структуры воздушного пространства. Дано описание математических моделей и алгоритмы расчета показателей. Приведены примеры решения исследовательских задач с использованием методов компьютерного моделирования на базе комплекса имитационного моделирования системы организации воздушного движения, который предназначен для оценки структуры воздушного пространства и инфраструктуры аэродрома.

DOI: 10.31857/S0002338821060172

Введение. Система организации и управления воздушным движением (УВД) – сложная система, в которой присутствует большое число взаимосвязанных элементов, взаимодействующих между собой в процессе ее функционирования [1]. Основной целью данной системы, согласно Глобальному аэронавигационному плану, является обеспечение качественного и эффективного обслуживания полетов воздушных судов (ВС) с соблюдением требуемого уровня безопасности выполнения полетов [2]. Как и все сложные системы, система организации воздушным движением (ОрВД) имеет свои показатели качества функционирования, среди которых: безопасность, регулярность и эффективность. Повышение эффективности ее функционирования может быть достигнуто за счет:

строительства инфраструктуры – взлетно-посадочных полос (ВПП), новых терминалов, радиотехнического обеспечения, командно-диспетчерских пунктов, новых центров автоматизированного УВД;

совершенствования структуры воздушного пространства (ВП) и повышения эффективности использования инфраструктуры аэродрома – оптимизация сети воздушных трасс (ВТ), создание маршрутов зональной навигации (PBN – performance-based navigation) как в верхнем ВП, так и в диспетчерской зоне района аэродрома, повышение эффективности выполнения операций на поверхности аэродрома;

обучения и повышения квалификации диспетчерского состава – внедрение новых тренажеров, разработка технологий и методик обучения диспетчеров;

совершенствования технологических процессов – внедрение системы совместного согласованного принятия решений (CDM – collaborative decision-making) как на аэродроме, так и при УВД в верхнем ВП и в диспетчерской зоне района аэродрома, интеграция процессов планирования в ВП (NOP – network operation plan) и на аэродроме (AOP – airport operation plan), распространение информации всем участникам процесса организации и УВД в рамках инициативы по гармонизации обмена данными (SWIM – system wide information management);

систем поддержки принятия решения – внедрения систем управления прилетающими и вылетающими потоками ВД (AMAN/DMAN – arrival manager/departure manager), а также системы управления движением на поверхности аэродрома (A-SMGCS – advanced surface management guidance and control system), интеграция средств поддержки диспетчера при обнаружении и разрешении конфликтных ситуаций в автоматизированную систему УВД (MTCD – medium-term conflict detection и CORA – conflict resolution assistant);

внедрения перспективных бортовых приложений – процедур: обнаружение конфликтов – (CD – conflict detection), автоматическое разрешение конфликтов (ACM – automatic collision management), ситуационная осведомленность об обстановке на поверхности аэропорта (ASAS – airborne separation assurance systems), поддержка вертикального эшелонирования на маршруте (ITP – in-trail procedure).

Рассмотренные факторы, позволяющие повысить эффективность функционирования системы ОрВД, могут применяться как отдельно – последовательное внедрение, так и параллельно. Однако во втором случае требуется синхронизация процессов внедрения. В Российской Федерации (РФ) организована и проводится федеральная целевая программа “Модернизация Единой системы ОрВД Российской Федерации” [3].

В статье рассмотрен один из перечисленных выше факторов – совершенствование структуры ВП и использования инфраструктуры аэродрома. Задача состоит в выборе наилучшего варианта структуры ВП и варианта инфраструктуры аэродрома из ряда альтернативных вариантов, построенных специалистами с учетом соответствующих нормативных документов.

1. Постановка задачи поиска оптимальной структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. 1.1. Показатели эффективности использования ВП и инфраструктуры аэродрома. В настоящее время в Международной организации гражданской авиации ИКАО (ICAO – international civil aviation organization) принят подход оценки функционирования системы ОрВД, основанный на глобальных характеристиках [4]. В целях гармонизации и унификации ИКАО были предложены ключевые области показателей, которые приведены в Глобальной эксплуатационной концепции ОрВД [5]. В [6] представлены показатели, рекомендуемые ИКАО для оценки функционирования системы ОрВД в рамках ключевых областей показателей. Международные организации провайдеров аэронавигационных услуг организации аэронавигационного обслуживания гражданской авиации (CANSO – civil air navigation services organization) и ассоциации управления воздушным движением (ATCA – air traffic control association) поддержали инициативы ИКАО и попробовали конкретизировать области до показателей и метрик [7, 8]. Данный подход можно распространить и на задачу оценки использования структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Для этого необходимо определить области показателей, по которым возможно провести количественный анализ, а также выбрать метрики для сравнительного анализа вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Основными заинтересованными лицами при внедрении или совершенствовании структуры ВП и инфраструктуры аэродрома являются: пользователи ВП, провайдеры аэронавигационных услуг, операторы аэропортов, а также авиационные власти. Пользователями ВП выступают: авиакомпании, выполняющие коммерческие перевозки пассажиров и грузов, авиация общего назначения, экспериментальная авиация, операторы беспилотных летальных аппаратов и др. Провайдером аэронавигационных услуг в РФ является ФГУП “Госкорпорация по ОрВД”, которая предоставляет аэронавигационное и полетно-информационное обслуживание в разных классах ВП. Провайдера на местах представляют диспетчеры, которые осуществляют контроль и УВД и движением ВС по поверхности аэродрома. Операторы аэропортов отвечают за обслуживание ВС на поверхности аэродрома. Авиационные власти являются регулирующим органом и занимаются координацией процессов в системе ОрВД.

Эффективность использования структуры ВП и инфраструктуры аэродрома для каждой группы заинтересованных лиц измеряется своей группой показателей. Так, например, для авиакомпаний приоритетны пунктуальность, экономическая эффективность полетов, эффективность по времени полета и протяженности маршрута, минимизация задержек и т.д. Для провайдера аэронавигационных услуг важны также безопасность выполнения полетов, загруженность диспетчерского персонала, обеспечение баланса между спросом на авиаперевозки и пропускной способностью системы, оптимизация количества персонала. Аэропорты стремятся обслужить как можно больше ВС в единицу времени, таким образом, приоритетным является пропускная способность аэродромов (ПА). Авиационные власти в свою очередь, как и провайдер аэронавигационных услуг, следят за уровнем безопасности выполнения полетов и координируют действия всех участников системы ОрВД.

Необходимо отметить, что показатели из разных групп не только взаимозависимы, но и противоречивы. Улучшения показателей для одной группы заинтересованных лиц могут приводить к ухудшению показателей в рамках другой группы. Оптимизация траекторий, например, в зонах интенсивного ВД может приводить к перегрузке диспетчерского персонала и снижению уровня безопасности полетов. Таких примеров можно привести множество. Следовательно, задача выбора одного из альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома является задачей обеспечения баланса между разными группами взаимозависимых показателей. Выбор показателей и метрик для анализа каждого варианта – очень важный вопрос при постановке задачи оценки сформированных вариантов.

Провести анализ и выбрать вариант по одному показателю достаточно сложно из-за описанных выше интересов различных участников в системе ОрВД. Поэтому структуру ВП и инфраструктуру аэродрома как часть аэронавигационной системы можно определить рядом характеристик – показателей эффективности функционирования. Необходимо построить вектор, который будет задавать по разным показателям каждый исследуемый вариант.

Предлагается критерий эффективности при выборе одного из альтернативных вариантов определять следующим вектором:

$$W = \begin{pmatrix} W_{\text{а}} \\ W_{\text{б}} \\ W_{\text{ОрВД}} \\ W_{\text{ПВП}} \\ W_{\text{ПА}} \\ W_{\text{ср}} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где каждая группа показателей отражает интересы участников процессов в системе ОрВД.

С точки зрения пользователей ВП определена следующая группа:

показатели, характеризующие эксплуатационную эффективность для пользователей ВП (авиакомпаний) $W_{\text{а}}$, в том числе затрат ресурсов пользователей в полете по маршрутам обслуживания воздушного движения (ОВД), в районе аэродрома и при движении ВС по поверхности аэродрома.

Интересы авиационных властей отражают следующие группы показателей:

безопасность выполнения полетов $W_{\text{б}}$;

окружающая среда $W_{\text{ср}}$.

Для провайдеров аэронавигационных услуг определены две группы показателей:

эффективность использования структуры ВП и инфраструктуры аэродрома для системы ОрВД $W_{\text{ОрВД}}$;

пропускная способность воздушного пространства (ПВП) и сложность УВД в секторе $W_{\text{ПВП}}$.

Показатели для операторов аэропортов сформулированы в следующей группе:

ПА $W_{\text{ПА}}$.

При выборе варианта структуры ВП и инфраструктуры аэродрома каждую группу показателей требуется максимизировать или минимизировать. Например, издержки, вызванные отклонением ВС от оптимальной траектории, которые входят в группу показателей для пользователей ВП, должны быть минимизированы, как и показатели безопасности. Такие группы показателей, как ПА и ПВП, должны быть, наоборот, максимизированы. Таким образом, значения показателей в каждой группе необходимо максимально увеличить или уменьшить:

$$\begin{cases} W_{\text{а}} \to \min, \\ W_{\text{б}} \to \min, \\ W_{\text{ОрВД}} \to \min, \\ W_{\text{ПВП}} \to \max, \\ W_{\text{ПА}} \to \max, \\ W_{\text{ср}} \to \min. \end{cases} \tag{1.2}$$

Определим далее подробнее каждый из этих показателей, представляющий собой в свою очередь также вектор показателей, из каких компонент они состоят.

Вектор $W_{\text{а}}$ задается следующим набором показателей:

$$W_{\text{а}} = (W_{\text{а.зад}}, W_{\text{а.топл.эф}}, W_{\text{а.налет}}, W_{\text{протяж.марш}}, W_{\text{ортодр}}, W_{\text{врем.рул}})^{\text{T}}, \tag{1.3}$$

где $W_{\text{а.зад}}$ – задержки ВС в воздухе и на аэродроме, $W_{\text{а.топл.эф}}$ – расход топлива при полете и движении ВС по аэродрому, $W_{\text{а.налет}}$ – время полета ВС, $W_{\text{протяж.марш}}$ – протяженность маршрута, $W_{\text{ортодр}}$ – ортодромичность маршрутов, $W_{\text{врем.рул}}$ – время руления ВС по поверхности аэродрома.

Вектор $W_{\text{б}}$ определяется следующим набором:

$$W_{\text{б}} = (W_{\text{ПКС}}, W_{\text{инт.ВПП}}, W_{\text{ННЭ}}, W_{\text{риски}}, W_{\text{конфл.схем}})^{\text{T}}, \tag{1.4}$$

где $W_{\text{ПКС}}$ – количество потенциальных конфликтных ситуаций (ПКС), $W_{\text{инт.ВПП}}$ – количество нарушений временных интервалов на ВПП, $W_{\text{ННЭ}}$ – количество нарушений норм эшелонирований (ННЭ), $W_{\text{риски}}$ – оценки рисков, $W_{\text{конфл.схем}}$ – конфликтность схем маневрирования.

Вектор $W_{\text{ОрВД}}$ определяется следующим набором показателей:

$$W_{\text{ОрВД}} = (W_{\text{загр.уч.ВТ}}, W_{\text{загр.точек.ВП}}, W_{\text{эш}}, W_{\text{исп.ЗО}}, W_{\text{МС}})^{\text{T}}, \tag{1.5}$$

где $W_{\text{загр.уч.ВТ}}$ – неравномерность загруженности участков ВТ, $W_{\text{загр.точек.ВП}}$ – неравномерность загруженности точек ВП, $W_{\text{эш}}$ – использование ВС неэффективных эшелонов, $W_{\text{исп.ЗО}}$ – применение зон ожидания (ЗО), $W_{\text{МС}}$ – неэффективность использования мест стоянок (МС).

Вектор $W_{\text{ПВП}}$ – группа показателей, характеризующая ПВП и сложность УВД в секторе:

$$W_{\text{ПВП}} = (W_{\text{врем.загр.дисп}}, W_{\text{сек}}, W_{\text{одновр}})^{\text{T}}, \tag{1.6}$$

где $W_{\text{врем.загр.дисп}}$ – равномерность временной загруженности диспетчера, $W_{\text{сек}}$ – загрузка секторов без превышения НПС сектора, $W_{\text{одновр}}$ – количество ВС одновременно под управлением диспетчера без превышения временной загруженности диспетчера.

Вектор $W_{\text{ПА}}$ – группа показателей, характеризующая ПА:

$$W_{\text{ПА}} = (W_{\text{ВПО}}, W_{\text{пересеч}})^{\text{T}}, \tag{1.7}$$

где $W_{\text{ВПО}}$ – количество взлетно-посадочных операций (ВПО), $W_{\text{пересеч}}$ – количество аэродромных операций без пересечения ВПП.

Вектор $W_{\text{ср}}$ – группа показателей, характеризующая окружающую среду:

$$W_{\text{ср}} = (W_{\text{шум}}, W_{CO_2})^{\text{T}}, \tag{1.8}$$

где $W_{\text{шум}}$ – шумовые воздействия, W_{CO_2} – выбросы вредных веществ.

1.2. Группы параметров, определяющие показатели эффективности. Очевидно, что эффективность использования ВП и аэродрома зависит от условий их применения: интенсивности ВД, метеоусловий, ограничений, накладываемых на ВП (в том числе и временных), технической оснащенности рабочих мест диспетчера. Критерий эффективности для выбора структуры ВП и инфраструктуры аэродрома можно представить в виде следующей функции:

$$\mathbf{W} = W(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}), \tag{1.9}$$

где заданы аргументы функции:

структура ВП и инфраструктура аэродрома $\overline{s}$;

алгоритмы управления и средства поддержки диспетчера при УВД и движением ВС по поверхности аэродрома $\overline{u}$;

и параметры:

полетные данные, включающие потоки ВС и их летно-технические характеристики (ЛТХ) $\overline{y}$;

условия выполнения полетов, характеризующие метеорологическую обстановку и ограничения использования ВП $\overline{\omega}$;

технология работы диспетчера $\overline{v}$.

Так как показатель эффективности состоит из групп ключевых показателей, то функцию W можно записать так:

$$\mathbf{W} = W(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) = \begin{pmatrix} W_{\text{а}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \\ W_{\text{б}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \\ W_{\text{ОрВД}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \\ W_{\text{ПВП}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \\ W_{\text{ПА}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \\ W_{\text{ср}}(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

где показатели по каждой из шести групп $\mathbf{W} = (W_{\text{а}}, W_{\text{б}}, W_{\text{ОрВД}}, W_{\text{ПВП}}, W_{\text{ПА}}, W_{\text{ср}})^{\text{T}}$ рассчитываются на основе компьютерного математического моделирования исследуемых вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома.

1.2.1. *Структура ВП и инфраструктура аэродрома.* Структура ВП в зависимости от задачи может рассматриваться в масштабе как сектора диспетчерского управления, когда исследуются вопросы снижения нагрузки на диспетчера, так и в масштабе нескольких укрупненных центров, когда разрабатывается новая структура ВП. Если проводятся исследования узлового диспетчерского района, где происходит влияние прибывающих и вылетающих потоков ВД из разных аэродромов друг на друга, то в задаче могут рассматриваться сразу несколько аэродромов. На рис. 1 представлен пример структуры ВП РФ.

Рассматриваются альтернативные варианты структуры $\overline{s}$ ВП и инфраструктуры аэродрома, которые характеризуются парой векторов $\{\overline{s}_{\text{ВП}}, \overline{s}_{\text{а}}\}$, где вектор $\overline{s}_{\text{ВП}}$ – структура ВП, $\overline{s}_{\text{а}}$ – инфраструктура аэродрома. Представим структуру ВП в виде набора элементов:

$$\overline{s}_{\text{ВП}} = (\overline{s}_{\text{сек}}, \overline{s}_{\text{ВТ}}, \overline{s}_{\text{SID}}, \overline{s}_{\text{STAR}}, \overline{s}_{app}), \tag{1.11}$$

где $\overline{s}_{\text{сек}}$ – структура секторов УВД, $\overline{s}_{\text{ВТ}}$ – сеть ВТ, $\overline{s}_{\text{SID}}$ – маршруты вылета моделируемого(ых) аэродрома(ов) (SID – standard instrument departure), $\overline{s}_{\text{STAR}}$ – маршруты прибытия моделируемого(ых) аэродрома(ов) (STAR – standard terminal arrival), $\overline{s}_{app}$ – маршруты захода на посадку (approach) моделируемого(ых) аэродрома(ов).

Структура секторов $\overline{s}_{\text{сек}}$ представляет собой вектор из секторов диспетчерского управления в рассматриваемой структуре ВП:

$$\overline{s}_{\text{сек}} = (s_{1\text{сек}}, s_{2\text{сек}}, \ldots, s_{i\text{сек}}, \ldots, s_{N_{\text{сек}}}), \tag{1.12}$$

где $\overline{s}_{\text{сек}} \in S_{\text{ВП}}$, $i = \overline{1, N_{\text{сек}}}$, $N_{\text{сек}}$ – количество секторов в структуре ВП, $S_{\text{ВП}}$ – исследуемое ВП.

Каждый сектор $s_{i\,\text{сек}}$ характеризуется набором элементов:

$$s_{i\,\text{сек}} = (s_{i\,\text{сек.верт.гран}}, s_{i\,\text{сек.гориз.гран}}, s_{i\,\text{сек.норм}}, s_{i\,\text{сек.регл}}, s_{i\,\text{сек.хар}}), \tag{1.13}$$

где $s_{i\,\text{сек.верт.гран}}$ – вертикальные границы сектора, $s_{i\,\text{сек.гориз.гран}}$ – горизонтальные границы сектора, $s_{i\,\text{сек.норм}}$ – НПС сектора, $s_{i\,\text{сек.регл}}$ – регламент работы сектора, $s_{i\,\text{сек.хар}}$ – характеристики работы сектора.

Рис. 1. Структура ВП

Сеть ВТ $\overline{s}_{\text{ВТ}}$, представляющая собой вектор ВТ:

$$\overline{s}_{\text{ВТ}} = (s_{1\text{ВТ}}, s_{2\text{ВТ}}, \ldots, s_{j\,\text{ВТ}}, \ldots, s_{N_{\text{ВТ}}}), \tag{1.14}$$

где $\overline{s}_{\text{ВТ}} \in S_{\text{ВП}}$, $j = \overline{1, N_{\text{ВТ}}}$, $N_{\text{ВТ}}$ – количество ВТ в структуре ВП.

ВТ $s_{j\,\text{ВТ}}$ характеризуется следующим набором элементов:

$$s_{j\,\text{ВТ}} = (s_{j\,\text{точки.ВП}}, s_{j\,\text{участки.ВТ}}, s_{j\,\text{эш}}, s_{j\,\text{огр}}, s_{j\,\text{ЗО ВВП}}), \tag{1.15}$$

где $s_{j\,\text{точки.ВП}}$ – точки ВП, $s_{j\,\text{участки.ВТ}}$ – участки ВТ, $s_{j\,\text{эш}}$ – разрешенный для полетов диапазон высот (эшелон), $s_{j\,\text{огр}}$ – ограничение на использование участков ВТ (по согласованию с органами УВД), $s_{j\,\text{ЗО ОВД}}$ – ЗО на маршруте ОВД.

Маршруты вылета представляют собой вектор маршрутов $\overline{s}_{\text{SID}}$:

$$\overline{s}_{\text{SID}} = (s_{1\text{SID}}, s_{2\text{SID}}, \ldots, s_{k\text{SID}}, \ldots, s_{N_{\text{SID}}}), \tag{1.16}$$

где $\overline{s}_{\text{SID}} \in S_{\text{ВП}}$, $k = \overline{1, N_{\text{SID}}}$, N_{SID} – количество маршрутов вылета моделируемого(ых) аэродрома(ов). Каждый маршрут $s_{k\text{SID}}$ характеризуется следующим набором элементов:

$$s_{k\,\text{SID}} = (s_{k\,\text{SID WP}}, s_{k\,\text{SID}\,route}, s_{k\,\text{SID хар}}), \tag{1.17}$$

где $s_{k\,\text{SID WP}}$ – точки пути (way point – WP), которые состоят из контрольных или промежуточных точек района аэродрома, $s_{k\,\text{SID}\,route}$ – участки маршрута вылета, $s_{k\,\text{SID хар}}$ – параметры, характеризующие использование маршрута при выполнении полетов ВС.

Маршруты прибытия представляют следующий вектор $\overline{s}_{\text{STAR}}$:

$$\overline{s}_{\text{STAR}} = (s_{1\text{STAR}}, s_{2\text{STAR}}, \ldots, s_{l\,\text{STAR}}, \ldots, s_{N_{\text{STAR}}}), \tag{1.18}$$

где $\overline{s}_{\text{STAR}} \in S_{\text{ВП}}$, $l = \overline{1, N_{\text{STAR}}}$, N_{STAR} – количество маршрутов прибытия моделируемого(ых) аэродрома(ов). Каждый маршрут $s_{l\text{STAR}}$ характеризуется следующим набором элементов:

$$s_{l\,\text{STAR}} = (s_{l\,\text{STAR WP}}, s_{l\,\text{STAR}\,route}, s_{l\,\text{STAR хар}}, s_{l\,\text{STAR ЗО}}), \tag{1.19}$$

где $s_{l\,\text{STAR WP}}$ – точки пути, которые состоят из контрольных или промежуточных точек района аэродрома, $s_{l\,\text{STAR}\,route}$ – участки маршрута прибытия, $s_{l\,\text{STAR хар}}$ – параметры, характеризующие использование маршрута при прилете ВС на аэродром, $s_{l\,\text{STAR ЗО}}$ – ЗО на маршруте прибытия.

Маршруты захода на посадку представляют свектор $\overline{s}_{app}$:

$$\overline{s}_{app} = (s_{1app}, s_{2app}, \ldots, s_{rapp}, \ldots, s_{N_{app}}), \tag{1.20}$$

где $\overline{s}_{app} \in S_{\text{ВП}}$, $r = \overline{1, N_{app}}$, N_{app} – количество маршрутов захода на посадку моделируемого(ых) аэродрома(ов). Каждый маршрут $s_{r,app}$ характеризуется следующим набором элементов:

$$s_{r,app} = (s_{r,app,\,\text{WP}}, s_{r,app,route}, s_{r,app\,\text{хар}}), \tag{1.21}$$

где $s_{r,app,\,\text{WP}}$ – точки пути, которые состоят из контрольных или промежуточных точек района аэродрома, $s_{r,app,route}$ – участки маршрута захода на посадку, $s_{r,app\,\text{хар}}$ – параметры, характеризующие использование маршрута при прилете ВС на аэродром.

Далее определим инфраструктуру аэродрома $\overline{s}_{\text{а}}$. Вектор, который характеризует инфраструктуру аэродрома:

$$\overline{s}_{\text{а}} = (\overline{s}_{\text{ВПП}}, \overline{s}_{\text{РД}}, \overline{s}_{\text{МС}}), \tag{1.22}$$

где $\overline{s}_{\text{ВПП}}$ – система ВПП моделируемого(ых) аэродрома(ов), $\overline{s}_{\text{РД}}$ – сеть рулежных дорожек (РД) моделируемого(ых) аэродрома(ов), $\overline{s}_{\text{МС}}$ – МС моделируемого(ых) аэродрома(ов).

Система ВПП $\overline{s}_{\text{ВПП}}$определяется вектором:

$$\overline{s}_{\text{ВПП}} = (s_{1\text{ВПП}}, s_{2\text{ВПП}}, \ldots, s_{t\,\text{ВПП}}, \ldots, s_{N_{\text{ВПП}}}), \tag{1.23}$$

где $\overline{s}_{\text{ВПП}} \in S_{\text{а}}$, $t = \overline{1, N_{\text{ВПП}}}$, $N_{\text{ВПП}}$ – количество ВПП аэродромов моделируемого(ых) аэродрома(ов), $S_{\text{а}}$ – моделируемый аэродром. Каждая ВПП $s_{t\,\text{ВПП}}$ характеризуются следующим набором элементов:

$$s_{t\,\text{ВПП}} = (s_{t\,\text{типВПП}}, s_{t\,\text{геом.разм.ВПП}}, s_{t\,\text{хар.исп.ВПП}}), \tag{1.24}$$

где $s_{t\,\text{тип.ВПП}}$ – тип покрытия ВПП (асфальтная, грунтовая и т.д.), $s_{t\,\text{геом.разм.ВПП}}$ – геометрические размеры ВПП, $s_{t.\,\text{хар.исп.ВПП}}$ – характеристики использования ВПП.

Сеть РД $\overline{s}_{\text{РД}}$ определяется вектором:

$$\overline{s}_{\text{РД}} = (s_{1\text{РД}}, s_{2\text{РД}}, \ldots, s_{p\,\text{РД}}, \ldots, s_{N_{\text{РД}}}), \tag{1.25}$$

где $\overline{s}_{\text{РД}} \in S_{\text{а}}$, $p = \overline{1, N_{\text{РД}}}$, $N_{\text{РД}}$ – количество РД моделируемого(ых) аэродрома(ов). Каждая РД $s_{p\,\text{РД}}$ определяется следующим набором элементов:

$$s_{p\,\text{РД}} = (s_{p\,\text{тип.РД}}, s_{p\,\text{геом.разм.РД}}, s_{p\,\text{хар.исп.РД}}), \tag{1.26}$$

где $s_{p\,\text{тип.РД}}$ – тип РД, характеризующий предназначение (магистральная РД, съезд с ВПП и т.д.), $s_{p\,\text{геом.разм.РД}}$ – геометрические размеры РД, $s_{p\,\text{хар.исп.РД}}$ – характеристики использования РД. МС $\overline{s}_{\text{МС}}$ определяются вектором:

$$\overline{s}_{\text{МС}} = (s_{1\text{МС}}, s_{2\text{МС}}, \ldots, s_{q\,\text{МС}}, \ldots, s_{N_{\text{МС}}}), \tag{1.27}$$

где $\overline{s}_{\text{МС}} \in S_{\text{а}}$, $q = \overline{1, N_{\text{МС}}}$, $N_{\text{МС}}$ – количество МС на моделируемом(ых) аэродроме(ах). Каждое МС $s_{q.\,\text{МС}}$ характеризуется следующим набором элементов:

$$s_{q\,\text{МС}} = (s_{q\,\text{обор.МС}}, s_{q\,\text{тип.МС}}, s_{q\,\text{исп.тип.ВС}}, s_{q\,\text{сп.зан}}), \tag{1.28}$$

где $s_{q\,\text{обор.МС}}$ – наличие оборудования (телетрапа) на МС, $s_{q\,\text{тип.МС}}$ – тип МС (сквозная, конечная), $s_{q\,\text{исп.тип.ВС}}$ – возможность использования МС различными типами ВС, $s_{q.\text{сп.зан}}$ – способ занятия МС (на собственных двигателях, буксировка).

1.2.2. Условия использования структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Выбор одного из альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома производится при задании условий применения вариантов, возможно, в виде множества.

Полетные данные:

$$\bar{y} = (y_{\text{ЛТХ ВС}}, y_{\text{планы.полетов}}), \tag{1.29}$$

где $y_{\text{ЛТХ ВС}}$ – ЛТХ моделируемых ВС ($y_{\text{ЛТХ ВС}} \in Y_{\text{ЛТХ ВС}}$, где $Y_{\text{ЛТХ ВС}}$ – множество ЛТХ ВС).

Моделируемый(ые) поток(и) ВД $y_{\text{планы.полетов}}$. Поток ВД представляет собой множество ВС, которые характеризуются планами полетов, а также ЛТХ ($y_{\text{планы.полетов}} \in Y_{\text{планы.полетов}}$, где $Y_{\text{планы.полетов}}$ – множество потоков ВД).

Условия выполнения полетов:

$$\bar{\omega} = (\omega_{\text{метео}}, \omega_{\text{ОИВП}}), \tag{1.30}$$

где $\omega_{\text{метео}}$ – моделируемые метеоусловия ($\omega_{\text{метео}} \in \Omega_{\text{метео}}$, где $\Omega_{\text{метео}}$ – множество метеоусловий), $\omega_{\text{ОИВП}}$ – моделируемые ограничения использования воздушного пространства (ОИВП) ($\omega_{\text{ОИВП}} \in \Omega_{\text{ОИВП}}$, где $\Omega_{\text{ОИВП}}$ – множество ОИВП).

Технология работы диспетчера:

$$\bar{v} = (v_{\text{команды}}, v_{\text{алгоритм}}), \tag{1.31}$$

где $v_{\text{команды}}$ – команды, которые диспетчер применяет при разрешении ПКС, $v_{\text{алгоритм}}$ – алгоритмы, характеризующие последовательность применения команд при разрешении ПКС.

Алгоритмы управления потоками ВС:

$$u = (u_{\text{упр.взд}}, u_{\text{упр.зем}}), \tag{1.32}$$

где $u_{\text{упр.взд}}$ – алгоритмы управления и средства поддержки диспетчера при управлении потоком ВД ("воздух"), $u_{\text{упр.зем}}$ – алгоритмы управления и средства поддержки диспетчера при управлении движением ВС по поверхности аэродрома ("земля").

1.3. Система ограничений по показателям эффективности. В качестве ограничений задаются целевые значения показателей, которым должен удовлетворять выбранный вариант структуры ВП и инфраструктуры аэродрома:

$$\bar{c} = (c_{\text{а}}, c_{\text{б}}, c_{\text{ПВП}}, c_{\text{ПА}}, c_{\text{окр.ср}}), \tag{1.33}$$

где $c_{\text{а}}$ – средняя задержка при вылете и прибытии в аэропорт, $c_{\text{б}}$ – целевые значения уровня безопасности при выполнении полетов (количество ПКС, требуемый уровень безопасности при оценке рисков инцидентов), $c_{\text{ПВП}}$ – норматив пропускной способности секторов УВД, коэффициент временной загруженности диспетчеров, $c_{\text{ПА}}$ – заданная целевая ПА, $c_{\text{окр.ср}}$ – заданный уровень шумовых воздействий, вредных выбросов в окружающую среду.

1.3.1. Ограничения по показателям эффективности для пользователей ВП. Для пользователей ВП один из главных показателей – пунктуальность. Следовательно, ограничением при моделировании является средняя задержка, которая характеризуется вектором $\bar{c}_{\text{ср.задер}} = (\bar{c}_{\text{задер.выл}}, \bar{c}_{\text{задер.прил}})$, где $\bar{c}_{\text{задер.выл}}$ – вектор, состоящий из показателей средней задержки на вылете из моделируемого(ых) аэродрома(ов):

$$\bar{c}_{\text{задер.выл}} = (c_{\text{задер.выл}1\text{а}}, c_{\text{задер.выл}2\text{а}}, \ldots, c_{\text{задер.выл}\,i\text{а}}, \ldots, c_{\text{задер.выл}\,N_{\text{а}}}), \tag{1.34}$$

где $c_{\text{задер.прил}}$ – вектор, состоящий из показателей средней задержки на прилете на моделируемый(ые) аэродром(ы):

$$\overline{c}_{\text{задер.прил}} = (c_{\text{задер.прил}\,1\text{a}}, c_{\text{задер.прил}\,2\text{a}}, \ldots, c_{\text{задер.прил}\,t\text{a}}, \ldots, c_{\text{задер.прил}\,N_{\text{a}}}), \tag{1.35}$$

где $t = \overline{1, N_{\text{a}}}$, N_{a} – количество моделируемых аэродромов, $c_{\text{задер.выл}\,t\text{a}}$ – средняя задержка на вылете из t-го аэродрома, $c_{\text{задер.прил}\,t\text{a}}$ – средняя задержка на прилете на t-й аэродром.

Ограничения для пользователей ВП записываются системой неравенств:

$$\begin{cases} c_{\text{задер.выл}} = B_1(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{задер.выл}}, \\ c_{\text{задер.прил}} = B_2(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{задер.прил}}, \end{cases} \tag{1.36}$$

где $c^*_{\text{задер.выл}}$ – допустимая задержка на вылете из моделируемого(ых) аэродрома(ов), $c^*_{\text{задер.прил}}$ – допустимая задержка на прилете на моделируемый(ые) аэродром(ы).

В общем виде ограничения по задержкам можно представить как:

$$c_{\text{ср.задер}} = B(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{задер}}, \tag{1.37}$$

где $c^*_{\text{задер}}$ допустимая задержка на вылете и прилете из/в моделируемый(ые) аэродром(ы).

1.3.2. Ограничения по показателям безопасности. Ограничения по показателям безопасности выполнения полетов характеризуются значением $c_{\text{б}}$, который представляет рассчитанный уровень безопасности полетов в моделируемой структуре ВП и определяется неравенством

$$c_{\text{б}} = F(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{TLS}}, \tag{1.38}$$

где c^*_{TLS} – целевой уровень безопасности полетов (target level safety – TLS).

1.3.3. Ограничения по показателям ПВП. Ограничения по ПВП характеризуются вектором $\overline{c}_{\text{ПВП}} = (\overline{c}_{\text{ПВП1}}, \overline{c}_{\text{ПВП2}})$, где $\overline{c}_{\text{ПВП1}}$ – вектор показателей интенсивности ВД в секторах диспетчерского управления:

$$\overline{c}_{\text{ПВП1}} = (c_{\text{загр.1сек}}, c_{\text{загр.2сек}}, \ldots, c_{\text{загр.}i_{\text{сек}}}, \ldots, c_{\text{загр.}N_{\text{сек}}}), \tag{1.39}$$

$c_{\text{ПВП2}}$ – вектор временной загруженности диспетчерских позиций:

$$\overline{c}_{\text{ПВП2}} = (c_{\text{врем.загр.}1_{\text{сек}}}, c_{\text{врем.загр.}2_{\text{сек}}}, \ldots, c_{\text{врем.загр.}i_{\text{сек}}}, \ldots, c_{\text{врем.загр.}N_{\text{сек}}}), \tag{1.40}$$

где $i = \overline{1, N_{\text{сек}}}$, $c_{\text{загр.}i_{\text{сек}}}$ – интенсивность ВД в i-м секторе ОВД, $c_{\text{врем.загр.}i_{\text{сек}}}$ – временная загруженность диспетчера в i-м секторе ОВД.

Пропускная способность в части ограничений представляется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} c_{\text{ПВП1}} = \Phi_1(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{НПС}}, \\ c_{\text{ПВП2}} = \Phi_2(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{КЗ}}, \end{cases} \tag{1.41}$$

где $c^*_{\text{НПС}}$ – заданные или рассчитанные нормативы пропускной способности (НПС) секторов, $c^*_{\text{КЗ}}$ – допустимый временной коэффициент загруженности (КЗ) диспетчера.

1.3.4. Ограничения по показателям ПА. В части ПА ограничением является $c_{\text{ПА}}$ – количество ВПО на моделируемом(ых) аэродроме(ах) и обозначается вектором:

$$\overline{c}_{\text{ПА}} = (c_{\text{ВПО}\,1\text{a}}, c_{\text{ВПО}\,2\text{a}}, \ldots, c_{\text{ВПО}\,t\text{a}}, \ldots, c_{\text{ВПО}\,N_{\text{a}}}), \tag{1.42}$$

где $t = \overline{1, N_{\text{a}}}$, $c_{\text{ВПО}\,t\text{a}}$ – количество ВПО на t-м аэродроме.

Ограничения по ПА характеризуются следующим неравенством:

$$c_{\text{ПА}} = R(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \ge c^*_{\text{ВПО}}, \tag{1.43}$$

где $c^*_{\text{ВПО}}$ – заданное целевое количество ВПО на моделируемом(ых) аэродроме(ах), которое может быть определено, как минимальное допустимое количество операций.

1.3.5. Ограничения по показателям влияния на окружающую среду. Ограничения по влиянию на окружающую среду является $c_{\text{шум}}$ – рассчитываемый уровень шумовых воздействий в районе моделируемых аэродромов:

$$\overline{c}_{\text{шум}} = (c_{\text{шум}1\text{а}}, c_{\text{шум}2\text{а}}, \ldots, c_{\text{шум}\,t\text{а}}, \ldots, c_{\text{шум}\,N_{\text{а}}}), \tag{1.44}$$

где $t = \overline{1, N}_{\text{а}}$, $c_{\text{шум}\,t\text{а}}$ – уровень в районе t-го аэродрома.

Ограничение находим следующим образом:

$$c_{\text{шум}} = U(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{шум}}, \tag{1.45}$$

где $c^*_{\text{шум}}$ – заданный уровень шумовых воздействий в районе моделируемых аэродромов. Уровни определяются ГОСТами и нормативными документами [9], порядок их расчета рекомендуется, в том числе, и ИКАО [10].

1.4. Математическая постановка задачи. Необходимо решить задачу многомерной условной оптимизации, где по каждой группе показателей требуется оптимизировать (максимизировать или минимизировать) критерий.

Задача формулируется следующим образом: при заданных алгоритмах управления потоками ВС и средствах поддержки диспетчера u найти наилучший вариант структуры ВП и инфраструктуры аэродрома $\hat{s}^* = (\hat{s}_{\text{ВП}}, \hat{s}_{\text{а}})$ среди альтернативных вариантов, при котором показатели обращаются в максимум/минимум, с учетом накладываемых ограничений:

$$\begin{cases} W_{\text{а}} = W_1(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \min\limits_s, \\ W_{\text{б}} = W_2(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \min\limits_s, \\ W_{\text{ОрВД}} = W_3(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \min\limits_s, \\ W_{\text{ПВП}} = W_4(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \max\limits_s \\ W_{\text{ПА}} = W_5(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \max\limits_s \\ W_{\text{ср}} = W_6(\overline{s}, \overline{u} \,|\, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \overset{*}{\to} \min\limits_s, \\ c_{\text{а}} = B(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{задер}}, \\ c_{\text{б}} = F(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{TLS}, \\ c_{\text{ПВП}1} = \Phi_1(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{НПС}}, \\ c_{\text{ПВП}2} = \Phi_2(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{КЗ}}, \\ c_{\text{ПА}} = R(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \ge c^*_{\text{ВПО}}, \\ c_{\text{шум}} = U(\overline{s}, \overline{u}, \overline{y}, \overline{\omega}, \overline{v}) \le c^*_{\text{шум}}, \end{cases} \tag{1.46}$$

где $\overset{*}{\to}$ – операция оптимизации вектора по каждой группе показателей.

1.5. Алгоритм решения многокритериальной задачи выбора наилучшего варианта структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Данная задача представляет собой задачу структурного синтеза, которая для сложных технических систем (система ОрВД является сложной организационно-технической системой) решается на практике путем выбора из ограниченного ряда спроектированных вариантов структуры на основе оценки их эффективности.

Пусть задано дискретное множество $S = \{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_j, \ldots, \overline{s}_M\}$ спроектированных альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома, удовлетворяющих ограничениям, заданным далее, где $\overline{s}_j = (\overline{s}_{\text{ВП}_j}, \overline{s}_{\text{а}_j})$, M – число разработанных специалистами по организации ВП вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Каждый вариант $\overline{s} \in S$ характеризуется большим количеством компонентов (сеть ВТ, секторы диспетчерского управления, маршруты вылета, прибытия, захода на посадку и т.д.) и оценивается по показателям, которые могут противоречить друг другу. Таким образом, многокритериальная задача оптимизации сводится к задаче сравнения вариантов между собой и выбора наилучшего варианта по заданным частным критериям. Данная задача может быть решена двумя способами.

Первый способ заключается в расчете показателей по каждой группе и определении множества решений, оптимальных по Парето. Тогда решением будут варианты структуры ВП и инфраструктуры аэродрома $\overline{s}^* \in S$, если не существует другого решения $\overline{s} \in S$ среди анализируемых альтернатив, значения показателей эффективности которых $W_i(\overline{s})$ при переходе к этим вариантам для любого i-го показателя смогли бы превзойти значения показателей эффективности $W_i(\overline{s}^*)$ выбранного решения из множества решений, оптимальных по Парето, где $i = \overline{1, N}$, N – количество частных критериев (показателей). Каждый оптимальный по Парето вариант $\overline{s}^*$ может быть определен в виде табличного или графического представления с рассчитанными значениями по каждому показателю. Однако поскольку в данной задаче требуется найти единственный наилучший вариант структуры ВП, то по оптимальным по Парето решениям применяется экспертная оценка. Эксперты оценивают эффективные решения и определяют один из множества оптимальных по Парето вариант структуры ВП и инфраструктуры аэродрома.

Другим путем является сведение задачи к решению одной или последовательности однокритериальных задач. Традиционными методами здесь выступают метод свертки критериев, оптимизация главного локального критерия, метод последовательных уступок. Метод свертки критериев применять в данном случае не представляется возможным из-за субъективности назначения заинтересованными сторонами параметров (коэффициентов) свертки. Метод главного критерия также не приемлем ввиду сложности выбора из всех показателей эффективности одного единственного критерия и назначения ограничений на другие показатели эффективности, требуемые к выполнению. Наиболее предпочтительным является использование метода последовательных уступок.

Таким образом, второй способ заключается в выборе одного оптимального варианта структуры ВП и инфраструктуры аэродрома из дискретного множества $S = \{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_j, \ldots, \overline{s}_M\}$ с использованием метода последовательных уступок. При этом экспертами определяется приоритетность показателей: согласно требованиям ИКАО, наиболее важным будет показатель $W_{\text{б}}$, за ним в порядке убывания важности следуют показатели эффективности для пользователей ВП $W_{\text{а}}$, затем показатели пропускной способности $W_{\text{ПВП}}$, $W_{\text{ПА}}$ и далее – остальные группы показателей $W_{\text{ср}}$, $W_{\text{ОрВД}}$. Поскольку показатели эффективности использования ВП и инфраструктуры аэродрома $W_{\text{б}}$ $W_{\text{а}}$ $W_{\text{ПВП}}$, $W_{\text{ПА}}$, $W_{\text{ОрВД}}$, $W_{\text{ср}}$ в свою очередь представляют собой векторы, то предлагается упорядочить:

блоки матрицы (1.1) по важности блока:

$$(W_{\text{б}}, W_{\text{а}}, W_{\text{ПВП}}, W_{\text{ПА}}, W_{\text{ОрВД}}, W_{\text{ср}})^{\text{T}};$$

критерии каждого блока по важности, например, для первого блока, содержащего пять критериев: $W_{\text{б}} = (W_{\text{риски}}, W_{\text{ННЭ}}, W_{\text{ПКС}}, W_{\text{конфл.схем}}, W_{\text{инт.ВПП}})^{\text{T}}$, для второго блока, содержащего шесть критериев: $W_{\text{а}} = (W_{\text{а.топл.эф}}, W_{\text{а.налет}}, W_{\text{протяж.марш}}, W_{\text{ортодр}}, W_{\text{а.зад}}, W_{\text{врем.рул}})^{\text{T}}$, и так далее по остальным блокам.

Далее рассматривается алгоритм решения задачи с определенными по группам показателей приоритетами.

Ш а г 1. На первом этапе решается задача выбора наилучшего решения из дискретного множества альтернативных вариантов $S = \left\{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_j, \ldots, \overline{s}_M\right\}$ для наиболее важной группы показателей по безопасности выполнения полетов $W_{\text{б}}$ (первый блок):

Ш а г 1.1. Среди возможных вариантов выбрать вариант (варианты) в результате решения однокритериальной задачи

$$W_{\text{риски}}(\overline{s}) \to \min,$$

где $\overline{s} \in S$. Обозначим через $W_{\text{риски}}^{\min}$ полученное минимальное значение наиболее важного критерия первой группы (оценка рисков).

Ш а г 1.2. Назначить уступку $\overline{\Delta}_{\text{риски}} > 0$ по критерию $W_{\text{риски}}(\overline{s})$ и решить задачу однокритериальной минимизации

$$W_{\text{ННЭ}}(\overline{s}) \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} W_{\text{риски}}(\overline{s}) \le W_{\text{риски}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{риски}}, \\ \overline{s} \in S. \end{cases} \tag{1.47}$$

В результате найти подмножество допустимых вариантов S и минимальное значение второго по важности критерия $W_{\text{ННЭ}}^{\min}$.

Ш а г 1.3. Назначить уступку $\overline{\Delta}_{\text{ННЭ}} > 0$ по критерию $W_{\text{ННЭ}}(\overline{s})$ и решить задачу однокритериальной минимизации:

$$W_{\text{ПКС}}(\overline{s}) \to \min$$

при условии:

$$\begin{cases} W_{\text{риски}}(\overline{s}) \le W_{\text{риски}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{риски}}, \\ W_{\text{ННЭ}}(\overline{s}) \le W_{\text{ННЭ}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{ННЭ}}, \\ \overline{s} \in S. \end{cases} \tag{1.48}$$

В результате найти подмножество допустимых вариантов S и минимальное значение третьего по важности критерия $W_{\text{ПКС}}^{\min}$ (количество ПКС).

Ш а г 1.4. Назначить уступку $\overline{\Delta}_{\text{ПКС}} > 0$ по критерию $W_{\text{ПКС}}(\overline{s})$ и решить задачу однокритериальной минимизации:

$$W_{\text{конфл.схем}}(\overline{s}) \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} W_{\text{риски}}(\overline{s}) \le W_{\text{риски}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{риски}}, \\ W_{\text{ННЭ}}(\overline{s}) \le W_{\text{ННЭ}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{ННЭ}}, \\ W_{\text{ПКС}}(\overline{s}) \le W_{\text{ПКС}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{ПКС}}, \\ \overline{s} \in S. \end{cases} \tag{1.49}$$

В результате найти подмножество допустимых вариантов S и минимальное значение третьего по важности критерия $W_{\text{конфл.схем}}^{\min}$ (конфликтность схем маневрирования).

Ш а г 1.5. Назначить уступку $\overline{\Delta}_{\text{конфл.схем}} > 0$ по критерию $W_{\text{конфл.схем}}(\overline{s})$ и решить задачу однокритериальной минимизации:

$$W_{\text{инт.ВПП}}(\overline{s}) \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} W_{\text{риски}}(\overline{s}) \le W_{\text{риски}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{риски}}, \\ W_{\text{ННЭ}}(\overline{s}) \le W_{\text{ННЭ}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{ННЭ}}, \\ W_{\text{ПКС}}(\overline{s}) \le W_{\text{ПКС}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{ПКС}}, \\ W_{\text{инт.ВПП}}(\overline{s}) \le W_{\text{инт.ВПП}}^{\min} + \overline{\Delta}_{\text{инт.ВПП}}, \\ \overline{s} \in S. \end{cases} \tag{1.50}$$

В результате найти подмножество допустимых вариантов S и минимальное значение третьего по важности критерия $W_{\text{инт.ВПП}}^{\min}$ (нарушений временных интервалов на ВПП).

Назначить уступку $\bar{\Delta}_{\text{инт.ВПП}} > 0$ и сформировать вектор найденных при решении подзадач минимальных значений критериев $W_{\text{б}}^{\min} = (W_{\text{риски}}^{\min}, W_{\text{ННЭ}}^{\min}, W_{\text{ПКС}}^{\min}, W_{\text{конфл.схем}}^{\min}, W_{\text{инт.ВПП}}^{\min})^{\text{T}}$ и вектор уступок $\bar{\Delta}_{\text{б}} = (\bar{\Delta}_{\text{риски}}, \bar{\Delta}_{\text{ННЭ}}, \bar{\Delta}_{\text{ПКС}}, \bar{\Delta}_{\text{конфл.схем}}, \bar{\Delta}_{\text{инт.ВПП}})^{\text{T}}$.

Ш а г 2. Рассматривается следующая по приоритету группа показателей для эксплуатантов ВП $W_{\text{а}}$ (авиакомпании).

Аналогично процедуре, описанной на шаге 1, решается задача

$$W_{\text{а}}(\bar{s}) \to \min$$

при условии

$$W_{\text{б}}(\bar{s}) \leq W_{\text{б}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{б}}, \quad \bar{s} \in S. \tag{1.51}$$

Знак неравенства в (1.51) здесь и далее понимается покоординатно.

В результате для группы показателей для эксплуатантов ВП формируется вектор уступок $\bar{\Delta}_{\text{а}} > 0$. По второй группе показателей дополнительные ограничения на выбор альтернативных решений, для которых оценка не должна превышать $W_{\text{а}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{а}}$, накладываются на следующем шаге.

Ш а г 3. Анализируется группа показателей по ПВП $W_{\text{ПВП}}$.

Аналогично шагам 1 и 2 решается задача максимизации по группе показателей по ПВП: $W_{\text{ПВП}} \to \max$. При этом задается последовательность задач однокритериальной максимизации критерия $W_{\text{ПВП}}^{(i)}(\bar{s}), i = 1, 2, 3$, при условиях

$$\begin{cases} W_{\text{б}}(\bar{s}) \leq W_{\text{б}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{б}}, \\ W_{\text{а}}(\bar{s}) \leq W_{\text{а}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{а}}, \\ \bar{s} \in S, \end{cases} \tag{1.52}$$

к которым последовательно добавляются ограничения вида $W_{\text{ПВП}}^{(i-1)}(\bar{s}) \geq W_{\text{ПВП}}^{(i-1)\max} - \bar{\Delta}_{\text{ПВП}}^{(i-1)}$.

В результате вводится уступка $\bar{\Delta}_{\text{ПВП}} > 0$, а оценка альтернативных решений по данной группе показателей на следующем шаге не должна быть меньше $W_{\text{ПВП}}^{\max} - \bar{\Delta}_{\text{ПВП}}$.

Ш а г 4. Рассматривается группа показателей ПА $W_{\text{ПА}}$. Решается следующая задача: $W_{\text{ПА}} \to \max$. Аналогично шагу 3 вводится уступка $\bar{\Delta}_{\text{ПА}} > 0$, а оценка по группе показателей на следующем шаге не должна быть меньше $W_{\text{ПА}}^{\max} - \bar{\Delta}_{\text{ПА}}$. При этом при выборе должны учитываться ограничения:

$$\begin{cases} W_{\text{б}}(\bar{s}) \leq W_{\text{б}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{б}}, \\ W_{\text{а}}(\bar{s}) \leq W_{\text{а}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{а}}, \\ W_{\text{ПВП}}(\bar{s}) \geq W_{\text{ПВП}}^{\max} + \bar{\Delta}_{\text{ПВП}}, \\ \bar{s} \in S. \end{cases} \tag{1.53}$$

Ш а г 5. Приводится уже менее приоритетные группы показателей. Альтернативные варианты оцениваются по группе показателей по окружающей среде $W_{\text{ср}}$: $W_{\text{ср}} \to \min$. Формируется уступка $\bar{\Delta}_{\text{ср}} > 0$, оценка на следующем шаге не должна превышать $W_{\text{ср}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{ср}}$. При этом учитываются ограничения:

$$\begin{cases} W_{\text{б}}(\bar{s}) \leq W_{\text{б}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{б}}, \\ W_{\text{а}}(\bar{s}) \leq W_{\text{а}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{а}}, \\ W_{\text{ПВП}}(\bar{s}) \geq W_{\text{ПВП}}^{\max} + \bar{\Delta}_{\text{ПВП}}, \\ W_{\text{ПА}}(\bar{s}) \geq W_{\text{ПА}}^{\max} + \bar{\Delta}_{\text{ПА}}, \\ \bar{s} \in S. \end{cases} \tag{1.54}$$

Ш а г 6. Последняя по приоритету группа показателей – эффективность для системы ОрВД $W_{\text{ОрВД}}$. На данном этапе выбирается уже единственное решение:

$$W_{\text{ОрВД}} \to \min .$$

При этом по последней группе показателей должны учитываться следующие ограничения:

$$\begin{cases} W_{\text{б}}(\bar{s}) \le W_{\text{б}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{б}}, \\ W_{\text{а}}(\bar{s}) \le W_{\text{а}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{а}}, \\ W_{\text{ПВП}}(\bar{s}) \ge W_{\text{ПВП}}^{\max} + \bar{\Delta}_{\text{ПВП}}, \\ W_{\text{ПА}}(\bar{s}) \ge W_{\text{ПА}}^{\max} + \bar{\Delta}_{\text{ПА}}, \\ W_{\text{ср}}(\bar{s}) \le W_{\text{ср}}^{\min} + \bar{\Delta}_{\text{ср}}, \\ \bar{s} \in S. \end{cases} \tag{1.55}$$

Выбранное решение может не быть оптимальным по Парето, поэтому эксперт проверяет выбранный вариант на оптимальность по Парето.

2. Математические модели для расчета показателей эффективности системы ОрВД. Задача оценки альтернативных вариантов структуры ВП решается с использованием комплекса имитационного моделирования системы организации воздушного движения (КИМ ОрВД) [11–13], который был разработан в интересах российского провайдера аэронавигационных услуг ФГУП “Госкорпорация по ОрВД”. В составе комплекса реализованы расчетные и имитационные модели для вычисления показателей. Выбор метода расчета для разных показателей зависит от области и процессов моделирования. Исследования показателей эффективности выполнения полетов и пропускной способности верхнего ВП ориентированы на применение расчетного моделирования, соответственно математические модели вычисления показателей основаны на расчетном моделировании. Оценка процессов в диспетчерской зоне района аэродрома и на поверхности аэродрома производится преимущественно с помощью имитационного моделирования. Таким образом, модели вычисления показателей используют данные от имитационных моделей. Далее представлено описание математических моделей расчета показателей, реализованных в составе КИМ ОрВД.

2.1. М о д е л и р а с ч е т а п о к а з а т е л е й б е з о п а с н о с т и п о л е т о в $W_{\text{б}}$. Группа показателей безопасности полетов определяется следующим вектором, который состоит из показателей:

$$W_{\text{б}} = (W_{\text{ПКС}}, W_{\text{ННЭ}}, W_{\text{инт.ВПП}}, W_{\text{конфл.схем}}, W_{\text{риски}})^{\text{T}}. \tag{2.1}$$

2.1.1. К о л и ч е с т в о ПКС $W_{\text{ПКС}}$. Под ПКС понимается ситуация, требующая вмешательства диспетчера, когда прогнозируется нарушение одновременно вертикальных и горизонтальных норм эшелонирования между ВС.

Расчет потенциальных конфликтных ситуаций производится на основе прогноза 4D-траекторий полета ВС – детализированных планов полета, включая такие этапы полета, как взлет, набор высоты, полет по маршруту, снижение, посадка. Для вычисления показателя используется расчетно-аналитическое моделирование. На вход в модель расчета показателя подаются запланированные пользователям ВП планы полетов.

Для любого рейса $f \in L$, где L – заданный поток ВС, который состоит из m рейсов, 4D-траектория определяется вектором:

$$x^f = (x^f{}_1, \ldots, x_i^f, \ldots, x^f{}_n), \ \forall f \in L,$$

где n – количество точек траектории.

Для увеличения точности расчетов каждый участок маршрута интерполируется с заданным шагом Δt для определения текущего местоположения ВС, исходя из прогноза полета по построенной 4D-траектории. Местоположение ВС задается четырьмя координатами:

$$x_i^f = (lat_i^f, long_i^f, alt_i^f, t_i^f),$$

где lat_i^f – широта ВС f в i-й точке траектории, измеряемая в градусах, $long_i^f$ – долгота ВС f в i-й точке траектории, alt_i^f – высота ВС f в i-й точке траектории , t_i^f – время нахождения ВС в i-й точке траектории.

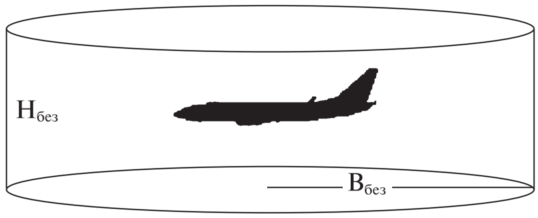


Рис. 2. Зона безопасности ВС

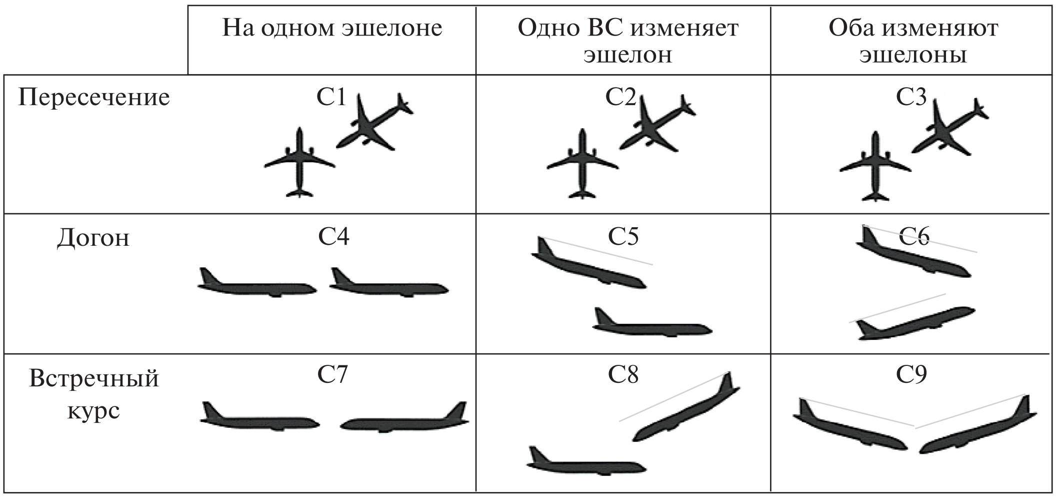


Рис. 3. Типы ПКС

Все характеристики рассчитаны в соответствии с заданной горизонтальной и вертикальной скоростью полета ВС на участках маршрута. Метеоусловия и отклонения ВС от линии пути не учитываются.

Нормы эшелонирования характеризуются параметрами зоны безопасности вокруг каждого ВС f. На рис. 2 изображена зона безопасности вокруг каждого ВС, которая представляет собой цилиндр с радиусом $R_{\text{без}}$ и высотой $H_{\text{без}}$:

Определим ПКС между двумя любыми ВС в заданном потоке ВД. Для двух любых ВС $f, g \in L$, $f \neq g$, ПКС $w_{f,g}^{\text{ПКС}}$ определяется:

$$w_{f,g}^{\text{ПКС}} = \begin{cases} 1, & (t_i^f = t_j^g) \wedge (D_{i,j}^{f,g} \leq 2R_{\text{без}}) \wedge (|alt_i^f - alt_j^g| < H_{\text{без}}), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.2}$$

где f – первое ВС, участвующее в ПКС; g – второе ВС, участвующее в ПКС; $D_{i,j}^{f,g}$ – ортодромия между двумя ВС в i-й точке траектории ВС f и в j-й точке траектории ВС g. Тогда показатель "Количество ПКС" находится следующим образом:

$$W_{\text{ПКС}} = \sum_{f,g} w_{f,g}^{\text{ПКС}}, \quad \forall f, \quad g \in L, \quad f \neq g. \tag{2.3}$$

Ортодромия между двумя ВС $f, g \in L$, рассчитывается как

$$D_{i,j}^{f,g} = R_{\text{зем}}(\arccos[\sin(lat_i^f)\sin(lat_j^g) + \cos(lat_i^f)\cos(lat_j^g)\cos(long_j^g - long_i^f)]). \tag{2.4}$$

На рис. 3 изображены девять типов определяемых ПКС. Показатель может рассчитываться как для всех ПКС, так и для каждого типа.

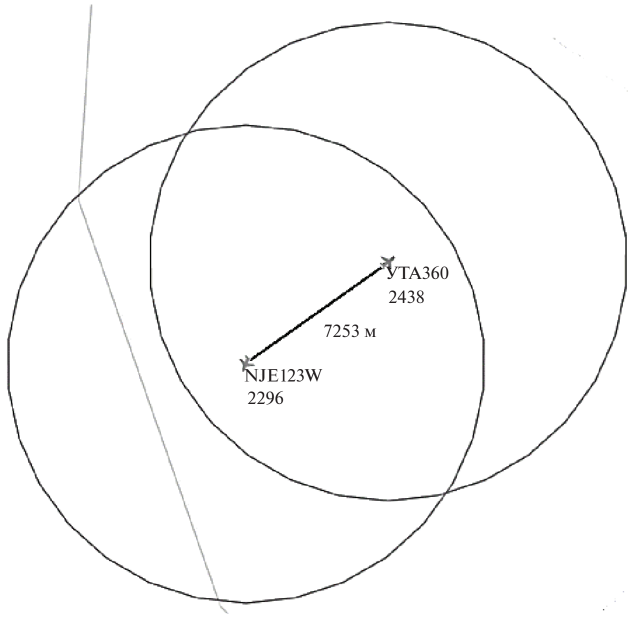


Рис. 4. ННЭ

2.1.2. Нарушения норм эшелонирования $W_{\text{ННЭ}}$. ННЭ между двумя ВС происходит, когда нарушаются одновременно горизонтальные и вертикальные нормы эшелонирования. В отличие от ПКС данный показатель фиксирует уже свершившиеся конфликты.

Для расчета показателя $W_{\text{ННЭ}}$ применяется имитационное моделирование управляемых полетов ВС как в диспетчерской зоне района аэродрома, так и на маршруте ОВД. На вход в имитационную модель поступают потоки ВД, которые состоят из плановых данных. В процессе моделирования траектории и планы полетов ВС актуализируются (обновляются) по мере изменения воздушной обстановки в соответствии с их ЛТХ, а также влиянием внешних воздействий на ВС, как, например, вмешательство диспетчера при разрешении ПКС. В составе модели диспетчера имитируются временные затраты на выполнение операций по сопровождению и контролю за ВС, а также алгоритмы разрешения ПКС.

Показатель рассчитывается на основе данных о местоположении ВС, т.е. на базе его вектора состояний. Обнаружение ННЭ производится с заданным шагом, настраиваемым исследователем, в процессе моделирования. Нарушения фиксируются, когда имитационная модель диспетчерского управления не позволяет разрешить все ПКС ввиду сложности воздушной обстановки. На рис. 4 отображено нарушение горизонтальных и вертикальных норм эшелонирования между двумя ВС в процессе имитационного моделирования.

Расчет производится аналогично показателю $W_{\text{ПКС}}$ – количеству ПКС, где определяется одновременное нарушение вертикальных и горизонтальных норм. Разница заключается в том, что ННЭ рассчитываются по фактическому местоположению ВС в процессе имитационного моделирования, а ПКС вычисляются на основе прогнозной траектории ВС с использованием расчетного моделирования. Таким образом, показатель $W_{\text{ННЭ}}$ определяется следующим образом: для двух любых ВС f, $g \in L$, $f \neq g$, в момент запуска процедуры обнаружения конфликтов t ННЭ

$$w_{f,g}^{\text{ННЭ}} = \begin{cases} 1, & (D_{i,j}^{f,g} \le 2R_{\text{без}}) \wedge (\left|alt^f - alt^g\right| < H_{\text{без}}) \wedge (t \in [t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}]), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $t_{\text{нач}}$ – время начала моделирования потока ВС, $t_{\text{кон}}$ – время окончания моделирования.

Тогда $W_{\text{ННЭ}}$ определяется следующим образом:

$$W_{\text{ННЭ}} = \sum_{f,g} w_{f,g}^{\text{ННЭ}}, \quad \forall f, \quad g \in L, \quad f \neq g. \tag{2.6}$$

Показатель позволяет оценить как существующую, так и перспективную структуру ВП в условиях прогнозных интенсивных потоков ВД и на этапе моделирования выявить “узкие” места в структуре, где требуется повышенное внимание диспетчеров с целью обеспечения норм горизонтального и вертикального эшелонирования.

2.1.3. Количество нарушений временных интервалов на ВПП $W_{\text{инт.ВПП}}$. Одним из показателей группы “Безопасность полетов” является нарушение интервалов на ВПП. Показатель рассчитывается в процессе имитационного моделирования и предназначен для прогноза/фиксации нарушения минимальных временных интервалов на одной либо системе ВПП. В случае прогноза показатель вычисляется на основе плановых времен взлета и посадки ВС на моделируемом(ых) аэродроме(ах). Плановые времена взлета и посадки рассчитываются исходя из заданных пользователем предпочтений. Это может быть прогнозный поток с увеличенной интенсивностью ВД, когда плановое количество ВПО превышает пропускную способность системы ВПП, либо определенные системой планирования времена с соблюдением требований по минимальным интервалам.

Пусть заданы поток вылетающих ВС $U \subset L$ и поток прибывающих ВС $V \subset L$. ВС $f \in U$ имеет время вылета $t^{f}_{\text{выл}}$ с моделируемого аэродрома, где $t^{f}_{\text{выл}} \in [t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}]$. Здесь $t_{\text{нач}}$ – время начала моделирования, $t_{\text{кон}}$ – время окончания моделирования. ВС $g \in V$ имеет время прилета $t^{g}_{\text{прил}}$ на моделируемый аэродром, $t^{g}_{\text{прил}} \in [t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}]$.

В зависимости от массы ВС делятся на категории турбулентности: легкие (L), средние (M), тяжелые (H) и супертяжелые (J). В статье рассматривается матрица для четырех категорий турбулентности, однако количество категорий может быть увеличено при рекатегоризации. Зададим матрицу $M_{4\times 4}$ минимальных интервалов между ВПО, строки которой соответствуют категориям турбулентности ВС, выполняющего ВПО первым, а столбцы – категориям турбулентности ВС, выполняющего ВПО вторым. Элементами $m_{p,q}$ матрицы M в общем виде являются минимальные допустимые временные интервалы между двумя последовательными ВПО ВС с категориями турбулентности, соответствующими строке с номером p и столбцу с номером q (рис. 5). Таким образом, матрица M определяет допустимые по безопасности интервалы между ВС на ВПП (системе ВПП).

Определим четыре матрицы: $M_{arr.arr}, M_{dep.dep}, M_{arr.dep}, M_{dep.arr}$, где arr – прилетающие ВС, dep – вылетающие ВС. Элементами матриц являются соответственно $m^{arr.arr}_{p,q}, m^{dep.dep}_{p,q}, m^{arr.dep}_{p,q}, m^{dep.arr}_{p,q}$. Элементы задают минимальные допустимые временные интервалы между двумя прилетающими $g^{i}_{p}, g^{j}_{q} \in V$, $i \neq j$, или вылетающими ВС $f^{i}_{p}, f^{j}_{q} \in U$, $i \neq j$.

При моделировании ВПО на аэродроме для двух любых $f_i, f_j \in L$, $i \neq j$, которые выполняют последовательно ВПО на ВПП, причем, f_i – ВС, выполняющее первым операцию на ВПП (взлет/посадка), f_j – ВС, выполняющее вторым операцию на ВПП (взлет/посадка), нарушение интервалов на ВПП (системе ВПП) $w^{\text{инт.ВПП}}_{f,g}$ определяется как

$$w^{\text{инт.ВПП}}_{f,g} = \begin{cases} 1, & (t^{f_j,p}_{\text{выл}} - t^{f_i,q}_{\text{выл}} < m^{dep.dep}_{\text{p,q}}) \vee (t^{g_j,p}_{\text{прил}} - t^{g_i,q}_{\text{прил}} < m^{arr.arr}_{\text{p,q}}) \vee \\ \vee\, (t^{g_j,p}_{\text{выл}} - t^{f_i,q}_{\text{выл}} < m^{dep.arr}_{\text{p,q}}) \vee (t^{f_j,p}_{\text{выл}} - t^{g_i,q}_{\text{прил}} < m^{arr.dep}_{\text{p,q}}), & f_i, f_j \in U, \quad g_i, g_j \in V, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Показатель “Количество нарушений временных интервалов на ВПП” запишем следующим образом:

$$W_{\text{инт.ВПП}} = \sum_{f,g} w^{\text{инт.ВПП}}_{f,g}, \quad \forall f, \quad g \in L, \quad f \neq g. \tag{2.8}$$

2.1.4. Количество конфликтных схем маневрирования $W_{\text{конфл.схем}}$. Маршруты вылета, прибытия и захода на посадку как на один аэродром, так и на несколько близкорасположенных аэродромов проектируются с учетом бесконфликтности потоков ВС. Однако на этапе проектирования могут не учитываться ЛТХ всех типов ВС, что может привести к возникновению ННЭ при выполнении полетов двумя ВС по разным маршрутам.

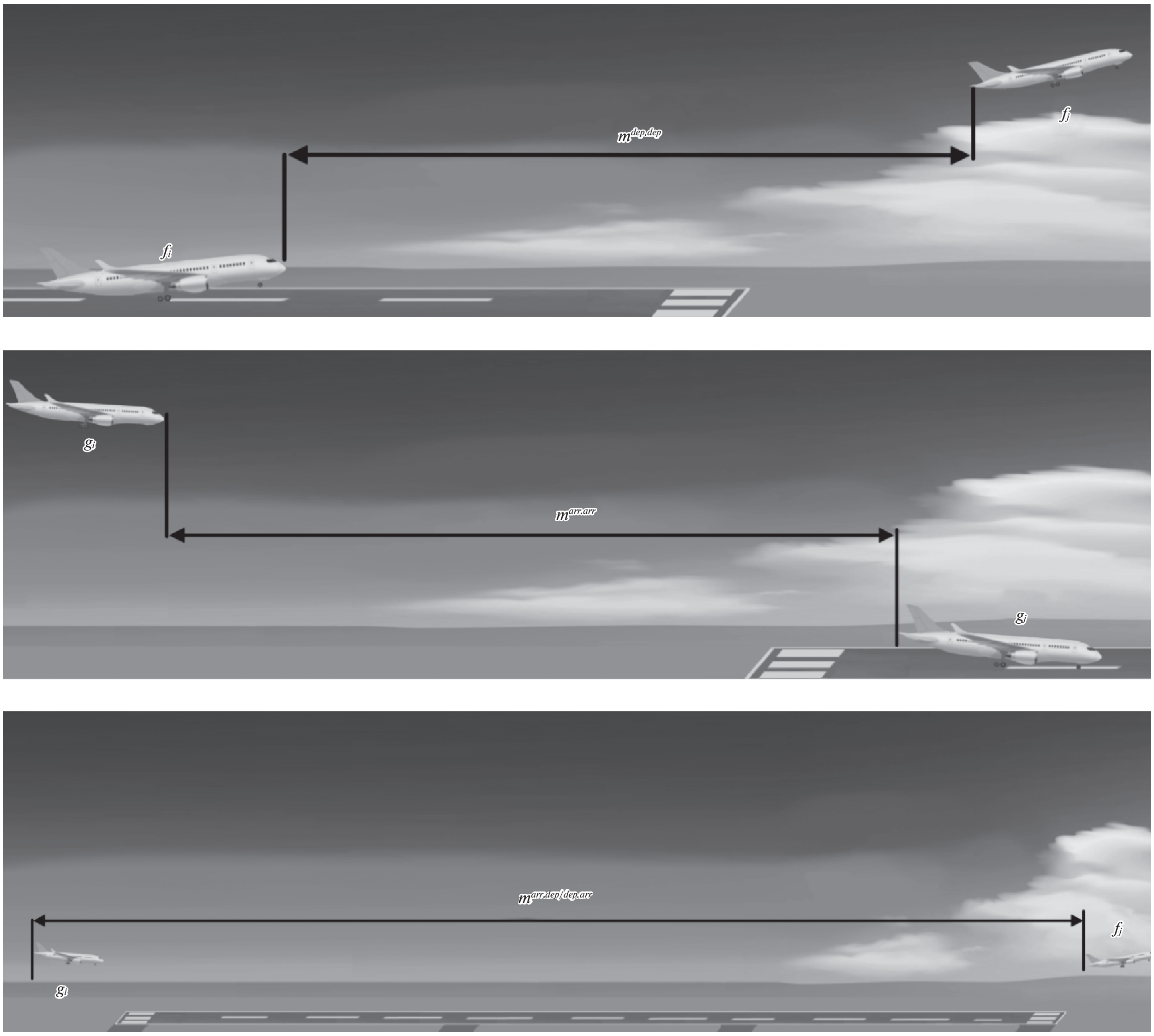


Рис. 5. Временные интервалы на ВПП

Конфликт между маршрутами определяется, когда фиксируется ННЭ между ВС, выполняющими полет по разным схемам маневрирования с учетом допустимых отклонений ВС в боковой плоскости, а также ограничений в вертикальной плоскости. Вычисление данного показателя производится с использованием расчетно-аналитического моделирования на основе фактических 4D-траекторий ВС. Пример обнаруженного конфликта на маршрутах вылета с разных аэродромов приведен на рис. 6.

Пусть $f_p^{i,k}$ – p-й рейс, который выполняет полет по i-му маршруту прибытия на k-й аэродром, $g_q^{j,l}$ – q-й рейс, который выполняет полет по j-му маршруту вылета из l-го аэродрома. Тогда конфликт между схемами маневрирования запишем как

$$w_{i,j,l,k}^{\text{конфл.схем}} = \begin{cases} 1, (w_{g_p^{i,k}, g_q^{j,l}}^{\text{инт.ВПП}} = 1, \forall g_p^{i,k}, g_q^{j,l}, p \neq q, i \neq j, l \neq k) \vee \\ \vee (w_{f_p^{i,k}, f_q^{j,l}}^{\text{инт.ВПП}} = 1, \forall f_p^{i,k}, f_q^{j,l}, p \neq q, i \neq j, l \neq k) \vee \\ \vee (w_{f_p^{i,k}, g_q^{j,l}}^{\text{инт.ВПП}} = 1, \forall f_p^{i,k}, g_q^{j,l}, l \neq k), \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases} \tag{2.9}$$

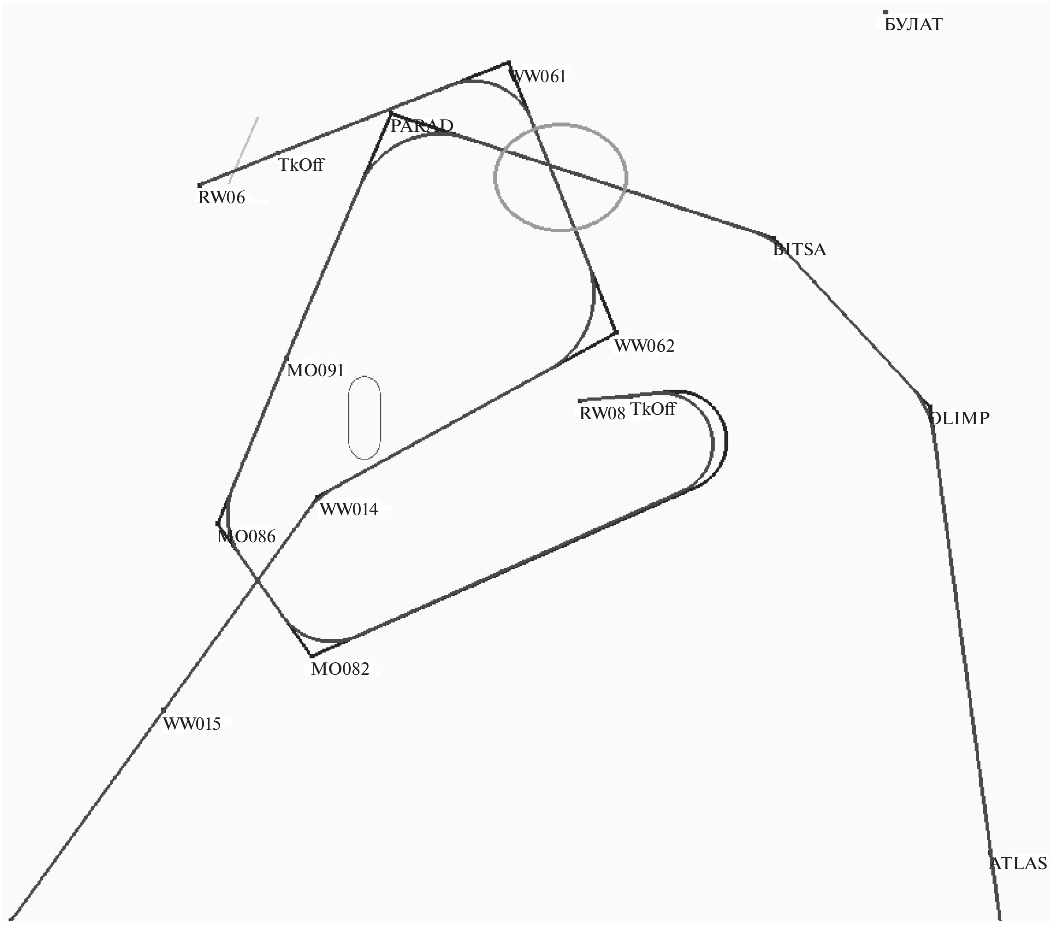


Рис. 6. Конфликт на маршрутах вылета с разных аэродромов

Показатель $W_{\text{конфл.схем}}$ находится следующим образом:

$$W_{\text{конфл.схем}} = \sum_{i,j,l,k} w_{i,j,l,k}^{\text{конфл.схем}}. \tag{2.10}$$

2.1.5. О ц е н к а р и с к о в $W_{\text{риски}}$. Задача оценки рисков для безопасности полетов, согласно документам ИКАО [14, 15], сводится к определению частоты возникновения опасных событий (ННЭ, опасных сближений, столкновений) на час полета. Для оценки рисков применяются различные методы математического моделирования, в том числе как аналитическое моделирование, так и имитационное моделирование. Большее распространение получили аналитические модели. Имитационные модели основаны на моделировании как воздушной обстановки, так и диспетчерской модели для разрешения ПКС.

В комплексе имитационного моделирования реализованы две модели (аналитическая и имитационная) для решения данной задачи. Более подробная информация о методах и реализации моделей в составе комплекса приведена в [16–19].

2.2. М о д е л и р а с ч е т а п о к а з а т е л е й э к с п л у а т а ц и о н н о й э ф ф е к т и в н о с т и д л я п о л ь з о в а т е л е й ВП $W_{\text{а}}$. Эффективность для пользователей ВП (авиакомпаний) характеризуется вектором, состоящим из следующих показателей:

$$W_{\text{а}} = (W_{\text{а.зад}}, W_{\text{протяж.марш}}, W_{\text{а.налет}}, W_{\text{а.топл.эф}}, W_{\text{ортодр}}, W_{\text{врем.рул}})^{\text{T}}. \tag{2.11}$$

2.2.1. З а д е р ж к и $W_{\text{а.зад}}$. Задержки являются одним из основных показателей для пользователей ВП. Показатель характеризует не только экономическую эффективность, но и пунктуальность выполнения полетов, а также участвует в расчете других показателей эффективности и ПВП, и ПА [20, 21].

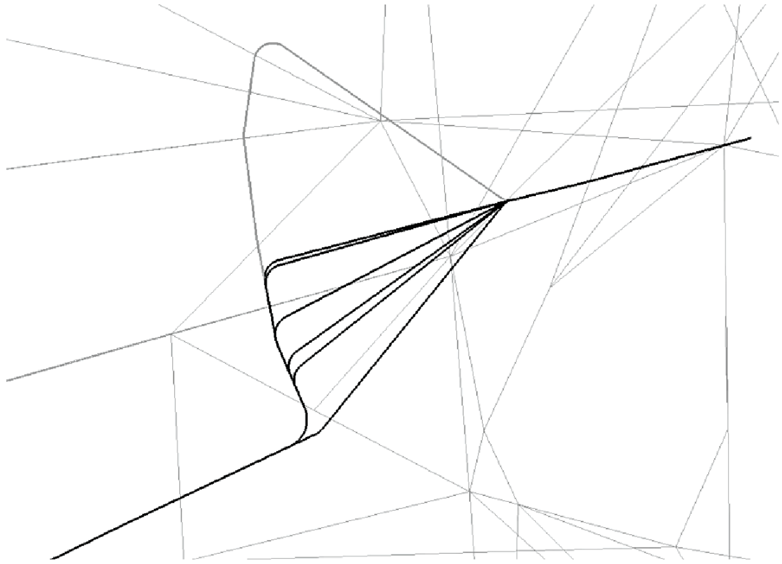


Рис. 7. Регулирование ВС на прилете

Показатель вычисляется с использованием имитационной модели управляемых полетов ВС в диспетчерской зоне района аэродрома или районе нескольких близкорасположенных аэродромов – районе аэроузла. На вход модели поступают запланированные/предпочитаемые пользователями маршруты. В процессе моделирования имитационная модель построения бесконфликтной очереди на прилет и вылет обеспечивает безопасные в вертикальной и горизонтальной плоскости интервалы между ВС за счет применения мер регулирования, что в свою очередь изменяет (в основном удлиняет) маршрут ВС или задерживает его на аэродроме. Издержками в данном случае становятся задержки, которые возникают у ВС относительно исходного времени вылета или прибытия. По результатам моделирования фиксируются фактические времена вылета и прибытия.

Для любого ВС $f \in L$, где f – прилетающее или вылетающее ВС, задержка $w^{\text{зад}}$ определяется как

$$w^{\text{зад}} = \begin{cases} t^f_{\text{факт}} - t^f_{\text{план}}, & t^f_{\text{факт}} - t^f_{\text{план}} > \varepsilon, \\ 0 & t^f_{\text{факт}} - t^f_{\text{план}} > \varepsilon, \end{cases} \tag{2.12}$$

где $t_{\text{план}}$ – плановое время прибытия, а $t_{\text{факт}}$ – фактическое время прибытия, если ВС f прилетает и $t_{\text{план}}$ – плановое время вылета, а $t_{\text{факт}}$ – фактическое время вылета, если ВС f вылетает, ε – погрешность расчета задержки.

Показатель задержки по всем моделируемым рейсам $W_{\text{а.зад}}$ задается средней $W^{\text{сред}}_{\text{а.зад}}$ и максимальной задержками $W^{\max}_{\text{а.зад}}$:

$$W^{\text{сред}}_{\text{а.зад}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i^{\text{зад}}, \tag{2.13}$$

$$W^{\max}_{\text{а.зад}} = \max_i (w_i^{\text{зад}}), \tag{2.14}$$

где m – количество рейсов в моделируемом потоке ВС.

В зависимости от задачи задержки могут рассчитываться отдельно по вылетным и прилетным рейсам. Также может задаваться период расчета средней задержки, например средняя или максимальная часовая задержка.

На рис. 7 представлен пример удлинения траектории ВС в горизонтальной плоскости в случае применения меры регулирования имитационной моделью диспетчерского управления, что приводит к возникновению задержки на прилете.

2.2.2. Протяженность маршрута $W_{\text{протяж.марш}}$. Показатель определяет протяженность промоделированной траектории полета. Протяженность рассчитывается с использованием имитационного моделирования и характеризует только горизонтальную составляющую эффективности траектории. Однако данный показатель позволяет оценить дальность полета, что может являться критерием при выборе структуры ВП.

Протяженность маршрута вычисляется на основе фактической траектории, по результатам имитационного моделирования. Маршрут включает в себя удлинения/спрямления, которые получаются с помощью регулирования имитационной моделью диспетчерского управления.

Для любого ВС $f \in L$ протяженность в пределах моделируемой области $w_f^{\text{протяж}}$ определяется как

$$w_f^{\text{протяж}} = l_{end}^f - l_{begin}^f, \tag{2.15}$$

где l_{begin} – протяженность маршрута при входе ВС в моделируемую область ВП, l_{end} – протяженность маршрута при выходе ВС из моделируемой области.

Следует сказать, что для рейсов, вылетающих из аэродромов в пределах моделируемой области, $l_{begin} = 0$, а для прилетающих рейсов l_{end} будет совпадать с протяженностью полного маршрута движения ВС.

Показатель “Протяженность маршрута” определяется как среднее значение на один рейс в пределах моделируемой области:

$$W_{\text{протяж.марш}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_{f_j}^{\text{протяж}}. \tag{2.16}$$

Кроме средней протяженности возможен расчет и протяженности по каждому рейсу для анализа показателя по направлениям полета.

2.2.3. Налет (продолжительность полета) $W_{\text{а.налет}}$. Время полета рассчитывается в процессе имитационного моделирования и характеризует структуру ВП в качестве одного из показателей эффективности для пользователей ВП (авиакомпаний).

В отличие от протяженности маршрута показатель учитывает вертикальную эффективность на наборе высоты и при снижении ВС, а также разрешенные эшелоны на маршруте ОВД. Как и протяженность, время полета рассчитывается исходя того, что полет ВС производится в соответствии с индексом эффективности, который вычисляется по максимальной дальности и топливной эффективности.

Налет $w_f^{\text{налет}}$ для любого ВС $f \in L$ в пределах моделируемой области определяется как

$$w_f^{\text{налет}} = t_{end}^f - t_{begin}^f, \tag{2.17}$$

где t_{begin} – время влета в моделируемую область, t_{end} – время вылета ВС из моделируемой области.

Показатель “налет” для всего потока ВС рассчитывается как среднее значение на рейс:

$$W_{\text{а.налет}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_{f_j}^{\text{налет}}. \tag{2.18}$$

Налет и протяженность маршрута подходят для проведения сравнительного анализа двух вариантов структур ВП, где важен выигрыш/проигрыш одного варианта относительно другого, а не абсолютная оценка.

2.2.4. Расход топлива $W_{\text{а.топл.эф}}$. Показатель топливной эффективности представляет собой расчет количества затраченного в процессе моделирования авиационного топлива. Расчет производится в процессе имитационного моделирования управляемых полетов ВС. Моделирование полета ВС осуществляется по модели BADA [22], которая содержит ЛТХ по всем типам ВС, в том числе и данные по расходованию топлива в зависимости от режима полета, взлетному весу ВС, выбранному эшелону полета, скорости набора высоты и снижения и др.

Расчет выполняется по фактической 4D-траектории полета ВС с учетом изменения его веса в процессе моделирования. Начальный взлетный вес задается исходя из критерия максимальной дальности полета, а также задаваемой загрузки и запаса топлива.

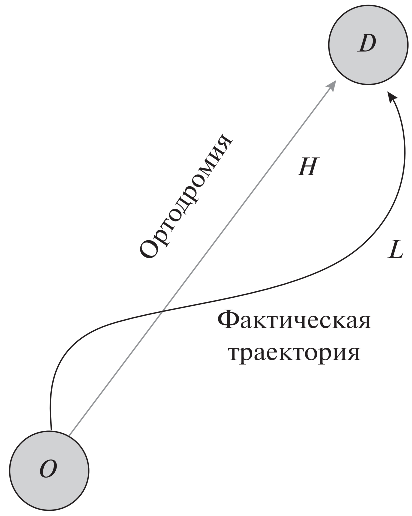


Рис. 8. Ортодромичность маршрута. O – пункт отправления, D – пункт назначения

Для любого ВС $f \in L$ расход топлива в пределах рассматриваемой области полета запишем следующим образом:

$$w_f^{\text{расход.топл}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i^f , \qquad (2.19)$$

где Δw_i^f – расход топлива ВС на i-м участке 4D-траектории ВС, n – количество элементарных участков, определяемых ЛТХ ВС и режимом полета.

Показатель "Расход топлива" определяется средним значением на рейс:

$$W_{\text{а.топл.эф}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_{f_j}^{\text{расход.топл}}. \qquad (2.20)$$

Для оценки структуры ВП расход топлива рассчитывается в пределах моделируемой области. Показатель отдельно может вычисляться только для вылетных или прилетных рейсов.

2.2.5. Ортодромичность маршрута $W_{\text{ортодр}}$. Показатель определяет горизонтальную неэффективность на маршруте и является одним из ключевых показателей Евроконтроля [23] и ИКАО [24] по оценке ключевых характеристик системы ОрВД.

Расчет горизонтальной неэффективности основан на сравнении протяженности маршрута и кратчайшего расстояния между начальной и конечной точками маршрута, либо его части. Кроме оценки ортодромичности рассматриваемой части маршрута, показатель предназначен также для оценки вклада части маршрута в эффективность всего маршрута. Ортодромичность маршрутов в составе КИМ ОрВД вычисляется с помощью расчетно-аналитического моделирования на основе планов полетов. Для расчета применяются планы полетов, которые подаются авиакомпаниями в систему планирования использования ВП, либо фактические данные по результатам полетов. Исследуется только полет в верхнем ВП, полет по маршрутам вылета, прибытия и захода на посадку остается за рамками показателя.

На рис. 8 схематично представлена ортодромия маршрута и фактическая траектория маршрута, которая является длиннее, чем ортодромия.

Показатель $W_{\text{ортодр}}$ рассчитывается для всего потока ВД для любой исследуемой области $j \in S_{\text{ВП}}$ и определяется в процентном отношении:

$$W_{\text{ортодр}} = \frac{\sum_f L_j^f - \sum_f H_j^f}{\sum_f H_j^f}\% = \left(\frac{\sum_f L_j^f}{\sum_f H_j^f} - 1\right)\%, \quad f \in L, \qquad (2.21)$$

где L_j^f – фактическое расстояние по маршруту полета рейса f в исследуемой области j, H_j^f – достигнутое расстояние по маршруту полета рейса f в исследуемой области j.

Достигнутое расстояние H_j^f определяется как проекция исследуемой части маршрута на ортодромию этого маршрута и характеризует "вклад" исследуемой части маршрута в общую протяженность.

2.2.6. Время руления ВС по поверхности аэродрома $W_{\text{врем.рул}}$. Время руления ВС по поверхности аэродрома характеризует эффективность выполнения операций при вылете и прилете на поверхности аэродрома, когда ВС при вылете выполняет руление от МС до исполнительного старта, а при прилете – от съезда с ВПП до МС [25].

Показатель рассчитывается в процессе имитационного моделирования управляемого движения ВС по поверхности аэродрома и включает в себя время на выполнение операций на поверхности аэродрома, таких, как буксировка, запуск двигателей, противообледенительная обработка и др. Также в этот показатель включены задержки на МС, перроне, при рулении из-за интенсивного трафика на аэродроме, время ожидания на предварительном старте из-за занятости ВПП.

Для любого ВС, выполняющего руление по аэродрому, время руления определяется как

$$w_f^{\text{руление}} = \begin{cases} t_{\text{ATOT}} - t_{\text{AOBT}}, & \forall f \in U, \\ t_{\text{AIBT}} - t_{\text{ALDT}}, & \forall g \in V, \end{cases} \tag{2.22}$$

где t_{ATOT} – фактическое время вылета (ATOT – actual take-off time), t_{AOBT} – фактическое время начала движения ВС от МС (AOBT – actual off-blocks time), t_{AIBT} – фактическое время занятия ВС МС (AIBT – actual in-blocks time), t_{ALDT} – фактическое время прилета (ALDT – actual landing time).

Показатель "Время руления" для всего потока рассчитывается как среднее значение на рейс:

$$W_{\text{врем.рул}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_{f_j}^{\text{руление}}. \tag{2.23}$$

Для сравнительной оценки двух или более вариантов инфраструктуры аэродрома используется среднее время руления. Однако могут также применяться и максимальные значения для выявления причин увеличения времени руления и места задержки. Для вылета и прилета время руления также может рассчитываться отдельно.

2.3. Модели расчета показателей эффективности для системы ОрВД $W_{\text{ОрВД}}$. Группа показателей, которая характеризует использование элементов структуры ВП, задается вектором:

$$W_{\text{ОрВД}} = (W_{\text{загр.уч.ВТ}}, W_{\text{загр.точек.ВП}}, W_{\text{эш}}, W_{\text{исп.ЗО}}, W_{\text{МС}})^{\text{T}}. \tag{2.24}$$

2.3.1. Показатель неравномерности загруженности участков ВТ $W_{\text{загр.уч.ВТ}}$. Загруженность участка ВТ определяется количеством ВС, которые входят на участок ВТ в интервал времени [26]. Как правило, интервал времени оценки загрузки равен одному календарному часу.

Показатель предназначен для выявления неравномерности распределения трафика через сеть ВТ, а также обнаружения наиболее загруженных участков ВТ. Интенсивность ВД на участках ВТ определяется с использованием расчетно-аналитического моделирования на основе плановых или фактических полетных данных. Каждый участок состоит из точки "входа" на участок и точки "выхода" в соответствии с направлением полета ВС.

Загрузка любого i-го участка ВТ $s_{i.\text{участок.ВТ}} \in S_{\text{ВП}}$ любым рейсом f в интервале $[t_{begin}, t_{end})$:

$$w_{f,s_{i\,\text{участок.ВТ}}}^{\text{загр.уч.ВТ}} = \begin{cases} 1, & s^f_{i\,\text{участок.ВТ}} \in [t_{begin}, t_{end}), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.25}$$

где $t^f_{i\,\text{участок.ВТ}}$ – время входа ВС на участок $s_{i\,\text{участок.ВТ}}$ (время пролета первой точки участка), t_{begin} – начало интервала времени оценки, t_{end} – конец интервала времени оценки.

Показатель загруженности i-го участка ВТ на интервале времени оценки для всего потока ВС L определяется:

$$W^{i}_{\text{загр.уч.ВТ}} = \sum_{j=1}^{m} w^{\text{загр.уч.ВТ}}_{f_j, s_{i\,\text{участки.ВТ}}}. \tag{2.26}$$

Загруженность всех участков ВТ задается вектором:

$$(W^{1}_{\text{загр.уч.ВТ}}, \ldots, W^{i}_{\text{загр.уч.ВТ}}, \ldots, W^{n}_{\text{загр.уч.ВТ}})^{\text{T}},$$

где n – количество участков ВТ в структуре ВП.

Показатель неравномерности загруженности участков ВТ рассчитывается как среднеквадратичное отклонение:

$$W_{\text{загр.уч.ВТ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (W^{i}_{\text{загр.уч.ВТ}} - M(W_{\text{загр.уч.ВТ}}))^2}{n}}, \tag{2.27}$$

где

$$M(W_{\text{загр.уч.ВТ}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} W^{i}_{\text{загр.уч.ВТ}}}{n}. \tag{2.28}$$

Для анализа неравномерности на основе полученных данных о загруженности рассчитываются также другие статистические характеристики, такие, как медиана, максимальное значение, минимальное значение, первый и третий квартили и др. Анализ производится с использованием построенных диаграмм по рассчитанным характеристикам. Интервал времени оценки $[t_{begin}, t_{end})$ может задаваться в виде календарного часа, а также целых суток.

2.3.2. Показатель неравномерности загруженности точек ВП $W_{\text{загр.точек.ВП}}$. Загруженность точки ВП определяется количеством ВС, которые пролетают точку в интервал времени оценки.

Как и в ситуации с участками ВТ, показатель оценивает неравномерность распределения потока ВС. Показатель позволяет выявить точки повышенной сложности, в которых пересекаются интенсивные потоки ВД, что в свою очередь может приводить к увеличению количества ПКС и повышенной нагрузке диспетчера.

Загрузка любой i-й точки ВТ $s_{i\,\text{точка.ВП}} \in S_{\text{ВП}}$ любым рейсом f в интервале $[t_{begin}, t_{end})$ определяется как

$$w^{\text{загр.точки.ВП}}_{f, s_{i\,\text{точка.ВП}}} = \begin{cases} 1, & t^{f}_{s_{i\,\text{точка.ВП}}} \in [t_{begin}, t_{end}), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.29}$$

где $t^{f}_{i\,\text{точка.ВП}}$ – время пролета точки $s_{i\,\text{точка.ВП}}$, t_{begin} – начало интервала времени оценки, t_{end} – конец интервала времени оценки.

Показатель загруженности i-й точки ВП на интервале времени оценки для всего потока ВС L определяется:

$$W^{i}_{\text{загр.точки.ВП}} = \sum_{j=1}^{m} w^{\text{загр.точки.ВП}}_{f_j, s_{i\,\text{точка.ВП}}}. \tag{2.30}$$

Загруженность по всем точкам ВП задается в виде вектора:

$$(W^{1}_{\text{загр.точки.ВП}}, \ldots, W^{i}_{\text{загр.точки.ВП}}, \ldots, W^{n}_{\text{загр.точки.ВП}})^{\text{T}},$$

где n – количество точек в структуре ВП.

Показатель неравномерности загруженности точек ВП рассчитывается как среднеквадратичное отклонение:

$$W_{\text{загр.точек.ВП}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(W^{i}_{\text{загр.точки.ВП}} - M(W_{\text{загр.точки.ВП}}))^2}{n}}, \tag{2.31}$$

где

$$M(W_{\text{загр.точки.ВП}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} W^{i}_{\text{загр.точки.ВП}}}{n}. \tag{2.32}$$

Анализ загруженности точек ВП выполняется по результатам расчета статистических характеристик и построения на их основе диаграмм для визуального анализа в КИМ ОрВД.

2.3.3. Показатель использования ВС неэффективных эшелонов $W_{\text{эш}}$. Показатель позволяет оценить, какие эшелоны полета использовали ВС в исследуемой структуре ВП.

Оценка производится с помощью расчетно-аналитического моделирования на основе планов полетов. Для фактических плановых данных показатель рассчитывается по выполненным полетам и фиксирует реальное использование эшелонов. Если исследуется новая структура ВП, то показатель позволяет выявить потенциальную эффективность структуры в части доступности экономичных эшелонов. Каждый участок ВТ состоит из одного или нескольких диапазонов доступных для полета эшелонов с вертикальным разделением, равным 300 м (~1000 футов).

Использование любого i-го эшелона полета h_i любым рейсом $f \in L$ определяется:

$$w_f^{i\text{эш}} = \begin{cases} 1, & alt_k^f = h_i, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.33}$$

где alt_k^f – высота (эшелон) полета ВС f на k-м участке маршрута.

Показатель использования ВС для i-го эшелона полета для всего потока ВД

$$W^{i}_{\text{эш}} = \sum_{j=1}^{m} w^{i\,\text{эш}}_{f_j}. \tag{2.34}$$

Количество использований эшелонов при моделировании задаются вектором:

$$(W^{1}_{\text{эш}}, \ldots, W^{i}_{\text{эш}}, \ldots, W^{n}_{\text{эш}})^{\text{T}},$$

где n – количество использованных эшелонов, $W^{i}_{\text{эш}}$ – количество использований i-го эшелона.

Показатель использования ВС неэффективных эшелонов на рейс определяется:

$$W_{\text{эш}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \max(h_{\text{опт}} - h_i, 0) W^{i}_{\text{эш}}}{\sum_{i=1}^{n} W^{i}_{\text{эш}}}, \tag{2.35}$$

где $h_{\text{опт}}$ – оптимальный эшелон полета для исследуемого потока ВС.

Оптимальный эшелон и исследуемый поток ВС может делиться по типам ВС, а также дальности полета ВС [27].

2.3.4. Использование ЗО $W_{\text{исп.ЗО}}$. Показатель позволяет определить распределение потока ВС по ЗО в процессе моделирования.

ЗО назначаются имитационной моделью диспетчерского управления при формировании бесконфликтной очереди прибывающих и вылетающих ВС. Применение ЗО, как правило, имеет самый низкий приоритет при назначении меры регулирования для создания безопасных интервалов между ВС. Задержки в ЗО характеризуют гибкость структуры ВП при создании бесконфликтной очереди прибывающих ВС.

Показатель использования ЗО определяется как

$$W_{\text{исп.ЗО}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_{f_j}^{\text{исп.ЗО}}, \tag{2.36}$$

где $w_{f_j}^{\text{исп.ЗО}}$ – количество кругов в ЗО j-м ВС, $f \in L$.

В процессе исследований может также анализироваться загруженность отдельных ЗО, а также загруженность потоком прибывающих ВС на определенный аэродром.

2.3.5. Показатель неэффективности использования МС $W_{\text{МС}}$. Показатель характеризует доступность МС на аэродроме для прибывающих и вылетающих ВС.

МС назначаются ВС в зависимости от предпочтений авиакомпаний, правил обслуживания оператора аэродрома, загрузки аэродрома и технологии работы наземных служб по управлению движением на поверхности аэродрома. Показатель позволяет оценить фактическое или запланированное использование МС на моделируемом аэродроме. Оценка производится по результатам имитационного моделирования управляемого движения ВС по поверхности аэродрома.

Пусть k_i – количество занятых МС на аэродроме в i-й момент времени, $k_{\text{опт}}$ – оптимальное значение количества занятых МС, которое позволяет обслуживать ВС на пределе ПА с учетом необходимых для этого ресурсов. Тогда неэффективность применения МС

$$W_{\text{МС}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - k_{\text{опт}})^2}{n}}, \tag{2.37}$$

где n – количество интервалов времени.

В случае анализа данных по планированию распределения ВС по МС показатель позволит определить как превышение доступных МС, так и низкую загруженность аэродрома в части ресурсов по стоянкам. При анализе фактических данных показатель необходимо рассматривать вместе с задержками и временем руления ВС по поверхности аэродрома.

2.4. Модели расчета показателей ПВП ($W_{\text{ПВП}}$). 2.4.1. Показатель равномерности временной загруженности диспетчера $W_{\text{врем.загр.дисп}}$. Временная загруженность диспетчера – время, требуемое диспетчеру для выполнения всех операций по контролю и УВД в своем секторе.

Показатель может определяться как по результатам расчетно-аналитического моделирования предпочтительно для "грубой" оценки верхнего ВП, так и по результатам имитационного моделирования с учетом работы модели диспетчерского управления [28].

Временная загруженность рассчитывается как сумма относительных временных затрат P_i на выполнение операций контроля и УВД диспетчером в единицу времени. Затраты P определяются вектором:

$$P = (P_1, \ldots, P_8),$$

где P_1 – затраты на принятие ВС на сопровождение в сектор, P_2 – затраты на сопровождение ВС при смене эшелона, P_3 – затраты на обнаружение и разрешение ПКС, P_4 – затраты на передачу ВС в другой сектор, P_5 – затраты на назначение маршрута прибытия, P_6 – затраты на команду по спрямлению ВС "Direct To", P_7 – затраты на периодический анализ воздушной обстановки. Затрата на выполнение k-й операции на интервале оценки $[t_{begin}, t_{end})$

$$P_k = \begin{cases} \tau_k, & t_{p_k} \in [t_{begin}, t_{end}), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.38}$$

где τ_k – заданная исследователем длительность выполнения операции. Суммарные относительные затраты по i-й группе затрат

$$P_i = \frac{1}{t_{\text{инт}}}\sum_{k} p_k^i, \tag{2.39}$$

где $t_{\text{инт}} = t_{end} - t_{begin}$ – продолжительность интервала оценки.

Временная загруженность j-го сектора на интервале оценки $[t_{begin}, t_{end})$

$$W^{j}_{\text{врем.загр.дисп}} = \sum_{i=1}^{8} P^{j}_{i}. \tag{2.40}$$

Тогда показатель равномерности временной загруженности диспетчера по всем секторам диспетчерского управления в исследуемом варианте структуры ВП определяется следующим образом:

$$W_{\text{врем.загр.дисп}} = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} (W^{j}_{\text{врем.загр.дисп}} - M(W_{\text{врем.загр.дисп}}))^2}{n}}, \tag{2.41}$$

где n — количеств интервалов оценки по всем секторам.

2.4.2. Показатель загрузки секторов без превышения НПС сектора $W_{\text{сек}}$. Показатель загрузки секторов задает количество ВС, которые входят в сектор диспетчерского управления в единицу времени. Загрузка секторов может рассчитываться как на этапе планирования с использованием расчетно-аналитических моделей для анализа баланса потребности в выполнении полетов и ПВП, так и по результатам имитационного моделирования для анализа фактической (модельной) интенсивности ВД.

Загрузка любого i-го сектора $s_{i\,\text{сек}} \in S_{\text{ВП}}$ любым рейсом f в интервале $[t_{begin}, t_{end})$ определяется как

$$w^{\text{сек}}_{f, s_{i\,\text{сек}}} = \begin{cases} 1, & t^{f}_{s_{i\,\text{сек}}} [t_{begin}, t_{end}), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.42}$$

где $t^{f}_{i\,\text{сек}}$ — время взлета рейса f в сектор $s_{i\,\text{сек}}$, t_{begin} — начало интервала времени оценки, t_{end} — конец интервала времени оценки.

Показатель загруженности i-го сектора на интервале времени оценки

$$W^{i}_{\text{сек}} = \sum_{j=1}^{m} w^{\text{сек}}_{f_j, s_{i\,\text{сек}}}. \tag{2.43}$$

Загруженность по секторам на интервале времени оценки задается в виде вектора:

$$(W^{1}_{\text{сек}}, \ldots, W^{i}_{\text{сек}}, \ldots, W^{n}_{\text{сек}})^{\text{T}},$$

где n — количество секторов в структуре ВП.

Показатель загрузки секторов без превышения НПС рассчитывается как

$$W_{\text{сек}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (W^{i}_{\text{НПС}} - W^{i}_{\text{сек}})}, \tag{2.44}$$

где $W^{i}_{\text{НПС}}$ — НПС i-го сектора. Норматив рассчитывается, согласно [29].

Загрузка каждого сектора может рассчитываться как среднее значение по всему сектору, так и по сектор-часам.

2.5. Модели расчета показателей ПА $W_{\text{ПА}}$. Группа показателей, которая характеризующая ПА, задается вектором:

$$W_{\text{ПА}} = (W_{\text{ВПО}}, W_{\text{пересеч}})^{\text{T}}. \tag{2.45}$$

2.5.1. Количество ВПО $W_{\text{ВПО}}$. ПА определяется количеством ВПО, которые способен обслужить аэродром в единицу времени. За единицу времени принимается 1 ч.

Показатель является базовым как для определения эффективности использования инфраструктуры аэродрома, так и для эффективности использования ВП, преимущественно в диспетчерской зоне района аэродрома. Существует методика расчета технической возможности аэродрома [30], которая основана на состоянии инфраструктуры аэродрома (состояние покрытия ВПП, расположение и др.), средних значений по интенсивности ВД, метеоусловиях. Однако

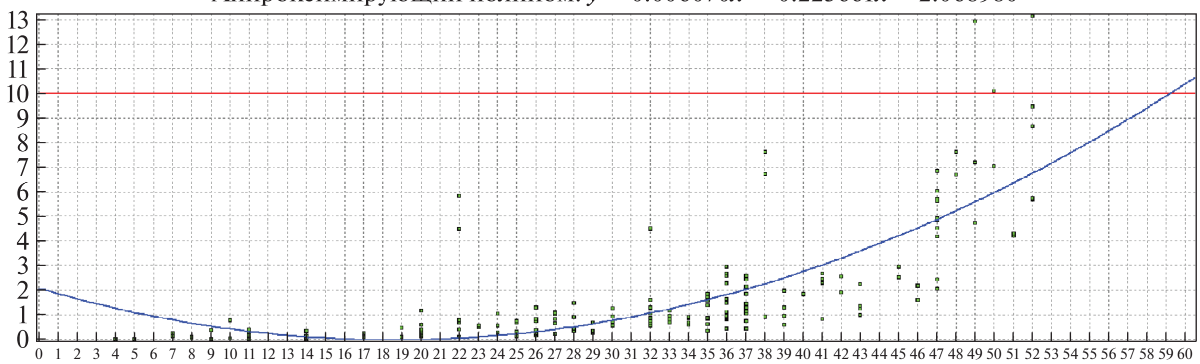


Рис. 9. Количество ВПО

данная методика не позволяет учесть ограничения, которые накладывает структура ВП, загруженность диспетчера, а также динамику развития ситуации на поверхности аэродрома, например скопление очереди ВС на предварительном старте. В составе КИМ ОрВД реализована методика расчета ПА (количества ВПО) на основе допустимого уровня задержек как в воздухе, так и на земле. Оценка количества ВПО производится с использованием имитационного моделирования полетов ВС в диспетчерской зоне района аэродрома и движения ВС по поверхности аэродрома.

Количество ВПО в i-й интервал времени

$$W^{i}_{\text{ВПО}} = \sum_{j} w^{i}_{j\,\text{ВПО}}, \tag{2.46}$$

где $w^{i}_{j\,\text{ВПО}}$ – вылет или прилет j-го ВС в i-й интервал времени.

Полученные часовые значения количества ВПО проходят статистическую обработку. На рис. 9 представлен пример проведения статистической обработки путем построения аппроксимирующего полинома, где по оси абсцисс – интенсивности часовых значений ВПО, по оси ординат – задержки. Точками отмечены часовые реализации интенсивностей на аэродроме и соответствующие им задержки. Полином строится на основе значений часовых интенсивностей на аэродроме, полученных по результатам имитационного моделирования.

Максимальное количество ВПО определяется исходя из пересечения кривой полинома и допустимого уровня задержки, задаваемого исследователем, который обозначается горизонтальной прямой (рис. 9). Более подробное описание методики расчета количества ВПО представлено в [31].

2.5.2. Количество аэродромных операций без пересечения ВПП $W_{\text{пересеч}}$. ПА определяется не только количеством ВПО, но и количеством операций по пересечению ВПП при рулении ВС по площади маневрирования.

Минимизация операций по пересечению ВПП позволяет снизить задержки на вылете и прилете за счет создания дополнительных интервалов времени для выполнения ВПО. Показатель определяется по результатам имитационного моделирования управляемого движения ВС по поверхности аэродрома.

Количество аэродромных операций без пересечения ВПП в i-й интервал времени

$$W_{\text{пересеч}} = W^{\text{const}}_{\text{пересеч}} - \sum_{j} w^{i}_{j\,\text{пересеч}}, \tag{2.47}$$

где $W^{\text{const}}_{\text{пересеч}}$ – заданный уровень максимального допустимого количества пересечения ВПП в интервал времени, $w^{i}_{j\,\text{пересеч}}$ – пересечение ВПП j-м ВС в i-й интервал времени.

2.6. Модели расчета показателей влияния на окружающую среду $W_{\text{ср}}$. Запишем группу показателей, которая характеризует влияние на окружающую среду:

$$W_{\text{ср}} = (W_{\text{шум}}, W_{CO_2})^{\text{T}}. \tag{2.48}$$

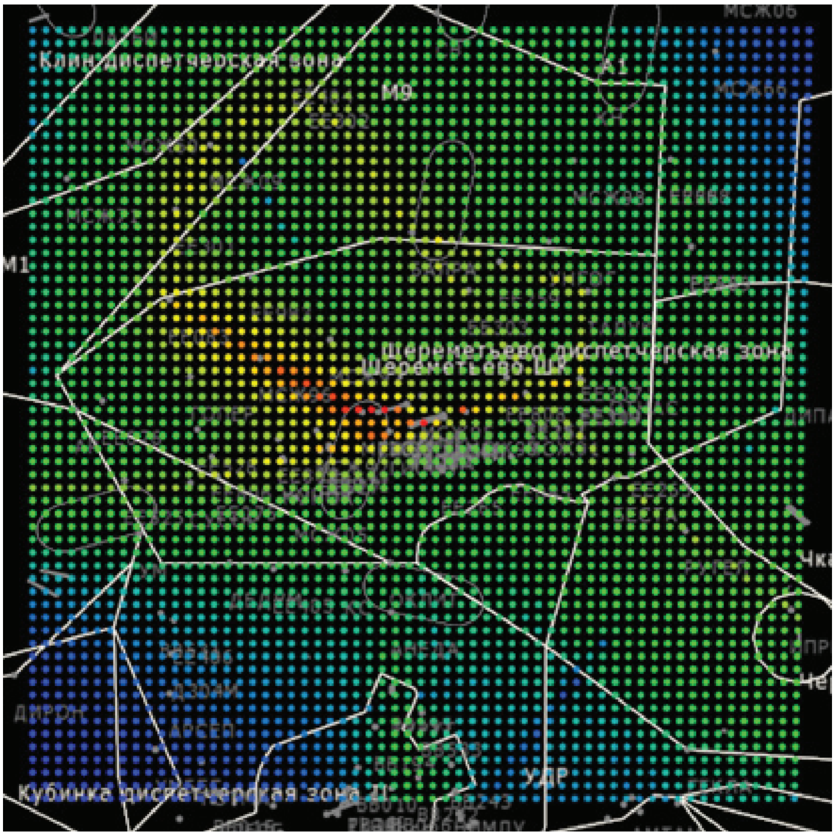


Рис. 10. Визуализация шумового воздействия

2.6.1. Ш у м о в ы е в о з д е й с т в и я $W_{\text{шум}}$. Расчет шумовых воздействий выполняется в районе аэродрома на основе индексов шума в точках земной поверхности в дневное, вечернее и ночное время.

Оценка уровня шума в последнее время приобретает актуальность ввиду близкой застройки жилых кварталов к аэродромам и ростом интенсивности ВД. Расчет производится по результатам имитационного моделирования управляемых полетов ВС в районе аэродрома или аэроузла и реализуется в соответствии с методикой [10]. Для оценки строятся контуры шума (значения индекса шума) вокруг аэродрома. При этом должен учитываться не только факт пролета ВС, но и его характеристики, такие, как тип ВС, режим мощности двигателей, расположение двигателей и др.

Эквивалентный взвешенный уровень звука в точке определяется как

$$W_{\text{шум}} = 10\log\left(\frac{1}{T_0}\sum_{i=1}^{N} 10^{\frac{L_{E,i}+\Delta_i}{10}}\right), \tag{2.49}$$

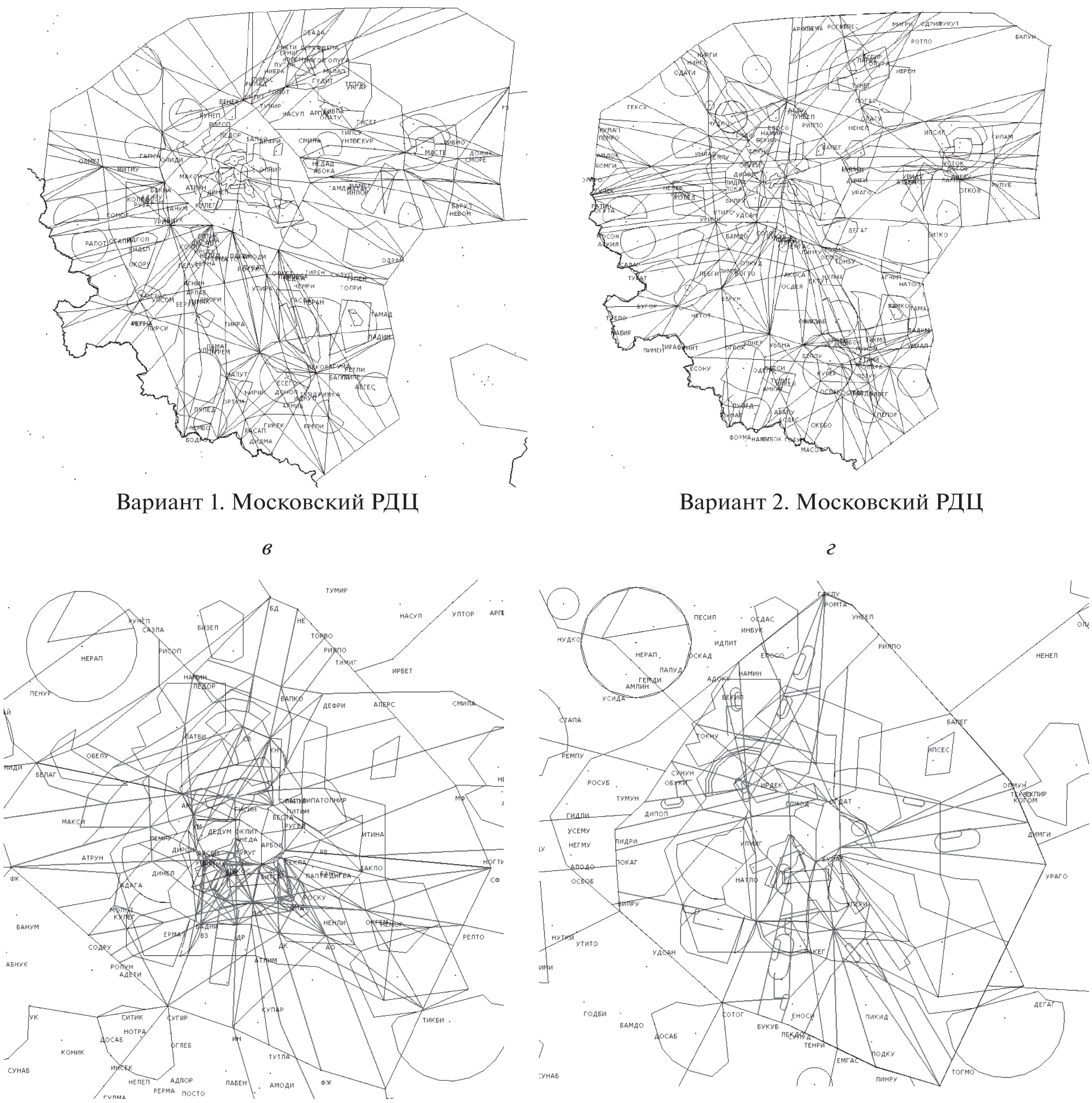
где T_0 – период, для которого рассчитывается контур шума, $L_{E,i}$ – уровень звука единичного воздействия, N – количество событий, Δ_i – весовой коэффициент i-го события (в соответствии со временем суток).

Уровень шума единичного воздействия

$$L_{E,i} = L_{E,\infty}(P,d) + \Delta_V + \Delta_I(\phi) - \Lambda(\beta,l) + \Delta_F, \tag{2.50}$$

где $L_{E,\infty}(P,d)$ – базовые уровни шума, на основе данных по характеристикам ВС, где P – режим мощности, d – кратчайшее расстояние от точки наблюдения до участка траектории полета, $\Delta_V, \Delta_I(\phi), \Lambda(\beta,l), \Delta_F$ – корректировки значений.

На рис. 10 представлена тепловая карта с рассчитанными значениями уровней звука в районе аэродрома Шереметьево.



а — Вариант 1. Московский РДЦ

б — Вариант 2. Московский РДЦ

в — Вариант 1. Московский МУДР

г — Вариант 2. Московский МУДР

Рис. 11. Варианты структуры ВП

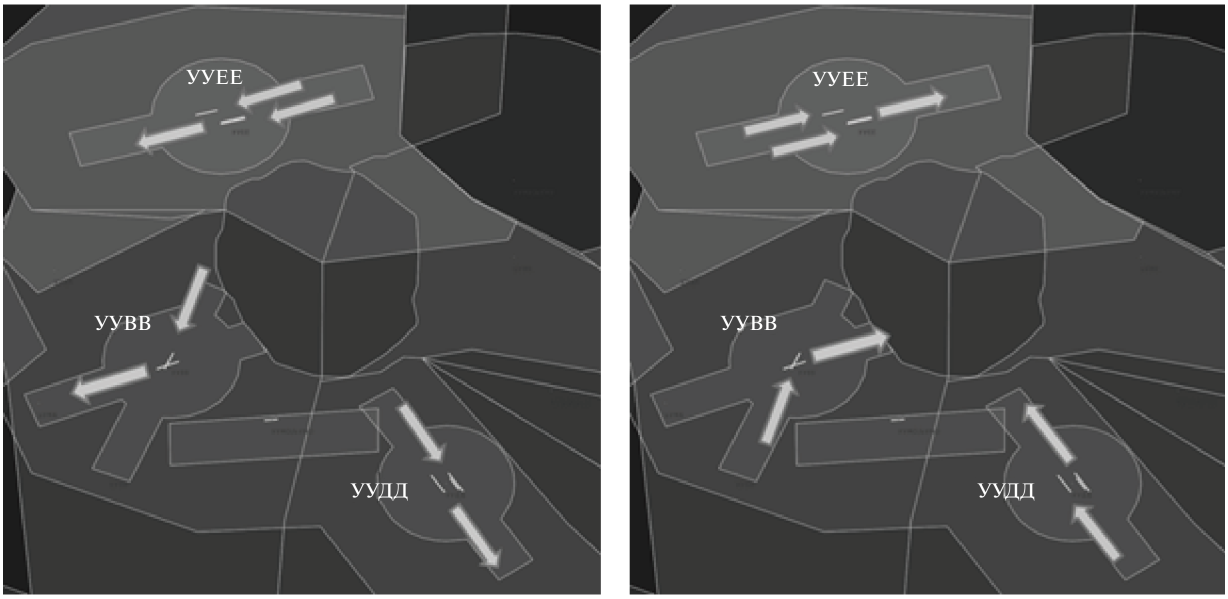
2.6.2. В ы б р о с ы   в р е д н ы х   в е щ е с т в W_{CO_2}. Показатель определяет массу выбросов вредных веществ CO_2 в окружающую среду. В перечень нормируемых ИКАО загрязняющих атмосферу веществ входят: окись углерода, несгоревшие углеводороды, оксиды азота, дым, а также парниковые газы: метан, двуокись углерода и др. Однако наибольший “вклад” в загрязнение окружающей среды вносит двуокись углерода (CO_2). Таким образом далее будет рассматриваться расчет именно этого газа.

Расчет производится по результатам имитационного моделирования на основе трековой информации по результатам выполнения полетов ВС, согласно [32]. Масса выбросов CO_2 i-го ВС рассчитывается как

$$M^i_{CO_2} = 3.12 M^i_{т}, \tag{2.51}$$

где $M^i_{т}$ – масса израсходованного топлива i-м ВС.

а *б*



Сценарий 1 Сценарий 2

Рис. 12. Сценарии моделирования

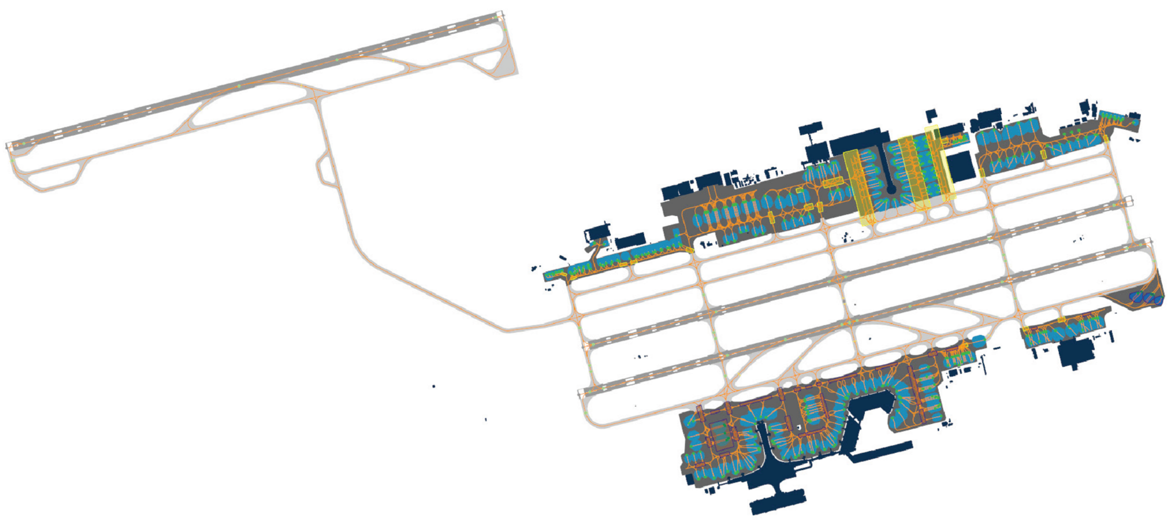


Рис. 13. Аэродром Шереметьево

Показатель по всем ВС определяется следующим образом:

$$W_{CO_2} = \sum_i M^i_{CO_2}. \tag{2.52}$$

3. Сравнительный анализ вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродромов на примере решения исследовательской задачи методами компьютерного математического моделирования. 3.1. Описание структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. В качестве примера приводится сравнительная оценка трех вариантов структуры ВП Московской зоны единой системы организации воздушного движения (ЕС ОрВД), включая Московский районный диспетчерский центр (РДЦ) и Московский узловой диспетчерский район (МУДР). Вариант 1 и 2 – перспективные структуры ВП Московской зоны, разработанные в целях повышения

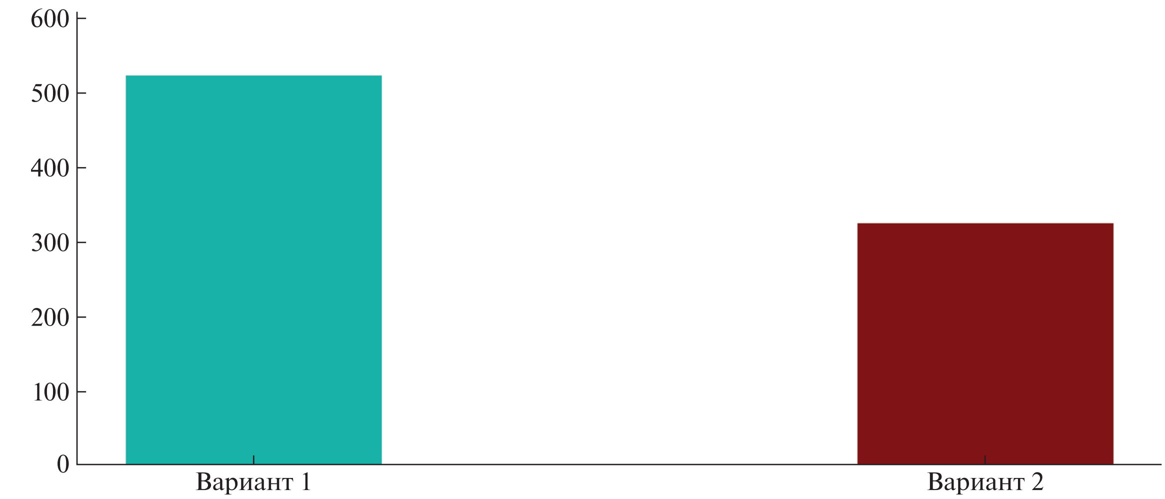


Рис. 14. Количество ПКС: вариант 1 — 522, вариант 2 — 323

пропускной способности и эффективности использования ВП и инфраструктуры аэродрома. Вариант 3 – действующая структура ВП Московской зоны ЕС ОрВД, рассматривается в качестве базового варианта. Далее приводятся результаты исследований по расчету перспективных вариантов, полученные на КИМ ОрВД. На рис. 11 изображены два варианта перспективной структуры Московской зоны ЕС ОрВД:

На рис. 11, *а* и *б* показаны два варианта структуры верхнего ВП в зоне обслуживания Московского РДЦ, включая ВТ и точки ВП, границы секторов УВД. На рис. 11, *в* и *г* рассмотрены два варианта структуры МУДР, который состоит из маршрутов вылета и прибытия на три основных аэродрома Московского аэроузла: Шереметьево (код аэропорта ИКАО – УУЕЕ), Домодедово (код аэропорта ИКАО – УУДД) и Внуково (код аэропорта ИКАО – УУВВ), границ секторов подхода, круга, а также границ диспетчерских зон районов аэродрома. На рис. 12 стрелками изображены направления вылета и прилета для двух вариантов структуры ВП в зависимости от направления ветра для трех аэродромов: Шереметьево (УУЕЕ), Внуково (УУВВ), Домодедово (УУДД). На рис. 13 для примера представлена инфраструктура аэродрома Шереметьево с третьей ВПП.

3.2. Потоки ВД. Для проведения исследований двух вариантов структуры ВП был выбран суточный фактический 24-часовой поток ВД с наибольшей интенсивностью ВД за летний период, когда наблюдается увеличение трафика в южном направлении из-за сезона отпусков.

3.3. Результаты исследований. Как было сказано в разд. 1, группа показателей безопасности полетов определяется несколькими показателями. В подразд. 3.3. описаны примеры расчета показателей в рамках исследований по сравнительной оценке двух вариантов структур ВП.

3.3.1. Количество ПКС $W_{\text{ПКС}}$. На рис. 14 изображена диаграмма с количеством ПКС в двух вариантах структуры ВП. В первом столбце приведено общее количество ПКС, во втором и третьем – ПКС в зоне обслуживания районного диспетчерского центра (РДЦ) и аэродромного диспетчерского центра (АДЦ) соответственно. Как видно из диаграммы, в варианте 2 количество ПКС меньше как в РДЦ, так и в АДЦ.

На рис. 15 представлено распределение ПКС по секторам в двух вариантах структуры ВП.

Вариант 1 отличается большим количеством ПКС. В варианте 2 структуры ВП наблюдается значительное число ПКС в меньшем количестве секторов.

3.3.2. Задержки $W_{\text{а.зад}}$. На рис. 16 введен график с распределением суммарных задержек в двух вариантах структуры ВП в течение суток. По оси абсцисс приведены часовые интервалы, по оси ординат – суммарные задержки по прилету и вылету (в минутах).

Как видно из графика, задержки в варианте 1 значительно превышают задержки в варианте 2 в каждом часе.

На рис. 17 рассмотренно распределение средних значений задержек (в минутах) на основных аэродромах МУДР.

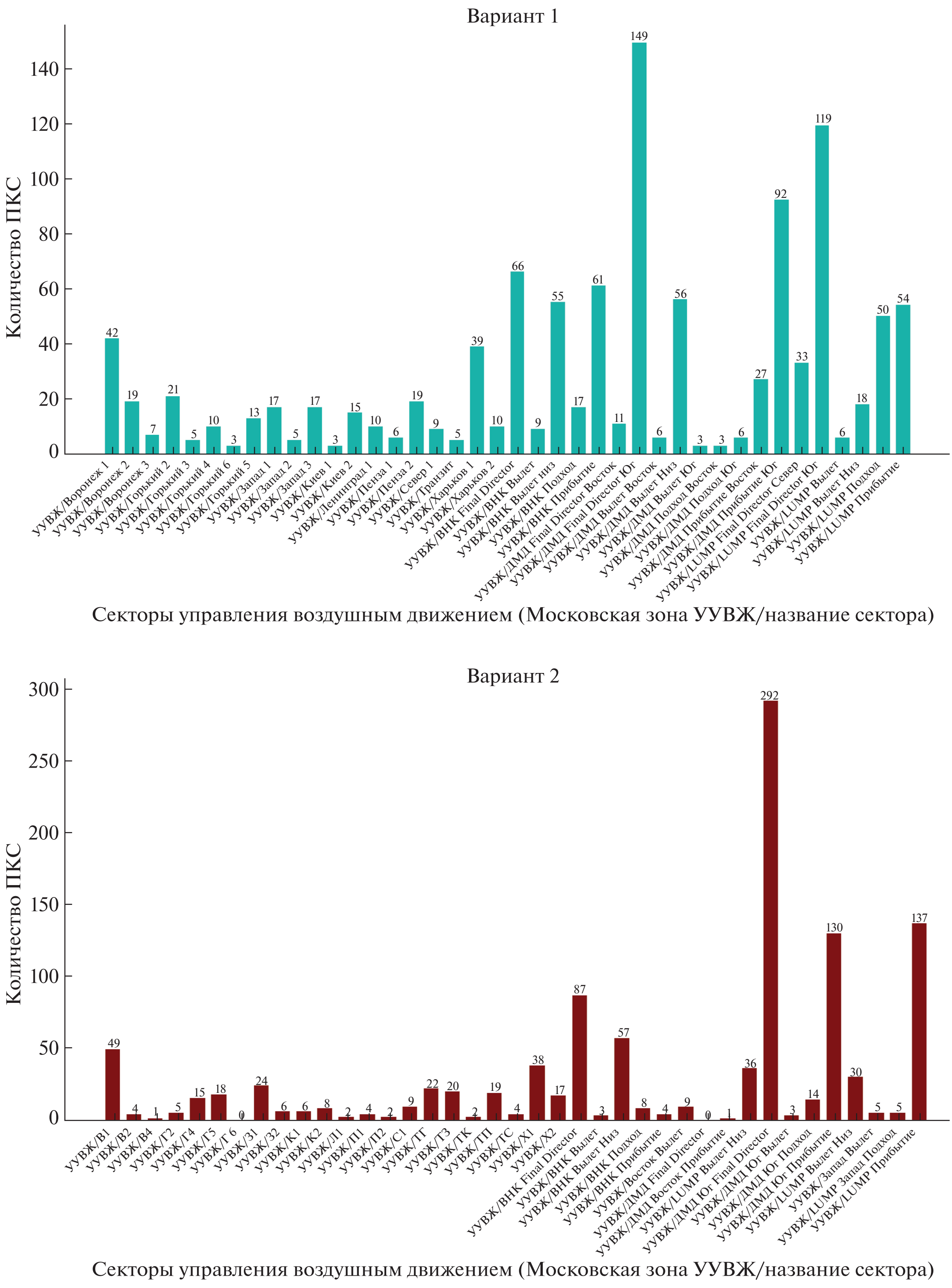


Рис. 15. Распределение ПКС по секторам УВД Московской зоны ЕС ОрВД (УУВЖ)

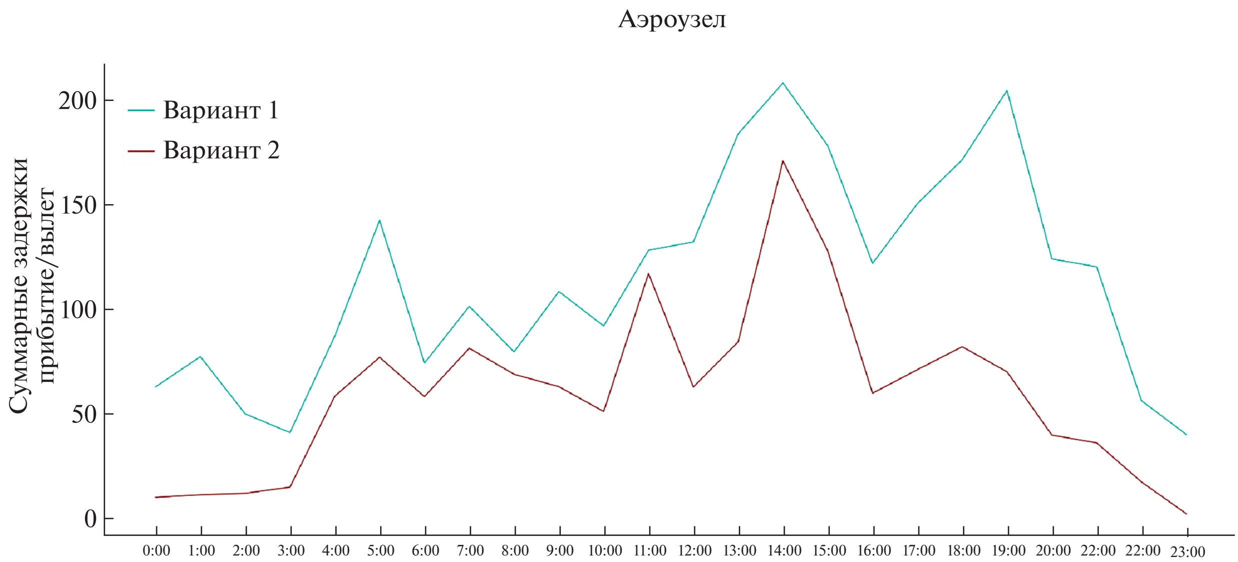


Рис. 16. Суммарные задержки

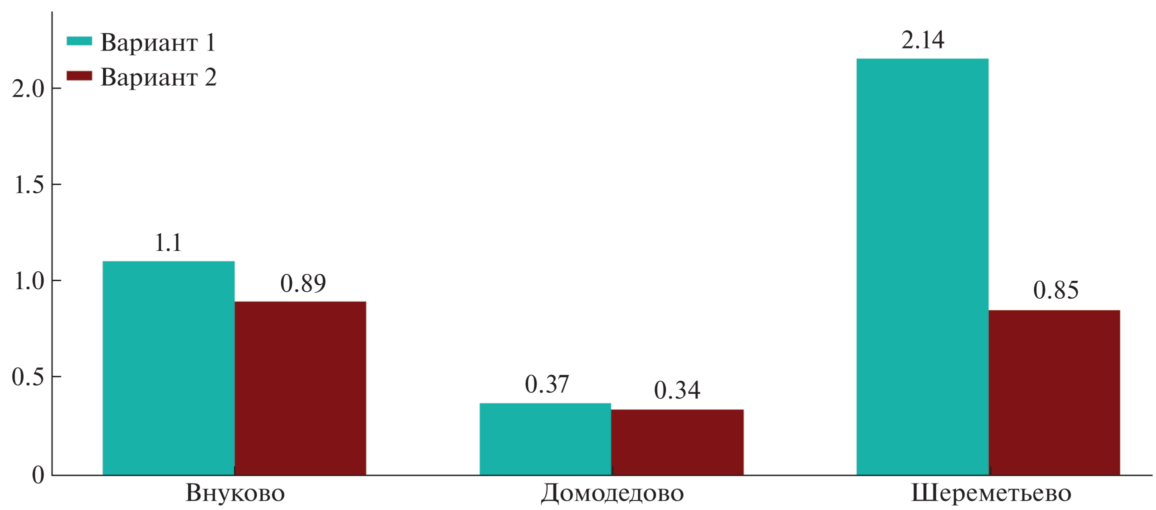


Рис. 17. Распределение задержек по аэродромам

Задержки на аэродроме Шереметьево в варианте 1 превышают задержки в варианте 2. Увеличение задержек в варианте 1 связано с обеспечением более гибких мер при формировании очереди на прилет и вылет. Моделирование движения ВС по поверхности аэродрома Шереметьево для варианта 2 не увеличивает задержки.

3.3.3. Ортодромичность маршрутов $W_{\text{ортодр}}$. Одним из показателей, характеризующих эффективность для пользователей ВП, является ортодромичность маршрутов. На рис. 18 представлена диаграмма с результатами расчета показателя для двух вариантов структуры ВП отдельно для вылетающих и прилетающих на основные аэродромы МУДР ВС.

Маршрутная часть полета в верхнем ВП в варианте 2 является менее эффективной по протяженности, чем в варианте 1.

3.3.4. Время руления ВС по поверхности аэродрома $W_{\text{врем.рул}}$. На рис. 19 приведен показатель “Время руления ВС по поверхности аэродрома”. На рис. 19, *а* и *б* — время руления на вылете для двух вариантов структуры ВП, на рис. 19, *в* и *г* — время руления на прилете для этих же вариантов. По оси абсцисс — модельное время, по оси ординат — время руления.

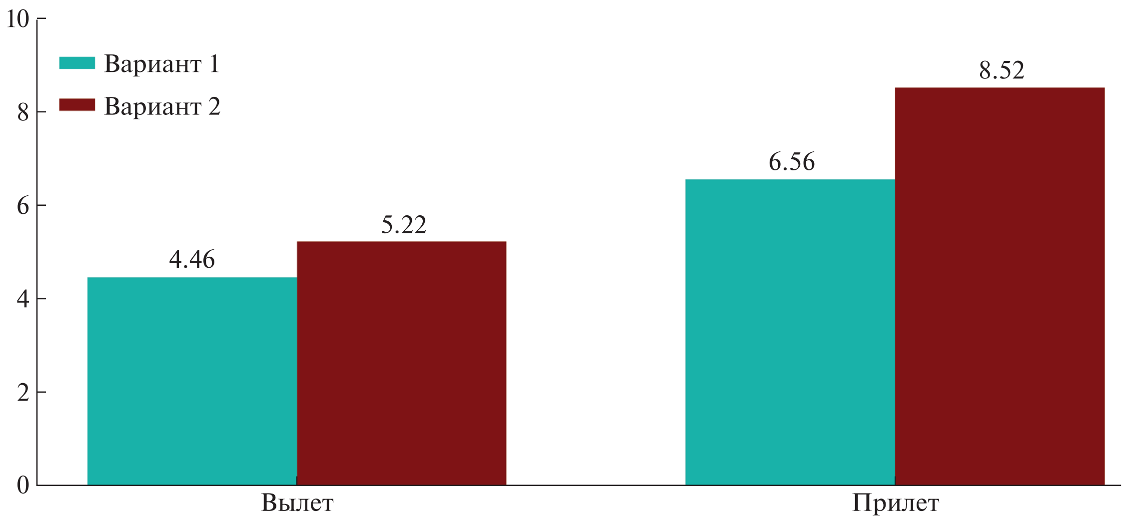


Рис. 18. Ортодромичность маршрутов (в процентах)

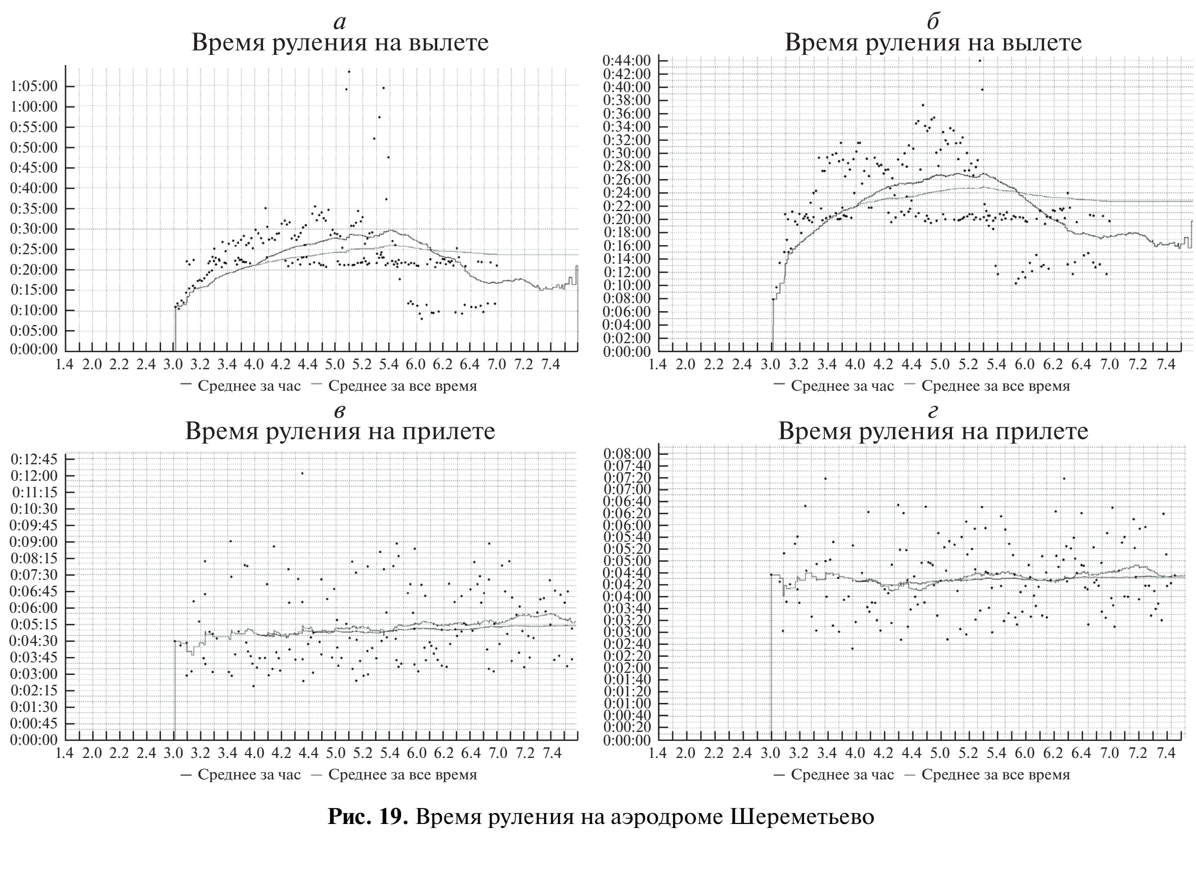
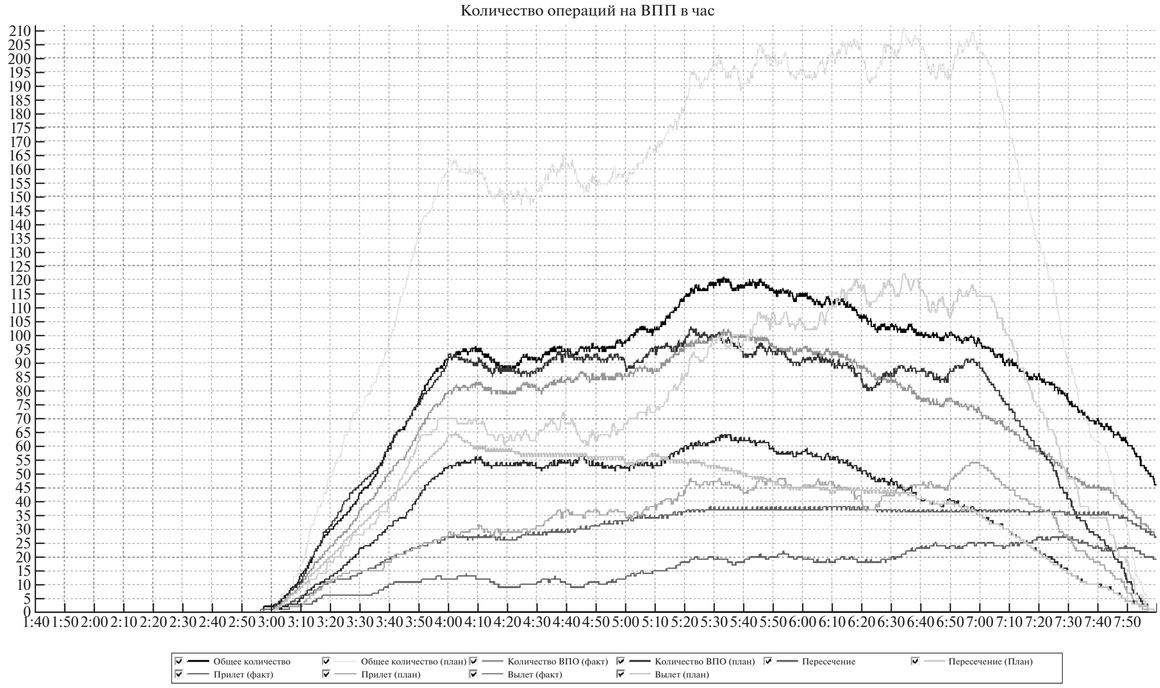


Рис. 19. Время руления на аэродроме Шереметьево

Для двух вариантов время руления на вылете составляет в среднем около 24 мин, однако в варианте 1 в пиковые часы время руления достигает 30 мин. Время руления на прилете составляет порядка 5 мин для двух вариантов.

3.3.5. Количество ВПО на поверхности аэродрома $W_{\text{ВПО}}$. На рис. 20 изображены диаграммы с количеством ВПО на аэродроме Шереметьево. Черным цветом на графиках изображено количество вылетов и прилетов за час, по оси абсцисс – “скользящий” час. Как видно из рисунка, в варианте 1 в пиковые часы интенсивность составляет 120 ВПО в час, в варианте 2 – только 115 ВПО в час.

а



б

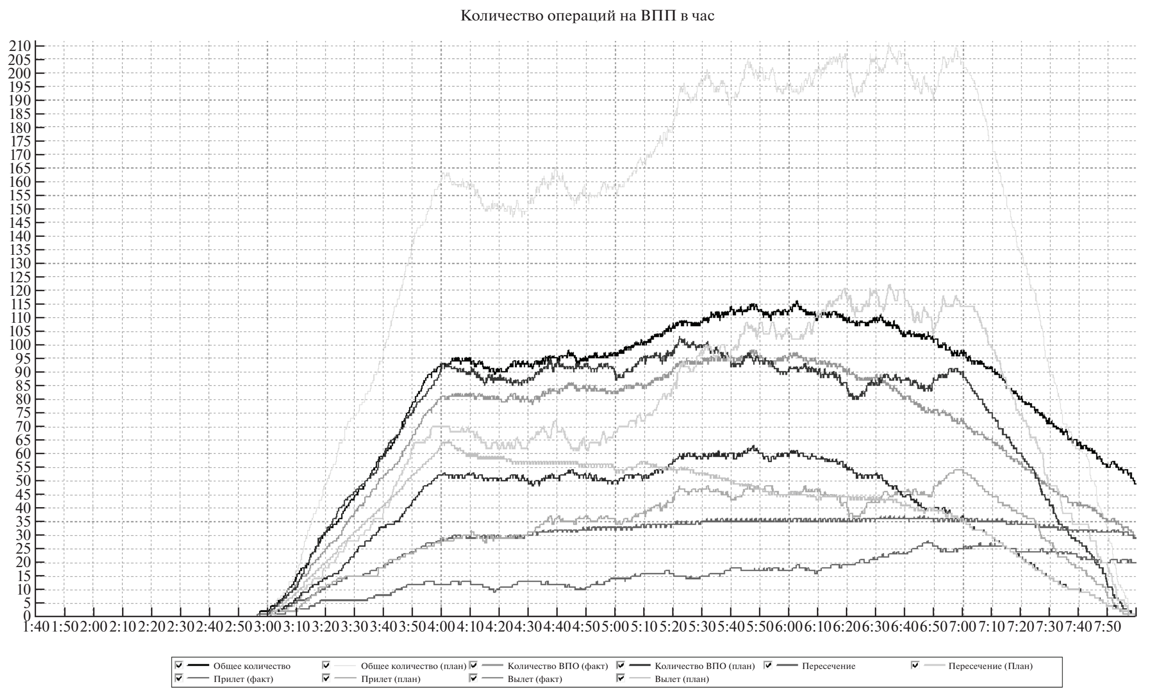


Рис. 20. Количество ВПО

3.4. Выводы по результатам исследований. В примере проводилось сравнение трех вариантов структуры ВП с учетом моделирования движения ВС по поверхности аэродрома Шереметьево. В рамках группы по безопасности $W_{б}$ был произведен расчет и анализ показателя “Потенциальные конфликтные ситуации” $W_{ПКС}$. По группе для пользователей ВП $W_{а}$ были проанализированы следующие показатели: “Ортодромичность маршрута” ($W_{ортодр}$), “Задержки” ($W_{а.зад}$) и “Время руления ВС по поверхности аэродрома” ($W_{врем.рул}$). По группе ПВП $W_{ПВП}$

Таблица. Результаты исследований

Группа показателей	Показатель	Вариант		
		1	2	3
Безопасность ($W_б$)	ПКС ($W_{ПКС}$)	522	323	600
Эффективность для пользователей ВП ($W_а$)	Ортодромичность маршрута ($W_{ортодр}$), %	7	8.5	9
	Задержки ВС ($W_{а.зад}$), мин	Внуково – 1.1 Домодедово – 0.37 Шереметьево – 2.14	Внуково – 0.89 Домодедово – 0.34 Шереметьево – 0.85	Внуково – 2 Домодедово – 3.5 Шереметьево – 5
	Время руления ВС по поверхности аэродрома Шереметьево ($W_{врем.рул}$), мин	30	24	35
ПВП ($W_{ПВП}$)	Равномерность временной загруженности диспетчера ($W_{врем.загр.дисп}$)	0.05	0.09	0.03
	Загрузка секторов без превышения НПС сектора ($W_{сек}$), сектор/час на каждое ВС	0.31	0.34	0.25
ПА ($W_{ПА}$)	Количество ВПО ($W_{ВПО}$), ВПО в час	66	64	55
Эффективность для системы ОрВД ($W_{ОрВД}$)	Неравномерность загруженности участков ВТ ($W_{загр.уч.ВТ}$), ВС в час	24.4	23	28
	Неравномерность загруженности точек ВП ($W_{загр.точек.ВП}$), ВС в час	28.85	26.6	31
	Использование ЗО ($W_{исп.ЗО}$), кругов на каждое ВС	1.5	1	2.5
Влияние на окружающую среду ($W_{ср}$)	Выбросы вредных веществ (W_{CO_2}), тыс. кг/сут.	34450	31235	38340

рассматривались показатели, связанные с загруженностью диспетчерской позиции: “Равномерность временной загруженности диспетчера” ($W_{врем.загр.дисп}$), “Загрузка секторов без превышения НПС сектора” ($W_{сек}$). В части показателей ПА $W_{ПА}$ анализировался показатель “Количество ВПО” ($W_{ВПО}$). По группе показателей эффективности для системы ОрВД $W_{ОрВД}$ были рассчитаны следующие показатели: “Неравномерность загруженности участков ВТ” ($W_{загр.уч.ВТ}$), показатель “Неравномерность загруженности точек ВП” ($W_{загр.точек.ВП}$), “Использование ЗО” ($W_{исп.ЗО}$). В части группы показателей влияния на окружающую среду $W_{ср}$ рассматривался показатель: “Выбросы вредных веществ” (W_{CO_2}).

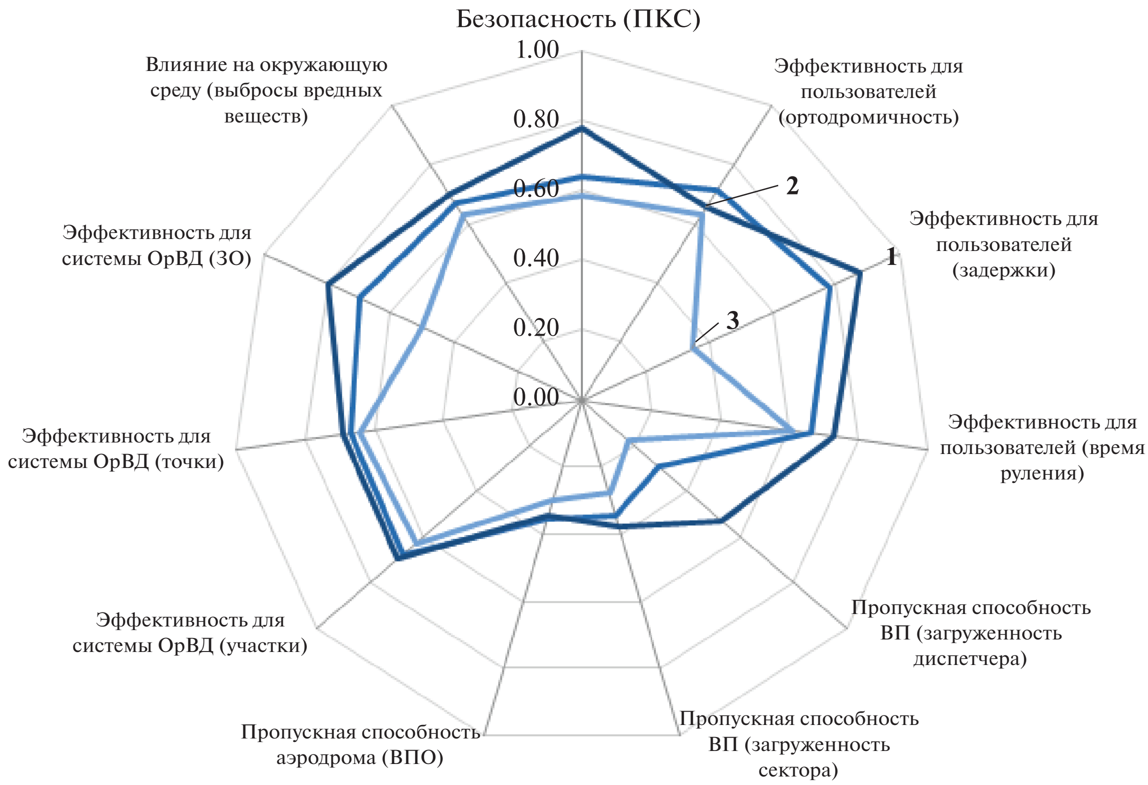


Рис. 21. Графическое представление результатов расчета показателей по трем вариантам структуры ВП и инфраструктуры аэродрома

По результатам моделирования были получены следующие значения показателей по трем вариантам структуры ВП и инфраструктуры аэродрома (таблица).

На рис. 21 дано графическое представление исследуемых вариантов.

Для графического представления все показатели были нормированы к значениям от 0 до 1 следующим образом:

$$x_i^* = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \qquad (3.1)$$

где x_i – значение показателя до нормирования. За минимальное значение $x_{\min}$ принималось значение, равное 0, за максимальное $x_{\max}$ – сумма по всем значениям показателей. Так как по некоторым группам показателей необходимо минимизировать критерий, а по другим максимизировать, то для удобства графического представления часть результатов показателей, которые необходимо было минимизировать, была инверсирована путем вычитания из единицы.

Анализ полученных результатов (рис. 21) показывает, что оба варианта перспективной структуры превосходят базовый вариант структуры (вариант 3) и принадлежат множеству Парето. Из сравнительного анализа перспективных вариантов видно, что вариант 2 предпочтительнее по всем показателям, кроме ортодромичности и ПА: разница по ортодромичности составила 1.5%, а по пропускной способности – 2 ВПО в час. На основании мнений экспертов выбирается вариант 2, поскольку такая разница по двум показателям является допустимой и не ухудшает значительно данные показатели и может быть нивелирована с помощью:

оптимизации маршрутной сети ВТ за счет применения зональной навигации, что приведет к снижению горизонтальной неэффективности маршрутов – показателя ортодромичности;

совершенствования технологических процессов, например применения сокращенных интервалов на посадке, а также внедрения системы согласованного совместного принятия решения на аэродроме, что в свою очередь приведет к увеличению ПА.

Заключение. Постоянный рост интенсивности ВД как в РФ, так и во всем мире приводит к необходимости модернизации структуры ВП и инфраструктуры аэродрома. Модернизация структуры ВП и инфраструктуры аэродрома в системе ОрВД является сложным процессом, где необходимо учитывать множество правил и ограничений. Результаты проектирования структуры ВП должны проверяться на соответствие нормативным документам. На этапе разработки концептуального проекта может быть создан ряд альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродромов, которые будут являться лишь допустимыми и отвечать типовым принципам проектирования. Однако проверить варианты сразу на эффективность с учетом процессов ОрВД и их динамики без математического моделирования не представляется возможным, тем более когда у каждого участника процесса ОрВД имеются свои предпочтения и свои показатели эффективности.

В статье рассмотрена задача выбора одного из альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродрома на основе их сравнительного анализа по разным группам показателей эффективности. Предложен критерий эффективности использования ВП и инфраструктуры аэродрома, представляющий собой вектор, который состоит из групп показателей эффективности, отражающих интересы различных участников процесса ОрВД: авиакомпаний, операторов аэропортов, провайдеров аэронавигационных услуг, авиационных властей и др. По каждой группе приведены показатели, по которым сравниваются варианты с помощью количественного анализа методами математического моделирования. Рассмотрены математические модели расчета показателей эффективности по каждой из групп, отражающих интересы отдельных участников ОрВД. В постановке задачи представлены условия применения, в которых функционируют альтернативные варианты, определяющие потоки ВС в трафике, а также метеоусловия выполнения полетов, технологии работы диспетчеров. Приведены ограничения, которые вытекают из требований по безопасности и пропускной способности и позволят отбросить варианты, не удовлетворяющие условиям задачи.

Решение данной задачи дает возможность оценить рассматриваемые варианты с точки зрения каждого из участников процесса ОрВД, а также проанализировать как действующие варианты структуры ВП и инфраструктуры аэродрома, так и концептуальные проекты, созданные при их модернизации для безопасного и эффективного функционирования в условиях увеличенной интенсивности ВД.

В статье представлен иллюстрирующий пример оценки двух вариантов структур ВП Московской зоны ЕС ОрВД и инфраструктуры аэродрома Шереметьево.

В следующей работе будет рассмотрен КИМ ОрВД, на базе которого и производится численная сравнительная оценка альтернативных вариантов структуры ВП и инфраструктуры аэродромов, входящие в него имитационные и расчетные модели, позволяющие моделировать воздушную обстановку и движение ВС по поверхности аэродрома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анодина Т.Г., Кузнецов А.А., Маркович Е.Д.* Автоматизация управления воздушным движением. М.: Транспорт, 1992.
2. Глобальный аэронавигационный план (ГАНП, Doc 9750), ИКАО. Монреаль, 2019.
3. Федеральная целевая программа “Модернизация Единой системы организации воздушного движения Российской Федерации (2009–2020 годы)”: утверждена постановлением Правительства Российской Федерации от 1 сентября 2008 г. № 652.
4. Руководство по глобальным характеристикам аэронавигационной системы (Doc 9883), ИКАО, 1-е изд. Монреаль, 2009.
5. Глобальная эксплуатационная концепция ОрВД (Doc 9854), ИКАО. Монреаль 2005.
6. GANP Portal. KPI Overview, ICAO. Montreal, 2021.
7. Recommended Key Performance Indicators for Measuring ANSP Operational Performance. CANSO. The Netherlands, March, 2015.
8. Methodologies for Calculating Delays/Improvement Opportunity Pools By Phase of Flight. CANSO. The Netherlands, May, 2013.
9. ГОСТ 22283-2014. Шум авиационный. Допустимые уровни шума на территории жилой застройки и методы его измерения, МКС 49.100. М., 01.01.2015.
10. Рекомендуемый метод расчета контуров шума вокруг аэропортов (Doc 9911), ИКАО, 2-е изд. Монреаль, 2018.
11. *Попов А.С., Вишнякова Л.В., Дегтярев О.В.* Комплекс имитационного моделирования организации воздушного движения (КИМ ОрВД) // Тр. Всероссийск. научно-практической конф. по имитационному моделирования социально-экономических систем (ВКИМСЭС). М., 2012.

12. *Попов А.С., Вишнякова Л.В., Сикачев В.Ю.* Имитационное моделирование системы организации воздушного движения // Седьмая всероссийская научно-практическая конф. по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности “Имитационное моделирование. Теория и практика” (ИММОД-2015). М., 2015.

13. Описание реализованных в комплексе имитационного моделирования при модернизации решений и алгоритмов функциональных моделей и программных модулей КИМ ОрВД // ФГУП “Госкорпорация по КИМ ОрВД”. М., 2017.

14. Safety Management Manual (SMM) Doc 9859 AN/474. Third Edition, ICAO. Montreal, 2013.

15. Единые принципы моделирования риска столкновения в обоснование “Руководства по методике планирования воздушного пространства для определения минимумов эшелонирования (Doc 9689)”. Циркуляр ИКАО 319-AN/181 13 ИКАО. Монреаль, 2009.

16. *Обухов Ю.В., Попов А.С., Орлов В.С., Котова А. О.* Применение имитационного моделирования для оценки безопасности полетов // Тр. МАИ. 2015. № 81.

17. *Обухов Ю.В., Вишнякова Л.В.* Решение задачи оценки безопасности полетов с помощью метода имитационного моделирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 6.

18. *Котова А.О., Зубкова И.Ф., Обухов Ю.В.* Особенности человека-оператора в модели диспетчерского обслуживания воздушного движения в составе имитационной модели оценки безопасности полетов // Тр. ГосНИИАС. Сер.: Вопросы авионики. 2018. № 1(34). С. 41–61.

19. *Обухов Ю.В., Сикачев В.Ю., Попов А.С.* Оценка безопасности полетов в одном из вариантов перспективной структуры Московского районного центра с применением имитационного моделирования // Тр. ГосНИИАС. Сер.: Вопросы авионики. 2018. № 2(35). С. 3–17.

20. Additional ASMA Time Performance Monitoring and Reporting – Level 1/2 (Edition Number: 00-04. Category: Performance Monitoring and Reporting. Eurocontrol). Brussels, 24.02.2015

21. *Lee P., Smith N., Homola J., Brasil C., Buckley N., Cabrall C., Chevalley E.,Parke B., Hyo-Sang Yoo.* Reducing Departure Delays in LaGuardia Airport with Departure-Sensitive Arrival Spacing (DSAS)// Eleventh USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2015). Lisbon, 2015.

22. Base of aircraft database (BADA) Product Management Document EEC Technical/Scientific Report No. 2009-008 Eurocontrol. Brussels, 2019.

23. Performance Indicator – Horizontal Flight Efficiency Level 1 and 2 documentation of the Horizontal Flight Efficiency key performance indicator (Edition Number: 01-00. Category: Performance Monitoring and Reporting – Level 1/2 . Eurocontrol). Brussels, 23.05.2014.

24. Рамки эффективности работы для Европейского региона, Doc 030 Eur-030. Монреаль, 2020.

25. Additional Taxi-Out Time Performance Indicator document Level 1/2 (Edition Number: 00-04. Category: Performance Monitoring and Reporting. Eurocontrol). Brussels, 24.02.2015.

26. Методика оценки эффективности предложений по изменению трассовой структуры ВП с использованием КИМ ОрВД // Рабочий документ. ФГУП “Госкорпорация по ОрВД”. М., 2008.

27. Analysis of en-route vertical flight efficiency. Technical report on the analysis of en-route vertical flight efficiency (Edition Number: 00-04. Category: Performance Monitoring and Reporting. Eurocontrol). Brussels, 19.01.2017.

28. Правила расчета ПКС и временной загруженности диспетчера РЦ // Рабочий документ. ФГУП “ГосНИИАС”, ФГУП “Госкорпорация по ОрВД”. М., 2010.

29. Методика определения нормативов пропускной способности диспетчерских пунктов (секторов) органов обслуживания воздушного движения // Приказ Росавиации от 7 ноября 2012 г. № 757.

30. Методика расчета технической возможности аэропортов // Приказ Минтранса РФ от 24 февраля 2011 г. № 63.

31. *Попов А.С., Минаенко В.Н.* Оценка ПС аэродромного ВП с использованием имитационного моделирования на примере аэропорта Сочи // Тр. конф. ФГУП ГосНИИАС “Моделирование авиационных систем”. М., 2013.

32. Методика расчета выбросов загрязняющих веществ двигателями воздушных судов гражданской авиации // Министерство транспорта РФ 27 октября 2008 г.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 510.64–519.816

ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ РАЗРАБОТКИ МЕТОДОВ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ПРАВИЛ ИЗ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ[1]

© 2021 г. А. Н. Аверкин[а,б,*], С. А. Ярушев[б,]**

[а]*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

[б]*РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия*

**e-mail: averkin2003@inbox.ru*

***e-mail: sergey.yarushev@icloud.com*

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 03.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Проводится масштабный обзор и анализ существующих методов и подходов к извлечению правил из искусственных нейронных сетей, в том числе из нейронных сетей глубокого обучения. Рассмотрены широкий спектр методов и подходов к извлечению правил, а также связанные с этим подходы к разработке систем объяснимого искусственного интеллекта. Исследуется таксономия и несколько направлений в изучении объяснимых нейронных сетей, связанных с извлечением правил из нейронных сетей, которые позволяют пользователю получить представление о том, как нейронная сеть использует входные данные, а также при помощи правил выявить скрытые взаимосвязи входных данных и найденных результатов. Таким образом в настоящем обзоре делается акцент на связи наиболее распространенных в искусственном интеллекте систем объяснений на основе правил с наиболее мощными алгоритмами машинного обучения с помощью нейросетей. Помимо извлечения правил рассматриваются и другие методы построения систем объяснимого искусственного интеллекта на базе построения специальных модулей, которые интерпретируют каждый шаг изменения весов нейронной сети. Комплексный анализ существующих исследований дает возможность сделать выводы о целесообразности применения тех или иных подходов. Результаты анализа позволят получить подробную картину состояния исследований в данной области и создать собственные приложения на основе нейронных сетей, результаты работы которых можно будет подробно изучать и оценивать их достоверность. Разработка подобных систем крайне необходима для развития цифровой экономики в России и создания приложений, позволяющих принимать ответственные и объяснимые управленческие решения в критических областях народного хозяйства.

DOI: 10.31857/S0002338821060044

Введение. Масштабное развитие систем искусственного интеллекта (ИИ), в том числе приложений на основе искусственных нейронных сетей, открывает широчайшие возможности их использования в различных областях, от систем распознавания эмоций до систем предиктивной аналитики, применения в медицине и военной области. Но в то же время существующие системы и приложения имеют один общий существенный недостаток — невозможность интерпретации полученных результатов и принятых решений. Широко известная проблема так называемого черного ящика накладывает существенные ограничения для использования подобных систем, в том числе законодательных, так как нельзя проследить ход принятия решения нейронной сетью.

В настоящее время эти проблемы решаются в рамках направления объяснимого ИИ (explainable artificial intelligence или XAI). Системы на базе объяснимого ИИ помогают понять пользователю принятые с помощью методов машинного обучения решения, что повышает доверие к этим системам и дает возможности принимать более эффективные решения на основе результатов работы системы. Все это позволяет разработчикам и пользователям исследовать факторы,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-17-50199) по программе “Экспансия”.

которые используются нейронной сетью при решении конкретной задачи и понять, какие параметры нейронной сети нужно поменять, чтобы повысить точность ее работы.

Кроме этого, изучение того, как нейронные сети извлекают, хранят и преобразуют знания, может быть полезно для будущего развития методов ИИ. Например, повышение объяснимости искусственных нейронных сетей позволит обнаружить так называемые скрытые зависимости, которые не присутствуют во входных данных, но появляются в результате их интеграции в нейронную сеть. Методы извлечения правил из нейронных сетей являются одним из связующих элементов между символьными и коннекционисткими моделями представления знаний в ИИ.

1. История развития объяснимых моделей ИИ. Исследования в данной области можно разделить на три этапа: первый этап (с 1970 г.) — разработка экспертных систем, второй этап (середина 1980-х годов) — переход от экспертных систем к системам, основанным на знаниях, и третий (с 2010 г.) — изучение глубоких архитектур искусственных нейронных сетей, потребовавший новых глобальных исследований по построению объяснимых систем.

Рассмотрим далее подробнее каждый из этих этапов.

1.1. Первый этап. Экспертные системы. Системы объяснения, основанные на правилах. Первое и второе поколения объяснимого ИИ связаны с экспертными системами, включавшими в себя принятие решений и постановку диагнозов. Главный этап развития экспертных систем пришелся на начало 1970-х годов и содержал представления, основанные на знаниях, использовании правил и отношений. Системы имели инструментарий вопрос-ответных интерфейсов для пользователей и могли давать рекомендации и ставить диагнозы, основанные на правилах. Исследования показывали, что объяснение, как компьютерные системы работают, позволяет повысить уровень доверия людей к рекомендательным системам [1]. При интерпретации результатов работы экспертной системы также различались объяснение принципа работы системы и обоснование выбора архитектуры системы [2].

На первом этапе, в эпоху разработки экспертных объяснительных систем, велись масштабные исследования, демонстрирующие, что экспертные системы, имеющие объяснительную составляющую, способны оказывать большее влияние на принятие решения, причем эффект был прямо пропорционален уровню навыков пользователя [3–6].

Но многие экспертные системы первого поколения не принесли ожидаемых преимуществ. При работе над медицинскими экспертными системами исследователи признали, что врачи будут игнорировать рекомендации экспертной системы, если не будет предоставлено обоснование (оправдание) того, почему система дала такие рекомендации. Системы первоначального объяснения пытались предоставить это обоснование, описывая основные цели и шаги, используемые для постановки диагноза. Этот подход, который Свартаут и Мур назвали “Резюме как миф объяснения” [7], также не полностью устраивал пользователей, и это привело к переосмыслению подходов, целей и задач систем XAI. Первое поколение появилось в конце 1970-х годов [8] и просуществовало около 10 лет.

Некоторое несовершенство экспертных систем первого поколения породила в свою очередь первое поколение систем, включающее блок объяснения как обязательный элемент, например, Mycin [9] и связанные с ним системы Digitalis Therapy Advisor [10], BLAH [11] и другие системы объяснения специального назначения. Применяя деревья вывода, эти системы работали, создавая логические и вероятностные правила для постановки диагноза или ответов на вопросы. В целом, поскольку знания и опыт были сформулированы в терминах правил, эти правила описывались на естественном языке. Простое объяснение выражалось правилом для принятия решения. Такие объяснения обычно писались на ограниченном естественном языке, но часто они были простым использованием продукционных правил “если-то” для текстовых описаний.

В [12] рассмотрены системы первого поколения, которые создавали объяснения, перефразируя правила для принятия решения. В целом, экспертные системы и системы объяснения первого поколения были сосредоточены на описании внутренних состояний интеллектуальной системы, ее целей и планов. Иногда это было довольно просто, потому что сами правила являлись формализацией правил, используемых экспертами. Иногда, однако, языковые описания мало походили на человеческое объяснение или вообще на естественный язык. Во-первых, они полагались только на формат логических и причинно-следственных правил “если-то”, а не на предоставление объяснений на более высоком уровне стратегии рассуждений (например, сбор базовой информации о пациенте, создание сети для альтернативных объяснений, попытки поддержать конкретную гипотезу). Во-вторых, некоторые правила были логически необходимы для того, чтобы система работала, не обязательно имели смысл для пользователей и не имели отношения к стандартным вопросам пользователя “как” и “почему”. В-третьих, знания предметной области иногда компилировались (например, причинно-следственные связи между симптомами и диагнозами), поэтому они не включались в объяснение.

Когда был изначально разработан Mycin, неспособность полностью объяснить набор правил и их обоснований не считалась недостатком, потому что создание каких-либо объяснений в удобочитаемой форме на базе записанного дерева рассуждений программы уже было сложной задачей и значительным достижением в области ИИ. Более того, такие ассоциативные модели представляли собой практические правила, основанные на демографических и физиологических данных, которые обычно были знакомы пользователям. Последние, как предполагалось, просто следовали советам программы после того, как она была протестирована и сертифицирована экспертами. Однако попытки расширить или уточнить эти наборы правил, использовать их для обучения или объяснить высокоуровневые ассоциации были неудачными.

1.2. Второй этап. Системы объяснения, основанные на знаниях. К середине 1980-х годов ограничения систем объяснения первого поколения столкнулись с проблемой, которая заключалась в том, что недостаточно просто резюмировать внутреннюю работу системы. Созданный текст может быть верным, но это не обязательно то, что хотел узнать пользователь, или ему было непонятным. Системы второго поколения часто стирали грань между консультационной программой [12], наставником [13], советником [14] и системой ввода данных [15], но перед исследователями стояла цель выйти за рамки методов, которые не помогли улучшить понимание или принятие экспертных систем. Основной движущей силой систем второго поколения была необходимость разработки более абстрактных структур, которые способствовали бы повторному использованию и простоте разработки систем. NEOMYCIN сделал это, предоставив диагностическую процедуру на основе задач и метаправил и связанный с ней язык таксономических и причинно-следственных связей [16, 17].

На раннем этапе разработки объяснительных экспертных систем было признано, что их база знаний, правила и объяснения могут быть использованы для создания интеллектуальных наставников. Отличительной особенностью интеллектуальных систем обучения является то, что они выводят ментальную модель предметной области каждого учащегося (его базу знаний) на основе поведения учащегося. Эти системы сначала собирательно назывались интеллектуальными системами компьютерной аналитики и рассуждений (computational analytics and intelligence, CAI), чтобы отличать интеллектуальных наставников от простых обучающих машин 1960-х годов, и применялись сообществом ИИ в образовании, особенно в 1980-х и начале 1990-х годов.

Например, в экспертной системе GUIDON запрос студента о данных пациента и его заявленные гипотезы использовались для обратного поиска через сеть правил MYCIN (или любую другую сеть), чтобы определить, какие правила не учитывались. Объяснение представляло собой сеть умозаключений и иногда включало неопределенности (например, свидетельство того, что студент знает правило, базирующееся на предыдущих взаимодействиях, нужно отличать от его применения в конкретном случае). Вот почему системы иногда называли "учителями, основанными на знаниях", в отличие от обучающих машин 1960-х годов. Главная идея заключалась в том, что предметные знания экспертной системы (например, правила медицинской диагностики) были отделены от базы знаний обучения (например, правил управления диалогом). Кроме того, процесс интерпретации правил предметной области, аналогичный объяснению поведения экспертной системы на основе модели (трассировки) ее внутренних процессов, использовался для объяснения поведения студента путем построения модели того, как студент рассуждает.

1.3. Третий этап. Новые методы объяснения на основе распознавания образов и обработки текстов. После некоторого застоя, связанного с замедлением развития направления систем, основанных на знаниях, возникает третий этап, относящийся к 2017–2021 гг. и отраженный в разд. 4 настоящей статьи, который описывает программу DARPA по объяснимому ИИ.

Возникновение третьего этапа можно наглядно продемонстрировать, проанализировав количество публикаций по темам извлечения правил и объяснимого ИИ. При анализе количества публикации за последние 20 лет можно отметить, что интерес к извлечению правил из нейросетей более или менее стабилен (по некоторым источникам даже периодичен, что связано с тремя рассмотренными поколениями систем объяснимого ИИ) и возрастает только с появлением третьего поколения систем объяснимого ИИ (рис. 1), что связано,в основном с созданием программы DARPA.

С появлением программы DARPA можно наблюдать взрывной рост количества публикаций непосредственно по теме объяснимого ИИ (начиная с 2018 г.) и его дальнейший рост, как показано на рис. 2.

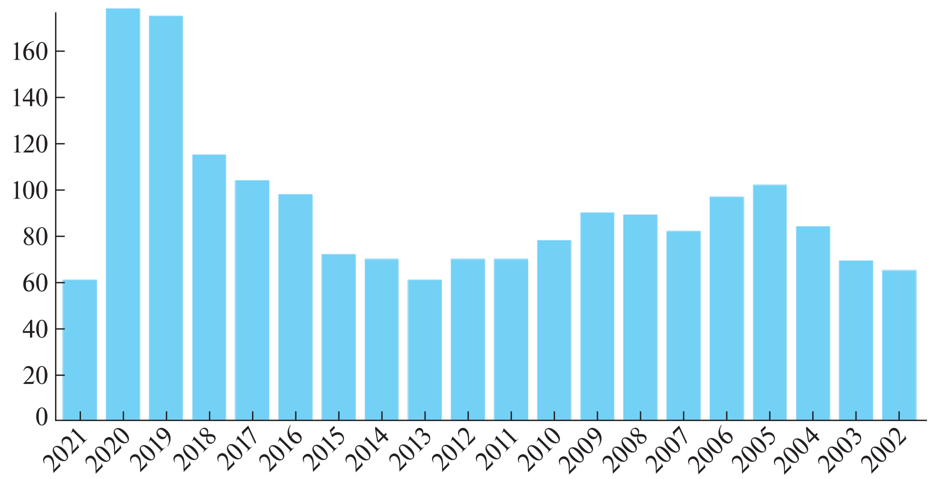


Рис. 1. Количество публикаций по годам в области извлечения правил из нейронных сетей

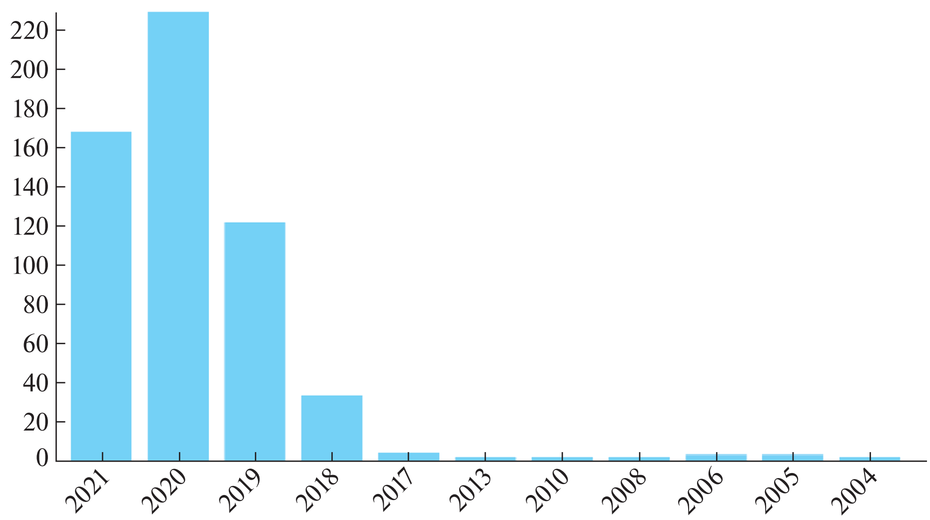


Рис. 2. Количество публикаций по годам по теме объяснимого ИИ. (XAI)

В системах третьего поколения, как и в системах первого поколения, осуществлялись попытки объяснить внутреннюю работу системы, что само по себе остается серьезной проблемой. Системы первого поколения встраивали экспертные знания в правила, часто получаемые непосредственно от экспертов, и пытались составить языковые описания на основе оценок экспертов. Эти правила часто трансформировались в выражения естественного языка, и большая часть этой работы была направлена на создание систем представления знаний. В системах третьего поколения эта задача оказалась значительно сложнее. Недостатки систем первого поколения, связанные со слабым уровнем детализации и непонятным языком, могут стать проблемой для систем третьего поколения. Со времени систем первого поколения компьютерные технологии в визуализации данных, анимации, видео и т.п. значительно продвинулись вперед, и много новых идей было предложено в качестве потенциальных методов для генерации объяснений. Хотя системы первого поколения поддерживали диалоги на естественном языке и интерактивность в вопросно-ответных системах, современные системы делают это на более высоком уровне, чем экспертные системы. Примером может служить использование аргументированных объяснительных диалогов человек-машина для устранения несоответствий в базах знаний в процессе приобретения знаний с помощью программного обеспечения для экспертных систем [18].

Некоторые из объяснений, представленных в системах первого поколения, было легко создать по сравнению с объяснениями в третьем поколении, поскольку они были прямым повторением закодированных вручную правил. Нынешнему поколению систем, возможно, будет труднее давать простые объяснения, производимые системами первого поколения. Но в некотором смысле системы третьего поколения, разрабатываемые в настоящее время, отражают достижения систем первого поколения. Ожидается, что многие из этих систем могут встретить проблемы, аналогичные тем, с которыми столкнулись системы первого поколения. И они могут быть решены методами, которые возникли в системах второго поколения.

2. Обзор исследований по извлечению правил из искусственных нейронных сетей. Повышение прозрачности нейронных сетей путем извлечения из них правил имеет два основных преимущества. Это дает пользователю некоторое представление о том, как нейронная сеть использует входные переменные, чтобы принять решение, и позволяет выявить скрытые функции в нейросетях, когда правила применяются для объяснения работы отдельных нейронов. Выявление особо важных атрибутов или причин ошибок нейронной сети может быть частью понимания. Пытаясь сделать непрозрачные нейронные сети более понятными, методы извлечения правил устраняют разрыв между точностью и ясностью [19, 20].

Для того чтобы, например, нейронная сеть использовалась в критически важных приложениях, к примеру в авиации или электроэнергетике, требуется объяснение не только принципов ее работы, но и того, каким образом нейронная сеть получила результат. В этих случаях крайне важно, чтобы у пользователя системы была возможность проверить выход искусственной нейронной сети при всех возможных условиях входа [21].

Для формализации задачи извлечения правил из нейронной сети можно использовать следующее определение: “При заданных параметрах обученной нейронной сети и данных, на которых она была обучена, создайте описание нейросетевой гипотезы, которая понятна, но приближена к поведению заданной сети”.

Чтобы различать разные подходы к извлечению правил из нейронных сетей, в [21] была введена многомерная таксономия. Первое измерение, которое в ней описывается, является мощностью извлекаемых правил (например, IF-THEN правила или нечеткие продукционные правила). Второе измерение называется прозрачностью и описывает стратегию, на основе которой работает алгоритм извлечения правил. Если метод использует нейронную сеть только как черный ящик, независимо от архитектуры нейросети, мы называем его педагогическим подходом. Если вместо этого алгоритм учитывает внутреннюю структуру нейронной сети, мы называем этот подход декомпозиционным. Если алгоритм применяет компоненты как педагогических, так и декомпозиционных методов, то этот подход называется эклектическим. Третьим измерением является качество извлеченных правил. Поскольку качество – широкий термин, оно делится на несколько критериев: качество, точность, непротиворечивость и понятность. В то время как качество измеряет способность правильно классифицировать ранее не видимые примеры, точность измеряет степень, с которой правила имитируют поведение нейронной сети [19]. Точность может рассматриваться как точность по отношению к выходу нейронной сети. Непротиворечивость может быть измерена только тогда, когда алгоритм извлечения правил включает процесс обучения нейронной сети вместо обработки уже обученной нейронной сети. Извлеченный набор правил считается непротиворечивым, когда нейронная сеть генерирует наборы правил, которые правильно классифицируют тестовые данные для различных эпох обучения. Понятность рассматривается как мера размера правил, т.е., короткие правила при их небольшом количестве считаются более понятными.

В данной работе остановимся только на трех описанных критериях. В соответствии с [22] ориентируемся на методы, которые не предъявляют особых требований к тому, как была обучена нейронная сеть до того, как были извлечены правила. Кроме того, анализируются только алгоритмы, способные извлекать правила из нейронных сетей прямого распространения, несмотря на любые другие характеристики архитектуры. В соответствии [23] необходимо, чтобы алгоритм обладал наибольшей степенью общности.

Проанализируем некоторые методы извлечения правил, которые отвечают вышеуказанным характеристикам. Начнем с декомпозиционного подхода. Как упоминалось ранее, декомпозиционные подходы для извлечения правил из нейронных сетей действуют на уровне нейронов. Как правило, декомпозиционный подход анализирует каждый нейрон, и формирует правила, которые имитируют поведение этого нейрона. Рассмотрим ниже послойный алгоритм извлечения правил KT, полиномиальный алгоритм Цукимото и экстрактор правил через индукцию дерева решений.

Алгоритм KT был одним из первых подходов для извлечения правил из нейронных сетей [24]. Он описывает каждый нейрон (слой за слоем) с правилами IF-THEN путем эвристического поиска комбинаций входных атрибутов, превышающих порог нейрона. Модуль записи используется для получения правил, которые относятся к исходным атрибутам ввода, а не к выводам предыдущего уровня. Чтобы найти подходящие комбинации, метод KT применяет поиск на дереве, т.е. правило (представленное в качестве узла в дереве) на этом уровне генерирует свои начальные узлы, добавляя дополнительный доступный атрибут. Кроме того, алгоритм использует ряд эвристик, чтобы остановить рост дерева в ситуациях, когда дальнейшее улучшение невозможно.

Полиномиальный алгоритм Цукимото для извлечения правил из нейронной сети очень похож на метод KT. Он использует многоуровневый декомпозиционный алгоритм для извлечения правил IF-THEN для каждого нейрона, а также отслеживает стратегию поиска входных конфигураций, превышающих порог нейрона. Основное преимущество алгоритма Цукимото – его вычислительная сложность, которая является полиномиальной, в то время как метод KT – экспоненциальный. Алгоритм достигает полиномиальной сложности, находя соответствующие термины, используя пространство многомерных функций. На втором этапе эти термины применяются для создания правил IF-THEN. Впоследствии обучающие данные используются для повышения точности правил. На последнем этапе алгоритм Цукимото пытается оптимизировать понятность, удаляя из правил несущественные атрибуты.

Другой метод извлечения правил путем индукции дерева решений был введен в [25]. Их алгоритм CRED преобразует каждую выходную единицу нейронной сети в решение, где узлы деревьев тестируются с помощью узлов скрытого слоя, а листья представляют класс. После этого шага извлекаются промежуточные правила. Затем для каждой точки разветвления, используемой в этих правилах, создается другое дерево решений с помощью точки разветвления на входном слое нейронной сети. В новых деревьях листья не выбирают непосредственно класс. Извлечение правил из второго дерева решения приводит нас к описанию состояния скрытых нейронов, состоящих из входных переменных. В качестве заключительного шага заменяются промежуточные правила, описывающие выходной слой через скрытый слой на те, которые описывают скрытый слой на основе входов нейронной сети. Затем они объединяются, чтобы построить правила, описывающие выход нейронной сети на базе ее входных данных.

Педагогические подходы не учитывают внутреннюю структуру нейронной сети. Целью педагогических подходов является рассмотрение обученных нейросетей как целостного объекта или как черного ящика [26]. Главная идея состоит в том, чтобы извлечь правила, непосредственно сопоставляя входные данные с выходными данными [27].

Педагогические подходы работают с нейронной сетью, как с функцией. Эта функция задает выход нейронной сети для произвольного входа, но не дает понимания внутренней структуры нейронной сети или ее весов. Для нейронной сети этот класс алгоритмов пытается найти связь между возможными вариациями входа и выходами, созданными нейронной сетью, причем некоторые из них используют заранее определенные обучающие данные, а некоторые нет.

Извлечение правил, основанное на интервальном анализе, применяет анализ доверительных интервалов (VIA) для извлечения правил, имитирующих поведение нейронных сетей. Главная идея этого метода заключается в том, чтобы найти входные интервалы, в которых выходной сигнал нейронной сети стабилен, т.е. прогнозируемый класс одинаков для незначительно меняющихся конфигураций входа. В результате чего анализ доверительных интервалов обеспечивает основу для надежных корректных правил.

Получение правил с использованием выборки представляет собой несколько методов, которые придерживаются более или менее той же стратегии для извлечения правил из нейронной сети с помощью выборки, т.е. они создают обширный набор данных в качестве основы для извлечения правил. После этого выбранный набор данных передается в стандартный алгоритм обучения для генерации правил, имитирующих поведение сети. В [28] доказано, что применение выборочных данных эффективнее, чем использование только обучающих данных в проблемах извлечения правил.

Одним из первых методов, последовавших за этой стратегией, был алгоритм Трепана [29]. Он работает аналогично алгоритму “разделяй и властвуй”, выполняя поиск точек разветвления на обучающих данных для отдельных экземпляров разных классов. Основными отличиями от метода “разделяй и властвуй” являются лучшая стратегия расширения древовидной структуры, дополнительные точки разветвления и возможность выбора дополнительных примеров обучения в более глубоких узлах дерева. В результате алгоритм также создает дерево решений, которое, однако, может быть преобразовано в набор правил, если это необходимо.

Алгоритм извлечения правил двоичного входа и выхода (BIO-RE) способен обрабатывать только нейронную сеть с двоичными или бинаризированными входными атрибутами. BIO-RE создает все возможные комбинации входных данных и запрашивает их у нейронной сети. С помощью вывода нейронной сети для каждого примера создается таблица истинности. От таблицы истинности также легко перейти к правилам, если это необходимо.

ANN-DT является еще одним методом выборки, основанным на принятии решений для описания поведения нейронной сети. Общий алгоритм базируется на алгоритме CART с некоторыми вариациями в первоначальной реализации. ANN-DT использует метод выборки для расширения, с тем чтобы большая часть обучающей выборки была репрезентативной. Это достигается с помощью метода ближайшего соседа, в котором рассчитывается расстояние от точки выборки до ближайшей точки в наборе обучающих данных и сравнивается с эталонным значением.

Идея создания большого набора примеров на первом этапе также реализуется алгоритмом STARE. Как и BIO-RE, STARE формирует большие таблицы истинности для обучения. Преимущество STARE заключается в его способности не только обрабатывать двоичные и дискретные атрибуты, но и работать с непрерывными входными данными. Для формирования таблиц истинности алгоритм перестраивает входные данные. Примером педагогического подхода с помощью обучающей выборки является KDRuleEx. Аналогично алгоритму Trepan, этот алгоритм также генерирует дополнительные обучающие примеры в случае, когда данных для следующих точек разделения слишком мало. KDRuleEx использует генетический алгоритм для создания новых примеров обучения. Эта техника приводит к таблице принятия решений, которая может быть преобразована, например, в правила IF-THEN.

Эклектический подход – это набор методов извлечения правил, включающих элементы как педагогического, так и декомпозионного подхода. В частности, эклектический подход использует знания о внутренней архитектуре и вектора весов в нейронной сети в дополнение к символьному алгоритму обучения.

Подход быстрого поиска правил в нейронной сети включает в себя подход FERNN, который сначала пытается определить соответствующие скрытые нейроны, а также входы в сеть. Для этого шага строится дерево решений с помощью алгоритма C4.5. Процесс извлечения правил приводит к генерации правил M-of-N и IF-THEN. Имея набор правильно классифицированных примеров обучения, FERNN анализирует значения активации каждой скрытой вершины, для которой значения активации сортируются в порядке возрастания. Затем используется алгоритм C4.5, чтобы найти наилучшую точку разделения для формирования дерева решений. Ниже в таблице приводится сравнение алгоритмов извлечения правил из нейронных сетей по типу нейросети, типу алгоритма и виду извлекаемого правила [30].

Таблица. Алгоритмы извлечения правил из нейронных сетей

Алгоритм	Используемый тип сети	Тип алгоритма	Вид извлекаемого правила
DIFACON-miner	Многослойный персептрон	Декомпозиционный	IF-THEN
CRED	То же	>>	Дерево решений
FERNN	>>	>>	M-of-N, IF-THEN
KT	>>	>>	IF-THEN
Tsukamoto’s algorithm	Многослойный персептрон, рекуррентная нейронная сеть	>>	IF-THEN
TREPAN	Многослойный персептрон	Педагогический	M-of-N, дерево решений
HYPINV	>>	>>	Правило гиперплоскости
BIO-RE	>>	>>	Бинарное правило
KDRuleEX	>>	>>	Дерево решений
RxREN	>>	>>	IF-THEN
ANN-DT	>>	>>	Бинарное дерево решений
RX	>>	Эклектический	IF-THEN
Kahramanli and Allahverdi’s algorithm	>>	>>	IF-THEN
DeepRED	Глубокая нейронная сеть	Декомпозиционный	IF-THEN

3. Нейронечеткие модели в задачах извлечения правил из искусственных нейронных сетей. Наиболее интересным в рамках данного исследования является извлечение правил с использованием нейронечетких моделей. Системы, основанные на нечетких правилах (FRBS), разработанные с помощью нечеткой логики, стали полем активных исследований за последние несколько лет. Эти алгоритмы доказали свои сильные стороны в таких задачах, как управление сложными системами, создание нечетких элементов управления. Взаимоотношения между обоими подходами (ANN и FRBS) были тщательно изучены и показана их эквивалентность. Это позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, можно применить то, что было обнаружено для одной из моделей, к другой. Во-вторых, мы можем перевести знания, встроенные в нейронную сеть, на более когнитивно-приемлемый язык – нечеткие правила. Другими словами, получаем семантическую интерпретацию нейронных сетей [31–33].

Для того, чтобы получить семантическую интерпретацию черного ящика глубокого обучения, нейронечеткие сети могут быть использованы вместо последнего полносвязного слоя. Например, ANFIS (адаптивная нейронечеткая система) является многослойной сетью прямого распространения. Эта архитектура имеет пять слоев, таких как нечеткий слой, продукционный слой, слой нормализации, слой дефаззификации и выходной слой. ANFIS сочетает преимущества нейросети и нечеткой логики. Далее приведем классификацию наиболее известных нейронечетких подходов.

Рассматривая архитектуры нейронечетких моделей, можно выделить три методики объединения искусственных нейронных сетей (ИНС) и нечетких моделей [34, 35]:

neuro-FIS, в которых ИНС используется как инструмент в нечетких моделях;

нечеткие ИНС, в которых классические модели ИНС фаззифицированы;

нейронечеткие гибридные системы, в которых нечеткие системы и ИНС объединены в гибридные системы [36, 37].

Исходя из данных методик, нейронечеткие модели можно разделить на три класса [38–40].

Кооперативные нейронечеткие модели. В данном случае часть ИНС изначально используется для определения нечетких множеств и / или нечетких правил, где впоследствии выполняется только полученная нечеткая система. В процессе обучения определяются функции принадлежности, а также формируются нечеткие правила на основе обучающей выборки. Здесь основная задача нейронной сети заключается в подборе параметров нечеткой системы.

Параллельные нейронечеткие модели. Нейронная сеть в данном типе модели работает параллельно с нечеткой системой, предоставляя входные данные в нечеткую систему или изменяя выходные данные нечеткой системы. Нейронная сеть может являться также и постпроцессором выходных данных из нечеткой системы.

Гибридные нейронечеткие модели. Нечеткая система использует метод обучения, как это делает и ИНС, чтобы настроить свои параметры на основе обучающих данных. Среди представленных классов моделей наибольшей популярностью пользуются модели именно данного класса, доказательством тому служит их применение в широком спектре реальных задач [41–44].

Среди наиболее популярных гибридных моделей можно выделить следующие архитектуры.

Сеть управления нечетким адаптивным обучением (FALCON) [45], которая имеет пятислойную архитектуру. На одну выходную переменную приходится по два лингвистических узла. Первый узел работает с обучающей выборкой (паттерном обучения), второй является входным для всей системы. Первый скрытый слой размечает входную выборку в соответствии с функциями принадлежности. Второй слой задает правила и их параметры. Обучение происходит на основе гибридного алгоритма без учителя для определения функции принадлежности, базы правил и использует алгоритм градиентного спуска для оптимизации и подбора итоговых параметров функции принадлежности.

Адаптивная нейронечеткая система вывода ANFIS [46] — это хорошо известная нейронечеткая модель, которая применялась во многих приложениях и исследовательских областях [47]. Более того, сравнение архитектур нейронечетких сетей показало, что ANFIS показывает минимальную ошибку в задаче прогнозирования. Основным недостатком модели ANFIS является то, что она предъявляет серьезные требования к вычислительной мощности [48].

Система обобщенного приближенного интеллектуального управления на основе рассуждений (GARIC) [49] представляет собой нейронечеткую систему, использующую два нейросетевых модуля, модуль выбора действия и модуль оценки состояния, который отвечает за оценку качества выбора действий предыдущим модулем. GARIC – пятислойная сеть прямого распространения.

Нейронный нечеткий регулятор (NEFCON) [50] был разработан для реализации системы нечеткого вывода типа Мамдани. Связи определяются с помощью нечетких правил. Входной слой является фаззификатором, а выходной решает задачу дефаззификации. Обучается сеть на основе гибридного алгоритма обучения с подкреплением и алгоритма обратного распространения ошибки.

Система нечеткого вывода и нейронной сети в программном обеспечении нечеткого вывода (FINEST) [51] представляет собой систему настройки параметров. Производится настройка нечетких предикатов, функции импликации и комбинаторной функции.

Система для автоматического построения нейронной сети нечеткого вывода (SONFIN) [52] по своей сути аналогична NEFCON контроллеру, но вместо реализации нечеткого вывода типа Мамдани реализует вывод типа Такаги-Сугено. В данной сети входная выборка обрабатывается с помощью алгоритма выровненной кластеризации. При идентификации структуры части предварительного условия входное пространство разделяется гибким образом в соответствии с алгоритмом, основанным на выровненной кластеризации. Настройка параметров системы частично реализована на базе метода наименьших квадратов, предварительные условия настраиваются с помощью метода обратного распространения ошибки.

Динамически развивающаяся нечеткая нейронная сеть (dmEfuNN) и (EFuNN) [53]. В EFuNN все узлы создаются в процессе обучения. Первый слой передает обучающие данные на второй, который вычисляет степень соответствия с заранее определенной функцией принадлежности. Третий слой содержит в себе наборы нечетких правил, являющихся прототипами входных-выходных данных, которые можно представить в качестве гиперсфер нечеткого входного и выходного пространств. Четвертый слой рассчитывает степень, с которой выходная функция принадлежности разметила входные данные, а пятый слой производит дефаззификацию и подсчитывает числовые значения выходной переменной. DmEfuNN представляет собой модифицированную версию EFuNN. Основная идея состоит в том, что для всех входных векторов динамически подбирается набор правил, значения активации которых используются для расчета динамических параметров выходной функции. В то время как EFuNN реализует нечеткие правила типа Мамдани, dmEFuNN применяет тип Такаги-Сугено.

4. Обзор подходов к разработке систем объяснимого ИИ. Проведем исследование различных моделей объяснимого ИИ. Практически все они связаны с системами объяснений третьего поколения и начавшейся в 2018 г. программой DARPA [54]. Программа DARPA по созданию систем объяснимого ИИ (XAI) стремится создать такие системы ИИ, чьи модели обучения и решения могут быть понятны и должным образом проверены конечными пользователями. Достижение этой цели требует методов построения более объяснимых моделей, разработки эффективных объяснимых интерфейсов и понимания психологических требований для эффективного объяснения. Объяснимый ИИ нужен для того, чтобы пользователи понимали, должным образом доверяли и эффективно управляли своими умными партнерами. DARPA рассматривает XAI как системы ИИ, которые могут объяснить свое решение человеку-пользователю, охарактеризовать свои сильные и слабые стороны, и то, как они будут вести себя в будущем. Целью DARPA является создание более понятных для человека систем ИИ с помощью эффективных объяснений. Команды разработчиков XAI решают первые две проблемы путем создания и развития технологий объяснимого машинного обучения (ML), разрабатывая принципы, стратегии и методы взаимодействия человека и компьютера для получения эффективных объяснений. Еще одна команда разработчиков XAI решает третью задачу путем объединения, расширения и применения психологических теорий объяснения, которые команды разработчиков будут использовать для тестирования своих систем. Команды разработчиков оценивают, насколько хорошо объяснения XAI-систем улучшают работу пользователей, их доверие и производительность.

В России также уделяется большое внимание направлению объяснимого ИИ. Так, Нижегородский государственный университет в 2020 г. стал победителем в конкурсе крупных научных проектов от Минобрнауки РФ с проектом “Надежный и логически прозрачный искусственный интеллект: технология, верификация и применение при социально-значимых и инфекционных заболеваниях” [55]. Главным результатом проекта должна стать разработка новых методов и технологий, позволяющих преодолеть два основных барьера систем машинного обучения и ИИ: проблему ошибок и проблему явного объяснения решений. Руководитель проекта профессор Александр Горбань так объяснил основную идею проекта: “Эти проблемы тесно связаны: без возможности логического прочтения ошибки ИИ будут оставаться необъяснимыми. Дообучение системы в рамках существующих методов может повредить имеющиеся навыки и, с другой стороны, может потребовать огромных ресурсов, что в серьезных задачах непрактично. К примеру, широко известная система когнитивных вычислений IBM Watson потерпела неудачу на рынке персонализированной медицины вследствие систематически совершаемых ошибок в диагностике и рекомендации лечения рака, найти и устранить источники которых не удалось".

Далее приведено краткое описание моделей объяснимого ИИ и научных центров, которые занимаются данными исследованиями в рамках программы DARPA по объяснимому ИИ [54].

1. Глубокий объяснимый ИИ (DEXAI) в UCB. Команда Калифорнийского университета в Беркли (UCB) (включая исследователей из Бостонского университета, Амстердамского университета и Kitware) разрабатывает систему ИИ, понятную человеку благодаря явной структурной интерпретации и интроспективному объяснению, которая обладает предсказуемым поведением и обеспечивает соответствующую степень доверия [56]. Ключевые проблемы глубокого объяснимого ИИ (DEXAI) состоят в том, чтобы генерировать точные объяснения поведения модели и выбирать те, которые наиболее полезны для пользователя. UCB обращается к первой проблеме, создавая неявные или явные модели объяснения: они могут неявно представлять сложные скрытые представления понятным образом или строить явные структуры, которые по своей сути понятны. Эти модели DEXAI создают набор возможных объяснительных действий. Для второй проблемы UCB предлагает рациональные объяснения, которые используют модель убеждений пользователя при принятии решения, какие объяснительные действия выбрать. UCB также создает интерфейс объяснения, основанный на этих нововведениях и на принципах интерактивной разработки. Автономные модели DEXAI применяются для управления транспортными средствами (с помощью набора данных Berkeley Deep Drive и симулятора CARLA) [57], а также в сценариях стратегической игры (StarCraft II). Для данных аналитики DEXAI использует визуальные ответы на вопросы (VQA) и методы фильтрации (например, с помощью больших наборов данных, таких, как VQA-X и ACT-X для задач VQA и задач распознавания активности), xView и Distinct [58].

2. Причинно-следственные модели для объяснения машинного обучения (CRA). Цель команды Charles River Analytics (CRA) (включая исследователей из Массачусетского университета и Университета Брауна) – создать и предоставить каузальные объяснения работы машинного обучения с помощью причинно-следственных моделей (CAMEL). Объяснения CAMEL представлены пользователю в виде рассказов в интерактивном, интуитивно понятном интерфейсе. CAMEL включает в себя структуру каузального вероятностного программирования, которая объединяет представления и методы обучения из каузального моделирования [59] с вероятностными языками программирования [60]. Генеративные вероятностные модели, представленные на языке вероятностного программирования, естественным образом выражают причинно-следственные связи; они хорошо подходят для задачи по объяснению систем машинного обучения. CAMEL исследует внутреннее представление системы машинного обучения, чтобы выявить, как оно представляет определенные пользователем концепции естественной области. Затем он строит причинно-следственную модель их влияния на работу системы машинного обучения, проводя эксперименты, в которых области согласования систематически включаются или удаляются. После изучения он использует причинно-вероятностные модели для вывода объяснений предсказаний или действий системы. В области анализа данных CAMEL решает задачу обнаружения пешеходов (с помощью набора данных о пешеходах INRIA) [61], а CRA работает над задачами распознавания активности (с использованием ActivityNet). Свойство автономности CAMEL демонстрируется в игре Atari Amidar, и CRA работает в StarCraft II.

3. Изучение и передача объяснимых представлений для аналитики и автономности. Команда Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе (UCLA) (совместно с исследователями из Университета штата Орегон и Университета штата Мичиган) разрабатывает интерпретируемые модели, сочетающие репрезентативные парадигмы, включая интерпретируемые глубокие нейронные сети, композиционные графические модели вида И/ИЛИ графики и модели, которые производят объяснения на трех уровнях (композиционности, причинности и полезности). Система UCLA содержит модуль исполнения, который выполняет задачи с мультимодальными входными данными, и модуль объяснения, который объясняет пользователю свое восприятие, когнитивные рассуждения и решения. Модуль исполнения выводит интерпретируемые представления в виде графа пространственного, временного и причинного анализа (STC-PG) для трехмерного восприятия сцены (для аналитики) и планирования задач (для автономности). STC-PG являются композиционными, вероятностными, интерпретируемыми и основанными на принципах глубоких нейронных сетей и используются для анализа изображений и видео. Модуль объяснения выводит поясняющий синтаксический граф в виде диалога [62], локализует соответствующий подграф в STC-PG и определяет намерения пользователя. UCLA охватывает обе

проблемные области XAI, применяя общую структуру представления и вывода. В области анализа данных UCLA продемонстрировал свою систему с помощью сети видеокамер для понимания сцены и анализа событий. Автономность UCLA показана в сценариях с использованием роботов, выполняющих задачи на платформах виртуальной реальности с реалистичной физикой, и в игре с вождением автономного транспортного средства.

4. Тестирование глубоких адаптивных программ с обоснованной информацией. Университет штата Орегон (OSU) разрабатывает инструменты для объяснения действий обученных агентов, которые выполняют последовательное принятие решений и определяют лучшие принципы разработки пользовательских интерфейсов с объяснениями. Модель объяснимого агента OSU использует объяснимую глубокую адаптивную программу (xDAP), сочетающую в себе адаптивные программы, глубокое обучение с подкреплением (RL) и объяснимость. С помощью xDAP программисты могут создавать агентов, представляющих решения, которые автоматически оптимизируются посредством глубокого RL при взаимодействии с симулятором. Для каждой точки выбора глубокое RL подключает обученную глубокую нейронную сеть для принятия решений (dNN), которая может обеспечить высокую производительность, но по своей сути не является объяснимой. После начального обучения xDAP программа xACT обучает объяснительную нейронную сеть [63] для каждой dNN. Они предоставляют разреженный набор функций объяснения (x-функций), которые кодируют свойства логики принятия решений dNN. Такие x-функции, которые являются нейронными сетями, изначально не интерпретируемыми человеком. Чтобы решить эту проблему xACT позволяет экспертам в предметной области прикреплять интерпретируемые описания к x-функциям, а программистам xDAP – аннотировать типы вознаграждений среды и другие концепции, которые автоматически встраиваются в dNN как “концепции аннотаций” во время обучения.

Пользовательский интерфейс объяснения OSU позволяет пользователям ориентироваться в тысячах решений агента и получить объяснения визуально и на естественном языке. Его конструкция основана на теории сбора информации, которая дает возможность пользователю в любой момент эффективно перейти к наиболее полезной пояснительной информации. OSU занимается проблемой автономности и продемонстрировала xACT в сценариях с использованием специально созданного игрового движка для стратегии в реальном времени. Пилотные исследования предоставили информацию для объяснения дизайна пользовательского интерфейса, охарактеризовав то, как пользователи ориентируются в игре с ИИ-агентом и стремятся объяснить игровые решения [64].

5. Общее обучение и объяснение. Команда Исследовательского центра Пало-Альто (PARC) (включая исследователей из Университета Карнеги-Меллона, Армейского кибер-института, Эдинбургского университета и Университета Мичигана) разрабатывает интерактивную систему объяснений, которая может объяснить возможности системы XAI, управляющей смоделированной беспилотной воздушной системой. Объяснения системы XAI должны сообщать, какую информацию она использует для принятия решений, понимает ли она, как все работает. Чтобы решить эту проблему, система общего изучения и объяснения PARC (COGLE) и ее пользователи устанавливают общую основу для определения того, какие термины применять в объяснениях и их значения. Это обеспечивается интроспективной моделью дискурса PARC, которая чередует процессы обучения и объяснения.

Многоуровневая архитектура COGLE разделяет обработку информации на осмысление, когнитивное моделирование и обучение. Уровень обучения использует повторяющиеся и иерархические глубокие нейронные сети с ограниченной пропускной способностью для создания абстракций и композиций по состояниям и действиям беспилотных воздушных систем для поддержки понимания обобщенных закономерностей.

Интерфейсы пояснений COGLE поддерживают анализ производительности, оценку рисков и обучение. Первый представляет собой карту, которая отслеживает действия беспилотных воздушных систем и разделяет путь действия или решения (полета) на объяснимые сегменты. Инструменты второго интерфейса позволяют пользователям изучать и оценивать компетенции системы и делать прогнозы относительно эффективности миссии. COGLE демонстрируется на программном симуляторе ArduPilot Software-in-the-Loop Simulator и на испытательном стенде дискретного абстрактного моделирования. Его качество оценивают операторы дронов и аналитики. Оценка на основе компетенций поможет PARC определить, как лучше всего разработать подходящие модели, понятные для предметной области.

6. Объяснимое обучение с подкреплением (RL) в Университете Карнеги-Меллон. Университет Карнеги-Меллон создает новую дисциплину объяснимого RL, чтобы обеспечить динамиче-

ское взаимодействие человека с машиной и адаптацию для максимальной производительности команды. Ученые преследуют две цели: разработать новые методы изучения объяснимых алгоритмов RL и создавать стратегии, которые могут объяснить существующие проблемы черного ящика. Для достижения первой цели Карнеги-Меллон разрабатывает методы улучшения обучения моделей для агентов RL, чтобы использовать преимущества подходов, основанных на моделях (способность визуализировать планы во внутреннем пространстве модели), в то же время объединяя их с преимуществами подходов без моделей (простотой и максимальной производительностью). К ним относятся методы, которые постепенно добавляют состояния и действия к моделям мира после обнаружения соответствующей скрытой информации, изучают модели посредством сквозного обучения комплексными алгоритмам оптимального управления, исследуют общие модели DL, которые используют физику твердого тела [65], и изучают предсказания состояний с помощью повторяющихся архитектур [66].

Университет Карнеги-Меллон также разрабатывает методы, которые могут объяснить действия и планы агентов RL черного ящика. Методы включают в себя ответы на такие вопросы, как, например, “Почему агент выбрал определенное действие”, или “Какие данные обучения больше всего повлияли на этот выбор”. Для этого университет разработал методы, которые генерируют описания агентов из журналов поведения и обнаруживают выбросы или аномалии. Университет Карнеги-Меллон занимается проблемой автономности и продемонстрировал объяснимый RL в нескольких сценариях, включая OpenAI Gym, игры Atari, моделирование автономных транспортных средств, мобильных сервисных роботов.

7. Объяснимые генеративные состязательные сети. Команда SRI International (включая исследователей из Университета Торонто, Университета Гвельфа и Калифорнийского университета в Сан-Диего) разрабатывает объяснимую структуру машинного обучения для анализа мультимодальных данных, которая генерирует понятные объяснения с обоснованием решений, сопровождаемых визуализацией входных данных, используемых для создания выводов. Система представлений на основе глубокого внимания для объяснимых генеративных состязательных сетей (DARE/X-GANS) применяет архитектуры DNN, аналогичные моделям внимания в визуальной нейробиологии. Она идентифицирует, извлекает и представляет доказательства пользователю как часть объяснения. Механизмы внимания предоставляют пользователю средства для исследования системы и совместной работы. DARE/X-GANS использует генеративные состязательные сети (GAN), которые учатся понимать данные, создавая их, одновременно изучая представления с объяснительными возможностями. Сети GAN становятся объяснимыми с помощью интерпретируемых декодеров. Это включает в себя создание визуальных доказательств по заданным текстовым запросам с помощью генерации текста по частям [67], причем части являются интерпретируемыми функциями, такими, как человеческие позы или ограничивающие рамки. Это свидетельство затем применяется для поиска запрошенных визуальных данных.

8. Система ответов на объяснимые вопросы. Команда Raytheon BBN Technologies (включая исследователей из Технологического института Джорджии, Массачусетского технологического института и Техасского университета в Остине) разрабатывает систему, которая отвечает на любые вопросы на естественном языке (NL), задаваемые пользователями о мультимедийных данных, и обеспечивает интерактивные возможные объяснения того, почему он получил такой ответ. Система объяснимых ответов на вопросы (EQUAS) изучает объяснимые модели DNN, в которых внутренние структуры (например, отдельные нейроны) согласованы с семантическими концепциями (например, колеса и руль) [68]. Это позволяет преобразовывать нейронные активации в сети в процессе принятия решения в объяснения NL (например, “этот объект является велосипедом, потому что у него два колеса и руль”). EQUAS также использует методы нейронной визуализации, чтобы выделить входные области, связанные с нейронами, которые больше всего повлияли на его решения. Чтобы выразить объяснения на основе случаев, EQUAS сохраняет индексы и извлекает случаи из своих обучающих данных, которые поддерживают его выбор. Отклоненные альтернативы распознаются и исключаются с помощью контрастного языка, визуализации и примеров. Четыре способа объяснения соответствуют ключевым элементам построения аргументов и интерактивного обучения: дидактическим утверждениям, визуализациям, случаям и отказу от альтернативных вариантов.

9. Управляемые вероятностные логические модели. Команда Техасского университета в Далласе (UTD) (включая исследователей из Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе, Texas A&M и Индийского технологического института в Дели) разрабатывает единый подход к XAI с помощью управляемых вероятностных логических моделей (TPLM). TPLM – это семейство представлений, которое включает в себя деревья решений, диаграммы двоичных решений, сети

сечений, диаграммы сентенциальных решений, арифметические схемы первого порядка и управляемую логику Маркова [69]. Система UTD расширяет TPLM для генерации объяснений результатов запроса. Для масштабируемого вывода система применяет новые алгоритмы для ответа на сложные запросы с объяснением, используя такие методы, как обобщенный вывод, вариационный вывод и их комбинации.

10. Техасский университет A&M (TAMU). Команда Техасского университета A&M (TAMU) (включая исследователей из Вашингтонского государственного университета) разрабатывает интерпретируемую структуру DL, которая использует имитационное обучение для применения объяснимых неглубоких моделей и облегчает интерпретацию предметной области с визуализацией и взаимодействием. Интерпретируемые алгоритмы обучения системы извлекают знания из DNN для соответствующих объяснений. Его модуль DL подключается к модулю генерации шаблонов, используя интерпретируемость неглубоких моделей. Результаты обучения отображаются пользователям с визуализацией, включая скоординированные и интегрированные представления. Система TAMU обрабатывает данные изображений [70] и текст [71] и применяется в проблемной области аналитики XAI. Он обеспечивает эффективную интерпретацию обнаруженных неточностей из различных источников, сохраняя при этом конкурентоспособные характеристики обнаружения. Система TAMU сочетает интерпретируемость на уровне модели и на уровне экземпляра для генерации объяснений, которые легче понять пользователям. Эта система была развернута для решения множества задач с использованием данных из Twitter, Facebook, ImageNet, CIFAR-10, онлайн-форумов по вопросам здравоохранения и новостных веб-сайтов.

11. Объяснение модели с помощью оптимального выбора обучающих примеров (Rugers University). Университет Руджерс расширяет возможности байесовского обучения, чтобы сделать возможным автоматическое объяснение, выбирая подмножество данных, которое является наиболее репрезентативным для вывода модели. Этот подход также позволяет объяснить выводы любой вероятностной генеративной и дискриминативной модели, а также моделей глубокого обучения [72]. Университет Руджерс также разрабатывает формальную теорию взаимодействия человека и машины и поддерживает интерактивное объяснение сложных композиционных моделей. Распространенным среди них является подход, основанный на моделях человеческого обучения, которые способствуют объяснимости, и тщательно контролируемых поведенческих экспериментах для количественной оценки объяснимости. Объяснение с помощью байесовского обучения вводит набор данных, вероятностную модель и метод вывода и возвращает небольшое подмножество примеров, которые лучше всего объясняют вывод модели. Было продемонстрировано, что данный подход облегчает понимание больших корпусов текстов, что оценивается способностью человека точно составить резюме корпуса после коротких, управляемых объяснений. Университет Руджерс занимается проблемной областью анализа данных и продемонстрировал свой подход на изображениях, тексте, их комбинациях (например, VQA) и структурированном моделировании с использованием временной причинно-следственной структуры.

Заключение. В статье делается попытка обзора существующих алгоритмов извлечения правил из ИНС сетей и моделей машинного обучения. Некоторые из современных алгоритмов делятся на три категории – декомпозиционные, педагогические и эклектические. Особое внимание уделяется извлечению правил из нейронечетких сетей. Изучение нечеткой логики достигло кульминации в конце XX в., и с тех пор начало уменьшаться. Это снижение может быть частично связано с отсутствием результатов в машинном обучении. Извлечение правил является одним из способов помочь понять нейронные сети. Эти исследования проложат путь для исследователей нечеткой логики для разработки приложений в области ИИ и решения сложных проблем, которые также представляют интерес для сообщества машинного обучения. Опыт и знания в области нечеткой логики хорошо подходят для моделирования неоднозначностей в больших данных, моделирования неопределенности в представлении знаний и обеспечения обучения передаче с неиндуктивным выводом. Рассматривается также извлечение правил из сетей глубокого обучения, которые в настоящее время обеспечивают приемлемое решение для множества проблем ИИ. Это новая область машинного обучения, которая, как считается, продвигает машинное обучение на шаг вперед в области распознавания образов и понимании текстов. Но с точки зрения объяснений – это все еще модель черного ящика. В последние несколько лет проблема была расширена на общую концепцию и извлечения знаний из алгоритмов машинного обучения – объяснимый ИИ. Достижения в машинном обучении и рост вычислительных мощностей привели к разработке интеллектуальных систем, которые применяются, чтобы рекомендовать фильм, диагностировать злокачественную опухоль, принимать инвестиционные решения или вести машину без водителя. Однако эффективность этих систем ограничена невозможностью объяснить решения и действия пользователю. Программа объяснимого ИИ DARPA разрабатывает и оценивает широкий спектр новых методов машинного обучения: модифицированные методы глубокого обучения, которые изучают объяснимые функции; методы, которые исследуют более структурированные, интерпретируемые причинные модели; методы индуктивных моделей, которые выводят объяснимую модель из любой модели черного ящика. Полученные технологии и результаты показывают, что эти три стратегии заслуживают дальнейшего изучения и предоставят будущим разработчикам варианты дизайна, увеличивающие производительность и объяснимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bilgic M., Mooney R.J.* Explaining Recommendations: Satisfaction vs. Promotion // Beyond Personalization Workshop. 2005. V. 5. P. 153.
2. *Swartout W.R., Moore J.D.* Explanation in Second Generation Expert Systems. Second Generation Expert Systems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. P. 543–585.
3. *Chandrasekaran B., Tanner M.C., Josephson J.R.* Explaining Control Strategies in Problem Solving // IEEE Expert. 1989. V. 4 (1). P. 9–15.
4. *Dhaliwal J.S., Benbasat I.* The Use and Effects of Knowledge-Based System Explanations: Theoretical Foundations and a Framework for Empirical Evaluation // Information Systems Research. 1996. V. 7 (3). P. 342–362.
5. *Eining M.M., Dorr P.B.* The Impact of Expert System Usage on Experiential Learning in an Auditing Setting // Information Systems. 1991. V. 5 (1). P. 1–16.
6. *Murphy D.S.* Expert System Use and the Development of Expertise in Auditing: A preliminary investigation // Information System, 1990. V. 4. P. 18–35.
7. *Lamberti D.M., Walace W.A.* Intelligent Interface Design: An Empirical Assessment of Knowledge Presentation in Expert Systems // MIS Quarterly. 1990. V. 14. P. 279–311.
8. Искусственный интеллект. Справочник в 3-х т. / Под ред. В.Н. Захарова, Э.В. Попова, Д.А. Поспелова, В.Ф. Хорошевского. М.: Радио и связь, 1990.
9. *Попов Э.В.* Экспертные системы: Решение неформализованных задач в диалоге с ЭВМ. М.: Наука, 1987. 288 с.
10. *Swartout W.R.* A Digitalis Therapy Advisor with Explanations // Proc. 5th International Joint Conf. on Artificial Intelligence. Cambridge, 1977. V. 2. P. 819–825.
11. *Weiner J.L.* BLAH, A System that Explains its Reasoning // Artificial Intelligence, 1980. V. 15. P. 19–48.
12. *Swartout W.R., Paris C., Moore J.* Explanations in Knowledge Systems: Design for Explainable Expert Systems // IEEE Expert. 1991. V. 6 (3). P. 58–64.
13. *Clancey W.J.* Intelligent Tutoring Systems: A Tutorial Survey. Stanford: Stanford University Department of Computer Science, 1986. 56 p.
14. *Sinha R., Swearingen K.* The Role of Transparency in Recommender Systems // CHI'02 Extended Abstracts on Human Factors in Computing Systems. Minneapolis, 2002. P. 830–831.
15. *Gruber T.* Learning Why by Being Told What // IEEE Expert. 1991. V. 6 (4). P. 65–75.
16. *Clancey W.J.* Details of the Revised Therapy Algorithm. Rule-Based Expert Systems. The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984. P. 133–146.
17. *Clancey W.J.* From GUIDON to NEOMYCIN and HERACLES in Twenty Short Lessons // AI Magazine. 1986. V. 7 (3). P. 40.
18. *Arioua A., Buche P., Croitoru M.* Explanatory Dialogs with Argumentative Faculties Over Inconsistent Knowledge Bases // Expert Systems with Applications. 2017. V. 80. P. 244–262.
19. *Johansson U., Lofstrom T., Konig R., Sonstro C., Nilsson L.* Rule Extraction from Opaque Models—a Slightly Different Perspective // 5th Intern. Conf. on Machine Learning and Applications (ICMLA'06). Orlando, FL, USA, 2006. P. 22–27.
20. *Craven M., Shavlik J.* Rule extraction: Where Do We Go from Here. University of Wisconsin Machine Learning Research Group Working Paper. Wisconsin, 1999. P. 99–108.
21. *Andrew, R., Diederich J., Tickle A.B.* Survey and Critique of Techniques for Extracting Rules from Trained Artificial Networks // Knowledge-based Systems. 1995. V. 8 (6). P. 373–389.
22. *Thrum S.* Extracting Provably Correct Rules from Artificial Neural Networks. Technical report. Bonn: Institut für Informatik III, 1993.
23. *Craven M., Shavlik J.W.* Using Sampling and Queries to Extract Rules from Trained Neural Networks // Proc. Eleventh Intern. Conf. Rutgers University. New Brunswick, USA, 1994. P. 37–45.
24. *Fu L.* Rule Generation from Neural Networks // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1994. V. 24 (8). P. 1114–1124.

25. *Sato M., Tsukimoto H.* Rule Extraction from Neural Networks via Decision Tree Induction // Proc. Intern. Joint Conf. on Neural Networks (IJCNN'01). Washington, DC, 2001. V. 3. P. 1870–1875.
26. *Tickle A.B., Andrew R., Golea M., Diederich J.* The Truth Will Come to Light: Directions and Challenges in Extracting the Knowledge Embedded within Trained Artificial Neural Networks // IEEE Transactions on Neural Networks. 1998. V. 9 (6). P. 1057–1068.
27. *Sethi K.K., Mishra D.K., Mishra B.* KDRuleEx: A novel approach for enhancing user comprehensibility using rule extraction // Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS), Third Intern. Conf. Kota Kinabalu, Malaysia, 2012. P. 55–60.
28. *Johansson U., Lofstrom T., Konig R., Sonstrod C., Niklasson L.* Rule extraction from opaque models–a slightly different perspective // 5th International Conference on Machine Learning and Applications, ICMLA'06. Orlando, FL, USA, 2006. P. 22–27.
29. *Rangwala M., Weckman G.R.* Extracting Rules from Artificial Neural Networks Utilizing TREPAN // Proceedings of IIE Annual Conference. Orlando, Florida, 2006. 7 p.
30. *Hailesilassie T.* Extraction Algorithm for Deep Neural Networks: A Review// International Journal of Computer Science and Information Security, 2016. V. 14. № 7. P. 376–381.
31. *Averkin A., Yarushev S.* Hybrid Neural Networks and Time Series Forecasting // Artificial Intelligence. Communication in Computer and Information Sciences, 2018. V. 934. P. 230–239.
32. *Pilato G., Yarushev S.A., Averkin A.N.* Prediction and Detection of User Emotions Based on Neuro-Fuzzy Neural Networks in Social Networks // Proc. of the Third International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (IITI'18), Advances in Intelligent Systems and Computing. Sochi, Russia. 2018. V. 875. P. 118–126.
33. *Averkin A.N., Pilato G., Yarushev S.A.* An Approach for Prediction of User Emotions Based on ANFIS in Social Networks // Second Intern. Scientific and Practical Conf. Fuzzy Technologies in the Industry. FTI 2018– CEUR Workshop Proceedings. Ostrava–Prague, Czech Republic, 2018. P. 126–134.
34. *Jin X.-H.* Neurofuzzy Decision Support System for Efficient Risk Allocation in Public-private Partnership Infrastructure Projects // J. Comput. Civ. Eng. 2010. V. 24 (6). P. 525–538.
35. *Jin X.-H.* Model for Efficient Risk Allocation in Privately Financed Public Infrastructure Projects Using Neuro-Fuzzy Techniques // J. Constr. Eng. Manag. 2011. P. 1003–1014.
36. *Борисов В.В., Федулов А.С., Зернов М.М.* Основы гибридизации нечетких моделей. Серия "Основы нечеткой математики". Книга 9. М.: Горячая линия–Телеком, 2017. 100 с.
37. *Рудковская Д.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Пер. с пол. И.Д. Рудинского. М.: Горячая линия–Телеком, 2008. 452 с.
38. *Rajab S., Sharma V.* A Review on the Applications of Neuro-Fuzzy Systems in Business // Artif. Intell. Rev. 2018. V. 49. P. 481–510.
39. *Mitra S., Hayashi Y.* Neuro-Fuzzy Rule Generation: Survey in Soft Computing Framework // IEEE Trans. Neural Netw. 2000. V. 11 (3). P. 748–768.
40. *Vieira J., Morgado-Dias F., Mota A.* Neuro-Fuzzy Systems: a Survey // WSEAS Transactions on Systems, 2004. V. 3 (2). P. 414–419.
41. *Kim J., Kasabov N.* HyFIS: Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems and Their Application to Nonlinear Dynamical Systems // Neural Netw., 1999. V. 12 (9). P. 1301–1319.
42. *Shihabudheen K.V., Pillai G.N.* Recent Advances in Neuro-Fuzzy System: A Survey // Knowl.-Based Syst., 2018. V. 152. P. 136–162.
43. *Батыршин И.З., Недосекин А.О., Стецко А.А., Тарасов В.Б., Язенин А.В., Ярушкина Н.Г.* Нечеткие гибридные системы. Теория и практика / Под ред. Н.Г. Ярушкиной. – М.: Физматлит, 2007. – 208 с.
44. *Viharos Z.J., Kis K.B.* Survey on Neuro-Fuzzy Systems and Their Applications in Technical Diagnostics and Measurement // Measurement. 2015. V. 67. P. 126–136.
45. *Lin C.T., Lee C.S.G.* Neural Network based Fuzzy Logic Control and Decision System // IEEE Trans Comput. 1991. V. 40 (12). P. 1320–1336.
46. *Jang J.-S. R.* ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System // IEEE Trans. Systems & Cybernetics. 1993. V. 23. P. 665–685.
47. *Naderpour H., Mirrashid M.* Shear Failure Capacity Prediction of Concrete Beam-Column Joints in Terms of ANFIS and GMDH // Pract. Period. Struct. Des. Constr., 2019. V. 24 (2).
48. *Fan L.* Revisit Fuzzy Neural Network: Demystifying Batch Normalization and Relu with Generalized Hamming Network // Proc. 31st International Conference on Neural Information Processing Systems. Long Beach California USA, 2017. P. 1920–1929.
49. *Bherenji H.R., Khedkar P.* Learning and Tuning Fuzzy Logic Controllers through Reinforcements // IEEE Trans Neural Networks, 1992. V. (3). P. 724–740.
50. *Nauck D., Kruse R.* Neuro-Fuzzy Systems for Function Approximation // Fuzzy Sets and Systems, 1999. V. 101 (2). P. 261–271.

51. *Tano S., Oyama T., Arnould T.* Deep Combination of Fuzzy Inference and Neural Network in Fuzzy Inference // Fuzzy Sets and Systems. 1996. V. 82 (2). P. 151–160.

52. *Juang Chia Feng, Lin Chin Teng.* An Online Self Constructing Neural Fuzzy Inference Network and its Applications // IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998. V. 6. № 1. P. 12–32.

53. *Kasabov N., Qun Song* Dynamic Evolving Fuzzy Neural Networks with 'm-out-of-n' Activation Nodes for On-line Adaptive Systems. Technical Report TR99/04, Department of information science. Otago. University of Otago: 1999.

54. *Gunning D., Aha D.* DARPA's Explainable Artificial Intelligence (XAI) Program // AI Magazine. 2019. V. 40 (2). P. 44–58.

55. *Горбань А.Н.* Ошибки интеллекта, основанного на данных // Интеллектуальные системы в науке и технике. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI в. // Сб. ст. по матер. Междунар. конф. "Интеллектуальные системы в науке и технике" и Шестой всероссийской научно-практической конф. "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века". Пермь, 2020. С. 11–13.

56. *Hu R., Andreas J., Rohrbach M., Darrell T., Saenko K.* Learning to Reason: End-to-End Module Networks for Visual Question Answering // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. N. Y.: IEEE, 2017. P. 804–813.

57. *Kim J., Canny J.* Interpretable Learning for Self-Driving Cars by Visualizing Causal Attention // Proc. Intern. Conf. on Computer Vision. N. Y.: IEEE, 2017. P. 2942–295.

58. *Hendricks L.A., Darrell T., Akata Z.* Grounding Visual Explanations // European Conf. of Computer Vision (ECCV). Munich, Germany: Springer, 2018.

59. *Marazopoulou K., Maier M., Jensen D.* Learning the Structure of Causal Models with Relational and Temporal Dependence // Proc. Thirty-First Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Association for Uncertainty in Artificial Intelligence. Amsterdam, Netherlands, 2015. P. 572–581.

60. *Pfeffer A.* Practical Probabilistic Programming. Greenwich, CT: Manning Publications, 2016.

61. *Harradon M., Druce J., Ruttenberg B.* Causal Learning and Explanation of Deep Neural Networks via Autoencoded Activations. arXiv preprint. arXiv:1802.00541v1 [cs.AI]. Ithaca, N.Y.: Cornell University Library, 2018.

62. *She L., Chai J. Y.* Interactive Learning for Acquisition of Grounded Verb Semantics towards Human-Robot Communication // Proc. 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2017. V. 1. P. 1634–1644.

63. *Qi Z., Li F.* Learning Explainable Embeddings for Deep Networks // NIPS Workshop on Interpreting, Explaining and Visualizing Deep Learning. Long Beach, 2017. 4 p.

64. *Dodge J., Penney S., Hilderbrand C., Anderson A., Burnett M.* How the Experts Do It: Assessing and Explaining Agent Behaviors in Real-Time Strategy Games // Proc. CHI Conference on Human Factors in Computing Systems. N. Y.: Association for Computing Machinery, 2018. P. 1–12.

65. *Belbute-Peres F., Kolter J. Z.* A Modular Differentiable Rigid Body Physics Engine // Neural Information Processing Systems. Deep Reinforcement Learning Sympos. Long Beach, CA, 2017. 7 p.

66. *Hefny A., Marinho Z., Sun W., Srinivasa S., Gordon G.* Recurrent Predictive State Policy Networks // Proc. 35th Intern. Conf. on Machine Learning. International Machine Learning Society. Stockholm, Sweden, 2018. P. 1949–1958.

67. *Vicol P., Tapaswi M., Castrejon L. Fidler S.* MovieGraphs: Towards Understanding Human-Centric Situations from Videos // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. N. Y.: IEEE, 2018. P. 4631–4640.

68. *Zhou B., Khosla A., Lapedriza A., Oliva A., Torralba A.* Object Detectors Emerge in Deep Scene CNNs // Paper Presented at the Intern. Conf. on Learning Representations. San Diego, CA, 2015.

69. *Gogate V., Domingos P.* Probabilistic Theorem Proving // Communications of the ACM. 2016. V. 59(7). P. 107–15.

70. *Du M., Liu N. Song Q., Hu X.* Towards Ex Planation of DNN-Based Prediction and Guided Feature Inversion // Proc. 24th ACM SIGKDD Intern. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining. N. Y.: Association for Computing Machinery, 2018. P. 1358–67.

71. *Gao J., Liu N., Lawley M., Hu X.* An Interpretable Classification Framework for Information Extraction from Online Healthcare Forums // J. Healthcare Engineering, 2017. V. 2017. 12 p.

72. *Yang S.C.-H., Shafto P.* Explainable Artificial Intelligence via Bayesian Teaching // Paper Presented at the 31st Conf. on Neural Information Processing Systems Workshop on Teaching Machines, Robots and Humans. Long Beach, CA, 2017.

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

УДК 517.977, 620.9

ПОДДЕРЖКА УПРАВЛЕНИЯ ЖИВУЧЕСТЬЮ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНОГО ПОДХОДА[1]

И. В. Бычков[a], С. А. Горский[a], А. В. Еделев[b,]*, Р. О. Костромин[a], И. А. Сидоров[a], А. Г. Феоктистов[a], Е. С. Фереферов[a], Р. К. Федоров[a]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*

[b] *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН Иркутск, Россия*

**e-mail: flower@isem.irk.ru*

Поступила в редакцию 21.08.2020 г.
После доработки 15.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается новый подход к созданию предметно-ориентированной разнородной распределенной вычислительной среды. Она используется для поддержки принятия решений по актуальным проблемам повышения живучести систем энергетики. Подход основан на применении высокопроизводительных вычислений, мультиагентного планирования вычислений и назначения ресурсов, средств обработки слабоструктурированной информации и визуализации предметных данных с помощью электронных карт. Оценка альтернатив принятия решений осуществляется с помощью комбинаторного моделирования и многокритериальной оптимизации. Инструментарий Orlando Tools используется в качестве основы интегрированного программного обеспечения среды. Он реализует гибкое модульное построение масштабируемых научных приложений (распределенных пакетов прикладных программ). Преимущества применения среды продемонстрированы на примере решения практических задач.

DOI: 10.31857/S000233882106007X

Введение. Система энергетики (СЭ) является сложной человеко-машинной системой, предназначенной для добычи (производства, получения), переработки (преобразования), передачи (транспортирования), хранения и распределения энергоресурсов и снабжения ими потребителей [1]. Подверженность СЭ крупным возмущениям определяется ее территориальной сложностью и распределенностью, а также конструктивными особенностями ее оборудования. В качестве крупных возмущений рассматриваются природные катаклизмы (наводнения, землетрясения, ураганы и т.п.), техногенные катастрофы, вызванные отказом компонент или подсистем СЭ, и преднамеренные нарушения ее работоспособности (террористические акты, кибератаки и т.п.) [2].

Объектом исследования в данной статье выступает живучесть СЭ, как способность системы противодействовать крупным возмущениям и быстро восстанавливаться в случае их возникновения. На данную способность большое влияние оказывают физические особенности процессов, протекающих в СЭ. Например, в системах тепло-, газо-, нефте- и нефтепродуктоснабжения они намного более инерционны, чем в электроэнергетических системах. Также живучесть зависит от такой черты современных СЭ, как сильная взаимосвязанность их составляющих и самих систем между собой. Сбои, возникающие в результате крупного возмущения в одной части СЭ, могут вызывать аварии в других частях и по взаимосвязям передаться в другие системы [3]. Каскадное развитие аварий проявляется в электроэнергетических системах в нарушениях параллельной работы электростанций, а в системах тепло-, газо-, нефте- и нефтепродуктоснабжения – при гидравлическом ударе [1]. Возможность каскадного развития аварий в СЭ в значительной степени, помимо инерционности процессов и взаимосвязей, зависит от особенностей и принципов организации управления системой.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-00097-а), а также РФФИ и Правительства Иркутской области (проект № 20-47-380002-р_а).

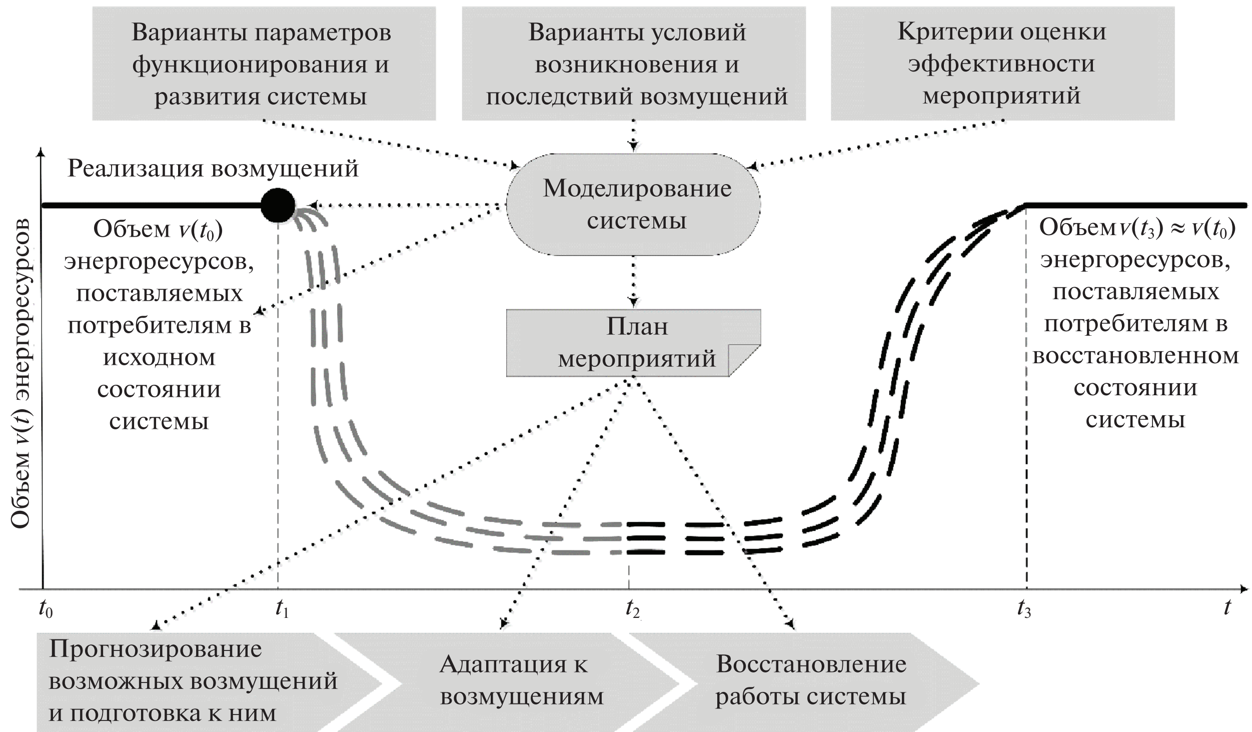


Рис. 1. Общая схема управления живучестью СЭ

Управление живучестью СЭ строится на упреждающем планировании комплекса мероприятий по подготовке системы к противодействию возмущениям и адаптации к ним с последующим восстановлением ее производительности (рис. 1). Как правило, такая подготовка заключается в диверсификации источников энергоресурсов и способов их доставки, обеспечении необходимой избыточности производственных и транспортных мощностей, а также запасов энергоресурсов. Адаптация и восстановление системы осуществляется путем ее динамической реконфигурации, использования резервных мощностей и временного компенсирования требуемых объемов энергоресурсов. Хотя перечисленные мероприятия и повышают производительность системы, часто она не может быстро вернуться к тому уровню, что был до возмущения. Это в основном определяется тяжестью последствий возмущения и продолжительностью операций по восстановлению элементов СЭ.

В статье рассматривается проблема поддержки управления живучестью СЭ, причем большая часть внимания уделяется поддержке анализа живучести СЭ, результаты которого являются основой для планирования повышения живучести СЭ. Анализ живучести СЭ состоит из моделирования крупных возмущений и количественной оценки масштаба и величины их последствий. В целом, моделирование возмущений направлено на выявление недостатков в конструкции и механизмах управления системой, которые могут способствовать распространению крупного возмущения по ней самой и также по взаимосвязанным системам. В литературе предложено множество разнообразных показателей для количественной оценки последствий возмущений [4]. Они должны в достаточной мере отражать производительность системы и временной аспект, поскольку производительность реальной СЭ после возникновения крупного возмущения значительно меняется с течением времени (рис. 1).

Специфическая особенность анализа живучести СЭ – необходимость в вычислительном эксперименте, суть которого заключается в комбинаторном формировании и переборе множества сочетаний изменяющихся условий внешней среды с параметрами функционирования и развития системы. Эти сочетания представляют собой возможные сценарии крупных возмущений. В ходе перебора происходит оценка последствий возмущений и из сценариев выбираются наиболее представительные, т.е. имеющие наибольшие по величине или масштабу последствия. По отношению к последним затем выбираются инвариантные мероприятия по повышению живучести СЭ [1].

Так как общее число сценариев может быть чрезвычайно велико, то проведение многовариантных расчетов для оценки последствий возмущений представляет собой одну из задач, которая должна решаться в рамках поддержки управления живучестью СЭ. К другим нерешенным практическим задачам этой области относятся [5]: отсутствие комплексных подходов, позволяющих объединять различные методы анализа живучести СЭ; обеспечение многокритериальной оценки планируемых мероприятий по повышению живучести СЭ; обработка слабоструктурированной предметной информации и больших массивов результатов расчетов. С другой стороны, управление живучестью СЭ является многоэтапным процессом. Широкий спектр специалистов (математиков, прикладных и системных программистов, администраторов приложений, экспертов предметной области) задействуются на разных этапах. Таким образом, поддержка управления живучестью СЭ на основе комбинаторного моделирования обоснованно нуждается в инструментальном окружении, осуществляющем интеграцию необходимого программного и математического обеспечения, а также доступ к требуемым ресурсам, включая высокопроизводительные вычисления.

В связи с этим представлена новая предметно-ориентированная вычислительная среда для поддержки управления живучестью СЭ национального уровня. Обоснован выбор подхода к моделированию взаимосвязанной работы таких систем. Предложена схема комплексной оценки их живучести на основе комбинаторного подхода и поддержки принятия решений при планировании повышения живучести СЭ. Сформулирована постановка задачи многокритериальной оценки эффективности плана мероприятий по повышению живучести СЭ. Рассмотрены средства построения среды, преимущества применения которой показаны на примере поддержки управления живучестью Единой системы газоснабжения России, конкретнее при решении задачи определения ее наиболее важных элементов.

1. Подходы к моделированию СЭ. Как было сказано выше, возмущения могут распространяться между СЭ по взаимосвязям между ними. Наиболее часто используется следующая классификация [6] взаимосвязей: физические, представляющие поток ресурса от одного элемента к другому; коммуникационные для передачи данных состояния и управления; пространственные связи для представления зависимости между элементами, находящимися в одной местности; логические, куда входят связи, не относящиеся к вышеперечисленным категориям.

Сравнительный анализ известных подходов к моделированию критических инфраструктур, которые могут применяться в рамках управления живучестью СЭ, показывает, что подходы представляют исследуемые объекты в виде сети и используют принцип “система систем” для моделирования их совокупности [7]. Эти подходы условно делятся на две большие группы по территориальной иерархии. Первая группа ориентирована на международный и национальный уровни. Вторая группа фокусируется на региональном уровне и ниже. Далее рассмотрены четыре специфические группы таких подходов.

1.1. Сетевые топологические подходы. Применение теории сложных сетей лежит в основе топологических методов исследования критических инфраструктур [8, 9]. При анализе больших территориально-распределенных систем, таких, как СЭ, эта теория зачастую применяется для изучения их поведения при преднамеренных воздействиях или случайных отказах, в том числе в случае каскадного характера развития возмущений [10].

Основным преимуществом топологических методов является возможность использования разнообразных показателей для количественной оценки важности элементов сети и структурной уязвимости самой сети, например влияния удаления элементов сети на ее работоспособность [11]. Описание подобных показателей может быть выполнено с помощью унифицированного формализованного метода [12]. Важность элементов сети определяется на основе их топологических свойств (например, средней длины пути, центральности дуг и вершин, размера наибольшего связанного компонента и эффективности сети) для огрубленных моделей или с дополнительным учетом характеристик (например, сопротивления линий электропередач и труб в сетях электроснабжения и теплоснабжения соответственно), определяемых спецификой предметной области [13]. Наличие дополнительных характеристик позволяет проводить более детальные исследования.

1.2. Сетевые потоковые подходы. Известен широкий спектр подходов к исследованию взаимосвязанных инфраструктур на основе линейных потоковых моделей для анализа воздействия возмущений. В их числе – отечественные модели энергетического комплекса страны [14, 15] и модель энергетики США [16]. Эти модели предназначены для анализа возможных последствий крупных возмущений и оценки эффективности мероприятий по повышению живучести СЭ. Они также применимы для исследования взаимосвязей СЭ преимущественно физического и лишь отчасти пространственного типов.

Основным преимуществом линейных потоковых моделей является то, что описание потоков в разнородных системах осуществляется на базе единой математической формулировки. В то же время такие модели не подходят для анализа влияния локальных отказов элементов (и связанных с ними перегрузок) на производительность взаимосвязанных систем, поскольку они не отражают физические законы движения потоков ресурсов в полной мере. Как следствие, они могут быть неприменимы для изучения каскадного распространения возмущений [17].

1.3. Гибридные автоматы. Подход к описанию топологии и поведения инфраструктуры на разных уровнях абстракции с задействованием открытых гибридных автоматов представлен в [18]. Его особенностью является применение композиционного построения иерархических моделей, обеспечивающего более широкие возможности по описанию их поведения по сравнению с представителями рассмотренной выше второй группы. В рамках данного подхода сначала разрабатываются модели инфраструктур меньшего масштаба. Затем они служат основой для создания моделей более высокого уровня. Отдельные модели могут быть как непрерывными, так и дискретными. Этот подход может использоваться для моделирования возмущений каскадного характера. Он поддерживает описание всех типов взаимосвязей, приведенных выше.

1.4. Интеграционные подходы. Характерной чертой таких подходов к исследованию критических инфраструктур является возможность одновременной оценки технических, социальных, экономических и прочих последствий воздействия возмущения на систему.

В [19, 20] предложен общий подход к моделированию взаимосвязанных инфраструктур. Модель каждой из них включает две части: структурную и функциональную. Структурная часть представляет топологию системы в виде графа, который в общем случае может быть ориентированным. Функциональная часть описывает распределение потока по системе и ее реакцию на воздействие возмущений.

Структурные модели отдельных систем объединяются в общую структурную модель на основе предопределенных взаимосвязей между ними. Выделяется три категории взаимосвязей: функциональные, пространственные и их сочетание. Функциональные связи агрегируют физические, кибернетические и логические связи.

Внешние воздействия представлены в виде структурных и функциональных возмущений. Структурные возмущения реализуются путем экранирования элементов инфраструктуры в ее модели. Функциональные возмущения задаются путем изменения параметров функционирования (производительности, требуемых объемов поставки и потребления ресурсов, их стоимости и других характеристик) элементов.

Рассмотренный выше подход позволяет объединить в себе необходимые возможности сетевых подходов и адаптировать существующие структурные и функциональные модели в рамках единой взаимосвязанной инфраструктуры.

Другой интегрированный подход базируется на применении среды, которая упрощает построение и создание приложений для крупномасштабного моделирования, анализа и оптимизации взаимосвязанных СЭ [21]. Среда объединяет пакеты оптимизации и имитационного моделирования. Эти пакеты используют общую граф-ориентированную абстракцию СЭ. Такая абстракция позволяет строить модели иерархических сетей и отражать связи между сетями на разных уровнях. Однако даже на однородных ресурсах масштабируемость вычислений с помощью прикладного программного обеспечения (ПО), реализованного в рамках данного подхода, начинает снижаться при увеличении общего числа используемых вычислительных элементов до восьми процессоров.

В отдельных случаях для организации имитационного моделирования взаимосвязанных СЭ применяется инструментарий, поддерживающий открытый стандарт High Level Architecture (HLA) [22]. Это высокоуровневая архитектура общего назначения для имитационного моделирования распределенных систем. В рамках такого моделирования каждая система представлена своей собственной моделью и размещена в отдельном узле вычислительной среды. При этом процесс моделирования, базирующийся на стандарте HLA, может быть недостаточно эффективным [23]. Это связано с большими накладными расходами на синхронизацию модельного времени при высокой интенсивности событий и существенным влиянием шага его изменения на точность результатов моделирования относительно процесса распространения возмущения по системам.

Таблица 1. Результаты сравнительного анализа

Группа	Ссылка на подход	Критерий										
		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
1	[8]	+	Ф, К	Р, Н	–	+	Высокое	Высокая	Высокая	Низкое	Низкая	Низкая
2	[24]	–	Ф, П	Р, Н	–	–	–	–	–	–	–	–
	[25]	–	Ф, П	Р, Н	–	+	Высокое	Высокая	Высокая	Низкое	Низкая	Низкая
3	[18]	+	Ф, К, П, Л	Р	–	–	–	–	–	–	–	–
	[26]	+	Ф, К, П, Л	Р	–	–	–	–	–	–	–	–
4	[19, 20]	+	Ф, К, П, Л	Р, Н	+	+	Высокое	Высокая	Высокая	Низкое	Низкая	Низкая
	[21]	+	Ф, К, П, Л	Р, Н	+	+	Среднее	>>	Средняя	>>	>>	>>
	[23]	+	Ф, К, П, Л	Р, Н	+	+	>>	>>	Низкая	>>	>>	>>

2. Выбор базового подхода. Результаты сравнительного анализа ряда известных подходов из рассмотренных выше групп отражены в табл. 1 (знак '+' означает поддержку того или иного критерия, знак '–' говорит об ее отсутствии). В качестве критериев $c_1 - c_5$ сравнения подходов выступают следующие характеристики, обеспечение которых требуется для эффективного исследования критических инфраструктур: учет каскадного характера развития возмущений (c_1); категория физических (Ф), коммуникационных (К), пространственных (П) и логических (Л) межсистемных связей (c_2); национальный (Н), а также региональный и ниже (Р) уровни территориальной иерархии (c_3); интеграция разных моделей (c_4); использование высокопроизводительных вычислений (c_5).

В настоящее время проведение крупномасштабных экспериментов базируется на интеграции ресурсов центров коллективного пользования (ЦКП), облачных платформ и грид-систем. В табл. 1 показаны качественные оценки ускорения вычислений (c_6), их надежности (c_7) и эффективности использования ресурсов (c_8) в процессе выполнения экспериментов с помощью ПО, реализованного в рамках рассмотренных подходов, на основе параллельных и распределенных вычислений в однородной среде. Соответствующие оценки $c_9 - c_{11}$ представлены для разнородных ресурсов.

Результаты сравнительного анализа показывают, что интеграционные подходы наиболее полно удовлетворяют перечисленным выше необходимым критериям исследования критических инфраструктур. Среди них выделяется общий подход к моделированию взаимосвязанных систем [19, 20], обеспечивающий как полезные свойства сетевых подходов, так и возможность адаптации существующих отдельных моделей в процессе их объединения. Он позволяет формулировать общую постановку задачи как для отдельно взятых, так и для интегрированных систем. Данный подход выбран в качестве базового для моделирования СЭ. Однако результаты его прежнего практического применения, как и других рассмотренных подходов, подтверждают факт существенного снижения эффективности использования ресурсов, ускорения вычислений и их надежности при переходе от однородной вычислительной системы к разнородной среде [25].

В связи с этим концепции, представленные в [19, 20], развиты с целью их адаптации к выполнению на разнородных ресурсах. Их реализация выполнена в виде распределенного пакета прикладных программ (РППП) с помощью инструментария Orlando Tools [27]. Этот инструментарий является основой интегрированного программного окружения для создания предметно-ориентированной вычислительной среды поддержки принятия решений по управлению живучестью СЭ. В Orlando Tools разработаны новые специализированные средства диспетчеризации вычислений, которые позволяют успешно решать вышеупомянутые проблемы, связанные с проведением исследований в разнородной среде.

3. Поддержка принятия решений. Разнообразные вычислительные компоненты (сервер, кластер, грид-система, облачная платформа) с различными возможностями могут требоваться при планировании мероприятий по повышению живучести СЭ в зависимости от методов анализа живучести СЭ на основе комбинаторного подхода, размерностей параметров моделей отдельных систем или их совокупности, образующих энергетический комплекс. Комбинаторный подход

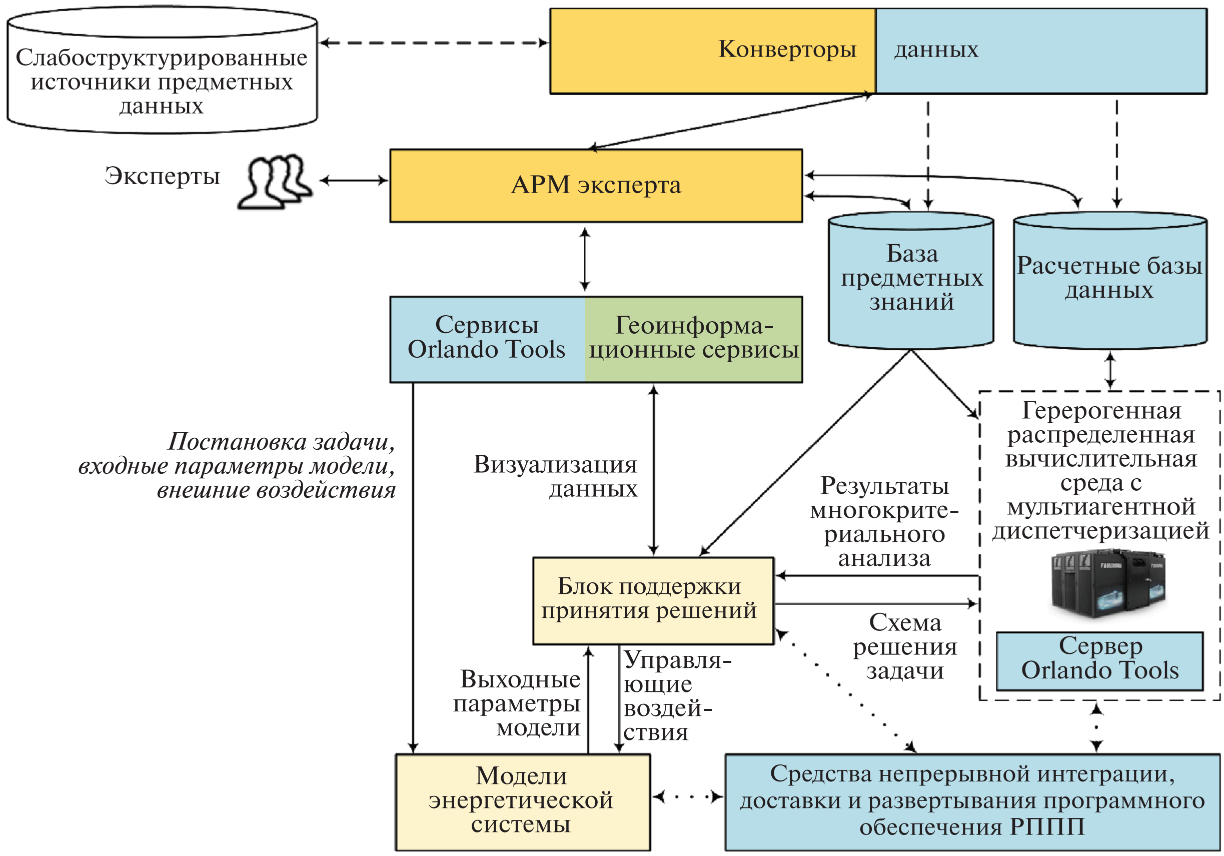


Рис. 2. Схема поддержки принятия решений: @ геоинформационные сервисы, @ Orlando Tools, @ средства GeoARM, @ РППП

обеспечивает генерацию и полный перебор множества сценариев возмущений, что позволяет уйти от влияния фактора субъективности при отборе таких сценариев экспертом.

При использовании комбинаторного подхода число генерируемых сценариев ограничивается выбранным уровнем представления территориально-производственной структуры СЭ, а также заданным в рамках эксперимента набором типов мероприятий по повышению живучести, каждое из которых может быть применено только к некоторому подмножеству элементов СЭ [1].

Интеграция вышеперечисленных компонентов в единую предметно-ориентированную гетерогенную распределенную среду обеспечивает возможность выбора ее необходимой программно-аппаратной конфигурации. Кроме того, такое интегрирование повышает эффективность экспериментов, характеризующихся различной степенью вычислительной сложности решаемых задач.

В статье представлен прототип такой среды. Общая схема поддержки принятия решений экспертами показана на рис. 2. РППП для различных классов задач, связанных с исследованием живучести СЭ, включая их прикладное и системное программное обеспечение, разрабатывается, модифицируется и интегрируется разработчиками пакетов с использованием Orlando Tools. Информация о предметных областях пакетов (моделях энергетических систем, их входные и выходные параметры, наборы внешних возмущений и управляющих воздействий, алгоритмы принятия решений и их реализации – модули) хранятся в базе знаний.

Сервисы Orlando Tools поддерживают автоматизацию построения схем решения задач на основе их процедурных и непроцедурных формулировок. Они также осуществляют выполнение созданных схем экспертами в среде.

В дополнение к Orlando Tools используются вспомогательные приложения для реализации операций, необходимых в процессе поддержки принятия решений. Для непрерывной интеграции, доставки и развертывания системного и прикладного ПО на узлах среды применяются как средства Orlando Tools, так и внешние приложения (например, GitLab) [27]. В частности, для настройки узлов задействуется известный инструментарий конфигурирования вычислительных устройств Ansible. При этом средства Orlando Tools обеспечивают информационную поддержку и автоматизацию всех процессов непрерывной интеграции, доставки и развертывания ПО с помощью этих приложений.

Предметно-ориентированная информация, необходимая экспертам для решения задач, содержится в различных часто меняющихся источниках. В связи с этим приложение GeoARM [28] применяется совместно с Orlando Tools для извлечения сведений из слабо структурированных источников и ее преобразования в целевые форматы данных РППП. Структурированные данные и результаты вычислений хранятся в расчетных базах данных.

В блоке поддержки принятия решений реализован многокритериальный анализ результатов вычислений (последствий крупных возмущений). Кроме того, формирование электронных карт и визуализация полученных результатов расчетов предоставляются экспертам с помощью геоинформационных сервисов. В поддержке управления живучестью СЭ эти сервисы выполняют следующие функции [29]:

графическое представление схемы СЭ в виде сети с вершинами, соответствующими реальным объектам энергетики, и дугами, отражающими передачу энергоресурсов между вершинами;

визуализация необходимой информации с использованием различных тематических слоев сети;

интерпретация исходных данных и результатов расчетов.

Все вышеперечисленные операции объединены в технологическую цепочку поддержки принятия решений в рамках прототипа среды (рис. 2).

Лица, принимающие решения, работают с автоматизированным рабочим местом (АРМ) эксперта, которое поддерживает взаимодействие с другими информационно-вычислительными компонентами. В ходе экспериментов специалисты могут формировать различные управляющие воздействия в моделях СЭ в автоматическом или ручном режимах. АРМ использует средства GeoARM.

Сервер Orlando Tools поддерживает выполнение пакетов на разных конфигурациях разнородных ресурсов. С целью рационального назначения ресурсов среды в процессе диспетчеризации вычислений используются специальная мультиагентная система [30]. Агенты представляют владельцев ресурсов и их конечных пользователей. Они обеспечивают согласование предпочтений владельцев ресурсов и критериев решения задач пользователей, применяя рыночные методы регулирования спроса и предложения ресурсов.

4. Постановка задачи. Моделирование поведения энергетического комплекса, состоящего из взаимосвязанных СЭ, при воздействии крупного возмущения v_t в определенный момент времени t основывается на решении задачи [14]

$$cx_t + p(r_t - y_t) + hu_t \to \min, \tag{4.1}$$

$$A_t x_t + Q_t u_t - y \geq 0, \tag{4.2}$$

$$d_t - x_t \geq 0, \tag{4.3}$$

$$r_t - y_t \geq 0, \tag{4.4}$$

$$z_t - u_t \geq 0, \tag{4.5}$$

где x_t – искомый вектор, элементы которого характеризуют интенсивность применения технологических способов функционирования элементов СЭ (добычи, переработки, преобразования и транспорта энергоресурсов); y_t – искомый вектор, элементы которого характеризуют объемы потребления отдельных видов энергоресурсов; u_t – искомый вектор, представляющий интенсивность проведения мероприятий по повышению живучести; A_t – матрица, описывающая технологии производства и передачи энергоресурсов, значения элементов $a_{ij}(v_t)$ которой зависят от возмущения v_t; d_t – вектор, определяющий технически возможные интенсивности применения отдельных технологических и производственных способов, значения элементов $d_i(v_t)$ которого зависят от возмущения v_t; r_t – вектор, элементы которого демонстрируют потребности потребителей в отдельных видах энергоресурсов; Q_t – матрица, отражающая локализацию проведения мероприятий по повышению живучести; z_t – вектор, задающий пределы интенсивности проведения мероприятий по повышению живучести; c – вектор, элементы которого определяют удельные затраты по каждому технологическому способу функционирования элементов СЭ; p – вектор удельных ущербов, возникающих вследствие недопоставки отдельных видов энергоресурсов потребителям; h – вектор, задающий удельные затраты на подготовку и проведение мероприятий по повышению живучести.

Целевая функция (4.1) является сверткой трех критериев. Первый критерий отражает издержки, связанные с функционированием энергетического комплекса. Второй критерий оценивает ущерб от дефицита энергоресурсов из-за возмущения v_t. Затраты на подготовку и проведение мероприятий по повышению живучести характеризуются третьим критерием.

Сценарий возмущения v_t реализуется элементами матрицы A_t и вектора d_t в уравнениях (4.2) и (4.3) соответственно. Элементы A_t и d_t характеризуют степень деформации различных частей СЭ вследствие воздействия возмущения в момент времени t.

Уровень необходимого снабжения потребителей отдельными видами энергоресурсов задается уравнением (4.4). Технические ограничения на проведение мероприятий по повышению живучести определяется в (4.5).

5. Вычислительный эксперимент. Использование предложенной среды демонстрируется на примере поддержки управления живучестью Единой системы газоснабжения России, представляющей собой единый производственный комплекс, который территориально охватывает европейскую часть страны, Урал и Западную Сибирь. Агрегированная расчетная схема данной СЭ включает в себя 382 вершины (28 источников, 64 потребителя, 24 подземных хранилища и 266 компрессорных станций). Также в расчетную схему входит 486 дуг, отождествляющих магистральные газопроводы и отводы на распределительные сети.

Был разработан РППП, с помощью которого анализ живучести СЭ на основе комбинаторного подхода может проводиться двумя способами:

моделирование серии возмущений с постепенно увеличивающейся степенью воздействия и соответственно возрастающей величиной последствий для системы для определения пороговых значений последствий, превышение которых будет вызывать распад рассматриваемой СЭ на несвязанные части;

исследование одиночных или групповых отказов элементов СЭ для выявления наборов критических элементов, отключение которых вызывает наиболее тяжелые последствия для СЭ в целом.

В качестве показателя для количественной оценки последствий возмущений выбрана относительная суммарная недопоставка энергоресурсов потребителям по Единой системе газоснабжения в целом. Чем этот показатель выше, тем серьезней и масштабней последствия оцениваемого возмущения.

Во втором способе анализа живучести отключаемые элементы СЭ объединяются в так называемые множества отказов. Множество отказов характеризуется кратностью или количеством элементов, повреждение которых наступает одновременно. Кратность k множества отказов выбирается исследователем в зависимости от общего числа элементов сети СЭ, состоящей из n вершин и m дуг. Число l возможных множеств отказов, равное $(n+m)!/((n+m-k)!k!)$, быстро растет по мере увеличения k. Поэтому в рамках известных исследований значение k не превышает, как правило, 3 или 4. Для обоснования практической достаточности этих значений следует отметить, что начиная с них наблюдается хорошая степень корреляции между оценками важности элементов, полученных при разных k [31].

На базе РППП доступно несколько альтернативных методик формирования и выбора наборов критических элементов [32–34]. Например, в [32] приводится наиболее простой пример поддержки управления живучестью Единой системы газоснабжения России, где с помощью РППП моделировалось отключение всех мест пересечений магистральных газопроводов, потом места пересечений сортировались по описанному выше показателю и создавался список критически важных объектов. Для каждого объекта из списка средствами РППП решалась задача (4.1)–(4.5) и составлялся перечень мероприятий, позволяющих минимизировать дефицит газа у потребителей путем расшивки “узких мест”, образовавшихся при нарушении работы конкретного пересечения. Объединение перечней мероприятий позволило сформировать перечень инвариантных мероприятий по повышению живучести, реализация которых позволит снизить негативные последствия от нарушения работы большего числа пересечений из списка критически важных объектов.

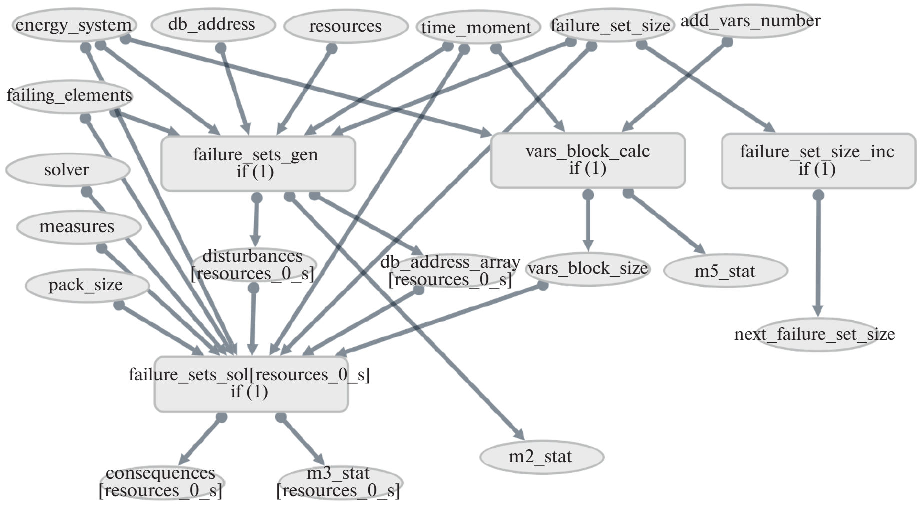


Рис. 3. Схема s_1

В [33] упор делается на поиск групп критических элементов с так называемым синергетическим эффектом. Синергетический эффект означает, что негативные последствия совместного отказа всей группы выше, чем суммарный ущерб от повреждений отдельных элементов, входящих в группу. Другими словами, синергетический эффект наступает тогда, когда возмущение в виде отказа группы из двух элементов имеет серьезные последствия, в то время как отдельный отказ каждого из элементов сам по себе не приносит СЭ какого-либо существенного ущерба.

Одной из последних реализованных была методика [34], которая по сравнению с [32] имеет большее количество этапов. Из схемы Единой системы газоснабжения России в качестве элементов множеств отказов была отобрана 291 вершина всех типов, исключая потребителей, а также 415 дуг.

С помощью РППП в [34] решались следующие три задачи в рамках поддержки управления живучестью Единой системы газоснабжения России.

З а д а ч а 1. Определение наиболее важных элементов относительно сети в целом. Найдено 63 *наиболее важных* элемента, выход из строя которых приводит к суммарному дефициту газа по системе в размере 15% и более для $k = \overline{1,3}$.

З а д а ч а 2. Определение наиболее важных парных сочетаний элементов относительно сети в целом. Получено 207690 парных сочетаний элементов, не пересекающихся с наиболее важными элементами, найденными в задаче 1. Выявлено 2865 пар элементов, выход из строя которых приводит к суммарному дефициту газа по системе в размере 5% и более. Определены мероприятия по повышению живучести газотранспортной системы, в результате которых число таких пар сокращается до 2500. В итоге отобраны 20 наиболее важных пар элементов, выход из строя которых приводит к суммарному дефициту газа по системе в размере 10% и более.

З а д а ч а 3. Определение наиболее важных элементов относительно потребителей. Получено 1789000 парных сочетаний элементов. Из них выделено 18528 наиболее важных сочетаний элементов, выход из строя которых приводит к дефициту газа хотя бы у одного потребителя в размере 10% и более.

На основе отобранных наиболее важных элементов далее будут определяться долговременные мероприятия по развитию Единой системы газоснабжения России для повышения ее живучести в отличие от кратковременных оперативных мероприятий в [32].

В начале работы с РППП эксперт составляет список отключаемых элементов, задает требуемое значение k и совместно с исходными данными для задачи (4.1)–(4.5) передает их как значения входных параметров схемы s_2, обеспечивающей перебор множеств отказов разной кратности (рис. 3). Схема s_2 в свою очередь вызывает схему s_1 для перебора множеств отказов определенной кратности (рис. 4).

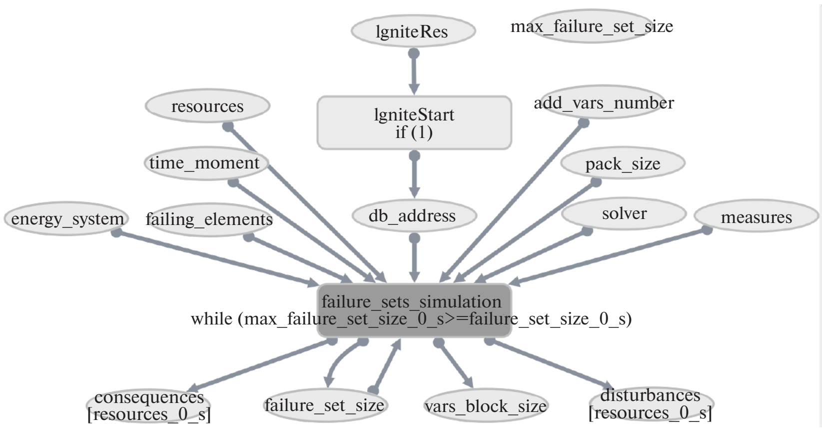


Рис. 4. Схема s_2

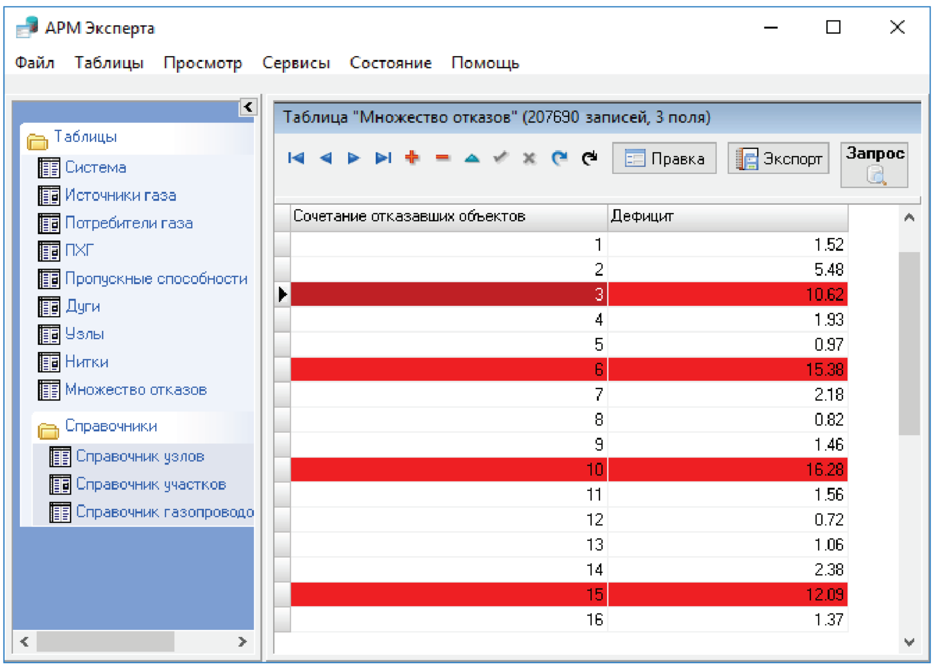


Рис. 5. Интерфейс АРМ

На рис. 3 приведен скриншот схемы s_2 из графического редактора РППП. Параметры и операции схемы представлены соответственно овалами и прямоугольниками с закругленными краями. Операция IgniteStart схемы s_2 осуществляет настройку и инициализацию распределенной базы данных для высокопроизводительных вычислений Apache Ignite. Операция falure_sets_simulation порождается поток заданий по выполнению экземпляров схемы s_1 с разными значениями k (параметр falure_set_size_0_s на рис. 3).

Схема s_1 на рис. 4 генерирует множество отказов элементов определенной кратности, моделирует групповой отказ элементов каждого множества отказов в расчетной схеме и оценивает последствия такого отказа.

В частности, операция failure_sets_gen формирует набор возмущений указанного размера и разделяет его на подмножества. Операция vars_block_calc подсчитывает число переменных в конкретной модели (4.1)–(4.5). Экземпляры операции failure_sets_sol параллельно производят оценку каждого множества отказов. На одном узле вычислительной среды выполняется

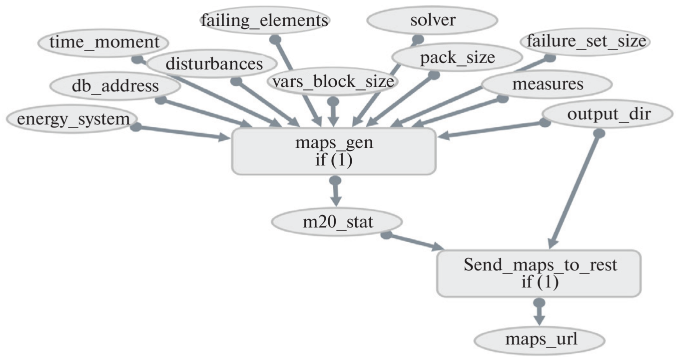


Рис. 6. Схема s_3

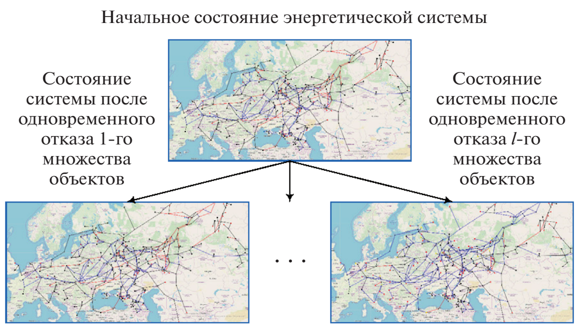


Рис. 7. Примеры электронных карт

множество экземпляров операции failure_sets_sol. Операция failure_set_size определяет следующее значение кратности множества отказов элементов.

После моделирования возмущений эксперт подбирает один или несколько показателей для количественной оценки последствий возмущений и рассчитывает с помощью средств Apache Ignite их значения для всех сгенерированных множеств отказа. С помощью АРМ эксперт просматривает значения показателей и отбирает по ним наиболее представительные множества отказов для дальнейшего детального анализа (рис. 5). В примере, приведенном на рис. 5, отобраны множества отказов (записи, выделенные красным цветом), в результате отключения элементов которых возникает суммарный дефицит газа больше или равный 10% от общего объема газа, предоставляемого в целом в рамках Единой системы газоснабжения России.

Схема s_3 (рис. 6) генерирует электронные карты для отобранных множеств отказов (операция maps_gen) и публикует их на геоинформационном портале (операция send_maps_to_rest). Примеры электронных карт, отражающих различные состояния СЭ в процессе анализа последствий возмущений, приведены на рис. 7.

Таблица 2. Время решения задачи 1 на разнородных ресурсах

k	Сегмент 1: 1 узел со следующими характеристиками процессора – 1 core Intel Core i5–650, 3.4 GHz, 8 GB RAM	Сегмент 2: 12 узлов с двумя процессорами AMD Opteron 6276 (16 core, 2.3 GHz, 64 GB RAM)	Сегмент 3: 12 узлов с двумя процессорами Intel Xeon CPU X5670 (18 core, 2.1 GHz, 128 GB of RAM)
1	362	168.45	163.34
2	190479	395.83	342.50
3	~10000000 (задача не решается за приемлемое время)	43244.17	21491.67

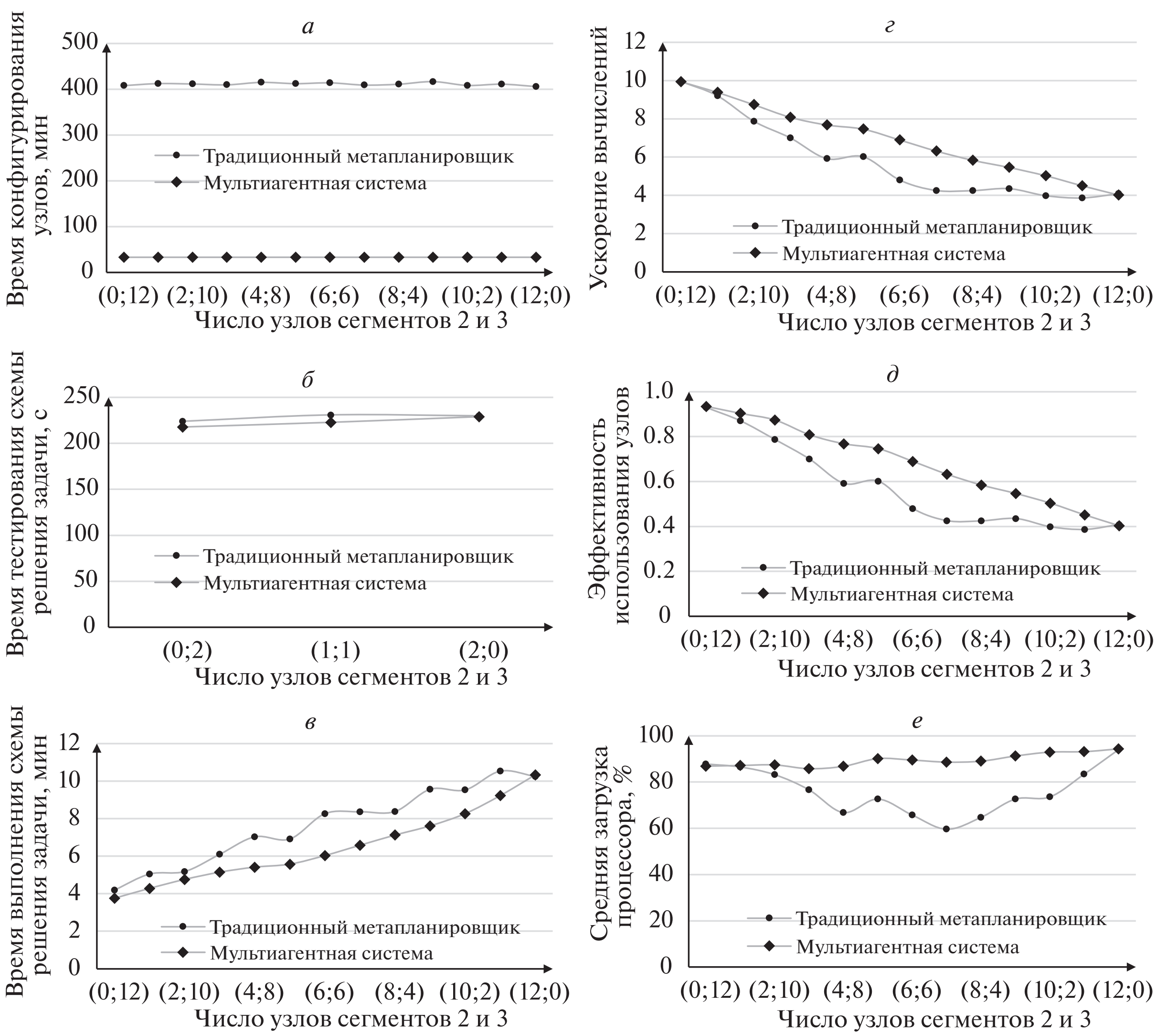


Рис. 8. Результаты дополнительных экспериментов

Вычислительные эксперименты выполнялись в гетерогенной распределенной среде, включающей три сегмента (табл. 2). С целью иллюстрации эффективности вычислений на разнородных ресурсах в табл. 2 приведено время решения задачи 1 для $k = \overline{1,3}$. Когда $k = 1$, применение высокопроизводительных узлов сегментов 2 и 3 является нецелесообразным из-за небольшой размерности задачи. Накладные расходы на запуск немногочисленных экземпляров модулей на этих узлах не дают существенного преимущества. Однако с увеличением k преимущество использования таких узлов становится очевидным. При $k = 3$ задача не может быть решена на персональном компьютере за приемлемое время. В том же случае время вычислений в сегментах 2 и 3 при одинаковых значениях k составляет всего несколько часов.

Дополнительные эксперименты (рис. 8) показывают улучшение времени конфигурирования узлов (рис. 8, *а*), тестирования схемы решения задач в сконфигурированных узлах (рис. 8, *б*) и выполнения этой схемы в процессе реальных расчетов (рис. 8, *в*), а также ускорения вычислений (рис. 8, *г*), эффективности использования ресурсов (рис. 8, *д*) и средней загрузки процессора (рис. 8, *е*) с помощью мультиагентной диспетчеризации вычислений по сравнению с известным традиционным метапланировщиком GridWay. В рамках мультиагентной системы конфигурирование узлов и тестирование схемы решения задачи в них выполняется автоматически агентами. В случае GridWay эти операции приходится осуществлять администратору среды вручную. Таким образом, улучшения продемонстрированы как на этапе подготовки экспериментов, так и на этапе их проведения.

В экспериментах использовано разное число одновременно задействованных узлов сегментов 2 и 3. В процессе тестирования схем решения задач (рис. 8, *б*) задействовано меньшее число узлов, так как требовалось только проверить корректность выполнения модулей на узлах обоих сегментов и передачи данных между ними. Преимущества достигаются за счет учета свойств узлов и прогнозирования времени выполнения модулей на основе их тестирования в процессе непрерывной интеграции, доставки и развертывания ПО РППП. Очевидно, что чем выше неоднородность среды, тем ощутимее преимущества используемой мультиагентной диспетчеризации.

Заключение. Рассмотрен новый подход к организации и применению предметно-ориентированной гетерогенной распределенной вычислительной среды. В его рамках, решаются следующие наиболее важные практические проблемы, касающиеся поддержки управления живучестью СЭ национального уровня:

проведение комплексного анализа живучести СЭ на основе комбинаторного подхода и поддержка принятия решений при планировании повышения живучести СЭ;

обеспечение многокритериальной оценки планируемых мероприятий по повышению живучести СЭ;

обработка слабоструктурированной предметной информации и больших массивов результатов расчетов;

автоматизация подготовки и проведения многовариантых расчетов в разнородной среде.

В рамках среды реализована технологическая цепочка поддержки принятия решений, включающая следующие операции: извлечение сведений из слабоструктурированных источников и их конвертация в целевые форматы данных; разработка, модификация и объединения РППП для разных классов задач; их непрерывная интеграция, доставка и развертывание на узлах среды; автоматизация построения и выполнения схем решения задач; многокритериальный анализ результатов вычислений; визуализация полученных результатов с помощью геоинформационных сервисов; формирование управляющих воздействий в модели СЭ.

Диспетчеризация вычислений осуществляется с помощью мультиагентных технологий. Это позволило сократить общее время решения задач, обеспечить ускорение вычислений на разнородных ресурсах, близкое к линейному ускорению, повысить среднюю загрузку процессора и эффективность использования ресурсов по сравнению с традиционным метапланировщиком. Прототип среды успешно применен для решения практических задач управления живучестью Единой системы газоснабжения России, конкретнее при решении задачи определения ее наиболее важных элементов.

Представленный в статье подход к организации и применению предметно-ориентированной гетерогенной распределенной вычислительной среды может быть применен для оценки адаптивной способности энергетических комплексов других уровней территориальной иерархии к изменению условий внешней среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонов Г.Н., Черкесов Г.Н., Криворуцкий Л.Д.* Методы и модели исследования живучести систем энергетики. Новосибирск: Наука. СО, 1990. С. 9–17.
2. *Zio E.* The Future of Risk Assessment // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2018. V. 177. P. 176–190.
3. *Setola R., Theocharidou M.* Modelling Dependencies Between Critical Infrastructures // Managing the Complexity of Critical Infrastructures / Eds R. Setola, V. Rosato, E. Kyriakides et al. Cham: Springer, 2016. P. 19–42.
4. *Hosseini S., Barker K., Ramirez-Marquez J.E.* A Review of Definitions and Measures of System Resilience // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2016. V. 145. P. 47–61.
5. *Еделев А.В., Сендеров С.М., Береснева Н.М., Сидоров И.А., Феоктистов А.Г.* Распределенная вычислительная среда для анализа уязвимости критических инфраструктур в энергетике // Системы связи, управления и безопасности. 2018. № 3. С. 197–231.
6. *Rinaldi S.M., Peerenboom J.P., Kelly T.K.* Identifying, Understanding, and Analyzing Critical Infrastructure Interdependencies // IEEE Contr. Syst. Mag. 2001. V. 21. № 6. P. 11–25.
7. *Ed-daoui I., Itmi M., Hami A.E., Hmina N., Mazri T.* A Deterministic Approach for Systems-of-systems Resilience Quantification // Int. J. Crit. Infrastruct. 2018. V. 14. № 1. P. 80–99.
8. *Staudt C.L., Sazonovs A., Meyerhenke H.* NetworKit: A Tool Suite for Large-scale Complex Network Analysis // Netw. Sci. 2016. V. 4. № 4. P. 508–530.

9. *Barabsi A.-L., Albert R.* Emergence of Scaling in Random Networks // Science. 1997. V. 286. P. 509–512.
10. *Chunlei W., Lan F., Yiqi D.* National Critical Infrastructure Modeling and Analysis Based on Complex System Theory // Proc. 1st Intern. Conf. on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control. Beijing: IEEE, 2011. P. 832–836.
11. *Criado R., Romance M.* Structural Vulnerability and Robustness in Complex Networks: Different Approaches and Relationships Between them // Handbook of Optimization in Complex Networks / Eds M.T. Thai, P.M. Pardalos. N. Y.: Springer, 2012. P. 3–36.
12. *Criado R., Pello J., Romance M., Vela-Pérez M.* (ψ, p, q)-vulnerabilities: A Unified Approach to Network Robustness // Chaos. 2009. V. 19. № 1. P. 013133.
13. *Abedi A., Gaudard L., Romerio F.* Review of Major Approaches to Analyze Vulnerability in Power System // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2019. V. 183. P. 153–172.
14. *Зоркальцев В.И.* Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. М.: Наука, 1988. 144 с.
15. *Козлов М.В., Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Управление топливно-энергетической системой при крупномасштабных повреждениях. I. Сетевая модель и программная реализация // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 6. С. 50–73.
16. *Gil E.M., McCalley J.D.* A US Energy System Model for Disruption Analysis: Evaluating the Effects of 2005 Hurricanes // IEEE Transactions on Power Systems. 2011. V. 26. № 3. P. 1040–1049.
17. *Holden R., Val D.V., Burkhard R., Nodwell S.* A Network Flow Model for Interdependent Infrastructures at the Local Scale // Safety Sci. 2013. V. 53. P. 51–60.
18. *Heracleous C., Kolios P., Panayiotou C.G., Ellinas G., Polycarpou M.M.* Hybrid Systems Modeling for Critical Infrastructures Interdependency Analysis // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2017. V. 165. P. 89–101.
19. *Johansson J., Hassel H.* An Approach for Modelling Interdependent Infrastructures in the Context of Vulnerability Analysis // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2010. V. 95. № 12. P. 1335–1344.
20. *Johansson J., Hassel H.* Modelling, Simulation and Vulnerability Analysis of Interdependent Technical Infrastructures // Risk and Interdependencies in Critical Infrastructures: A Guideline for Analysis / Eds P. Hokstad, I.B. Utne, J. Vatn. L.: Springer-Verlag, 2012. P. 49–66.
21. *Jalving J., Abhyankar S., Kim K., Hereld M., Zavala V.M.* A Graph-based Computational Framework for Simulation and Optimisation of Coupled Infrastructure Networks // IET Gener. Transm. Dis. 2017. V. 11. № 12. P. 3163–3176.
22. The HLA Development Kit. https://smash-lab.github.io/HLA-Development-Kit/.
23. *Kröger W., Nan C.* Addressing Interdependencies in Complex Technical Networks // Networks of Networks: The Frontier of Complexity / Eds G.D. Agostini, A. Scala. Cham: Springer, 2014. P. 279–309.
24. *Almassalkhi M., Hiskens I.* Optimization Framework for the Analysis of Large-scale Networks of Energy Hubs // Proc. 17th Power System Computation Conf. Stockholm: Curran Associates, 2011. P. 1124–1130.
25. *Sharma T., Glynna J., Panosd E., Deanea P., Gargiuloe M., Rogana F., Gallachoir B.O.* High Performance Computing for Energy System Optimization Models: Enhancing the Energy Policy Tool Kit // Energ. Policy. 2019. V. 128. P. 66–74.
26. *Martins J., Platzer A., Leite J.* Statistical Model Checking for Distributed Probabilistic-control Hybrid Automata with Smart Grid Applications // Lect. Notes Comput. Sc. 2011. V. 6991. P. 131–146.
27. *Feoktistov A., Gorsky S., Sidorov I., Bychkov I., Tchernykh A., Edelev A.* Collaborative Development and Use of Scientific Applications in Orlando Tools: Integration, Delivery, and Deployment // Comm. Com. Inf. Sc. 2020. V. 1087. P. 18–32.
28. *Фереферов Е.С., Бычков И.В., Хмельнов А.Е.* Технология разработки приложений баз данных на основе декларативных спецификаций // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. №. 5. С. 85–100.
29. *Бычков И.В., Ружников Г.М., Федоров Р.К., Шумилов А.С., Михайлов А.А., Верхозина А.В.* Интернет-система ввода и редактирования пространственных данных "Фарамант" // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 2015. № 9. С. 21–25.
30. *Бычков И.В., Опарин Г.А., Феоктистов А.Г., Сидоров И.А., Богданова В.Г., Горский С.А.* Мультиагентное управление вычислительной системой на основе метамониторинга и имитационного моделирования // Автометрия. 2016. Т. 52. № 2. С. 3–9.
31. *Li J., Dueñas-Osorio L., Chen C., Shi C.* AC Power Flow Importance Measures Considering Multi-element Failures // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2017. V. 160. P. 89–97.
32. *Еделев А.В., Сендеров С.М., Сидоров И.А.* Применение распределенных вычислений для выявления критически важных объектов газотранспортной сети России // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2016. Т. 1. С. 55–62.
33. *Воробьев С.В., Еделев А.В.* Применение метода определения критических элементов в сетях технических инфраструктур для поиска критически важных объектов газотранспортной сети России // Энергетическая политика. 2018. Т. 1. С. 45–51.
34. *Senderov S.M., Vorobev S.V.* Approaches to the Identification of Critical Facilities and Critical Combinations of Facilities in the Gas Industry in Terms of its Operability // Reliab. Eng. Syst. Safe. 2020. V. 203. P. 107046.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 136–146

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 629.7

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ПРОЦЕССЕ ПРЕДСТАРТОВОЙ ПОДГОТОВКИ

И. Н. Гашененко[a], В. А. Погорелов[б,*], С. В. Соколов[c], А. Б. Шаталов[a]

[a] *Российский ун-т дружбы народов (РУДН), Институт инновационных инженерных технологий, Москва, Россия*

[б] *Донской государственный технический ун-т, Ростов-на-Дону, Россия*

[c] *Московский технический ун-т связи и информатики, Москва, Россия*

e-mail: vadim.pogorelov.rnd@gmail.com

Поступила в редакцию 16.12.2019 г.
После доработки 04.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается задача предстартовой ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы космического аппарата на высокодинамичном подвижном основании при самых общих предположениях о характере его углового движения. Решение получено в виде обобщенного фильтра Калмана, использующего в качестве вектора состояния углы Эйлера–Крылова, а в качестве вектора наблюдения – вектор измерений датчиков угловой скорости бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Приведен пример, иллюстрирующий высокую точность и скорость сходимости процесса оценивания параметров начальной ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

DOI: 10.31857/S0002338821060081

Введение. Непрерывное повышение требований к точности пространственной ориентации космических аппаратов (КА) в процессе предстартовой подготовки выдвигает в качестве одной из главных задач повышение точности систем их начальной ориентации в условиях помех различной физической природы, возмущающих основание данных систем – сейсмоколебаний, ветровых возмущений, вибраций от работы агрегатов объекта и др. [1–10]. На сегодняшний день уже предложен ряд методов начальной ориентации бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в условиях действия различных возмущающих факторов [11–19]. Так в работах [11–13] получил развитие способ векторного согласования, который дает возможность осуществлять начальную выставку БИНС относительно предварительно выставленной базовой системы навигации (БСН). При этом предполагается, что БИНС абсолютно точно согласована с базовой системой отсчета. Очевидными недостатками такого подхода являются, во-первых, необходимость расширения приборного состава навигационной системы, во-вторых, обязательное решение задачи начальной ориентации БСН (причем также в условиях возмущающих воздействий) и, в-третьих, неизбежное повторение ошибок выставки БСН в определении начальной ориентации БИНС. Другими словами, здесь общая ошибка начальной ориентации БИНС есть сумма ошибок "памяти" БСН и ошибки выставки БИНС относительно БСН [11].

Другой способ, получивший в последнее время широкое применение, заключается в использовании глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [14–19]. Данный способ, в зависимости от решаемой задачи, предполагает установку на подвижном объекте двух или трех пространственно разнесенных антенн и определение угловой ориентации БИНС по показаниям разнесенных спутниковых приемников. Преимуществом такого подхода является отсутствие процедуры интегрирования показаний чувствительных элементов, приводящей к накоплению ошибок измерений с течением времени. В то же время низкая частота выдачи выходной информации ГНСС (от 1 до 20 Гц) и слабая помехоустойчивость алгоритмов обработки информации с

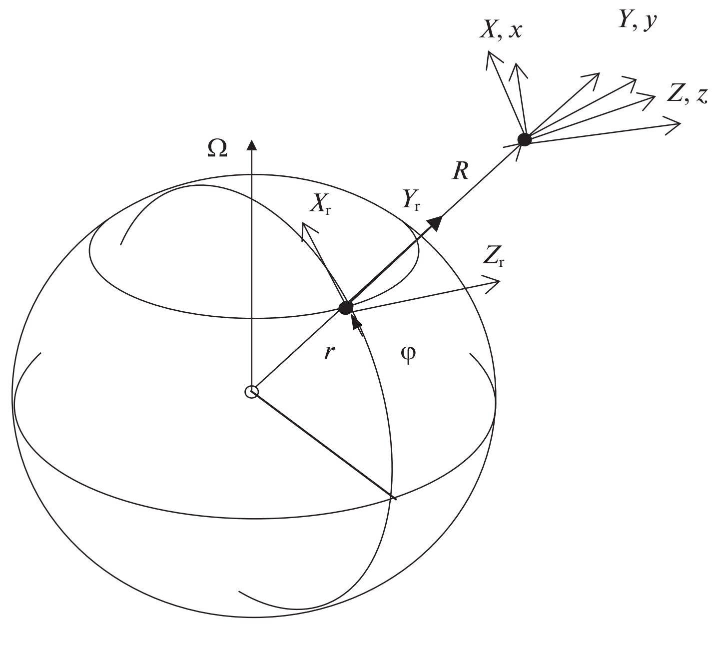


Рис. 1. Системы координат

разнесенных спутниковых приемников существенно затрудняют применение данного подхода для начальной выставки БИНС на подвижном основании [20–22].

В современных БИНС, использующих низкоточные микромеханические гироскопы, для решения задачи начальной выставки [23] широкое распространение получили комплементарные фильтры [23–27]. Принцип их действия состоит в суммировании с заданным весом углов ориентации, определенных по показаниям датчиков угловой скорости (ДУС) и акселерометров. Существенным недостатком данного подхода является отсутствие возможности учета динамических свойств параметров ориентации, измеряемых к тому же в условиях помех высокой интенсивности, свойства которых также не учитываются. Все это не позволяет достичь в комплементарных фильтрах требуемой на сегодняшний день точности и устойчивости процесса начальной ориентации БИНС на высокодинамичном подвижном основании [1–5].

В связи с этим возникает необходимость разработки динамического алгоритма оценки стохастических параметров начальной ориентации БИНС, инвариантного к характеру движения основания и обеспечивающего устойчивость и требуемую точность оценивания при самых общих предположениях о характере помех чувствительных элементов (ЧЭ) БИНС.

1. Постановка задачи. Для последующего решения задачи начальной ориентации БИНС на подвижном основании в общей постановке полагаем далее, что центр масс (ЦМ) КА соединен жестким стержнем длиной R (моделирующим корпус ракеты-носителя) с точкой на поверхности Земли с известной широтой φ и может вращаться вокруг нее с произвольной угловой скоростью во всех направлениях под действием внешних возмущений (рис. 1).

Также введем следующие системы координат (СК):

приборную СК (ПСК) $J\ 0xyz$ с началом в ЦМ объекта, оси которой направлены по взаимно ортогональным осям чувствительности ЧЭ, входящих в состав БИНС;

географическую СК (ГСК) $G\ OX_гY_гZ_г$ с началом в точке крепления стержня длиной R, ось $X_г$ которой лежит в плоскости местного меридиана (Ω – угловая скорость вращения Земли), ось $Y_г$ направлена от центра Земли, а ось $Z_г$ дополняет систему координат до правой;

сопровождающую СК (ССК) $S\ OXYZ$ с началом в ЦМ КА, ось Y которой проходит вдоль стержня длиной R, направления осей X, Y, Z в начальный момент времени совпадают с направлениями соответствующих осей ГСК $X_г$, $Y_г$, $Z_г$.

В соответствии с введенными СК под задачей начальной ориентации БИНС на подвижном основании далее понимается текущая оценка параметров разворота (в качестве которых рассматриваются углы Эйлера–Крылова) ПСК J относительно ГСК G.

Полагаем также, что в состав БИНС в качестве ЧЭ входят три акселерометра и три датчика угловой скорости, расположенные ортогонально в ЦМ объекта. С целью сохранения общности решения в качестве моделей помех чувствительных элементов БИНС выберем аддитивные белые гауссовские шумы (БГШ) с нулевыми математическими ожиданиями и известными интенсивностями как наиболее адекватные практике использования БИНС. Учет корреляции помех или наличия в них регулярных составляющих (в том числе с неизвестными параметрами) легко обеспечивается соответствующим расширением вектора оцениваемых параметров и не влияет на существо предлагаемого далее подхода [23]. В этом случае модели выходных сигналов чувствительных элементов БИНС имеют следующий вид:

для акселерометров

$$\mathbf{Z_a} = \mathbf{a_J} + \mathbf{W_a}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} Z_{ax} & Z_{ay} & Z_{az} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – вектор выходных сигналов трех ортогональных акселерометров, $\mathbf{a_J} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – вектор ускорений ЦМ объекта в ПСК, $\mathbf{W_a} = [W_{a_x} \;\; W_{a_y} \;\; W_{a_z}]^{\mathrm{T}}$ – вектор помех измерения акселерометров (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей $\mathbf{D_a}$);

для ДУСов

$$\mathbf{Z_d} = \mathbf{\Omega_J} + \mathbf{W_d}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{Z_d} = [Z_x \;\; Z_y \;\; Z_z]^{\mathrm{T}}$ – вектор выходных сигналов трёх ортогональных ДУСов, $\mathbf{\Omega_J} = \begin{bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения ПСК, $\mathbf{W_d} = \begin{bmatrix} W_x & W_y & W_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – вектор помех измерения ДУСов (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей $\mathbf{D_d}$).

Таким образом, окончательно поставленную задачу можно сформулировать как задачу стохастического оценивания текущей ориентации ПСК J (триэдра БИНС) относительно ГСК G по зашумленным измерениям ЧЭ БИНС при *apriori* неопределенном характере изменения, во-первых, вектора угловой скорости ЦМ объекта относительно начала ГСК G (точки крепления стержня длиной R), а во-вторых, вектора угловой скорости триэдра БИНС относительно ЦМ объекта при неизвестных углах начального рассогласования ПСК J и ГСК G.

2. Решение задачи. На первом шаге для построения алгоритма оценки случайных текущих углов α, β, γ разворота ПСК J относительно ССК S рассмотрим уравнения их истинного изменения во времени – уравнения Эйлера–Крылова [28]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \Phi(\beta,\gamma)\,\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}, \tag{2.1}$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ – неизвестные углы начального рассогласования ПСК J и ССК S (т.е. и ГСК G), α_0 – угол рыскания, β_0 – угол тангажа, γ_0 – угол крена, $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – вектор случайной угловой скорости ПСК J (триэдра БИНС) относительно ССК S,

$$\Phi(\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\gamma}{\cos\beta} & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} & 0 \\ \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma\,\mathrm{tg}\beta & \cos\gamma\,\mathrm{tg}\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}$ случайной угловой скорости триэдра БИНС относительно ССК S может быть описан в общем случае векторным нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{J} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}, t) + \mathbf{W}_\boldsymbol{\omega}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}, t)$ – известная нелинейная вектор-функция, $\mathbf{W}_\boldsymbol{\omega}$ – центрированный БГШ с матрицей интенсивностей $\mathbf{D}_\boldsymbol{\omega}$.

На втором шаге рассмотрим динамику изменения текущих углов α_1, β_1, γ_1 разворота ССК S относительно ГСК G, которая задает также уравнениями Эйлера–Крылова аналогично (2.1):

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \end{bmatrix} = \Phi(\beta_1, \gamma_1)\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}}, \tag{2.3}$$

$$\alpha_1(0) = 0, \quad \beta_1(0) = 0, \quad \gamma_1(0) = 0,$$

где α_1, β_1, γ_1 – углы разворота ССК S относительно ГСК G, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}} = [\omega_X \ \ \omega_Y \ \ \omega_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор угловой скорости вращения ССК S относительно ГСК G.

Для описания вектора $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}}$ угловой скорости движения ССК S относительно ГСК G воспользуемся выражением для вектора ускорения, возникающего при движении материальной точки (МТ) по сфере радиуса R, записанным в ССК S:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{S}} + (2\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}}) \times \mathbf{V}_{\mathbf{S}} - \mathbf{g}_{\mathbf{S}}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{A}_{\mathbf{S}} = [A_X \ \ A_Y \ \ A_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор ускорений МТ в ССК, $\mathbf{V}_{\mathbf{S}} = [V_X \ \ V_Y \ \ V_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор скорости МТ в ССК, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}} = [\Omega_X \ \ \Omega_Y \ \ \Omega_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор угловой скорости вращения Земли в ССК, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}} = [\omega_X \ \ 0 \ \ \omega_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор угловой скорости ССК относительно ГСК, $\mathbf{g}_{\mathbf{S}} = [\mathrm{g}_{\mathrm{X}} \ \ g_Y \ \ g_Z]^{\mathrm{T}}$ – вектор ускорения силы тяжести в ССК.

Так как проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси ГСК G имеют вид

$$\Omega_{X_{\text{г}}} = \Omega\cos\varphi, \quad \Omega_{Y_{\text{г}}} = \Omega\sin\varphi, \quad \Omega_{Z_{\text{г}}} = 0,$$

а вектора ускорения силы тяжести $\mathbf{g}_{\text{г}} = [g_{X_{\text{г}}} \ \ g_{Y_{\text{г}}} \ \ g_{Z_{\text{г}}}]^{\mathrm{T}}$ соответственно

$$g_{X_{\text{г}}} = -\Omega^2 r\cos\varphi\sin\varphi, \quad g_{Y_{\text{г}}} = \Omega^2 r\cos^2\varphi - g, \quad g_{Z_{\text{г}}} = 0,$$

g – гравитационное ускорение, r – радиус Земли, то для рассматриваемой ориентации осей ССК проекции векторов $\mathbf{g}_{\mathbf{S}}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}}$ на оси ССК определяются как

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \begin{bmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{bmatrix} = A(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \begin{bmatrix} \Omega\cos\varphi \\ \Omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{S}}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \begin{bmatrix} \mathrm{g}_{\mathrm{X}} \\ g_Y \\ g_Z \end{bmatrix} = A(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \begin{bmatrix} -\Omega^2 r\cos\varphi\sin\varphi \\ \Omega^2 r\cos^2\varphi - g \\ 0 \end{bmatrix},$$

где вид матрицы поворота $A(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ (направляющих косинусов) ССК S относительно ГСК G имеет вид

$$\mathrm{A}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \begin{bmatrix} \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\gamma_1 & \cos\beta_1\sin\gamma_1 & \cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 - \sin\alpha_1\cos\gamma_1 \\ \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\sin\gamma_1 & \cos\beta_1\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 + \sin\alpha_1\sin\gamma_1 \\ \sin\alpha_1\cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & \cos\alpha_1\cos\beta_1 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (2.4) в проекциях на оси выбранной ССК с учетом очевидных равенств $\omega_X = V_Z R^{-1}$, $\omega_Z = -V_X R^{-1}$, а также приведенных выше проекций векторов $\mathbf{g}_{\mathbf{S}}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}}$ трансформируется как

$$\dot{\omega}_Z R = -A_X + 2\Omega_Y R\omega_X - g_X, \tag{2.5}$$

$$0 = A_Y + (2\Omega_Z + \omega_Z)\omega_Z R + (2\Omega_X + \omega_X)\omega_X R + g_Y,$$

$$\dot{\omega}_X R = A_Z - 2\Omega_X R\omega_Z + g_Z.$$

В свою очередь вектор ускорений $\mathbf{A_S}$ может быть представлен через вектор ускорений $\mathbf{a_J}$, измеряемых акселерометрами, следующим образом:

$$\mathbf{A_S} = A_*^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)\,\mathbf{a_J} = A_*^{\mathrm{T}}[\mathbf{Z_a} - \mathbf{W_a}],$$

где $\mathbf{Z_a} = [Z_{ax}\ \ Z_{ay}\ \ Z_{az}]^{\mathrm{T}}$ – вектор выходных сигналов акселерометров БИНС, $A_* = A(\alpha,\beta,\gamma)$ – матрица поворота (направляющих косинусов) ПСК J относительно ССК S.

Данное соотношение совместно с уравнениями (2.5) позволяет сформировать стохастические уравнения, описывающие вектор $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{S}$ угловой скорости движения ССК S относительно ГСК G:

$$\begin{bmatrix}\dot\omega_X\\ \dot\omega_Z\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0 & -\Omega_X\\ \Omega_Y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_X\\ \omega_Z\end{bmatrix} + R^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}A_*^{\mathrm{T}}\mathbf{Z_a} + R^{-1}\begin{bmatrix}g_Z\\ -g_X\end{bmatrix} - R^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}A_*^{\mathrm{T}}\mathbf{W_a}. \tag{2.6}$$

Здесь важно отметить, что полученная система уравнений, описывающая текущую ориентацию ССК в ГСК, в соответствии с поставленной задачей оказывается полностью инвариантна к характеру динамики движения основания, качающегося относительно начала ГСК.

Объединяя системы уравнений (2.1)–(2.3), (2.6), полный вектор параметров текущей ориентации БИНС на подвижном основании запишем следующим образом:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y},t) + F_1(\mathbf{Y},t)\,\mathbf{W}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{Y} = [\alpha\ \ \beta\ \ \gamma\,\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\omega_X\,\omega_Z]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_\omega\\ \mathbf{W_a}\end{bmatrix}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y},t) = \begin{bmatrix}\Phi(\beta,\gamma)\,\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}\\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J},t)\\ \Phi(\beta_1,\gamma_1)\,\boldsymbol{\omega}_\mathbf{S}\\ 2\begin{bmatrix}0 & -\Omega_X\\ \Omega_Y & 0\end{bmatrix}\begin{vmatrix}\omega_X\\ \omega_Z\end{vmatrix} + R^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{A}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{Z_a} + R^{-1}\begin{bmatrix}g_Z\\ -g_X\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad F_1(\mathbf{Y}) = \left[\begin{array}{c:c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}}\\ \hdashline E_3 & \mathbf{0}\\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}}\\ \hdashline \mathbf{0} & -R^{-1}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\end{array}\right].$$

Здесь E_3 – единичная матрица размерности 3, $\mathbf{O}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

Для стохастической оценки состояния нелинейных динамических систем вида (2.7) наиболее эффективным подходом в настоящее время является использование методов теории стохастической фильтрации [29, 30], из которых самым широко известным и общеупотребительным будет обобщенный (нелинейный) фильтр Калмана–Бьюси. Но для его применения необходим предварительный синтез уравнения наблюдателя компонентов вектора $\mathbf{Y}$ (т.е. информационной модели сигнала измерения, явно зависящей от составляющих вектора $\mathbf{Y}$).

В рассматриваемом случае в качестве сигналов наблюдения вектора $\mathbf{Y}$ можно выбрать выходные сигналы трех ортогональных ДУСов. Действительно, вектор $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{J}$ абсолютной угловой скорости вращения ПСК J, измеряемый ДУСами, определяется суммой вектора $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}$ и векторов $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S_J}}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S_J}}$, заданных в ПСК J:

$$\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{J} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{J} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S_J}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S_J}},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S_J}} = A_*\boldsymbol{\omega}_\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S_J}}(\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) = A_*A\begin{bmatrix}\Omega\cos\varphi\\ \Omega\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}$.

Это позволяет, исходя из приведенного выражения для $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{J}$ и уравнения вектора выходных сигналов трех ортогональных ДУСов (1.2), представить стохастическую модель вектора наблюдения следующим образом:

$$\mathbf{Z_d} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{J} + A_*\boldsymbol{\omega}_\mathbf{S} + A_*A\begin{bmatrix}\Omega\cos\varphi\\ \Omega\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} + \mathbf{W_d} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W_d},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{J} + A_*\boldsymbol{\omega}_\mathbf{S} + A_*A\begin{bmatrix}\Omega\cos\varphi \\ \Omega\sin\varphi \\ 0\end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Характерной особенностью данного наблюдателя является возможность наблюдения **всех** параметров ориентации БИНС в явном виде, что существенно влияет на сходимость и устойчивость процесса их оценивания.

В качестве дополнительного наблюдателя, расширяющего информационные возможности системы наблюдения, можно использовать выходной сигнал любого из акселерометров, формируя уравнение наблюдения из второго уравнения системы (2.5), неиспользованного при выводе уравнений полного вектора состояния. Так, выбирая в качестве наблюдателя выходной сигнал акселерометра Z_{ax} и учитывая, что

$$A_Y = [010]A_*^{\mathrm{T}}[\mathbf{Z_a} - \mathbf{W_a}] = [a_{12}\ a_{22}\ a_{32}][\mathbf{Z_a} - \mathbf{W_a}] = -(2\Omega_Z + \omega_Z)\omega_Z R - (2\Omega_X + \omega_X)\omega_X R - g_Y,$$

имеем

$$Z_{ax} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}Z_{ay} - \frac{a_{32}}{a_{12}}Z_{az} - a_{12}^{-1}[(2\Omega_Z(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) + \omega_Z)\omega_Z R - (2\Omega_X(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) + \omega_X)\omega_X R - g_Y] +$$

$$+\begin{bmatrix}1 & \dfrac{a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{a_{32}}{a_{12}}\end{bmatrix}W_a = \mathbf{H_1}(\mathbf{Y},\mathbf{Z_a}) + H_2(\mathbf{Y})\mathbf{W_a},$$

$$H_1(Y,Z_a) = -\frac{a_{22}}{a_{12}}Z_{ay} - \frac{a_{32}}{a_{12}}Z_{az} - a_{12}^{-1}[(2\Omega_Z + \omega_Z)\omega_Z R - (2\Omega_X + \omega_X)\omega_X R - g_Y],$$

$$H_2(Y) = \begin{bmatrix}1 & \dfrac{a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{a_{32}}{a_{12}}\end{bmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ij}(\alpha,\beta,\gamma)$ – ij-й элемент матрицы $A_*(\alpha,\beta,\gamma)$.

Но при использовании данного наблюдателя следует учитывать очевидную сложность функциональных зависимостей, входящих в функцию наблюдения, что, несмотря на расширение информационных возможностей системы наблюдения, может существенно затруднить практическую реализацию фильтра.

Обобщенный фильтр Калмана–Бьюси, построенный по уравнениям “объект-наблюдатель” (2.7), (2.8) и обеспечивающий принципиальное решение поставленной задачи, имеет следующий вид [29]:

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Y}},t) + K(\hat{\mathbf{Y}},t)[\mathbf{Z_d} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}})], \tag{2.9}$$

$$K(\hat{\mathbf{Y}},t) = R\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial\hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{D_d}^{-1},$$

$$\dot{R}(\hat{\mathbf{Y}},t) = \frac{\partial F(\hat{\mathbf{Y}},t)}{\partial\hat{\mathbf{Y}}}R(\hat{\mathbf{Y}},t) + R(\hat{\mathbf{Y}},t)\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{Y}},t)}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} + F_1(\hat{\mathbf{Y}})\mathbf{D_0}F_1^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{Y}}) - K(\hat{\mathbf{Y}},t)\mathbf{D_d}K^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{Y}},t),$$

где $\hat{\mathbf{Y}}$ – вектор текущей оценки вектора состояния $\mathbf{Y}(t)$, $R(\hat{\mathbf{Y}},t)$ – апостериорная ковариационная матрица,

$$\hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{0} = M(\mathbf{Y_0}), \quad R_0 = M\{(\mathbf{Y_0} - \hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{0})(\mathbf{Y_0} - \hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{0})^{\mathrm{T}}\}, \quad \mathbf{D_0} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_\omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_a}\end{bmatrix},$$

Для иллюстрации возможности эффективной практической реализации предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

3. Результаты имитационного моделирования. Для анализа устойчивости и сходимости процесса оценивания вектора $\mathbf{Y} = [\alpha\ \beta\ \gamma\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \omega_X\ \omega_Z]^{\mathrm{T}}$ с помощью фильтра (2.9) было выполнено численное моделирование процесса начальной выставки БИНС на высокодинамичном подвижном основании.

Моделирование осуществлялось на временном интервале [0; 1000] с с использованием при интегрировании уравнений оценки метода Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 с.

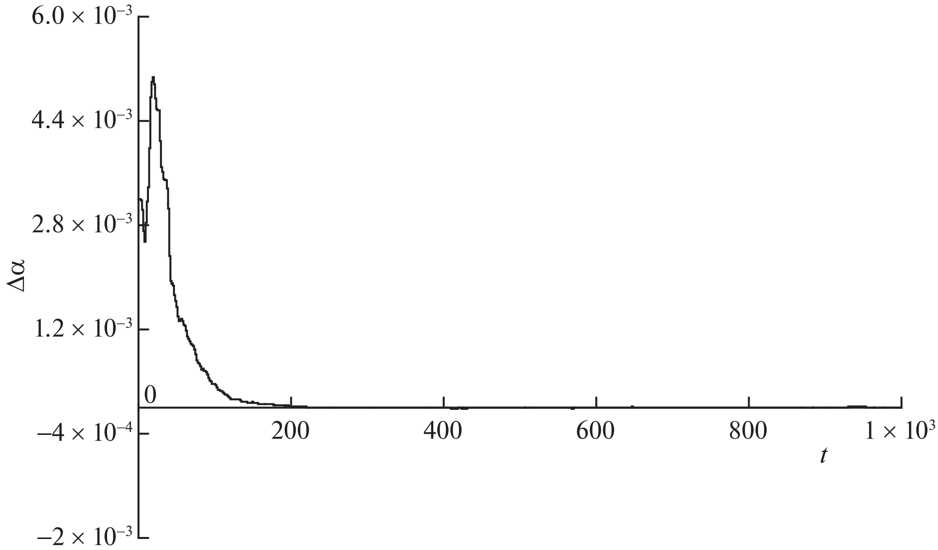


Рис. 2. Ошибка оценки угла α, рад

Угловые скорости, определяющие истинную динамику движения БИНС относительно ССК, были заданы следующим образом:

$$\begin{gathered}\omega_x = 0.7\times 10^{-4}\cos(10^{-3}t)\ \text{рад/с},\\ \omega_y = 0.3\times 10^{-4}\cos(10^{-3}t)\ \text{рад/с},\\ \omega_z = 10^{-3}\cos(2\times 10^{-3}t)\ \text{рад/с},\end{gathered} \tag{3.1}$$

а динамика движения ССК относительно ГСК равна

$$\begin{gathered}\omega_X = 0.45\cos(2.5t)\ \text{рад/с},\\ \omega_Z = 0.35\cos(2.8t)\ \text{рад/с}\end{gathered} \tag{3.2}$$

(в соответствии с экспериментальными данными о колебаниях корпуса ракеты-носителя, приведенными в [31]).

Определение истинного углового положения БИНС осуществлялось путем интегрирования уравнений Эйлера–Крылова (2.1), (2.3) с учетом выбранных моделей движения (3.1), (3.2) и заданных начальных условий, $\alpha(0) = \pi/5$, $\beta(0) = \pi/4$, $\gamma(0) = \pi/3$.

Компоненты векторов помех измерения акселерометров $\mathbf{W_a}$ и ДУС $\mathbf{W_d}$ моделировались центрированными случайными гауссовскими последовательностями с соответствующими средним квадратическим отклонением (с.к.о.), приведенными ниже. Формирование реальных показаний ДУС осуществлялось путем наложения случайных гауссовских последовательностей на сумму вектора $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}$ и векторов $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S_J}}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S_J}}$, заданных в ПСК J, при расчете которых формирование матриц направляющих косинусов происходило с помощью углов α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, полученных путем интегрирования уравнений (2.1), (2.3).

На рис. 2–7 представлены графики изменения ошибок оценивания всех углов, определяющих текущую ориентацию БИНС относительно ГСК.

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы.

1. Предложенный алгоритм начальной ориентации обеспечивает быструю сходимость и высокую устойчивость процесса оценивания. Требуемая для современных систем ориентации ошибка оценивания углового положения БИНС (не более 4×10^{-5} рад) по всем углам ориентации достигалась за время, не превышающее 200 с.

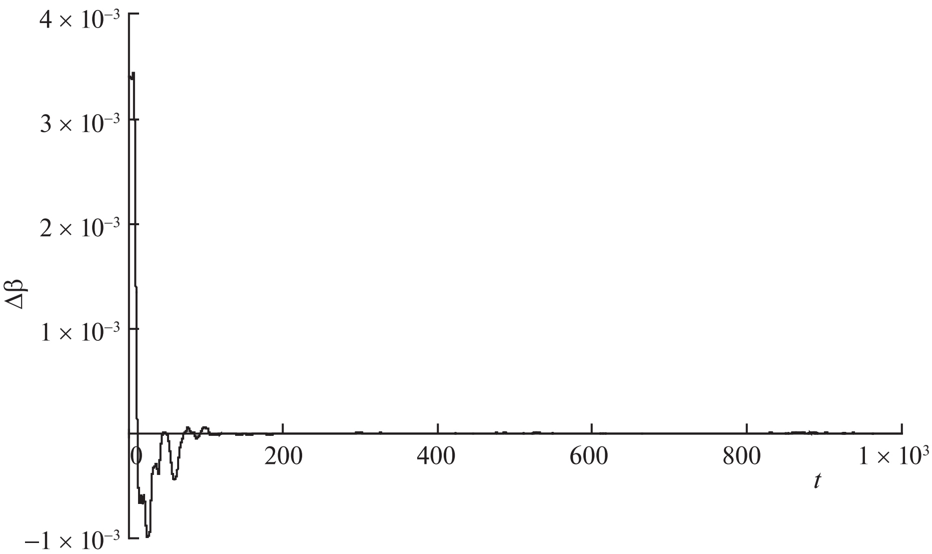


Рис. 3. Ошибка оценки угла β, рад

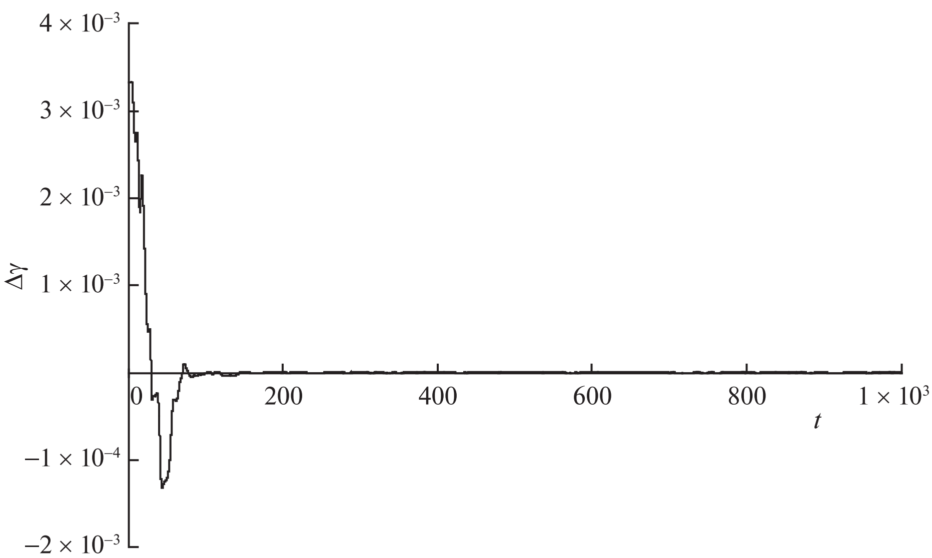


Рис. 4. Ошибка оценки угла γ, рад

2. Увеличение ошибок начальной оценки углов α, β, γ приводит к увеличению времени начальной ориентации. Так, при начальных ошибках, равных 0.3 рад по всем трем углам, время достижения точности начальной выставки, приведенной в п. 1, увеличивается в 3 раза.

3. Вариации частоты и амплитуды колебаний основания в пределах 50–80% приводят к незначительному росту ошибок оценивания (не более 4%), т.е. их влияние на точность ориентации оказывается существенно меньше, нежели ошибок начальной оценки и с.к.о. шумов измерений.

На рис. 2–4 приведены ошибки оценивания углов α, β, γ. Ошибки начальной оценки для углов α, β, γ были заданы в пределах 0.004 рад (весьма критичных для современных систем начальной ориентации [18, 22]), с.к.о. помех ДУС – 10^{-4} рад/с, с.к.о. помех акселерометров – 10^{-5} м/с^2.

При данном уровне помех ошибка оценки угла α со 150-й с не превышала 5×10^{-6} рад на всем последующем интервале моделирования; для угла $\beta - 3 \times 10^{-6}$ рад, для угла $\gamma - 3.5 \times 10^{-6}$ рад, оставаясь стационарной на всем интервале моделирования.

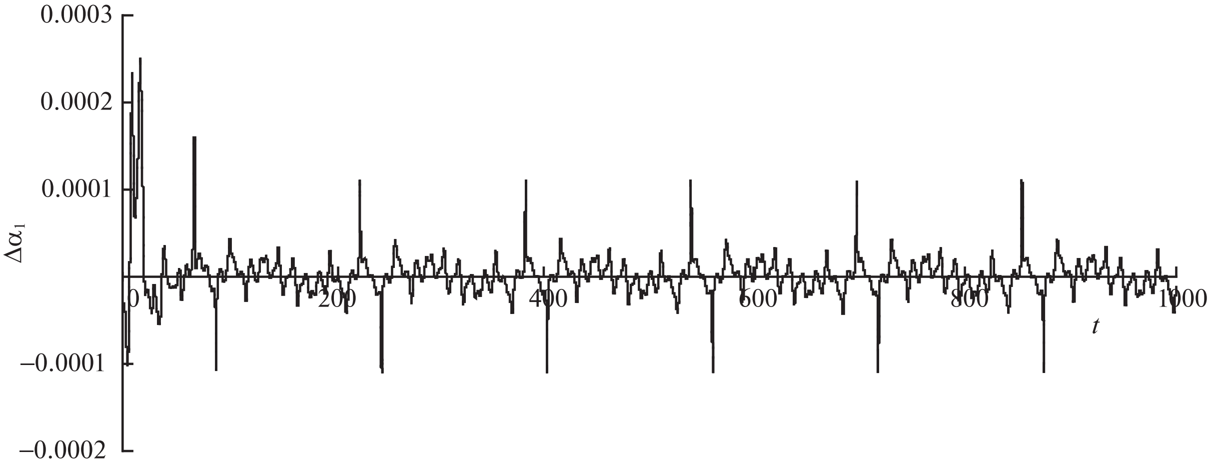


Рис. 5. Ошибка оценки угла α_1, рад

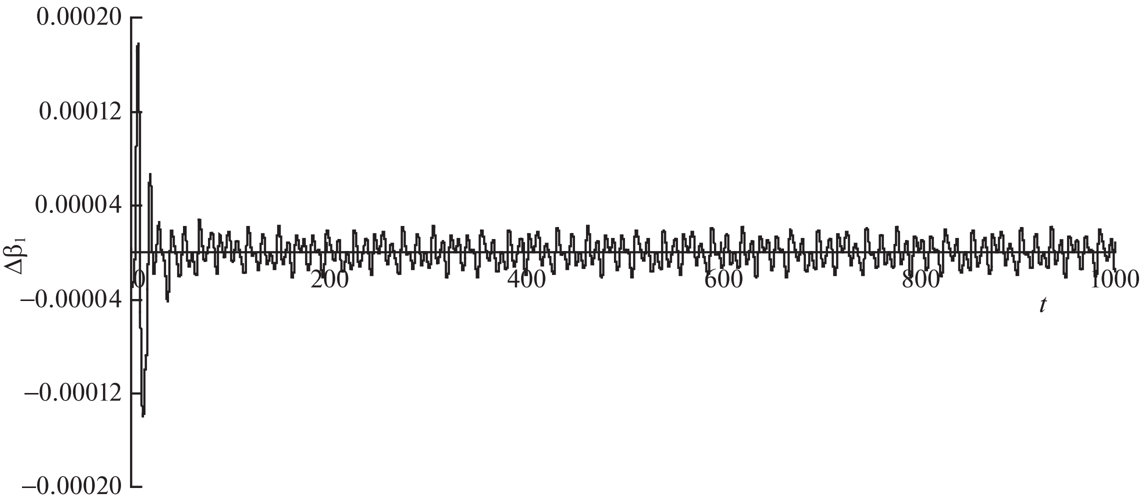


Рис. 6. Ошибка оценки угла β_1, рад

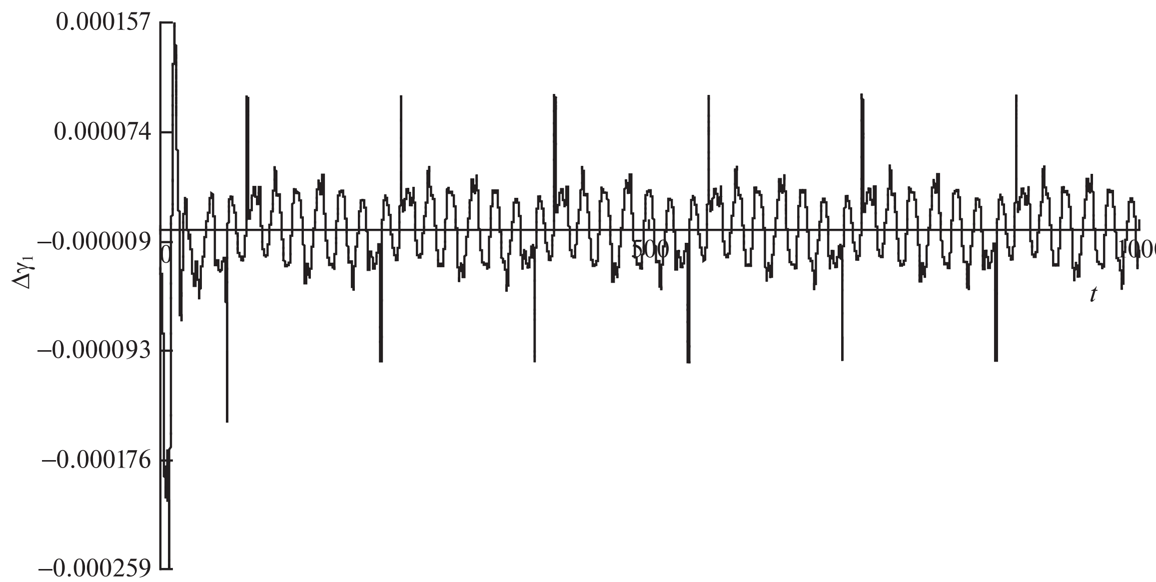


Рис. 7. Ошибка оценки угла γ_1, рад

На рис. 5–7 приведены ошибки оценивания углов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ при ошибках их начальной оценки, заданных в пределах 0.003 рад. Как следует из полученных результатов, ошибки оценки углов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ с 80-й с не превышают величины 1.5×10^{-4} рад, также оставаясь стационарными на всем последующем интервале оценивания.

Очевидно, что полученные точности оценки начальной ориентации БИНС удовлетворяют как современным, так и перспективным требованиям по точности и оперативности для подавляющего большинства систем начальной ориентации КА.

Заключение. В целом, результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод о том, что устойчивость и высокая точность предложенного алгоритма обеспечивают возможность его использования для решения задачи оперативной начальной ориентации средне- и высокоточных БИНС, расположенных на качающемся основании, без коррекции в течение достаточно длительного времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалев Б.К.* Развитие ракетно-космических систем выведения. М.: МГТУ, 2014. 398 с.
2. *Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В.* Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов. М.: МГТУ, 2014. 518 с.
3. *Сердюк В.К.* Проектирование средств выведения космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2009. 504 с.
4. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов. М.: Дрофа, 2004. 544 с.
5. *Борисенко Н.Ю., Сумароков А.В.* Об ускоренном построении орбитальной ориентации грузовых и транспортных кораблей серий “СОЮЗ МС” и “ПРОГРЕСС МС” // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 5. С. 131–141.
6. *Розенберг И.Н., Соколов С.В., Уманский В.И., Погорелов В.А.* Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 312 с.
7. *Соколов С.В., Погорелов В.А.* Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. М.: Физматлит, 2016. 264 с.
8. *Соколов С.В., Погорелов В.А.* Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. М.: Физматлит, 2009. 190 с.
9. *Емельянцев Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Под общ. ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ АО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2016. 394 с.
10. *Погорелов В.А., Соколов С.В.* Алгоритмическое обеспечение комплексированных навигационных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 154–167.
11. *Савельев В.М., Антонов Д.А.* Выставка бесплатформенной инерциальной навигационной системы беспилотного летательного аппарата на подвижном основании // Труды МАИ. 211. Вып. № 45. www.mai.ru/science/trudy.
12. *Веремеенко К.К., Савельев В.М.* Выставка бесплатформенной инерциальной навигационной системы беспилотного летательного аппарата в полете // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 1. С. 111–121.
13. *Липтон А.* Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М.: Наука, 1971. 168 с.
14. *Лукасевич В.И., Погорелов В.А., Соколов С.В.* Алгоритм оценки параметров вращения распределенной антенны по спутниковым измерениям // Радиотехника. 2015. № 6. С. 122–132.
15. *Соколов С.В., Погорелов В.А., Лукасевич В. И.* Нелинейная стохастическая фильтрация параметров углового движения распределенной антенны по спутниковым измерениям // Датчики и системы. 2015. № 5. С. 8–17.
16. *Джепе А., Козлов А.В., Никулин А.А.* Задача определения ориентации спутника при помощи разнесенных спутниковых антенн и датчиков угловой скорости // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 155–159.
17. *Kleusberg.* Mathematics of Attitude Determination with GPS // GPS WORLD. 1995. V. 6. №. 9. P. 72–78.
18. *Nadler A., Bar-Itzhack I.Y.* An Efficient Algorithm for Attitude Determination Using GPS // Proc. of the 11th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1998). Nashville, TN, 1998. P. 1783–1789.
19. *Rapoport L., Barabanov I., Khvalkov A., Kutuzov A., Ashjaee J.* OCTOPUS: Multi antennae GPS/GLONASS RTK System // Proc. of the 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1999). Nashville, TN, 1999. P. 797–804.
20. *Kerns A.J., Shepard D.P., Bhatti J.A., Humphreys T.E.* Unmanned Aircraft Capture and Control Via GPS Spoofing // Field Robotics. 2014. V. 31. № 4. P. 617–636.

21. *Bhatti J., Humphreys T.E.* Hostile Control of Ships Via False GPS Signals: Demonstration and Detection // NAVIGATION, Journal of the Institute of Navigation. 2017. V. 64. № 1. P. 51–66.
22. *Psiaki M.L., O'Hanlon B.W., Powell S.P., Bhatti J.A., Humphreys T.E., Schofield A.* GNSS lies, GNSS truth: Spoofing detection with two-antenna differential carrier phase // GPS World. 2014. V. 25. № 11. P. 36–44.
23. *Матвеев В.В., Распопов В.Я.* Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС датчиках. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 225 с.
24. *Mahony R., Hamel T., Pflimlin Jean-Michel.* Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group // IEEE Transactions on Automatic Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2008. V. 53(5). P. 1203–1217.
25. *Euston M., Coote P., Mahony R., Kim J., Hamel T.* A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV // IEEE /RSJ Intern. Conf. Intelligent Robots and Systems. Nice, 2008. P. 340–345.
26. *Crassidis J.L., Landis M.F., Cheng Y.* Nonlinear Attitude Filtering Methods // Guidance, Control and Dynamics. 2007. V. 30(1). P. 12–28.
27. *Gebre-Egziabher D., Hayward R.C., Powell J.D.* Design of Multi-sensor Attitude Determination Systems // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2004. V40(2). P. 627–649.
28. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
29. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006. 640 с.
30. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
31. *Делэйе Ф.* Бортовая инерциальная система координат Spacenaute для европейской ракеты-носителя "Ариан-6" на основе волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. № 4 (103). С. 3–13.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, № 6, с. 147–157

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 681.396.473

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛАЗЕРНО-ЛОКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ПОЛЕТА БЕСПИЛОТНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В ГОРОДСКИХ УСЛОВИЯХ[1]

© 2021 г. В. М. Лисицын[a],*, С. М. Мужичек[a], К. В. Обросов[a]

[a]ФНЦ ФГУП ГосНИИАС, Москва, Россия

*e-mail lvm@gosniias.ru

Поступила в редакцию 13.07.2021 г.
После доработки 20.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Предложена методика оценки эффективности обеспечения безопасности полета беспилотного транспортного средства в городских условиях лазерно-локационной пилотажной системой, основанная на энергетических расчетах отношения сигнал/шум при обнаружении препятствий типа провод. Оценка эффективности определяется условной вероятностью уклонения от столкновения при нахождении препятствия по курсу летательного аппарата. Получены оценки вероятности уклонения от столкновения с проводом для типовых условий полета. Показана высокая эффективность использования лазерно-локационных систем для обеспечения безопасности полета в городских условиях.

DOI: 10.31857/S0002338821060123

Введение. В настоящее время во многих странах прилагаются значительные усилия по созданию автономных беспилотных транспортных средств (БТС), в том числе летающих, таких, например, как квадракоптеры для эксплуатации в городских условиях. Навигационная система БТС, как правило, рассматривается на базе комплексирования спутниковой навигации и бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Однако для летающих БТС определение собственного положения в системе городской застройки не гарантирует получение информации о нахождении препятствий по маршруту движения, поскольку между зданиями могут быть протянуты провода, тросы, растяжки и т.д., расположение которых не имеет привязки к координатам объектового состава и может оперативно изменяться. Поэтому очевидна необходимость наличия на борту летающего БТС системы обнаружения потенциальных препятствий для обеспечения безопасного полета и построения безопасных траекторий движения БТС. Необходимо отметить, что такие препятствия, как упомянутые провода и тросы, т.е. тонкие протяженные препятствия (ТПП), не могут быть надежно обнаружены с помощью пассивных средств, таких, как телевидение или тепловидение, особенно если ТПП наблюдается не на фоне неба, а на фоне объектов сцены. Проведенные экспериментальные и теоретические исследования показали, что единственным надежным средством обнаружения ТПП, изготовленных, в том числе из неметаллических материалов, являются лазерно-локационные (ЛЛ) системы [1], использование которых для безопасности полета в городских условиях по сути безальтернативно [2, 3].

Для успешного решения задачи обеспечения безопасного полета ЛЛ-система должна зондировать пространство в некотором телесном угле, не только обнаруживая препятствия в направлении вектора скорости БТС, но и для формирования безопасной траектории облета или обхода при обнаружении такого препятствия. Существуют ограничения и взаимосвязь технических параметров ЛЛ-системы для использования в БТС. Длина волны излучения ЛЛ-системы должна быть безопасной для глаз людей, находящихся на зондируемой сцене. Этому условию удовлетворяет эрбиевый волоконный лазер с длиной волны излучения $\lambda = 1.55$ мкм. Максимальная частота излучения для такого лазера составляет 100 кГц. Это соответствует однозначно измеряемому расстоянию 1.5 км, что приемлемо для летающего БТС. Как будет показано ниже, при обнару-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-29-06077-мк).

жении ТПП при условии расположения препятствия по центру диаграммы излучения уровень отраженного сигнала обратно пропорционален углу расходимости этой диаграммы. Поэтому для обеспечения приемлемой вероятности обнаружения таких препятствий необходима концентрация лучистой энергии в малом телесном угле.

Можно считать, что именно ТПП являются наиболее опасным типом препятствий для БТС при выполнении полетов в городских условиях. Для надежного обнаружения городских ТПП на приемлемых расстояниях (200–400 м) при типовых характеристиках ЛЛ-системы угловая расходимость диаграммы излучения не должна превышать 1–2 угл. мин. При сканировании эта диаграмма направленности (ДН) от импульса к импульсу не должна смещаться более чем на половину своего размера. Угловая скорость сканирования такой диаграммой при достигнутых частотах следования зондирующих импульсов ограничена, что приводит при плотном (растровом) зондировании пространства либо к малым полям обзора, либо к низкому темпу обновления информации в поле обзора. Выходом из этого положения может быть использование неплотных прореженных способов сканирования пространства ДН лазерного излучения.

Для оценки качества работы подобной ЛЛ-системы целесообразно произвести количественную оценку безопасности полета БТС в городских условиях. В [4] описан следующий критерий количественной оценки безопасности полета: "частота столкновений в воздухе за час полета". Такой критерий зависит от характеристик внешней обстановки и не может быть оценен теоретически. Авторами был предложен другой критерий: вероятность уклонения от столкновения с препятствием, находящимся на траектории движения летательного аппарата. Для этого была разработана методика такой оценки. Методика основана на энергетических расчетах отношения сигнал/шум в тракте детектирования отраженного ЛЛ-сигнала и связывает технические параметры и логику работы ЛЛ-системы, режимы полета БТС и характеристики препятствий с оценкой безопасности полета. Для описания предлагаемой методики необходимо получить необходимые расчетные зависимости.

1. Энергетический расчет лазерного локатора при зондировании тонких протяженных препятствий. Рассчитаем энергетический потенциал ЛЛ-системы в режиме обнаружения препятствий и измерения дальности. Расчет потенциала имеет общий характер и не зависит от вида конкретной конструктивной реализации.

Рассмотрим отражающие объекты с диффузной поверхностью, полностью перекрывающей мгновенное поле зрения. В этом случае отраженная объектом мощность излучения в единице телесного угла в направлении приемной апертуры составляет [1, 5]

$$P_{\text{отр}} = \frac{\beta P_{\text{и}}}{\pi}\sqrt{L_{\text{атм}}L_{\text{опт}}}\cos\psi, \tag{1.1}$$

где β – коэффициент диффузного отражения; $P_{\text{и}}$ – импульсная мощность лазерного генератора; $L_{\text{атм}}$ – потери лазерного излучения в приземном слое атмосферы; $L_{\text{опт}}$ – потери лазерного излучения в оптическом тракте ЛЛ-системы при передаче импульса; ψ – угол между направлением лазерного пучка и нормалью к отражающей поверхности.

На фотоприемник попадает часть отраженной мощности, равная

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{отр}}\Omega\sqrt{L_{\text{атм}}L_{\text{опт}}}, \tag{1.2}$$

где $\Omega = S_{\text{пр}}/R$ – телесный угол, под которым видна с поверхности отражающего объекта приемная апертура ЛЛ-системы; $S_{\text{пр}} = b^2$ – площадь приемной апертуры ЛЛ-системы; R – расстояние от ЛЛ-системы до отражающего объекта.

Будем считать, что оптический тракт передающего канала идентичен оптическому тракту приемного. Тогда величина $L_{\text{опт}}$ в (1.1) и (1.2) одна и та же. В итоге для нормально расположенной поверхности к оси ДН получаем

$$P_{\text{пр}} = \frac{\beta P_{\text{и}} b^2}{\pi R^2} L_{\text{атм}} L_{\text{опт}}. \tag{1.3}$$

Минимальная (пороговая) мощность $P_{\text{пр.min.}}$, которую способен принять фотоприемник с эквивалентной шумовой полосой Δf и площадкой фоточувствительного элемента $A = l^2$ определяется выражением

$$\frac{1}{P_{\text{пр.min}}} = \frac{1}{P_{\text{пор}}} = \frac{D^*(\lambda)}{\sqrt{A\Delta f}}, \tag{1.4}$$

где $D^*(\lambda)$ – спектральная обнаружительная способность фотоприемника.

Как правило, для приема лазерного излучения с длиной волны λ используют фотоприемники, у которых красная граница $\lambda_{\text{гр}}$ совпадает с λ, и поэтому $D^*(\lambda) = D_{\max}$.

Используя (1.3) и (1.4), получаем следующее выражение для отношения сигнал/шум:

$$\frac{S}{N} = \frac{\beta P_{\text{и}} b^2 D^*_{\max} L_{\text{атм}} L_{\text{опт}} K}{\pi R^2 l \sqrt{\Delta f}}, \tag{1.5}$$

где K – коэффициент накопления сигнала.

Выразим потери излучения в атмосфере в виде

$$L_{\text{атм}} = 10^{-0.2\alpha R},$$

где α – погонное затухание излучения в атмосфере, зависящее от метеорологической дальности видимости. Для $K = 1$ запишем (1.5) в виде

$$\frac{S}{N} = \frac{\beta P_{\text{и}} b^2 D^*_{\max} L_{\text{опт}} 10^{-0.2\alpha R}}{\pi R^2 l \sqrt{\Delta f}}. \tag{1.6}$$

Как видно из (1.5), потенциал ЛЛ-системы в случае диффузного отражения не зависит от угла расходимости пучка θ.

Учтем особенности зондирования ТПП при энергетическом расчете. Оценим коэффициент ρ, представляющий собой отношение сигнала от ТПП к сигналу от бесконечной поверхности. Будем считать, что уровень сигнала излучения лазера на плоскости (XOY), перпендикулярной диаграмме направленности, на расстоянии R распределен по нормальному некоррелированному двумерному закону с равными дисперсиями с началом координат в точке пересечения диаграммы направленности с плоскостью

$$U(x,y) = q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy, \tag{1.7}$$

где q – коэффициент пропорциональности, а величина σ будет найдена ниже.

Интеграл (1.7) берется с помощью перехода к полярным координатам и в соответствии с [6] для неограниченной поверхности

$$U(x,y) = q2\pi\sigma^2.$$

С другой стороны, двойной интеграл (1.7) может быть представлен как произведение интегралов

$$U(x,y) = q\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Для ТПП типа провода диаметром 3 мм, расположенного перпендикулярно диаграмме направленности излучения (считая $\exp(-x^2/2\sigma^2) \approx 1$ при x, близких к 0),

$$U(x,y) = q\sigma\sqrt{2\pi}\Delta x,$$

здесь Δx – толщина троса. Тогда отношение сигналов равно

$$\rho = \frac{\Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

При расходимости лазерного луча $\theta = 1$ угл. мин. по уровню 0.5 от максимума σ может быть оценена как

$$\sigma \approx \frac{D}{2\sqrt{2\ln 2}},$$

где $D = \theta R$ – диаметр сечения диаграммы направленности на расстоянии R по уровню 0.5. В итоге

$$\rho = \frac{2\Delta x}{\theta R}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}.$$

Приведенные выше оценки сделаны при близком к нулю угле ψ между осью диаграммы направленности излучения и плоскостью, нормальной к ТПП, т.е. при облучении диффузной поверхности в направлении нормали к ней. Для ТПП, расположенного под углом ψ, выражение (1.6) приводится к виду

$$\frac{S}{N} \ge \frac{\beta P_{и} b^2 D^*_{\max} L_{опт} 10^{-0.2\alpha R}}{\pi R^2 l \sqrt{\Delta f}}\left(\frac{2\Delta x}{\theta R}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\cos\psi\right). \quad (1.8)$$

Полученное значение отношения сигнал/шум является максимально возможным для рассматриваемого случая. Облучение поверхности под углами, отличными от нуля, снижает отраженный сигнал и S/N не более чем пропорционально $\cos\psi$. Например, для $\psi = 60°$ S/N уменьшится на 3 дБ. Кроме того, при зондировании провод может не проходить через центр ДН, что должно быть учтено при проведении энергетического расчета. Поскольку, как отмечено выше, смещение диаграммы направленности производится не более чем на 0.5 значения ее размера, то каждое ТПП зондируется дважды. При этом максимальное расстояние Δ от ТПП до центра диаграммы направленности не превосходит 0.25 ее размера. Такое смещение приводит к ослаблению сигнала и уменьшению отношения S/N приблизительно на 1.3 дБ.

2. Энергетические потери, связанные со сканированием. Определим потери сигнала в тракте детектирования отраженного сигнала за счет сканирования диаграмм направленности входной и выходной оптики.

Диаграммы направленности передающей и приемной оптики осуществляют сканирование пространства и поэтому для обеспечения дальностного интервала, в котором обеспечивается прием отраженного сигнала, сдвинуты на некоторый угол $\Delta\varphi$ (будем называть этот интервал глубиной дальности ΔR). Наличие углового сдвига между передающей и приемной диаграммами в процессе сканирования может приводить к появлению мертвой зоны, в которой отраженный сигнал не принимается. Это связано с тем, что в пределах этой зоны принимаемая диаграмма направленности на момент прихода отраженного сигнала не пересекается в пространстве с положением передающей диаграммы, зафиксированной на момент излучения импульса. Поэтому отраженное от цели излучение не попадает в объектив ЛЛ-системы. Мертвая зона может простираться от приемо-передающего модуля до некоторой дальности R_0 и начиная с некоторой дальности R_1 до ∞.

Начиная с дальности R_0, которая определяется углом разведения диаграмм $\Delta\varphi$, расходимостью луча θ и скоростью сканирования ω, диаграммы начинают пересекаться. На диффузной поверхности зондируемого объекта появляется общий для обеих диаграмм участок S_0, отражение от которого принимает фотоприемное устройство ЛЛ-системы (рис. 1). По мере дальнейшего удаления объекта площадь S_0 растет, достигает максимума, а затем начинает уменьшаться и становится равной нулю. На рис. 1 обозначено: *1* – приемная диаграмма направленности; *2* – передающая диаграмма направленности; *3*, *4* – оси приемной и передающей диаграмм направленности, соответственно; *5* – облучаемый объект; *6* – поперечное сечение приемной и передающей диаграмм направленности на поверхности объекта (увеличено).

В первом приближении можно считать, что дополнительные потери мощности определяются отношением площади, в которой диаграммы пересекаются к площади сечения самой диаграммы Q. Обозначив через $2l$ расстояние между положением оси приемной диаграммы направленности на момент приема сигнала и фиксированным положением передающей диаграммы на момент излучения на расстоянии R от ЛЛ, r – радиус диаграммы направленности на том же расстоянии, получим отношение S_0/Q для осесимметричных диаграмм направленности:

$$\frac{S_0}{Q} = \frac{\int_{-x_0}^{x_0}\left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx}{\pi \cdot r^2},$$

где $y_2(x) = -l + \sqrt{r^2 - x^2}$; $y_1(x) = l - \sqrt{r^2 - x^2}$; $x_0(r) = \sqrt{r^2 - l^2}$.

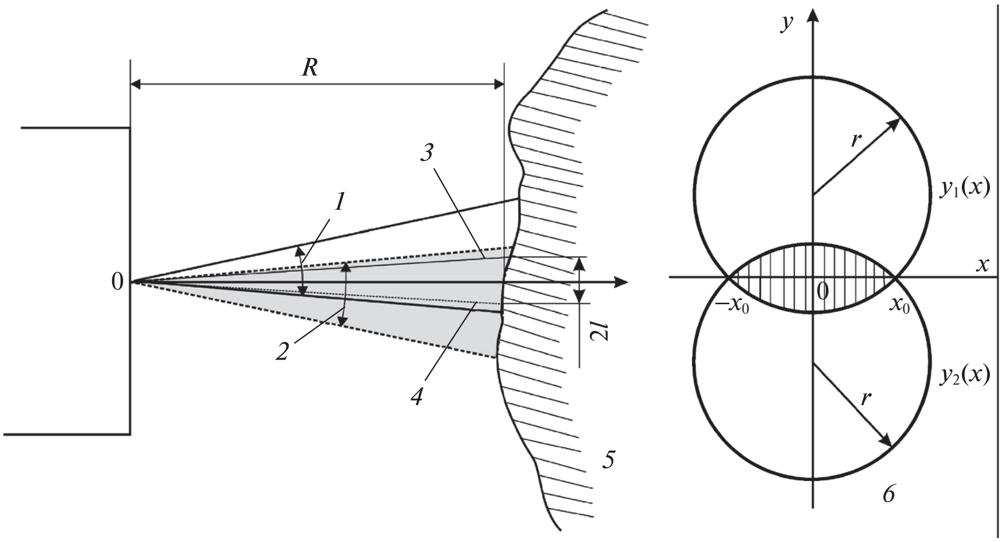


Рис. 1. К расчету потерь сигнала за счет сканирования диаграмм направленности входной и выходной оптики

Произведя необходимые действия, получаем

$$\frac{S_0}{Q} = \frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{1-\delta^2} - \delta\sqrt{1-\delta^2}), \tag{2.1}$$

где $\delta = l/r$, $2r = R\theta$.

Значение l определяется как

$$l = \frac{1}{2}(\Delta\varphi - \omega t)\,R.$$

Имея в виду, что $t = 2R/c$, где c – скорость света, получим

$$\delta = \frac{l}{r} = \frac{\Delta\varphi - \omega\dfrac{2R}{c}}{\theta}. \tag{2.2}$$

Диаграммы начинают пересекаться, когда δ становится равной 1, и перестают пересекаться, когда $\delta = -1$ (считая l со знаком). Таким образом минимальное и максимальное расстояния, при которых может быть принят отраженный сигнал, равны соответственно

$$R_{\min} = \frac{1}{2\omega}(\Delta\varphi - \theta)\,c, \quad R_{\max} = \frac{1}{2\omega}(\Delta\varphi + \theta)\,c,$$

и глубина дальности определяется следующим образом:

$$\Delta R = \frac{\theta c}{\omega}.$$

Для ТПП (2.1) сводится к выражению

$$\frac{S_0}{Q} = \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r} = \sqrt{1-\delta^2}. \tag{2.3}$$

При этом (2.3) можно рассматривать как оценку сверху потерь от сканирования, поскольку если зондирование происходит в момент, отличный от момента, когда ТПП расположено по центру ДН-излучения, то потери будут меньше.

3. Методика оценки эффективности ЛЛ-системы при выполнении маловысотного полета (МВП). Под эффективностью ЛЛ-системы будем понимать вероятность безопасного пилотирования $P_{\text{б.п}}$, представляющую собой произведение составляющих:

$$P_{\text{б.п}} = P_{\text{о.п}} P_{\text{б.о}},$$

где $P_{\text{о.п}}$ – вероятность обнаружения препятствия, находящегося по направлению вектора скорости; $P_{\text{б.о}}$ – вероятность безопасного облета (обхода) препятствия.

Для использования методики необходимо задать следующие исходные данные.

1. По БТС:

располагаемая перегрузка n_y;

скорость полета V;

время обработки информации и реакции БТС на управляющие воздействия τ.

2. По внешним условиям:

характеристики препятствия;

коэффициент диффузного отражения β;

состояние атмосферы: показатель поглощения лазерного излучения в атмосфере α (дБ/км);

3. По ЛЛ-каналу задаются некоторые технические характеристики и логика работы.

Принимаются следующие допущения.

1. БТС до обнаружения препятствия движется горизонтально прямолинейно с постоянной скоростью V. БТС после обнаружения препятствия может маневрировать с располагаемой перегрузкой. Начало маневра (обхода) соответствует моменту принятия решения о наличии препятствия плюс некоторое запаздывание, соответствующее времени реакции БТС на управляющие воздействия. БТС обладает достаточной тяговооруженностью для поддержания постоянной скорости V при совершении маневра.

2. Первоначальное значение текущей дальности до препятствия $D_{\text{тек}}$ соответствует заведомо безопасному расстоянию. Препятствие располагается по курсу БТС, т.е. находится в трубке безопасности, за пределами заявленной максимальной дальности действия ЛЛ-системы.

3. В полетном задании есть в наличии цифровая карта местности, и БТС оборудован инерциальной навигационной системой. Таким образом, БТС ориентируется на местности и строит траекторию полета в соответствии с полетным заданием.

Методика носит расчетный характер и заключается в следующем.

1. По V и n_y рассчитывается минимально возможный радиус кривизны траектории $R_{\min}$ при выполнении маневра:

$$R_{\min} = \frac{V^2}{g\,n_y}, \tag{3.1}$$

где g – ускорение свободного падения.

2. По заданным характеристикам препятствия задаются его размеры (диаметр) и определяется необходимое смещение ΔH для безопасного обхода (облета) относительно текущего направления:

$$\Delta H = H_{\text{БТС}} + \Delta h + R_{\text{т.б}}, \tag{3.2}$$

где $H_{\text{БТС}}$ – собственные габариты БТС, Δh – безопасное смещение БТС относительно препятствия, $R_{\text{т.б}}$ – радиус трубки безопасности полета.

3. По ΔH, $R_{\min}$, V и τ находится минимальная дальность начала маневра $D_{\min}$:

$$D_{\min} = V\tau + \sqrt{\Delta H(2R_{\min} - \Delta H)}. \tag{3.3}$$

4. Используя выражение (1.8), рассчитывается среднее отношение сигнал/шум (S/N) при зондировании препятствия. При этом задаются текущая дальность $D_{\text{тек}}$, внешние условия (α, β), характеристики препятствия и ЛЛ-системы.

Вводится поправка на возможное смещение ТПП относительно центра диаграммы направленности (в соответствии с техническими характеристиками ЛЛ-системы). После этого для любого типа препятствий берется поправка на потери, связанные со сканированием в соответствии с выражениями (2.3) и (2.2).

5. Задаваясь вероятностью ложных тревог $P_{\text{л.т}}$ и используя полученное отношение сигнал/шум, определяем вероятность обнаружения отраженного сигнала $P_{\text{обн}}$ при однократном зондировании. Зависимость $P_{\text{обн}}$ от $P_{\text{л.т}}$ при заданном отношении сигнал/шум для экспоненциального распределения мощности отраженного сигнала [7] имеет вид

$$P_{\text{обн}} = P_{\text{л.т}}^{\frac{1}{1+S/N}}. \tag{3.4}$$

6. Рассчитывается количество зондирований N, попадающих на препятствие. Для этого используется текущая дальность $D_{\text{тек}}$, характеристики препятствия, логика работы и характеристики ЛЛ-системы.

7. По $P_{\text{обн}}$ и N определяем ожидаемое количество обнаруженных сигналов от препятствия n:

$$n = P_{\text{обн}}N.$$

8. Для определения вероятности обнаружения препятствия $P_{\text{о.п}}$ будем использовать принятый в радиолокации критерий Q из N, т.е. если траектория сканирования диаграммы направленности пересекает ТПП N раз, то обнаружение произойдет не менее чем в Q случаях. В соответствии с формулой полной вероятности вычисляем $P_{\text{о.п}}$ с помощью выражения

$$P_{\text{о.п}} = \sum_{i=0}^{N-Q} C_N^{Q+i}\, P_{\text{обн}}^{Q+i}\,(1 - P_{\text{обн}})^{N-Q-i}, \tag{3.5}$$

где C_N^Q – число сочетаний из N по Q. Задаваясь минимально допустимой вероятностью обнаружения препятствия $P_{\text{зад}}$, производим сравнение полученной вероятности и заданной: если $P_{\text{о.п}} \geq P_{\text{зад}}$, то препятствие обнаружено с вероятностью не менее заданной; если $P_{\text{о.п}} < P_{\text{зад}}$, то препятствие не обнаружено с заданной вероятностью.

Решение может быть принято и по другому критерию: $n \geq Q$ – препятствие обнаружено; $n < Q$ – препятствие не обнаружено.

9. Если препятствие не обнаружено, то производится расчет текущей дальности для следующего цикла обзора $D_{\text{тек}}$:

$$(D_{\text{тек}})_{i+1} = (D_{\text{тек}})_i - Vt_{\text{обз}},$$

где $t_{\text{обз}}$ – период цикла обзора.

10. Если препятствие обнаружено, то сопоставляем текущую дальность $D_{\text{тек}}$ и $D_{\min}$. Если $D_{\text{тек}} \geq D_{\min}$, то безопасность полета обеспечена. Таким образом мы получаем дальность обнаружения препятствий с заданной вероятностью правильного обнаружения $P_{\text{о.п}}$. Однако даже если $D_{\text{тек}} \geq D_{\min}$, то все равно можно перейти на п. 4 и продолжить процедуру до момента $D_{\text{тек}} = D_{\min}$. Тогда получим вероятность обнаружения на минимально допустимых дальностях $D_{\min}$. Если препятствие обнаружено, когда $D_{\text{тек}}<D_{\min}$, то с большой вероятностью произойдет столкновение с препятствием, т.е. безопасность не обеспечена.

Предложенный подход дает возможность считать эквивалентными вероятность обнаружения препятствия $P_{\text{о.п}}$ на дальности не менее $D_{\min}$, позволяющей уклониться от столкновения, и вероятность безопасного полета $P_{\text{б.п}}$. Схематично методика представлена на рис. 2.

4. Результаты моделирования. Используя предложенную методику, была произведена оценка эффективности информационного обеспечения безопасности пилотирования БТС, оборудованного гипотетической ЛЛ-системой при полете в городских условиях. К ТПП относятся провода, тросы, растяжки и др. Они могут отличаться количеством параллельных структур (провода линий электропередач (ЛЭП), материалом изготовления, диаметром, ориентацией в пространстве, структурой поверхности, коэффициентом отражения и т.д. Однако все они не существуют изолированно, а соединяются с препятствиями других типов (здания, мачты освещения, опоры ЛЭП, элементы рельефа местности и пр.). Поэтому для обнаружения ТПП можно использовать прореженные способы сканирования диаграммой направленности лазерного излучения, которые должны обеспечить не менее заданного количества пересечений траектории сканирования с ТПП при любом его положении относительно направления полета БТС.

Для проведения моделирования были заданы технические характеристики и способ сканирования гипотетической ЛЛ-системой, которая осуществляет зондирование впередилежащего пространства. Центр поля обзора соответствует направлению вектора скорости БТС. Диаграмма направленности ЛЛ-системы движется по трохоиде (рис. 3).

Для полета БТС в условиях городской застройки наиболее опасным препятствием принимается ТПП, имеющее вертикальную проекцию на плоскость, перпендикулярную вектору скорости БТС, так как при этом имеет место наименьшее число пересечений ТПП траекторией движения ДН. Из рис. 3 видно, что количество зондирований N при пересечении провода при любой его ориентации траекторией движения диаграммы направленности лазерного излучения составляет не менее пяти, за исключением концевых участков, на которых $N = 4$. В качестве критерия обнаружения может быть выбран критерий 3 из 4, который позволяет оценить близость

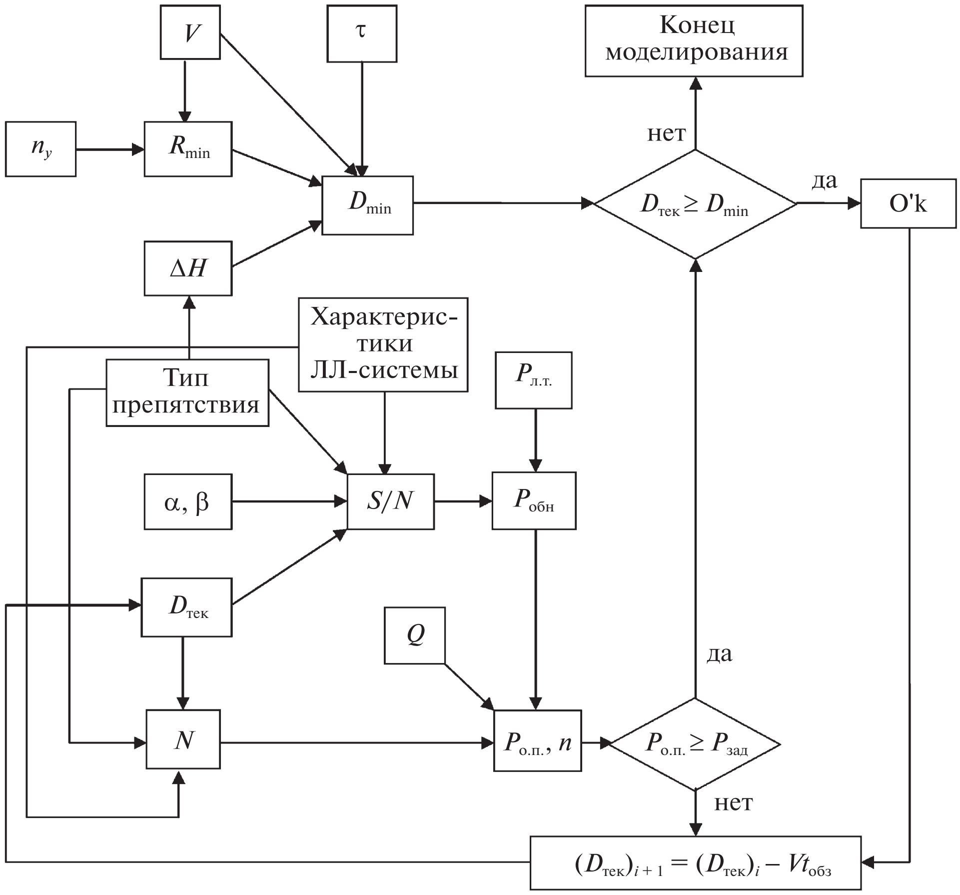


Рис. 2. Методика оценки эффективности ЛЛ-системы при выполнении МВП

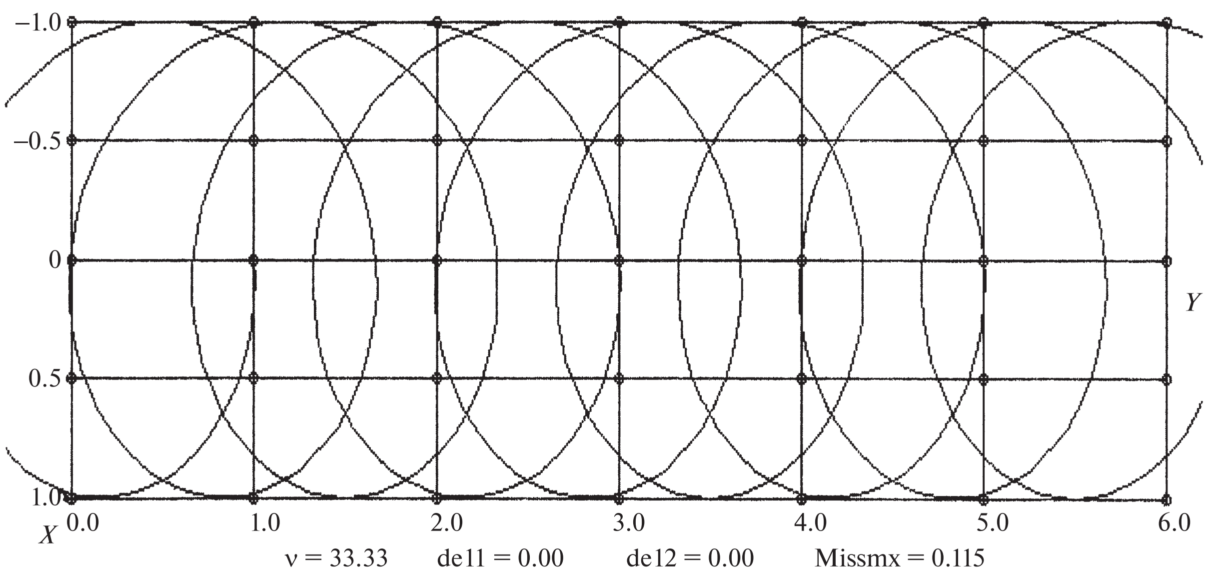


Рис. 3. Траектория движения диаграммы излучения ЛЛ-системы

Таблица 1

Характеристика	Значение
Длина волны излучения лазера	1.54 мкм
Частота повторения импульсов	30 кГц
Расходимость лазерного луча	1угл. мин
Угол прокачки по азимуту	±25°
Угол между осью и образующей конуса круговой развертки	1°
Частота круговой развертки	50 Гц
Диаметр фотоприемного устройства (ФПУ)	50 мкм
Суммарный коэффициент пропускания оптики, $L_{опт}$	0.67
Полоса пропускания блока обнаружения отраженного сигнала, Δf	300 МГц
Импульсная мощность лазерного излучателя, $P_и$	4 кВт
Площадь приемной апертуры ЛЛ-канала, b^2	$(8.1 \times 10^{-2})^2$ м^2
Максимальная спектральная обнаружительная способность ФПУ, D_{max}	10^{12} см · Гц$^{1/2}$ · Вт$^{-1}$
Диаметр выходной апертуры передающего тракта, a	65 мм
Длительность импульса	3.3 нс
Смещение диаграммы направленности за один цикл излучения	0.62'
Период обзора, с	1
Коэффициент диффузного отражения ТПП, β	0.22
Погонное затухание излучения в атмосфере, α	2 дБ/км

Таблица 2

Расстояние до ТПП, м	$P_{л.т} = 10^{-3}$		$P_{л.т} = 10^{-5}$	
	$P_{обн}$	$P_{о.п}$	$P_{обн}$	$P_{о.п}$
40	0.99673881	0.999936465	0.9945706	0.99982441
60	0.98894767	0.999277832	0.9816474	0.9980282
80	0.97382049	0.996029932	0.9567494	0.98941304
100	0.94923567	0.985564539	0.9168327	0.96295767
120	0.91360984	0.960211363	0.8602037	0.90345245
140	0.8661734	0.91075459	0.7870604	0.79901537
160	0.80719822	0.830154879	0.6997888	0.65132743
180	0.73810356	0.718055144	0.6028309	0.48009747
200	0.66138052	0.583195592	0.5020562	0.31559063
220	0.58031741	0.441491358	0.403747	0.18354348
240	0.49856683	0.310353334	0.313477	0.09424909
260	0.41964866	0.202569989	0.2352212	0.04287431
280	0.34650533	0.123166461	0.1709424	0.01741899
300	0.28120728	0.070188941	0.120701	0.0063971
320	0.22485357	0.037804927	0.0831444	0.00215574
340	0.17765223	0.019438881	0.0561416	0.000678
360	0.1391206	0.009646667	0.0373524	0.00020262
380	0.10833202	0.004672275	0.0246185	5.858E-05
400	0.08414701	0.002232875	0.0161584	1.6671E-05

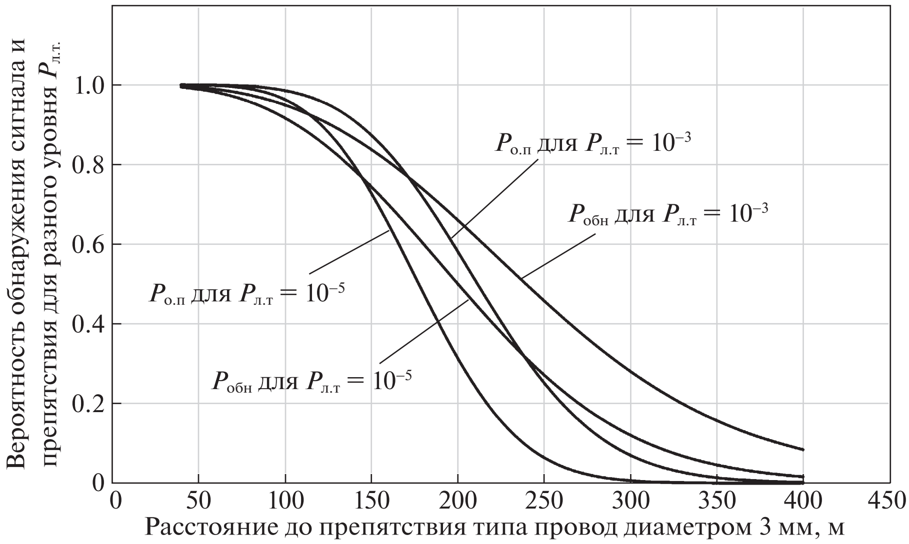


Рис. 4. Зависимость вероятности обнаружения сигнала и препятствия от расстояния до ТПП

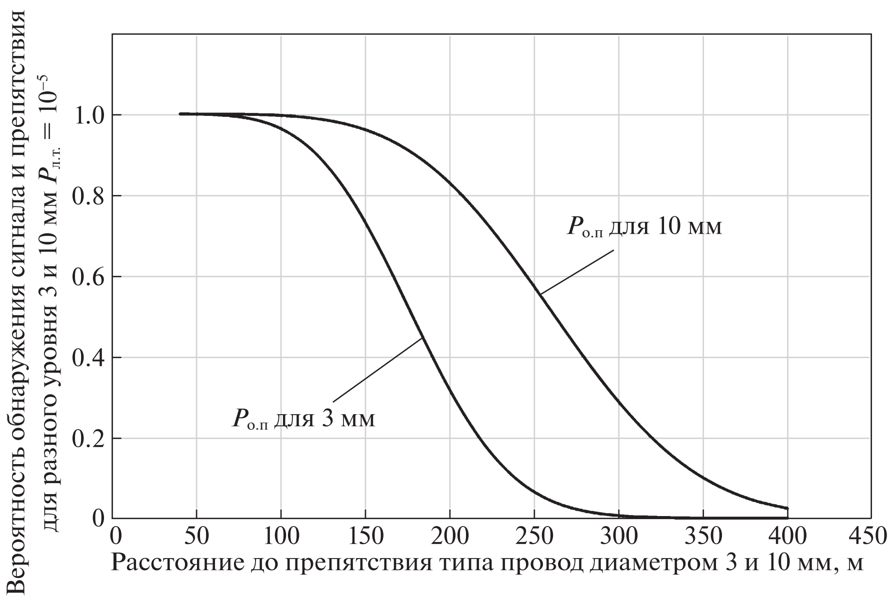


Рис. 5. Зависимость вероятности обнаружения провода диаметром 3 и 10 мм от расстояния до ТПП

ТПП к прямой линии и значительно сократить число ложных срабатываний. Для критерия 3 из 4 выражение (3.5) сводится к виду

$$P_{\text{о.п}} = P_{\text{обн}}^4 + 4P_{\text{обн}}^3(1 - P_{\text{обн}}) = 4P_{\text{обн}}^3 - 3P_{\text{обн}}^4.$$

Основные характеристики ЛЛ-системы и ТПП представлены в табл. 1.

Характеристики гипотетического БТС: располагаемая перегрузка $n_y = 1.5$, скорость полета $V = 20$ м/с, время обработки информации и реакции БТС на управляющие воздействия $\tau = 0.9$ с. Примем собственные габариты БТС $H_{\text{БТС}} = 2$ м, минимально допустимое расстояние пролета от провода $\Delta h = 5$ м, а радиус трубки безопасности $R_{\text{т.б}} = 3$ м. Таким образом в соответствии с (3.2) $\Delta H = 10$ м. Отсюда, используя выражения (3.1) и (3.3), получаем $R_{\min} = 27$ м, $D_{\min} = 39.1$ м.

В табл. 2 и на рис. 4 представлены зависимости вероятности обнаружения отраженного сигнала от провода диаметром 3 мм $P_{\text{обн}}$ и вероятности обнаружения провода $P_{\text{о.п}}$ в соответствии с (3.4) и (3.5) по критерию 3 из 4 от расстояния до ТПП для разного уровня ложных тревог $P_{\text{л.т}} = 10^{-3}$ и $P_{\text{л.т}} = 10^{-5}$.

На рис. 5 представлены зависимости вероятности обнаружения провода $P_{\text{о.п}}$ диаметром 3 и 10 мм по критерию 3 из 4 от расстояния до ТПП при уровне ложных тревог $P_{\text{л.т}} = 10^{-5}$.

Из табл. 2 следует, что на минимальной дальности, допускающей уклонение от столкновения, безопасность полета обеспечена с вероятностью $P_{\text{о.п}} = 0.9998$ для $P_{\text{л.т}} = 0.00001$. Полученные зависимости для ТПП типа провод разного диаметра подтверждают высокую эффективность ЛЛ-систем по обеспечению безопасного использования БТС в городских условиях.

Заключение. Разработанная методика оценки эффективности обеспечения безопасности полета БТС в городских условиях пилотажной ЛЛ-системой, основана на энергетических расчетах. Оценка эффективности определяется вероятностью уклонения от столкновения при условии нахождения препятствия по курсу БТС. Предложенный подход дает возможность считать эквивалентными вероятность обнаружения препятствия на дальности, позволяющей уклониться от столкновения, и вероятность безопасного полета. С помощью данной методики можно исследовать влияние на вероятностные характеристики безопасности полета технических параметров и логики работы ЛЛ-системы, погодных условий, характеристик маневренности и скорости полета БТС, особенностей препятствий без детального моделирования работы системы и зондирования препятствий. Провод произвольной ориентации может рассматриваться в качестве типового препятствия для определения эффективности работы ЛЛ-системы при полете БТС в городских условиях как наиболее сложный объект из всех возможных препятствий. Полученные зависимости вероятности обнаружения проводов разного диаметра подтверждают высокую эффективность ЛЛ-систем, обеспечивающих безопасность полета БТС.

Выражения для энергетических расчетов при зондировании неограниченных поверхностей допускают обобщение методики на случай зондирования различных препятствий, отличных от ТПП, что позволяет проводить оценку безопасности при выполнении маловысотного полета любых типов летательных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы импульсной лазерной локации / Под ред. В.Н. Рождествина. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ, 2010. 573 с.
2. *Дановский В.Н., Ким В.Я., Лисицын В.М., Обросов К.В., Тихонова С.В.* Сравнение возможностей радиолокации и лазерной локации как методов информационного обеспечения безопасности маловысотного полета // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 4. С. 153–165.
3. *Лисицын В.М., Себряков Г.Г., Обросов К.В.* Использование лазерных локаторов в перспективных информационных системах летательных аппаратов // Лазеры в науке, технике, медицине: сб. научн. тр. Т. 21 / Под ред. В.А. Петрова. М.: МНТОРЭС им. А.С. Попова, 2010. С. 16–20.
4. *Желтов С.Ю., Косьянчук В.В.* Общие требования к характеристикам безопасности беспилотных воздушных транспортных средств в едином воздушном пространстве “умного города” // Тез. докл. IV Всероссийск. научно-технической конф. “Моделирование авиационных систем”. М.: ГНЦ ГосНИИАС, 2020. С. 202.
5. Radar Handbook. Editor-In-Chief M.I. Skolnik. McGraw Hill Book Company, 1970.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 797 с.
7. *Дулевич В.Е., Коростелев А.А., Мельник Ю.А. и др.* Теоретические основы радиолокации / Под ред. В.Е. Дулевича. М.: Сов. радио, 1978. 608 с.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

© 2021 г. М. В. Левский

Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова – филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, Королев, Россия

e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2020 г.
После доработки 02.08.2020 г.
Принята к публикации 26.10.2020 г.

Аналитическим путем решается задача оптимального управления переориентацией космического аппарата из произвольного начального углового положения в заданное конечное угловое положение при наличии эллипсоидальных ограничений на фазовые переменные и управляющие функции (ограничены угловая скорость и силовой момент). Минимизируется время разворота. Рассматривается случай, когда существенным ограничением является максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Построение оптимального управления разворотом основано на кватернионных переменных и моделях. Показано, что во время оптимального разворота момент сил параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве, и при вращении космического аппарата направление кинетического момента постоянно относительно инерциальной системы координат. Выписаны аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимальной программы управления. Даны расчетные формулы для определения временных характеристик маневра и вычисления длительности разгона и торможения. Для осесимметричного космического аппарата поставленная задача оптимального управления решается до конца – получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета ключевых параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования движения космического аппарата при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338821030100

Введение. В статье решается задача приведения космического аппарата (КА) в положение заданной ориентации оптимальным образом. Пространственное движение КА относительно центра масс задается кватернионом [1]. Построение оптимальной программы вращения основано на кватернионных моделях, принципе максимума и универсальных переменных [2].

Вопросы управляемого движения твердого тела вокруг центра масс исследовались многими авторами неоднократно [1–25]. Наиболее детально задача оптимального управления угловым движением КА решена только для плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции [3] и пространственных вращений сферически-симметричного тела [1]. Для построения программы управления ориентацией КА используются различные методы и алгоритмы (в том числе на основе нечеткой логики [4], концепции обратных задач динамики [5, 6] и др.). Также хорошо известны проблемы оптимального управления движением КА [1, 2, 7–19], в том числе с неограниченным управлением [8, 9] (как с фиксированным [8], так и с нефиксированным временем окончания маневра [9]). Наиболее популярны задачи оптимального по времени разворота [1, 10–16, 18]. Несомненно, практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота, так как они позволяют применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Некоторые решения получены для осесимметричных КА [14–17]. В частности, авторы работы [17] для решения краевой задачи принципа максимума сделали замену переменных и свели исходную задачу к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела. Для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА аналитическое решение задачи пространственного разворота не найдено, кроме некоторых особых случаев (например, [1, 18]). Управление ориентацией КА с инерционными исполнительными органами (гиродинами) имеет свои особенности [11, 20–23], и для таких КА ранее был разработан запатентованный метод [26]. Проблема создания высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня.

Ниже исследуется динамическая задача оптимального по времени управления разворотом КА, когда ограничения накладываются как на управляющие функции, так и на фазовые переменные (ограничен не только силовой момент, но и угловая скорость). Найденное решение позволяет разворачивать КА с ограниченной кинетической энергией вращения за минимальное время, что крайне важно для практики космических полетов. Вопросы быстродействия маневров при экономном управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая в статье задача является практически важной.

1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления. Динамика углового движения КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [3]:

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1, \quad J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\,\omega_1\omega_3 = M_2, \quad J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\,\omega_1\omega_2 = M_3, \tag{1.1}$$

где J_i, $i = \overline{1,3}$, – главные центральные моменты инерции аппарата, M_i – проекции главного момента $\mathbf{M}$ сил на главные центральные оси эллипсоида инерции аппарата, ω_i – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$, образованного главными центральными осями эллипсоида инерции аппарата.

Для описания пространственного движения КА воспользуемся математическим аппаратом кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Движение связанного базиса $\boldsymbol{E}$ относительно опорного базиса $\boldsymbol{I}$ будем задавать кватернионом Λ [1]. Для определенности базис $\boldsymbol{I}$ считается инерциальным. Поэтому справедливо следующее кинематическое уравнение [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}, \tag{1.2}$$

где символ “$\circ$” – знак умножения кватернионов [1, с. 11–20]. Для удобства кватернион Λ, отражающий текущую ориентацию КА, полагаем нормированным $\|\Lambda\| = 1$ [1]. Здесь и далее операция кватернионного умножения на вектор понимается как умножение на кватернион с нулевой скалярной частью; в частности $\Lambda \circ \boldsymbol{\omega} = \Lambda \circ \Omega$, где Ω – кватернион, у которого $\mathrm{sqal}\,\Omega = 0$, $\mathrm{vect}\,\Omega = \boldsymbol{\omega}$.

Управление движением КА относительно центра масс осуществляется путем изменения момента сил $\mathbf{M}$. Предположим, что область возможных значений вектора $\mathbf{M}$ подобна эллипсоиду инерции КА и описывается неравенством [14]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \le u_0^2, \tag{1.3}$$

где $u_0 > 0$ – некоторая положительная величина, характеризующая мощность исполнительных органов системы ориентации КА. Рассматривается задача разворота с закрепленными левым и правым концами траектории движения, причем начальная и конечная угловые скорости полагаются равными нулю (относительно опорного базиса $\boldsymbol{I}$); такие задачи встречаются достаточно часто и имеют большое практическое значение. Для исследуемого управления разворотом из положения покоя в положение покоя граничные условия для динамической системы (1.1), (1.2) представляются в виде равенств:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \tag{1.4}$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}}, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \tag{1.5}$$

где T – время окончания поворотного маневра. Кватернионы $\Lambda_{\text{н}}$ и $\Lambda_{\text{к}}$, задающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию $\|\Lambda_{\text{н}}\| = \|\Lambda_{\text{к}}\| = 1$ (считается, что $\Lambda_{\text{к}} \ne \pm\Lambda_{\text{н}}$). Далее полагаем, что для допустимых движений кинетическая энергия вращения КА не должна превышать некоторой положительной величины $E_{\text{доп}}$. Т.е. управление ограничено условием

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 \le 2E_{\text{доп}}, \tag{1.6}$$

где $E_{\text{доп}}$ – максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Задача оптимального управления пространственным разворотом КА формулируется следующим образом: необходимо перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) и ограничениями (1.3), (1.6) за минимальное время T. Оптимальное решение $\mathbf{M}(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

Сформулированная динамическая задача управления КА отличается от рассматриваемых ранее задач максимального быстродействия тем, что оптимальная траектория вращения определяется при наличии ограничений не только на управляющий момент, но и на фазовые переменные (на угловую скорость КА), в этом состоит ее принципиальное отличие. Поскольку время окончания маневра T не задано, разворот КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) всегда можно осуществить (решение $\mathbf{M}(t)$ задачи (1.1)–(1.6) существует для любых сочетаний значений $\Lambda_{\text{н}}$, $\Lambda_{\text{к}}$, J_1, J_2, J_3, u_0). Оптимальное управление пространственной переориентацией КА обладает важными полезными свойствами. В частности, для управления, ограниченного условием (1.6), остановка вращения (при необходимости прекращения маневра в критической или нештатной ситуации) занимает время, не превышающее заранее известной величины.

2. Решение задачи оптимального управления разворотом. Поставленная задача управления (1.1)–(1.6) есть динамическая задача оптимального разворота твердого тела [1], в которой управляющими переменными являются моменты M_i, $i = \overline{1,3}$. Будем решать указанную задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина [27]. Пусть φ_i – сопряженные переменные, соответствующие переменным ω_i, $i = \overline{1,3}$. Вместо сопряженных переменных ψ_j, соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ, $j = \overline{0,3}$, используем универсальные переменные r_i, $i = \overline{1,3}$ [2], поскольку критерий оптимальности не включает позиционных координат (элементов кватерниона ориентации Λ). Ограничение на фазовые переменные λ_j (и соответственно Λ) несущественно, так как оно выполняется при любых движениях КА вокруг центра масс; $\|\Lambda(t)\| = \text{const}$ в силу уравнения (1.2) [1]; мы полагали $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_{\text{н}}\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

2.1. Функция Гамильтона и сопряженная система уравнений. Для динамической задачи оптимального управления (1.1)–(1.6) гамильтониан H равен [2]

$$H = -1 + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3,$$

где

$$r_1 = (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2; \quad r_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2; \\ r_3 = (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2.$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора $\mathbf{r}$ и вектор $\mathbf{r}$ удовлетворяют уравнениям [2]

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \\ \dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, \tag{2.1}$$

где символ $\times$ обозначает операцию векторного произведения векторов. Уравнения для сопряженных функций φ_i имеют вид [27]

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \quad i = \overline{1,3},$$

или в развернутой форме:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_3\varphi_2(J_1 - J_3)/J_2 + \omega_2\varphi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_3\varphi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\varphi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 = \omega_2\varphi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\varphi_2(J_1 - J_3)/J_2 - r_3. \tag{2.2}$$

Гамильтониан H составлен без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор $\mathbf{r}$ неподвижен относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (постоянство модуля $|\mathbf{r}|$ следует из свойств уравнений (2.1)). Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (2.1) определяется начальным $\Lambda_{\text{н}}$ и конечным $\Lambda_{\text{к}}$ положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{н}}$$

(составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ – проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси инерциального базиса $\boldsymbol{I}$); $\tilde{\Lambda}$ – кватернион, сопряженный кватерниону Λ [1, с. 11–20]. Считается, что $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (в противном случае $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора $\mathbf{c}_E$ зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце $\Lambda(T) = \Lambda_к$, необходимо определить вектор $\mathbf{c}_E$ (или значение вектора $\mathbf{r}$ в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2).

2.2. Условия максимума гамильтониана и структура оптимального решения. Определим условия максимума для функции H. Перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$H = M_1\varphi_1/J_1 + M_2\varphi_2/J_2 + M_3\varphi_3/J_3 + H_{\text{inv}},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i, $i = \overline{1,3}$. Введем вспомогательные переменные

$$g_i = \varphi_i/\sqrt{J_i}, \quad u_i = M_i/\sqrt{J_i}.$$

После замены переменных гамильтониан H принимает вид $H = g_1u_1 + g_2u_2 + g_3u_3 + H_{\text{inv}}$, а ограничение (1.3) запишется так: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq u_0^2$. Функция H максимальна, когда

$$u_i = u_0 g_i\Big/\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}.$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \neq 0$, максимум функции H для управлений $M_i(t)$ при ограничении (1.3) достигается, если

$$M_i = \frac{u_0\varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$E(t) = (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)/2.$$

В начале и в конце разворота ограничение (1.6) несущественно, оно переходит в строгое неравенство, так как угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю: $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Поэтому в интервалах движения, когда $E(t) < E_{доп}$, оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с учетом требований (1.4), (1.5). Системе (1.1), (2.1)–(2.3) удовлетворяют функции φ_i, пропорциональные r_i. С учетом условий разворота $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ система уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) имеет единственное решение, в котором φ_i и угловые скорости ω_i связаны с переменными r_i выражениями

$$\varphi_i = a(t)r_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.4}$$

$$\omega_i = b(t)r_i/J_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.5}$$

где $a(t)$, $b(t)$ – скалярные функции времени. Подстановка равенств (2.4), (2.5) в систему (2.2) с учетом уравнений (1.1), (2.1), (2.3) превращает все три уравнения (2.2) в тождества, если $\dot{a} = -1$, что доказывает истинность решения (2.4), (2.5). Оптимальная функция $a(t)$ описывается зависимостью $a(t) = a(0) - t$. Значение $a(0)$ определяется временными параметрами разворота. Значение $\mathbf{r}(0)$ такое, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.5) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_н$ для траектории движения $\Lambda(t)$ выполнялось равенство $\Lambda(T) = \Lambda_к$.

Разворот КА совершается максимально быстро, если в каждый момент времени t угловая скорость максимальна, насколько это позволяют ограничения (1.3) и (1.6). Выше было показано, что если $E(t) < E_{доп}$, то оптимальным является управление (2.3) и $\mathbf{M} \neq 0$, если $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ (компонентами вектора $\boldsymbol{\varphi}$ являются сопряженные переменные φ_i, а u_i – компоненты вектора $\mathbf{u}$). При условии $E(t) = \text{const} = E_{доп}$ область возможных значений $\mathbf{u}$ сокращается из шара $|\mathbf{u}| \leq u_0$ до плоского круга, ограниченного окружностью, образованной пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору, компонентами которого являются $\omega_i\sqrt{J_i}$ (так как для выполнения $E(t) = \text{const} = E_{доп}$ должно быть $\dot{E} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$); знак умножения "$\cdot$" означает скалярное произведение векторов. Оптимальный момент $\mathbf{M}$ обязан находиться внутри сечения эллипсоида (1.3) плоскостью, перпендикулярной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ с тем, чтобы $\dot{E} = 0$, пока не наступит момент начала остановки вращения (а он существует, поскольку $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$).

На участке разгона (начиная с момента $t = 0$), когда $E(t) < E_{доп}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ возрастает, оптимальным является $\mathbf{M} \neq 0$ и $a(t) > 0$, и как следствие

$$M_i = \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_3\omega_3^2 + J_3\omega_3^2 + J_3\omega_3^2}} \tag{2.6}$$

(заметим, что управляющий момент (2.6) делает раскрутку максимально быстрой [24] и значение $E(t) = E_{доп}$ достигается за минимальное время при ограничении (1.3)). На участке торможения (в интервале времени слева от момента $t = T$), когда $E(t) < E_{доп}$ и кинетическая энергия вращения $E(t)$ уменьшается, оптимальным является $\mathbf{M} \neq 0$ и $a(t) < 0$, чтобы $\dot{E} < 0$, и поэтому

$$M_i = \frac{-u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_3\omega_3^2 + J_3\omega_3^2 + J_3\omega_3^2}} \tag{2.7}$$

(слева от момента $t = T$ управляющий момент $\mathbf{M}$ и кинетический момент $\mathbf{L}$ имеют противоположные направления и длительность остановки вращения минимальна [24]). На участках разгона и торможения, когда $E(t) < E_{доп}$, кинетическая энергия вращения изменяется в соответствии с уравнением $\dot{E} = \pm u_0\sqrt{2E}$ ("+" соответствует разгону, "–" – торможению). Поэтому для участка разгона $E(t) = u_0^2 t^2/2$, а для участка торможения $E(t) = u_0^2(T - t)^2/2$. Поскольку в момент окончания разгона и в момент начала торможения кинетическая энергия одна и та же, то длительности разгона и торможения одинаковы и равны $\tau = t_р = \sqrt{2E_{max}}/u_0$, где $E_{max} = E(T/2)$ – максимальная энергия вращения.

В зависимости от условий разворота (сочетания значений $\Lambda_н$, $\Lambda_к$ и J_1, J_2, J_3, u_0) в оптимальном движении из начального положения $\Lambda_н$ в конечное положение $\Lambda_к$ максимальная кинетическая энергия вращения может быть меньше $E_{доп}$, а может возникнуть необходимость вращения какое-то время с выполнением равенства $E(t) = \text{const} = E_{доп}$. Сформулируем условия, когда оптимальное управление исключает наличие моментов времени, в которые КА вращается с постоянной кинетической энергией. Для того, чтобы $\dot{E} \neq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, время разворота T должно быть меньше, чем $2\sqrt{2E_{доп}}/u_0$. Чтобы рассчитать время оптимального разворота T, воспользуемся понятием "функционал пути" [19]:

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2}\,dt, \tag{2.8}$$

который не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$, если движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5) [19]. Исходя из соотношений $T\sqrt{2E_{max}} = 2S$, $E_{max} = u_0^2\tau^2/2$ и $T = 2\tau$, получаем $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{fast}$ – минимально возможное время разворота в условиях ограничения (1.3) даже без учета требования (1.6) к кинетической энергии вращения. Значение T_{fast} соответствует развороту, во время которого отсутствует участок движения с $E(t) = \text{const}$. Для оптимального управления с одной точкой переключения в момент времени $t = T/2$ необходимо выполнение условия $T_{fast} \le 2\sqrt{2E_{доп}}/u_0$. Если $u_0 S \le 2E_{доп}$, то во время максимально быстрого разворота вращение КА в режиме $E(t) = \text{const}$ невозможно.

Если $u_0 S > 2E_{доп}$, то неизбежно вращение КА с постоянной кинетической энергией вращения (при этом $a(t) \ge 0$). Разница $S - 2E_{доп}/u_0$ определяет продолжительность участка движения, когда $E(t) = \text{const} = E_{доп}$. Найдем, каким должно быть оптимальное управление $\mathbf{M}$, чтобы удовлетворялось условие $\dot{E} = 0$ с одновременной максимизацией гамильтониана H.

При выполнении соотношений (2.4), (2.5) гамильтониан H равен

$$H = -1 + a(M_1 r_1/J_1 + M_2 r_2/J_2 + M_3 r_3/J_3) + b(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3).$$

В интервале вращения с постоянной кинетической энергией $E(t) = E_{доп}$ выполняется условие

$$M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3 = 0. \tag{2.9}$$

Для решения (2.4), (2.5) при условии $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ имеем $\varphi_1 M_1/J_1 + \varphi_2 M_2/J_2 + \varphi_3 M_3/J_3 = a(t)(M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3)/b(t) = 0$ и поэтому

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 - 1 \tag{2.10}$$

(очевидно, $b(t) \neq 0$ в интервале времени, когда $E(t) = E_{\text{доп}}$). Угловые скорости ω_i, при которых достигается максимум гамильтониана H (с учетом $E(t) = E_{\text{доп}}$), будут следующими:

$$\omega_i = \frac{r_i\sqrt{2E_{\text{доп}}}}{J_i\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}}. \tag{2.11}$$

Подставив указанные зависимости для оптимальных угловых скоростей ω_i в динамические уравнения (1.1) с учетом уравнений (2.1) для оптимальных функций r_i, получим оптимальный силовой момент $\mathbf{M} = 0$ для моментов времени, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (на участке между разгоном и торможением). Найдем производную $\dot{H}$ с учетом условия $E(t) = \text{const}$:

$$\dot{H} = \dot{\omega}_1 r_1 + \dot{\omega}_2 r_2 + \dot{\omega}_3 r_3 + \omega_1\dot{r}_1 + \omega_2\dot{r}_2 + \omega_3\dot{r}_3 = \omega_1\dot{r}_1 + \omega_2\dot{r}_2 + \omega_3\dot{r}_3 +$$
$$+ r_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + r_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + r_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 =$$
$$= \omega_1\dot{r}_1 + \omega_2\dot{r}_2 + \omega_3\dot{r}_3 = \omega_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3) + \omega_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1) + \omega_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2) = 0,$$

так как на этапе разгона оптимальный момент $\mathbf{M}$ и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ имеют одинаковое направление и в момент окончания разгона $r_i = J_i\omega_i/b$. Покажем, что $r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const}$. Возьмем производную от левой части указанного равенства с учетом (2.5):

$$r_1\dot{r}_1/J_1 + r_2\dot{r}_2/J_2 + r_3\dot{r}_3/J_3 = r_1(\omega_3 r_2 - \omega_2 r_3)/J_1 + r_2(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1)/J_2 + r_3(\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2)/J_3 =$$
$$= b r_1 r_2 r_3 (J_2 - J_3 + J_3 - J_1 + J_1 - J_2)/(J_1 J_2 J_3) \equiv 0.$$

Поскольку $|\mathbf{r}| \neq 0$ и $H = \text{const}$ внутри отрезка времени, на котором $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ (так как $\dot{H} = 0$), то $b = \text{const} = (1 + H)/(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)$. Это означает, что в оптимальном развороте в интервале времени, когда $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, будет $|\mathbf{L}| = \text{const}$. Этот факт только подтверждает вывод об оптимальности значения $\mathbf{M} = 0$ в моменты времени, когда $E(t) = \text{const}$. Вращение по инерции есть частный случай закономерности (2.5) с учетом (2.1). На момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$ направления оптимального вектора $\boldsymbol{\varphi}$ и кинетического момента $\mathbf{L}$ совпадают, поэтому единственным решением системы (1.1), (2.1), (2.2) в интервале времени, когда $E(t) = \text{const}$, являются зависимости (2.4), в которых $\dot{a} = -1$. Из свойства непрерывности функции $a(t)$ следует, что $a(t) = a(0) - t$ для любого момента времени t, пока $a(t) \geq 0$. Как только $a(t) < 0$, так управление (2.3) становится оптимальным, потому что $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ и силовой момент (2.3) (а значит, и (2.7)) не нарушает требования (1.6), поскольку при таком управлении будет $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$ и $\dot{E} < 0$. Следовательно, решение (2.4), (2.5), в котором $a(t) = a(0) - t$, справедливо для всего интервала времени $t \in [0, T]$ (в оптимальном решении $a(0) > 0$, $a(T) < 0$).

Таким образом, в зависимости от значения “функционала пути” (2.8), вычисленного для движения в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5), реализуется один из двух вариантов оптимального управления: если $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения, при котором $a(T) = -a(0)$, а если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором $a(0) > -a(T)$. Рисунок 1 отражает второй вариант оптимального управления, при котором существует отрезок времени с $E(t) = \text{const}$ (при выполнении условия $S > 2E_{\text{доп}}/u_0$ для значения (2.8)); t_1 – ближайший к началу разворота момент достижения равенства $E(t) = E_{\text{доп}}$; t_2 – момент смены знака скалярной функции $a(t)$ (начиная с момента времени $t = t_2$ для функции $a(t)$ верно условие $a(t) < 0$). На временах $t > t_2$ имеем $a(t) < 0$ и оптимальным является управление (2.3), потому что при таком силовом моменте будет $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$ и ограничение (1.6) становится несущественным (его можно не учитывать при дальнейшем приближении к $t = T$). В интервалах $t < t_1$ и $t > t_2$ оптимальным управлением является (2.3), при котором соответственно будет $|\mathbf{M}| = \text{const} = u_0/C$. Здесь обозначено $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$, $p_i = r_i/r_0$, $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$.

На участке вращения с максимально допустимой кинетической энергией оптимальный момент $\mathbf{M}$ определяется из трех условий: ограничения (1.3), требования (2.9) и условия, что в каждый текущий момент времени t, пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, гамильтониан H принимает

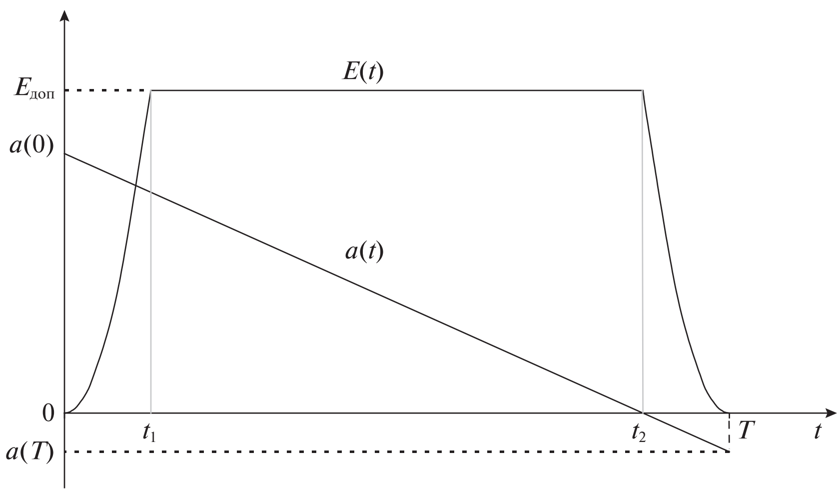


Рис. 1

максимальное значение. Учитывая структуру гамильтониана (2.10), приходим к выводу, что во время вращения КА с постоянной максимально допустимой кинетической энергией оптимальным является такое управление **M**, при котором в каждый текущий момент времени t, пока $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет соотношениям (2.11). Требование (2.9) привело к структуре (2.10), при которой гамильтониан H не зависит явным образом от силового момента **M**. Справедливость утверждения, что движение с угловой скоростью (2.11) соответствует максимуму гамильтониана H, легко доказать после замены переменных

$$y_i = \omega_i\sqrt{J_i}, \quad z_i = r_i\Big/\sqrt{J_i},$$

записав

$$H = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 - 1$$

с учетом равенств $J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = 2E_{\text{доп}}$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2E_{\text{доп}}$ для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Оптимальное значение момента **M** вычисляем путем подстановки оптимальных угловых скоростей (2.11) в динамические уравнения (1.1) с учетом зависимостей (2.1) для универсальных переменных r_i и проверки выполнения условий (1.3), (2.9) (т.е. чтобы управляющий момент **M** находился внутри области допустимых значений). В результате получили $\mathbf{M} = 0$. Очевидно, что найденное управление **M** удовлетворяет неравенству (1.3) и равенству (2.9).

Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} \dfrac{u_0 \operatorname{sign} a(t)}{\sqrt{r_1^2\big/J_1 + r_2^2\big/J_2 + r_3^2\big/J_3}}\mathbf{r}, & \text{если} \quad E(t) < E_{\text{доп}} \quad \text{или} \quad a(t) < 0; \\ 0, \quad \text{если} \quad a(t) > 0 \quad \text{и} \quad E(t) = E_{\text{доп}}. \end{cases}$$

Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует решению (2.4), (2.5) (угловые скорости (2.11) есть частный случай (2.5) и не противоречат соотношениям (2.4)). Поэтому найденное оптимальное решение (2.4), (2.5) справедливо на всем интервале управления $t \in [0, T]$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора $\mathbf{r}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с одновременным выполнением условия (2.3), если $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r} < 0$ или $E(t) < E_{\text{доп}}$, или $\mathbf{M} = 0$, если $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r} > 0$ и $E(t) = E_{\text{доп}}$, удовлетворяло условиям разворота (1.4), (1.5). Константа r_0 определяется из уравнения $H(T) = 0$ (так как время окончания оптимального процесса не фиксировано). Вычислим $H(T)$ с учетом зависимостей (2.4):

$$H(T) = -1 + a(T)(-u_0\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}) = -1 - u_0 a(T) r_0 C$$

(угловые скорости в конечный момент $t = T$ равны нулю); $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$, где p_{10}, p_{20}, p_{30} – компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ ($\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ – орт вектора $\mathbf{r}$). Значение $a(T)$ оптимальной функции $a(t)$ в конечный момент времени равно $a(T) = -1/(u_0 r_0 C)$. При любом типе оптимального управления (с одной или двумя точками переключения) $a(T) = -\tau$ (напомним, τ – длительность разгона и торможения). Поэтому $r_0 = 1/(u_0 \tau C)$. Отсюда оптимальное значение r_0 равно $r_0 = 1\big/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}})$, если присутствует участок вращения с постоянной максимально допустимой кинетической энергией $E_{\text{доп}}$ (так как $a(T) = -\sqrt{2E_{\text{доп}}}\big/u_0$). Для оптимального управления с одной точкой переключения $a(T) = -T/2 = -\sqrt{S/u_0}$, поэтому $r_0 = 1\big/(C\sqrt{u_0 S})$. В результате

$$r_0 = \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{доп}}})/C.$$

Время оптимального разворота T рассчитывается на основании “функционала пути” (2.8). Поскольку оптимальное движение КА удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5), то значение S не зависит от характера изменения скалярной функции $b(t)$ и является минимально возможным [19]. Если $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$, то имеет место участок вращения КА с $E(t) = \text{const}$ и длительность оптимального разворота T вычисляется по формуле

$$T = S\big/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}\big/u_0. \tag{2.12}$$

При этом время разгона τ составляет

$$\tau = \sqrt{2E_{\text{доп}}}\big/u_0,$$

а длительность неуправляемого вращения будет

$$t_{\text{св}} = S\big/\sqrt{2E_{\text{доп}}} - \sqrt{2E_{\text{доп}}}\big/u_0.$$

Если $u_0 S \le 2E_{\text{доп}}$, то в оптимальном движении не существует моментов времени, когда $E(t) = \text{const}$ ($t_{\text{св}} = 0$) и длительность оптимального разворота T равна $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{fast}$.

С учетом того, что уравнения (2.1), (2.5) удовлетворяются на всем интервале управления $t \in [0, T]$, оптимальное движение определяют зависимости:

$$M_i = 0.5 m_0 [\operatorname{sign}(t_p - t) + \operatorname{sign}(t_m - t)] p_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.13}$$

$$J_i \omega_i = 0.5 m_0 (t_{\text{р}} + t_{\text{т}} - |t - t_{\text{р}}| - |t - t_{\text{т}}|) p_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.14}$$

где p_i – компоненты вектора $\mathbf{p}$, $t_{\text{р}}$ – время окончания разгона, $t_{\text{т}}$ – момент начала торможения,

$$t_{\text{р}} = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}}\big/u_0), \quad t_{\text{т}} = \max(\sqrt{S/u_0}, S\big/\sqrt{2E_{\text{доп}}}),$$
$$\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{н}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{н}} \circ \Lambda, \quad m_0 = u_0/C.$$

Закон вращения (2.14) удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$, так как $t_{\text{р}} + t_{\text{т}} = T$, и выражение в скобках обнуляется при $t = 0$ и $t = T$. Зависимости (2.1), (2.13), (2.14) с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$ – единственное решение задачи оптимального управления (1.1)–(1.6). Из (2.1), (2.13) и соотношений $r_i = r_0 p_i$ явно видно, что при оптимальном управлении момент сил $\mathbf{M}$ действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Уравнения (2.14) отчетливо показывают, что в геометрическом представлении вектор $\mathbf{p}$ интерпретируется как орт оптимального кинетического момента КА $\mathbf{L}$ в связанной с КА системе координат. Оптимальным (в смысле минимума времени T) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ коллинеарны). Еще одним основным свойством оптимального разворота КА является тот факт, что во все время движения (на всем отрезке времени $[0, T]$) отношение кинетической энергии вращения E к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно:

$$E/|\mathbf{L}|^2 = 0.5(r_1^2\big/J_1 + r_2^2\big/J_2 + r_3^2\big/J_3)/|\mathbf{r}|^2 = \text{const} = (p_{10}^2\big/J_1 + p_{20}^2\big/J_2 + p_{30}^2\big/J_3)/2.$$

Для вращений в соответствии с (2.1), (2.5) значение “функционала пути” (2.8) минимально.

2.3. Обоснование единственности оптимального решения. Покажем, что найденное решение (2.4), (2.5) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3).

Введем единичный вектор $\mathbf{q}$ для вектора $\boldsymbol{\varphi}$, такой, что $\mathbf{q}(0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(0) > 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = \chi\mathbf{q}$, где χ – скалярная функция с начальным значением $\chi(0) > 0$; $|\mathbf{q}| = 1$. Тогда оптимальный момент $\mathbf{M}$ будет равен

$$\mathbf{M} = \frac{u_0\operatorname{sign}\chi}{\sqrt{q_1^2/J_1 + q_2^2/J_2 + q_3^2/J_3}}\mathbf{q}.$$

Так как $\chi(0) > 0$, то в окрестности точки $t = 0$ имеем $\mathbf{M} = h\mathbf{q}$ и $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$, $\mathbf{L} = K\mathbf{q}$, где h – скалярная величина (на участке разгона $h > 0$); $\mathbf{L} = J_{\text{КА}}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент КА; $J_{\text{КА}} = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ – тензор инерции КА. Подставим формулы (2.3) с учетом зависимости $\boldsymbol{\varphi} = \chi(t)\,\mathbf{q}$ в уравнения (1.1) при наличии равенств $J_i\omega_i = Kq_i$:

$$\dot{K}\mathbf{q} + K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}K = h\mathbf{q}. \qquad (2.15)$$

Сумма $K\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}K$ ортогональна орту $\mathbf{q}$ или равна нулю (всегда $\mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{q}} = 0$, так как $|\mathbf{q}| = 1$). Поэтому уравнение (2.15) выполняется в единственном случае, если $\dot{K} = h$ и $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}$ (т.е. когда направление вектора $\mathbf{q}$ остается неизменным относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$). Теперь подставим равенства $\varphi_i = \chi q_i$ и $\omega_i = Kq_i/J_i$ в уравнения (2.2), которые представим в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = (J_{\text{КА}}\boldsymbol{\omega})\times(J_{\text{КА}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}) - J_{\text{КА}}(\boldsymbol{\omega}\times(J_{\text{КА}}^{-1}\boldsymbol{\varphi})) - \mathbf{r}. \qquad (2.16)$$

Левая часть уравнения (2.16) для вектора сопряженных переменных равна

$$\dot{\chi}\mathbf{q} + \chi\dot{\mathbf{q}} = \dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}$ взято из (2.15)). Правая часть уравнения (2.16) будет такой:

$$K\mathbf{q}\times(J_{\text{КА}}^{-1}\chi\mathbf{q}) - cJ_{\text{КА}}((J_{\text{КА}}^{-1}K\mathbf{q})\times(J_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} = -\chi(KJ_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q})\times\mathbf{q} - \mathbf{r} = -\chi\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} - \mathbf{r}.$$

Приравнивая левую и правую части уравнения (2.16), получим уравнение для вектора $\mathbf{q}$:

$$\dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} = -\chi\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} - \mathbf{r}.$$

Отсюда следует необходимое условие оптимальности $\mathbf{r} = -\dot{\chi}\mathbf{q}$, из которого неизбежны равенства (2.4), в которых $a(0) > 0$, так как $\dot{a}(t) = -1$, причем $\dot{\chi} = \text{const}$ и $\mathbf{q} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, откуда имеем следующие свойства: $\dot{\chi} = -r_0$, $\chi(t) = r_0a(t)$, $K = |\mathbf{L}| = r_0b(t)$, где $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}(0)|$ (так как $\chi(0) > 0$ и $\chi(T) < 0$, а поэтому $\dot{\chi} < 0$). В итоге заключаем, что если в какой-нибудь момент времени t кинетический момент $\mathbf{L}$ и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, то они коллинеарны на всем интервале времени $0 < t < T$. В силу наличия граничных условий $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны как минимум 2 раза – в самом начале разворота ($\mathbf{L} = ht\mathbf{q}$ при $t \to 0$) и в самом конце маневра ($\mathbf{L} = h(t - T)\mathbf{q}$ при $t \to T$); во время остановки вращения $h < 0$.

На участке разгона существует как минимум один момент времени, когда векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, и на участке торможения существует как минимум один момент времени, когда векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны, а между разгоном и торможением (если существует интервал движения с $E(t) = \text{const}$) оптимальным является вращение по инерции и уравнения (2.1), (2.5) выполняются, из-за чего единственным решением уравнений (2.2) будет (2.4). Следовательно, на всем интервале управления $t \in [0, T]$ зависимости (2.4), (2.5) – единственное решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Значит, никакое отличное от (2.13), (2.14) движение не может быть оптимальным, так как оно не будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

На участке разгона (когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и $\dot{E} > 0$) $\mathbf{L}(t) = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda}\circ\Lambda_{\text{н}}\circ\mathbf{p}(0)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{н}}\circ\Lambda$, на участке вращения с $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ будет $\Lambda\circ\mathbf{L}(t)\circ\tilde{\Lambda} = \text{const}$, а на участке торможения (когда $E(t) < E_{\text{доп}}$ и $\dot{E} < 0$) $\mathbf{L}(t) = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda}\circ\Lambda_{\text{к}}\circ\mathbf{p}(T)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{к}}\circ\Lambda$. Поэтому для характерных моментов времени имеем:

$$\mathbf{L}(t_{\text{р}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{р}})|\tilde{\Lambda}(t_{\text{р}})\circ\Lambda_{\text{н}}\circ\mathbf{p}(0)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{н}}\circ\Lambda(t_{\text{р}}),$$

$$\mathbf{L}(t_{\text{т}}) = \tilde{\Lambda}(t_{\text{т}})\circ\Lambda(t_{\text{р}})\circ\mathbf{L}(t_{\text{р}})\circ\tilde{\Lambda}(t_{\text{р}})\circ\Lambda(t_{\text{т}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{р}})|\tilde{\Lambda}(t_{\text{т}})\circ\Lambda_{\text{н}}\circ\mathbf{p}(0)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{н}}\circ\Lambda(t_{\text{т}}),$$

$$\mathbf{L}(t > t_{\text{т}}) = \tilde{\Lambda}\circ\Lambda(t_{\text{т}})\circ\mathbf{L}(t_{\text{т}})\circ\tilde{\Lambda}(t_{\text{т}})\circ\Lambda = |\mathbf{L}|\tilde{\Lambda}\circ\Lambda_{\text{н}}\circ\mathbf{p}(0)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{н}}\circ\Lambda,$$

Подставив $\mathbf{L}(t_{\text{т}})$ в соотношение $\Lambda(t_{\text{т}})\circ\mathbf{L}(t_{\text{т}})\circ\tilde{\Lambda}(t_{\text{т}}) = |\mathbf{L}(t_{\text{т}})|\Lambda_{\text{к}}\circ\mathbf{p}(T)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{к}}$, получим

$$\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_{\text{к}}\circ\Lambda(t_{\text{т}})\circ\mathbf{L}(t_{\text{т}})\circ\tilde{\Lambda}(t_{\text{т}})\circ\Lambda_{\text{к}}/|\mathbf{L}(t_{\text{т}})| = \tilde{\Lambda}_{\text{к}}\circ\Lambda_{\text{н}}\circ\mathbf{p}(0)\circ\tilde{\Lambda}_{\text{н}}\circ\Lambda_{\text{к}}.$$

Установлено, что все три участка движения принадлежат одной траектории, определяемой системой уравнений (1.2), (2.1), (2.5); при этом $b(t)$ – кусочно-линейная функция времени с точками излома $t_р$ и $t_т$, у которой $\dot{b} > 0$ для $t \le t_р$, $\dot{b} = 0$ для $t_р < t \le t_т$ и $\dot{b} < 0$ для $t > t_т$, а $b(0) = b(T) = 0$. Кроме того, $|\dot{b}| = \text{const} = u_0/(r_0 C)$, если $t \le t_р$ и $t > t_т$; и в моменты перехода с одного участка траектории на другой участок выполняются соотношения:

$$\Lambda(t_р) \circ \mathbf{L}(t_р) \circ \tilde{\Lambda}(t_р) = |\mathbf{L}(t_р)| \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н, \quad \Lambda(t_т) \circ \mathbf{L}(t_т) \circ \tilde{\Lambda}(t_т) = \Lambda(t_р) \circ \mathbf{L}(t_р) \circ \tilde{\Lambda}(t_р),$$

$$\Lambda(t_т) \circ \mathbf{L}(t_т) \circ \tilde{\Lambda}(t_т) = |\mathbf{L}(t_т)| \Lambda_к \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_к, \quad |\mathbf{L}(t_т)| = |\mathbf{L}(t_р)|,$$

$$\Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н = \Lambda(t_р) \circ \mathbf{p}(t_р) \circ \tilde{\Lambda}(t_р) = \Lambda(t_т) \circ \mathbf{p}(t_т) \circ \tilde{\Lambda}(t_т) = \Lambda_к \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_к,$$
$$\mathbf{p}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda.$$

Функции $\Lambda(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ непрерывны внутри всего отрезка времени $t \in [0, T]$ и $\Lambda \circ \mathbf{p}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const}$.

На участке разгона $\Lambda \circ \mathbf{l}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const}$ и $\mathbf{l}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda$, между разгоном и торможением КА вращается по инерции и $\Lambda \circ \mathbf{l}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const} = \Lambda(t_р) \circ \mathbf{l}(t_р) \circ \tilde{\Lambda}(t_р) = \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н$ (так как $\mathbf{l}(t_р) = \tilde{\Lambda}(t_р) \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda(t_р)$), а $\mathbf{l}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda(t_р) \circ \mathbf{l}(t_р) \circ \tilde{\Lambda}(t_р) \circ \Lambda = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda$; на участке торможения $\Lambda \circ \mathbf{l}(t) \circ \tilde{\Lambda} = \text{const} = \Lambda(t_т) \circ \mathbf{l}(t_т) \circ \tilde{\Lambda}(t_т) = \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н$ (так как $\mathbf{l}(t_т) = \tilde{\Lambda}(t_т) \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \circ \Lambda(t_т)$) и $\mathbf{l}(t) = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_к \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_к \circ \Lambda$, откуда $\mathbf{l}(t) = \mathbf{p}(t)$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, где $\mathbf{l} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ – орт кинетического момента КА.

Для функций $a(t)$, $b(t)$ оптимального решения справедливы следующие соотношения:

$$a(0) = T - 1/(u_0 r_0 C), \quad a(T) = -1/(u_0 r_0 C), \quad b(t) = 0.5 u_0 (T - |t - t_p| - |t - t_m|)/(r_0 C).$$

Время разворота T и оптимальное значение r_0 равны:

$$T = \max(2\sqrt{S/u_0}; S\big/\sqrt{2E_{доп}} + \sqrt{2E_{доп}}\big/u_0), \quad r_0 = \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{доп}})/C. \tag{2.17}$$

Максимальная энергия вращения за время оптимального разворота $E_{\max} = \min(u_0 S/2, E_{доп})$. Максимальный модуль кинетического момента $L_{\max} = \sqrt{\min(u_0 S, 2E_{доп})}\big/C$.

Покажем, что найденное управление (2.13) действительно оптимально (ему соответствует значение T, определяемое первой формулой (2.17), которое обозначим T_{opt}). Рассмотрим функцию $f_0 = \sqrt{2E(t)}$. Соответственно $f_{\max} = \sqrt{2E_{\max}}$. При ограничении (1.3) максимально быстрая раскрутка КА происходит при управлении (2.6) [24], при котором $\ddot{E} = u_0^2$, а силовой момент $\mathbf{M}$ и кинетический момент $\mathbf{L}$ одинаково направлены (причем $|\mathbf{M}| = \text{const}$ и $\dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$), что соответствует управлению (2.13). Для наискорейшей остановки вращения при ограничении (1.3) необходимо управление (2.7), при котором управляющий момент $\mathbf{M}$ и кинетический момент $\mathbf{L}$ имеют противоположные направления, $|\mathbf{M}| = \text{const}$ и $\dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$, что находится в рамках управления (2.13). Если $u_0 \to \infty$, то время разгона и торможения $\tau \to 0$ и в течение всего разворота $E(t) = \text{const} = E_{доп}$. Для любого управления, удовлетворяющего ограничению (1.3), выполняются два условия: $f_0(t) \le u_0 t$, если $t \le T/2$, и $f_0(t) \le u_0(T - t)$, если $t > T/2$ (так как $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$). При одном и том же значении “функционала пути” S величина T минимальна, если интервал времени, когда $E_к(t) = \text{const} = E_{\max}$, является максимально длительным, а интервалы времени, когда $E_к(t) < E_{\max}$, максимально короткие. Управление (2.13) удовлетворяет обоим требованиям. Кроме того, для движения (2.13), (2.14) значение S минимально возможное, из-за чего T_{opt} – абсолютно минимальное время разворота при наличии ограничений (1.3) и (1.6).

Если $u_0 S \le 2E_{доп}$, то в законах (2.13), (2.14) $t_т = t_р = T/2 = \sqrt{S/u_0}$ (оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения); при этом $E_{\max} = u_0 S/2$ и ограничение (1.6) несущественно. Время оптимального разворота составляет $T_{opt} = 2\sqrt{S/u_0}$.

Если $u_0 S > 2E_{доп}$, то $t_т > t_р$ ($t_р = \tau$, $t_т = T - \tau$), в оптимальном по времени развороте имеется участок вращения с постоянной кинетической энергией (реализуется релейное управление с двумя точками переключения). В этом случае при оптимальном управлении (2.13) время разворота T_{opt}

равно (2.12). Каким бы ни было движение, удовлетворяющее условиям разворота (1.4), (1.5) и ограничениям (1.3), (1.6), время разворота T удовлетворяет неравенству

$$T \geq S\Big/\sqrt{2E_{\max}} + \sqrt{2E_{\max}}\Big/u_0. \tag{2.18}$$

Правая часть указанного неравенства – монотонно убывающая функция аргумента $E_{\max}$ на всем отрезке $[0,\ u_0S/2]$ ($E_{\max}$ не может быть больше $u_0S/2$, так как значение $E_{\max} = u_0S/2$ соответствует релейному управлению с одной точкой переключения, когда участок вращения КА по инерции отсутствует). При прочих равных условиях время разворота минимально, если "функционал пути" S имеет минимальное значение. Поскольку для всех интересующих нас управлений $E_{\max} \leq E_{доп}$, то правая часть неравенства (2.18) не может быть меньше (2.12), так как для управления (2.13) "функционал пути" S принимает минимальное значение. В результате всегда время разворота $T \geq T_{opt}$. Следовательно, T_{opt} – действительно минимально возможное время разворота при условии $E(t) \leq E_{доп}$ и ограничении (1.3).

3. Построение типовой программы оптимального разворота КА. Выше было продемонстрировано, что функции $M_i(t)$, $p_i(t)$, $\omega_i(t)$ будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.13), (2.14) (с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) и краевым условиям (1.4), (1.5) для решения $\Lambda(t)$ уравнения (1.2). Задача построения оптимального управления $\mathbf{M}(t)$ состоит главным образом в нахождении такого вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ (и значения S), чтобы в результате движения в соответствии с уравнениями (1.2), (2.1), (2.14) и начальными условиями (1.4) выполнялись равенства $\Lambda(T) = \Lambda_к$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо вычислить оптимальное значение r_0 и решить уравнения (2.1). Если J_1, J_2, J_3, u_0, $E_{доп}$ не меняются, то для всех сочетаний $\Lambda_н$, $\Lambda_к$ с одинаковым кватернионом $\Lambda_р = \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$ решение $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{M}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ будет одним и тем же.

Так как оптимальное решение описывается уравнениями (2.1), (2.5), а для любых движений, удовлетворяющих зависимостям (2.1), (2.5) значение $\mathbf{p}_0$ и интеграл (2.8) не зависят от характера изменения скалярной функции $b(t)$, то при поиске расчетных значений $\mathbf{p}_0$ и S, удовлетворяющих заданным условиям разворота, принимаем $b(t) = \text{const} > 0$ (такой прием применяется для упрощения решения краевой задачи принципа максимума). В этом случае (когда $b(t) = \text{const}$) система уравнений (2.1), (2.5) преобразуется в уравнения

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(J_2 - J_3)/J_1, \quad \dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3(J_3 - J_1)/J_2, \quad \dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(J_1 - J_2)/J_3. \tag{3.1}$$

Отметим, что значения $\mathbf{p}_0$ и S определяют время разворота T, наличие или отсутствие интервала вращения по инерции, максимальный управляющий момент, который равен

$$m_0 = u_0\Big/\sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3},$$

а также длительности разгона и торможения, участка неуправляемого движения и максимальную энергию вращения $E_{\max}$ (и максимальную величину кинетического момента $L_{\max}$).

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (2.13), для реализации которого необходимо в каждый момент времени t знать все три переменные p_1, p_2, p_3. Общее решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.14) (с учетом равенств $r_i = r_0p_i$) получить практически невозможно; трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны между собой выражением

$$\Lambda_к \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_к = \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н \quad \text{или} \quad \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_р \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_р,$$

где $\Lambda_р = \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$ – кватернион разворота.

Указанная система имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) система (2.1), (2.14) принимает вид $\dot{p}_i = 0$, и решение системы уравнений (1.2), (1.4), (1.5), (2.1), (2.13), (2.14) такое:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = \nu_i/\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}; \quad M_i(t) = 0.5m_0[\text{sign}(t_р - t) + \text{sign}(t_т - t)]p_{i0}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\omega_i(t) = 0.5m_0(T - |t - t_р| - |t - t_т|)p_{i0}/J_i,$$

$$\Lambda(t) = \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\theta/2}, \quad \theta = \frac{m_0}{2J_2}\int_0^t (t_р + t_т - |t - t_р| - |t - t_т|)dt,$$

где ν_1, ν_2, ν_3 – компоненты векторной части кватерниона разворота $\Lambda_р$; $m_0 = u_0\sqrt{J_1}$; $T = t_р + t_т$; $t_р = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{доп}}/u_0)$, $t_т = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{доп}})$, в которых $S = 2J_1C\arccos(\mathrm{sqal}\Lambda_р)$.

Оптимальные развороты вокруг оси, неподвижной относительно инерциальной системы координат, подробно рассмотрены в [1].

Для динамически-симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца (не умаляя общности рассуждений, за ось симметрии принята ось OX КА). Оптимальное движение в этом частном, но достаточно распространенном случае представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг некоторого направления $\boldsymbol{\eta}$, неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол ϑ. Угловые скорости относительно осей OX и $\boldsymbol{\eta}$ изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому справедливо соотношение [14]

$$\Lambda_к = \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1\alpha/2},$$

где вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью; $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$; $\mathbf{e}_1$ – орт продольной оси КА; α, β – углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора $\mathbf{p}$ соответственно (считается $|\alpha| \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$). Решение $\mathbf{p}(t)$ системы уравнений (1.1), (2.1), (2.14) представим в следующей форме:

$$p_1 = p_{10} = \cos\vartheta, \quad p_2 = p_{20}\cos\kappa + p_{30}\sin\kappa, \quad p_3 = -p_{20}\sin\kappa + p_{30}\cos\kappa, \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J}\int_0^t \omega_1(t)dt, \tag{3.2}$$

где $p_{i\,0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная угловая скорость $\omega_1(t)$ вычисляется из равенств (2.14) с учетом $p_1 = \mathrm{const} = p_{10}$. Зависимость $p_{i\,0}$, α, β от $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$ определяется уравнениями

$$\begin{gathered}\alpha = \frac{J - J_1}{J_1}p_{10}\beta; \quad \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \nu_0; \quad \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \nu_1; \\ p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \nu_2; \quad -p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \nu_3,\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ – компоненты кватерниона разворота $\Lambda_р$; $-\pi \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$. Существование решения системы (3.3) для любых значений кватерниона разворота $\Lambda_р$ доказано в [14]. Оптимальное значение управляющего момента $\mathbf{M}$ удовлетворяет соотношениям (2.13). Программные значения функций ω_i (проекции требуемой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ на связанные оси) рассчитываются по формулам (2.14) и (3.2). В явном виде оптимальное решение $M_i(t)$, $\omega_i(t)$ запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}M_1 = 0.5m_0[\mathrm{sign}(t_р - t) + \mathrm{sign}(t_т - t)]p_{10}; \\ M_2 = 0.5m_0[\mathrm{sign}\,(t_р - t) + \mathrm{sign}\,(t_т - t)]\sqrt{1 - p_{10}^2}\sin(\kappa + \gamma); \\ M_3 = 0.5m_0[\mathrm{sign}(t_р - t) + \mathrm{sign}(t_т - t)]\sqrt{1 - p_{10}^2}\cos(\kappa + \gamma); \\ \omega_1 = 0.5m_0(T - |t - t_р| - |t - t_т|)p_{10}/J_1; \\ \omega_2 = 0.5m_0(T - |t - t_р| - |t - t_т|)\sqrt{1 - p_{10}^2}\sin(\kappa + \gamma)/J_2; \\ \omega_3 = 0.5m_0(T - |t - t_p| - |t - t_m|)\sqrt{1 - p_{10}^2}\cos(\kappa + \gamma)/J_3,\end{gathered}$$

где $t_р = \min(\sqrt{J_2\beta/m_0}, \sqrt{2E_{доп}}/u_0)$; $t_т = \max(\sqrt{J_2\beta/m_0}, J_2\beta C/\sqrt{2E_{доп}})$; $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \ge 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \ne 1$; а случай $|p_{10}| = 1$ не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси OX); $T = t_1 + t_2$. В любой текущий момент времени t кватернион ориентации Λ описывается функцией

$$\Lambda(t) = \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\theta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1\rho/2},$$

где $\rho = (J - J_1)p_{10}\theta/J_1$; значение вектора $\mathbf{p}_0$ определяется из системы (3.3); угол θ равен

$$\theta = \frac{1}{J}\int_0^t |\mathbf{L}(t)|\,dt, \quad \text{или} \quad \theta = \frac{m_0}{2J}\int_0^t (t_р + t_т - |t - t_р| - |t - t_т|)dt.$$

Для несимметричного КА ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.14) в квадратурах не представляется возможным и находится исключительно численными методами (например, методом последовательных приближений). Определение вектора $\mathbf{p}_0$ производится путем решения краевой задачи $\Lambda(0) = \Lambda_н$, $\Lambda(T) = \Lambda_к$ с учетом накладываемых на движение связей (1.2), (3.1) и нахождения начальной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(0)$ для вращения по инерции.

Для построения оптимального управления при развороте КА необходимо знать не только программу изменения координат $p_i(t)$, но и величину максимального момента m_0, определяющего темп приближения к требуемому конечному состоянию (1.5), а также моменты выключения и включения управления $t_р$ и $t_т$. Конкретные значения параметров m_0, $t_р$, $t_т$, $r_0 = |\mathbf{r}|$ и длительность разворота T зависят от вектора $\mathbf{p}_0$ и характеристики S. Для динамически симметричного КА значение S вычисляется значительно проще (расчет величин r_0, $t_р$, $t_т$ и $E_{\max}$ также упрощается). В этом частном случае $|\mathbf{L}| = J_2\dot{\beta}$ и $S = J_2\beta C$, где J_2 – момент инерции относительно поперечной оси ($J_2 = J_3$); $\dot{\beta}$ – скорость вращения вокруг кинетического момента $\mathbf{L}$; β – угол поворота КА вокруг кинетического момента $\mathbf{L}$ (из физического смысла $\beta \geq 0$). Значения r_0, $t_р$, $t_т$, T, $E_{\max}$, $L_{\max}$ зависят от угла β поворота КА вокруг кинетического момента $\mathbf{L}$. Чтобы время T было минимальным, необходимо выполнить условие $\beta \leq \pi$, при котором S минимально (именно поэтому система (3.3) включает неравенство $0 \leq \beta \leq \pi$).

Решение задачи оптимального по времени разворота с ограничением на фазовые переменные (1.6) подчиняется уравнениям (2.1), (2.4), (2.5), а управляющие переменные M_i и угловые скорости ω_i изменяются в соответствии с законами (2.13), (2.14). Решение (2.13), (2.14) оптимально, потому что оно – единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Любое отличное от (2.13), (2.14) движение будет заведомо хуже (в смысле минимума времени разворота T при ограничениях (1.3), (1.6)), поскольку не будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности. Значение m_0 в законах движения (2.13), (2.14) определяет максимальную величину управляющего момента, максимальный модуль кинетического момента и длительность участка свободного вращения. Оптимальный вектор $\mathbf{p}_0$ рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы S, C, m_0 полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА. Программное изменение силового момента $\mathbf{M}$ описывается зависимостью

$$\mathbf{M} = 0.5m_0[\operatorname{sign}(t_р - t) + \operatorname{sign}(t_т - t)]\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda,$$

где $\mathbf{c}_p = \text{const} = \Lambda_н \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_н$. Для оптимальной программы управления $\mathbf{M}(t)$ движение КА относительно центра масс обладает следующими оригинальными свойствами и соотношениями:

$$\Lambda \circ M(\mathbf{T} - t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T - t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)|\,dt = \int_{T/2}^{T} |\mathbf{L}(t)|\,dt,$$

$$E_{\max} = |E(T/2)|, \quad L_{\max} = \max_{0<t<T}\sqrt{J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

Раскрутка КА в начале разворота продолжается до тех пор, пока его кинетический момент $\mathbf{L}$ не станет равен заданному значению $\mathbf{L}_{\text{pr}}$, который рассчитывается по формуле

$$\mathbf{L}_{\text{pr}} = m_0\tau\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda.$$

Гашение кинетического момента в конце оптимального разворота осуществляется по закону (2.7). В момент времени $t = T$, когда $\boldsymbol{\omega} = 0$, управление выключается и $\mathbf{M} = 0$, разворот завершен. Если $2E_{\text{доп}} \ll u_0 S$, то торможение КА можем начать с момента выполнения равенства

$$4\arcsin\frac{K\sqrt{\delta_2^2+\delta_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2+(J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2+\omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2+(J_3\omega_3)^2}}, \quad \text{если} \quad \omega_2^2+\omega_3^2 \neq 0,$$
$$\text{или} \quad 4\arccos\delta_0 = \omega_1 K/m_0, \quad \text{если} \quad \omega_2^2+\omega_3^2 = 0,$$

где δ_j – компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t)\circ\Lambda_\text{к}, j=\overline{0,3}$; $K = |J_{\text{КА}}\,\boldsymbol{\omega}|$ – величина кинетического момента КА. Указанное условие позволяет повысить точность приведения КА в требуемое конечное состояние $\Lambda(T) = \Lambda_\text{к}$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ за счет возможности в бортовой системе управления формировать сигнал на гашение кинетического момента по информации о текущей ориентации КА и измерениям его угловой скорости.

4. Результаты математического моделирования. Приведем численный пример решения задачи управления КА во время программного разворота и построения оптимальной программы вращения. Рассмотрим разворот КА на 180° из начального положения $\Lambda_\text{н}$, при котором оси КА совмещены (совпадают по направлению) с осями опорного базиса $\mathbf{I}$, в заданное конечное положение $\Lambda_\text{к} = \Lambda_{\text{зад}}$. При этом считается, что начальная и конечная угловые скорости нулевые: $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Значения элементов кватерниона $\Lambda_{\text{зад}}$, характеризующего требуемое угловое положение КА, были равны: $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0.707$; $\lambda_2 = 0.39$; $\lambda_3 = 0.59$. Будем полагать, что инерционные характеристики КА имеют следующие значения, кг · м^2 : $J_1 = 25603$, $J_2 = 91495$, $J_3 = 80662$, а мощность исполнительных органов характеризуется величиной $u_0 = 0.07077$ Н · кг$^{-1/2}$. Во время разворота кинетическая энергия вращения не должна быть больше $E_{\text{доп}} = 5$ Дж.

Нахождение расчетного значения вектора $\mathbf{p}_0$ начинаем с решения той же краевой задачи для динамически-симметричного КА с моментами инерции J_1 и J, где J – момент инерции относительно поперечной оси, принимаемый равным

$$J = \frac{J_2J_3}{J_2+J_3-J_1}\left(\sqrt{(1-J_1/J_2)(1-J_1/J_3)}+1\right).$$

В предположении динамической симметричности КА решение $\mathbf{p}_0$ определяется системой (3.3) (для симметричного твердого тела искомое значение следующее: $\mathbf{p}_0^{(0)} = \{0.4652435; -0.3714789; 0.8034625\}$). Полученный из уравнений (3.3) вектор $\mathbf{p}_0$ и угол β являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе уравнений (1.2), (3.1) с учетом накладываемых на движение КА ограничений $\Lambda(0) = \Lambda_\text{н}$, $\Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_\text{к}$, а начальные угловые скорости $\omega_{i\text{н}}$ определяются по формулам:

$$\omega_{1\text{н}} = \frac{J\beta}{J_1T}p_{10}, \quad \omega_{2\text{н}} = \frac{J\beta}{J_2T}p_{20}, \quad \omega_{3\text{н}} = \frac{J\beta}{J_3T}p_{30}, \tag{4.1}$$

где T – время разворота (при уточнении вектора $\mathbf{p}_0$ было принято значение $T = 300$ с). Прогнозирование “свободного” движения осуществляется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающих вращение КА, при начальных условиях $\Lambda(0) = \Lambda_\text{н}$, $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_\text{н}$ и с учетом того, что $\mathbf{M} = 0$. Степень приближения найденного значения $\mathbf{p}_0$ к искомому решению характеризуется мерой $\varepsilon = \text{sqal}\,(\tilde{\Lambda}_{\text{пр}}\circ\Lambda_\text{к})$, где $\Lambda_{\text{пр}}$ – наиболее близкое к $\Lambda_\text{к}$ положение, полученное в ходе моделирования движения КА около центра масс (согласно уравнениям (1.2), (1.1), в которых $M_i = 0$). Вектор $\mathbf{p}_0$ уточняется до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пор}}$ ($\varepsilon_{\text{пор}}$ – некоторое близкое к единице пороговое значение, отражающее точность найденного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{пор}}$ достигнуто (прогнозируемая ошибка соответствует требуемой точности), истинное значение $\mathbf{p}_0$, удовлетворяющее граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_\text{н}$, $\Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_\text{к}$, будет найдено и краевая задача решена. Вектор $\mathbf{p}_0$ уточняется с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\Lambda_\text{р}^{(k+1)} = \Lambda_\text{р}^{(k)}\circ\tilde{\Lambda}_\text{к}\circ\Lambda_{\text{пр}},$$

где $\Lambda_\text{р}^{(k)}$ – значение кватерниона разворота на k-й итерации, используемое в системе (3.3). На каждом k-м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота $\Lambda_\text{р}^{(k)}$ (правые части

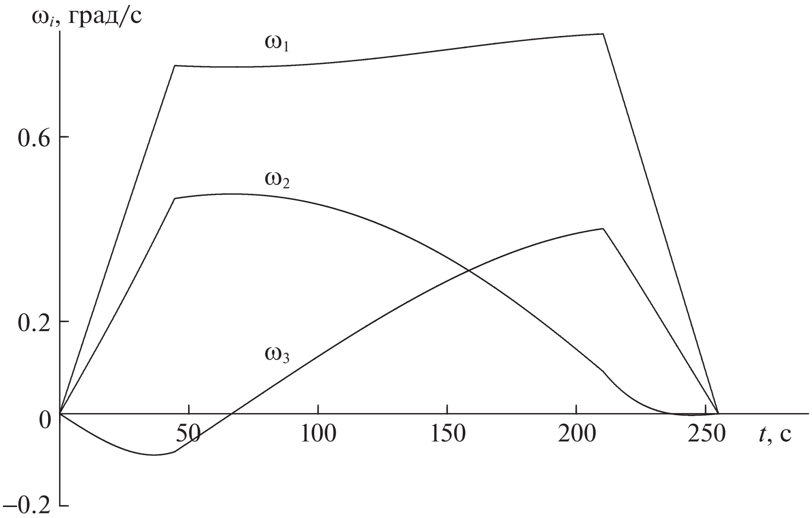


Рис. 2

системы (3.3)), и из уравнений (3.3) мы получаем $\mathbf{p}_0$ и β, а также соответствующую начальную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_н$ (в соответствии с (4.1)) и прогноз $\Lambda_{пр}$. Если $\varepsilon < \varepsilon_{пор}$, то вычисляется кватернион разворота $\Lambda_р^{(k+1)}$ для следующего $(k + 1)$-го шага итераций и процесс уточнения вектора $\mathbf{p}_0$ повторяется. За начальное приближение в правых частях системы (3.3) берутся элементы кватерниона $\Lambda_р^{(0)} = \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$. Итерационный процесс прекращается, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{пор}$.

Принятая схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида $x = f(x)$ для скалярной функции $f(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x. В нашем случае аргумент – гиперкомплексное число (кватернион) $\Lambda_р$. Функцией является кватернионная величина $\Lambda_р \circ \tilde{\Lambda}_к \circ \Lambda_{пр}$, где $\Lambda_к$ – постоянный (не зависящий от аргумента $\Lambda_р$) кватернион; $\Lambda_{пр}$ зависит от аргумента $\Lambda_р$ через систему уравнений (3.3), (4.1) посредством модели движения (1.1), (1.2) (в уравнениях (1.1) принимается $M_i = 0$). Изменяя $\Lambda_р$, изменяются вектор $\mathbf{p}_0$ (в соответствии с (3.3)) и угловые скорости $\omega_{iн}$, а значит, изменится и значение $\Lambda_{пр}$, что вызовет изменение функции $\Lambda_р \circ \tilde{\Lambda}_к \circ \Lambda_{пр}$. Как только $\operatorname{sqal}(\tilde{\Lambda}_{пр} \circ \Lambda_к) \geq \varepsilon_{пор}$, итерационный процесс прекращается, а решение $\mathbf{p}_0$ считается найденным. Так как $|\operatorname{vect}(\tilde{\Lambda}_к \circ \Lambda_{пр}^{(k)})| < |\operatorname{vect}\Lambda_р^{(k)}|$ для всех k, то итерационный процесс приближения $\mathbf{p}_0$ к искомому решению сходится. Аналогичный метод определения значения $\mathbf{p}_0$ в решении краевой задачи принципа максимума использовался в предыдущих работах [8, 18]. Заметим, что это лишь один из возможных (но далеко не единственный) итерационных алгоритмов поиска оптимального вектора $\mathbf{p}_0$.

В результате решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_н$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_к$ получили расчетное значение вектора $\mathbf{p}(0) = \{0.4552153;\ -0.3475442;\ 0.8197513\}$ и "функционал пути" $S = 665$ м $\cdot$ кг$^{1/2}$. Исходя из найденного значения $\mathbf{p}_0$ получили максимальную величину управляющего момента $m_0 = 16.8$ Н $\cdot$ м. Так как $u_0 S > 2E_{доп}$, то оптимальное управление имеет две точки переключения и между набором и гашением кинетической энергии КА вращается по инерции. Время достижения максимально допустимой кинетической энергии $E_{доп}$ равно $t_р = \sqrt{2E_{доп}}/u_0 = 44.7$ с, а момент начала торможения $t_т = S/\sqrt{2E_{доп}} = 210.3$ с. Время разворота оказалось равным $T = 255$ с. Основные константы оптимального движения такие:

$$a(0) = t_т = 210.3 \text{ с}, \quad a(T) = -\tau = -44.7 \text{ с}, \quad r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{доп}}) = 75 \text{ с},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \{7179.8 \text{ с}^2; -5481.6 \text{ с}^2; 12929.6 \text{ с}^2\}.$$

Результаты математического моделирования динамики оптимального по быстродействию разворота представлены рис. 2–5. На рис. 2 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени. Максимальная величина

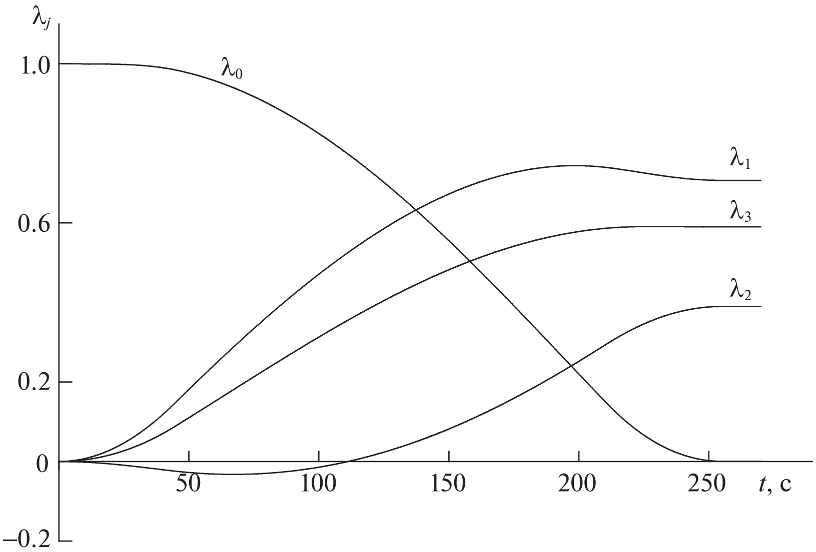


Рис. 3

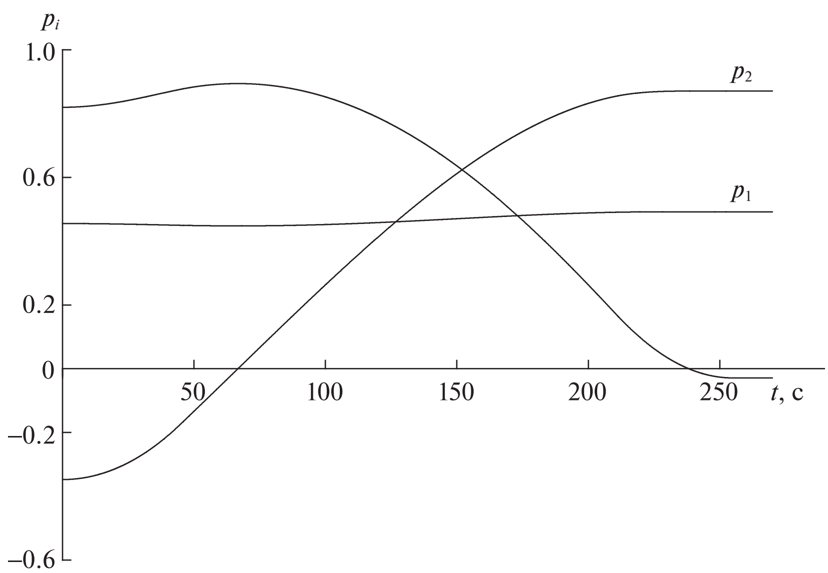


Рис. 4

кинетического момента составила $L_{\max} = 750.7$ Н · м · с. Из соотношения моментов инерции J_1, J_2, J_3 следует, что OX – продольная ось КА. Отмечаем, что угловая скорость ω_1, соответствующая продольной оси КА, – знакопостоянна. На рис. 3 отображены графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$, определяющего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого поворотного маневра: $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. Оптимальная траектория движения $\Lambda(t)$ получается из решения уравнений (1.1) с учетом начальных условий $\Lambda(0) = \Lambda_\text{н}$ и закона изменения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, отраженного на рис. 2. Динамика изменения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ орта $\mathbf{p}$ по времени приведена на рис. 4. Характерным является незначительное изменение проекции p_1 (угловая скорость ω_1 относительно продольной оси КА на участке между разгоном и торможением также меняется гораздо меньше, чем угловые скорости ω_2 и ω_3 относительно поперечных осей КА). При оптимальном управлении в отличие от переменных ω_i переменные p_i и λ_j – гладкие функции времени. Наконец, рисунок 5 демонстрирует изменение сопряженных переменных φ_i во время оптимального по быстродействию разворота.

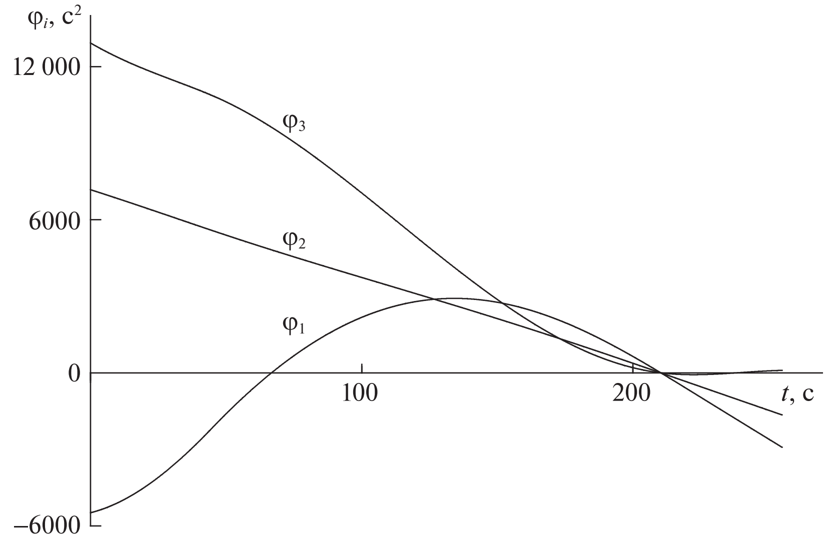


Рис. 5

Заключение. Рассмотрена и решена динамическая задача оптимального по времени управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение с учетом ограничений на управляющий момент и кинетическую энергию вращения. Ограниченность максимальной кинетической энергии вращения позволяет в экстренных случаях погасить угловую скорость за время, не превышающее заданного значения (в том числе в нештатной ситуации, когда требуется срочно прекратить маневр и максимально быстро стабилизировать КА). Постановка задачи имеет традиционную форму, в которой управление считается кусочно-непрерывной функцией времени. Нахождение оптимальной по быстродействию программы переориентации КА с кинетической энергией вращения, не превышающей допустимого уровня, весьма актуально.

Представлено аналитическое решение предложенной задачи оптимального разворота и получены формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы переориентации КА. Определен тип траектории и изучены ключевые свойства оптимального движения. Найдены условия оптимальности и обоснована структура оптимального управления. Доказано, что в процессе всего разворота отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Для решения сформулированной задачи управления применялся принцип максимума, основываясь на универсальных переменных r_i [2]. Использование кватернионов значительно упрощает расчетные процедуры и снижает вычислительные затраты алгоритма управления, делая его наиболее удобным для бортовой реализации. Задача оптимального управления разворотом решается до конца; даны выражения для расчета ключевых характеристик маневра переориентации.

Показано, что на всем интервале переориентации момент сил действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. В общем случае оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором весь разворот делится на раскрутку КА с максимально возможным управляющим моментом, вращение по инерции и торможение с максимально возможным управляющим моментом, противоположно направленным кинетическому моменту КА. Модуль управляющего момента при разгоне и торможении не меняется. Длительности участков разгона и торможения одинаковы (так как начальная и конечная угловые скорости равны нулю) и зависят от мощности исполнительных органов u_0, максимально допустимой кинетической энергии вращения, взаимной ориентации начального и конечного положений КА и его моментов инерции. В случае неограниченного управления (когда $u_0 \to \infty$) времена разгона и торможения бесконечно малы, и практически на всем интервале движения КА вращается с постоянным относительно инерциальной системы координат кинетическим моментом. Другим предельным случаем является управление с одной точкой переключения, при котором участок неуправляемого движения отсутствует (длительность разгона и торможения максимальна и составляет половину времени разворота).

Важность и значение выполненных исследований состоят в том, что в отличие от предыдущих публикаций искомое управление и соответствующее ему движение ограничено максимально допустимой энергией вращения (задача оптимального разворота включает ограничения на силовой момент и угловую скорость КА). В статье приведена процедура реализации оптимального управления переориентацией КА. Момент начала торможения определяется по фактическим параметрам движения (кватерниону рассогласования и кинетическому моменту), исходя из принципов терминального управления (используются информация об угловом положении КА и измерения угловой скорости). Структура построенного управления сравнительно проста, и оно легко может быть реализовано существующими бортовыми системами управления движением КА. Дается описание конструктивной схемы решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота и моментов инерции КА. Для динамически-симметричного КА представлено законченное решение задачи переориентации в замкнутой форме, что придает практическую значимость проведенным исследованиям, поскольку реальные КА во многих случаях близки к телам с осевой симметрией. Записанная в аналитическом виде система уравнений (3.3) позволяет непосредственно найти решение краевой задачи принципа максимума и вычислить необходимые константы оптимального закона управления; при этом искомые значения параметров закона управления могут быть определены известным устройством [28]. Приводятся результаты математического моделирования, иллюстрирующие характер движения КА во время оптимального разворота.

В отличие от работ [8, 9], где рассматривается неограниченное управление (в тех задачах отсутствуют какие-либо ограничения, кроме краевых условий), мы оптимизируем ограниченное управление, когда ограничены не только управляющие функции (силовой момент $\mathbf{M}$), но и фазовые переменные (ограничена угловая скорость КА); это существенное отличие. Кроме того, в [8] оптимальным является непрерывное управление, когда все управляющие функции – непрерывные гладкие функции времени и на всем интервале управления $[0, T]$ (кроме единственного момента времени $t = T/2$) управляющий момент $\mathbf{M}$ отличен от нуля, а в приведенном решении оптимально релейное управление (с одной или с двумя точками переключения) и может существовать отрезок времени ненулевой продолжительности, на котором $\mathbf{M} = 0$ и КА вращается по инерции. Кроме того, в оптимальном решении, представленном в [8], отсутствуют участки с постоянным модулем управляющего момента.

Принципиальным отличием предложенной динамической задачи оптимального управления относительно известных работ является наличие ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные, что придает полученному решению существенную новизну. Наличие готовых формул для синтеза программы оптимального движения во время маневра переориентации делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Левский М.В.* Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53–59.
3. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. С. 600.
4. *Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В.* Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
5. *Ермошина О.В., Крищенко А.П.* Синтез программных управлений ориентацией КА методом обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 155–162.
6. *Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
7. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
8. *Левский М.В.* Квадратично оптимальное управление переориентацией космического аппарата за фиксированное время в динамической постановке // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 133–149.
9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
10. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.

11. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh*. Time-optimal Reorientation for Rigid Satellite with Reaction Wheels // International Journal of Control. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
12. *Решмин С.А*. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
13. *Решмин С.А*. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
14. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
15. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
16. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
17. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.
18. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
19. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
20. *Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Сазонов В.В., Тесленко В.П.* Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции “Мир” с помощью гиродинов. М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
21. *Левский М.В.* Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3. С. 188–195.
22. *Levskii M.V.* Special Aspects in Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators // J. Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
23. *Quang M. Lam*. Robust and Adaptive Reconfigurable Control for Satellite Attitude Control Subject to Under-Actuated Control Condition of Reaction Wheel Assembly // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
24. *Левский М.В.* К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 147–161.
25. *Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 154–173.
26. *Левский М.В.* Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1997. № 29. Опубликован 20.10.1997. С. 271.
27. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
28. *Левский М.В.* Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликован 20.03.2000. С. 148.