
СОДЕРЖАНИЕ

Том 65, номер 12, 2020

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

- Свойства дифракционных коэффициентов в задаче дифракции на трехмерном плоском многоугольнике. Ч. 2: Применение метода базовых компонентов для решения практических задач
М. В. Весник 1147
- Моделирование поля в окрестности каустик обыкновенной и необыкновенной волн при ионосферном распространении
А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Ю. И. Бова 1160
- К расчету периодических структур на основе идеально проводящих квадратов
В. И. Пономаренко, И. М. Лагунов 1170
- О селективном возбуждении несобственных волн круглого открытого диэлектрического волновода
В. А. Малахов, А. С. Нечаев, А. А. Никитин, А. С. Раевский, С. Б. Раевский 1176
-

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

- Реконструкция акустических сигналов по неполным данным
А. В. Кокошкин, В. А. Коротков, Е. П. Новичихин 1181
-

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

- Двухкомпонентная гетерогенная система с формированием порога протекания за счет инверсии матричной структуры
С. Н. Старостенко, К. Н. Розанов, С. Ю. Бобровский, А. О. Ширяев 1190
-

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

- Метод конечных распределенных элементов для анализа фрактальных элементов на основе многослойных резистивно-емкостных сред
А. Х. Гильмутдинов, Р. З. Даутов, П. А. Ушаков 1198
-

НАНОЭЛЕКТРОНИКА

- Рост тонких эпитаксиальных пленок NiO на подложках из LiNbO₃
В. А. Лузанов 1206
-

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

- Тестирование параксиальной модели ленточных электронных пучков
Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой 1209
-

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Проникновение энергии электромагнитных излучений в полупроводниковую
элементную базу технических средств, не имеющих специализированных
приемных антенн

В. Г. Усыченко, Л. Н. Сорокин, А. С. Усыченко

1234

Именной указатель № 1–12 за 2020 год

1244

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.6;621.371.33

СВОЙСТВА ДИФРАКЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ
НА ТРЕХМЕРНОМ ПЛОСКОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ.
Ч. 2: ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БАЗОВЫХ КОМПОНЕНТОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

© 2020 г. М. В. Весник*

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

**E-mail: vesnik@cplire.ru*

Поступила в редакцию 29.07.2019 г.

После доработки 29.07.2019 г.

Принята к публикации 02.09.2019 г.

Исследованы свойства сингулярных дифракционных коэффициентов, входящих в построенные при помощи метода базовых компонентов разные типы эвристических аналитических решений задачи дифракции электромагнитной волны на плоском идеально проводящем многоугольнике. Показана возможность моделирования тонких дифракционных эффектов, таких как осцилляции отношения амплитуд рассеянного поля для различных поляризаций падающей волны.

DOI: 10.31857/S0033849420120189

ВВЕДЕНИЕ

В первой части [1] статьи были изложены основы метода базовых компонентов (МБК), при помощи которого можно строить эвристические аналитические решения двумерных и трехмерных задач теории дифракции. Во второй части статьи при помощи МБК получено эвристическое аналитическое решение задачи дифракции на трехмерном плоском многоугольнике.

В работе [2] было построено эвристическое аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на плоском угловом секторе. Оно было получено на основе строгого решения задачи дифракции на кромке из [3], преобразованного при помощи “навязанного” условия дальней зоны и с применением подхода “условная кромка” [1]. В качестве основы при построении решения был применен линейный интеграл по контуру рассеивателя [1]. Кроме того, было применено решение на “условной кромке” [2]. В результате получились компактные эвристические аналитические выражения.

Приведем для удобства полный список применяемых сокращений.

МБК – метод базовых компонентов;

ГТД – геометрическая теория дифракции;

ФТД – физическая теория дифракции; (=приближенные и эвристические подходы)

МКВ – метод краевых волн;

ЧР – численное решение;

ФО – физическая оптика, физоптический;

МЭКТ – метод эквивалентных контурных токов;

ММЭКТ – модифицированный МЭКТ.

1. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА УСЛОВНОЙ КРОМКЕ

В эвристических методах двумерные решения используются для решения трехмерных задач. При этом берут кромку конечного размера. Если на ней есть точка стационарной фазы, то эвристическое решение задачи дифракции на кромке можно найти, проведя интегрирование вдоль кромки. Если выполняется условие дальней зоны, то фаза сигнала на кромке будет постоянна.

Однако может быть ситуация, когда точка стационарной фазы на кромке отсутствует. В этом случае точка наблюдения находится вне дифракционного конуса, а эвристическое решение для дифракционного коэффициента можно построить в соответствии с методом дифференциальных дифракционных коэффициентов, осуществив интегрирование по элементарной полоске, расположенной перпендикулярно кромке [4].

Можно действовать и по-другому, проведя на поверхности рассеивателя линию (“условную

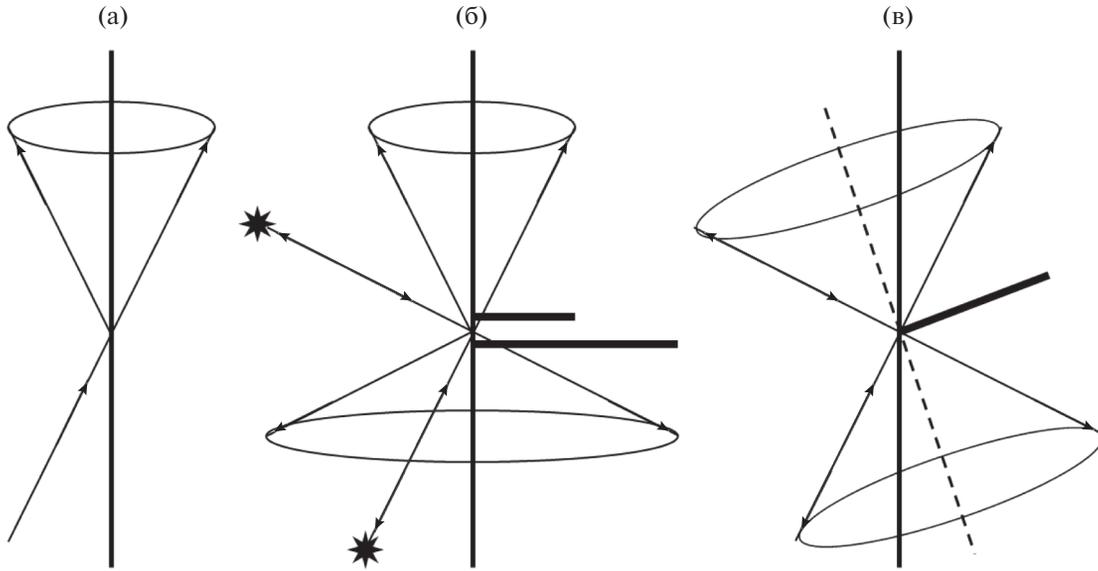


Рис. 1. Применение решения на условной кромке.

кромку”), которая является образующей дифракционного конуса для заданных положений источника и точки наблюдения. Такой подход позволяет напрямую (т.е. без интегрирования по элементарной полоске, расположенной перпендикулярно кромке) использовать двумерные дифракционные коэффициенты на “условной кромке”, что гарантирует выполнение принципа взаимности и дает возможность строить эффективные эвристические аналитические формулы. Решение на условной кромке можно считать объединением концепций ГТД и МКВ.

На рис. 1 приведены схемы, объясняющие применение подхода “условная кромка”. На рис. 1а показано направление волны, падающей на бесконечную кромку, и дифракционный конус рассеянных лучей. Все рассеяние происходит только в направлении дифракционных конусов, в других направлениях рассеяния не происходит. Кстати, именно этот эффект определяет форму трехмерных радиолокационных объектов, выполненных по технологии “Стелс”. Кромки объекта расположены параллельно друг другу, максимальное рассеяние происходит в двух основных направлениях, в других направлениях рассеяние минимально.

На рис. 1б представлен фрагмент кромки трехмерного рассеивателя. Точка наблюдения расположена вне дифракционного конуса. В этом случае, если поменять местами источник и точку наблюдения, то поменяется и конфигурация дифракционного конуса, которая определяется проекциями направляющего вектора падающей волны на кромку и

на направление, перпендикулярное кромке. При этом для соответствующих решений может нарушаться принцип взаимности в электродинамике.

На рис. 1в изображена “условная кромка”. Это прямая в пространстве, расположенная на поверхности плоского рассеивателя под углом к реальной кромке таким образом, что направления на источник и точку наблюдения составляют один и тот же угол с условной кромкой. Таким образом, по отношению к условной кромке точка наблюдения лежит на дифракционном конусе. Поэтому для построения решения можно использовать дифракционные коэффициенты на условной кромке, подставляя в соответствующие выражения углы, связанные уже не с реальной, а с условной кромкой.

2. ДИФРАКЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭВРИСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сингулярные дифракционные коэффициенты решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящей полуплоскости [5]:

строгие (f, g)

$$\begin{aligned} f(\varphi, \varphi_0) &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \\ g(\varphi, \varphi_0) &= \frac{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

и в приближении физической оптики (f^0, g^0)

$$\begin{aligned} f^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \\ g^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сингулярные дифракционные коэффициенты (1) входят в состав интегрального представления двумерной задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости [1, 4]. В трехмерных задачах дифракции при выполнении условия дальней зоны для построения эвристического решения можно ограничиться сингулярными дифракционными коэффициентами [4, 6, 7].

Поскольку эти дифракционные коэффициенты входят в состав эвристического решения задачи дифракции в приближении метода эквивалентных контурных токов, мы будем также называть их МЭКТ. Сингулярные дифракционные коэффициенты (2) входят в состав решения той же задачи в приближении физической оптики, поэтому мы будем называть их ФО или МЭКТ-ФО. Сингулярные дифракционные коэффициенты (1) и (2) входят в состав базовых компонентов [1, 8]. Дифракционные коэффициенты (1) описывают решение задачи дифракции с учетом возмущения на кромке, а дифракционные коэффициенты (2) – без учета такого возмущения. Отметим полезное соотношение:

$$f(\varphi, \varphi_0)g(\varphi, \varphi_0) = f^0(\varphi, \varphi_0)g^0(\varphi, \varphi_0). \quad (3)$$

С целью построения эвристического решения трехмерной задачи дифракции на плоском многоугольнике разобьем дифракционные коэффициенты $f(\varphi, \varphi_0)$ и $g(\varphi, \varphi_0)$ из (1) на две части: геометрическую и поляризационную. Геометрическая часть представляет собой знаменатель дифракционного коэффициента и определяет характер его сингулярности в направлении дифракционного конуса. Поляризационная часть дифракционного коэффициента представляет собой его числитель и характеризует форму профиля кромки, вид поляризации или граничные условия [1, 4, 8]. Геометрическая часть содержится в соответствующем линейном интеграле I , а поляризационную часть берем из дифракционного коэффициента, взятого на условной кромке, при этом в (1) вместо углов (φ, φ_0) , связанных с реальной кромкой, подставляем $(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)$, связанных с условной кромкой [4]. Если точка наблюдения лежит на дифракционном конусе, то $\varphi\gamma = \varphi, \varphi\gamma_0 = \varphi_0$.

Таким образом, вместо поляризационной составляющей физоптики на условной кромке берем числители дифракционных коэффициентов (1) двумерного решения $U''_{TH\beta}$ и $U''_{TE\beta}$ с учетом ко-

эффициентов разложения поляризацій падающего и рассеянного поля по TE - и TH -поляризациям, перпендикулярным кромке. В локальных координатах $\varphi\gamma$ и $\varphi\gamma_0$ (аналогичных локальным координатам φ и φ_0 из [5]), представляющим собой углы между проекциями направляющих векторов $-\vec{n}'$ и \vec{n}'' на плоскость, перпендикулярную условной кромке, и внутренней нормалью к условной кромке, числители дифракционных коэффициентов принимают вид:

$$\begin{aligned} U''_{TH\beta} &= f(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)(\cos \varphi\gamma + \cos \varphi\gamma_0) = \\ &= 2 \sin \frac{\varphi\gamma}{2} \sin \frac{\varphi\gamma_0}{2}, \\ U''_{TE\beta} &= g(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)(\cos \varphi\gamma + \cos \varphi\gamma_0) = \\ &= -2 \cos \frac{\varphi\gamma}{2} \cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) описывают поляризационные составляющие на условной кромке (т.е. числители дифракционных коэффициентов), зависящие от координат $(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)$. Геометрические составляющие, зависящие от (φ, φ_0) , содержатся в интегралах I .

Решения на условной кромке имеет смысл применять в тех задачах, где этот подход экономит объем вычислений. В данной работе рассмотрена геометрия, в которой подход “условная кромка” совпадает с подходом “дифференциальные дифракционные коэффициенты”, когда интегрирование поля проводят по элементарной полоске, расположенной перпендикулярно кромке. Кроме того, рассеяние происходит вдоль дифракционных конусов, поэтому углы $(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)$ и (φ, φ_0) совпадают.

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ D

Рассмотрим представление поля в виде коэффициентов передачи по поляризациям D , которые определяются выражениями [2, 4, 9]:

$$\begin{pmatrix} E_{\vartheta}^{\infty} \\ E_{\varphi}^{\infty} \end{pmatrix} = \frac{\exp(ikR)}{kR} \begin{pmatrix} D_{\vartheta\vartheta} & D_{\vartheta\varphi} \\ D_{\varphi\vartheta} & D_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\vartheta}^{inc} \\ E_{\varphi}^{inc} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь E – компоненты векторов падающего и рассеянного полей. Нижние индексы соответствуют обозначениям ортов соответствующих углов, верхние обозначают падающее (inc) поле и рассеянное (∞) в точке наблюдения на большом расстоянии R от рассеивателя.

Обозначим вектора координат φ и ϑ падающего (inc) и рассеянного (s) поля [9] как $\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{e}_{\varphi}^s$ и \vec{e}_{ϑ}^s в глобальных сферических координатах (r, ϑ, φ) , а вектора T -поляризацій (по отношению к

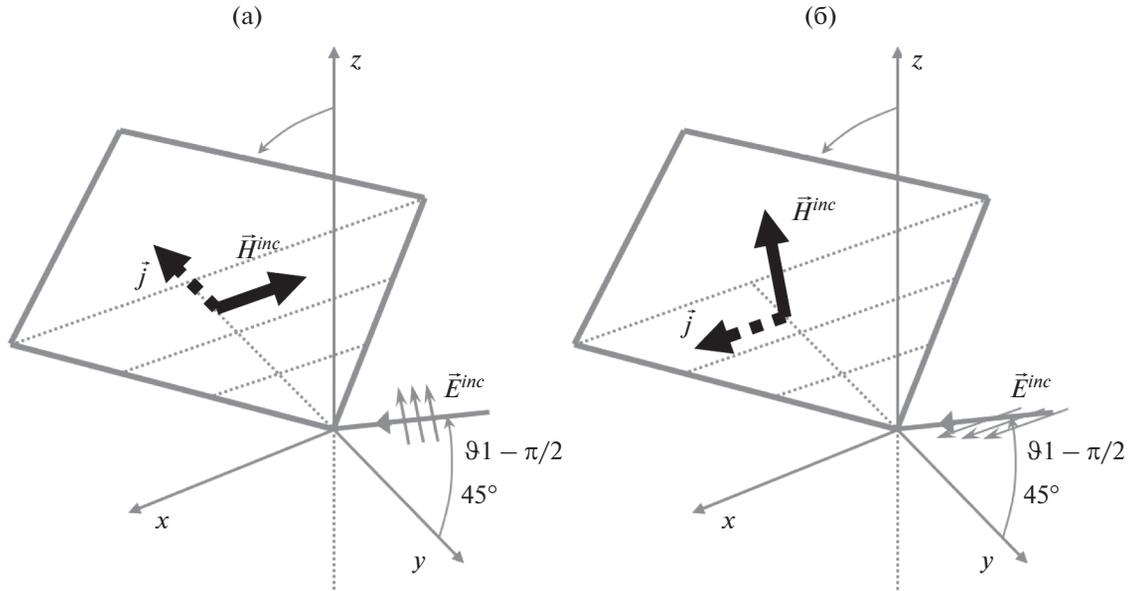


Рис. 2. Геометрия задачи дифракции на плоском многоугольнике.

условной кромке) падающей (*i*) и рассеянной (*s*) волн в локальных координатах, связанных с условной кромкой как $\vec{t}_i, \vec{p}_i, \vec{t}_s$ и \vec{p}_s . Тогда при выполнении условия дальней зоны можно получить эвристические выражения для коэффициентов *D* в случае дифракции на плоском угловом секторе [2, 4]:

$$\begin{aligned}
 D_{\vartheta\vartheta} &= \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\vartheta}^{\infty}}{E_{\vartheta}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{H_{\vartheta}^{\infty}}{H_{\vartheta}^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \\
 D_{\vartheta\varphi} &= \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\varphi}^{\infty}}{E_{\varphi}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{-H_{\vartheta}^{\infty}}{H_{\vartheta}^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \times \\
 &\times \left[(\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \quad (6) \\
 D_{\vartheta\varphi} &= \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\vartheta}^{\infty}}{E_{\vartheta}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{H_{\varphi}^{\infty}}{H_{\varphi}^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \\
 D_{\varphi\vartheta} &= \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\varphi}^{\infty}}{E_{\varphi}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{-H_{\vartheta}^{\infty}}{H_{\vartheta}^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right].
 \end{aligned}$$

Формулы (6) дают решение в приближении метода эквивалентных контурных токов. Для пе-

рехода от коэффициентов *D* к полям применяют формулы (5).

В выражениях (6) значения скалярного интеграла *I^j* определены в координатах, связанных с реальными кромками, образующими вершину. Для расчета дифракции на многоугольнике можно применять те же формулы, заменив в (6) интегралы по плоскому угловому сектору *I^j* на интегралы по кромкам *I_j* [1, 4]. Таким образом, эвристические формулы (6) обладают высокой степенью универсальности, а интегралы *I^j* и *I_j* могут быть включены в набор базовых компонентов [8] наряду с общей формулой для интеграла *I* [1, 4].

Кроме интегралов *I*, в формулах (6) использованы и другие составляющие из решений простейших задач, допускающих математически строгую постановку, которые могут быть включены в набор базовых компонентов [1, 4, 8].

4. ВИДЫ ГЕОМЕТРИЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на плоском идеально проводящем многоугольнике. На рис. 2 показана геометрия задачи дифракции на плоском идеально проводящем многоугольнике для двух поляризаций падающей электромагнитной волны. Угол ϑ_1 отсчитывается от отрицательного направления оси *Oz*. Единичные орты падающей (*inc*) и рассеянной (*s*) волн $\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{e}_{\varphi}^s$ и \vec{e}_{ϑ}^s задаем в глобальных сфери-

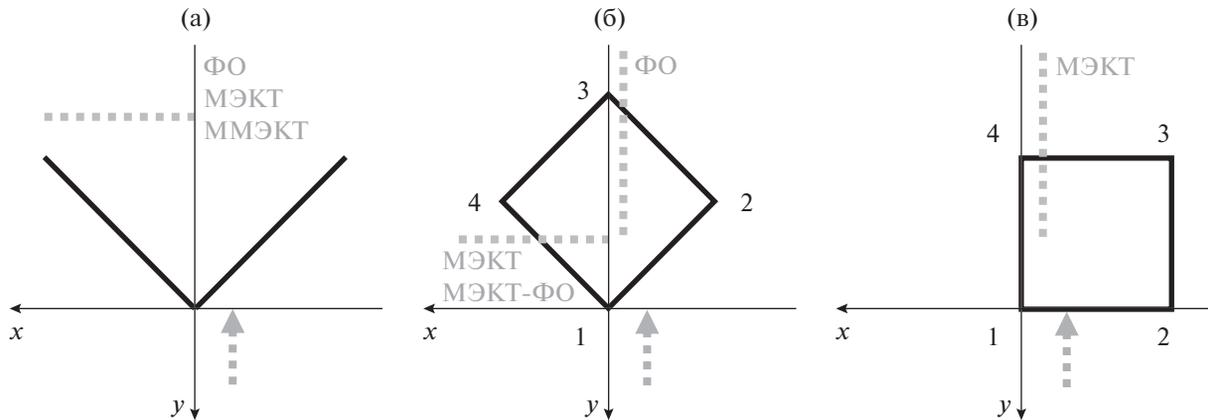


Рис. 3. Схемы задач дифракции на плоском угловом секторе и плоском многоугольнике.

ческих координатах (r, ϑ, φ) [9] (см. также [2, 4]). Вектора T - поляризации (по отношению к условной кромке) падающей (i) и рассеянной (s) волн $\vec{t}_i, \vec{p}_i, \vec{t}_s$ и \vec{p}_s [1] определяем в локальных координатах, связанных с условной кромкой [3] (см. также [2, 4]). Значения дифракционных коэффициентов $U_{ТНВ}''$ и $U_{ТЭВ}''$ определяем по формулам (4) в локальных координатах через углы $\varphi\gamma$ и $\varphi\gamma_0$, связанные с условной кромкой, с учетом соответствия углов $\varphi\gamma_0 \leftrightarrow \alpha_1, \varphi\gamma \leftrightarrow \theta_1$ [3] (см. также [2, 4]).

На рис. 3 показаны схемы падения и рассеяния волны в задаче дифракции на плоском угловом секторе и плоском многоугольнике. На рис. 3а представлены схемы падения и рассеяния волны в задаче дифракции на плоском угловом секторе. Проекция направляющего вектора падающей волны \vec{n}' на плоскость XOY совпадает с отрицательным направлением оси Oy . Проекция направляющего вектора рассеянной волны \vec{n}'' на плоскость XOY совпадает с положительным вектором оси Ox . Если в решение МЭКТ на условной кромке подставить дифракционные коэффициенты Φ_0 , то получим приближение МЭКТ- Φ_0 . Эвристические решения этой задачи для различных приближений приведены в работах [2, 4, 10].

На рис. 3б приведены схемы падения и рассеяния волны в задаче дифракции на плоском многоугольнике, одна из вершин которого ориентирована так же, как плоский угловой сектор (рис. 3а). Данная геометрия соответствует рис. 2. Результаты счета опубликованы в [11] и [12].

На рис. 3в изображены схемы падения и рассеяния волны в задаче дифракции на плоском многоугольнике. Падение и рассеяние происходит в одной и той же плоскости YOZ (рис. 2). Результаты частично опубликованы в работе [12].

В данной статье мы более детально проанализируем свойства решения задачи дифракции на

идеально проводящем прямоугольнике, геометрия которой соответствует рис. 3в.

5. ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ РАССЕЯНИИ “ПРЯМО ВПЕРЕД” И ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ПОЛОСЕ

Случай рассеяния “прямо вперед” (нормальное падение на кромку и рассеяние в плоскости падения) – удачная геометрия трехмерной задачи дифракции для отработки эталонных решений с целью их дальнейшего применения при построении эвристических формул. В такой геометрии влияние вершин минимально. Влияние переотражений в этой геометрии максимально, но данное влияние можно выделить, решая дополнительную двумерную эталонную задачу – дифракцию на полосе.

Рассмотрим сингулярные дифракционные коэффициенты (1) и их поляризационные составляющие (числители) при рассеянии в плоскости падения (рис. 3в). Как уже было сказано ранее, в данной геометрии рассеяние происходит вдоль дифракционных конусов, направление условной кромки совпадает с направлением реальных кромок, и в (4) выполняется $\varphi\gamma = \varphi, \varphi\gamma_0 = \varphi_0$.

Знаменатели дифракционных коэффициентов (1) и (2) равны, причем они характеризуют свойства интеграла по “теневому контуру” в терминологии [13], или “линейного интеграла по кромке плоского рассеивателя” в терминах [1, 4]. Линейный интеграл правильно описывает направления максимумов рассеянного излучения, но не учитывает влияние поляризации.

Сравним свойства поляризационных частей дифракционных коэффициентов (числителей) дифракционных коэффициентов (1) и (2). Физические дифракционные коэффициенты (2) не учи-

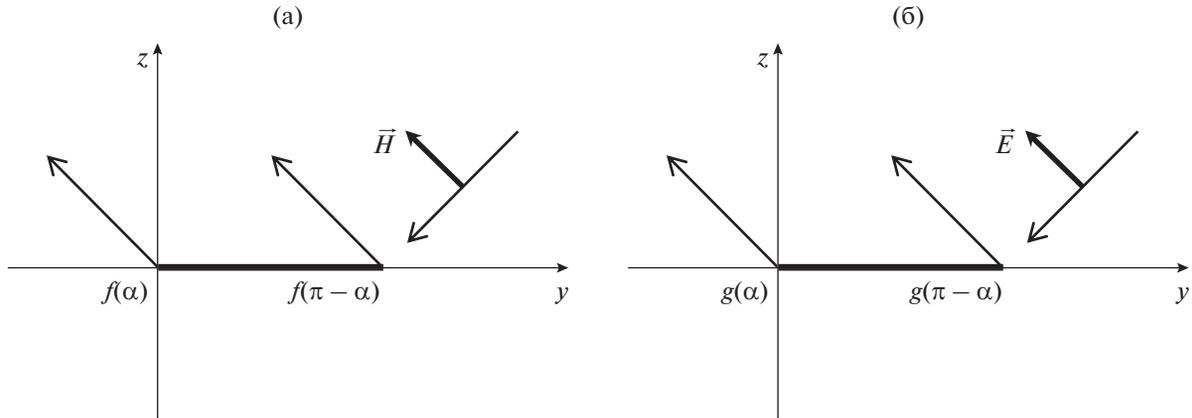


Рис. 4. Двумерная задача дифракции на полосе.

тывают возмущения вблизи края плоского рассеивателя, но с целью лучшего понимания физических особенностей решения мы не будем исключать их из рассмотрения. Отмеченные нижним индексом “ p ” поляризационные части дифракционных коэффициентов (1) характеризуются выражениями

$$f_p = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad g_p = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad (7)$$

а дифракционные коэффициенты (2) – выражениями

$$f_p^0 = \sin \varphi_0, \quad g_p^0 = -\sin \varphi. \quad (8)$$

Поведение дифракционных коэффициентов (1) и (2), а также их поляризационных частей (7) и (8) отличается при различных воздействиях на эти функции, таких как:

а) замена $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi$ (проверка выполнения принципа взаимности);

б) одновременная подстановка вместо α угла $(\pi - \alpha)$, где $\alpha = \varphi$ или $\alpha = \varphi_0$ (дифракционные коэффициенты на разных кромках полоски).

Принцип взаимности является ключевым свойством задач электродинамики [14]. Одним из следствий этого принципа является то, что при взаимной смене положений точек источника и точки наблюдения значение рассеянного сигнала остается прежним.

В эвристических формулах МБК выполнение принципа взаимности обеспечивается применением подхода “условная кромка” (см. разд. 1).

Как следует из формул (7) и (8), для МЭКТ принцип взаимности выполняется (при перестановке $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi$ ничего не меняется). Для МЭКТ-ФО в случае перестановки $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi$ принцип взаимности не выполняется, и происходит изменение

(смена знака дифракционных коэффициентов), соответствующее смене поляризации.

Второе свойство относится к двумерной задаче дифракции на полосе (рис. 4). Замена угла α на $(\pi - \alpha)$ соответствует отсчету угла в локальных координатах, связанных с внутренней нормалью к кромке. На рис. 4 кромка идет вдоль оси x , а внутренняя нормаль к кромке направлена в положительном или в отрицательном направлении оси y . Это приводит к подстановке соответственно углов α или $(\pi - \alpha)$ в формулы дифракционных коэффициентов (1) и (2) или в формулы поляризационных частей дифракционных коэффициентов (7) и (8).

При замене углов α на $(\pi - \alpha)$ в аргументе (φ, φ_0) получим $(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0)$, при этом поляризационные составляющие дифракционных коэффициентов (7) и (8) изменятся следующим образом.

$$\begin{aligned} \text{МЭКТ : } f_p(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) &= -g_p(\varphi, \varphi_0), \\ g_p(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) &= -f_p(\varphi, \varphi_0), \\ \text{МЭКТ-ФО : } f_p^0(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) &= f_p^0(\varphi, \varphi_0), \\ g_p^0(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) &= g_p^0(\varphi, \varphi_0). \end{aligned} \quad (9)$$

В зеркальном направлении точки наблюдения выполняется $\varphi = \pi - \varphi_0$. Подставив этот угол в аргумент (φ, φ_0) , получим $(\pi - \varphi_0, \varphi_0)$. Подставив угол $\varphi = \pi - \varphi_0$ в аргумент $(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0)$, получим $(\varphi_0, \pi - \varphi_0)$. При этом функции (7), (8) и (9) принимают значения:

$$\begin{aligned} f_p(\pi - \varphi_0, \varphi_0) &= f_p(\varphi_0, \pi - \varphi_0) = \sin \varphi_0, \\ g_p(\pi - \varphi_0, \varphi_0) &= g_p(\varphi_0, \pi - \varphi_0) = -\sin \varphi_0, \\ f_p^0(\pi - \varphi_0, \varphi_0) &= f_p^0(\varphi_0, \pi - \varphi_0) = \sin \varphi_0, \\ g_p^0(\pi - \varphi_0, \varphi_0) &= g_p^0(\varphi_0, \pi - \varphi_0) = -\sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Анализ формул (7), (8) и (9) показывает, что свойства взаимности и подстановки аргументов

на разных концах полоски выполняются по-разному как для дифракционных коэффициентов МЭКТ и МЭКТ-ФО, так и для их поляризационных частей. Совпадение решений МЭКТ и МЭКТ-ФО происходит только на одинаковых поляризациях в направлении зеркального отражения (10).

Несмотря на то, что приближение МЭКТ-ФО не учитывает возмущение на границах рассеивателя, нельзя считать, что приближение МЭКТ будет во всех случаях более корректным, чем МЭКТ-ФО. В данной статье мы рассматриваем идеальные граничные условия. В случае неидеальных граничных условий можно построить эвристическое решение, одновременно применяя приближения МЭКТ и МЭКТ-ФО и находя оптимальный баланс между ними [8, 15].

Рассмотрим влияние подстановки $(\pi - \alpha)$ в преобразование МЭКТ-ФО для задачи дифракции на полосе. Пусть ширина полоски стремится к нулю. В направлении зеркального отражения каждый из дифракционных коэффициентов является сингулярным. Однако при интегрировании по замкнутому контуру в трехмерном случае получаем значение, пропорциональное площади рассеивателя [4, 6, 7], а в двумерном — соответственно, значение, пропорциональное ширине полосы. Поляризационные части обеих поляризаций на концах полоски равны, поэтому при уменьшении длины полоски умножение этой величины на линейный интеграл устремляет рассеянный сигнал к нулю.

В зеркальном направлении выполняется $\varphi = \pi - \varphi_0$, при этом поляризационные части дифракционных коэффициентов в приближениях МЭКТ и МЭКТ-ФО для соответствующих поляризаций равны (10). Таким образом, в зеркальном направлении компенсация сингулярностей полных дифракционных коэффициентов (1) и (2) дает для МЭКТ то же значение, что и для МЭКТ-ФО. При отклонении от зеркального направления дифракция на полосе в приближениях МЭКТ и МЭКТ-ФО происходит по-разному.

Для преобразования МЭКТ выражения на краях полоски (9) отличаются, поэтому вклад каждой из кромок линейного интеграла нужно учитывать по отдельности, умножая этот вклад на соответствующую поляризационную составляющую (9). Следует отметить, что при уменьшении ширины полоски применять приближение МЭКТ без учета переотражений между кромками некорректно.

Введем обозначения для дифракционных коэффициентов на разных сторонах трехмерного рассеивателя в соответствии со схемой рис. 3в. На этой схеме кромки расположены параллельно, как и в случае двумерной задачи дифракции на

полосе (рис. 4). Дифракционные коэффициенты на стороне 4, расположенной между 3-й и 4-й вершинами, обозначим $fg4TH\beta$ и $fg4TE\beta$. Дифракционные коэффициенты на стороне 2, расположенной между 1-й и 2-й вершинами, обозначим $fg2TH\beta$ и $fg2TE\beta$. Индексы $TH\beta$ и $TE\beta$ соответствуют поляризациям в соответствии с (4) (см. также [2, 4]). В соответствии с этими обозначениями:

для приближения МЭКТ

$$\begin{aligned} fg4TH\beta &= f_p(\varphi, \varphi_0), \\ fg2TH\beta &= f_p(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) = -g_p(\varphi, \varphi_0), \\ fg4TE\beta &= g_p(\varphi, \varphi_0), \\ fg2TE\beta &= g_p(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) = -f_p(\varphi, \varphi_0), \end{aligned} \quad (11)$$

для приближения МЭКТ-ФО

$$\begin{aligned} fg4TH\beta &= f_p^0(\varphi, \varphi_0), \\ fg2TH\beta &= f_p^0(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) = f_p^0(\varphi, \varphi_0), \\ fg4TE\beta &= g_p^0(\varphi, \varphi_0), \\ fg2TE\beta &= g_p^0(\pi - \varphi, \pi - \varphi_0) = g_p^0(\varphi, \varphi_0). \end{aligned}$$

6. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ В ПЛОСКОСТИ ПАДЕНИЯ

Рассмотрим результаты расчетов диаграмм рассеяния на плоском идеально проводящем многоугольнике при выполнении условия дальней зоны. Геометрия задачи соответствует рис. 3в. Рассеиватель представляет собой плоский квадрат. Размер стороны квадрата изменяется в пределах от $ka=2$ до $ka=60$. Положение реальных кромок и условной кромки совпадают. Источник и точка наблюдения расположены на бесконечном расстоянии до кромки, а плоскость наблюдаемой диаграммы совпадает с плоскостью падения. На рассеиватель падает плоская волна единичной амплитуды. Рассматриваем два типа поляризации: с вектором падающего поля E , расположенным в плоскости падения (и наблюдения) или перпендикулярно этой плоскости. В точке наблюдения находим модуль рассеянного поля.

Аналитические эвристические формулы соответствуют выражениям (6) с заменой интегралов по плоскому угловому сектору I^j на интегралы по кромкам I_j , которые описывают рассеянный сигнал на дифракционном конусе, соответствующем геометрии нормального падения на кромку. Дополнительные подробности можно найти в источниках [1, 4, 12].

Решения, рассчитанные по эвристическим формулам, сравниваем с численным решением, полученным с помощью метода моментов. Ре-

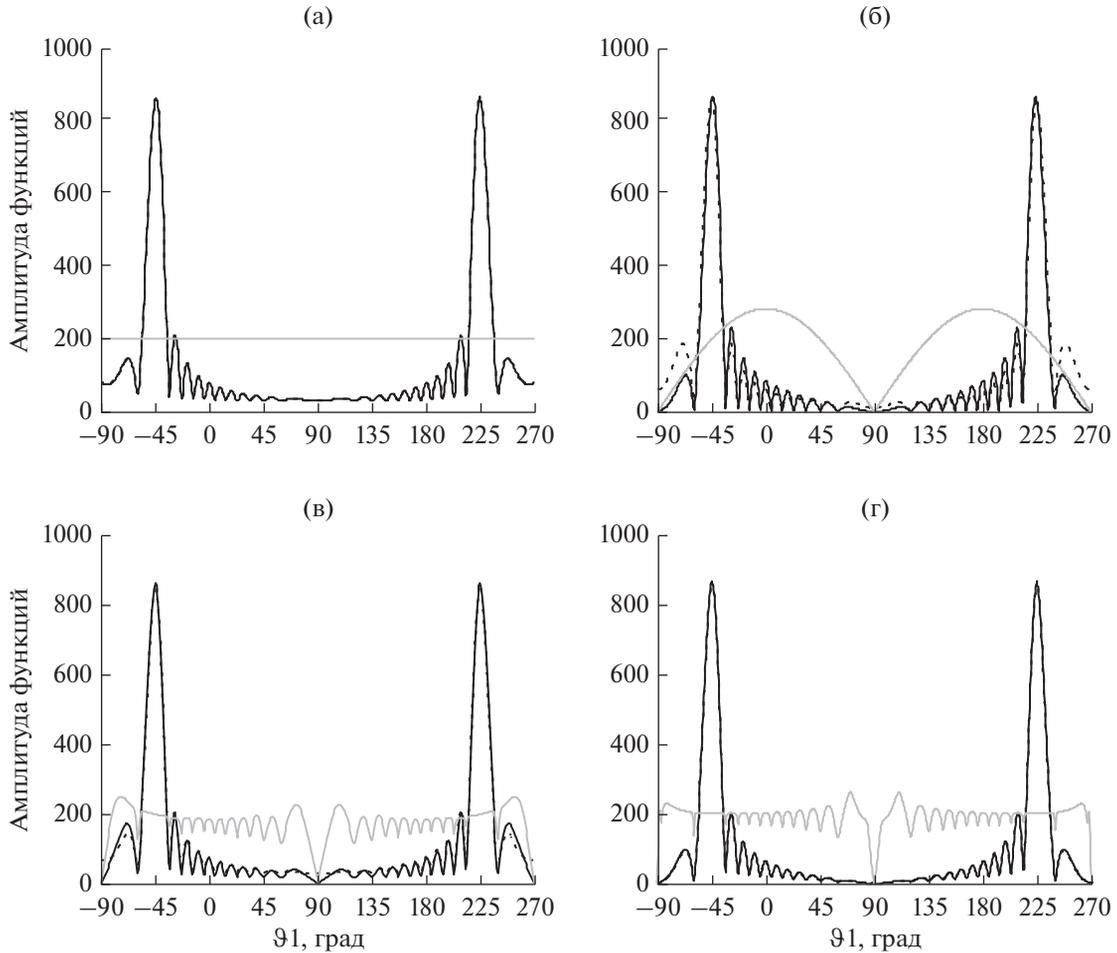


Рис. 5. Сравнение при $ka = 40$ и $coeff = 200$ эвристических решений МЭКТ (а), МЭКТ-ФО (б) и численного решения (в) для задачи дифракции на идеально проводящем плоском многоугольнике. На рис. 5г показано эвристическое решение МЭКТ + cfg с имитацией осцилляций при $cfg = 0.08$.

зультаты численного расчета были предоставлены В.И. Калиничевым.

Сравнение численного решения и эвристических формул лучше всего проводить в одной и той же программной среде. В противном случае между объектами сравнения могут возникать не обусловленные физикой дополнительные погрешности, связанные с особенностями вычислителей и затрудняющие физическую интерпретацию результатов. В связи с невозможностью внедрения эвристических формул в ту же программную среду, в которой было получено численное решение, сравнение численного решения и эвристических формул проводим по внешнему виду графиков диаграмм рассеяния и отношения амплитуд поляризации. Будем также называть его “отношение TE/TH ”.

Численные расчеты дифракции на плоском идеально проводящем плоском многоугольнике

были приведены в работах [11, 12]. В данной работе мы обсудим часть этих результатов, а также новые расчеты.

На рис. 5–7 приведены результаты расчета дифракции на идеально проводящем прямоугольнике для схемы рис. 3в. Сплошными черными линиями показаны амплитуды TE -поляризации, черными пунктирными линиями – амплитуда TH -поляризации, сплошными серыми линиями – отношение поляризаций TE/TH , умноженное на константу $coeff$. Эта константа введена для того, чтобы кривая отношения поляризаций не накладывалась на другие кривые на рисунках. Прямая, совпадающая на графиках с константой $coeff$, соответствует значению отношения поляризаций $|TE/TH| = 1$.

На рис. 5 приведены результаты для $ka = 40$ и $coeff = 200$. На рис. 5а показано приближение МЭКТ, на рис. 5б – приближение МЭКТ-ФО, на

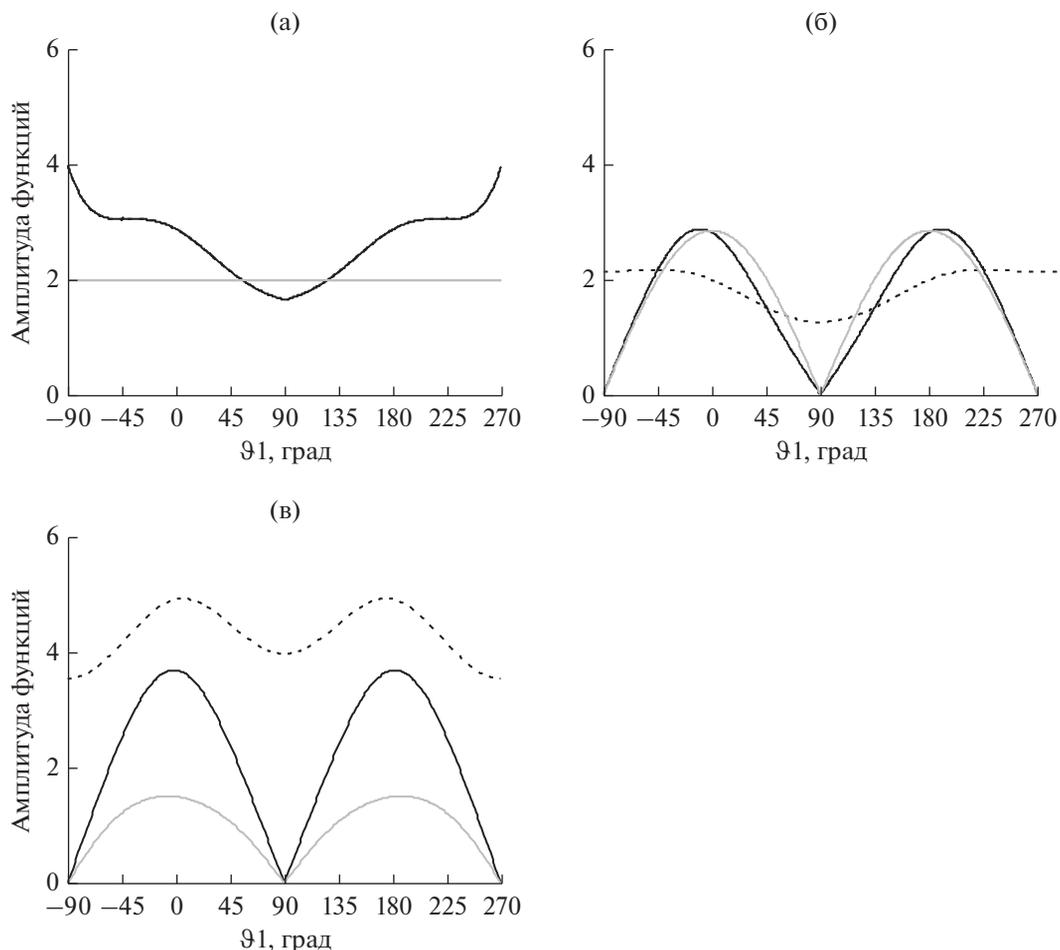


Рис. 6. Диаграммы рассеяния при $ka = 2$ и $coeff = 2$ для эвристических решений МЭКТ (а), МЭКТ-ФО (б) и численного решения (в).

рис. 5в – численное решение. На рис. 5г показано решение с имитацией осцилляций (см. ниже) в приближении МЭКТ + cfg при $cfg = 0.08$.

Анализ графиков показывает, что общая структура решения (оглабающая диаграммы рассеяния, количество лепестков и т.п.) похожа для всех типов приближений. Эта структура определяется линейным интегралом по контуру рассеивателя. Напротив, графики отношения поляризации TE/TH имеют существенные отличия, которые определяются поляризационными составляющими.

Численное решение на рис. 5в имеет осцилляции на фоне константы $coeff$, но если сгладить осцилляции, то можно прийти к выводу, что диаграмма рассеяния близка к эвристическому решению МЭКТ. То же самое справедливо и для других, не слишком малых значений ka (ориентировочно $ka \geq 12$) [12].

На рис. 6 приведены результаты расчета дифракции на идеально проводящем прямоуголь-

нике с $ka = 2$ и $coeff = 2$. На рис. 6а показано приближение МЭКТ, на рис. 6б – приближение МЭКТ-ФО, на рис. 6в – численное решение. Из этих графиков следует, что при малых значениях ka численному решению больше соответствует приближение МЭКТ-ФО. Очевидно, это связано с влиянием вершинных волн и переотражений.

Сделаем несколько замечаний относительно построения эвристического решения.

1. Мы применяем подход МБК, в котором решение для рассеянного поля представляет собой поляризационную составляющую, умноженную на линейный интеграл, связанный с отдельной кромкой. Этот подход согласуется с МКВ (хотя есть отличия в методике) и с МЭКТ.

2. Линейный интеграл [1, 4] по кромке плоско-го рассеивателя правильно описывает структуру рассеянного поля (направления максимумов и количество лепестков), но ничего не говорит о поляризации.

3. Поляризация составляющая ΦO (8) зависит от направления вектора поляризации падающей волны и от направления нормали к плоскости рассеивателя, но не зависит от положения кромки. Эта составляющая правильно описывает амплитуду поля на различных поляризациях в направлениях зеркального отражения.

4. Поляризация составляющая МЭКТ (7) связана с взаимным расположением кромки и вектора поляризации падающей волны. Эта составляющая правильно описывает амплитуду поля на различных поляризациях в направлениях дифракционных конусов.

5. Поляризация составляющая МЭКТ- ΦO строится на аналитических выражениях, при помощи которых строят приближение МЭКТ [1]. Для получения приближения МЭКТ- ΦO в выражениях МЭКТ заменяем поляризационные составляющие строгого решения (7) на физоптические (8). В случае нормального падения на кромку приближения ΦO и МЭКТ- ΦO совпадают.

6. Эвристические решения МЭКТ и МЭКТ- ΦO отличаются как друг от друга, так и от численного решения. Несмотря на то, что приближение МЭКТ лучше описывает граничные условия на полуплоскости, МЭКТ- ΦO в некоторых случаях геометрий трехмерных задач, а также при малых размерах рассеивателя ($ka < 12$) дает лучшее совпадение с численным решением [11]. Это можно объяснить влиянием заложенной методической погрешности, а именно – тем, что в эвристических формулах (6) не заложен учет влияния “вершинных волн” (дополнительного возмущения поля вблизи концов кромок) и переотражений между кромками [2, 4, 10]. В рассматриваемой задаче дифракции на многоугольнике указанное влияние проявляется в осцилляциях численного решения [11, 12]. В данной работе имитация осцилляций проводится при помощи физоптических дифракционных коэффициентов. Поэтому не исключено, что присутствие именно этих компонентов в эвристических формулах позволит уточнить решение МЭКТ. Окончательные выводы можно будет сделать только при проведении исследований с численными решениями эталонных задач дифракции на плоском угловом секторе и на полосе.

7. ИМИТАЦИИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

В работе [11] была сделана попытка учесть влияние на рассеянное поле возмущения вблизи вершин многоугольника при помощи того же множителя, который позволил учесть это влияние в задаче дифракции на плоском угловом секторе [2, 4, 10]. Эта попытка оказалась неудачной. Бо-

лее корректным подходом является применение надежных решений эталонных задач, к которым относятся дифракция на полосе и дифракция на плоском угловом секторе.

В отсутствии таких надежных решений была проведена имитация осцилляций отношения амплитуд поляризаций при помощи добавления к дифракционным коэффициентам небольших возмущений, построенных на основе уже имеющегося набора базовых компонентов.

Дифракционные коэффициенты, имитирующие осцилляции, можно подобрать, выбирая их из набора базовых компонентов и последовательно сравнивая получающееся эвристическое решение с численным. Мы предполагаем, что осцилляции возникают в результате влияния неучтенных факторов. Поэтому одну из поляризаций будем “возмущать” при помощи малой добавки. В качестве поляризации составляющих дифракционных коэффициентов, вносящих основной вклад, возьмем g_p^0 и g_p . В качестве малой добавки возьмем g_p или f_p . В качестве коэффициента, характеризующего порядок малости добавки, введем постоянную cfg . Обозначим соответствующее приближение МЭКТ+ cfg . В итоге получим по аналогии с (11):

для МЭКТ + cfg

$$\begin{aligned} fg4TH\beta &= (1 + cfg) |g_p^0(\varphi, \varphi_0)| - cfg |g_p(\varphi, \varphi_0)|, \\ fg2TH\beta &= (1 + cfg) |g_p(\varphi, \varphi_0)| - cfg f_p(\varphi, \varphi_0), \\ fg4TE\beta &= g_p(\varphi, \varphi_0), \quad fg2TE\beta = g_p^0(\varphi, \varphi_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что при $cfg = 0$ отношение поляризаций TE/TH представляет собой постоянную величину.

Начальная комбинация дифракционных коэффициентов для имитации осцилляций в приближении МЭКТ + cfg (g, g^0), хотя и похожа, но отличается от начальных комбинаций в приближении МЭКТ (f, g) и МЭКТ- ΦO (f^0, g^0). Целью имитации осцилляций было не получить эвристическое решение в конечном виде, а лишь продемонстрировать перспективы применения МБК для уточнения приближений ΦO , ГТД и МКВ.

На рис. 7 приведены результаты имитации осцилляций по формулам (12) на идеально проводящем прямоугольнике. На рис. 7а, 7в, 7д показаны результаты численного расчета с различными значениями ka и $coeff$, на рис. 7б, 7г, 7е – результаты расчета по эвристическим формулам (12) в приближении МЭКТ + cfg при различных значениях коэффициента cfg .

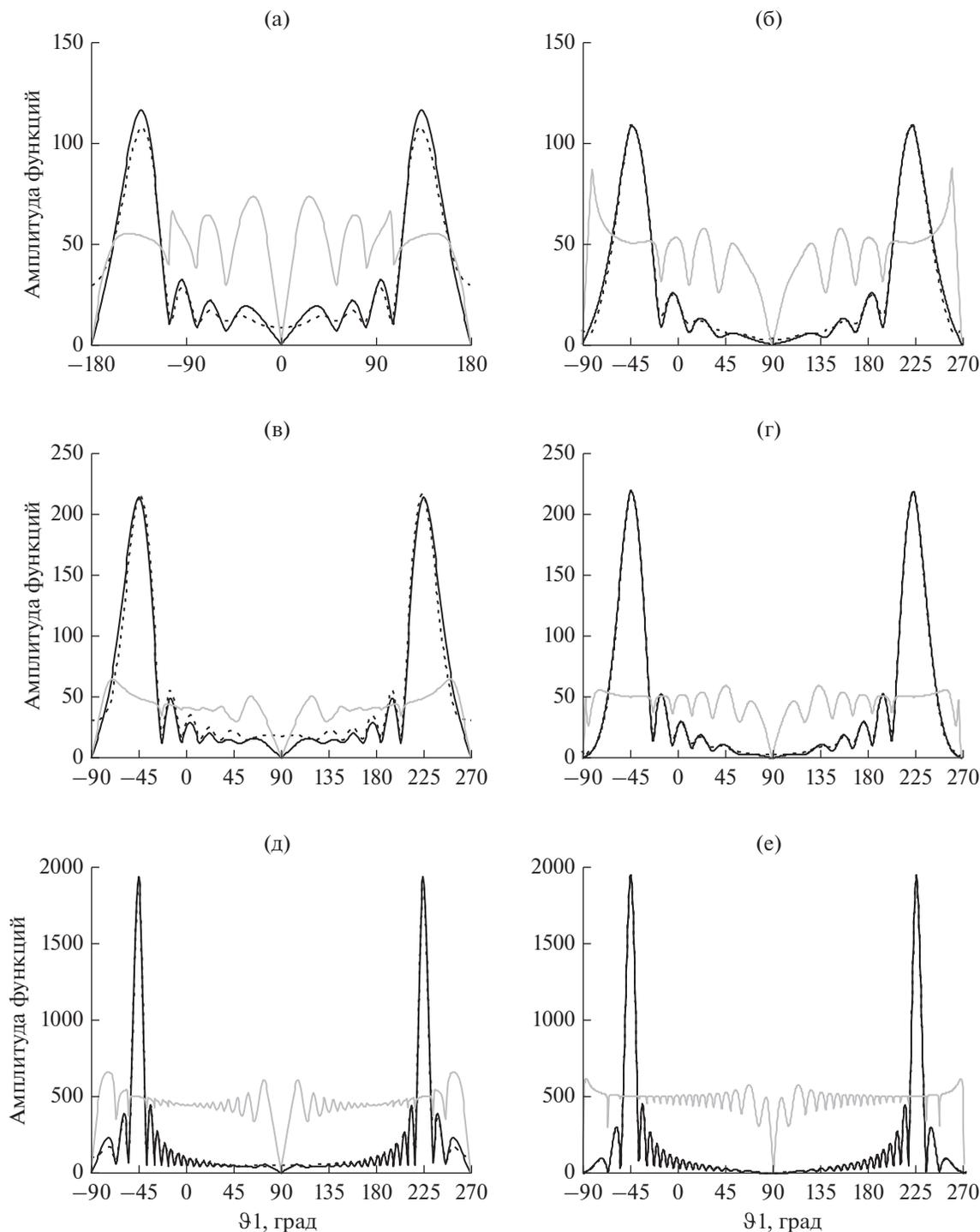


Рис. 7. Имитации осцилляций. Слева – результаты численного решения при $ka = 14$ и $coeff = 50$ (а), $ka = 20$ и $coeff = 50$ (б), $ka = 60$ и $coeff = 500$ (в). Справа – результаты эвристического решения МЭКТ + cfg (12) при cfg : 0.25 (б), 0.15 (г), 0.05 (е).

Расчеты показывают, что феноменологическая формула (12) воссоздает многие характерные особенности отношения TE/TH в численном решении. К этим особенностям относятся количество и расположение нулей диаграммы рассеяния, коли-

чество лепестков и амплитуда осцилляций. Единственное значительное отличие – это поведение отношения TE/TH вблизи нулей.

Амплитуда осцилляций зависит от значения коэффициента cfg , который мы подобрали феноме-

нологически, причем общая тенденция его поведения понятна: $cfg \sim \pi/ka$. Из этого можно сделать вывод, что область, занимаемая вблизи кромок полем, влияющим на изменение дифракционных коэффициентов, не зависит от размеров рассеивателя.

Имитация осцилляций была проведена при помощи выражений, входящих в набор базовых компонентов. Если из выражений, описывающих осцилляции, вычесть физоптику, получим краевые токи. Если вычесть МЭКТ, получим добавки, описывающие влияние вершин и переотражений. Тем не менее, данный способ получения осцилляций не является корректным.

Как уже было сказано, корректный способ исследования осцилляций — это не имитировать их, а получить при помощи уточненных эвристических формул, основанных на эталонных решениях для полубесконечных структур. Есть все основания полагать, что исследование эталонных решений на полубесконечных рассеивателях также позволит с помощью МБК построить решение с осцилляциями, но это решение будет уже более обоснованным и позволит проводить исследование процесса дифракции на более глубоком уровне.

8. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОЗДАНИЮ ПАКЕТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВЕРИФИКАЦИИ

1. Линейный интеграл по кромке рассеивателя работает хорошо, и может являться основой решения. Он отличается от физоптики с точностью до известного множителя (поляризационной составляющей физоптики). Для сверки работы линейного интеграла в эвристических формулах и в верификационном решении нужно в численном пакете предусмотреть возможность получения физоптического решения.

2. С целью отработки эвристических формул для краевых токов нужно иметь возможность получать численные решения для полубесконечных структур, таких как полуплоскость (или полупланина) и плоский угловой сектор. Для отделения друг от друга этих факторов нужно в численном пакете предусмотреть возможность получения решения на полосе.

3. С целью отделения решений в дальней зоне от решений в ближней зоне нужно в численном пакете предусмотреть возможность получения обоих соответствующих типов решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [1] и в данной статье исследованы свойства формул сингулярных дифракционных коэффициентов в трехмерной задаче дифракции электромагнитной волны на идеально проводя-

щем плоском многоугольнике при выполнении условия дальней зоны. Эти формулы очень важны как при рассмотрении тех задач, в которых они играют главную роль, так и в других задачах, где их применяют в составе более сложных формул или в модифицированном виде. На основе сингулярных дифракционных коэффициентов построены эвристические аналитические решения трехмерных задач дифракции.

Все эвристические методы позволяют существенно увеличивать быстродействие по сравнению с численными методами. Метод ФО позволяет получать точные решения вблизи границ тени, методы ГТД и МКВ позволяют получать точные решения на дифракционных конусах, метод МБК позволяет получать точные решения во всех точках пространства.

Главное преимущество МБК состоит в том, что для построения быстродействующих и точных эвристических аналитических формул метод позволяет использовать широкий спектр верификационных решений, полученных разными методами, в том числе — численными, и не требует в обязательном порядке получать новые математически строгие решения аналитических задач.

Конечной целью данной работы, а также других публикаций автора из этого цикла [1, 2, 4, 8, 10–12, 15] является обеспечение возможности построения эвристических формул, с заданной точностью описывающих решения разнообразных задач дифракции. По сравнению с численными решениями эвристические формулы обладают увеличенным быстродействием (на несколько порядков выше, в зависимости от размера рассеивателя [1]) и возможностью проведения физической интерпретации особенностей решения. Оба этих свойства эвристических формул играют ключевую роль при решении практических задач, связанных с применением теории дифракции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Весник М.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 11. С. 1052.
2. *Весник М.В.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 5. С. 573.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики, М.: Наука, 1973.
4. *Vesnik M.V.* The Method of the Generalized Eikonal. New Approaches in the Diffraction Theory. Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2015.
5. *Уфимцев П.Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
6. *Vesnik M.V., Ufimtsev P.Y.* // Electromagnetics. 1992. V. 12. № 3–4. P. 265.
7. *Vesnik M.V.* // Proc. 1995 Int. URSI Symp. on Electromagnetic Theory. St. Petersburg, May 23–26. St. Petersburg Univ., 1995. P. 407.

8. *Весник М.В.* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 62. С. 32.
9. *Klinkenbusch L.* // Proc. 2005 IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp. 3–8 Jul. N.Y.: 2005, V. 3B. P. 163.
10. *Vesnik M.V.* // Radio Sci. 2014. V. 49. № 10. P. 945.
11. *Весник М.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr17/7/text.pdf>
12. *Весник М.В., Калинин В.И.* //Сб. трудов IV Всероссий. микроволн. конф. Москва, 29 ноября–1 декабря 2017 г. М.: ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 2017. С. 114
13. *Уфимцев П.Я.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 6. С. 912.
14. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
15. *Весник М.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1103.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.87

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИК ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН ПРИ ИОНОСФЕРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

© 2020 г. А. С. Крюковский^а, *, Д. С. Лукин^а, Ю. И. Бова^а

^аАНО ВО “Российский новый университет”,
ул. Радио, 22, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kryukovsky@rambler.ru

Поступила в редакцию 07.08.2020 г.

После доработки 07.08.2020 г.

Принята к публикации 09.08.2020 г.

Выполнено математическое моделирование каустической структуры электромагнитного поля, возникающей вблизи поверхности земли при распространении радиоволн дециметрового диапазона в ионосферной плазме. Проведено сравнение каустической структуры поля обыкновенной и необыкновенной волн, а также оценено влияние необыкновенной волны на амплитудную структуру поля обыкновенной волны в окрестности каустики. Выполнено сопоставление волнового поля, вычисленного с помощью каустического приближения и неравномерного лучевого приближения. Предложена оценка максимального значения амплитуды поля в окрестности каустики на основе лучевого приближения.

DOI: 10.31857/S0033849420120128

Одним из основных инструментов, применяемых при изучении распространения радиоволн в ионосфере Земли, являются лучевые методы. При моделировании распространения коротких радиоволн лучевыми методами возникает проблема описания полей на каустиках. Каустические структуры играют особую роль по отношению к лучевым семействам, поскольку каустики являются огибающими этих семейств и разделяют физическое пространство на области с различным характером распространения [1, 2]. Необходимо также подчеркнуть, что амплитуда поля в окрестности каустики существенно возрастает.

В работе выполнен расчет структуры волнового поля в окрестности каустик обыкновенной и необыкновенной волн вблизи поверхности земли с учетом поглощения и расходимости радиосигналов в ионосферной анизотропной плазме. Влияние радиоволн, отраженных от поверхности земли, не рассматривалось.

Если пренебречь отклоняющим влиянием эффективной частоты соударений на отклонение радиоволн в ионосферной плазме, что допустимо для дециметрового диапазона, то выражение для эффективной диэлектрической проницаемости можно представить в виде [3, 4]

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (1)$$

Здесь знак “–” соответствует необыкновенной волне, а знак “+” – обыкновенной волне;

$$\nu = \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N(\vec{r})}{m_e \omega^2} \quad (2)$$

– квадрат отношения плазменной частоты к рабочей частоте,

$$u = \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{eH_0}{m_e c \omega} \right)^2 \quad (3)$$

– квадрат отношения гирочастоты к рабочей частоте.

В выражениях (2), (3) e – заряд электрона, m_e – масса электрона, c – скорость света, функция $N(\vec{r})$ – электронная концентрация в точке пространства с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$, H_0 – абсолютное значение напряженности магнитного поля Земли. В формулу (1) также входит угол α между волновым вектором \vec{k} и вектором напряженности магнитного поля Земли $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$:

$$\begin{aligned} H_{0x} &= H_0 \cos \gamma \cos \varphi, & H_{0y} &= H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \\ H_{0z} &= H_0 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

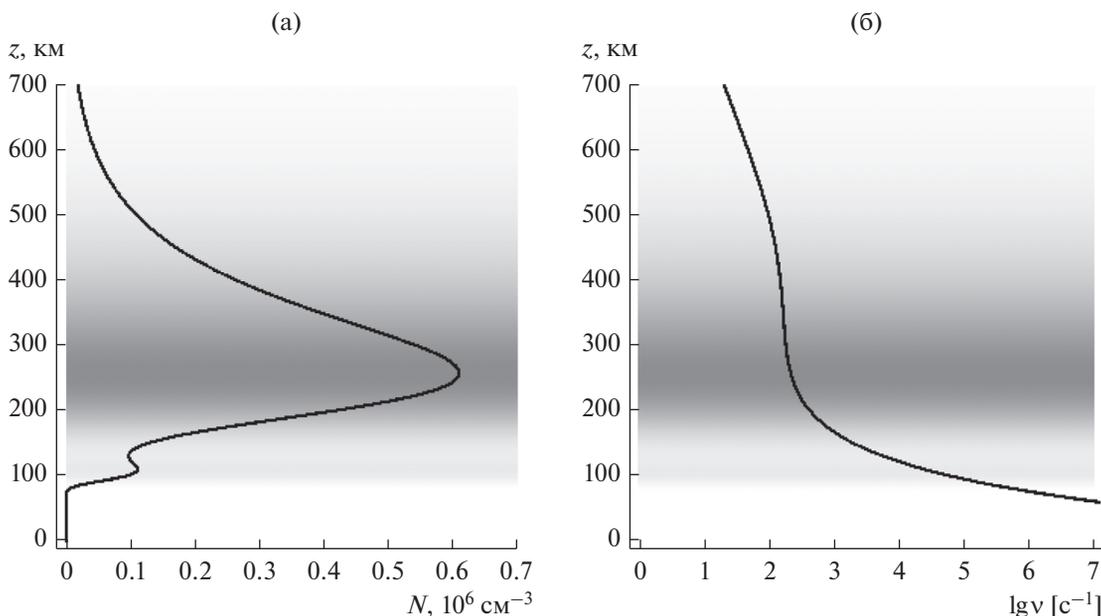


Рис. 1. Зависимость электронной концентрации (а) и эффективной частоты соударений электронов (б) от высоты.

Как видно из (4), ориентация напряженности магнитного поля определяется углами γ и φ . Легко убедиться, что для применения формулы (1) необходимо знать лишь $\cos^2 \alpha$, который определяется по следующей формуле:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (5)$$

При построении лучевых траекторий в работе был использован метод бихарактеристической системы Гамильтона–Лукина (см., например, [5–7]):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{2\vec{k}c^2 - \omega^2 \partial \epsilon / \partial \vec{k}}{\partial(\epsilon\omega^2) / \partial \omega}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\omega^2 \partial \epsilon / \partial \vec{r}}{\partial(\epsilon\omega^2) / \partial \omega}, \quad (6)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega^2 \frac{\partial \epsilon / \partial t}{\partial(\epsilon\omega^2) / \partial \omega},$$

с начальными условиями:

$$\vec{r}(\zeta, \eta, t_0) = 0, \quad k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad (7)$$

$$k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \eta.$$

В выражениях (6), (7) ζ, η – начальные углы выхода луча, \vec{r} – координаты луча, \vec{k} – волновой вектор, t – групповое время, ω – круговая частота [7, 8]. Будем считать, что $t_0 = 0$, а круговая частота ω не зависит от t .

Решением системы являются функции (характеристики):

$$\vec{r} = \vec{r}(\zeta, \eta, t_0), \quad \vec{k} = \vec{k}(\zeta, \eta, t_0). \quad (8)$$

Для вычисления электромагнитного поля в окрестности каустики использована модель среднеширотной дневной ионосферной плазмы, соответствующая марту, 40° с.ш. и 30° в.д. с постоянным магнитным полем: угол $\gamma = -57^\circ$, угол $\varphi = 90^\circ$, $H_0 = 0.465$ Э. Зависимость электронной концентрации N от высоты приведена на рис. 1а, зависимость от высоты эффективной частоты соударений электронов ν_e (см. [9]) – на рис. 1б. При расчетах предполагалось, что монохроматический источник, расположенный на поверхности земли в начале координат, излучает радиоволну с рабочей частотой $f = 9.5$ МГц в плоскости (x, z) , т.е. $\eta = 0$. В виде фона приведено распределение электронной концентрации в ионосфере. На высоте порядка 260 км расположен максимум слоя F , на высоте 120 км – максимум слоя E , а между ними межслоевая долина.

Лучевые траектории радиосигнала в плоскости (x, z) для обыкновенной и необыкновенной волн показаны на рис. 2 при угле ζ выхода лучей, меняющемся от 0 до 90° . Так же как и на рис. 1, в виде фона показано распределение электронной концентрации ионосферы.

Как на рис. 2а, так и на рис. 2б семейства лучей образуют сложные схожие каустические структуры, содержащие два каустических острия. Лучи с большими углами выхода просачиваются сквозь ионосферу, а с небольшими углами выхода отражаются от слоев E и F и возвращаются на Землю.

Верхнее каустическое острие определяется слоем F , образующим главный максимум, а нижнее каустическое острие вызвано слоем E . Со-

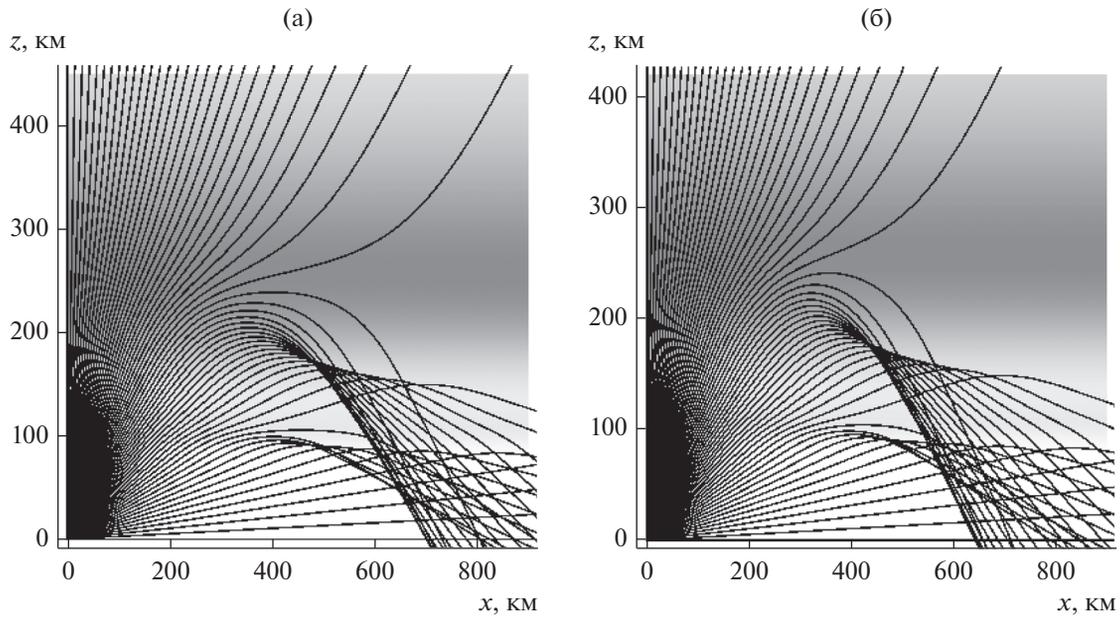


Рис. 2. Лучи в плоскости (x, z) для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

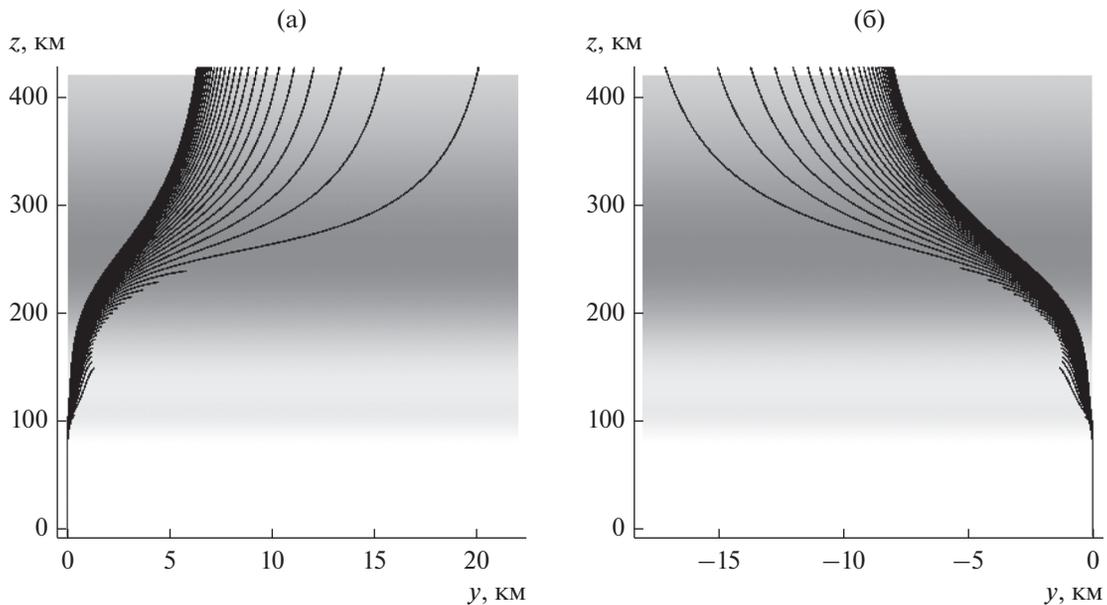


Рис. 3. Лучи в плоскости (y, z) для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

гласно классификации волновых катастроф каустическое острие – это особенность A_3 [7, 10].

Рисунки 2а, 2б очень похожи, однако, и это существенно в данной работе, первая каустика, пересекающая поверхность земли, в случае необыкновенной волны расположена ближе к источнику (642.472 км), а в случае обыкновенной волны – дальше (699.513 км).

Проекции лучевых траекторий на боковую плоскость показаны на рис. 3а, 3б. Благодаря вли-

янию магнитного поля Земли лучи выходят из плоскости первоначального распространения (x, z) . Благодаря тому что угол φ равен 90° и горизонтальные градиенты в данной модели ионосферы отсутствуют, лучи, отраженные от ионосферных слоев, после выхода из ионосферы возвращаются в плоскость первоначального распространения. Те лучи, которые прошли ионосферные слои, после выхода распространяются параллельно плоскости первоначального распространения.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля в окрестности первой каустики без учета поверхностной волны, влияние которой при выбранной частоте на расстоянии более 600 км от передатчика пренебрежимо мало. Если двигаться от источника вдоль поверхности земли, то сначала возникает каустика необыкновенной волны, которая является границей “мертвой зоны” (см. рис. 2б). Далее образуется каустика обыкновенной волны (см. рис. 2а). Каустическое поле обыкновенной волны модулирует поле необыкновенной волны, которое представлено двумя лучами: лучом, коснувшимся каустики необыкновенной волны, и лучом, не коснувшимся каустики необыкновенной волны.

Рассмотрим подробнее структуру поля и результаты численного моделирования.

Предположим, что источник излучения изотропный и создает на расстоянии r_0 электрическое поле с напряженностью E_0 . Тогда [11] получаем

$$E_0 = \frac{\sqrt{30W}}{r_0} \text{ В/м}, \quad (9)$$

где r_0 – расстояние до передатчика, W – мощность излучения. При расчетах будем считать, что $W = 1$ кВт, а $r_0 = 1$ м. Такие значения параметров выбраны для удобства вычислений. В качестве r_0 можно выбрать любое значение, однако оно должно быть меньше расстояния от источника до ионосферы. Результаты вычислений при этом не изменятся.

Сначала рассмотрим поле необыкновенной волны (x -волны). Поле необыкновенной волны, расположенное правее каустики необыкновенной волны, определяется как сумма вкладов двух лучей:

$$u_g^x \cong b_1^x \exp(i(\Phi_1^x - \pi/2)) + b_2^x \exp(i\Phi_2^x). \quad (10)$$

Первый луч (с индексом “1”) уже коснулся каустики, а второй луч (с индексом “2”) еще нет. Геооптическое (ГО) поле обыкновенной волны, возникающее в области правее каустики обыкновенной волны, тоже двухлучевое:

$$u_g^o \cong b_1^o \exp(i(\Phi_1^o - \pi/2)) + b_2^o \exp(i\Phi_2^o). \quad (11)$$

В выражениях (10), (11) амплитудные коэффициенты b_j можно представить в виде

$$b_j = E_0 \exp[-\psi_j] \sqrt{\frac{J_0}{J_j}}. \quad (12)$$

В формуле (12) J_j – это якобиан расходимости, вычисленный с помощью расширенной бихарактеристической системы Лукина [5, 9], которая

помимо первых шести уравнений (6) содержит еще 12 уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_\zeta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{2\bar{k}c^2 - \omega^2 \partial \epsilon / \partial \bar{k}}{\partial (\epsilon \omega^2) / \partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{k}_\zeta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\omega^2 \partial \epsilon / \partial \bar{r}}{\partial (\epsilon \omega^2) / \partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{r}_\eta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2\bar{k}c^2 - \omega^2 \partial \epsilon / \partial \bar{k}}{\partial (\epsilon \omega^2) / \partial \omega} \right), \\ \frac{d\bar{k}_\eta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\omega^2 \partial \epsilon / \partial \bar{r}}{\partial (\epsilon \omega^2) / \partial \omega} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} k'_{x\zeta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \\ k'_{y\zeta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \zeta \sin \eta, \\ k'_{z\zeta}(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \zeta, \\ k'_{x\eta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \zeta \sin \eta, \\ k'_{y\eta}(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \end{aligned} \quad (14)$$

$$k'_{z\eta}(0) = 0, \quad \bar{r}'_\zeta(0) = 0, \quad \bar{r}'_\eta(0) = 0.$$

Якобиан определяется по формулам [1, 9]:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\zeta & x'_\eta & V_x \\ y'_\zeta & y'_\eta & V_y \\ z'_\zeta & z'_\eta & V_z \end{vmatrix}, \quad \vec{V} = \frac{2\bar{k}c^2 - \omega^2 \partial \epsilon / \partial \bar{k}}{\partial (\epsilon \omega^2) / \partial \omega}, \quad (15)$$

$$J_0 = J|_{t=100/c}.$$

Величина J_0 – это значение якобиана расходимости, вычисленное на расстоянии r_0 от источника (15), ψ_j – поглощение, определяемое частотой соударения электронов:

$$\psi = \frac{\omega}{2} \int_0^t \epsilon_2 dt. \quad (16)$$

Приближенное выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости среды ϵ_2 имеет вид

$$\epsilon_2 \cong -\frac{\nu Z}{1 + Z^2}, \quad Z = \frac{\nu e}{\omega}. \quad (17)$$

Более точное выражение для ϵ_2 , согласно которому проводились дальнейшие вычисления, были приведено нами ранее [9].

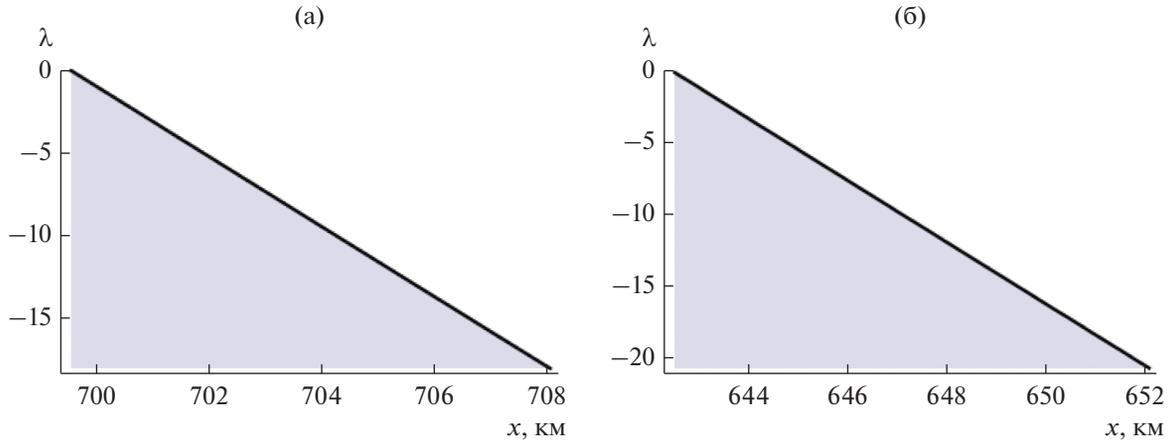


Рис. 4. Зависимость аргумента функции Эйри от расстояния x для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

Фаза Φ_j , как и поглощение, вычисляется вдоль лучевой траектории по формуле

$$\Phi = \int_0^t (k_x x' + k_y y' + k_z z') dt. \quad (18)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по групповому времени t .

На каустике якобиан J_j равен нулю. Тогда коэффициенты b_j (12), а вместе с ними решения (10) или (11) обращаются в бесконечность, что не имеет физического смысла. Поэтому поле в окрестности каустики и на самой каустике и определяется с помощью равномерной асимптотики, содержащей функцию Эйри и ее производную (см., например, [7, 12]):

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left(l_1 Ai(\lambda) - il_2 \frac{dAi(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (19)$$

где

$$Ai(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^3 + \lambda\xi)) d\xi \quad (20)$$

– функция Эйри, λ – аргумент функции Эйри, θ – фаза бегущей волны. В области света, $\lambda < 0$, пересекаются два луча. Тогда имеем

$$\theta = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \lambda = -\frac{3}{2^{4/3}} |\Phi_1 - \Phi_2|^{2/3}. \quad (21)$$

В первом приближении коэффициенты асимптотического разложения (19) l_1 и l_2 имеют вид

$$l_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (b_1 + b_2) \sqrt[4]{-3\lambda}, \quad l_2 \cong \frac{3}{2\sqrt{\pi}} (b_1 - b_2) \frac{1}{\sqrt[4]{-3\lambda}}. \quad (22)$$

Поскольку аргумент функции Эйри, коэффициенты асимптотического разложения и фаза бегущей волны выражаются через амплитуды и фазы двух лучей, пришедших в точку наблюдения, воз-

никает необходимость решения задачи “пристрелки”, т.е. вычисления с очень высокой точностью в фиксированной точке амплитуд и фаз этих лучей, пришедших по близким, но разным траекториям. Для нижних ветвей каустик, рассмотренных в настоящей работе, эта задача особенно сложна, так как лучи в окрестности каустика и сама каустика квазипараллельны.

В данной работе реализован иной алгоритм, близкий к методу интерполяционной локальной асимптотики, предложенному в [13] и до некоторой степени альтернативный классическому локальному подходу (см. [14]). На первом этапе определялось положение каустики x_c на оси x и вычислялся угол выхода луча ζ_c , образующего эту каустику. Угол ζ_c разделяет лучевое семейство в окрестности каустики на два подсемейства: подсемейство лучей, коснувшихся каустики, для которых угол $\zeta < \zeta_c$, и не коснувшихся, для которых $\zeta > \zeta_c$. Для каждого луча определялась точка его пересечения с поверхностью земли и вычислялись все необходимые параметры в этой точке (время прихода, фаза, поглощение, амплитуда и др.). Затем для каждого лучевого подсемейства с помощью метода наименьших квадратов строились интерполяционные формулы для фаз и амплитудных коэффициентов. После этого в каждой точке нетрудно вычислить параметры двух пересекающихся лучей и по приведенным выше формулам найти лучевые и каустические поля.

На рис. 4а, 4б представлены зависимости аргумента функции Эйри от расстояния вдоль поверхности земли для обыкновенной и необыкновенной волн соответственно. Из рисунков видно, что зависимость линейная. Значение $\lambda = 0$ соответствует положению каустики. Скорость изменения аргумента функции Эйри с расстоянием для обыкновенной и необыкновенной волн примерно одинаковая.

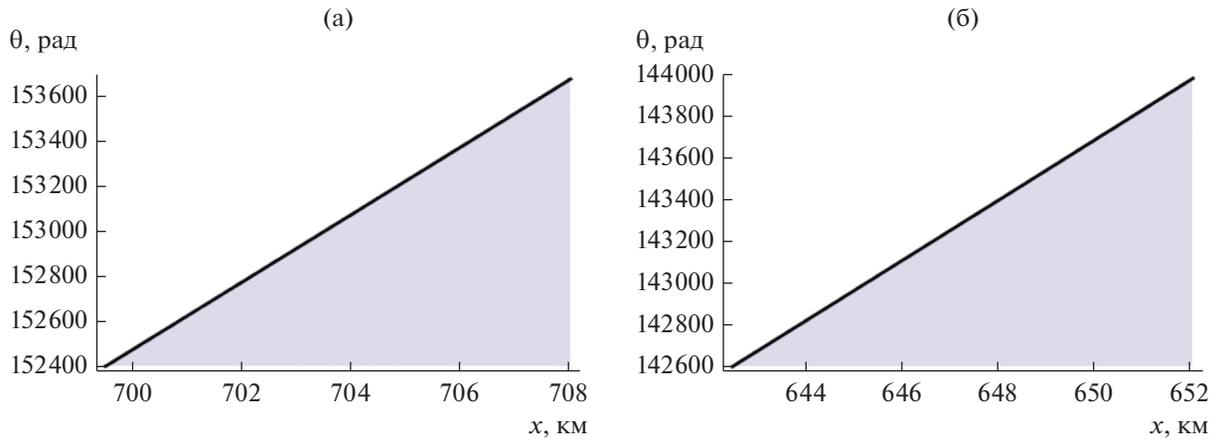


Рис. 5. Зависимость фазы бегущей волны от расстояния x для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

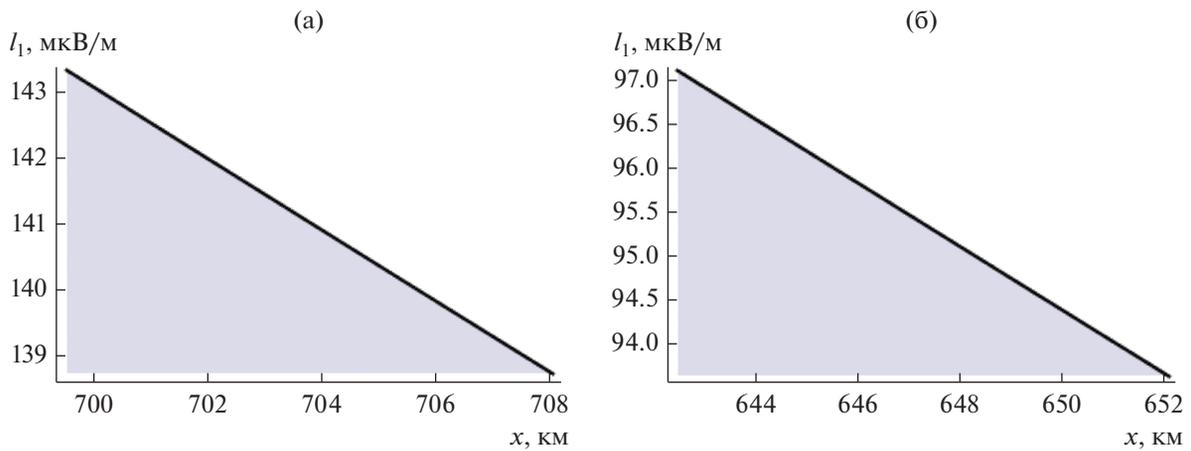


Рис. 6. Амплитудный коэффициент перед функцией Эйри для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

На рис. 5а, 5б приведены зависимости фазы бегущей волны от расстояния вдоль поверхности земли. Зависимость линейная. Как и в случае нахождения аргументов функции Эйри, при построении интерполяции методом наименьших квадратов применялся полином третьей степени. Видно, что с увеличением расстояния от источника величина фазы бегущей волны возрастает, причем в случае обыкновенной волны абсолютные значения выше, так как каустика обыкновенной волны расположена дальше от источника.

На рис. 6а, 6б приведены зависимости коэффициента асимптотического разложения I_1 от расстояния вдоль поверхности земли для обыкновенной и необыкновенной волн с учетом поглощения. Зависимость линейная. При построении интерполяции методом наименьших квадратов применялся полином второй степени, так как на данных расстояниях коэффициент меняется незначительно. Следует отметить, что коэффициент I_1 для обыкновенной

волны примерно в полтора раза больше, чем этот же коэффициент для необыкновенной волны.

На рис. 7а, 7б приведены зависимости коэффициента асимптотического разложения I_2 от расстояния вдоль поверхности земли для обыкновенной и необыкновенной волн также с учетом поглощения. Зависимость нелинейная. Следует отметить, что в отличие от коэффициента I_1 значение коэффициента I_2 примерно одинаковое как для обыкновенной, так и для необыкновенной волны. При построении интерполяции также применялся полином второй степени. Несмотря на небольшие значения, этот коэффициент играет важную роль при построении равномерной асимптотики и обеспечивает ее согласование ГО-решением.

Перейдем к описанию результатов численного моделирования полей в исследуемой области. Сначала рассмотрим лучевую асимптотику. На

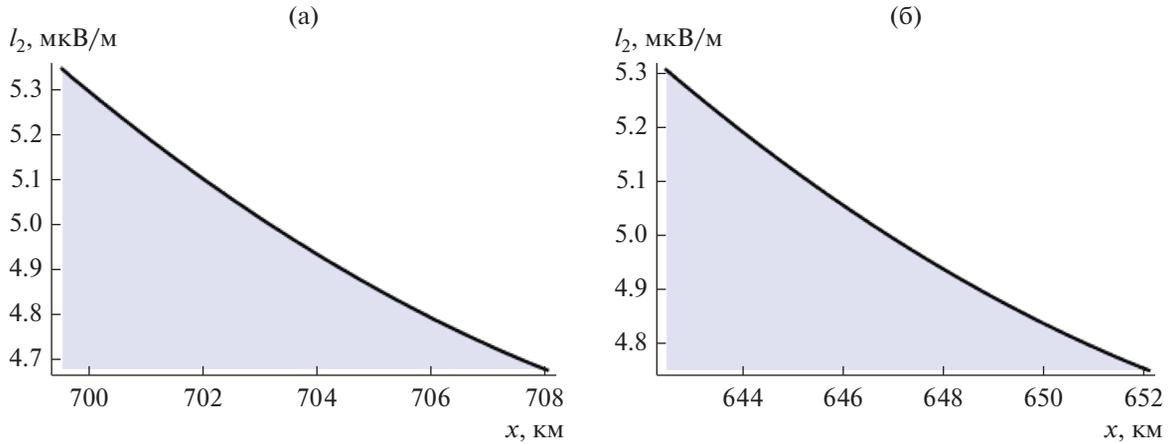


Рис. 7. Амплитудный коэффициент перед производной функции Эйри для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

рис. 8 представлены амплитуды лучей. Точками на горизонтальной оси на этом и последующих рисунках отмечены положения каустик необыкновенной (слева) и обыкновенной волн (справа). Верхние кривые соответствуют амплитудам волнового поля без учета поглощения, а нижние — с учетом поглощения. Пунктиром показаны амплитуды лучей, уже коснувшихся каустики, а сплошной линией — не коснувшихся. Видно, что амплитуды лучей, коснувшихся каустики, больше. Как и следовало ожидать, при приближении к каустике амплитуды лучей в ГО-приближении стремятся к бесконечности. Левая группа кривых со-

ответствует необыкновенной волне, а правая обыкновенной.

На рис. 9а, 9б представлены амплитуды поля обыкновенной и необыкновенной волн в окрестности каустики. Пунктиром показано ГО-приближение для обыкновенной волны (11) (см. рис. 9а) и необыкновенной волны (10) (см. рис. 9б). Сплошной линией показано каустические решения с соответствующими параметрами, вычисленные по формулам (19) с помощью функции Эйри и ее производной. Верхние кривые отвечают расчетам, в которых не учтено поглощение (16), а нижние — расчетам с учетом поглощения.

Из рисунков следует, что максимальное значение амплитуды смещено в область света относительно положения каустики, отмеченного точкой. На каустике значения амплитуды поля близки к средним значениям амплитуды в области света. Как и следовало ожидать из анализа коэффициентов I_1 , максимальное значение поля с учетом поглощения (нижние кривые, несколько больше в случае обыкновенной волны. Осцилляции амплитуды составляют порядка 1 км и имеют тенденцию к уменьшению при удалении от источника.

На рис. 9а, 9б сопоставлены амплитуды поля на каустике, вычисленные с помощью равномерной асимптотики (19) и лучевых (ГО) приближений (10) и (11). ГО-приближение в области света очень хорошо совпадает с равномерной (каустической) асимптотикой вплоть до склона главного максимума амплитуды поля. Поэтому, как видно из рисунков, достаточно определить, где кривая образует точку перегиба, прежде чем уходить на бесконечность, и это значение использовать для оценки с помощью ГО-приближения максимального значения амплитуды поля в окрестности каустики.

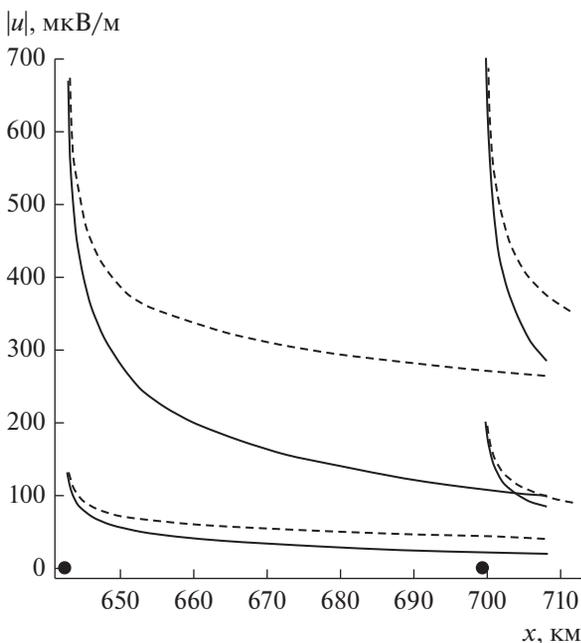


Рис. 8. Амплитуды ГО лучей: черные точки — положения каустик.

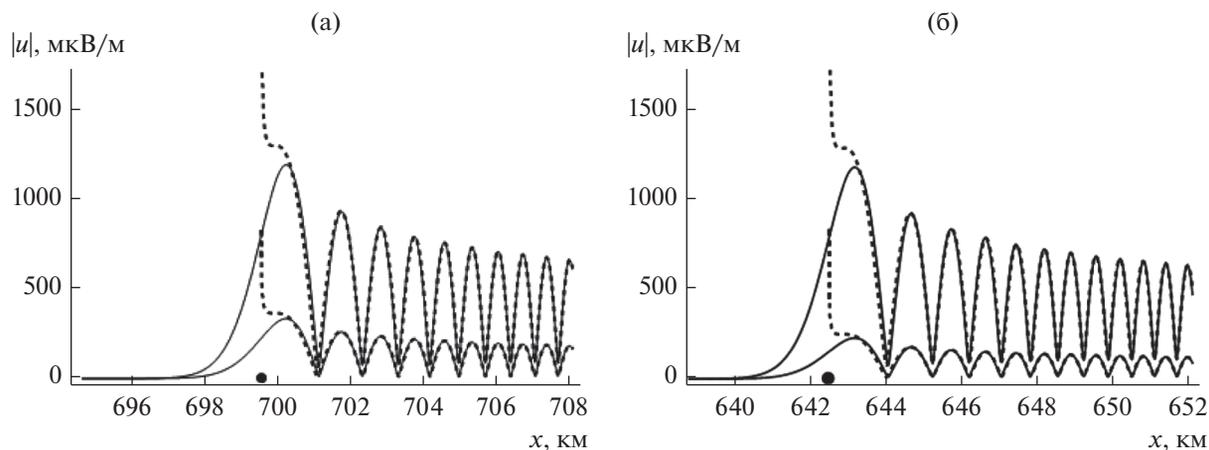


Рис. 9. Амплитуда волнового поля в окрестности каустики для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

На рис. 10а, 10б показаны амплитуды поля необыкновенной волны (слева) и обыкновенной волны (справа) вдоль поверхности земли на всем исследуемом диапазоне. Рисунок 10а соответствует случаю, когда поглощение не учитывается, а рис. 10б — с учетом поглощения. Сплошной линией по-прежнему показана равномерная асимптотика, а пунктирной — ГО-приближение.

Из анализа и сопоставления рисунков следует, что, во-первых, в случае, когда поглощение не учитывается, амплитуды поля обыкновенной и необыкновенной волн в окрестности каустики сильно не отличаются. Во-вторых, при учете поглощения амплитуда поля в окрестности каустики существенно меньше для обыкновенной волны, чем для необыкновенной. В-третьих, при удалении от каустики период осцилляций сокращается, максимальные значения амплитуды поля необыкновенной волны существенно уменьшаются, а минимальные увеличиваются, так что в целом уменьшается размах осцилляций.

На рис. 11а, 11б показаны амплитуды суммарного поля необыкновенной и обыкновенной волн в окрестности каустики обыкновенной волны без поглощения и с поглощением, без учета результатов вращения вектора поляризации. Пунктиром показано ГО-приближение, а сплошной линией — суммарное поле. Несмотря на сделанные приближения, анализ рисунков позволяет оценить влияние необыкновенной волны в окрестности каустики обыкновенной волны в случае сохранения когерентности. В левой части рисунков видны регулярные осцилляции, это — двухлучевое поле необыкновенной волны. Далее идет каустика. В случае без поглощения (см. рис. 11а) главный максимум сильно изрезан и сопоставим с соседними вершинами.

В случае с поглощением (см. рис. 11б) классическая структура амплитуды поля в окрестности каустики хорошо сохраняется и можно по послед-

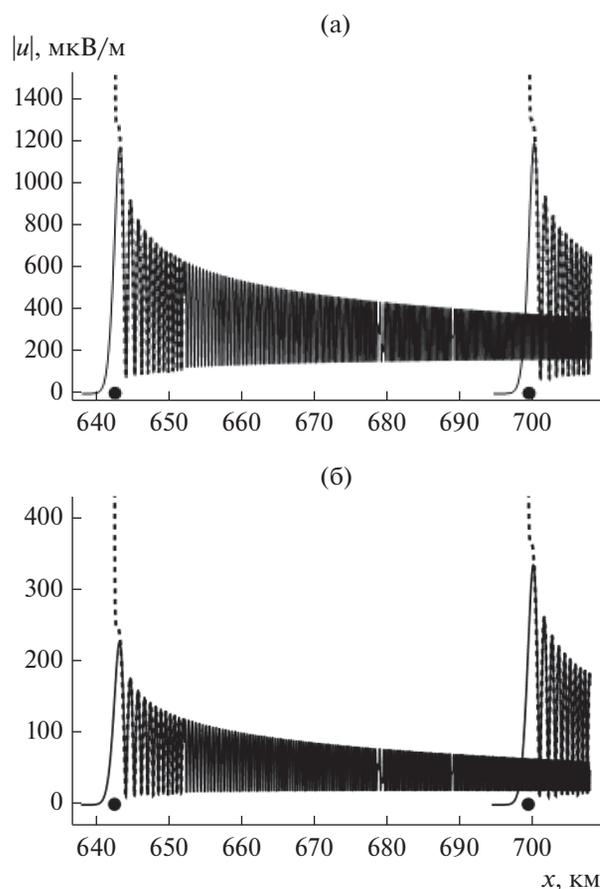


Рис. 10. Амплитуды поля необыкновенной и обыкновенной волн без учета поглощения (а) и с учетом поглощения (б).

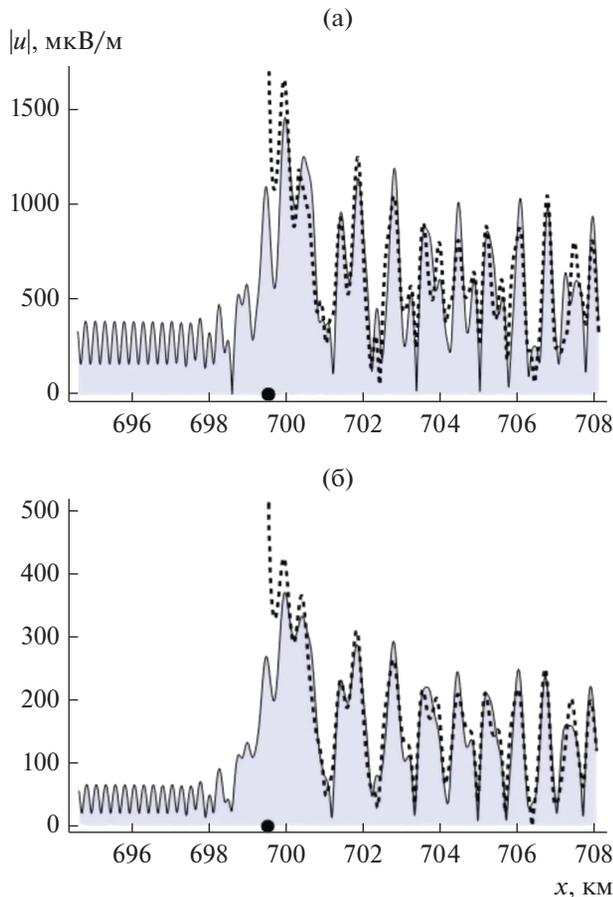


Рис. 11. Амплитуды суммарного поля необыкновенной и обыкновенной волн без учета поглощения (а) и с учетом поглощения (б) в окрестности каустики.

нему минимуму ГО судить о максимальном значении амплитуды поля в окрестности каустики.

На рис. 12 сопоставлены амплитуда модуля напряженности электрического поля обыкновенной и необыкновенной волн с учетом поглощения (нижняя тонкая линия с затенением) и без учета поглощения (толстая линия). Видно, что структуры амплитуды поля с учетом поглощения и без учета поглощения качественно совпадают, однако абсолютные значения отличаются не менее чем в три раза, хотя есть и существенные отличия, связанные с различным влиянием поглощения на обыкновенную и необыкновенную волны.

Таким образом, в работе исследована структура поля электромагнитной волны, распространяющейся в ионосферной плазме, в окрестности каустики, возникающей вблизи поверхности земли с учетом магнитного поля. Выполнено сравнение каустической структуры поля обыкновенной и необыкновенной волн, а также оценено влияние необыкновенной волны на амплитудную

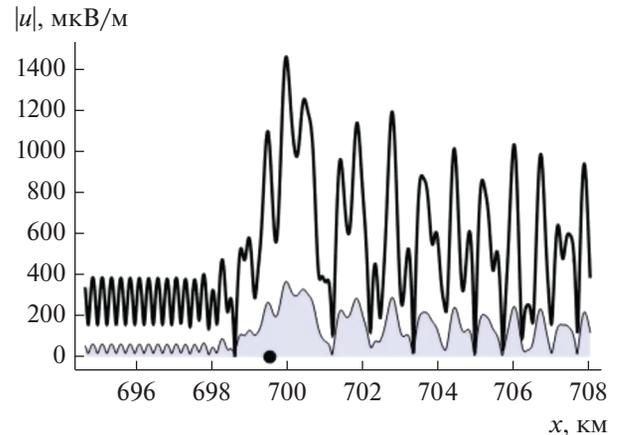


Рис. 12. Амплитуды поля необыкновенной и обыкновенной волн с учетом поглощения (нижняя тонкая линия с затенением) и без учета поглощения (толстая линия) в окрестности каустики.

структуру поля обыкновенной волны в окрестности каустики. Проведено сопоставление волнового поля, вычисленного с помощью равномерного (каустического) приближения и неравномерного (лучевого, ГО) решения. Показано, как максимальное значение амплитуды поля в окрестности каустики можно оценить по ГО приближению, не прибегая к равномерным асимптотикам, найдя положение точки перегиба (или последний минимум) непосредственно перед переходом к неограниченному росту на графике амплитуды лучевого решения. Отметим, что в случае наличия в ионосфере внутренних гравитационных волн или в результате суточных изменений структуры ионосферы наблюдатель на поверхности земли будет регистрировать изменения поля во времени в виде замираний и усиления амплитуды в окрестности мертвой зоны.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00299).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С. и др. // РЭ. 2014. Т. 59. № 12. С. 1180.*
2. *Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2003. Т. 48. № 8. С. 912.*
3. *Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматлит, 1960.*
4. *Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973.*
5. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 1028.*

6. *Кирьянова К.С., Крюковский А.С.* // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2012. № 11. С. 25.
7. *Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982.
8. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 10. С. 1001.
9. *Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 3.
10. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* // РЭ. 1981. Т. 26. № 6. С. 1121.
11. *Поляков В.Т.* Волновая теория методов дистанционного зондирования. М.: МИИГАиК, 1981.
12. *Кравцов Ю.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 4. С. 664.
13. *Карепов С.Л., Крюковский А.С.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 1. С. 40.
14. *Крюковский А.С.* // РЭ. 1996. Т. 41. № 1. С. 59.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874

К РАСЧЕТУ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ КВАДРАТОВ

© 2020 г. В. И. Пономаренко^а, *, И. М. Лагунов^а

^аКрымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. Акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007 Российская Федерация

*E-mail: vponom@gmail.com

Поступила в редакцию 14.01.2020 г.

После доработки 22.03.2020 г.

Принята к публикации 31.03.2020 г.

Показана применимость к расчету структур с плоскими идеальными решетками метода решения задачи дифракции на резистивных решетках, основанного на решении задачи возбуждения канала Флоке токовыми элементами. Получена формула квазистатического приближения для эффективной диэлектрической проницаемости плоской однослойной решетки на основе идеально проводящих квадратов. Проведены сравнительные расчеты коэффициента отражения дифракционным и квазистатическим методами для однослойных и двухслойных решеток с диэлектрическими слоями.

DOI: 10.31857/S0033849420110133

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционные решетки на основе идеально проводящих элементов используются в качестве частотно-селективных поверхностей в антенной и измерительной технике, в оптических и квазиоптических волномерах и интерферометрах и в других областях техники [1, 2]. Проектирование устройств с решетками основывается на решении задач дифракции на периодических структурах такими методами, как метод задачи Римана–Гильберта, метод Галеркина, метод интегральных уравнений [1–5]. В плане расширения возможности оптимального выбора метода анализа структур с решетками актуальной является разработка новых подходов. Одной из целей данной работы является распространение на идеальные решетки метода анализа резистивных решеток, основанного на решении задачи возбуждения канала Флоке элементарными токами [6–8].

Длительность расчетного времени при использовании дифракционных методов анализа решеток обусловлена необходимостью решения систем с большим числом уравнений и неизвестных. Это обстоятельство затрудняет решение задач оптимизации свойств решеток, поскольку решение обратной задачи основывается на многократном решении прямой задачи дифракции с варьированием параметров решетки [9]. В связи с этим остаются актуальными более простые приближенные подходы к расчету решеточных структур [10–12]. Их применение в ряде случаев снимает необходимость исследования структур дифракционными методами, а также позволяет выбрать начальные приближения при решении задач оп-

тимизации. Второй целью данной работы является обоснование приближенного метода анализа в длинноволновой области плоских решеток с квадратными элементами, основанного на сопоставлении решетке предельно тонкого диэлектрического однородного слоя.

1. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ РЕШЕТКИ

На рис. 1 изображена плоская решетка из предельно тонких резистивных квадратов со стороной $2s$ и поверхностным сопротивлением ρ . Полупериоды решетки по осям x , y равны b_x и b_y . Зазоры τ_x , τ_y между соседними квадратами в “лентах” L1 и L2 равны соответственно $2(b_x - s)$ и $2(b_y - s)$. Окружающее решетку пространство имеет относительную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}$. Однородное внешнее электрическое поле, в которое помещена решетка, направлено вдоль оси y и зависит от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где ω – циклическая частота, $i^2 = -1$.

При $b_x = s$ решетка, изображенная на рис. 1, переходит в однородную вдоль оси x решетку из лент L1 без зазоров между квадратами. Такой ленточной решетке соответствует эффективное поверхностное сопротивление (импеданс) $\tilde{\rho}_{\text{эф}}$, вычисляемое по формуле [12]

$$\tilde{\rho}_{\text{эф}} = \frac{i\pi}{\omega b_y \epsilon_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2) \ln(2/K)}, \quad K = \sin \frac{\pi s}{2b_y}, \quad (1)$$

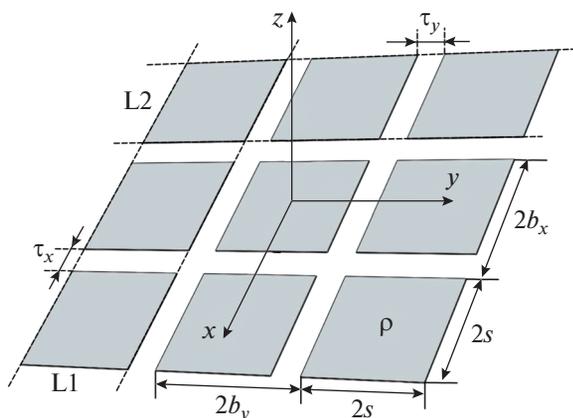


Рис. 1. Плоская решетка из резистивных квадратов.

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ_1, ϵ_2 – проницаемости сред, на границе которых расположена решетка. Отметим, что формула (1) является частным случаем более общей формулы для импеданса решетки из резистивных лент, полученной и примененной в [13–15].

Пусть $b_x \neq s$, т.е. “лента” L1 составлена из квадратов, разделенных зазорами шириной $\tau_x = 2(b_x - s)$. Рассматривая решетку как состоящую из “лент” L2 с эффективным поверхностным сопротивлением (1), разделенных зазорами шириной τ_x , применим аналогично [6, 16] формулу теории цепей:

$$\rho_{\text{эф}} = \frac{b_x}{s} \tilde{\rho}_{\text{эф}}, \quad (2)$$

где $\rho_{\text{эф}}$ – эффективное поверхностное сопротивление решетки из прямоугольных ячеек с размерами $2b_x, 2b_y$, содержащих идеально проводящие квадраты со стороной $2s$.

Пусть ячейки квадратные, $b_x = b_y = b$. Рассматриваемой плоской решетке можно сопоставить предельно тонкий, по сравнению с длиной

волны и геометрическими размерами, слой толщиной τ с эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{эф}}$, используя для этого соотношение [17]:

$$\epsilon_{\text{эф}} = i / (\omega \tau \epsilon_0 \rho_{\text{эф}}). \quad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3) и полагая $b_x = b_y = b$, получим для структуры с квадратными ячейками:

$$\epsilon_{\text{эф}} = \frac{s(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\pi} \ln \frac{2}{K}. \quad (4)$$

Как следует из (4), при вещественном $\tilde{\epsilon}$, не зависящем от частоты, сопоставляемый решетке диэлектрический слой является, как и следовало ожидать, недиспергирующим.

Отметим, что приближенный расчет коэффициента отражения (КО) многослойных структур, содержащих решетки, можно проводить методом импедансов с применением формулы (2). Однако при использовании матричного метода более удобна трактовка решеток как предельно тонких слоев с диэлектрической проницаемостью (4).

2. ДИФРАКЦИОННО-КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ И ДИФРАКЦИОННЫЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Расчет коэффициента отражения по амплитуде (КО) нормально падающей электромагнитной волны проводился для структур из лент и структур с квадратными ячейками с одной решеткой (рис. 2а) и двумя одинаковыми решетками (рис. 2б), содержащих диэлектрические слои с проницаемостями $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon$ и толщинами d_1, d_2, d . Над структурами и под ними находятся полупространства с диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon} = 1$. Ленточные структуры бесконечны по оси y и имеют период $P = 2b$ по оси x . Структуры на основе квадратных ячеек имеют период $P = 2b$ как по оси x , так и по оси y . Размер элементов равен $2s$. В случае ленточных решеток электрический вектор падающей волны нормален оси y , парал-

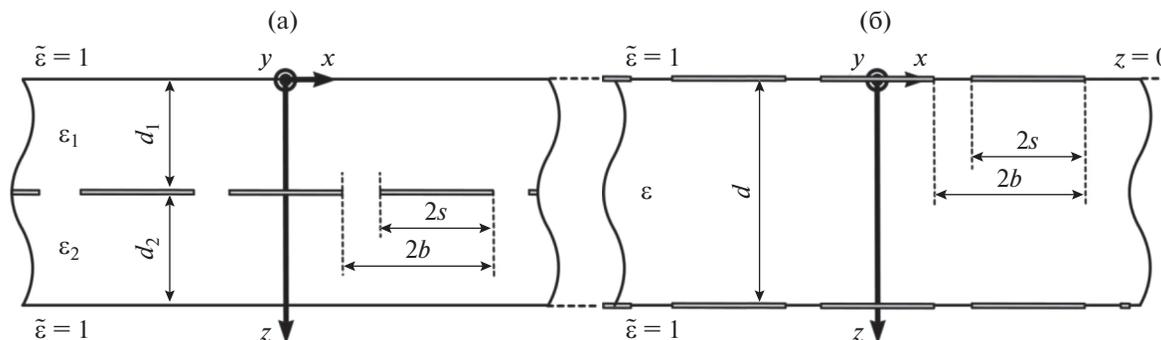


Рис. 2. Структуры с одной и двумя решетками и диэлектрическими слоями.

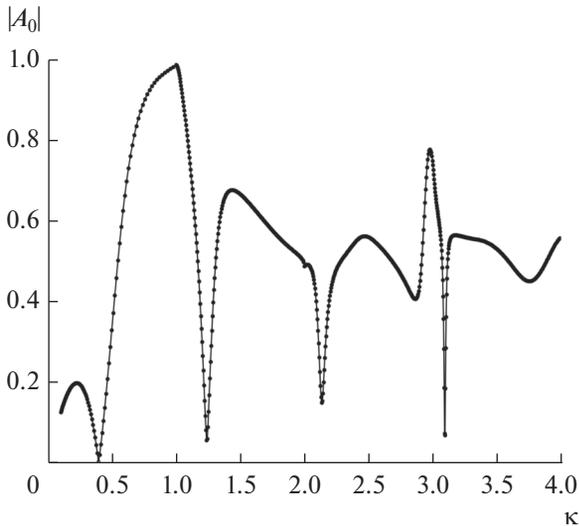


Рис. 3. Зависимость амплитуды основной моды отраженной волны от обратной относительной длины волны для двухслойной ленточной решетки при $\epsilon = 1$, $d = P/2$, $s = P/4$.

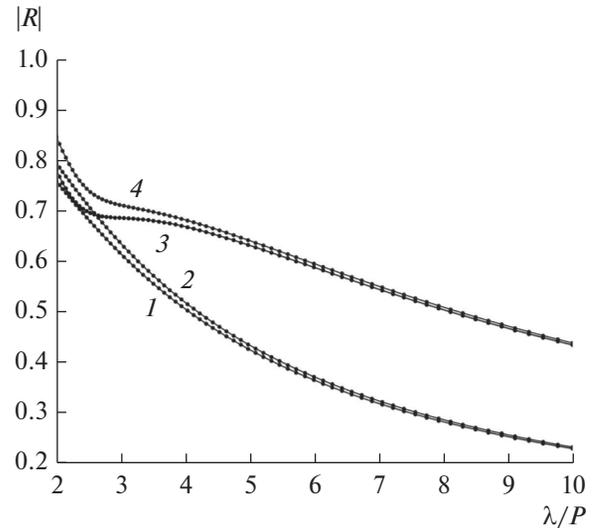


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения от относительной длины волны для однослойных ленточных решеток, $s = 0.4P$, при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ (кривые 1, 2) и при $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 1$, $d_1 = P/2$ (кривые 3, 4), полученные методом ДКМ (кривые 1, 3) и методом МТЭ (кривые 2, 4).

лельной лентам. Что касается структур с квадратными ячейками, то они поляризационно независимы.

Решение задачи дифракции проводилось методом, примененным в [6–8] к структурам с резистивными проводниками, диполями и квадратами, при этом в отличие от [6] поверхностное сопротивление квадратов полагалось равным нулю. Метод заключается в решении задачи возбуждения канала Флоке токами малых элементов, на которые разделяются большие элементы, какими в данной работе служат ленты и квадраты. Число разбиений на малые элементы и число учитываемых гармоник канала Флоке выбиралось так, чтобы точность вычисления КО по амплитуде составляла 0.01. Метод можно назвать методом токовых элементов (МТЭ).

Приближенный метод расчета КО, который можно охарактеризовать как дифракционно-квазистатический (ДКМ), основан на замене решеток сплошными слоями-пленками с диэлектрической проницаемостью (4) с последующим вычислением КО от многослойной структуры матричным методом [18]. Как показали расчеты, результат не зависит от толщины τ , если выбрать ее на два порядка меньше наименьшего геометрического размера структуры и длины волны.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Поскольку метод МТЭ ранее применялся лишь к решеткам с резистивными элементами, была проведена проверка его применимости в

случае решеток с идеально проводящими элементами. Для двухслойной ленточной решетки (см. рис. 2) была рассчитана по МТЭ зависимость модуля амплитуды $|A_0|$ основной моды отраженной волны от отношения $k = P/\lambda$, где λ – длина волны. Сравнение этой зависимости, изображенной на рис. 3, с аналогичной зависимостью, полученной методом задачи Римана–Гильберта и приведенной в [1, рис. 18], показывает их совпадение с такой точностью, о которой можно судить из сравнения графиков.

На рис. 4–8 приведены зависимости КО от отношения длины волны к периоду структуры для ленточных решеток и решеток на основе квадратных элементов, с диэлектрическими слоями и без них, полученные как в приближении ДКМ с использованием формулы (4) (кривые 1, 3), так и из решения задачи дифракции методом МТЭ (кривые 2, 4). Из рисунков видно, что простой, по сравнению с дифракционным подходом, метод ДКМ позволяет приближенно вычислять КО при длинах волн, в два и более раз превосходящих период ленточной решетки и в четыре и более раз превосходящих период решетки на основе квадратных элементов. Абсолютная погрешность вычисления КО при $\lambda \rightarrow 10P$ приближается к нулю для ленточных структур и составляет приблизительно 0.05 для структур с квадратными элементами. Вблизи резонансных минимумов погрешность вычисления КО возрастает, однако положение ре-

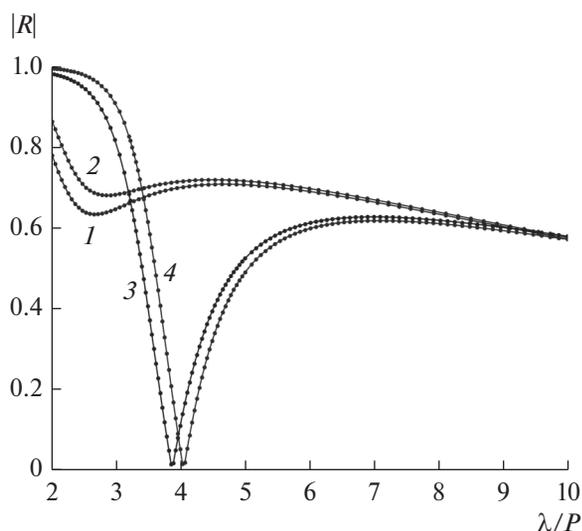


Рис. 5. Зависимости коэффициента отражения от относительной длины волны однослойной ленточной решетки при $s = 0.4P$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2$, $d_1 = d_2 = P/2$ (кривые 1, 2) и двухслойной ленточной решетки при $s = 0.4P$, $\epsilon = 2$, $d = P/2$ (кривые 3, 4), полученные методом ДКМ (кривые 1, 3) и методом МТЭ (кривые 2, 4).

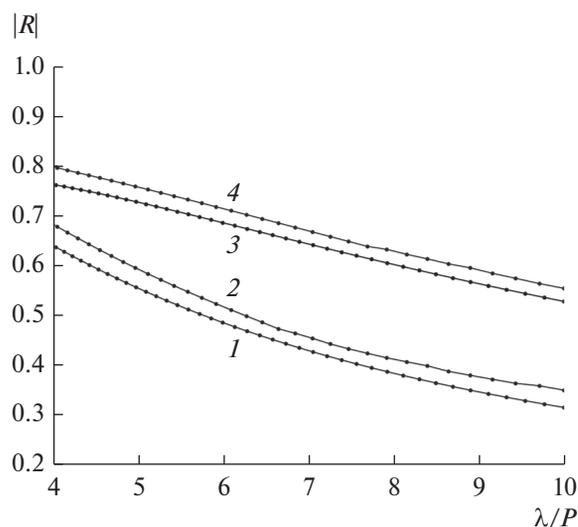


Рис. 6. Зависимости коэффициента отражения от относительной длины волны однослойных решеток с квадратными ячейками, $s = 0.45P$, при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ (кривые 1, 2) и при $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 1$, $d_1 = P/2$ (кривые 3, 4), полученные методом ДКМ (кривые 1, 3) и методом МТЭ (кривые 2, 4).

зонансных частот определяется с относительной точностью около 5%.

При длинах волн, превосходящих период решеток, канал Флоке является одномодовым волноводом. Поскольку идеальные решетки не поглощают энергию электромагнитного поля, в одномодовом канале Флоке коэффициент прохождения по амплитуде выражается через КО из условия равенства суммы квадратов этих коэффициентов единице. Таким образом, приведенные на рис. 5–8 значения КО по амплитуде могут быть пересчитаны в значения коэффициента прохождения.

4. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

В [11] получены в квазистатическом приближении индуктивные поправки L_x и L_y к емкостному импедансу (1):

$$Z = \rho_{эф} + L_x + L_y. \tag{5}$$

Точность формулы (5) проверена путем сравнения с дифракционным расчетом при малых значениях отношения ширины зазоров между квадратами к периоду, $(b - s)/b \leq 0.05$. Показано, что учет поправок L_x , L_y позволяет повысить точность квазистатического приближения, а также что применение вместо (5) формулы

$$Z = \rho_{эф} + \frac{1}{2}(L_x + L_y) \tag{6}$$

позволяет улучшить точность. Уменьшение вдвое индуктивной части импеданса, некорректно трактуемое как усреднение, в [11] не обосновано. Поэтому число “2” в знаменателе формулы (6) следует рассматривать как подгоночный параметр, при-

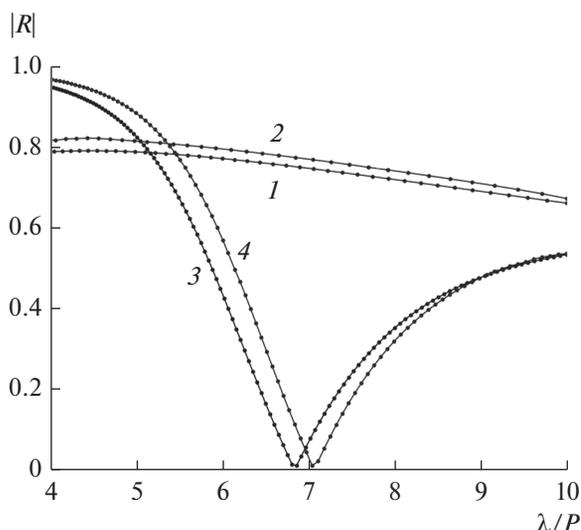


Рис. 7. Зависимости коэффициента отражения от относительной длины волны однослойной решетки с квадратными ячейками при $s = 0.45P$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2$, $d_1 = d_2 = P/2$ (кривые 1, 2) и двухслойной решетки с квадратными ячейками при $s = 0.45P$, $\epsilon = 2$, $d = P/2$ (кривые 3, 4), полученные методом ДКМ (кривые 1, 3) и методом МТЭ (кривые 2, 4).

Таблица 1. Значения КО по амплитуде на разных частотах для решеток с квадратными ячейками с периодом 3 мм

Частота, Гц	Для стороны квадрата							
	$2s = 2.85$ мм				$2s = 2.7$ мм			
	Д	Б	А	П	Д	Б	А	П
1	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
10	0.62	0.56	0.54	0.59	0.45	0.45	0.41	0.46
20	0.81	0.82	0.78	0.81	0.69	0.72	0.65	0.70
30	0.90	0.93	0.88	0.90	0.83	0.87	0.79	0.83
40	0.95	0.97	0.93	0.94	0.91	0.95	0.86	0.89
50	0.97	0.99	0.95	0.96	0.94	0.98	0.90	0.92

Примечание. Введены следующие сокращения: Д – значения, полученные из решения задачи дифракции; Б – значения, вычисленные с применением формулы (5), в которую подставлялись полученные в [11] выражения для компонент импеданса L_x, L_y ; А – значения, вычисленные с применением формулы (4); П – результаты расчетов при $p = 0.87$.

менимость которого показана лишь при весьма малых зазорах между квадратами и лишь в случае, когда решетка лежит между полупространствами с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = 2$. В связи с этим расчеты с применением формулы (4) сравниваются ниже с результатами применения формулы (5), не содержащей подгоночного параметра.

Сравнительные расчеты КО по амплитуде проводились для двух решеток, период которых, как и в [11], $2b = 3$ мм и которые расположены на границе полупространств с проницаемостями $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = 2$. Результаты расчетов КО на разных частотах приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что точность расчета КО с применением формулы (4) и формулы (5) в среднем близка.

Для перехода от ленточной решетки к решетке из квадратов можно вместо умножения импеданса (1) на отношение b/s умножить его на величину $p(b/s)$, где p – подгоночный параметр, близкий к единице. Величину $p(b/s)$ при $p \neq 1$ можно назвать эффективным отношением периода к размеру квадратов. Результаты расчетов при $p = 0.87$ также приведены в табл. 1. Видно, что введение подгоночного параметра существенно повысило точность вычислений. Однако, по нашему мнению, введение подгоночного параметра целесообразно лишь в случае, если этот параметр достаточно универсален, чего нельзя сказать как о параметре p , так и о примененном в [11] уменьшении вдвое индуктивной компоненты импеданса. В связи с этим представленные в разд. 3 расчеты проводились без использования подгоночного параметра. Отметим, что для параметра p , по-видимому, возможно построить на основе достаточно большого числа дифракционных расчетов аппроксимационную формулу, аналогичную полученным для некоторых решеток в [5]. Это позволило бы при-

менять подгоночный параметр при расчете решеток с разными размерами квадратов и зазоров между ними, а также с разными значениями диэлектрической проницаемости сред, окружающих решетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сравнения с методом задачи Римана–Гильберта показана применимость к расчету идеальных решеток метода токовых элементов, ранее применявшегося для анализа резистивных решеток.

Плоской решетке с прямоугольными ячейками, содержащей квадратные идеально проводящие элементы, сопоставлен предельно тонкий однородный слой и получено в квазистатическом приближении выражение для его эффективной диэлектрической проницаемости. Проведено сравнение результатов расчетов с известными, относящимися к малым зазорам между квадратными проводниками, и показано, что поправка к емкостному импедансу ленточной решетки в виде множителя, соответствующего теории цепей, обеспечивает практически такую же точность расчета отражения от решетки из квадратов, что и введение индуктивных поправок к импедансу.

На основе сравнения расчетов КО дифракционным методом с расчетами дифракционно-квазистатическим методом показана степень точности последнего для структур с ленточными и квадратными элементами, содержащих слои диэлектрика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопалов В.П., Литвиенко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1973.

2. *Казьмин И.А.* Дифракция электромагнитных волн на планарных мультрезонансных частотно-селективных поверхностях с элементами канонической формы. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2008. 20 с.
3. *Dickie R., Cahill R., Gamble H.S. et al.* // Proc IEE Microwaves Antennas and Propagation. 2004. V. 151. № 1. P. 31.
4. *Lerer A.M., Zelenchuk D.E., Makhno V.V. et al.* // Proc. 1st Int. Congr. on Advanced Electromagnetic Matenals in Microwaves and Optics "Metamaterials–2007". Rome, 2007. P. 750.
5. *Банков С.Е.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 4. С. 301.
6. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 440.
7. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* Композиционные материалы: разработка и применение. Новосибирск: Изд. АНС "СибАК", 2017. С. 112.
8. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 657.
9. *Sadiku Matthew N.O.* Numerical Techniques in Electromagnetics. L.: CRC Press LLC, 2001.
10. *Нефедов Е.И., Сивов А.Н.* Электродинамика периодических структур. М.: Наука, 1977.
11. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В., Волков Н.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 7. С. 666.
12. *Al-Joutayly M.A., Behdad N.* // IEEE Trans. 2010. V. AP-58. № 12. P. 4030.
13. *Пономаренко В.И.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1982. № 5. С. 518.
14. *Пономаренко В.И., Мировицкий Д.И., Будагян И.Ф.* // Радиотехника. 1984. Т. 39. № 11. С. 68.
15. *Пономаренко В.И., Журавлев С.И.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 5. С. 812.
16. *Казанцев Ю.Н., Бабаян В.А., Казанцева Н.Е. и др.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 3. С. 264.
17. *Слуцкая В.В.* Тонкие пленки в технике СВЧ. М.: Госэнергоиздат, 1962.
18. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Мир, 1970.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.372

О СЕЛЕКТИВНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ВОЛН КРУГЛОГО ОТКРЫТОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

© 2020 г. В. А. Малахов^а, А. С. Нечаев^{а, б}, А. А. Никитин^б, А. С. Раевский^{а, *}, С. Б. Раевский^а

^аНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

^бФилиал Российского Федерального ядерного центра-Всероссийского научно-исследовательского института
экспериментальной физики Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова,
ул. Троицына 47, Нижний Новгород, 603137 Российская Федерация

*E-mail: raevsky@nntu.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

После доработки 26.12.2019 г.

Принята к публикации 21.01.2020 г.

На примере вытекающей волны E_{01} приведены результаты экспериментального исследования селективного возбуждения несобственных волн и вытекающей волны круглого открытого диэлектрического волновода.

DOI: 10.31857/S0033849420110121

Круглый открытый диэлектрический волновод (ОДВ) является одной из широко используемых открытых электродинамических направляющих структур СВЧ- и КВЧ-диапазонов волн. В большинстве работ, посвященных его исследованию, он рассматривался в основном как структура, направляющая поверхностные волны (основной тип волн, на которых осуществляется перенос энергии в ОДВ), поля которых убывают в радиальном направлении [1]. Однако, в настоящее время проявляется значительный интерес к устройствам, работающим на вытекающих волнах [2–4].

Вытекающие волны – это быстрые волны, дисперсионные характеристики которых являются продолжениями характеристик поверхностных волн ОДВ на частотах ниже критических последних. Вытекающие волны – несобственные волны, они не удовлетворяют условию излучения и, по-

этому, имеют нарастающее по радиальной координате поле [1].

Одной из проблем, стоящей перед исследователями, является проблема селективного возбуждения таких волн, так как они являются волнами высших типов и существуют совместно с поверхностными волнами, в частности, с основной волной HE_{11} . В данной работе представлена установка, предназначенная для возбуждения вытекающей волны E_{01} круглого открытого ДВ, и приведены результаты экспериментальных исследований ее характеристик.

Для возбуждения вытекающей волны E_{01} круглого ОДВ использовалась электродинамическая структура, показанная на рис. 1, имеющая следующие составные части и параметры: 1 – металлический стержень длиной $L_1 = 0.1$ м с радиусом $a = 0.005$ м; 2 – круглый экранированный волновод длиной $L_1 + L_2 = 0.15$ м с радиусом $R = 0.03$ м; 3 –

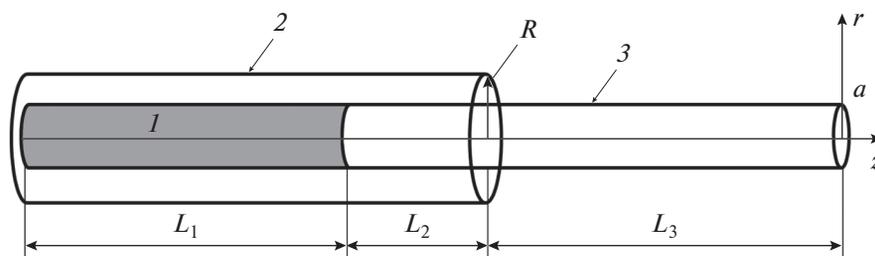


Рис. 1. Исследуемая электродинамическая структура.

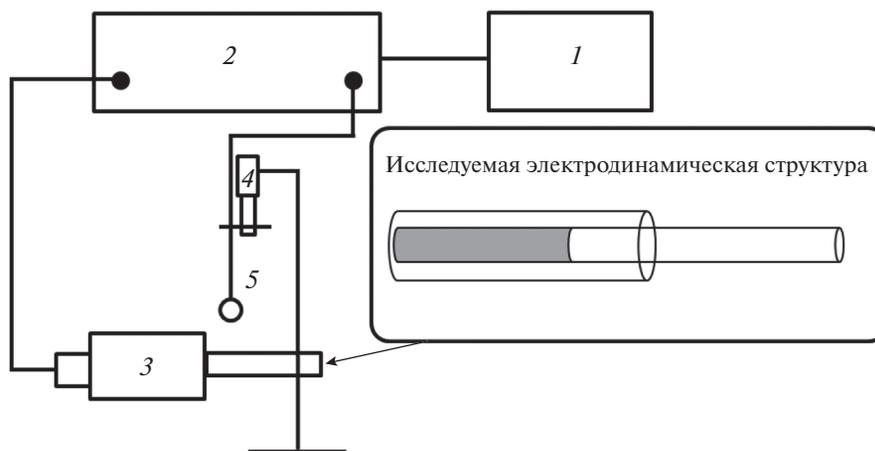


Рис. 2. Структурная схема экспериментальной установки.

диэлектрический стержень длиной $L_2 + L_3 = 0.24$ м с радиусом $a = 0.005$ м (относительная диэлектрическая проницаемость стержня, изготовленного из фторопласта, $\epsilon = 2.1$).

На участке длиной L_1 оси z электродинамическая структура представляет собой круглый коаксиальный волновод, на участке длиной L_2 – круглый экранированный двухслойный волновод, а на участке длиной L_3 – круглый открытый ДВ.

Размеры элементов электродинамической структуры подобраны таким образом, чтобы в исследуемом частотном диапазоне (6...8 ГГц), выбор которого определяется используемым измерительным оборудованием, существовала вытекающая волна E_{01} круглого ОДВ. При этом влияние основной волны на структуру поля будет минимальным: эффективный показатель преломления для волны HE_{11} примерно равен единице, и электродинамическая структура на этой волне теряет направляющие свойства.

На рис. 2 показана структурная схема экспериментальной установки: 1 – персональный компьютер; 2 – векторный анализатор цепей OBZOR 804/1; 3 – исследуемая электродинамическая структура; 4 – держатель измерительного элемента с микрометром; 5 – петлевой зонд.

Для определения частотных диапазонов существования симметричной волны E_{01} круглого двухслойного экранированного волновода, поверхностной и вытекающей волны E_{01} круглого ОДВ, с использованием строгого электродинамического подхода, были решены дисперсионные задачи для круглого двухслойного экранированного волновода и круглого ОДВ [1].

На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики (β_1/k_0) и характеристики затухания $(\beta_2 a)$ волн ОДВ и двухслойного экранированного волновода, где β_1 – действительная, а β_2 – мнимая

части продольного волнового числа, которое в общем случае является комплексной величиной $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, k_0 – волновое число свободного пространства. Чтобы дисперсионная характеристика вытекающей волны E_{01} круглого ОДВ (штриховая линия) была хорошо видна, дисперсионные характеристики волн круглого двухслойного экранированного волновода: HE_{11} , H_{01} , E_{01} и EH_{11} изображались до частоты ≈ 7 ГГц.

Из рис. 3 определяем диапазон частот, в котором существует вытекающая волна круглого ОДВ, от 6 до 10 ГГц (несобственная волна – быстрая). Измерения проводились в диапазоне от 6 до 8 ГГц. Верхний предел частотного диапазона определяется характеристиками анализатора цепей OBZOR 804/1.

В выбранном частотном диапазоне в круглом двухслойном экранированном волноводе могут существовать волны HE_{11} , H_{01} , E_{01} , EH_{11} , в круглом ОДВ волна HE_{11} и бесконечное множество несобственных волн, в том числе, вытекающая волна E_{01} (рис. 3). Исследуемая электродинамическая структура позволяет создать условия возбуждения, при которых в круглом открытом ДВ основной вклад в формирование суммарного электромагнитного поля будет вноситься вытекающей волной E_{01} .

В коаксиальном волноводе возбуждается T -волна. Структура электромагнитного поля в поперечном сечении T -волны схожа со структурой поля симметричной волны E_{01} круглого экранированного двухслойного волновода, поэтому на участке L_2 возбуждается волна E_{01} и основная волна HE_{11} . Электрическое поле волны HE_{11} круглого двухслойного экранированного волновода в поперечном сечении имеет максимум в центре двухслойного волновода [1], но данный волновод состыкован с коаксиальным волноводом, в центре которого

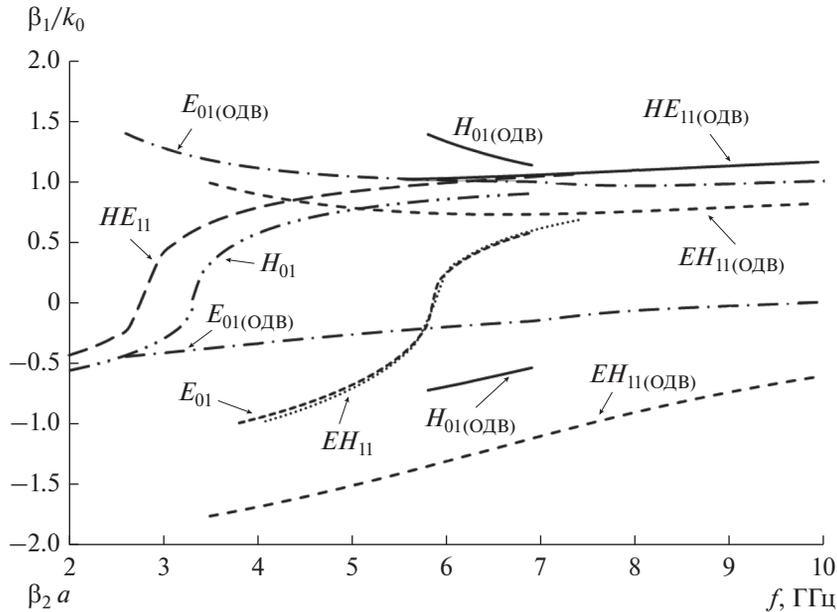


Рис. 3. Дисперсионные характеристики и характеристики затухания волн открытого ДВ (указаны как ОДВ) и двухслойного экранированного волновода.

расположен металлический стержень, что не благоприятствует возбуждению волны HE_{11} круглого двухслойного экранированного волновода.

Структура поля волны E_{01} круглого двухслойного экранированного волновода схожа со структурой поля вытекающей волны E_{01} ОДВ, поэтому в частотном диапазоне от 6 до 8 ГГц в открытом ДВ будет, преимущественно, возбуждаться вытекающая волна E_{01} . Расчеты, проведенные в системах автоматизированного проектирования ANSYS HFSS и COMSOL Multiphysics, показали, что основной вклад в структуру суммарного электромагнитного поля вносят волны HE_{11} и E_{01} . На низких частотах выбранного частотного диапазона основное влияние на распределение суммарного электромагнитного поля в круглом ОДВ оказывает вытекающая волна E_{01} , а на высоких частотах — волна HE_{11} .

В диапазоне существования волны E_{01} круглого двухслойного экранированного волновода существуют также волны H_{01} и EH_{11} (рис. 3), но структура поля этих волн принципиально отличается от структуры поля T -волн коаксиального волновода, и вклад в формирование суммарного электромагнитного поля этими волнами, как и волнами высших типов экранированного двухслойного волновода, в рассматриваемом частотном диапазоне значительно меньше, чем волн E_{01} и HE_{11} .

Все измерения произведены при уровне мощности 1 мВт на входе коаксиального волновода, на расстоянии 3 мм от торца экранированного

двухслойного волновода с помощью жесткого коаксиального кабеля с петлевым зондом. Коаксиальный кабель был закреплен на микрометре, с помощью которого осуществлялось перемещение петлевого зонда вдоль радиальной и продольной координат исследуемой структуры. На рис. 4 приведена фотография экспериментальной установки.

Результаты экспериментальных исследований влияния вытекающей волны E_{01} и основной волны HE_{11} на распределение суммарного поля приведены на рис. 5–6.

На рис. 5 приведены зависимости нормированной напряженности магнитного поля от радиальной координаты r , измеренные на различных частотах. Из рисунка следует, что на частоте 6.3 ГГц (кружки) структура суммарного поля определяется вытекающей волной E_{01} , так как наблюдается увеличение напряженности магнитного поля с увеличением расстояния от диэлектрического стержня вдоль радиальной координаты. Дальнейшее уменьшение напряженности магнитного поля с увеличением расстояния объясняется тем, что вытекание энергии происходит со стержня, имеющего конечную длину [5]. На частотах 7.5 ГГц (звездочки) и 8 ГГц (треугольники) структура поля определяется поверхностной волной HE_{11} открытого ДВ, так как происходит убывание поля вдоль радиальной координаты. Такое поведение поля характерно для поверхностных волн.

На рис. 6 представлены зависимости нормированной напряженности магнитного поля от продольной координаты z на различных частотах.



Рис. 4. Фотография экспериментальной установки.

Как следует из рисунка, на частоте 6.3 ГГц (кружки) происходит уменьшение напряженности магнитного поля, что характерно для вытекающей волны вследствие излучения энергии в поперечном направлении. На частоте 8 ГГц (треугольники) характеристика имеет максимумы и минимумы, что характерно для поверхностной волны, распространяющейся вдоль диэлектрического стержня и отражающейся от открытого конца в обратном направлении.

Были так же произведены измерения зависимости напряженности магнитного поля от радиальной координаты при разных значениях угловой

координаты в цилиндрической системе координат (петлевой зонд вращался вокруг продольной оси z ДВ) на частоте 6.3 ГГц. Результаты исследований показали, что измеряемые напряженности при разных значениях угловой координаты численно совпадают друг с другом. Следовательно, на частоте 6.3 ГГц структура суммарного поля имеет симметричный характер, т.е. определяется симметричной вытекающей волной E_{01} открытого ДВ.

С помощью рупорной антенны на частоте 6.3 ГГц были произведены измерения диаграммы направленности диэлектрического излучателя, которые показали, что в радиальном направле-

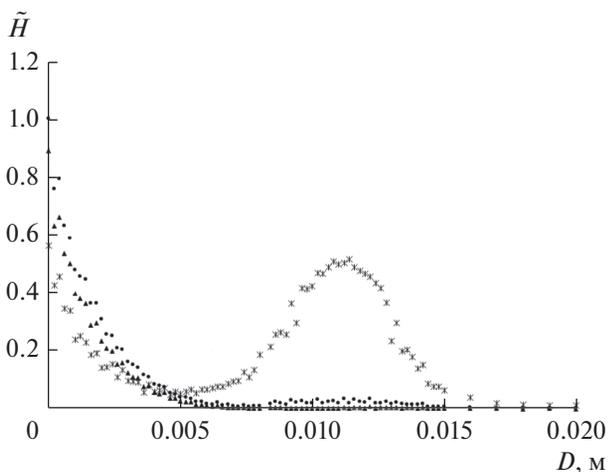


Рис. 5. Зависимости нормированной напряженности магнитного поля от радиальной координаты r , измеренные на частотах: 6.3 ГГц (кружки), 7.5 ГГц (звездочки) и 8 ГГц (треугольники).

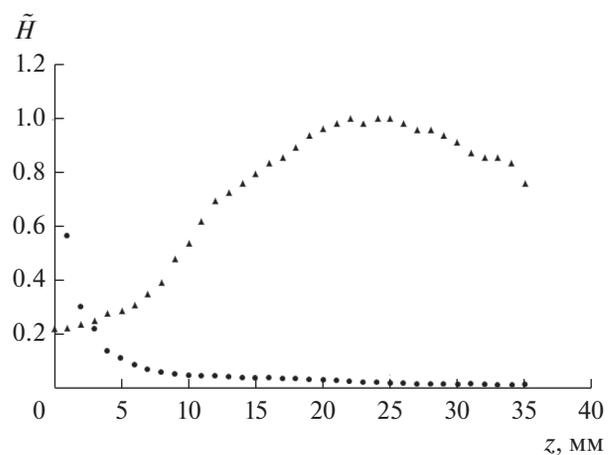


Рис. 6. Зависимости нормированной напряженности магнитного поля от продольной координаты z , измеренные на частотах: 6.3 ГГц (кружки) и 8 ГГц (треугольники).

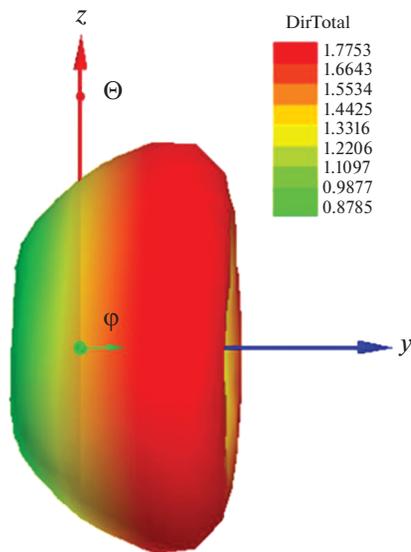


Рис. 7. Диаграмма направленности рассматриваемой электродинамической структуры, полученная в САПР ANSYS HFSS.

нии мощность излучения на 20 дБ больше, чем в продольном. Этот факт говорит о том, что на частоте 6.3 ГГц большая доля энергии излучается в радиальном направлении, что также характерно для вытекающих волн.

На рис. 7 приведена диаграмма направленности рассматриваемой электродинамической структуры, которую можно рассматривать как излучатель на

вытекающей волне на частоте 6.3 ГГц. Из рис. 7 видно, что излучение в основном происходит в поперечном направлении.

На основании схожести структур полей волн HE_{11} коаксиального волновода, E_{01} круглого экранированного волновода с диэлектрическим стержнем и волны E_{01} ОДВ предложен способ возбуждения последней в диапазоне частот, где она является вытекающей. Проведенные численные и экспериментальные исследования устройства возбуждения показали возможность создания на его основе диэлектрической антенны, имеющей осесимметричную диаграмму направленности. Управление положением максимума излучения может осуществляться путем изменения частоты. При этом используется свойство вытекающей волны: с уменьшением частоты растет затухание волны, обусловленное потерями на излучение. В результате увеличивается угол, образуемый вектором Умова–Пойнтинга с осью ОДВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раевский А.С., Раевский С.Б. Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010.
2. Fuscaldo W., Tofani S., Zografopoulos D. et al. // IEEE Trans. 2018. V. AP-66. № 3. P. 1169.
3. Tierney B., Grbic A. // IEEE Trans. 2018. V. AP-66. № 4. P. 2143.
4. Sengupta S., Jackson D., Long S. // IEEE Trans. 2018. V. MTT-66. № 3. P. 1181.
5. Унгер Х.Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1988.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 534.441.3

РЕКОНСТРУКЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

© 2020 г. А. В. Кокошкин^а, *, В. А. Коротков^а, Е. П. Новичихин^а

^аФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141120 Российская Федерация

*E-mail: shvarts65@mail.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.

После доработки 28.05.2020 г.

Принята к публикации 02.06.2020 г.

Рассмотрены проблемы восстановления акустических сигналов из неравномерно расположенных выборок (разреженный сигнал) и сигналов искаженных потерями смежных отсчетов (сплошными лагунами). Для решения указанных проблем предложены оригинальные алгоритмы: метод интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье и метод амплитудных итераций. Проведено сравнение эффективности этих методов с методом проекций на выпуклые множества и его модификацией, реализованной с помощью эволюционного частотно-временного преобразования на основе базовых функций Слепиана. В случае сплошных лагун к сравнениям привлекается родственная нейронным сетям одномерная модификация метода image inpainting. Оценка эффективности работы предложенных методов по объективным критериям свидетельствует об их пригодности для практического использования.

DOI: 10.31857/S0033849420120104

ВВЕДЕНИЕ

Проблема восстановления сигнала, искаженного разного вида лагунами, чрезвычайно актуальна. Она встречается во многих практических задачах обработки изображений и сигналов [1–9]. Иногда сознательно прибегают к уменьшению числа измеряемых сигналов, прореживая его. Это происходит, когда для регистрации измеренных данных требуется большой объем памяти, что сказывается на скорости обработки и не позволяет производить наблюдения в реальном времени. В качестве примера здесь можно привести технологию ультразвукового контроля (УЗК) с применением пьезоэлектрических антенных решеток (АР), излучающих и принимающих акустические волны в исследуемом объекте. В работе [10] показано, что метод распознавания со сжатием (compressive sensing, CS) [11–13] позволяет повысить скорость регистрации эхо-сигналов в среднем в пять раз за счет уменьшения числа измеряемых сигналов и при этом получить высокую разрешающую способность.

При акустических исследованиях морского дна возникают искажения разного вида, которые предлагается компенсировать с помощью алгоритмов коррекции данных батиметрии [14, 15]. Но для этого в сигнале не должно быть потерь (лагун).

При необходимости восстановить сигнал, искаженный разного рода лагунами (в том числе и акустический), часто используют различные модификации метода проекций на выпуклые множества (projections onto convex sets, POCS). Этот метод был введен в работах [16, 17] как итерационный алгоритм восстановления сигнала. Поскольку восстановление сигналов конечной энергии можно рассматривать как проблему интерполяции, то решение задачи происходит итеративно, при удовлетворении временных и частотных ограничений. В результате получается приближение к сигналу с заданными выборками. Таким образом, чтобы получить итеративное решение POCS, полагают, что интересующие сигналы не являются бесконечными во времени и ограничены по частоте.

Другим подходом к решению задачи заполнения лагун на изображениях и в сигналах является метод Image inpainting (процесс восстановления недостающей части изображения) выполняемый в том числе с помощью нейронных сетей [18–20]. Данный метод позволяет заполнить лагуны вероятностным способом так, что реконструкция становится незаметной. Все манипуляции при таком подходе происходят в пространственной области. Для заполнения лагун выбираются наиболее похожие блоки (фрагменты). В качестве баз данных (библиотек) используется либо сам исходный сигнал (его неповрежденные области), либо на-

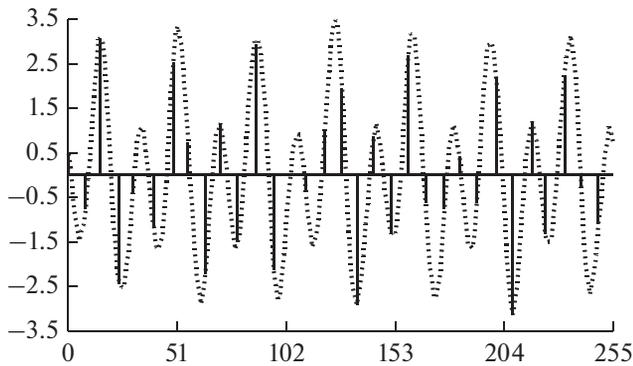


Рис. 1. Тестовый сигнал длиной 256 отсчетов (пунктирная кривая). Отсчеты случайной выборки из тестового сигнала (отрезки вертикальных прямых перпендикулярные горизонтальной оси) $L = 8$, $\tau \sim N(0, 1/2)$.

бор подобных по структуре эталонных сигналов (обучающая выборка). Основная проблема рассматриваемого метода связана с тем, что при значительных размерах лагун большинство алгоритмов не могут поддерживать непрерывность и согласованность структуры для получения правдоподобных результатов после реконструкции.

Ранее авторами был предложен метод интерполяции последовательно вычисляемого спектра (МИПВС) Фурье, позволяющий ретушировать и восстанавливать отсутствующие (затененные) части изображения [21–23]. Заполнение лагун делается итерационно (от нулевой пространственной частоты до наивысшей пространственной частоты) на основе спектра присутствующей части изображения. Если его модифицировать для одномерного случая и включить в него внутреннюю процедуру дополнительного итерационного уточнения каждой из гармоник, то его можно применить к поставленной задаче — реконструкции сигнала с лагунами.

Дополнительно к этому мы предлагаем алгоритм, который подобно МИПВС и POCS работает в частотной области, но производит итерационные вычисления сразу по всему полю спектра и только в зависимости от значений амплитуд гармоник (будем называть его методом амплитудных итераций (МАИ)).

Сравнение эффективности предлагаемых нами методов с альтернативными будем проводить на основе результатов работы [24]. В ней представлено восстановление сигналов из неравномерно расположенных выборок с использованием метода POCS, реализованного с помощью эволюционного частотно-временного преобразования на основе базовых функций Слепиана. При этом сигнал ограничен как по времени, так и по частоте. Полученные в работе результаты показывают хорошую сходимость восстановления к исходному сигналу.

В Приложении приведены описания алгоритмов для реализации методов, используемых в данной работе при реконструкции сигнала.

Рассмотрим следующие виды искаженных потерями сигналов:

- 1) сигнал, состоящий из неравномерно расположенных выборок (разреженный сигнал);
- 2) равномерно дискретизированных сигналов с непрерывными потерянными выборками (сплошными лагунами).

Во втором случае предполагается, что лагуна значительно меньше общей длительности сигнала.

1. РЕКОНСТРУКЦИИ РАЗРЕЖЕННОГО СИГНАЛА ИЗ НЕРАВНОМЕРНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ВЫБОРОК

Тестирование предложенных методов сделано на примере достаточно сложного искажения. Это выборки из тестового сигнала, случайно и нерегулярно расположенные с известным распределением. Был смоделирован тестовый сигнал длиной 256 отсчетов (рис. 1), подобный “речевому” сигналу, использованному в работе [24]. Отрезками прямых показаны случайно выбранные отсчеты из исходного неискаженного сигнала, показанного пунктиром.

Из анализа рис. 1 можно сделать вывод, что из-за больших ошибок не стоит использовать интерполяции, стандартно применяемые для увеличения количества отсчетов, — линейные, параболические, сплайновые. В связи с этим для реконструкции сигнала были использованы методы МИПВС, POCS и МАИ. Результаты, полученные методом POCS, взяты из работы [24].

Нерегулярно расположенные образцы $\{x(n_i)\}$ получены из исходного сигнала $x(n)$ в виде

$$x(n_i) = x(\lfloor nN/L \rfloor + \tau),$$

где τ — джиттер синхронизации с нормальным распределением $N(0, \sigma^2)$, $\lfloor \bullet \rfloor$ обозначает ближайшее целое число, L — фактор прореживания.

Для решения задачи восстановления сигнала применение традиционных методов интерполяции не будет эффективным, особенно при достаточно большой разреженности сигнала. Это видно из рис. 1, где отсчеты случайной выборки рассчитаны при $L = 8$, $\tau \sim N(0, 1/2)$. Однако применение методов МИПВС, POCS и МАИ дают весьма хорошие результаты.

Внешний вид сигналов, восстановленных различными методами, очень мало отличается, поэтому на рис. 2 представлен вид разреженного сигнала рис. 1, восстановленного только с помощью МИПВС (сплошная линия), а исходный неискаженный тестовый сигнал показан пунктиром.

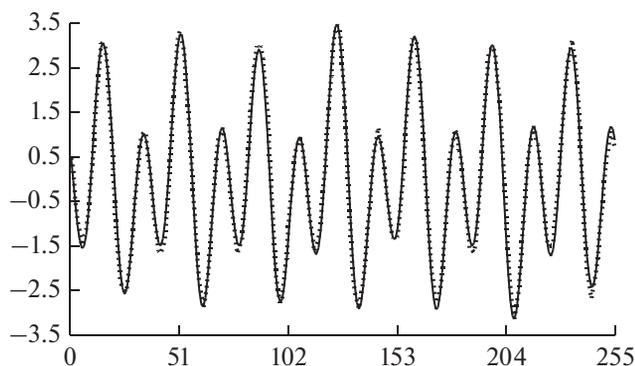


Рис. 2. Восстановленный с помощью МИПВС разреженный тестовый сигнал (сплошная кривая). Исходный неискаженный тестовый сигнал (пунктирная кривая).

Рисунок 3, взятый из работы [24], демонстрирует производительность метода работы POCS, реализованного с помощью эволюционного частотно-временного преобразования на основе базовых функций Слепиана, т.е. зависимость средней абсолютной ошибки (mean absolute error, MAE) от количества итераций (скорости сходимости). Показано поведение сходимости пяти различных образцов случайной выборки. Отличия состоят в разных факторах прореживания L тестового сигнала.

На рис. 4 представлена сходимость, а точнее, зависимость MAE от количества итераций работы МИПВС и POCS. Предложенная в работе реализация методики POCS сходится к MAE = 0.1 (сплошная линия). В то же время работа МИПВС обеспечивает аналогичную точность сходимости значительно раньше — с нескольких (менее пяти) итераций (пунктир).

При сравнении результатов, приведенных на рис. 4, с данными из [24] (см. рис. 3) видно, что скорость сходимости для POCS примерно одинакова. Скорее всего, разница в абсолютном значении предела сходимости на рис. 3 и 4 объясняется реализацией алгоритма вычислений.

Говорить о скорости сходимости МАИ можно только условно. Поскольку количество итераций в нем однозначно определяется количеством градиентных величин амплитуд спектра (от максимальной до нулевой), то для корректной работы этого метода должен быть достаточно подробно охвачен диапазон изменения амплитуд информативных гармоник. Таким образом, могут понадобиться сотни итераций (прерывистая линия на рис. 5а, 5б). Отметим только, что МАИ сходится к тем же значениям, что МИПВС и POCS.

Построим зависимость MAE от величины фактора прореживания сигнала. Фактор прореживания соответствует L в формуле, моделирующей случайную выборку из исходного неис-

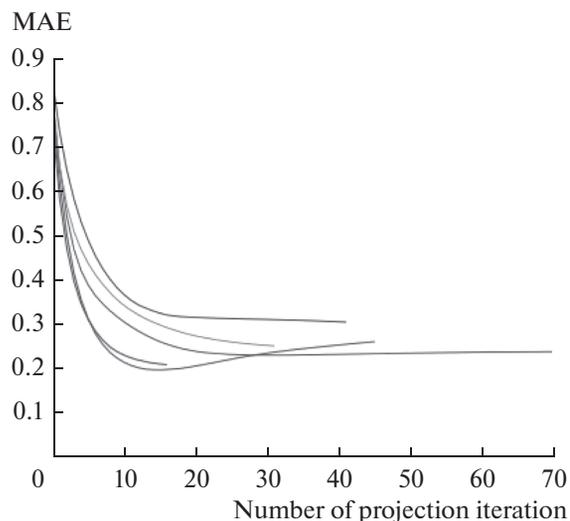


Рис. 3. Поведение сходимости пяти различных образцов случайной выборки "речевого" сигнала в зависимости от количества итераций (из работы [24]).

каженного сигнала. Этот параметр означает, во сколько раз разрежен сигнал. Например, $L = 4$ означает, что известен один отсчет из четырех возможных, а при $L = 0$ известны все отсчеты (лакуны нет). Такого исследования в [24] проведено не было. Количество итераций берется с большим запасом, для того чтобы показать потенциальные возможности каждого из подходов.

На рис. 6 штрихпунктирной линией изображена средняя абсолютная величина ошибки для невосстановленной лакуны. Здесь отсутствующие данные внутри лакуны приравниваются нулю, близкому к среднему значению исследуемого псевдо-

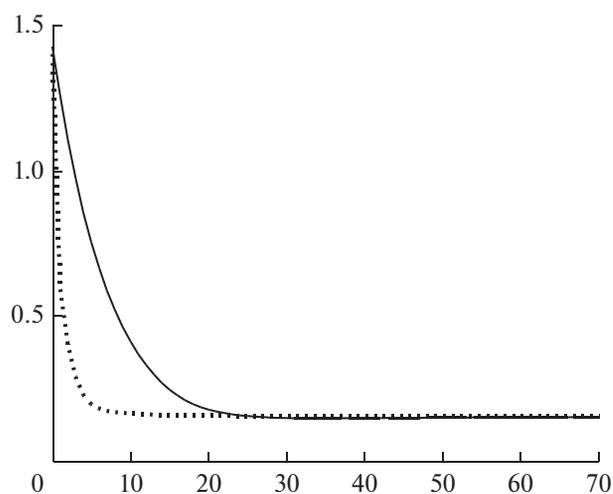


Рис. 4. Поведение сходимости POCS (сплошная кривая) и МИПВС (пунктирная кривая) в зависимости от количества итераций при восстановлении случайной выборки из исходного тестового сигнала (рис. 1).

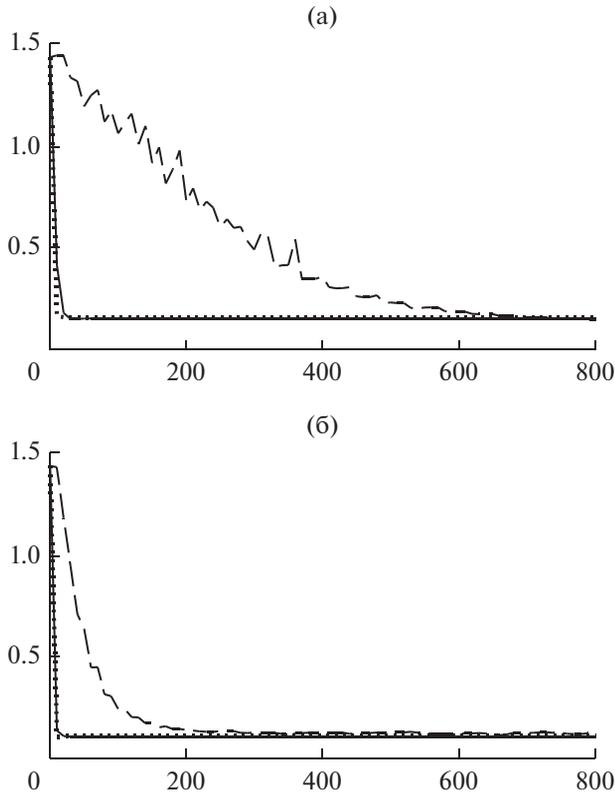


Рис. 5. Поведение сходимости МАИ (штриховая кривая), РОСС (сплошная кривая) и МИПВС (пунктирная кривая) при восстановлении случайной выборки из исходного тестового сигнала (рис. 1) при факторе прореживания L : 8 – (а) и 4 (б).

случайного сигнала. Затем вычисляется средняя абсолютная величина ошибки, невосстановленной лакуны относительно значений идеального неискаженного сигнала. Эти ошибки (внутри невосстановленной лакуны) будем считать оценкой эффективности работы методов.

Если полученные тем или иным способом значения сигнала в лакуне имеют среднюю абсолютную величину ошибки много меньшую, чем ошибки для невосстановленной (заполненной нулями) лакуны, то можно считать, что метод работает хорошо. И наоборот, если полученные тем или иным способом значения сигнала в лакуне имеют среднюю абсолютную величину ошибки, близкую к ошибке для невосстановленной (заполненной нулями) лакуны, то можно считать, что тестируемый метод работает неудовлетворительно. Следовательно, сравнения эффективности работы методов проводится по объективному критерию.

Из рис. 6 видно, что все рассматриваемые методы хорошо справляются с поставленной задачей, поскольку их МАЕ во много раз меньше, чем МАЕ для невосстановленной лакуны, но при небольшом росте средней абсолютной ошибки при увеличении разреженности.

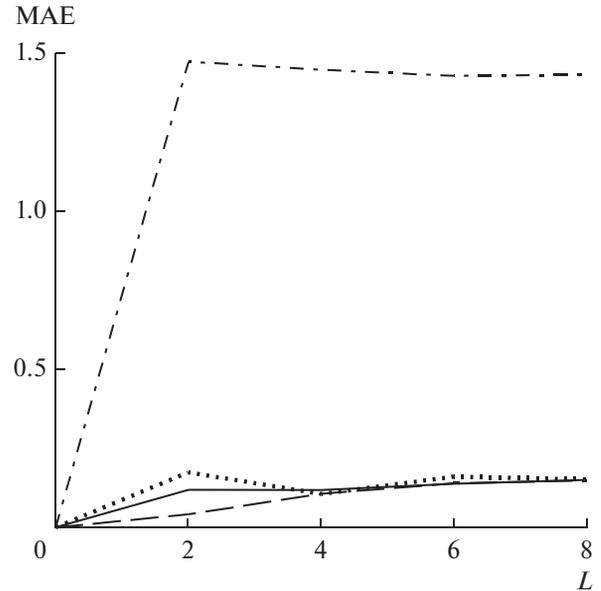


Рис. 6. Зависимость МАЕ от величины фактора прореживания сигнала L для: МИПВС (пунктирная кривая), МАИ (штриховая кривая), РОСС (сплошная кривая), лакуна-штрихпунктирная кривая.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕКОНСТРУКЦИИ СИГНАЛА СО СПЛОШНОЙ ЛАКУНОЙ

2.1. Первый вариант – короткая реализация

Для восстановления равномерно дискретизированных сигналов с непрерывными потерянными выборками (сплошными лакунами) в этом моделировании применяются те же методы. Такие искажения названы в [24] “блочные или смежные потери образцов”. Общее предположение состоит в том, что размер лакуны должен быть существенно меньше длины сигнала [25]. В работе [24] демонстрируются результаты работы метода РОСС, реализованного с помощью эволюционного частотно-временного преобразования на основе базовых функций Следиана. Оценок эффективности реконструкции содержимого сплошных лакун по объективным критериям в работе [24] не представлено, но констатируется что при больших объемах отсутствующих данных, “из-за серьезной потери информации о сигнале, эффективность восстановления ухудшается”. И “тем не менее, предложенный метод показывает очень многообещающие результаты...”.

В данной работе рассматриваются два варианта сигналов с лакунами:

1) в лакуне сигнал может несколько раз изменить знак (пересечь ноль). Другими словами, длина лакуны не превышает нескольких “характерных” периодов сигнала;

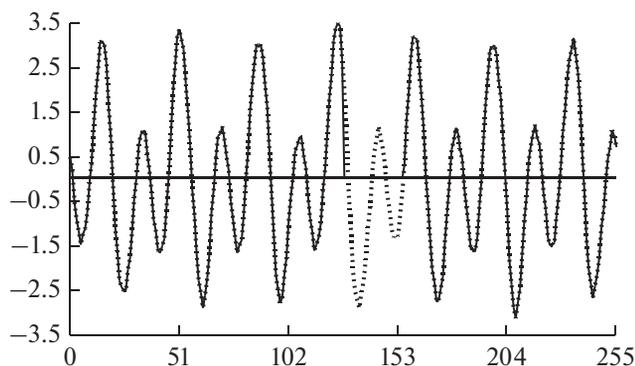


Рис. 7. Тестовый сигнал длиной 256 отсчетов (пунктирная кривая). Сигнал с лакуной длиной 28 отсчетов (сплошная кривая).

2) лакуна имеет длину значительно больше “характерного” периода сигнала.

В обоих случаях предполагается, что лакуна значительно меньше общей длительности сигнала.

Рассмотрим первый вариант сигнала с лакуной, аналогичный предложенному в [24]. На рис. 7 изображены: исходный тестовый сигнал (тот же самый, что и для разреженных случайных выборок длиной 256 отсчетов (пунктир)) и сигнал с лакуной размером 28 расчетов (сплошная линия).

В связи с тем, что при реконструкции сплошной лакуны появилась возможность использовать в качестве обучающей выборки фрагменты исходного неискаженного сигнала для сравнительного анализа, то можно использовать данные, полученные с помощью image inpainting.

На рис. 8 представлена зависимость средней абсолютной ошибки от длины сплошной лакуны. Количество итераций взято с большим запасом, для того чтобы показать потенциальные возможности каждого из подходов. Как и раньше, штрихпунктирная кривая соответствует невозстановленной лакуне, т.е. если отсутствующие данные приравнять нулю, значению, близкому к среднему значению исследуемого псевдослучайного сигнала.

Графики на рис. 8 хорошо иллюстрируют известный факт, что ошибка реконструкции растет с величиной потерь сигнала (размером лакуны). Однако скорость увеличения ошибки реконструкции с увеличением длины лакуны для разных методов разная. В случае применения МИПВС с итерациями и РОСС эта ошибка растет очень быстро. В то же время методы image inpainting и МАИ дают стабильно низкие уровни ошибок даже для значительных лакун. Возможность того, что image inpainting в данном случае сработал лучше, чем МИПВС или РОСС, объясняется тем, что восстанавливаемый сигнал является узкополосным и его даже можно признать псевдопериодическим. Поэтому процедура поиска достаточно

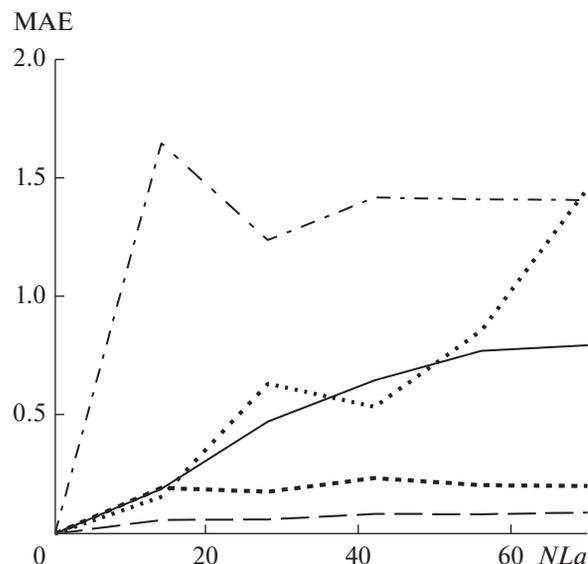


Рис. 8. Зависимость MAE от длины сплошной лакуны NLa для: image inpainting (полуштриховая пунктирная кривая), МИПВС — пунктирная кривая), МАИ (штриховая кривая), РОСС (сплошная кривая), лакуны (штрихпунктирная кривая).

легко нашла подобные образцы (фрагменты) в библиотеке (в оставшейся точно известной части исходного сигнала). Графики зависимости средней абсолютной ошибки от длины сплошной лакуны для случаев применения image inpainting и МАИ иллюстрируют медленный рост величины этой ошибки.

В данном примере наилучшим выбором для восстановления можно считать МАИ. Его средняя абсолютная ошибка существенно меньше, чем у всех остальных методов и чем средняя абсолютная ошибка для незаполненной лакуны.

2.2. Второй вариант — длинная реализация

Выберем для исследования сигнал большей длительности, чем ранее — 5000 отсчетов. Размеры сплошной лакуны варьируются от нуля до 500 отсчетов (10% исходного сигнала). При таких условиях мы проверяем возможность восстановления сигнала в большой лакуне, где сигнал нельзя представить в виде суммы фрагментов известного сигнала вне лакуны.

На рис. 9 показан тестовый сигнал 5000 отсчетов, искаженный лакуной 500 отсчетов (сплошная линия).

На рис. 10 изображен фрагмент в 600 отсчетов из тестового сигнала длиной 5000 отсчетов (пунктир). Сигнал с лакуной длиной 500 отсчетов (сплошная линия).

Рисунок 11 демонстрирует примеры восстановления сигнала в лакуне 500 отсчетов (см. рис. 10)

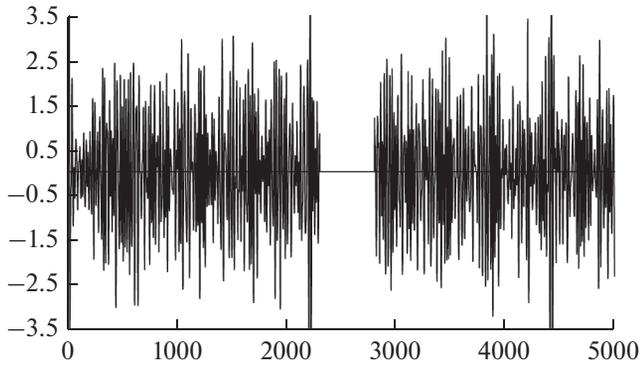


Рис. 9. Сигнал с лакуной длиной 500 отсчетов.

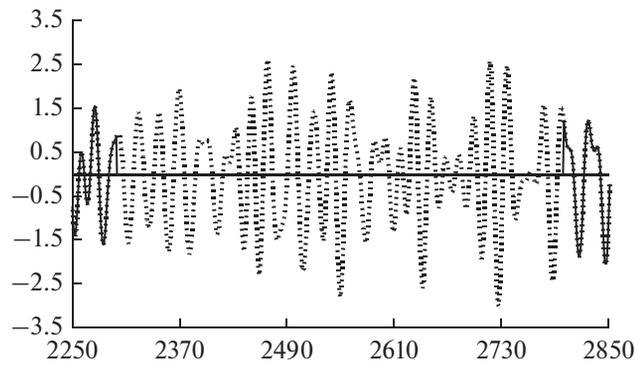


Рис. 10. Фрагмент в 600 отсчетов из тестового сигнала длиной 5000 отсчетов (пунктирная кривая). Сигнал с лакуной длиной 500 отсчетов (сплошная кривая).

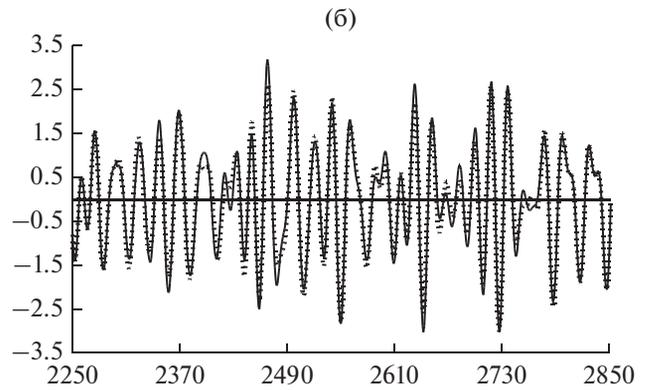
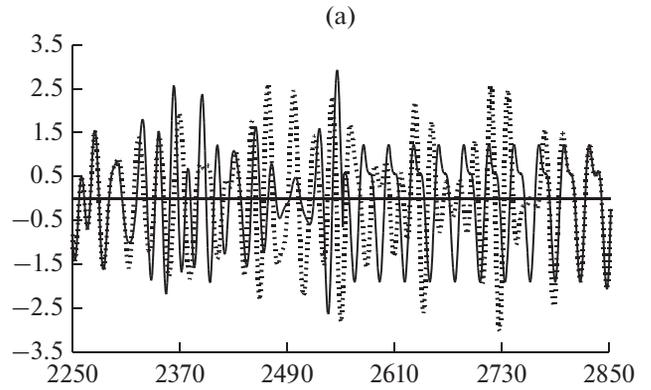


Рис. 11. Примеры восстановления фрагмента в 600 отсчетов. пунктирная кривая – исходный неискаженный тестовый сигнал; сплошная кривая – тестовый сигнал со сплошной лакуной 500 отсчетов, восстановленный с помощью image inpainting (а) и МАИ (б).

с помощью методов image inpainting (а) и МАИ (б). Как видно из рисунка, одномерная реализация image inpainting не справляется с поставленной задачей – видны существенные отличия исходного сигнала (пунктир) и восстановленного (сплошная линия). В то же время МАИ достаточно уверенно заполняет лакуну значениями, близкими к идеальному неискаженному сигналу.

Чтобы объективно оценить работу всех исследуемых методов, как и в случае с “коротким” сигналом (256 отсчетов), на рис. 12 была построена зависимость средней абсолютной ошибки от длины сплошной лакуны для “длинного” сигнала (5000 отсчетов). Количество итераций опять взято с большим запасом, для того чтобы показать потенциальные возможности каждого из подходов. Видно, что в данном случае не все рассматриваемые методы справляются с поставленной задачей – ситуация еще тяжелее, чем для “короткого сигнала”. Поскольку сигнал теперь не является квазипериодическим и лакуны имеют большую длину, процедура поиска в одномерном image inpainting не может найти подобные образцы (фрагменты) в библиотеке (в оставшейся точно известной части исходного сигнала).

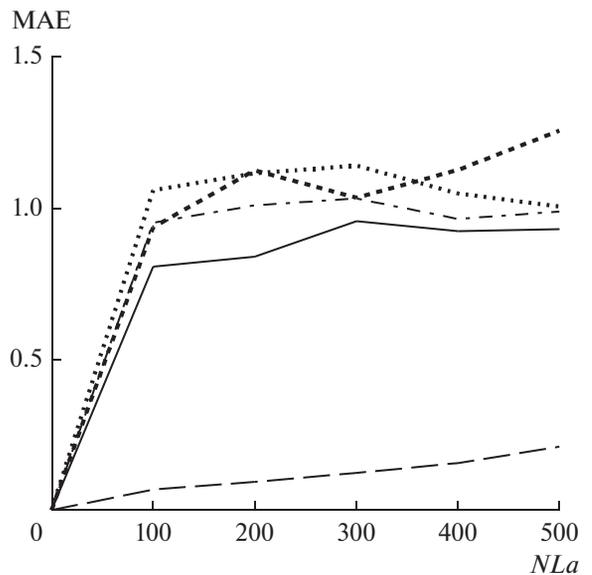


Рис. 12. Зависимость MAE от длины сплошной лакуны NLa для: image inpainting (полужирный пунктирная кривая), МИПВС (пунктирная кривая), МАИ (штриховая кривая), POCS (сплошная кривая), лакуны (штрихпунктирная кривая).

Средняя абсолютная ошибка для МИПВС с итерациями, РОСС и одномерной модификации метода *image inpainting* одного порядка с МАЕ для невозстановленной лакуны. Только МАИ дает реконструкцию сигнала с приемлемыми ошибками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в работе метод интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье и метод амплитудных итераций сравниваются с известным подходом проекций на выпуклые множества и его модификацией, реализованной с помощью эволюционного частотно-временного преобразования на основе базовых функций Слепиана. В случае сплошных лакун к сравнениям привлекается одномерная модификация метода *image inpainting*, родственная нейронным сетям. По объективному показателю (средняя абсолютная ошибка в зависимости от ширины лакуны) метод амплитудных итераций имеет наилучшие показатели при заполнении сплошных лакун. Однако в случае разреженных сигналов предпочтительным выбором является метод интерполяции последовательно вычисляемого спектра, поскольку этот метод имеет хорошие показатели средней абсолютной ошибки в зависимости от разреженности сигнала и, кроме того, ему необходимо меньше итераций для сходимости, чем другим методам. Таким образом, МИПВС и МАИ способны эффективно восстанавливать сигналы из случайно расположенных подвыборок и непрерывно потерянных выборок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ

1. Реконструкция сигнала с помощью метода РОСС

Соответствующий алгоритм реконструкции выглядит следующим образом.

Шаг 1. Локализуем лакуну, т.е. определяем координаты всех пикселей, которые необходимо заполнить с помощью РОСС.

Шаг 2. Вычисляем среднее сигнала, используя только достоверно известные пиксели (без пикселей из лакуны). Таким образом, происходит оценка амплитуды нулевой гармоники спектра улучшаемого сигнала.

Шаг 3. Заполняем лакуну значениями, вычисленными в предыдущем пункте, т.е. получаем первое приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 4. Создаем частотную маску (матрицу, по размеру равную матрице спектра восстанавливаемого сигнала). Определяем размер окна таким об-

разом, чтобы для спектра сигнала, вычисленного в п. 3 основные (наибольшие по амплитуде) гармоники попадали туда с некоторым запасом. Поэлементное заполнение частотной маски нулями и единицами происходит следующим образом: единица — частоты внутри окна; ноль — номера частот спектра вне этого окна.

Шаг 5. Вычисляем полный спектр сигнала, полученного при выполнении п. 3 (с заполненной лакуной).

Шаг 6. Умножаем спектр, полученный в предыдущем пункте на частотную маску (чтобы ввести ограничение по частоте).

Шаг 7. Применяем обратное преобразование Фурье к результату предыдущего пункта.

Шаг 8. Заполняем лакуну значениями, вычисленными в предыдущем пункте, т.е. получаем очередное приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 9. Последующие итерации — циклическое повторение (действий) пп. 6, 7 и 8.

Таким образом, лакуна итерационно заполняется, причем неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

2. Реконструкция сигнала с помощью одномерной модификации метода *image inpainting*

За основу взят метод, опубликованный в работе [16]. При заполнении лакун выбираются наиболее похожие блоки (фрагменты) из базы данных (библиотеки), в качестве которой используется сам исходный сигнал (его не поврежденные области).

3. Реконструкция сигнала с помощью МИПВС

Соответствующий алгоритм реконструкции выглядит следующим образом.

Шаг 1. Локализуем лакуну, т.е. определяем координаты всех отсчетов сигнала, которые необходимо заполнить с помощью МИПВС.

Шаг 2. Устанавливаем частоту ограничения спектра $F=0$. В этом случае значение амплитуды спектра соответствует среднему значению сигнала (без пикселей из лакуны).

Шаг 3. Заполняем лакуну значениями, вычисленными в предыдущем пункте, т.е. получаем первое приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 4. Вычисляем полный спектр сигнала, полученного при выполнении предыдущего пункта (с заполненной лакуной).

Шаг 5. Увеличиваем F на единицу. Ограничив спектр из предыдущего пункта частотой F , обнуляя отсчеты спектра с индексами, большими F , с последующим выполнением обратного преобразования Фурье, вычисляем следующее приближение значений сигнала для заполнения лакуны.

Шаг 6. Заполняем лакуну значениями амплитуд, вычисленными в предыдущем пункте. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 7. Проводим процедуру итерационных уточнений гармоник внутри спектрального окна, ограниченного величиной F , по процедуре POCS (см. выше).

Шаг 8. Далее циклично выполняем пп. 4–7. При этом каждый цикл (итерацию) F увеличивается на единицу, вплоть до наивысшей возможной. Таким образом, лакуна последовательно заполняется, причем неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

4. Реконструкция сигнала с помощью МАИ

Алгоритм МАИ, подобно МИПВС и POCS, работает в частотной области, но производит итерационные вычисления сразу по всему полю спектра и только в зависимости от величин амплитуд гармоник.

Шаг 1. Локализуем лакуну, т.е. определяем координаты всех пикселей, которые необходимо заполнить с помощью МАИ.

Шаг 2. Вычисляем среднее сигнала, используя только достоверно известные пиксели (без пикселей из лакуны). Таким образом, происходит оценка нулевой гармоники спектра улучшаемого сигнала.

Шаг 3. Заполняем лакуну значениями, вычисленными в предыдущем пункте, т.е. получаем первое приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 4. Вычисляем полный спектр сигнала, полученного при выполнении предыдущего пункта (с заполненной лакуной).

Шаг 5. Задаем количество градаций N в диапазоне от максимума (\max) до минимума (\min) величин амплитуд гармоник спектра сигнала, вычисленного в предыдущем пункте. Количество этих градаций должно быть достаточным, для того чтобы значимые гармоники спектра могли быть оценены с помощью предлагаемого алгоритма. Вычисляем

шаг итерации как: $\text{step} = (\max - \min) / N$. Номер итерации N_{it} последовательно изменяется от 1 до N .

Шаг 6. Умножив шаг итерации (step) на номер очередной итерации N_{it} , получим число N_{step} для ограничения амплитуд спектра на очередном итерационном шаге. Ограничив по всему пространству частот амплитуды спектра A_i , вычисленного в предыдущих пунктах, значениями $A_i \geq (\max - N_{\text{step}})$, вычисляем следующее приближение значений сигнала для заполнения лакуны.

Шаг 7. Заполняем лакуну значениями сигнала, вычисленными в предыдущем пункте, и получаем следующее приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

Шаг 8. Далее циклично выполняем пп. 6, 7, каждый раз последовательно, в п. 6, увеличивая номер итерации на единицу ($N_{it} = N_{it} + 1$), вплоть до наивысшей возможной ($N_{it} = N$). Таким образом, лакуна итерационно заполняется, причем неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yeh S., Stark H. // J. Opt. Soc. Amer. 1990. V. 7. № 3. P. 491.
2. Stasiński R., Konrad J. // Proc. 2000 IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP '00). Vancouver, 10–13 Sept. N.Y.: IEEE, 2000. V. 2. P. 315.
3. Park J., Park D.-C., Marks R.J. II, El-Sharkawi M.A. // Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems. Phoenix, 26–29 May 2002. N.Y.: IEEE, 2002. V. 5. P. 245.
4. Huang H., Makur A. // Proc. 2008 IEEE Asia Pacific Conf. on Circuits and Systems (APCCAS '08). Macao, 30 Nov.– 3 Dec. N.Y.: IEEE, 2008. P. 336.
5. Ogawa T., Haseyama M. // Proc. 2007 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP '07), Honolulu, 15–20 Apr. N.Y.: IEEE, 2007. V. 1. P. 697.
6. Chen J., Zhang L., Luo J., Zhu Y. // Proc. 2009 3rd Int. Conf. on Bioinformatics and Biomedical Engineering (ICBBE '09), Beijing 11–13 Jun. N.Y.: IEEE, 2009. P. 5163089.
7. Feichtinger H.G., Kozek W., Strohmer T. // Proc. SPIE. 1995. V. 2569. P. 140.
8. Guven H.E., Ozaktas H.M., Cetin A.E., Barshan B. // IET Signal Processing. 2008. V. 2. № 1. P. 11995. V. 5.
9. Serbes A., Durak L. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. V. 15. № 3. P. 675.

10. *Базулин Е.Г., Соколов Д.М.* // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 520.
11. *Donoho D.L.* // IEEE Trans. 2006. V. IT-52. № 4. P. 1289.
12. *Foucart S., Rauhut H.* A Mathematical Introduction to Compressive Sensing. Basel: Birkhauser, 2013.
13. *Guateri G.A., Pira D.R., Junior F.N. et al.* // Sensors. 2015. V. 15. P. 9324.
14. *Каевицер В.И., Разманов В.М., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В.* // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2013. Т. 9. № 146. С. 81.
15. *Каевицер В.И., Кривоцов А.П., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 5. <http://jre.cplire.ru/jre/may18/9/text.pdf>.
16. *Брэгман Л.М.* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 487.
17. *Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.* // Журн. вычисл. математики и мат.физики. 1967. Т. 7. № 6. С. 1211.
18. *Qureshi M.A., Deriche M., Beghdadi A., Amin A.* // J. Visual Communication and Image Representation. 2017. V. 49. P. 177.
19. *Chen Z., Dai C., Jiang L. et al.* // J. Visual Communication and Image Representation. 2016. V. 40. Pt. A. P. 312.
20. *Lokhande D., Zope R.G., Bendre V.* // Int. J. Computer Science and Network (IJCSN). 2014. V. 3. № 1. P. 110.
21. *Кокошкин А.В., Коротков В.А., Коротков К.В., Новичихин Е.П.* // Журн. радиоэлектроники. 2016. № 7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul16/4/text.pdf>.
22. *Кокошкин А.В., Коротков В.А., Коротков К.В., Новичихин Е.П.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep18/16/text.pdf>.
23. *Кокошкин А.В., Коротков В.А., Коротков К.В., Новичихин Е.П.* // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 6. С. 1030.
24. *Oh J., Senay S., Chararro L.F.* // EURASIP J. on Advances in Signal Processing. 2010. V. 2010. P. 367317.
25. *Oliveira P.* // Proc. 2006 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'06), Toulouse, 14–19 May. N.Y.: IEEE, 2006. V. 3. P. 828.
26. *Кокошкин А.В., Коротков В.А., Новичихин Е.П.* // Сб. тр. XIII Всерос. научно-техническая конф. “Радиолокация и радиосвязь”, Москва, 25–27 ноября 2019 г. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2019. С. 128.

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.6.8

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ГЕТЕРОГЕННАЯ СИСТЕМА
С ФОРМИРОВАНИЕМ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ
ЗА СЧЕТ ИНВЕРСИИ МАТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ© 2020 г. С. Н. Старостенко^а, К. Н. Розанов^а, С. Ю. Бобровский^{а, *}, А. О. Ширяев^а^аИнститут теоретической и прикладной электродинамики РАН,
Ижорская ул., 13, Москва, 125412 Российская Федерация

*E-mail: sbobrowskiy@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.01.2020 г.

После доработки 22.01.2020 г.

Принята к публикации 30.07.2020 г.

Рассмотрена возможность определения магнитной проницаемости металлических включений из измеренных материальных параметров бинарных композитов по известным моделям смешения. Предложена модель, учитывающая инверсию матричной структуры модели Максвелла–Гарнетта при концентрации наполнителя, близкой к порогу протекания. Определено, что перестройка структуры композита происходит постепенно в области переходных концентраций, ширина которой является дополнительным параметром, определяемым из эксперимента. Проведено сравнение предложенной модели с моделью эффективной среды по зависимостям комплексной восприимчивости от наполнения и частоты. Достоверность модели иллюстрирована обработкой материальных параметров композитов с карбонильным никелем в качестве наполнителя, измеренных в диапазоне частот 0.1...20 ГГц.

DOI: 10.31857/S0033849420120177

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к применению композитных материалов на высоких и сверхвысоких частотах. Исследование материальных параметров композитов может дать информацию о структуре, необходимую для многих практических применений, в частности в химии [1], в медицине (оценка пористости костей [2]), сейсмологии, геофизике [3–5], а также в радиофизике (антенны, материалы для электромагнитной совместимости, поглотители СВЧ [6, 7] и др.). При этом часто возникает потребность в определении электромагнитных характеристик компонентов композитных материалов по характеристикам самих композитов. Причиной этому является то, что прямые измерения магнитной проницаемости металлов на высоких частотах невозможны из-за негативного влияния скин-эффекта. Определение проницаемости компонента-металла по характеристикам композитов с этим металлом в дисперсном состоянии является, по сути, единственным методом, позволяющим оценить магнитные свойства металлов и сплавов на высоких и сверхвысоких частотах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для того чтобы корректно описать электромагнитные характеристики композитов необхо-

димо правильно выбрать формулу смешения. Среди всех существующих формул смешения, одними из наиболее известных являются обобщенная модель Максвелла–Гарнетта [8, 9] и симметричная модель Брюггемана [9]. Недостаток обобщенной симметричной модели Брюггемана в том, что в случае эллипсоидальных включений, оба компонента могут иметь один форм-фактор N только в случае сфер [10–12], в результате порог протекания определяется исключительно форм-фактором включений ($p_c = N$).

К недостаткам моделей, учитывающих форму включений и изменение структуры композита вблизи порога протекания, можно отнести пренебрежение взаимодействием компонентов, поскольку порог протекания p_c в данном случае определяется исключительно формой включений.

В целях упрощения сравнения и анализа все формулы ниже переписаны с точки зрения восприимчивости χ , нормированной на материальный параметр (например, диэлектрическую проницаемость, магнитную проницаемость, коэффициент диффузии и т.д.) второго компонента, обычно называющегося связующим. Такой подход позволяет легко адаптировать рассматриваемые формулы к расчету “обобщенной проводимости” (т.е. любой проводимости, обусловленной диффузионным механизмом переноса) гетерогенных

систем, например, диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ , электропроводности σ и т.д. [8]. В частности, для диэлектрической проницаемости нормированная восприимчивость записывается в виде

$$\chi_{i2} = \epsilon_i / \epsilon_2 - 1,$$

для магнитной проницаемости как

$$\chi_{i2} = \mu_i / \mu_2 - 1,$$

где индексы 1, 2, 3 относятся к включениям, связующему и смеси соответственно.

Широко известна формула Винера, описывающая анизотропный композит, в котором включения расположены параллельно внешнему полю:

$$\chi_{32} = \chi_{12} p_1, \tag{1}$$

где χ_{12} и χ_{32} – восприимчивости компонента 1 с объемным содержанием p_1 и смеси (обозначенной как компонент 3) соответственно. Восприимчивости нормированы на диэлектрическую проницаемость ϵ_2 компонента 2 с объемным содержанием $p_2 = 1 - p_1$.

Более общий вид формулы Винера описывает зависимость диэлектрической проницаемости ϵ_3 анизотропного бинарного композита от концентрации p_i и диэлектрической проницаемости ϵ_i i -компонента.

$$\begin{aligned} \chi_{32} &= \frac{\chi_{12} p_1 \left(1 + \frac{U}{\epsilon_2}\right)}{\chi_{12} (1 - p_1) + 1 + \frac{U}{\epsilon_2}} = \\ &= \frac{\chi_{12} p_1 [\chi_{\text{local}2} (1 - N) + 1]}{N \chi_{12} (1 - p_1) + [\chi_{\text{local}2} (1 - N) + 1]}. \end{aligned} \tag{2}$$

В сравнении с оригинальной формулой [13] выражение (2) переписано в терминах восприимчивости, нормированной на диэлектрическую проницаемость ϵ_2 компонента 2. Правая часть (2) является обобщением для эллипсоидальных включений с коэффициентом деполяризации N .

Параметр U зависит от диэлектрической проницаемости ϵ_{local} в окрестности включений; индексы 1, 2, 3 обозначают компонент 1, компонент 2 и сам композит (компонент 3) соответственно. Легко видеть, что при $U = 0$ формула (2) становится (1). При $U = \infty$ выражение (2) превращается в формулу (3), которая, так же как и (1), описывает анизотропный композит, но для случая ориентации компонентов перпендикулярно внешнему полю:

$$\chi_{32} = \frac{p_1 \chi_{12}}{\chi_{12} (1 - p_1) + 1}. \tag{3}$$

Существуют также формулы смешения с двумя эмпирическими параметрами, определяемыми из эксперимента. Первым параметром является форм-фактор включений N , второй параметр –

порог протекания p_c , зависящий в общем случае от ряда факторов помимо формы включений. Простейшей моделью такого типа является формула Оделевского [14–16]:

$$\chi_{32} = \frac{p}{(1 - p/p_c) N + 1/\chi_{12}} \underset{\chi_{12} \rightarrow \infty}{\approx} \frac{p}{(1 - p/p_c) N}. \tag{4}$$

Недостатками формулы являются ограниченный диапазон наполнений $p < p_c$, предположение о регулярности структуры с одинаковым взаимодействием всех включений и низкоконтрастная асимптотика, которая расходится со строгой формулой Ландау–Лифшица–Лойенги [17, 18]. Предполагается [8], что за порогом протекания ($p > p_c$) смесь описывается известной версией формулы Винера.

Подход, предложенный Оделевским, заключается в соединении матричных и симметричных моделей с переключением между различными структурами на пороге протекания p_c . Вблизи порога протекания точность этой модели низкая, поскольку, по всей видимости, перестройка структуры при изменении концентрации происходит постепенно.

Более близкая к реальности, по сравнению с формулами Оделевского и Брюгемана, модель Сихволы [19] содержит в качестве эмпирических параметров форм-фактор включений N , а также второй параметр a , который Сихвола определяет как некий формальный параметр структуры ($0 < a < \infty$). Ранее показано [15], что параметр a связан с критической концентрацией как $a = N(p_c^{-1} - 1)$. Для упрощения анализа и сравнения оригинальная формула Сихволы записана для анизотропного композита с регулярно ориентированными включениями:

$$\begin{aligned} &\frac{p(\chi_{12} - \chi_{32})}{1 + N\chi_{12} + N(p_c^{-1} - 1)\chi_{32}} = \\ &= \frac{(1 - p)\chi_{32}}{1 + N(p_c^{-1} - 1)\chi_{32}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Выражение (5) может быть приведено к прямой формуле Максвелла–Гарнетта и к симметричной формуле Брюгемана с помощью выбора подходящего значения порога протекания $p_c = 1$ или $p_c = N$ соответственно [20]. В отличие от диапазона $0 < p < p_c$, присущего формуле Оделевского, формула Сихволы (5) описывает диапазон наполнения $0 < p < 1$ и позволяет учитывать неоднородное взаимодействие между включениями.

Целью данной работы является разработка модели смешения (формулы связывающей свойства смеси со свойствами компонентов и их объемной концентрацией p), подходящей для восстановления магнитной СВЧ-проницаемости металлических включений из измеренных материальных параметров бинарных двухкомпонентных гетерогенных систем (композитов), наполненных металлическими порошками.

2. ОБЪЕДИНЕННАЯ ФОРМУЛА СМЕШЕНИЯ

При разработке модели смешения была использована теория локальной эффективной среды Винера. В отличие от модели Оделевского, предлагаемая модель учитывает постепенный переход между прямой и обратной матричными структурами. Предполагается, что симметричная структура формируется в переходной области концентраций Δp_c ; восприимчивость эффективной среды в этом диапазоне должна иметь некоторое среднее значение между восприимчивостью матриц граничных (при $p_1 \rightarrow 0$ и $p_1 \rightarrow 1$) структур. В предлагаемой модели, в отличие от моделей эффективной среды [10, 19], локальная восприимчивость χ_{local2} в широком диапазоне концентраций отличается от восприимчивости смеси $\chi_{\text{local2}} \neq \chi_{32}$, но χ_{local2} должна увеличиваться с увеличением концентрации. При $p \ll p_c$ локальная среда является компонентом матрицы $\chi_{\text{local2}} = 0$, при $p \approx p_c$ локальная среда должна быть близка к смеси $\chi_{\text{local2}} \approx \chi_{32}$, но при $p \gg p_c$ локальная среда формируется с учетом коэффициента наполнения, и ее восприимчивость пропорциональна концентрации частиц первого компонента смеси: $\chi_{\text{local2}} \approx p \times \chi_{12}$. Диапазон концентраций Δp_c зависит от множества факторов, отсутствующих в идеализированных строгих моделях.

Таким образом, необходимо выбрать функцию усреднения восприимчивости от концентрации p , которая постепенно изменяет локальную восприимчивость от $\chi_{\text{local2}} = 0$ при $p \rightarrow 0$ до $\chi_{\text{local2}} = \chi_{12}$ при $p \rightarrow 1$ с переходным диапазоном Δp_c и точкой инверсии p_c в качестве свободных параметров, получаемых из измеряемых данных.

В качестве такой функции для расчета локальной восприимчивости принято обобщенное среднее (другие функции усреднения не учитывают явление перколяции) между прямой $\chi_{\text{local2}} = (1-p)\chi_{22} = 0$ и обратной $\chi_{\text{local2}} = p\chi_{12}$ матричными смесями:

$$\chi_{\text{local2}} = \sqrt{(1-p)^2 \chi_{22}^{1-w} + p^2 \chi_{12}^{1+w}} = p\chi_{12}^{0.5(1+w)}. \quad (6)$$

Весовой фактор w зависит от расстояния от точки инверсии структуры $|p_c - p|$ и описывает гладкость инверсии матричной структуры. При $w = 0$ переход происходит ступенчато и резко; при $w = 1$ матричная структура не формируется вовсе, так как переходная зона Δp_c занимает весь $(0 < p < 1)$ диапазон наполнения.

Наполнение p обычно является средним значением по объему исследуемого образца смеси. Структура смеси в масштабе расстояний между соседними включениями определяется локальным наполнением, которое колеблется вокруг среднего значения. Среднее значение амплитуды этих флуктуаций может быть описано коэффи-

циентом флуктуации δ , который определяется технологией смешивания $(0 < \delta < \infty)$. Чем ближе смесь к чистому компоненту ($p \rightarrow 0$ или $p \rightarrow 1$), тем меньшее влияние коэффициент флуктуации оказывает на структуру смеси.

Ниже предполагается, что среднеквадратичное отклонение от инверсного наполнения p_c определяется гауссовым распределением φ , где коэффициент флуктуации δ является стандартным отклонением:

$$\varphi \left[\frac{p_c - p}{p(1-p)\delta} \right] = \frac{1}{p(1-p)\delta\sqrt{2\pi}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{p_c - p}{p(1-p)\delta} \right]^2 \right). \quad (7)$$

Таким образом, переходный диапазон Δp_c – это статистическая величина, зависящая от точки инверсии структуры p_c и коэффициента флуктуаций δ . Переходный диапазон определяется как диапазон наполнения, при котором локальное наполнение отклоняется от точки инверсии структуры с вероятностью 95%:

$$\Delta p_c \approx 2\delta(1-p_c)p_c.$$

Весовой множитель w в (6) является распределением отклонений от точки инверсии p_c :

$$w(p) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{Erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_c - p}{p(1-p)\delta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\delta p(1-p)}}} \exp(-t^2) dt \right), \quad (8a)$$

где t – переменная интегрирования.

Следует обратить внимание на то, что (8a) получено для гауссового распределения отклонений концентрации от точки инверсии p_c , но также могут быть применены и другие функции распределения. Более того, распределение $w(p)$ может быть заменено на более простую функцию, удовлетворяющую ограничениям: $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ и $w(p_c) = 0.5$, например:

$$w(p) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{th} \left[\frac{p - p_c}{p(1-p)\delta} \right] \right\}. \quad (8b)$$

Учитывая множитель, нормализующий коэффициент деполяризации и порог протекания $\left(\frac{N(1-p_c)}{p_c(1-N)} \right)$ (множитель такой же, как и в формуле Сихволы), можно переписать (6) в виде

$$\chi_{\text{local2}} = \left(\frac{N(1-p_c)}{p_c(1-N)} \right) p\chi_{12}^{w(p)}. \quad (9)$$

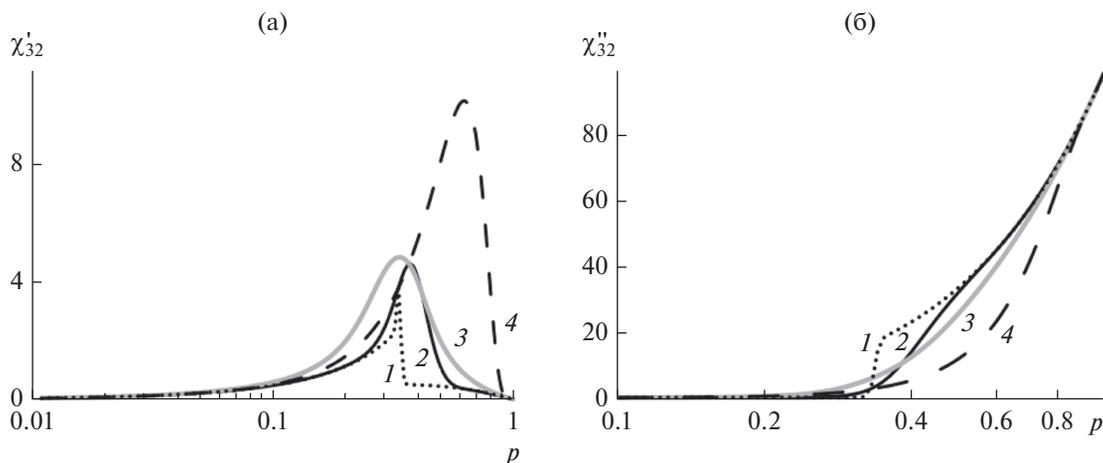


Рис. 1. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей восприимчивости от концентрации для композита с $\chi_{12} = 0 + i100$, $p_c = 0.33$, $N = 0.24$, рассчитанные по модели Сихволы (5) (кривая 3) и по формуле (10) для $\delta = 0.05$ (2), 0.5 (4), 1 (1).

Заменяя локальную восприимчивость в формуле Винера значением, полученным из (9), получаем формулу смешения, которая учитывает инверсию матричной структуры:

$$\chi_{32} = \frac{\chi_{12} p \left[1 + (1 - N) \left(\frac{N(1 - p_c)}{p_c(1 - N)} \right) p \chi_{12}^{w(p)} \right]}{N \chi_{12} (1 - p) + \left[1 + (1 - N) \left(\frac{N(1 - p_c)}{p_c(1 - N)} \right) p \chi_{12}^{w(p)} \right]}, \quad (10)$$

где χ_{32} и χ_{12} – восприимчивости смеси и включений соответственно; p – объемное содержание включений. Форма включений описывается фактором деполаризации N , как и в других формулах, p_c – точка инверсии структуры, t – переменная интегрирования. Весовой фактор $w(p)$ описывает плавность преобразования структуры за счет флуктуаций наполнения и определяет ширину переходного диапазона Δp_c .

Мы обозначили точку инверсии p_c , так же как порог протекания, поскольку эти величины близки друг к другу по физическому смыслу. Трансформация структуры описывается двумя параметрами, второй параметр δ относится к ширине переходного диапазона $\Delta p_c = 2\delta(1 - p_c)p_c$. Порог протекания совпадает с точкой инверсии структуры только при $\Delta p_c \rightarrow 0$; чем шире область переходных концентраций Δp_c , тем выше концентрация в точке инверсии структуры в сравнении с порогом протекания. Различие обусловлено тем, что порог протекания – это наполнение, при котором формируется первый бесконечный кластер включений, а точка инверсии – наполнение, при котором происходит инверсия матричной структуры.

3. КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ И ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ИНВЕРСНОЙ МОДЕЛИ И МОДЕЛИ СИХВОЛЫ

Выполнено численное сравнение формул (5) и (10). Контраст свойств компонентов выбран достаточно большим ($\chi_{12} = 0 + i100$) для выявления влияния формы включений на восприимчивость смеси. Рассчитанные зависимости восприимчивости смеси от концентрации по формуле Сихволы и по предложенной формуле показаны на рис. 1.

Форм-фактор включений $N = 0.24$ и порог протекания $p_c = 0.33$ (точка инверсии структуры в предложенной модели) близки к значениям, полученным для композитов, наполненных сферическими частицами [12, 21]. Флуктуационный множитель $\delta = 0.5$ взят таким, чтобы получить достаточно широкую переходную зону Δp_c с концентрационной зависимостью восприимчивости смеси, близкой к таковой в модели Сихволы.

Рассчитанные зависимости действительной χ'_{32} и мнимой χ''_{32} восприимчивости композита от наполнения p показаны на рис. 1.

Отличие (10) от (5) в том, что на кривой $\chi''_{32}(p)$ видны три области (рис. 1б): область внутри пря-

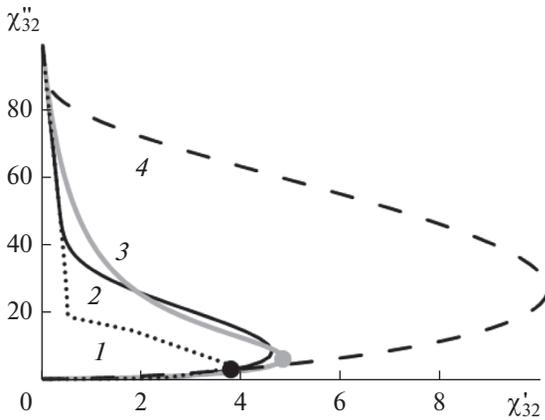


Рис. 2. Годограф фактора заполнения, рассчитанный по модели Сихволы (5) (кривая 3) и по формуле (10) с $\chi_{12} = 0 + i100$, $p_c = 0.33$, $N = 0.24$ и $\delta = 0.05$ (2), 0.5 (4) и 4 (1); черная точка – инверсия структуры; серая – порог перколяции в модели Сихволы.

мой матрицы χ''_{32} ниже, чем таковая в формуле Сихволы; внутри зоны обратной матрицы χ''_{32} достигает значений по формуле Сихволы, в то время как внутри переходной зоны наклон $\chi''_{32}(p)$ выше, чем таковой в уравнении (5). Значения χ''_{32} приблизительно равны вблизи p_c для обеих моделей.

Годографы коэффициента заполнения для одного и того же композита с $\chi_{12} = 0 + i100$ показаны на рис. 2 и 3. Точками на рис. 2 обозначено значение p_c , соответствующее порогу протекания по модели Сихволы (серый круг) и точке инверсии структуры (черный круг) для предложенной модели. На рис. 2 показаны результаты расчета для выражения (10) (черные линии) и для выражения (6) (серая линия). В случае модели Сихволы, ширина и высота пика χ'_{32} связана только с контрастом свойств компонентов; в случае (10) форма пика определяется значением δ , которое является эмпирическим параметром. Чем выше восприимчивость χ_{12} , тем ниже должно быть значение δ для лучшего согласия с (6) и тем ближе критическая концентрация (p_c в 6) в модели Сихволы нужна для инверсии структуры в предлагаемой модели (p_c в (10)). На рис. 3 представлена зависимость весового фактора w от заполнения (8а), (8б) для $\delta = 0.05$, 0.5 и 4.

Отличия между весовым фактором Гаусса (8а) и упрощенной аппроксимацией (8б) становятся видны при $\delta > 4$, когда переходный диапазон Δp_c покрывает заполнение $0 < p < 1$ и матричная структура не формируется вовсе. Таким образом, расчет весового фактора $w(p)$ по формуле (8б) гораздо проще, чем по формуле (8а), и не приводит к потере точности.

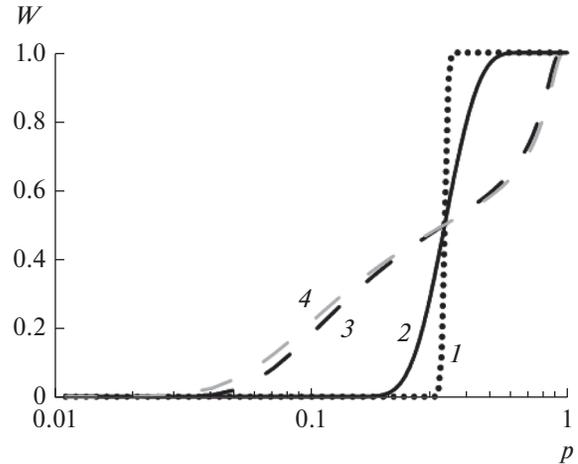


Рис. 3. Зависимости весового фактора w от концентрации, рассчитанные по формулам (8а) для $\delta = 0.05$ (1), 0.5 (2) и 4 (3) и (8б) для $\delta = 4$ (4).

Частотная зависимость восприимчивости от частоты по формуле Сихволы (серые кривые) и по предложенной модели (черные кривые) показана на рис. 4. Штриховая серая линия соответствует равным значениям порога протекания и инверсного заполнения.

Легко видеть, что параметры p_c и δ кривых частотной дисперсии восприимчивости $\chi_{32}(f)$ для одного произвольного заполнения p могут быть сделаны одинаковыми для обеих моделей (сплошные серые и черные кривые).

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Вычисления по формуле Сихволы и по предложенной формуле (10) сравнивались с материальными параметрами, измеренными для модельного композита на основе парафина ($\epsilon_2 = 2.3$), с карбонильным никелем; методика изготовления и измерения образцов описана в [20]. Измерения статической диэлектрической проницаемости и частотной зависимости комплексной магнитной проницаемости были выполнены для набора образцов, наполненных сферическими частицами ($\varnothing 12$ мкм) вплоть до концентрации $p \approx 0.35$ [21]; измерения статической диэлектрической проницаемости на больших концентрациях затруднительны. На основании измеренных данных возможно вычислить эффективный форм-фактор включений ($N = 0.2$) и порог протекания ($p_c = 0.43$).

Здесь мы аппроксимируем измеренную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от частоты $\epsilon_3(f)$ для композита, наполненного карбонильным никелем, как можно ближе к порогу

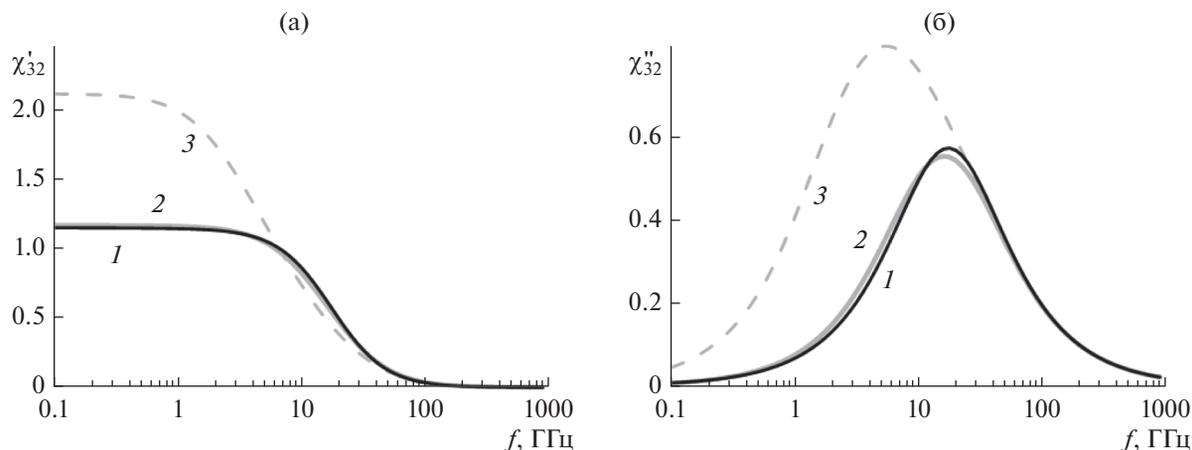


Рис. 4. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей восприимчивости смеси от частоты для композита с 20%-ным объемным содержанием проводящих включений (параметры $\sigma_1 = 55.62 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, $p_c = 0.33$, $N = 0.24$, $\delta = 0.5$), рассчитанные для модели Сихволы с $p_c = 0.33$ (кривые 3) и $p_c = 0.7$ (кривые 2) и по формуле (10) (кривые 1).

протекания. Концентрация ($p = 0.375$) ограничена хрупкостью и пористостью шайбы холодной прессовки. Значения $N = 0.2$ и $p_c = 0.43$ взяты из работы [17], параметр δ получен из измеренной зависимости диэлектрической восприимчивости от частоты.

Частотная зависимость магнитной проницаемости $\mu_1(f)$ для никелевых включений (рис. 5) получена с помощью (8а) и (10) из измеренной зависимости магнитной восприимчивости от частоты при $p = 0.375$, $N = 0.2$, $p_c = 0.43$ и $\delta = 1$. Кривыми 1 и 2 представлена магнитная проницаемость, полученная из измерений композитов, описанных выше; зависимости материальных параметров от концентрации аппроксимировались с помощью (8а) и (10). Частотные зависимости магнитной проницаемости частиц, рассчитанные по предложенной формуле, близки к кривым, полученным из формулы (5), хотя низкочастотная магнитная проницаемость из формулы (10) оказывается примерно на 20% выше приведенных данных. Измерения диэлектрической проницаемости показывают, что формула (10) при высоком наполнении ближе к измеренным данным, чем модель Сихволы, поэтому магнитная СВЧ-проницаемость никелевых сфер, представленная на рис. 5 (кривые 3 и 4), точнее по сравнению с данными, приведенными ранее [21].

Измеренная диэлектрическая проницаемость образца с $p = 0.375$ из Ni [21] показана на рис. 6 как годограф восприимчивости χ_{32} ; частотный диапазон 0.15...15 ГГц. Кривая 1 соответствует модели Сихволы с $N = 0.2$, $p_c = 0.43$ и проводимостью включений $\sigma_1 = 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$; кривая 2 соответствует формуле (10) с весовым множителем (8а) при $N = 0.2$, $p_c = 0.43$, $\delta = 1$. Кривая 3 соответствует модели Сихволы при $p_c = 0.38$. Кривой 4

показана измеренная частотная зависимость для композита из карбонильного никеля в парафиновой матрице.

Измеренная диэлектрическая проницаемость образца с $p = 0.375$ из Ni [21] показана на рис. 6 (пунктир) как годограф восприимчивости χ_{32} ; частотный диапазон 0.15...20 ГГц. Сплошная серая кривая соответствует модели Сихволы с $N = 0.2$, $p_c = 0.43$ и проводимостью включений $\sigma_1 = 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$; сплошная черная кривая соответствует формулам (8а) и (10) при $N = 0.2$, $p_c = 0.43$, $\delta = 1$.

Измеренная диэлектрическая восприимчивость больше соответствует формуле (10), чем (5), но расхождение с измеренными данными здесь сильно зависит от точности эмпирических пара-

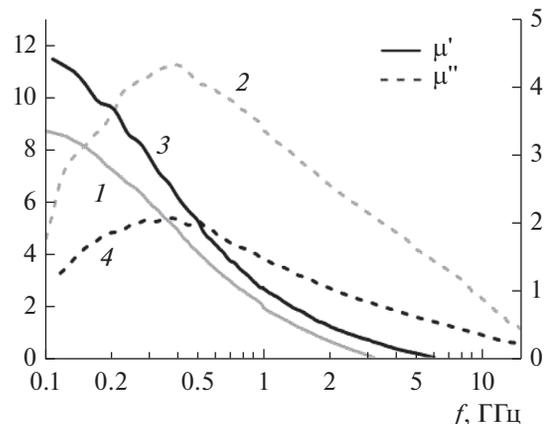


Рис. 5. Действительная (1, 3) и мнимая (2, 4) части магнитной проницаемости сфер Ni, полученные из измеренных магнитных проницаемостей композитов (1 и 2) при $p = 0.05...0.34$ [11]; измеренная магнитная СВЧ-проницаемость никелевых сфер (кривые 3 и 4).

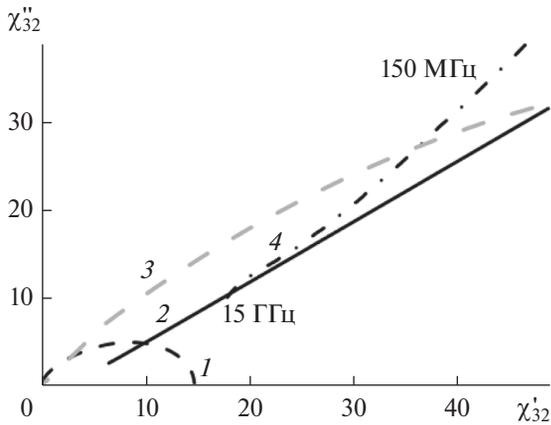


Рис. 6. Годограф восприимчивости ($\chi_{32}'' = \epsilon_3/\epsilon_2 - 1$) композита с объемным содержанием металлических включений $p = 0.375$ с форм-фактором $N = 0.2$ и $p_c = 0.43$ и проводимостью включений $\sigma_1 = 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Кривая 1 рассчитана по модели Сихволы (5), кривая 2 – по формуле (10) с весовым множителем (8а) при $\delta = 1$, кривая 3 – по формуле (5) при $p_c = 0.38$, кривой 4 показана измеренная частотная зависимость для композита из карбонильного никеля в парафиновой матрице.

метров. Выбор формулы для диапазона концентраций $p < p_c$ проблематичен (см. рис. 4). Причина в том, что выбор между гораздо более различными формулами смешения для низконаполненных ($p \ll p_c$) композитов практически невозможен: чем ближе модели смешения, тем выше концентрация, на которой проявляются различия. Достоверный выбор между (5) и (10) возможен лишь при исследовании материальных параметров композитов, наполненных вблизи и выше точки инверсии. Изготовление таких образцов затруднительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана модель смешения, в которой прямая матричная структура преобразуется в обратную при увеличении объемной доли. Структура симметричного типа рассматривается как переход между прямой и обратной матричными структурами. В отличие от подхода Оделевского, трансформация структуры происходит постепенно в пределах переходного наполнения Δp_c . Порог протекания p_c совпадает с точкой инверсии структуры только при $\Delta p_c \rightarrow 0$. Предложенная модель имеет три эмпирических параметра: форм-фактор N , точка инверсии структуры p_c и параметр локальных флуктуаций наполнения δ , зависящий от технологии изготовления образца и определяющий ширину переходной зоны $\Delta p_c(\delta)$. Учет преобразования структуры смеси в пределах зоны $\Delta p_c(\delta)$

увеличивает максимальное наполнение, где формула является точной по сравнению с двухпараметрическими моделями Оделевского и Сихволы.

Предложенная формула проверена сравнением частотных зависимостей комплексной диэлектрической и магнитной проницаемостей для образца, наполненного карбонильным никелем до концентрации ($p = 0.375$), близкой к порогу протекания. Значения форм-фактора и критического наполнения определяются из измеренной зависимости диэлектрической проницаемости от наполнения [21]. Измеренный годограф диэлектрической восприимчивости оказывается ближе к предложенной формуле, чем к модели Сихволы, (см. рис. 2 и 3), что подтверждает корректность предложенной формулы смешения. При низких наполнениях ($p \ll p_c$) предложенная формула и формула Сихволы трудно различимы (см. рис. 1–4).

Предлагаемая формула (10) получена для гауссова распределения локальных наполнений вблизи точки инверсии матричной структуры p_c (8а). Другие распределения или более простые функции $w(p)$, аппроксимирующие постепенную инверсию матричной структуры (например, выражение (8б)) могут также быть использованы в формуле (10) вместо (8а). Проблемы с точными измерениями как диэлектрической проницаемости, так и объемных долей компонентов смесей с высоким наполнением металлическими порошками делают пока практически нецелесообразным уточнение функции распределения $w(p)$ или увеличение числа эмпирических параметров.

Учет преобразования структуры смеси от прямой матричной к симметричной и далее к инверсной матричной делает предложенную модель более общей и точной до более высокого наполнения p по сравнению с известными моделями смешения. Поэтому применение модели для расчета проницаемости включений μ_1 из измеренных материальных параметров композита может повысить точность на низких частотах, где проницаемость μ_1 приближается к статической и, следовательно, может достигать высоких величин.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-08-00491 и № 20-52-53020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carrique F., Arroyo F.J., Jimenez M.L., Delgado A.V. // J. Chem. Phys. 2003. V. 118. № 4. P. 1945.
2. Bonifasi-Lista C., Cherkaev E. // Phys. Med. Biol. 2009. V. 54. № 10. P. 3063.
3. Berryman J.G. // Proc. Spec. Symp. on Wave Prop. and Scat., Midwest. Mech. Conf. XVII. May 6–8, 1981.

- University of Michigan at Ann Arbor (Ann Arbor Science, Ann Arbor, MI, 1982), Chapt. 7, P. 111.
4. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The Rock Physics Handbook. Cambridge: Univ. Press, 2009.
 5. *Cosenza P., Ghorbani A., Camerlynck C. et al.* // Near Surface Geophys. 2009. V. 7. № 5–6. P. 563.
 6. *Rozanov K.N., Starostenko S.N.* // European Phys. J. – Appl. Phys. 1999. V. 8. № 2. P. 147.
 7. *Kong L.B., Li Z.W., Liu L. et al.* // Intern. Mater. Rev. 2013. V. 58. № 4. P. 203.
 8. *Starostenko S.N., Rozanov K.N., Osipov A.V.* // J. Magn. Magn. Mater. 2006. V. 298. № 1. P. 56.
 9. *Bruggeman D.A.G.* // Ann. Phys. 1935. F. 5. B. 24. S. 636.
 10. *Polder D., van Santen J.H.* // Physica. 1946. V. 12. № 5. P. 257.
 11. *Woloszyn M., Maksymowicz A.Z.* // Task Quarterly. 2002. V. 6. № 4. P. 669.
 12. *Jamaian S.S., Mackay T.G.* // J. Nanophotonics. 2010. V. 4. № 1. P. 043510.
 13. *Rao Y., Qu J., Marinis T., Wong C.P.* // IEEE Trans. 2000. V. CPT-23. № 3. P. 680.
 14. *Оделевский В.И.* Обобщенная проводимость гетерогенных систем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: НИИ 34, 1947. 144 с.
 15. *Reynolds J.A., Hough J.M.* // Proc. Phys. Soc. B. 1957. № 70. № 8. P. 769.
 16. *Doyle W.T., Jacobs I.S.* // J. Appl. Phys. 1992. V. 71. № 8. P. 3927.
 17. *Looyenga H.* // Physica. 1965. V. 31. № 3. P. 401.
 18. *Tuncer E.* // arXiv:cond-mat/0503750, 2005.
 19. *Sihvola A.* // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. 2013. V. 11. № 4. P. 364.
 20. *Starostenko S.N., Rozanov K.N., Shiryayev A.O. et al.* // J. Appl. Phys. 2017. V. 121. № 24. P. 245107.
 21. *Starostenko S.N., Rozanov K.N., Shiryayev A.O., Lagarkov A.N.* // PIER M. 2018. V. 76. P. 143.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

УДК 519.633+621.372.22+681.5.017

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ФРАКТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫХ СРЕД

© 2020 г. А. Х. Гильмутдинов^{a, b, *}, Р. З. Даутов^c, П. А. Ушаков^d^aКазанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ), ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111 Российская Федерация^bНаучно-производственное объединение “Радиоэлектроника” им. В.И. Шимко, ул. Журналистов, 50, Казань, 420029 Российская Федерация^cКазанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008 Российская Федерация^dИжевский государственный технический университет им. М.Т. Калашиникова, ул. Студенческая, 7, Ижевск, 426069 Российская Федерация

*E-mail: agilmutdinov@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.

После доработки 15.01.2020 г.

Принята к публикации 31.03.2020 г.

Показано, что анализ фрактальных элементов, реализованных на основе неоднородной многослойной резистивно-емкостной среды, с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ) дает неудовлетворительные результаты для нормированных частот $\omega RC > 10$. Предложена гибридная вычислительная схема МКЭ на основе L -сплайнов в качестве конечных элементов (КЭ), которые на каждом КЭ являются решением дифференциального уравнения однородной RC -линии. Предложено одномерные и двумерные КЭ различной формы (трех-, четырех-, и т.д. угольные) заменить соответствующей физической схемой замещения, где сторонами многоугольного КЭ являются отрезки однородной RC -линии, названного нами одномерным однородным RC -элементом с распределенными параметрами (ОО RC -ЭРП). Таким образом, задача определения характеристик и параметров исследуемого фрактального элемента заменяется задачей определения импеданса полученной электрической схемы замещения на основе ОО RC -ЭРП. Такой метод анализа был назван нами методом конечных распределенных элементов.

DOI: 10.31857/S0033849420120062

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что на основе многослойной резистивно-емкостной среды можно создавать пассивные электронные элементы, импеданс которых \dot{Z}_F зависит от частоты в дробной степени:

$$\dot{Z}_F = \frac{1}{(j\omega)^\alpha F},$$

где $0 \leq |\alpha| \leq 1$, ω – круговая частота, F – некоторая вещественная постоянная. Такой импеданс получил название фрактальный импеданс, а элементы, характеризующиеся фрактальным импедансом, – фрактальными элементами (ФЭ) [1–3].

В работах [1, 2] показано, что изменять дробно-степенную зависимость импеданса от частоты можно за счет использования статических и/или динамических неоднородностей в резистивных или диэлектрических слоях: заданием законов изменения толщины и геометрических размеров

конфигурации слоев; изменением количества, местоположения контактов и их формы; вводя вырезы различной формы в слои, а также заданием определенных электрофизических свойств материалов слоев и законов их изменения.

Очевидно, что для создания ФЭ на данной основе необходимо в первую очередь разработать методы анализа многослойных, в общем случае неоднородных, резистивно-емкостных элементов с распределенными параметрами (RC -ЭРП), что и является целью данной работы.

1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим достаточно простой случай элемента, который образован последовательным формированием пленок (в частном случае, слоев):

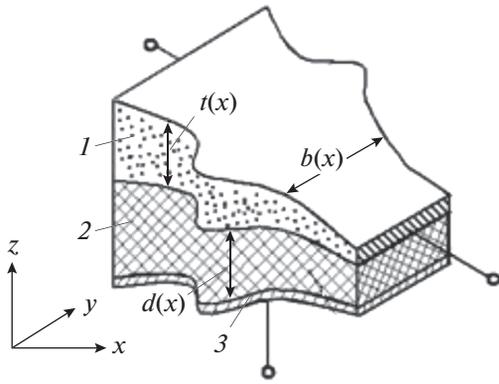


Рис. 1. Конструкция ОН R-C-0 ЭРП: 1 – резистивный слой, 2 – диэлектрик, 3 – идеальный проводник.

проводящего (слой с нулевым сопротивлением – слой 0), диэлектрического (слой C) и резистивного (слой R). Пусть ширина формируемых слоев b будет одинакова и зависит от координаты по длине слоев x по произвольному закону $b(x)$. Толщины диэлектрического и резистивного слоев также зависят от x по законам соответственно $d(x)$ и $t(x)$. Поскольку распределение потенциала в резистивном слое будет зависеть только от одной координаты, то такой элемент в дальнейшем будем называть “одномерный неоднородный резистивно-емкостный элемент с распределенными параметрами со структурой слоев вида R-C-0” (ОН R-C-0 ЭРП). Общий вид конструкции ОН R-C-0 ЭРП представлен на рис. 1.

В работе [1] показано, что уравнение для распределения потенциала U в его резистивном слое будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} - \frac{1}{r_n(x)} \frac{dr_n(x)}{dx} \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} = pr_n(x)c_n(x)U(x, p), \quad (1)$$

где $c_n(x)$ и $r_n(x)$ – соответственно погонная емкость и погонное сопротивление ОН R-C-0 ЭРП; p – комплексная частота.

В таком общем виде уравнение (1) из-за сложности зависимости погонных параметров RC-ЭРП от координаты x не имеет решения в замкнутой форме.

Очевидно, что с той или иной степенью приближения задачу можно решить численными методами. В настоящее время для решения подобного рода задач широко используют метод конечных элементов (МКЭ).

1.1. Конечно-элементная постановка задачи (классическая схема)

Рассмотрим ОН R-C-0-ЭРП в случае постоянной зависимости его погонных параметров от координаты x . При этом

$$r_n(x)c_n(x) = \text{const}. \quad (2)$$

Уравнение (1) в этом случае запишем в виде

$$-U'' + \gamma^2 U = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

где $\gamma^2 = j\omega RC$. Учитывая, что конечной целью анализа является определение первичных y -параметров элемента как четырехполюсника, для примера рассмотрим следующие краевые условия для уравнения (3):

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 1. \quad (4)$$

Решением задачи (3), (4) является функция

$$U(x) = \text{sh}(\gamma x) / \text{sh} \gamma,$$

а интересующие нас y -параметры равны $y_{21} = -U'(0)$, $y_{22} = U'(1)$.

Приближенное решение задачи (3), (4) классическим методом конечных элементов отыскивается в виде

$$\tilde{U}(x) = \sum_{i=2}^{N-1} \tilde{U}_i P_i(x) + P_N(x),$$

где $P_i(x)$ – базисные функции, графическое представление которых показано на рис. 2 в предположении, что сетка по оси x равномерная, т.е. $x^i = (i-1)h$, $h = 1/(N-1)$, где h – длина конечного элемента (КЭ).

Узловые потенциалы U_i находятся из решения системы уравнений

$$a(\tilde{U}, P_i) \equiv \int_0^1 (\tilde{U}' P_i' + \gamma^2 \tilde{U} P_i) dx = 0, \quad i = \overline{2, N-1},$$

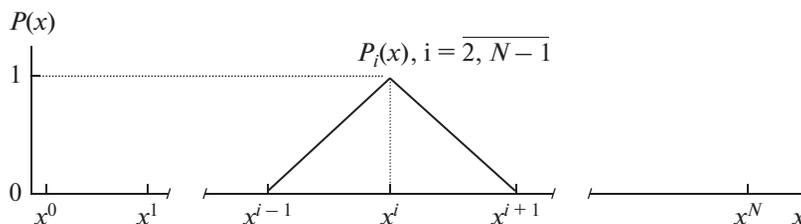


Рис. 2. Графическое представление базисных функций.

Таблица 1. y -Параметры ОО R - C -0 ЭРП, полученные методом конечных элементов в диапазоне частот $\omega_n = \omega RC$ от 1 до 100 для различных шагов сетки

ω_n	h	y_{21}/\tilde{y}_{21}		y_{22}/\tilde{y}_{22}	
		Re	Im	Re	Im
1	0	-0.980763	0.164638	1.022013	0.331238
	1/15	-0.980832	0.164654	1.021874	0.331256
	1/30	-0.980778	0.164641	1.021983	0.331242
10	0	-0.088180	0.668284	2.174056	2.272742
	1/15	-0.086953	0.671765	2.168975	2.278306
	1/30	-0.087910	0.669042	2.172950	2.273952
50	0	0.045499	-0.083721	4.999372	4.999866
	1/15	0.044399	-0.090324	4.946428	5.053342
	1/30	0.045252	-0.085121	4.987794	5.011464
100	0	-0.016986	0.000042	7.071058	7.071078
	1/15	-0.019762	0.002432	6.922388	7.222934
	1/30	-0.017551	0.000530	7.038418	7.103868

Примечание. Для каждого ω_n в первой строке ($h = 0$) приведены точные значения, соответствующие y_{2i} , во второй – значения \tilde{y}_{2i} при $h = 1/15$, в третьей – при $h = 1/30$.

которая равносильна следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} + \frac{h^2 \gamma^2}{6} (U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1}) = 0, \\ i = 2, N-1 \\ U_1 = 0, U_N = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Найдя решение системы (5) получаем искомые значения y -параметров \tilde{y}_{2i} :

$$\tilde{y}_{21} = a(\tilde{U}, P_1) = \frac{U_1 - U_2}{h} + \frac{\gamma^2 h}{6} (U_2 + 2U_1),$$

$$\tilde{y}_{22} = a(\tilde{U}, P_N) = \frac{U_N - U_{N-1}}{h} + \frac{\gamma^2 h}{6} (2U_N + U_{N-1}),$$

представленные в табл. 1.

Как видно из таблицы, МКЭ очень чувствителен к значению ω_n . При больших значениях ω_n ($\omega_n > 10$) результаты вычислений явно неудовлетворительны. Особенно большую погрешность имеет $\text{Im}(y_{21})$.

Итак, рассмотрение модельной задачи (3), (4) показывает, что метод конечных элементов, основанный на линейных функциях на конечном элементе, дает хороший результат лишь при $\omega_n \leq 1$ и не может обеспечивать требуемой точности при больших значениях ω_n . Объяснить это можно тем, что при $\omega_n \gg 1$ решение искомой задачи имеет сложный вид: φ колеблется примерно как $\sin \sqrt{\omega} x_1$ и имеет пограничный слой при $x_1 = 1$ шириной порядка $1/\sqrt{\omega_n}$.

Функции $U(x)$ плохо приближаются линейными функциями при небольшом числе КЭ. Для повышения точности решения рассматриваемой задачи необходимо уменьшать размеры КЭ в пограничном слое шириной $1/\sqrt{\omega_n}$, поэтому размеры КЭ вблизи границ контактных площадок должны быть $h \ll 1/\sqrt{\omega_n}$.

1.2. Гибридная схема

Поскольку классическая схема МКЭ, основанная на линейных функциях, мало пригодна для анализа RC -ЭРП даже с простейшей структурой слоев вида R - C -0 на частотах $\omega_n > 10$, то построим схему, которая лишена этого недостатка.

При построении расчетной схемы методом конечных элементов в качестве базисных функций будем использовать не полиномиальные сплайны, а так называемые L -сплайны. В связи с этим рассмотрим следующую задачу: найти такую конечно-элементную функцию U_h , которая является решением задачи

$$\left. \begin{aligned} L(U) &= -U'' + \gamma^2 U = 0, \quad x \in (0, 1), \\ U(0) &= U_0, \quad U(1) = U_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для определения U_h разобьем нормированную длину ОН R - C -0 ЭРП, т.е. отрезок $(0, 1)$, на конечные элементы так, как показано на рис. 3. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ являются конечными элементами, где $i = \overline{1, n}$. Их длины обозначим через h_i . На каж-

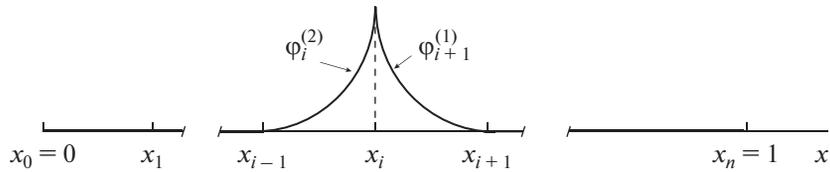


Рис. 3. Функция $\varphi_i(x)$ для конечного элемента.

дом КЭ $[x_{i-1}, x_i]$ введем две функции, $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}$, как решения следующих задач:

$$\begin{cases} -(\varphi_i^{(1)})'' + \gamma^2 \varphi_i^{(1)} = 0, \\ \varphi_i^{(1)}(x_{i-1}) = 1, \quad \varphi_i^{(1)}(x_i) = 0, \\ -(\varphi_i^{(2)})'' + \gamma^2 \varphi_i^{(2)} = 0, \\ \varphi_i^{(2)}(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что решения системы уравнений (7) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)}(x) &= \text{sh}(\gamma(x_i - x)) / \text{sh}(\gamma h_i), \\ \varphi_i^{(2)}(x) &= \text{sh}(\gamma(x - x_{i-1})) / \text{sh}(\gamma h_i). \end{aligned} \quad (8a)$$

Определим функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$ в соответствии с рис. 3:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(2)}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_i^{(1)}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8b)$$

Для начального $[x_0, x_1]$ и последнего $[x_{n-1}, x_n]$ КЭ потребуем:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases} \\ \varphi_n(x) &= \begin{cases} \varphi_{n-1}^{(2)}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases} \end{aligned}$$

Функцию $U_h(x)$ определим следующим образом:

$$U_h(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \quad (9)$$

где c_i – комплексные числа, $i = \overline{1, n-1}$, $c_0 = U_0$, $c_n = U_1$. Функция $U_h(x)$ вида (9) называется L -сплайном. Очевидно, $U_h(x)$ – непрерывная на $(0, 1)$ функция, $c_i = U_h(x_i)$. Кроме того, на каждом конечном элементе $U_h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(U_h) = -U_h'' + \gamma^2 U_h = 0. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов c_i воспользуемся методом Галеркина [5]. Обозначим через H_0

множество L -сплайнов ϑ_h , удовлетворяющих условию

$$\vartheta_h(0) = \vartheta_h(1) = 0.$$

Сплайн U_h определим из тождества:

$$a(U_h, \vartheta_h) = 0 \quad \text{для любых } \vartheta_h \in H_0. \quad (11)$$

Как видим, отличие от стандартного метода конечных элементов заключается лишь в том, что вместо кусочно-линейных сплайнов и соответствующих базисных функций используются L -сплайны и базисные функции, построенные выше.

Для определения коэффициентов сплайна $U_h(x)$ стандартно, как это принято в МКЭ, получается система алгебраических уравнений $\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$. Матрица \mathbf{A} собирается из локальных матриц проводимости конечных элементов $\mathbf{A}' = \{a'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^2$, с элементами

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\beta} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [d\varphi_l^{(\alpha)} / dx d\varphi_l^{(\beta)} / dx + \gamma^2 \varphi_l^{(\alpha)} \varphi_l^{(\beta)}] dx = \\ &= \frac{d\varphi_l^{(\alpha)}}{dx} \varphi_l^{(\beta)} \Big|_{x=x_{j-1}}^{x_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя сюда выражение (8a), можно записать окончательно матрицу проводимости для l -го конечного элемента в следующем виде:

$$\mathbf{A}' = \frac{\gamma}{\text{sh}\gamma h_i} \begin{pmatrix} \text{ch}\gamma h_i & -1 \\ -1 & \text{ch}\gamma h_i \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Обозначим $H_i = \gamma h_i$, $a_i = (H_i / \text{sh} H_i) / h_i$ и проведем сборку матриц проводимости конечных элементов. Получим систему алгебраических уравнений МКЭ в следующем виде:

$$\begin{cases} -a_i c_{i-1} + (a_i \text{ch} H_i + a_{i+1} \text{ch} H_i) c_i - a_{i+1} c_{i+1} = 0, \\ i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, \quad c_n = U_1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_i(c_i - c_{i-1}) - a_{i+1}(c_{i+1} - c_i) + \\ + [a_i(\text{ch} H_i - 1) + a_{i+1}(\text{ch} H_{i+1} - 1)] c_i = 0, \\ i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, \quad c_n = U_1. \end{cases} \quad (14)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} a_i(\operatorname{ch}H_i - 1) &= 2a_i \operatorname{sh}^2 \frac{H_i}{2} = \frac{\gamma \operatorname{sh}^2 \frac{H_i}{2}}{\operatorname{sh} \frac{H_i}{2} \operatorname{ch} \frac{H_i}{2}} = \\ &= \gamma \operatorname{th} \frac{H_i}{2} = \gamma^2 \left(\operatorname{th} \frac{H_i}{2} \right) \frac{h_i}{H_i}, \end{aligned}$$

то, определяя

$$\tilde{h}_i = \left(\operatorname{th} \frac{H_i}{2} \right) \frac{h_i}{H_i} + \left(\operatorname{th} \frac{H_{i+1}}{2} \right) \frac{h_{i+1}}{H_{i+1}},$$

представим систему (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} -(D_x^2 c)_i + \gamma^2 c_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, & c_n = U_1, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$(D_x^2 c)_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left[\frac{H_{i+1}}{\operatorname{sh} H_{i+1}} \frac{(c_{i+1} - c_i)}{h_{i+1}} - \frac{H_i}{\operatorname{sh} H_i} \frac{(c_i - c_{i-1})}{h_i} \right]. \quad (16)$$

Сравнивая (15) с дифференциальным уравнением (6) видим, что D_x^2 может рассматриваться как сеточная аппроксимация второй производной, где оператор D_x^2 определен выражением (16).

Оператор D_x^2 имеет простой и ясный вид в случае равномерной сетки, т.е. когда $h_i = h$, где $i = \overline{1, n}$. В этом случае имеем

$$(D_x^2 c)_i = -\delta \frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{h^2},$$

где $\delta = (H/\operatorname{sh}H)^2$, $H = \gamma h/2$, а система уравнений (14) записывается в виде

$$\begin{cases} -\delta \frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{h^2} + \gamma^2 c_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, & c_n = U_1. \end{cases} \quad (17)$$

Найдя решение системы (17), вычисляем первичные параметры по формулам $\tilde{y}_{21} = -U_h'(0)$, $\tilde{y}_{22} = -U_h'(1)$. Расчеты показывают, что для этой схемы, названной нами “гибридной”, с ростом ω_n точность вычисляемых u -параметров ОН R - C -0 ЭРП не ухудшается, как в случае использования линейных функций. Более того, рассчитанные u -параметры совпадают с u -параметрами, вычисленными по аналитическим выражениям. Поэтому гибридная схема стала основой для разработки метода конечных распределенных элементов (МКРЭ).

Отмеченный выше факт легко понять, если рассмотреть лишь один конечный элемент. В этом случае ясно, что сплайн U_h является решением задачи (6). Докажем, что это верно и при произвольном числе конечных элементов. Для этого

достаточно убедиться в том, что схема (16) является точной для задачи (6) в том смысле, что после решения системы алгебраических уравнений мы получаем вектор $c = (U_0, c_1, \dots, c_{n-1}, U_1)$ такой, что $c_i = U(x_i)$, где U — аналитическое решение задачи (6).

Докажем это. Обозначим через z_k функцию погрешности:

$$z_h = \sum_{i=0}^n [c_i - U(x_i)] \varphi_i(x) \equiv U_h - U_I,$$

где

$$U_h = U_h(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \quad U_I = \sum_{i=0}^n U(x_i) \varphi_i(x).$$

Через \bar{z}_h обозначим сопряженную к z_h функцию. На каждом элементе в соответствии с (10) имеем

$$-\bar{z}_h'' + \gamma^2 \bar{z}_h = 0. \text{ Поэтому}$$

$$\begin{aligned} a(U - U_I, \bar{z}_h) &= \\ &= \sum_{i=1}^h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[(U - U_I)' \bar{z}_h' + \gamma^2 (U - U_I) \bar{z}_h \right] dx = \quad (18) \\ &= \sum_{i=1}^h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-\bar{z}_h'' + \gamma^2 \bar{z}_h \right] (U - U_I) dx = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что по определению $a(U_h, \bar{z}_h) = 0$, $a(U, \bar{z}_h)$, получим

$$\begin{aligned} a(z_h, \bar{z}_h) &= a(U_h - U_I, \bar{z}_h) = a(U_h, \bar{z}_h) - a(U_I, \bar{z}_h) = \\ &= a(U, \bar{z}_h) - a(U_I, \bar{z}_h) = a(U - U_I, \bar{z}_h) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку из равенства

$$a(z_h, \bar{z}_h) = \int_0^1 \left(|z_h'|^2 + \gamma^2 |z_h|^2 \right) dx = 0$$

следует, что $z_h \equiv 0$, то $c_i = U(x_i)$, т.е. утверждение доказано.

1.3. Метод конечных распределенных элементов

Анализируя выражение для матрицы проводимости для l -го конечного элемента (13), можно заметить, что оно полностью совпадает с соответствующим выражением для отрезка однородной RC -линии со структурой слоев вида R - C -0 [1], который мы назвали одномерным однородным R - C -0-ЭРП.

Таким образом, конечный элемент “гибридной” схемы МКЭ может быть представлен в виде ее электрического аналога — ОО R - C -0-ЭРП, который назовем ОО конечным распределенным элементом (ОО КРЭ) со структурой слоев вида R - C -0. Тогда модель ОН R - C -0-ЭРП (см. рис. 1) на основе метода конечных распределенных элементов (МКРЭ) может быть представлена схемой замещения в виде каскадного соединения ОО КРЭ (рис. 4).

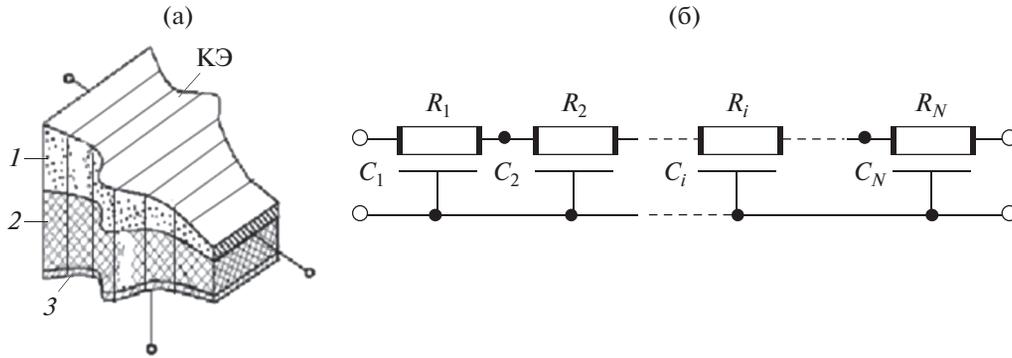


Рис. 4. Иллюстрация метода конечных распределенных элементов: а – ОН RC -0 ЭРП, разбитый на КЭ; б – схема замещения ОН RC -0-ЭРП на основе МКРЭ; 1 – резистивный слой, 2 – диэлектрик, 3 – идеальный проводник.

В данном случае при анализе конструкции ОН RC -ЭРП, представленной на рис. 4, схема замещения i -го КРЭ – ОО R_i - C_i -0 ЭРП (рис. 4б) имеет следующую Y -матрицу:

$$[Y_i]_{R-C-0} = \frac{\theta_i}{R_i \text{sh} \theta_i} \begin{pmatrix} \text{ch} \theta_i & -1 \\ -1 & \text{ch} \theta_i \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\theta_i = \sqrt{j\omega R_i C_i}$ – постоянная распространения i -го КРЭ, R_i, C_i – соответственно полное сопротивление и полная емкость i -го КРЭ.

В более общем случае в качестве КРЭ могут быть использованы и ОН RC -ЭРП с соответствующей структурой слоев, для которых имеются точные аналитические решения. Как видно, МКРЭ позволяет перевести задачу анализа конструкций RC -ЭРП (см. рис. 1) из области численных методов в область теории цепей (см. рис. 4б), которая отличается большей наглядностью.

В случае более сложной структуры слоев резистивно-емкостной среды для анализа конкретной конструкции RC -ЭРП необходимо разбить эту конструкцию на n КЭ, представить каждый КЭ соответствующим ему КРЭ, определить аналитически или численно параметры соответствующих многополюсников и применить МКРЭ.

Использование для решения этого класса задач классических методов решения уравнений в частных производных в известной нам литературе не встречалось.

2. АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ RC -ЭРП МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим приближенное решение двумерной задачи на основе гибридной схемы применительно к трехслойному двумерному однородному (ДО) RC -0 ЭРП, в котором потенциал в резистивном слое является функцией двух координат на плоскости. Уравнение распределения потен-

циала в его резистивном слое в установившемся режиме имеет вид [1]

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - T^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \gamma^2 \phi = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где $T = l/b$ – коэффициент формы ДО RC -0 ЭРП (l – длина, b – ширина элемента).

Пусть в области нормированных координат $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ введена ортогональная сетка (рис. 5а). Узлы сетки пронумерованы в сквозном порядке слева-направо-снизу-вверх (глобальная нумерация), число узлов по оси x – N_1 , по оси y – N_2 . Пусть далее, $\dot{U}_i = \dot{U}(x_i)$ – значение функции U в точке сетки x_i .

Сеточную задачу с учетом соотношений (15) и (16) запишем в виде

$$-(D_x^2 \phi)_i - (D_y^2 \phi)_i + \gamma^2 \phi_i = 0, \quad x_i \in \omega_h,$$

$$(D_x^2 \phi)_i = \frac{1}{\hbar_i^x} \left[\frac{H_{i+1}^x}{\text{sh} H_{i+1}^x} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_{i+1}^x} - \frac{H_i^x}{\text{sh} H_i^x} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h_i^x} \right],$$

$$(D_y^2 \phi)_i = \frac{1}{\hbar_i^y} \left[\frac{H_{i+N_1}^y}{\text{sh} H_{i+N_1}^y} \frac{\phi_{i+N_1} - \phi_i}{h_{i+N_1}^y} - \frac{H_i^y}{\text{sh} H_i^y} \frac{\phi_i - \phi_{i-N_1}}{h_i^y} \right],$$

где D_x^2 и D_y^2 – одномерные операторы, аппроксимирующие соответственно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad H_i^x = \gamma h_i^x, \quad H_i^y = \gamma h_i^y / T,$$

$$\hbar_i^x = \frac{h_i^x}{H_i^x} \text{th} \frac{H_i^x}{2} + \frac{h_{i+1}^x}{H_{i+1}^x} \text{th} \frac{H_{i+1}^x}{2},$$

$$\hbar_i^y = \frac{h_i^y}{H_i^y} \text{th} \frac{H_i^y}{2} + \frac{h_{i+1}^y}{H_{i+1}^y} \text{th} \frac{H_{i+1}^y}{2}.$$

При равномерной по каждому направлению сетки с шагами $h_1 = 1/(N_1 - 1)$, $h_2 = 1/(N_2 - 1)$ се-

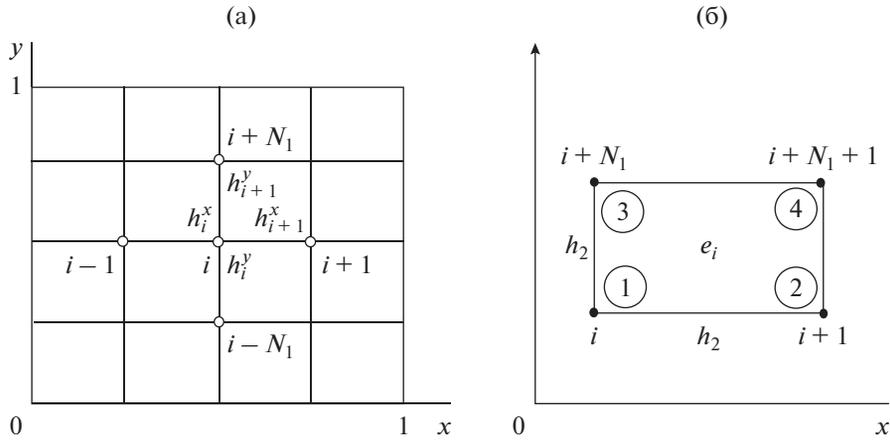


Рис. 5. Нумерация узлов сетки: а – глобальная; б – локальная.

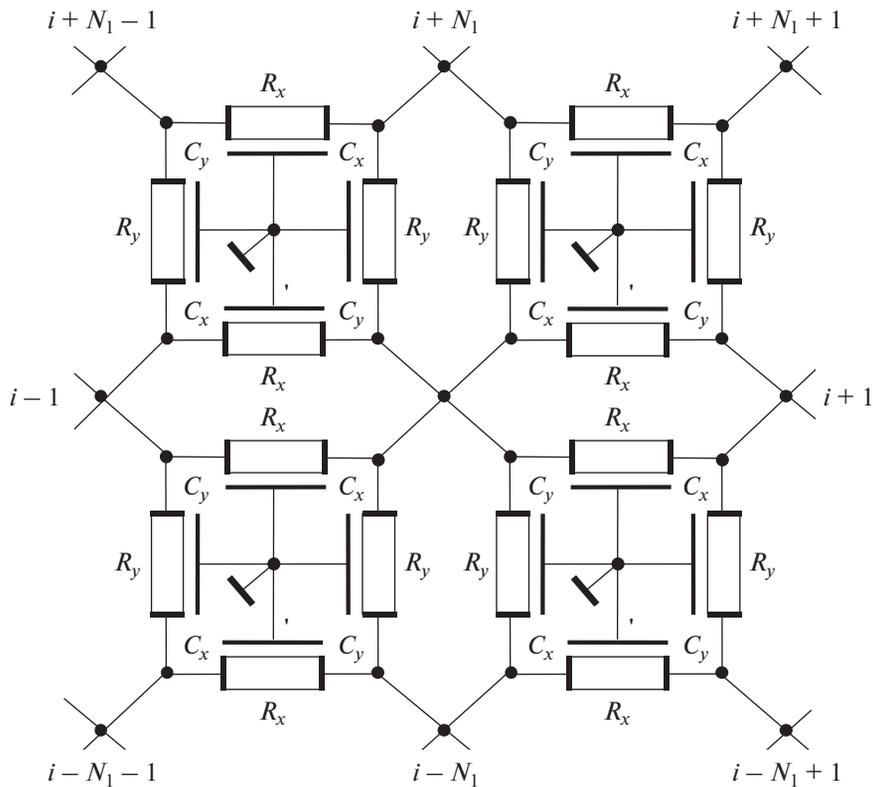


Рис. 6. Фрагмент схемы замещения участка ДО RC-ЭРП со структурой слоев вида R-C-0.

точная задача значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\delta_x \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h_1^2} - \\
 & -\delta_y \frac{\varphi_{i+N_1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-N_1}}{h_2^2} + \gamma^2 \varphi_i = 0, \quad (21) \\
 & \delta_x = (H^x / \text{sh} H^x)^2, \quad \delta_y = (H^y / \text{sh} H^y)^2, \\
 & H^x = \gamma h_1 / 2, \quad H^y = \gamma h_2 / 2\Gamma.
 \end{aligned}$$

Матрица проводимости i -го конечного элемента (рис. 5б) в случае равномерной сетки имеет вид

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} c & -S_1 & -S_2 & 0 \\ -S_1 & c & 0 & -S_2 \\ -S_2 & 0 & c & -S_1 \\ 0 & -S_2 & -S_1 & c \end{bmatrix},$$

где с учетом (21) получаем

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \delta_x, \quad S_2 = \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_2} \delta_y, \quad c = \frac{h_1 h_2 \gamma^2}{4} + S_1 + S_2.$$

Проведя сборку глобальной матрицы проводимости, учитывая матрицы проводимостей каждого конечного элемента и краевые условия, получим окончательную систему алгебраических уравнений, решение которой и даст приближенный ответ исходной задачи.

Физическая интерпретация сеточной задачи изображена на рис. 6, на котором представлен фрагмент схемы замещения участка ДО RC -ЭРП со структурой слоев вида $R-C-0$.

u -Параметры ДО $R-C-0$ ЭРП с заданной топологией при использовании МКРЭ легко вычислить в математических пакетах Mathcad, Matlab или в программах схемотехнического моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе предложен метод анализа элементов, выполненных на основе многослойной, в общем случае неоднородной, резистивно-емкостной среды, основанный на методе конечных элементов. Однако в отличие от классического МКЭ, основанном на линейных или билинейных функциях на конечном элементе, здесь используется гибридная схема, в которой функция, аппроксимирующая распределение потенциала на конечном элементе, является точным решением уравнения однородной или неоднородной RC -линии. На основе гибридной схемы

предложен метод конечных распределенных элементов, суть которого заключается в том, что каждый конечный элемент замещается ОО или ОН RC -ЭРП с соответствующей структурой слоев (ОО КРЭ для одномерной задачи) или набором ОО КРЭ по граням КЭ (ДО КРЭ для двумерной задачи). При этом для вычисления u -параметров функционального элемента на основе резистивно-емкостной среды нет необходимости находить распределение потенциалов в резистивных слоях этой среды. Достаточно определить первичные u -параметры полученного многополюсника – схемы замещения, составленной из КРЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гильмутдинов А.Х.* Резистивно-емкостные элементы с распределенными параметрами: анализ, синтез и применение. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005.
2. *Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* Фрактальные элементы: Учебное пособие / Под ред. А.Х. Гильмутдинова / Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2013.
3. *Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 413.
4. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986.
5. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988.

УДК 539.23,621.793.18

РОСТ ТОНКИХ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНОК NiO НА ПОДЛОЖКАХ ИЗ LiNbO₃

© 2020 г. В. А. Лузанов*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация

*E-mail: valery@luzanov.ru

Поступила в редакцию 26.06.2020 г.

После доработки 26.06.2020 г.

Принята к публикации 30.06.2020 г.

Впервые сообщается о получении эпитаксиальных (111) NiO-пленок на подложках (0001) LiNbO₃ методом реактивного магнетронного распыления. Рентгеноструктурный анализ полученных пленок проводился в сочетании с послойным плазменным травлением. Показано, что небольшое расхождение кристаллических решеток позволяет получить структурно совершенные тонкие слои NiO на подложках LiNbO₃. С увеличением толщины пленки структурное совершенство пленки ухудшается из-за накопления дислокаций вследствие ионной бомбардировки во время роста.

DOI: 10.31857/S003384942011011X

Оксид никеля представляет собой широкозонный полупроводник *p*-типа и антиферромагнетик с температурой Нееля 525 К. Он имеет кубическую решетку типа NaCl (пространственная группа *Fm-3m*). По разным данным параметр решетки лежит в диапазоне: 0.41684...0.42100 нм. Благодаря уникальным физическим свойствам оксида никеля, высококачественные пленки NiO представляют большой интерес для использования в электрохромных устройствах [1], системах смещения обмена [2] и ультрафиолетовых детекторах [3].

Ниобат лития (LiNbO₃) является популярным материалом для использования в качестве электрооптических и электроакустических устройств, преобразователей энергии и т.д. Он имеет тригональную кристаллическую систему, пространственную группу *R3c* и параметры решетки $a = 0.5148$ нм и $c = 1.3863$ нм. Его кристаллическая структура не имеет центральной симметрии, поэтому ниобат лития является сегнето- и пьезоэлектриком. Комбинация пленки оксида никеля с подложкой из ниобата лития представляет несомненный интерес для различных физических исследований.

Кристаллографическая ориентация тонких пленок имеет большое значение в работе современных электронных, магнитных гетероструктур и устройств, особенно когда толщина пленок уменьшается до нанометрового масштаба. Ранее сообщалось об осаждении эпитаксиальных пленок оксида никеля на подложках из сапфира различными методами: импульсное лазерное осаждение

[4], атомно-слоевое осаждение [5], магнетронное распыление [6], химическое осаждение из газовой фазы [7].

В данной работе впервые сообщается об осаждении эпитаксиальных пленок оксида никеля на подложке из ниобата лития методом постоянного магнетронного реактивного распыления.

Подготовка образцов проводилась в модифицированной вакуумной катодно-распылительной системе A550VZK (Leybold-Heraeus GmbH). Система с базовым давлением 1×10^{-6} Торр была оснащена восьмидюймовыми катодами с магнитами для использования в качестве системы магнетронного распыления. В качестве подложки для выращивания пленок оксида никеля использовали монокристалл (0001) LiNbO₃. Тонкие пленки NiO осаждали в реакционной смеси O₂–Ag в соотношении 1 : 2 при давлении 2×10^{-2} Торр. Перед напылением подложку нагревали до 400°C.

Полученные пленки были исследованы методом рентгеноструктурного анализа на автоматизированном двухкристальном дифрактометре ДРОН-3, работающем по схеме Брэгга–Брентано. Использовались кварцевый монохроматор и излучение CuK_{α1}.

На рис. 1 представлена дифрактограмма от пленки NiO, нанесенной на подложку LiNbO₃. На дифрактограмме присутствует только одно отражение от пленки (111) NiO. На вставке показан профиль пика (111) NiO.

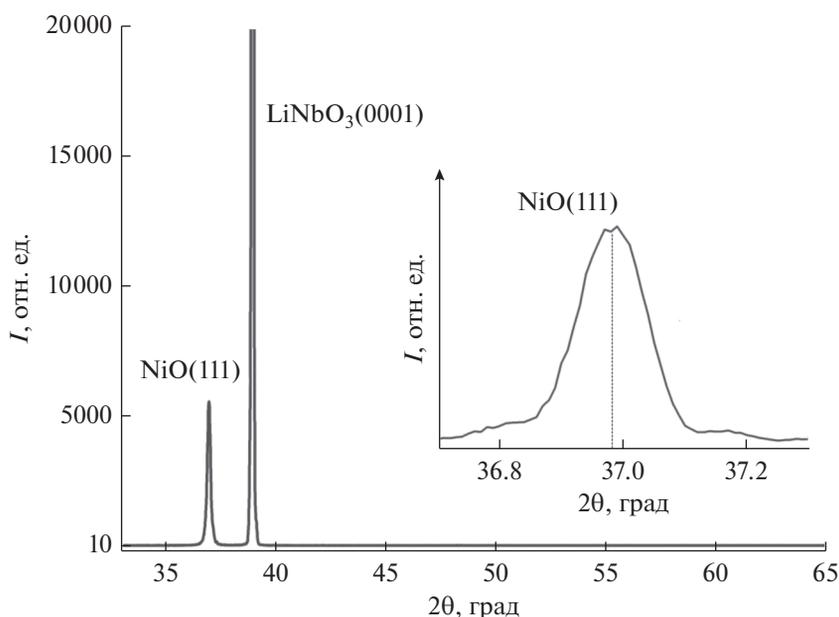


Рис. 1. Рентгеновский спектр пленки NiO, выращенной на подложке из LiNbO₃; на вставке – профиль пика (111) NiO.

На рис. 2 представлена полюсная фигура плоскостей {113} эпитаксиальной пленки (111) NiO. Можно сделать вывод, что кристаллографические ориентационные соотношения между пленкой и подложкой следующие: (111) NiO||{(0001) LiNbO₃ и {110} NiO||{010} LiNbO₃. В этом случае рассогласование решеток составляет 0.1%, что на порядок меньше, чем при нанесении пленок NiO на Al₂O₃. Полюсная фигура имеет симметрию шестого порядка, что свидетельствует о наличии 180-градусных двойников в пленке. Это обычно имеет место при гетероэпитаксии пленок с кубической симметрией на подложках с тригональной симметрией [8–10].

Для определения качества полученных пленок были измерены кривые качания от плоскости (111). Обнаружено, что профиль кривой качания отличается от гауссового распределения и представляет собой суперпозицию по меньшей мере двух гауссовых кривых. Это означает, что структура пленки не является однородной.

Для изучения изменений структуры пленки по толщине здесь был использован метод послойного травления пленок в установке радиочастотного плазменного травления Z401S (Leybold GmbH), описанный ранее в [11]. Травление проводилось в чистом аргоне с энергией 300 эВ при плотности мощности 300 мВт на кв. см.

На рис. 3 показаны результаты измерения кривой качания после определенного времени травления пленки. Как видно из рисунка, кривая качания исходной пленки имеет дополнительное уширение в нижней части. После 20 мин травления пленки в аргоне уширение уменьшается, а че-

рез 40 мин практически исчезает. Из этого можно сделать вывод, что в начале осаждения пленка является наиболее совершенной. Полуширина кривой качания составляла 0.05°. С увеличением толщины пленки происходит накопление количества дефектов в пленке вследствие ионной бомбардировки. Это приводит к уширению в нижней части пика.

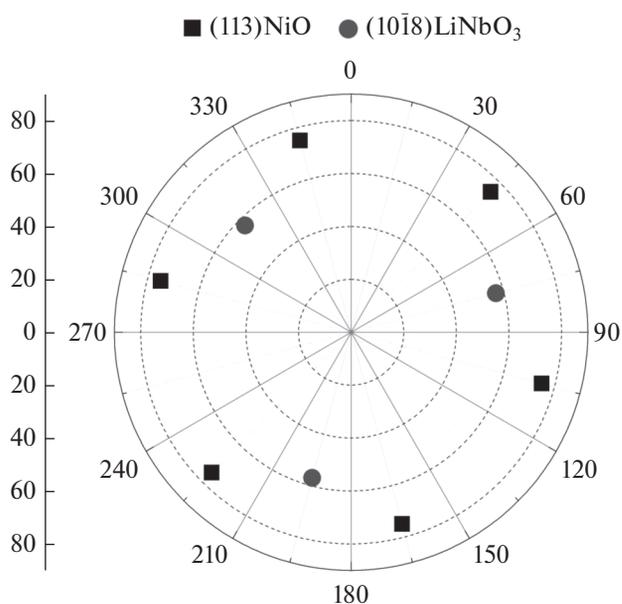


Рис. 2. Полюсная фигура от пленки (111) NiO, выращенной на (0001) LiNbO₃.

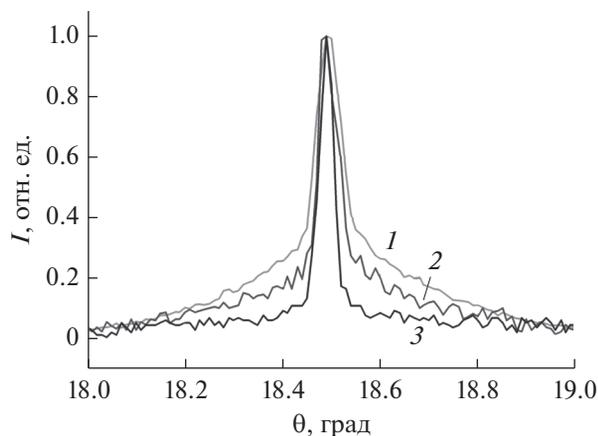


Рис. 3. Кривые качания после различного времени травления пленки: 0 (1), 20 (2) и 40 мин (3).

Таким образом, исследования показали, что с помощью магнетронного реактивного распыления на постоянном токе можно получать высококачественные пленки NiO на подложках LiNbO₃. Несмотря на наличие ионной бомбардировки в процессе роста пленки, рассогласование решетки на уровне 0.1% допускает гетероэпитаксию тонких слоев с ориентацией (111) на подложки с ориентацией (0001).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-07-00432, 18-29-19047, 20-07-01075).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ren Y., Chim W.K., Guo L. et al. // Solar Energy Mater. and Solar Cells. 2013. V. 116. P. 83.
2. Del Bianco L., Boscherini F., Fiorini A.L. et al. // Phys. Rev. B. 2008. V. 77. № 9. P. 094408.
3. Ohta H., Hirano M., Nakahara K. et al. // Appl. Phys. Lett. 2003. V. 83. № 5. P. 1029.
4. Kakehi Y., Nakao S., Satoh K., Kusaka T. // J. Crystal Growth. 2002. V. 237–239. Pt. 1. P. 591.
5. Lindahl E., Lu J., Ottosson M., Carlsson J.-O. // J. Crystal Growth. 2009. V. 311. № 16. P. 4082.
6. Wang Y., Ghanbaja J., Boulet P. et al. // Acta Materialia. 2019. V. 164. P. 648.
7. Uchida K., Yoshida Ken-ichi, Zhang D. et al. // AIP Advances. 2012. V. 2. № 4. P. 042154.
8. Лузанов В.А., Котелянский И.М., Шустин Е.Г. // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 714.
9. Lee J.H., Kwon Y.H., Kong B.H. et al. // Cryst. Growth and Design. 2012. V. 12. № 5. P. 2495.
10. Yamauchi R., Hamasaki Y., Shibuya A. et al. // Sci. Rep. 2015. V. 5. P. 14385.
11. Лузанов В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 7. С. 728.

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ТЕСТИРОВАНИЕ ПАРАКСИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЛЕНТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2020 г. Т. М. Сапронова^а, В. А. Сыровой^{а, *}

^аВЭИ – филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 17.05.2019 г.

После доработки 17.05.2019 г.

Принята к публикации 17.05.2020 г.

Проведено исследование параксиальной модели плотного электронного потока с привлечением аналитических решений, описывающих криволинейные ленточные пучки в однородном магнитном поле и при его отсутствии. Отмечена важность использования понятия невязки как критерия точности приближенного решения, величина которой соотнесена с ошибкой, известной в случае рассмотренных эталонных течений.

DOI: 10.31857/S0033849420120153

ВВЕДЕНИЕ

Параксиальная теория интенсивных электронных пучков сводится к построению решения в виде асимптотического ряда по малому геометрическому параметру ϵ , характеризующему узость занятой зарядами области. Она приводит к модели, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями для квазиаксиально-симметричных потоков с пространственной осью, трубчатых осесимметричных пучков и криволинейных ленточных течений. С основными результатами и библиографией по этой теме можно ознакомиться в монографиях [1, 2].

В отличие от популярных в настоящее время коммерческих пакетов траекторного анализа параксиальный подход в совокупности с теорией антипараксиальных разложений позволяют сформулировать имеющие теоретическое обоснование алгоритмы реализации теплового зазора и торцевых областей ленточных пучков с близким к прямоугольному сечением, а при наличии сносовой скорости (планарный гиротрон) — и в случае сечения в виде параллелограмма [3–5].

В соответствии с обычными представлениями о точности приближенного решения в виде асимптотического ряда для толщины пучка порядка ϵ при расчете траекторий можно ожидать ошибки порядка ϵ^2 , притом что само понятие малого параметра по отношению к характерному масштабу длины задачи нуждается в обосновании. Во всякой приближенной теории естественным является желание выйти за рамки ос-

новных предположений: для параксиального подхода распространить рассмотрение на более широкие пучки с неоднородным распределением плотности по сечению при сохранении допустимого уровня ошибки. Общие соображения не позволяют оценить результат подобного рода испытания модели “на прочность”. Соответствующая информация может быть получена при тестировании на известных точных решениях уравнений пучка. Особенно удобны для этой цели решения в элементарных функциях.

В последнее время интерес специалистов по сильноточной электронике, в которой необходимо учитывать самосогласованное электромагнитное поле, привлекают устройства с планарной геометрией (см., например, библиографию в [3–7]) и ленточными электронными пучками с прямоугольным или эллиптическим сечением.

Цель работы — тестирование параксиальной модели ленточных пучков с использованием известных точных решений в элементарных функциях. Подобное исследование проводится, по видимому, впервые. В работе [8] возможности модели тонких трубчатых пучков рассматривались по отношению к геометризованной теории двумерных потоков.

1. УРАВНЕНИЯ ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА

Нерелятивистский ленточный пучок с подобными трубками тока описывается обыкновенным уравнением второго порядка относительно толщины $f(l)$ при условии задания на оси потока с

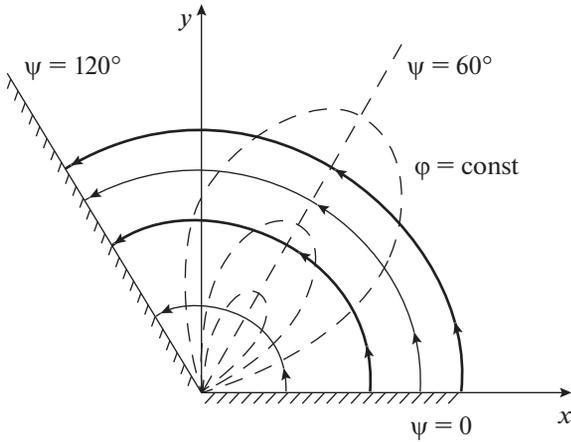


Рис. 1. Течение с траекториями-окружностями (параксиальная область выделена более толстыми линиями).

кривизной $k(l)$ распределений потенциала $U(l)$ и компонент напряженности магнитного поля $\Omega_l(l), \Omega_s(l), \Omega_x(l)$. Это уравнение дополняется рядом соотношений для параметров пучка [2]. Уравнения сформулированы в системе l, s (длина дуги оси, расстояние по нормали к ней) в нормировках, исключающих все физические постоянные используемой системы единиц [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= V_l \frac{d}{dl} \left(V_l \frac{df}{dl} \right) = -\bar{P}B(l) + [\rho - N(l)]f, \\ \frac{d}{dt} &= V_l \frac{d}{dl}; \quad B(l) = -2kV_x - \Omega_l - \frac{V_x}{V_l} \Omega_x, \\ 2U &= V_l^2 + V_x^2, \quad \bar{P} = f_0 \Omega_{l0}, \\ N(l) &= \frac{d^2 U}{dl^2} + 2k^2 V_l^2 + \Omega_l^2 + \Omega_x^2 + 2kV_l \Omega_x - V_x \frac{d\Omega_s}{dl}; \\ \varphi &= U + E_s s + \frac{1}{2}(\rho - \bar{N})s^2, \\ E_s &= kV_l^2 - V_x \Omega_l + V_l \Omega_x, \quad \bar{N} = \frac{d^2 U}{dl^2} - kE_s, \\ v_l &= V_l + (kV_l + \Omega_x)s, \quad v_s = \frac{ds}{dt} = \xi V_l \frac{df}{dl} = \frac{v_l}{f} \frac{df}{dl} s, \\ v_x &= V_x - \Omega_l s, \quad V_x = \int \Omega_s dl, \quad s = \xi f(l), \\ H_l &= \Omega_l + \left(\frac{d\Omega_s}{dl} + k\Omega_l \right) s, \\ H_s &= \Omega_s + \left(-\frac{d\Omega_l}{dl} + k\Omega_s \right) s. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь φ, ρ – потенциал электрического поля и плотность пространственного заряда; v_l, v_s, v_x – компоненты скорости; циклическая координата x дополняет пару l, s до правой тройки; ξ – пара-

метр, маркирующий трубки тока, $\xi = 1$ на границе пучка.

При выполнении условий термоэмиссии на стартовой поверхности плотность пространственного заряда выражается из уравнения сохранения тока

$$\rho V_l f = J f_0, \tag{2}$$

где J – плотность тока эмиссии; индекс нуль относится к стартовой поверхности (эмитирующей поверхности или поверхности инжекции).

Для электростатических потоков соотношения (1) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= 2U \frac{d^2 f}{dl^2} + \frac{dU}{dl} \frac{df}{dl} = \left[\rho - \left(\frac{d^2 U}{dl^2} + 4k^2 U \right) \right] f, \\ \varphi &= U + 2kUs + \frac{1}{2} \left[\rho - \left(\frac{d^2 U}{dl^2} - 2k^2 U \right) \right] s^2, \\ 2U &= V_l^2, \quad E_s \equiv E = 2kU. \end{aligned} \tag{3}$$

2. ТЕЧЕНИЕ С ТРАЕКТОРИЯМИ-ОКРУЖНОСТЯМИ

Решение [9] описывает эмиссию в ρ -режиме с полуплоскости $\psi = 0$ и траекториями $R = \text{const}$ (R, ψ – полярные координаты) при отсутствии магнитного поля (рис. 1):

$$\begin{aligned} 2\varphi &= \frac{2U(\psi)}{R^2}, \quad 2U = V_l^2 = (2J_0)^{2/3} \sin^{4/3} \frac{3\psi}{2}, \\ J &= \frac{J_0}{R^5}, \quad \rho = \frac{J}{V_l} = \frac{1}{R^4} \frac{J_0}{\sqrt{2U}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Выберем в качестве оси окружность $R_0 = 1$, потенциал на которой определен функцией $U(\psi)$ в соответствии с (4), а плотность ρ на основании (2) описывается формулой

$$\rho = \frac{J_0 f_0}{V_l f}. \tag{5}$$

Тогда уравнение для f из (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\psi^2} + \text{ctg} \frac{3\psi}{2} \frac{df}{d\psi} &= \frac{1}{2}(f - f_0) \sin^{-2/3} \frac{3\psi}{2}, \\ l &= R_0 \psi = \psi. \end{aligned} \tag{6}$$

Оно имеет точное решение, удовлетворяющее параксиальной постановке задачи об узком ленточном пучке:

$$f = f_0. \tag{7}$$

Таким образом, приближенное решение для траектории совпадает с точным решением (4):

$$R = R_0 + f = \text{const}. \tag{8}$$

Представление об ошибке приближенного решения (φ_{ap}) получим, сопоставляя параметры пото-

Таблица 1. Сопоставление результатов параксиальной модели с точным решением (4) – траектории-окружности

f	R	$\bar{\varphi}_{ap}$	$\bar{\varphi}_{ex}$	$\delta_{\varphi}, \%$	\bar{E}_{ap}	\bar{E}_{ex}	$\delta_E, \%$	$\bar{\rho}_{ex}$	N_{ρ}
0.05	0.95	1.1075	1.1080	0.045	2.3	2.3327	1.40	1.228	-1.05
-0.05	1.05	0.9075	0.9070	0.052	1.7	1.7277	1.60	0.823	0.96
0.1	0.9	1.2300	1.2346	0.37	2.6	2.7435	5.23	1.524	-2.2
-0.1	1.1	0.8300	0.8264	0.48	1.4	1.5026	6.85	0.683	1.84

ка с соответствующими точными выражениями (φ_{ex}). Результаты приведены в табл. 1 при использовании следующих обозначений:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{U}, \quad \bar{E} = \frac{E}{U}, \quad \bar{\rho}_{ex} = \frac{\rho(R)}{\rho(1)}; \\ \delta_{\varphi} &= |\varphi_{ap}/\varphi_{ex} - 1|, \quad \delta_E = |E_{ap}/E_{ex} - 1|; \\ \bar{\varphi}_{ex} &= \frac{1}{R^2}, \quad \bar{\varphi}_{ap} = 1 + 2s + 3s^2, \\ \bar{E}_{ex} &= \frac{2}{R^3}, \quad \bar{E}_{ap} = 2 + 6s, \quad \bar{\rho}_{ex} = \frac{1}{R^4}. \end{aligned} \tag{9}$$

Следует иметь в виду, что для правой системы l, s нормаль s направлена в сторону уменьшения радиуса, так что имеем $R < 1$ при $f > 0$ и $R > 1$ при $f < 0$.

Из табл. 1 следует, что информация, необходимая для расчета формирующих электродов при точной постановке задачи (потенциал и нормальное поле на границе) для пучка с толщиной 0.1 ($|f| = 0.05$) при перепаде плотности в 40% известна с ошибкой порядка 1.5%; при толщине 0.2 ($|f| = 0.1$) соответствующие цифры составляют 80% и ~7%.

Величина N_{ρ} имеет смысл невязки для уравнения Пуассона и обсуждается далее в разд. 5.

3. ПЛОСКОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Эталонное решение. Решение получено в работе [10], картина течения изображена на рис. 2. Компоненты скорости u, v в декартовых координатах x, y , потенциал φ и плотность пространственного заряда описываются формулами

$$\begin{aligned} u &= \frac{\text{sh}2y}{\text{ch}2y + \cos 2x}, \quad v = \frac{\sin 2x}{\text{ch}2y + \cos 2x}, \\ 2\varphi &= \frac{\text{ch}2y - \cos 2x}{\text{ch}2y + \cos 2x}, \quad \rho = \frac{8}{(\text{ch}2y + \cos 2x)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения траекторий

$$\eta = \text{ch}2y + \cos 2x = C = \text{const} \tag{11}$$

определяют области финитного ($C < 2$) и инфинитного ($C > 2$) движений, разделенные траекторией-сепаратрисой $C = 2$.

Так как длину дуги l оси (11) параксиального пучка не удастся выразить в элементарных функциях, а тем более перейти к этой переменной в параметрах потока (10) при $\eta = C$, то параксиаль-

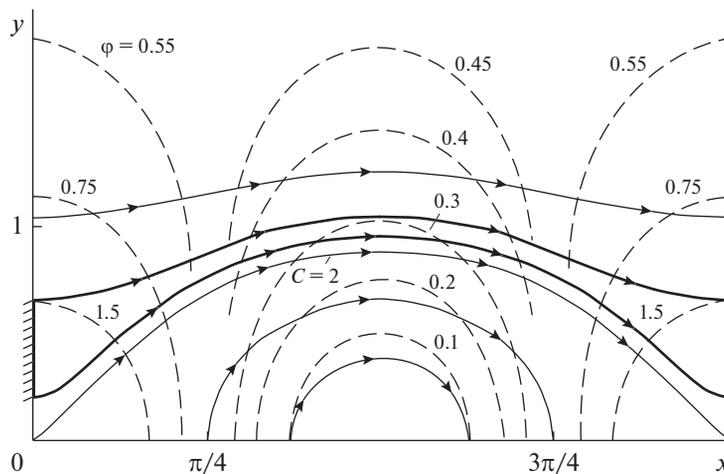


Рис. 2. Плоское периодическое электростатическое течение.

ное уравнение (3) необходимо переписать с координатой x в качестве аргумента:

$$Y = \frac{1}{2} \operatorname{arch}(C - \cos 2x), \quad Y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{(C - \cos 2x)^2 - 1}},$$

$$Y'' = \frac{2C [\cos 2x (C - \cos 2x) - 1]}{[(C - \cos 2x)^2 - 1]^{3/2}}, \quad k = \frac{Y''}{(1 + Y'^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

Кривизна линии $\eta = \operatorname{const}$ точного решения описывается выражением

$$k = \frac{2}{\sqrt{C}} \frac{\cos 2x (C - \cos 2x) - 1}{(C - 2 \cos 2x)^{3/2}}. \quad (13)$$

В качестве поверхности инжекции выберем плоскость $x = 0$. Видно, что при $x = 0$ и $C \rightarrow 2$ значение кривизны стремится к бесконечности.

Параксиальное уравнение. Выпишем выражения для потенциала U , нормального поля E_s и плотности заряда на траектории для решения (10):

$$U = \frac{C - 2 \cos 2x}{2C}, \quad E = \frac{2}{C\sqrt{C}} \frac{\cos 2x (C - \cos 2x) - 1}{\sqrt{C - 2 \cos 2x}},$$

$$\rho = \frac{8}{C^2}. \quad (14)$$

С учетом соотношений (12)–(14) уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{(C - \cos 2x)^2 - 1}{C^3} \frac{d^2 f}{dx^2} + \\ & + \frac{\sin 4x}{C^3} \frac{2 \cos 2x - 3C}{C - 2 \cos 2x} \frac{df}{dx} - \\ & - \left\{ \frac{8}{C^2} - \frac{4}{C^3} \frac{1}{(C - 2 \cos 2x)^2} \right\} \times \\ & \times \left[3 - C(6 - C^2) \cos 2x + 2(3 - C^2) \cos^2 2x - \right. \\ & \left. - 2C \cos^3 2x - \cos^4 2x \right] \Big\} f = 0; \\ & \frac{d}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + Y'^2}} \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (15)$$

Необходимо найти решение уравнения (15) со следующими начальными условиями при $x = 0$:

$$f = f(0) = \operatorname{const}, \quad df/dx = 0, \quad (16)$$

соответствующими условиям инжекции из точного решения.

Достаточно сложный вид уравнения (15) предполагает использование численных методов, однако мы построим решение в элементарных функциях.

Точное решение уравнения (15). В монографии [1] при возможности использования ортогональной системы ξ, η отмечено формальное совпадение точного соотношения на трубке тока для коэффи-

циента Ляме по поперечной координате η геометризованной теории и приближенного уравнения для толщины пучка f параксиальной модели трубчатых пучков. Этот факт означает, что для любого двумерного точного решения исходных уравнений пучка, если с ним удастся связать ортогональную систему с трубками тока $\eta = \operatorname{const}$, можно указать точное решение параксиального уравнения $f = h_2$.

При заданном семействе координатных линий $\eta = \operatorname{const}$ ортогональное семейство $\xi = \operatorname{const}$ удовлетворяет соотношению

$$\nabla \eta \cdot \nabla \xi = \eta_{,x} \xi_{,x} + \eta_{,y} \xi_{,y} = 0. \quad (17)$$

Здесь и далее частные производные будем обозначать соответствующим индексом после запятой: $\xi_{,x} \equiv \partial \xi / \partial x$.

Дифференцируя выражение $\xi = \operatorname{const}$ и используя свойство (17), для решения (11) приходим к дифференциальному уравнению, определяющему эту функцию, а затем к ее окончательному виду:

$$\xi_{,x} dx + \xi_{,y} dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_{,x}}{\xi_{,y}} = \frac{\eta_{,y}}{\eta_{,x}} = -\frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x},$$

$$\xi = \operatorname{tg} x \operatorname{th} y. \quad (18)$$

Для подсчета коэффициентов Ляме в системе ξ, η необходимы пока неизвестные производные $x_{,\xi}, x_{,\eta}, y_{,\xi}, y_{,\eta}$:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (x_{,\xi} d\xi + x_{,\eta} d\eta)^2 + \\ &+ (y_{,\xi} d\xi + y_{,\eta} d\eta)^2 = \\ &= (x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2) d\xi^2 + (x_{,\eta}^2 + y_{,\eta}^2) d\eta^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Они вычисляются с помощью следующего приема. Рассмотрим функции $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ и продифференцируем обе части этих равенств по ξ :

$$\xi_{,x} x_{,\xi} + \xi_{,y} y_{,\xi} = 1, \quad \eta_{,x} x_{,\xi} + \eta_{,y} y_{,\xi} = 0. \quad (20)$$

Выполнив аналогичные действия с дифференцированием по η , получим две системы линейных уравнений для требуемых производных, решение которых определяет их значения:

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \frac{\eta_{,y}}{\Delta}, \quad x_{,\eta} = -\frac{\xi_{,y}}{\Delta}, \quad y_{,\xi} = -\frac{\eta_{,x}}{\Delta}, \quad y_{,\eta} = \frac{\xi_{,x}}{\Delta}; \\ \Delta &= \xi_{,x} \eta_{,y} - \xi_{,y} \eta_{,x} = \frac{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, метрика в системе ξ, η описывается следующими выражениями [11]:

$$h_1^2 = \frac{4 \cos^4 x \operatorname{ch}^4 y}{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}, \quad h_2^2 = \frac{1}{4(\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x)}. \quad (22)$$

Частное решение уравнения (15) имеет вид

$$f = \frac{f_0}{2\sqrt{C(C - 2 \cos 2x)}}. \quad (23)$$

Константа в выражении для f по сравнению с h_2 из (15) изменена в силу того, что уравнение (15) допускает преобразование растяжения: $\bar{f} = af$, $a = \text{const}$. Решение (23) при $x = 0$ удовлетворяет начальным условиям (16), в силу чего в численном интегрировании уравнения (15) нет необходимости.

Приближенное решение. Приближенная траектория описывается параметрическими уравнениями с переменной x в качестве параметра

$$y_{\text{ap}} = Y + f \cos \vartheta, \quad x_{\text{ap}} = x - f \sin \vartheta, \quad \text{tg} \vartheta = Y', \quad (24)$$

$$h = \sqrt{1 + Y'^2} = \frac{\sqrt{C(C - 2 \cos 2x)}}{\sqrt{(C - \cos 2x)^2 - 1}}$$

и кривизной k_{ap} , определяемой формулой

$$k_{\text{ap}} = \left[\frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right]_{\text{ap}},$$

$$(y''x' - x''y')_{\text{ap}} = Y'' + hf''' + \frac{1}{h} \left[-f'Y'Y'' + f(Y'Y''' - Y''^2) \right] + \frac{1}{h^2} \left[(-ff'' + 2f'^2)Y'' + ff'Y''' \right] - \frac{1}{h^3} fY''^2 + \frac{1}{h^4} fY''^2(fY'' - 2f'Y') - \frac{1}{h^6} f^2Y'^2Y''^3,$$

$$\left(x'^2 + y'^2 \right)_{\text{ap}} = h^2 + f'^2 - \frac{2}{h} fY'' + \frac{1}{h^2} f^2Y''^2 - \frac{1}{h^4} f^2Y'^2Y''^2. \quad (25)$$

Потенциал Φ_{ap} на границе пучка в соответствии с (3) имеет вид

$$\Phi_{\text{ap}} = U \left(1 + 2kf - k^2f^2 \right) + \frac{1}{2} \left[\rho - \left(\frac{1}{h^2} U'' - \frac{Y'Y''}{h^4} U' \right) \right] f^2. \quad (26)$$

Кривизна траекторий достигает максимального значения при $x = 0$, определяя характерный масштаб длины $L_* \sim 1/k$ и допустимую величину начальной толщины узкого пучка, в то время как потенциал принимает наибольшее значение при $x = \pi/2$. Приближенные и точные значения нормального поля имеет смысл сравнивать в точках $x = 0$ и $x = \pi/2$, где направления нормалей для точной и приближенной траекторий совпадают. Меньшую ошибку при вычислении нормального поля на границе пучка дает условие баланса сил на этой кривой, а не результат дифференцирования формулы (26).

Производные от функций $Y(x), f(x), U(x)$ определены формулами

$$Y' = \frac{\sin 2x}{D}, \quad Y'' = \frac{2C}{D^3} [\cos 2x(C - \cos 2x) - 1],$$

$$D = \sqrt{(C - \cos 2x)^2 - 1}, \quad Y''' = \frac{4 \sin 2x}{D^5} \times$$

$$\times [C(7 - C^2) - (2C^2 + 8) \cos 2x + 7C \cos^2 2x - 4 \cos^3 2x]; \quad f' = -\frac{f_0 \sin 2x}{\sqrt{C} d^3}, \quad (27)$$

$$f'' = -\frac{2f_0 \cos^2 2x + C \cos 2x - 3}{\sqrt{C} d^5},$$

$$d = \sqrt{C - 2 \cos 2x};$$

$$U' = \frac{2 \sin 2x}{C}, \quad U'' = \frac{4 \cos 2x}{C}.$$

В первом из упомянутых выше контрольных сечений ($x = 0$) имеем

$$k_{\text{ex}} = \frac{2}{\sqrt{C_* (C_* - 2)}}, \quad C_* = \text{ch} 2y_* + 1,$$

$$y_* = Y + f(0), \quad k_{\text{ap}} = \frac{2}{\sqrt{C(C - 2)}} \left[\frac{C(C - 2)}{C(C - 2) - f_0} \right]^3 \times$$

$$\times \left[1 - \frac{C + 2}{C(C - 2)} f_0 + \frac{C + 1}{C^2(C - 2)^2} f_0^2 \right]; \quad (28)$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \frac{C_* - 2}{2C_*}, \quad \Phi_{\text{ap}} = \frac{C - 2}{2C} \left[1 + \frac{2}{C(C - 2)} f_0 \right] -$$

$$- \frac{C - 1}{2C^3(C - 2)} f_0^2; \quad E_{\text{ex}} = (2k\Phi)_{\text{ex}} = \frac{2\sqrt{C_* - 2}}{C_* \sqrt{C_*}},$$

$$E_{\text{ap}} = (2k\Phi)_{\text{ap}}; \quad f_0 = 2\sqrt{C(C - 2)}f(0).$$

Параметр C соответствует оси пучка, C_* – точной траектории с теми же условиями старта, что и параксиальная кривая.

Во втором контрольном сечении $x = \pi/2$ получаем

$$k_{\text{ex}} = -\frac{2}{\sqrt{C_* (C_* + 2)}}, \quad k_{\text{ap}} = -\frac{2}{\sqrt{C(C + 2)}} \times$$

$$\times \left[\frac{C(C + 2)}{C(C + 2) + f_0} \right]^3 \left[1 + \frac{C - 2}{C(C + 2)} f_0 + \frac{C - 1}{C^2(C + 2)^2} f_0^2 \right];$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \frac{C_* + 2}{2C_*}, \quad (29)$$

$$\Phi_{\text{ap}} = \frac{C + 2}{2C} \left[1 - \frac{2}{C(C + 2)} f_0 \right] +$$

$$+ \frac{C + 1}{2C^3(C + 2)} f_0^2; \quad E_{\text{ex}} = (2k\Phi)_{\text{ex}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{C_* + 2}}{C_* \sqrt{C_*}}, \quad E_{\text{ap}} = (2k\Phi)_{\text{ap}}.$$

Таблица 2. Сравнение параксиальной модели и точного решения (10) – периодическое течение – при $x = 0$ ($C = 2.1$, $Y = 0.221784$, $k = 4.364358$, $L_* = 0.23$)

Вариант	$f(0) = 0.01, f_0 = 0.009165, C_* = 2.109386$			$f(0) = 0.02, f_0 = 0.018330, C_* = 2.119215$		
	k	φ	E	k	φ	E
Приближенное значение	4.126191	0.0258379	0.213224	3.821422	0.0277665	0.212215
Точное значение	4.163620	0.0259284	0.215912	3.979028	0.0281270	0.223838
Относительная ошибка, %	0.9	0.35	1.24	3.96	1.28	5.19

Таблица 3. Сравнение параксиальной модели и точного решения (10) – периодическое течение – при $x = \pi/2$ ($C = 2.1$, $Y = 0.221784$, $k = 4.364358$, $L_* = 0.23$, $f(0) = 0.02$)

Вариант	k	φ	E
Приближенное значение	-0.677411	0.972048	-1.316952
Точное значение	-0.676917	0.971873	-1.315755
Относительная ошибка, %	0.073	0.018	0.09

Положение максимального различия точной и параксиальной траекторий $Y(x; C_*) - y_{\text{ап}}$ определяет условие

$$C(2X - C)^2 \left[\sqrt{X^2 - 1} \operatorname{arch} X - \sqrt{Z^2 - 1} \operatorname{arch} Z \right] - f_0 \left[\sqrt{Z^2 - 1} \operatorname{arch} Z (2 - CX) - (2X - C)(X^2 - 1) \right] = 0, \quad (30)$$

$$X = C - \cos 2x, \quad Z = C_* - \cos 2x.$$

Сопоставление приближенного и эталонного решений. Результаты сравнения параксиального и эталонного решений приведены в табл. 2–5. В табл. 2 в сечении $x = 0$ для базовой траектории $C = 2.1$ с кривизной $k(C) = 4.364358$, определяющей характерный линейный размер $L_* \sim 0.23$, сопоставлены значения кривизны k , потенциала φ и нормального поля E для начальной ширины пучка $f(0) = 0.01$ и $f(0) = 0.02$. Поперечный градиент плотности ρ невелик, поэтому относительное изменение этого параметра составляет 0.89% в первом

случае и 1.8% во втором. Максимальное отличие по координате y точной траектории от приближенной для варианта $C = 2.1$, $C_* = 2.119215$, $f(0) = 0.02$ после решения уравнения (30) не превышает 2% при $x \sim \pi/18$.

В табл. 3 приведена информация, соответствующая сечению $x = \pi/2$ при $C = 2.1$, $C_* = 2.119215$, $f(0) = 0.02$. Сравнение данных табл. 2 и 3 показывает, что ошибка приближенного решения определяется сечением $x = 0$. Таблицы 4 и 5 относятся к случаям, когда в качестве оси пучка выбраны точные траектории с меньшей по сравнению с табл. 2 кривизной, стартующие из точек $Y = 0.295673$ ($C = 2.18$, $k = 3.192754$, $L_* \sim 0.31$) и $Y = 0.498687$ ($C = 2.54$, $k = 1.707718$, $L_* \sim 0.59$). Начальная толщина пучка в первом случае составляет $f(0) = 0.02, 0.03$, во втором $f(0) = 0.03, 0.05$.

Во всех вариантах при $\varepsilon \sim 0.05L_*$ максимальная ошибка параксиальной модели имеет порядок 1%; при $\varepsilon \sim 0.1L_*$ она возрастает до 5...7%.

Таблица 4. Сравнение параксиальной модели и точного решения (10) – периодическое течение – при $x = 0$ ($C = 2.18$, $Y = 0.295673$, $k = 3.192754$, $L_* = 0.31$)

Вариант	$f(0) = 0.02, f_0 = 0.0250567, C_* = 2.206007$			$f(0) = 0.03, f_0 = 0.0375851, C_* = 2.219732$		
	k	φ	E	k	φ	E
Приближенное значение	2.903392	0.0463582	0.269192	2.715574	0.0487461	0.264747
Точное значение	2.966781	0.0466923	0.277052	2.863737	0.0494952	0.283482
Относительная ошибка, %	2.1	0.7	2.8	5.2	1.5	6.6

Таблица 5. Сравнение параксиальной модели и точного решения (10) – периодическое течение – при $x = 0$ ($C = 2.54, Y = 0.498687, k = 1.707718, L_* = 0.59$)

Вариант	$f(0) = 0.03, f_0 = 0.0702692, C_* = 2.613084$			$f(0) = 0.05, f_0 = 0.117115, C_* = 2.665017$		
	k	φ	E	k	φ	E
Приближенное значение	1.553063	0.116761	0.362674	1.424394	0.123259	0.351139
Точное значение	1.580132	0.117310	0.370731	1.502324	0.124768	0.374884
Относительная ошибка, %	1.7	0.53	2.2	5.2	1.2	6.3

4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТОК С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Эталонное решение. Решение с равнобочными гиперболами в качестве траекторий построено в работе [12] – первой работе по интенсивным криволинейным пучкам (рис. 3):

$$u = by, v = bx, 2\varphi = b^2(x^2 + y^2), \rho = 2b^2. \quad (31)$$

Константа b не влияет на оценки и может быть принята равной единице.

Траектории потока определены формулами

$$\eta = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) = C, Y = \sqrt{x^2 + 2C}. \quad (32)$$

Выбрав линию $\eta = C$ в качестве оси узкого пучка, для потенциала на ней имеем

$$U = x^2 + C. \quad (33)$$

Решение параксиального уравнения. Переходя к переменной x в уравнении (3), получим соотно-

шение, которому должна удовлетворять функция f при выполнении начальных условий (16):

$$(x^2 + 2C)\frac{d^2 f}{dx^2} + x\frac{df}{dx} - \frac{x^4 + 2Cx^2 + 2C^2}{(x^2 + C)^2} f = 0. \quad (34)$$

С траекториями (32) связана ортогональная система ξ, η с конформной метрикой

$$\xi = xy, \eta = \frac{1}{2}(y^2 - x^2), h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (35)$$

В соответствии со сказанным в разд. 2 частное решение уравнения (27) с начальными условиями (16) имеет вид

$$f_{ap} = \frac{f_0}{\sqrt{x^2 + C}}. \quad (36)$$

Расстояние f по нормам между двумя точными траекториями $\eta = C, \eta = C_*$ найдем из квадратного уравнения (рис. 4)

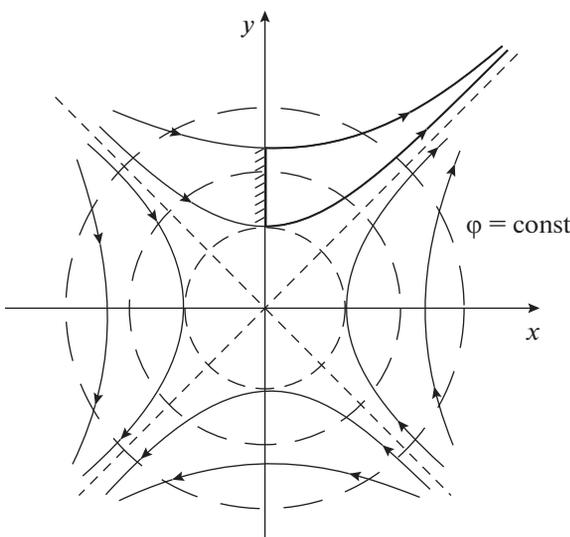


Рис. 3. Электростатический поток с гиперболическими траекториями.

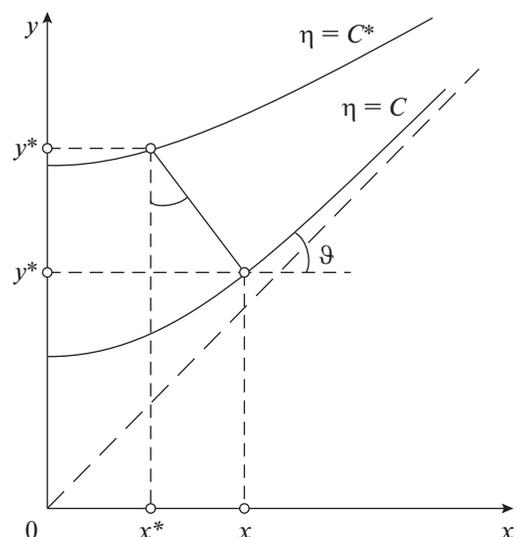


Рис. 4. К определению точного значения f .

Таблица 6. Сравнение паракиальной модели и точного решения (31) – ось-гипербола, $\vec{H} = 0$

Параметры	C, k, L_*		
	0.5, 1, 1	1, 0.707, 1.414	5, 0.316, 3.16
$f(0) = 0.025$			
C_*	0.525313	1.071961	5.079369
k_{ex}	0.975561	0.694824	0.313747
k_{ap}	0.997994	0.706412	0.316167
$\delta, \%$	2.3	1.7	0.77
N_{m1}	0.0152	0.0107	0.0048
N_{m2}	2.8×10^{-4}	1.4×10^{-4}	2.8×10^{-5}
N_J	0.0221	0.0155	0.0069
N	0.0270	0.0188	0.0084
$f(0) = 0.05$			
C_*	0.551250	1.071960	5.159364
k_{ex}	0.952380	0.682960	0.311306
k_{ap}	0.991398	0.704188	0.315980
$\delta, \%$	4.1	3.1	1.5
N_{m1}	0.0307	0.0216	0.0096
N_{m2}	1.1×10^{-3}	5.6×10^{-4}	1.13×10^{-4}
N_J	0.0453	0.0316	0.0139
N	0.0547	0.038	0.017
$f(0) = 0.1$			
C_*	0.605000	1.146420	5.321228
k_{ex}	0.909090	0.660409	0.306534
k_{ap}	0.960220	0.694202	0.315194
$\delta, \%$	5.6	5.1	2.8
N_{m1}	0.0620	0.0436	0.0190
N_{m2}	0.02	0.01	0.004
N_J	0.0952	0.0654	0.0282
N	0.115	0.079	0.034

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2 - x^2) &= C, \quad \frac{1}{2}(y_*^2 - x_*^2) = C_*, \\ x_* &= x - f \sin \vartheta, \quad y_* = Y + f \cos \vartheta, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{dY}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2C}}, \quad \sin \vartheta = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + C)}}, \\ \cos \vartheta &= \frac{\sqrt{x^2 + 2C}}{\sqrt{2(x^2 + C)}}; \quad f_{ex} = \frac{\sqrt{2}}{C}(x^2 + C)^{3/2} \times \\ &\times \left\{ \left[1 - C(C - C_*) \frac{1}{(x^2 + C)^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}, \\ f(0) &= \sqrt{2C_*} - \sqrt{2C}, \quad f_0 = \sqrt{C}f(0). \end{aligned} \quad (37)$$

Существование асимптоты для траекторий приводит к ряду особенностей эталонного и приближенного решений. Обе функции f_{ex} , f_{ap} из (36), (37) монотонно стремятся к нулю по одному закону:

$$\begin{aligned} f_{ex}(\infty) &= \frac{C_* - C}{\sqrt{2}} \frac{1}{x} = \frac{f(0)[2\sqrt{2C} + f(0)]}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x}, \\ f_{ap}(\infty) &= \frac{f_0}{x} = \sqrt{C}f(0) \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (38)$$

В результате относительная ошибка $\delta = 1 - f_{ap}/f_{ex}$, равная нулю в точке старта, при $x \rightarrow \infty$ возрастает и стремится к константе:

$$\delta_\infty = \frac{f(0)}{2\sqrt{2C} + f(0)}. \quad (39)$$

При $C = 1$ и $f_0 = 0.05, 0.2$ значения δ_∞ составляют 1.74 и 6.6%. В этой ситуации имеет смысл обратиться к величине $|f_{ex} - f_{ap}|$, которая равна нулю при $x = 0, \infty$ и достигает максимума внутри этого интервала. При $C = 1$ и $f_0 = 0.1$ он имеет место при $x \sim 1.2$ причем $|f_{ex} - f_{ap}| = 0.0658791 - 0.00640711 = 0.00186$.

Сравнение приближенного и точного решений. Параметрические уравнения паракиальной траектории $x_* = x_*(x)$, $y_* = y_*(y)$ из (37) и уравнение траектории точного решения (32) позволяют вычислить кривизны внешней границы пучка, причем максимального значения эти функции достигают при $x = 0$:

$$\begin{aligned} k_{ex} &= \frac{1}{\sqrt{2C_*}} = \frac{1}{\sqrt{2C} + f(0)}, \\ k_{ap} &= \frac{1}{\sqrt{2C}} \left[1 - \frac{3f(0)}{\sqrt{2C}} \right] / \left[1 - \frac{f(0)}{\sqrt{2C}} \right]^3. \end{aligned} \quad (40)$$

Результаты расчетов для нескольких значений $f(0)$ приведены в табл. 6. Из стартовой точки ис-

ходят две траектории: точная $\eta = C_*$ и приближенная. Их кривизны, подобно функциям f_{ex} , f_{ap} , убывают по одному закону, а отношение стремится к константе при $x \rightarrow \infty$:

$$k_{ex}(\infty) = \frac{C_*}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3}, \quad k_{ap}(\infty) = \frac{C + \bar{C}}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3}, \quad (41)$$

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{C}{2}} f(0), \quad \frac{k_{ap}(\infty)}{k_{ex}(\infty)} = \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{2C} + f(0)}.$$

При $C = 1$, $f(0) = 0.1$ отношение кривизн составляет 0.93396, что соответствует относительной ошибке $\delta = 6.6\%$. В контрольной точке $x = 1.2$, которая была использована при оценке траекторий, при абсолютной разности $k_{ex} - k_{ap} = 0.194886 - 0.186037 = 0.00885$, относительная ошибка равна 4.5%.

Для решения (31) точное выражение для потенциала на параксиальной траектории

$$\Phi_{ex} = \frac{1}{2}(x_*^2 + y_*^2) = U + \frac{2C}{\sqrt{2(x^2 + C)}} f + \frac{1}{2} f^2 \quad (42)$$

совпадает с результатом параксиальной теории

$$\Phi_{ap} = U(1 + kf)^2 + \frac{1}{2} \left[\rho - \frac{1}{1 + Y'^2} U'' + \frac{Y' Y''}{(1 + Y'^2)^2} U' \right] f, \quad (43)$$

в чем можно убедиться подстановкой соответствующих функций в формулы (42), (43). Таким образом, ошибка при вычислении нормального электрического поля определяется неточностью при расчете кривизны приближенной траектории.

5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПОТОК В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Эталонное решение. В однородном магнитном поле¹ H_z возможно течение с гиперболическими траекториями [10], кривизна которых в вершине может значительно превышать кривизну равнобочной гиперболы и меняться с существенно большей скоростью (рис. 5):

$$u = (\Omega + \omega) y, \quad v = (\Omega - \omega) x, \quad (44)$$

$$\omega = \frac{1}{2} H_z, \quad \Omega > \omega$$

$$2\varphi = (\Omega - \omega)^2 x^2 + (\Omega + \omega)^2 y^2, \quad \rho = 2(\Omega^2 + \omega^2).$$

¹ В обозначениях параксиальной теории магнитное поле направлено по оси x .

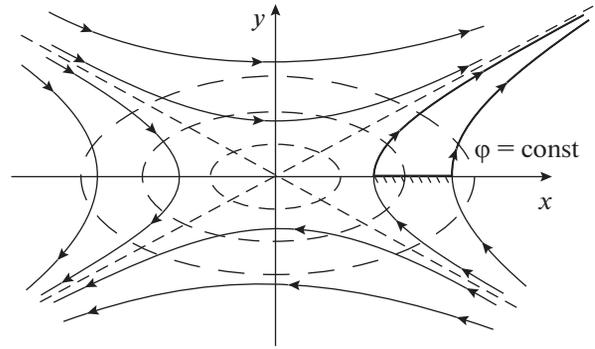


Рис. 5. Гиперболический поток в магнитном поле.

Течение (44) является моноэнергетическим и потенциальным. Траектории определены выражением

$$(\Omega + \omega) y^2 - (\Omega - \omega) x^2 = \text{const}. \quad (45)$$

Ортогональная система, связанная с кривыми (45), имеет вид

$$\xi = yx^{\bar{\Omega}}, \quad \eta = x^2 - \bar{\Omega}y^2, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega + \omega}{\Omega - \omega}; \quad (46)$$

$$h_1 = \frac{x^{1-\bar{\Omega}}}{\sqrt{x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2}}.$$

В качестве оси параксиального пучка выберем линию

$$X = \sqrt{\bar{\Omega}y^2 + C} \quad (47)$$

с кривизной, которая в отличие от случая равнобочной гиперболы будет отрицательной (l, s – правая система, знак k определяется в соответствии с направлением нормали s)

$$k = - \frac{\bar{\Omega}C}{[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C]^{3/2}}. \quad (48)$$

Удобно ввести новую нормировку параметров потока на оси

$$\bar{U} = \frac{2U}{(\Omega - \omega)^2} = \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C, \quad 2\bar{U} = \bar{V}_l^2, \quad (49)$$

$$\bar{\rho} = \frac{2\rho}{(\Omega - \omega)^2}, \quad \bar{\Omega}_x^2 = \frac{2\Omega_x^2}{(\Omega - \omega)^2}.$$

Решение параксиального уравнения. Параксиальное уравнение (1) в переменных (49) принимает вид

$$2\bar{U} \frac{d^2 f}{d\bar{t}^2} + \frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} \frac{df}{d\bar{t}} = \left[\bar{\rho} - \left(\frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{t}^2} + 4k^2 \bar{U} + \bar{\Omega}_x^2 + 2k\bar{V}_l \bar{\Omega}_x \right) \right] f. \quad (50)$$

Таблица 7. Сравнение параксиальной модели и точного решения (44) – ось-гипербола, $\bar{H} \neq 0$ ($C = 1$ при $H_z = 0$, $C = 2$ при $H_z \neq 0$, $f(0) = -0.1$)

Параметр	$\bar{\Omega}$					$\bar{\Omega}_* = 2.786$
	1	2	3	4	5	
$\frac{(k_{ex}^H)''}{(k_{ex}^0)''}$	1	6	18	40	75	14.69
K	1.051	1.093	1.0555	1.0553	0.880	1.107
$\delta, \%$	5.1	9.3	5.55	5.53	12.0	10.7

После перехода от продольной переменной l к y имеем

$$\frac{d}{dl} = \frac{1}{h} \frac{d}{dy}, \quad h^2 = 1 + X'^2 = \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C}{\bar{\Omega}y^2 + C};$$

$$\left(\bar{\Omega}y^2 + C \right) \frac{d^2 f}{dy^2} + \bar{\Omega}y \frac{df}{dy} - \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1) \left[\bar{\Omega}^2 (\bar{\Omega} + 1) y^4 + 2C\bar{\Omega}^2 y^2 - C^2 \right]}{\left[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1) y^2 + C \right]^2} f = 0. \tag{51}$$

Необходимо найти решение этого уравнения при начальных данных

$$y = 0, \quad f = f(0), \quad f'(0) = 0. \tag{52}$$

Коэффициент Ляме h_2 из (46), записанный на оси (47) с произвольным множителем f_0 , определяет аналитическое решение этой задачи

$$f_{ap} = \frac{f_0}{\sqrt{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C}},$$

$$f(0) = \sqrt{C} - \sqrt{C_*} = \frac{f_0}{\sqrt{C}}. \tag{53}$$

Расстояние f_{ex} между двумя траекториями $\eta = C$ и $\eta = C_*$ точного решения задает формула

$$f_{ex} = \frac{\left[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C \right]^{3/2}}{\bar{\Omega}(1 - \bar{\Omega}^2)y^2 + C} \times \left\{ 1 - \left[1 - (C - C_*) \frac{\bar{\Omega}(1 - \bar{\Omega}^2)y^2 + C}{\left[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C \right]^2} \right]^{1/2} \right\}. \tag{54}$$

Асимптотика функций (53), (54) при $y \rightarrow \infty$ описывается выражениями

$$f_{ex}(\infty) = \frac{f(0) \left[2\sqrt{C} - f(0) \right] 1}{2\sqrt{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)} y},$$

$$f_{ap}(\infty) = \frac{\sqrt{C} f(0)}{\sqrt{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)} y}. \tag{55}$$

Как и для равнобочной гиперболы, относительная ошибка δ стремится к константе

$$\delta(\infty) = \left| 1 - \frac{f_{ap}(\infty)}{f_{ex}(\infty)} \right| = \frac{f(0)}{2\sqrt{C} - f(0)}. \tag{56}$$

Для сопоставления с данными, приведенными в разд. 3, в формулах этого раздела необходимо выполнить замены

$$C \rightarrow 2C, \quad f(0) \rightarrow -f(0), \quad \bar{\Omega} = 1, \tag{57}$$

которые обеспечивают равноудаленность оси пучка в точке старта от начала координат и правильное расположение границы пучка относительно оси.

Сравнение приближенного и точного решений. Подобно случаю равнобочной гиперболы оценим кривизну приближенной траектории по сравнению с точной кривой с теми же условиями старта при $y = 0$:

$$k_{ex} = -\frac{\bar{\Omega}}{\sqrt{C_*}} = -\frac{\bar{\Omega}}{\sqrt{C} - f(0)},$$

$$k_{ap} = -\frac{\bar{\Omega}\sqrt{C} \left[\sqrt{C} + (2\bar{\Omega} + 1)f(0) \right]}{\left[\sqrt{C} + \bar{\Omega}f(0) \right]^3}. \tag{58}$$

В табл. 7 для нескольких значений $\bar{\Omega} = k_{ex}^H/k_{ex}^0$ приведены соответствующие величины вторых производных кривизны (первые производные в вершинах гипербол – нули) при наличии магнитного поля и его отсутствии ($\bar{\Omega} = 1$), отношение кривизн по параксиальной теории и точному решению при одинаковых условиях старта (дополнительные индексы H , 0 маркируют случаи $H \neq 0$, $H = 0$ соответственно) и относительная ошибка δ в процентах

$$\frac{(k_{ex}^H)''}{(k_{ex}^0)''}(0) = \frac{\bar{\Omega}^2 (\bar{\Omega} + 1)}{2},$$

$$K = \frac{k_{ap}^H(0)}{k_{ex}^H(0)} = \sqrt{C} \left[\sqrt{C} - f(0) \right] \frac{\sqrt{C} + (2\bar{\Omega} + 1)f(0)}{\left[\sqrt{C} + \bar{\Omega}f(0) \right]^3}. \tag{59}$$

Отношение кривизн K имеет максимум при $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_*$

$$\bar{\Omega}_* = -\frac{\sqrt{C}}{4f(0)} - \frac{3}{4},$$

$$K_* = \frac{32\sqrt{C}}{27[\sqrt{C} - f(0)]}, \quad f(0) < 0. \quad (60)$$

Из табл. 7 следует, что в интервале $1 \leq \bar{\Omega} \leq 5$ ошибка в определении кривизны не превышает 12%, хотя кривизна оси меняется в пять раз, а ответственная за распрямление траектории производная k'' увеличивается в 75 раз. Малый пара-

метр ϵ , определенный по отношению к L_* из табл. 6, в электростатическом случае составляет 0.07, а при $\bar{\Omega} = 5$ возрастает до 0.35. Делать какие-либо общие выводы из этого факта не представляется возможным: в частном случае параксиальное приближение далеко выходит за границы ожидаемой от него точности за счет пересечения кривых для точной и приближенной зависимостей.

Как и в случае с равнобочной гиперболой, параксиальное выражение для потенциала на рассчитанной границе пучка совпадает с его точным значением:

$$\frac{2\varphi_{ex}}{(\Omega - \omega)^2} = \bar{U} + 2 \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1) - C}{\sqrt{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C}} f + \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}^3 + 1)y^2 + C}{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C} f^2,$$

$$\frac{2\varphi_{ap}}{(\Omega - \omega)^2} = \bar{U} + (2k\bar{U} + \bar{V}_l \bar{\Omega}_x) f +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\bar{p} - \frac{1}{1 + X'^2} \bar{U}'' + \frac{X' X''}{(1 + X'^2)^2} \bar{U}' + 2k\bar{U} + k\bar{V}_l \bar{\Omega}_x \right] f^2. \quad (61)$$

В табл. 8 приведено сравнение точного и параксиального значений кривизны в вершине гиперболы. Видно, что для принятых констант увеличение кривизны оси $k = -\bar{\Omega}$ в 2.5 раза при фиксированной величине $f(0)$ примерно во столько же раз увеличивает ошибку; для фиксированной кривизны пятикратное изменение $f(0)$ приводит к той же вариации величины δ .

Сравнение моделей для гиперболической оси с магнитным полем и при его отсутствии приведено в табл. 9. Для варианта первого столбца табл. 6 с $k = 1, C = 0.5$ та же кривизна в начальной точке при $\bar{\Omega} = 2, \Omega_x = 1/3$ достигается при $C = 4$. Видно, что при $f(0) = -0.025, -0.05$ ошибки в этих двух случаях примерно равны, но при $f(0) = -0.1$ и $\Omega_x \neq 0$ ошибка резко (пятикратно) возрастает.

6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПОТОК В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Эталонное решение. Приведенное в работе [10] решение при отличном от (44) соотношении констант Ω, ω ($\Omega < \omega$) описывает течение с финитными эллиптическими орбитами частиц (рис. 6), координата x для которых определена на интервале $(0, \sqrt{C/\bar{\Omega}})$:

$$(\omega - \Omega)x^2 + (\omega + \Omega)y^2 = \text{const},$$

$$Y = \sqrt{C - \bar{\Omega}x^2}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega}. \quad (62)$$

Выражения для параметров потока (44) остаются справедливыми. Ортогональная система координат ξ, η и коэффициенты Ляме h_1, h_2 определены формулами

$$\xi = y^{\bar{\Omega}}/x, \quad \eta = \bar{\Omega}x^2 + y^2,$$

$$h_1^2 = \frac{x^2 y^{2-2\bar{\Omega}}}{y^2 + \bar{\Omega}^2 x^2}, \quad h_2^2 = \frac{1}{4(y^2 + \bar{\Omega}^2 x^2)}. \quad (63)$$

Кривизна оси $\eta = C$ имеет вид

$$k = -\frac{\bar{\Omega}C}{[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2 + C]^{3/2}}. \quad (64)$$

Расстояние между двумя траекториями точного решения описывается выражением

$$f_{ex} = \frac{[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2 + C]^{3/2}}{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1)x^2 + C} \times$$

$$\times \left\{ \left[1 + (C_* - C) \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1)x^2 + C}{[\bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2 + C]^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (65)$$

Таблица 8. Сравнение параксиальной модели и точного решения (44) – ось-гипербола, $\vec{H} \neq 0$ ($C = 1, \Omega = 1/2, \bar{\Omega} = (1 + H_z)/(1 - H_z)$)

Параметры	$\bar{\Omega}, H_z, L^*$			
	2, 1/3, 0.50	3, 1/2, 0.33	4, 3/5, 0.25	5, 2/3, 0.20
$f(0) = 0.01$				
k_{ex}	2.020	3.030	4.040	5.0505
k_{ap}	1.979	2.938	3.876	4.794
$\delta, \%$	2.0	3.0	4.1	5.1
N_{m1}	0.0121	0.0494	0.1222	0.2417
N_{m2}	0.0012	0.0036	0.0080	0.0180
N_J	0.012	0.025	0.0496	0.0820
N_p	0.001173	0.007313	0.02480	0.06279
N	0.0171	0.05596	0.1344	0.26345
$f(0) = 0.02$				
k_{ex}	2.041	3.061	4.082	5.102
k_{ap}	1.956	2.871	3.747	4.583
$\delta, \%$	4.2	6.2	8.2	10.0
N_{m1}	0.0243	0.0990	0.2455	0.4867
N_{m2}	0.0048	0.0144	0.0320	0.0720
N_J	0.0244	0.0502	0.1001	0.1660
N_p	0.004784	0.03010	0.1030	0.2631
N	0.03510	0.1159	0.2672	0.5821
$f(0) = 0.05$				
k_{ex}	2.105	3.158	4.211	5.263
k_{ap}	1.878	2.663	3.356	3.968
$\delta, \%$	11	16	20	25
N_{m1}	0.061	0.2499	0.6229	1.2412
N_{m2}	0.030	0.0900	0.2000	0.4500
N_J	0.0653	0.1275	0.2569	0.4311
N_p	0.0316	0.2041	0.7155	1.8688
N	0.099	0.3586	1.0030	2.3284

Новая нормировка параметров потока при $\eta = C$, аналогичная (49), выполняется с использованием константы $\bar{\Omega} + \omega$:

$$\bar{U} = \frac{2U}{(\bar{\Omega} + \omega)^2} = \bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2 + C. \quad (66)$$

Решение параксиального уравнения. Аналитическое решение параксиального уравнения, получающегося из уравнения (51) формальной заменой $y \rightarrow x, \bar{\Omega} \rightarrow -\bar{\Omega}$, определено формулой

$$f_{\text{ap}} = \frac{f_0}{\sqrt{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2 + C}}, \quad (67)$$

$$f(0) = \sqrt{C_*} - \sqrt{C} = \frac{f_0}{\sqrt{C}};$$

инжекция осуществляется с плоскости $x = 0$ при выполнении условий (52).

Сравнение приближенного и точного решений. Приближенные и точные значения функции f совпадают не только при $x = 0$, но и при $y = 0$ ($x = \sqrt{C/\bar{\Omega}}$):

$$f_{\text{ap}}(0) = f_{\text{ex}}(0) = \sqrt{C_*} - \sqrt{C}, \quad (68)$$

$$f_{\text{ap}}(\sqrt{C/\bar{\Omega}}) = f_{\text{ex}}(\sqrt{C/\bar{\Omega}}) = \frac{\sqrt{C_*} - \sqrt{C}}{\sqrt{\bar{\Omega}}}.$$

Максимальная ошибка решения имеет место в вершине эллипса с большей кривизной. Значения кривизн точной и приближенной траекторий в этой точке описываются формулами

$$k_{\text{ex}}(\sqrt{C/\bar{\Omega}}) = -\frac{1}{\sqrt{C_*\bar{\Omega}}} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{\Omega}[\sqrt{C} + f(0)]}}, \quad (69)$$

$$k_{\text{ap}}(\sqrt{C/\bar{\Omega}}) = -\frac{\sqrt{\bar{\Omega}}[\bar{\Omega}\sqrt{C} + (2 - \bar{\Omega})f(0)]}{[\bar{\Omega}\sqrt{C} + f(0)]^2}.$$

Точность вычислений существенно зависит от этой величины (табл. 10), поскольку при больших значениях отношения полуосей a/b обход контура сопровождается резким убыванием кривизны. Для $a/b = -k = 2$ при $\epsilon = L_*/10$ ошибка составляет

Таблица 9. Сравнение случаев гиперболической оси с одинаковой кривизной в вершине при $H_z = 0$ и $H_z \neq 0$ ($H_z = 1/3, \bar{\Omega} = 2, C = 4$)

Параметр	$f(0)$		
	-0.025	-0.05	-0.1
$H_z \neq 0$			
k_{ex}	0.988	0.976	0.952
k_{ap}	1.011	1.021	1.200
$\delta, \%$	2.4	4.6	26.1
$H_z = 0$			
k_{ex}	0.976	0.952	0.909
k_{ap}	0.998	0.991	0.960
$\delta, \%$	2.3	4.1	5.6

1.6%; для $a/b = 4$ и том же $\epsilon - 7.2\%$; для $a/b = 10$ и $\epsilon = L_*/20$ — уже 12.2% при уменьшении ошибки до 0.8% для $\epsilon = L_*/100$.

Несмотря на существенное различие значений $k_{\text{ex}}, k_{\text{ap}}$ при $a/b = 10$ в табл. 10, приближенная траектория вычисляется гораздо более точно, чем можно было ожидать. При уменьшении $f(0)$ уменьшаются и значения $f_{\text{ex}}, f_{\text{ap}}$, поэтому величина относительной ошибки перестает быть информативной. Абсолютная разность $|f_{\text{ex}} - f_{\text{ap}}|$ должна соотноситься с меньшей полуосью эллипса $b = 1$ и, как видно из табл. 11 ($f(0) = 0.1$), составляет 6.6% от этой величины при пятикратном отличии точного и приближенного значений кривизны. При этом параксиальная траектория в вершине эллипса на оси x отстоит от базовой кривой на расстояние, равное b .

Факт точного вычисления траекторий имеет важное значение по той причине, что кроме классической формы решения внешней задачи, ис-

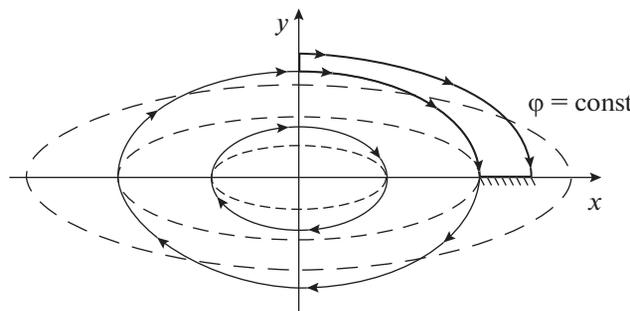


Рис. 6. Эллиптический поток в магнитном поле.

Таблица 10. Сравнение параксиальной модели и точного решения (62), ось-эллипс

$f(0)$	k_{ex}	k_{ap}	$\delta, \%$
$C = 1, \bar{\Omega} = 0.25, a/b = 2, k = 2, L^* = 0.5$			
0.03	1.942	1.929	0.7
0.05	1.905	1.875	1.6
0.1	1.818	1.735	4.8
0.2	1.670	1.481	12.8
$C = 1, \bar{\Omega} = 0.0625, a/b = 4, k = 4, L^* = 0.25$			
0.01	3.96	3.894	1.7
0.015	3.94	3.811	3.3
0.025	3.90	3.622	7.2
0.05	3.81	3.148	17.4
$C = 1, \bar{\Omega} = 0.01, a/b = 10, k = 10, L^* = 0.1$			
0.001	9.99	9.91	0.8
0.005	9.95	8.87	12.2
0.01	9.9	7.475	24.4
0.02	9.804	5.53	43.6

Таблица 11. Сравнение параксиальной модели и точного решения (62) при $x = 9.5$, ось – эллипс ($C = 1, \bar{\Omega} = 0.01, a/b = 10, k = 10, L^* = 0.1$)

Параметр	$f(0)$					
	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
k_{ex}	9.98	9.95	9.9	9.8	9.52	9.09
k_{ap}	9.72	8.87	7.475	5.53	2.99	1.73
f_{ex}	0.0061	0.0160	0.0296	0.0573	0.132	0.241
f_{ap}	0.0064	0.0150	0.032	0.0613	0.160	0.306
$\delta_k, \%$	2.7	12.2	132	177	333	526
Δf	0.00032	0.001	0.0024	0.004	0.0276	0.0659

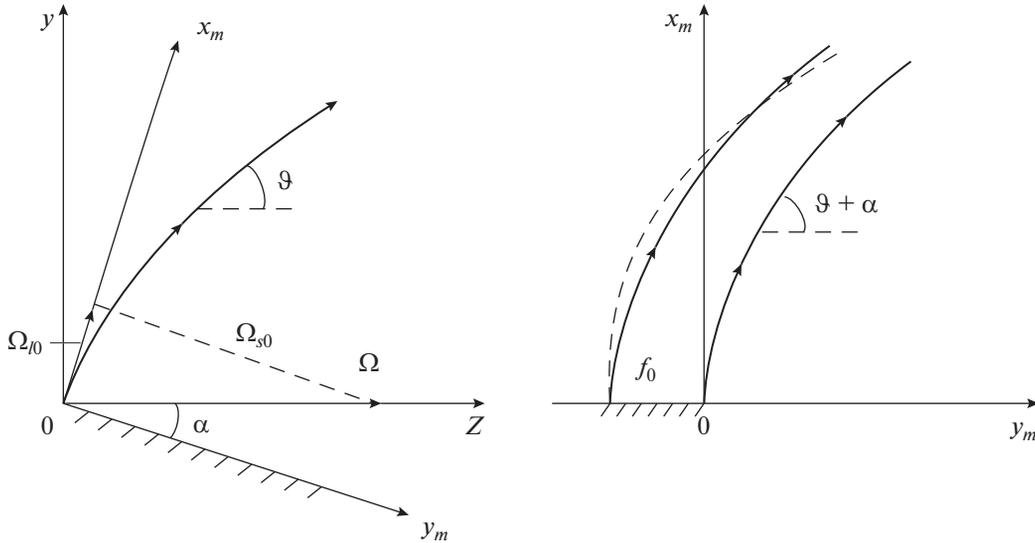


Рис. 7. Системы координат для плоского магнетрона (здесь и далее сплошная линия соответствует точному решению, штриховая линия – приближенному).

пользующей информацией о потенциале и поле на границе потока, существует новый вид решения, в котором под двойным интегралом при $\rho = \rho(l)$ стоит квадрат коэффициента Ляме $h(u, v)$ системы u, v , связанной с границей пучка $v = 0$:

$$\varphi = \varphi_i - \rho(l) \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} h^2(u + i\xi, \eta) d\xi, \quad (70)$$

где $\varphi_i = \varphi(l, s)$ – потенциал в потоке из (1).

Существование асимптот у траекторий в случае оси-гиперболы и выход величины δ на константу при движении вдоль пучка не позволяли судить о влиянии постоянной плотности на точность параксиального описания. Из анализа течения с эллиптической осью и сравнения с результатами разд. 4, 5 видно, что условие $\rho = \text{const}$ не приводит к заметному уменьшению ошибки, как этого можно было бы ожидать от параксиальной теории, описывающей пучки с постоянной в поперечном сечении плотностью.

7. ПЛОСКИЙ МАГНЕТРОН

Эталонное решение. Одномерное решение для плоского магнетрона, все параметры течения в котором зависят от координаты x_m в декартовой системе x_m, y_m , может быть построено в параметрической форме [13]. Помимо системы x_m, y_m , связанной с катодом $x_m = 0$, удобно использовать координаты y, z с осью z , направленной вдоль од-

нородного магнитного поля Ω , составляющего угол α с катодом (рис. 7):

$$\begin{aligned} x_m &= y \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ y_m &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{aligned} \quad (71)$$

Конфигурация трубки тока в плоскости x_m, y_m и зависимость сноса по x от параметра τ описываются формулами

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{J \cos^2 \alpha}{\Omega^3} \times \\ &\times \left[\frac{1}{6} (\operatorname{tg}^2 \alpha) \tau^3 + \tau - \sin \tau + \gamma \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \alpha) \tau^2 - \cos \tau + 1 \right) \right], \\ y_m &= \frac{J \cos^2 \alpha}{\Omega^3} \times \\ &\times \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1}{6} \tau^3 + \sin \tau - \tau + \gamma \left(\frac{1}{2} \tau^2 + \cos \tau - 1 \right) \right], \\ x &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \left[\frac{1}{2} \tau^2 + \cos \tau - 1 + \gamma (\tau - \sin \tau) \right]; \\ \gamma &= \frac{E\Omega}{J}, \quad \tau = \Omega t, \quad \frac{d}{dt} = \Omega \frac{d}{d\tau}. \end{aligned} \quad (72)$$

Здесь t – время; J, E – плотность тока эмиссии и электрическое поле на катод; при $\gamma \neq 0$ и $\gamma = 0$ имеет место эмиссия в T - и ρ -режиме соответственно; дифференцирование по параметру τ далее будем отмечать точкой.

Заметим, что две правые системы x_m, y_m, x и l, s, x имеют противоположно направленные оси по циклической координате x . По этой причине сносная скорость $w = dx/dt$ точного решения отли-

чается по знаку от той же величины в параксиальной модели:

$$V_x = -dx/dt = -w. \quad (73)$$

В координатах x, y, z для траектории, компонент скорости и потенциала имеем

$$\begin{aligned} y &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} [\tau - \sin \tau + \gamma(1 - \cos \tau)], \\ z &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{3} \tau^3 + \gamma \tau^2 \right), \\ \frac{dy}{dt} &= \Omega \dot{y} = \frac{J \cos \alpha}{\Omega^2} (1 - \cos \tau + \gamma \sin \tau), \\ \frac{dz}{dt} &= \Omega \dot{z} = \frac{J \cos \alpha}{\Omega^2} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha (\tau^2 + 2\gamma \tau), \\ \frac{dx}{dt} &= \Omega \dot{x} = \Omega y, \quad V_l = \Omega \sqrt{y^2 + z^2}, \\ \rho V_l f &= J f_0, \quad \varphi = \frac{J^2 \cos^2 \alpha}{\Omega^4} \times \\ &\times \left[\frac{1}{8} (\operatorname{tg}^2 \alpha) \tau^4 + \frac{1}{2} \tau^2 - \cos \tau + 1 - \tau \sin \tau + \right. \\ &+ \gamma^2 \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \alpha) \tau^2 - \cos \tau + 1 \right) + \\ &\left. + \gamma \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \alpha) \tau^3 + \tau - \tau \cos \tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Параксиальное уравнение. Для параметрической формы решения (72), (74) левая часть параксиального уравнения (1) равна $\Omega^2 \dot{f}$, а в правой части необходимо перейти от дифференцирования по координате l к переменной τ при помощи соотношения

$$\frac{d}{dl} = \frac{1}{V_l} \frac{d}{dt} = \frac{\Omega}{V_l} \frac{d}{d\tau}. \quad (75)$$

Исключим постоянные множители при функциях от τ в формулах (74), обозначая результат перенормировки чертой

$$\begin{aligned} y &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \bar{y}, \quad z = \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \bar{z}, \quad \dot{y} = \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \dot{\bar{y}}, \\ \dot{z} &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \dot{\bar{z}}, \quad x_m = \frac{J \cos^2 \alpha}{\Omega^3} \bar{x}_m, \\ y_m &= \frac{J \cos^2 \alpha}{\Omega^3} \bar{y}_m, \quad V_l = \frac{J \cos \alpha}{\Omega^2} \bar{V}_l, \\ V_x &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^2} \bar{V}_x, \quad \varphi \equiv U = \frac{J^2 \cos^2 \alpha}{\Omega^4} \bar{U}, \\ E &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega} \bar{E}, \quad N = \Omega^2 \bar{N}, \quad \rho = \Omega^2 \bar{\rho}, \\ \Omega_l &= \Omega \bar{\Omega}_l, \quad \Omega_s = \Omega \bar{\Omega}_s, \\ h &= \frac{J \cos \alpha}{\Omega^3} \bar{h}, \quad k = \frac{\Omega^3}{J \cos \alpha} \bar{k}. \end{aligned} \quad (76)$$

Для величин, входящих в правую часть уравнения (1), имеем

$$\begin{aligned} 2\bar{U} &= \bar{h}^2 + \bar{y}^2, \quad \bar{h} = \sqrt{\dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2}, \quad \bar{V}_l = \bar{h}, \quad \bar{V}_x = -\bar{y}, \\ \bar{\Omega}_l &= \frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{h}}, \quad \bar{\Omega}_s = -\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{h}}, \quad \Omega_{l0} = \Omega \sin \alpha, \\ \bar{k} &= \frac{1}{\bar{h}^3} (\dot{\bar{y}} \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{z}} \dot{\bar{y}}), \quad \bar{E} = \bar{k} \bar{h}^2 + \bar{y} \bar{\Omega}_l, \\ \bar{\rho} &= \frac{f_0}{f \bar{h} \cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\dot{y}}{\dot{z}}, \\ -V_x \frac{d\Omega_s}{dl} &= \Omega^2 \frac{1}{\bar{h}} \bar{k} \dot{\bar{z}} \bar{V}_x, \quad \frac{d^2 U}{dt^2} = \Omega^2 \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{1}{\bar{h}} \dot{\bar{U}} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

После введения новой искомой функции

$$\bar{f} = f/f_0 \quad (78)$$

уравнение для \bar{f} приобретает универсальный вид и содержит два параметра: γ, α . Опуская символ нормировки (черту), имеем

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{1}{h \cos \alpha} - \\ &- \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \dot{U} \right) + 2k^2 h^2 + \frac{1}{h^2} \dot{z}^2 - \frac{1}{h} k y \dot{z} \right] f + \\ &+ \sin \alpha \left(\frac{1}{h} \dot{z} - 2ky \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Асимптотическое поведение функции f/f_0 при $\tau \rightarrow \infty$ определено соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{z} &= h \sim \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha) \tau^2, \quad k \sim \frac{1}{\tau^4}, \quad k V_l \sim \frac{1}{\tau^2}, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \dot{U} \right) &\sim \frac{1}{\tau^2}, \quad \frac{\dot{z}}{h} = 1. \end{aligned} \quad (80)$$

В результате уравнение (78) принимает вид

$$\ddot{f} + \bar{f} = \sin \alpha, \quad \bar{f} = A \cos \tau + \sin \alpha. \quad (81)$$

Функция \bar{f} описывает установившиеся колебания возле величины $\sin \alpha$ с периодом по $\tau = \Omega t = 2\pi$ и амплитудой A , определяемой предысторией решения.

В соответствии с теорией антипараксиальных разложений [1] кривизна траектории вблизи катоды в T -режиме описывается соотношением

$$k = -\frac{1}{6} \frac{\Omega^2 \sin 2\alpha}{E} \left(1 - \frac{7}{16} \frac{J}{E \sqrt{2E}} X^{1/2} \right), \quad (82)$$

где X – расстояние по нормали к стартовой поверхности. Учитывая асимптотику (82), можно предположить, что максимальное по модулю значение этот параметр имеет в точке старта. Расчеты это предположение подтверждают.

Сравнение точной и параксиальной траекторий. Точная траектория с начальными условиями параксиальной задачи получается при трансляции

осевой кривой пучка вдоль оси y_m (рис. 8). Параксиальная траектория определена параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x_m^{ap} &= x_m^{ex} + f \cos(\vartheta + \alpha), \\ y_m^{ap} &= y_m^{ex} - f \sin(\vartheta + \alpha). \end{aligned} \quad (83)$$

Ниже при решении трансцендентного уравнения с отысканием параметра τ_* удобно перейти от x_m, y_m к \bar{x}_m, \bar{y}_m ; в результате перенормировки функция f в (83) имеет следующий смысл:

$$f \rightarrow \frac{\Omega^3}{J \cos^2 \alpha} f. \quad (84)$$

Точное расстояние f между двумя траекториями решения (72) следует из соотношений (см. рис. 8)

$$\begin{aligned} x_m(\tau) + f(\tau) \cos[\vartheta(\tau) + \alpha] &= x_m(\tau_*), \\ y_m(\tau) - f(\tau) \sin[\vartheta(\tau) + \alpha] &= y_m(\tau_*) - f_0. \end{aligned} \quad (85)$$

Параметр τ_* при заданном τ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{x_m(\tau_*)}{\cos[\vartheta(\tau) + \alpha]} + \frac{y_m(\tau_*)}{\sin[\vartheta(\tau) + \alpha]} &= \\ = \frac{x_m(\tau)}{\cos[\vartheta(\tau) + \alpha]} + \frac{y_m(\tau) + f_0}{\sin[\vartheta(\tau) + \alpha]}. \end{aligned} \quad (86)$$

Зная значение τ_* , величину f можно определить из любого уравнения (85).

Кривизна линии (83) описывается выражением

$$k_{ap} = \frac{\dot{x}_m^{ap} \dot{y}_m^{ap} - \ddot{y}_m^{ap} \dot{x}_m^{ap}}{\left[(\dot{x}_m^{ap})^2 + (\dot{y}_m^{ap})^2 \right]^{3/2}}. \quad (87)$$

Для производных в формуле (87) имеем

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta)' &= -\dot{y}k, \quad (\sin \vartheta)' = \dot{z}k; \\ \dot{x}_m^{ap} &= \dot{x}_m(1 - fk) + \dot{f} \cos(\vartheta + \alpha), \\ \dot{y}_m^{ap} &= \dot{y}_m(1 - fk) - \dot{f} \sin(\vartheta + \alpha); \\ h_{ap}^2 &= (\dot{x}_m^{ap})^2 + (\dot{y}_m^{ap})^2 = h^2(1 - fk)^2 + \\ &+ \dot{f}^2 + 2\dot{f}(1 - fk)(\dot{y} \cos \vartheta - \dot{z} \sin \vartheta); \\ \ddot{x}_m^{ap} \dot{y}_m^{ap} - \ddot{y}_m^{ap} \dot{x}_m^{ap} &= kh^3(1 - fk)^2 + \\ &+ \dot{f}^2(1 - fk)(\dot{y} \sin \vartheta + \dot{z} \cos \vartheta) + \\ &+ \dot{f}(1 - fk)[- \dot{y} \sin(\vartheta + 2\alpha) + \dot{z} \cos(\vartheta + 2\alpha)] + \\ &+ \dot{f}(f\dot{k} + 2\dot{f}k)[\dot{y} \sin(\vartheta + 2\alpha) - \dot{z} \cos(\vartheta + 2\alpha)] - \\ &- 2\dot{f}\ddot{f} \sin(\vartheta + \alpha) \cos(\vartheta + \alpha). \end{aligned} \quad (88)$$

Согласно теории антипараксиальных разложений при эмиссии в T -режиме с плоскости при $E, \Omega = \text{const}$ траекторная функция при малых τ имеет вид [1]

$$\bar{f} = 1 + 0 \cdot \tau + 0 \cdot \tau^2 + 0 \cdot \tau^3 + f_4 \tau^4 + \dots \quad (89)$$

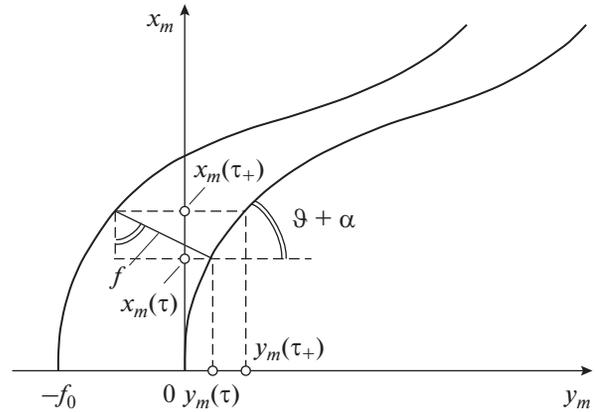


Рис. 8. К определению точного и приближенного значений f .

Этот же результат следует из локального рассмотрения параксиального уравнения (79). Принимая во внимание соотношения (88), (89), для кривизны приближенной траектории в точке старта получаем

$$k_{ap}(0) = \frac{k}{1 - f_0 k}, \quad K = \frac{k_{ap}}{k} = \frac{1}{1 - f_0 k}. \quad (90)$$

Для параметров пучка, близких к параметрам планарного гиротрона [14] ($\Omega = 2.9, J = 0.116, \alpha = 30^\circ, \gamma = 15$), которые в дальнейшем используются во всех численных примерах, формулы (90) принимают вид

$$k = -2.023, \quad L_* \approx 0.494, \quad K = \frac{1}{1 + 2.023 f_0}. \quad (91)$$

В табл. 12 приведены значения отношения кривизн K , а также соответствующие величины малого геометрического параметра $\varepsilon = f_0/L_*$ при нескольких значениях f_0 .

Сравнение функций $f_{ex}(\tau)$ из (85) и решения $f_{ap}(\tau)$ дифференциального уравнения (79) при $f_0 = 0.1, 0.3$ иллюстрирует рис. 9а, 9б соответственно. В табл. 13 представлены значения этих функций. Максимальная ошибка в 34% и 83% имеет место при $\tau = 3$ на расстоянии $x_m = 0.18$ от катода, в то время как после $x_m = 0.54$ ($\tau = 7$) различие между точным и приближенным решениями не превышает 2 и 7% соответственно; упомянутые расстояния x_m составляют примерно $0.4L_*$ и $1.25L_*$.

На рис. 10 представлены точная и приближенная конфигурации электронного потока.

Точные и приближенные значения потенциала на параксиальной траектории. Задав на оси пучка точку, соответствующую параметру τ , величину

Таблица 12. Сравнение параксиальной модели и точного решения (72) – плоский магнетрон

Параметр	f_0			
	0.01	0.02	0.05	0.1
K	0.980	0.961	0.908	0.832
$\delta, \%$	2.0	3.9	9.2	16.8
ϵ	0.0202	0.0404	0.101	0.202
N_{m1}	8.812×10^{-4}	3.504×10^{-3}	0.022	0.085
N_{m2}	3.201×10^{-4}	1.232×10^{-3}	7.583×10^{-3}	0.035
N_J	0.042	0.081	0.184	0.347
$N_p (\tau = 2)$	0.293	0.636	2.000	5.444
$N_p (\tau = 1)$	0.454	1.286	6.088	22.044

τ_* найдем из уравнения (см. рис. 8, где вместо точной траектории взята приближенная)

$$x_m^{ap}(\tau) = x_m(\tau_*). \tag{92}$$

Точное значение потенциала в точке сравнения определяет функция $\bar{U}(\tau_*)$. Параксиальное

выражение для потенциала при $\tau = \tau_*$ описывается формулой

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ap} = \bar{U}(\tau) + \frac{\Omega^3 f_0}{J \cos \alpha} \bar{E} \bar{f} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega^3 f_0}{J \cos \alpha} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{\hbar \bar{f} \cos \alpha} - \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{\hbar} \dot{\bar{U}} \right)' + \bar{k} \bar{E} \right] \bar{f}^2. \end{aligned} \tag{93}$$

В табл. 14 приведены результаты сравнения, показывающие, что максимальное отличие приближенного потенциала на параксиальной траек-

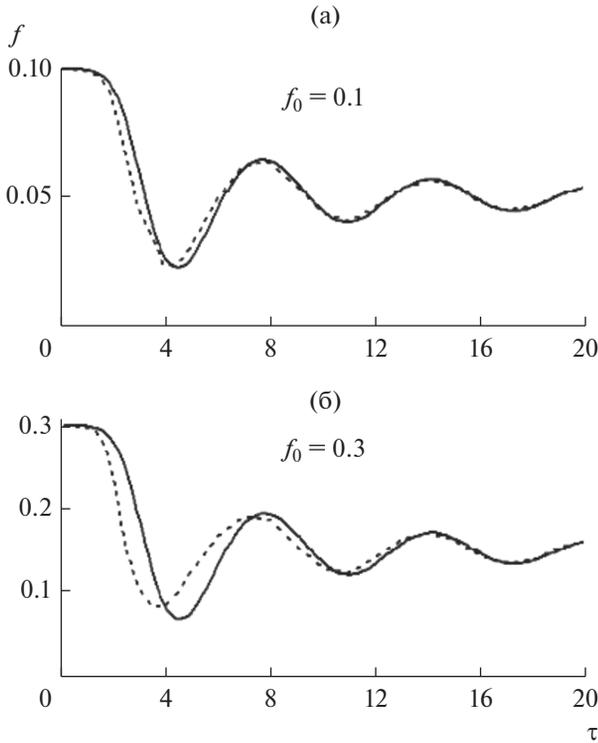


Рис. 9. Сравнение точного (сплошная линия) и приближенного (пунктирная линия) значений функции f для магнетрона.

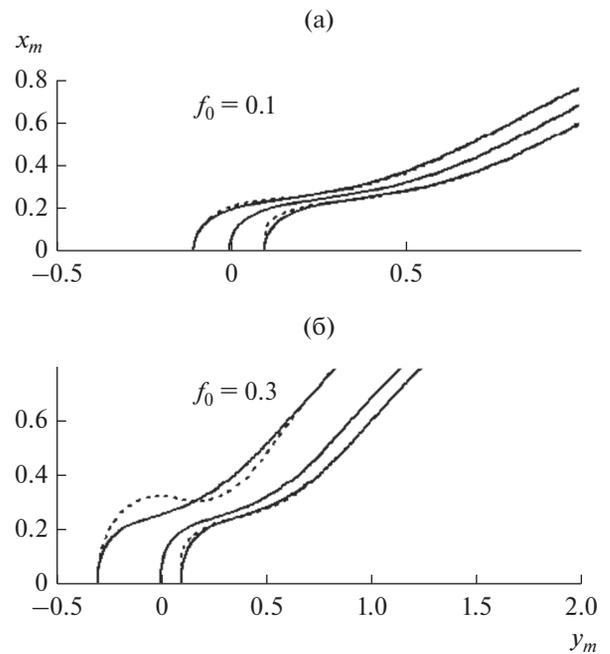


Рис. 10. Конфигурация точной (а) и приближенной (б) трубок тока.

тории от точной величины при $f_0 = 0.1, 0.3$ составляет 4 и 9.2% соответственно.

Таблица 13. Сопоставление функций $f_{ex}(\tau)$ и $f_{ap}(\tau)$ для решения (72) – плоский магнетрон

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК

Невязки параксиальной модели. При проведении практических расчетов с параксиальной моделью суждения о величине ошибки можно получить, подставляя в точные уравнения пучка в системе l, s, x [2]

$$\begin{aligned}
 2\varphi &= v_l^2 + v_s^2 + v_x^2, \quad h_l = 1 - ks, \\
 v_s \left[\frac{\partial v_s}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial s} (h_l v_l) + h_l H_x \right] + v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial l} - h_l H_s \right) &= 0, \\
 \frac{v_l}{h_l} \left(\frac{\partial v_x}{\partial l} - h_l H_s \right) + v_s \left(\frac{\partial v_x}{\partial s} + H_l \right) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial l} (\rho v_l) + \frac{\partial}{\partial s} (h_l \rho v_s) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{h_l} \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(h_l \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) &= h_l \rho, \\
 \frac{\partial H_s}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial s} (h_l H_l) = 0, \quad \frac{\partial H_l}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial s} (h_l H_s) = 0, \\
 H_x &= \text{const}
 \end{aligned} \tag{94}$$

выражения для параметров потока из (1) и соотносясь с соотношением невязки N и относительной ошибки δ для рассмотренных выше точных решений.

В качестве критерия точности N можно использовать корень квадратный из суммы квадратов невязок по уравнениям (94), локальный максимум $|N|$ для уравнения с наибольшим значением этой величины, так или иначе определенное среднее значение $|N|$ по области, в которой строится решение. Как правило, все эти величины имеют один порядок. Для невязок, соответствующих интегралу энергии, двум уравнениям движения $\vec{v} \times \text{rot} \vec{P} = 0$ (\vec{P} – обобщенный импульс), уравнению сохранения тока, уравнению Пуассона, уравнениям для $\text{rot} \vec{H}$ и $\text{div} \vec{H}$ в (94), примем обозначения $N_{m1}, N_{m2}, N_{m3}, N_J, N_\rho, N_{H1}, N_{H2}$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 N_{m1} &= \left[\rho - \bar{N} - (kV_l + \Omega_x)^2 - \Omega_l^2 - (v_l f' / f)^2 \right] s^2, \\
 N_{m2} &= v_s \left[\frac{\partial v_s}{\partial l} + k(2kV_l + \Omega_x) s \right] + \\
 &\quad + (V_x - \Omega_l s) k \left(-\Omega_l' + k\Omega_s \right) s^2, \\
 N_{m3} &= v_l \left[\frac{1}{h_l} k \left(-\Omega_l' + k\Omega_s \right) + \left(\Omega_s' + k\Omega_l \right) f' / f \right] s^2,
 \end{aligned}$$

τ	τ_*	f_{ex}	f_{ap}	$\delta, \%$
$f_0 = 0.1$				
0	0	0.1	0.1	0
1	1.1482	0.0996	0.0997	0.1
1.5	1.7746	0.0975	0.0983	0.8
2	2.4711	0.0894	0.0935	4.6
2.5	3.1926	0.0696	0.0816	17.2
3	3.7938	0.0462	0.0618	33.7
4	4.6963	0.0242	0.0278	14.9
4.3	4.9545	0.0236	0.0240	1.7
4.7	5.3045	0.0261	0.0233	10.7
5	5.5701	0.0301	0.0257	14.6
6	6.4486	0.0489	0.0442	9.6
7	7.3306	0.0627	0.0612	2.4
8	8.2725	0.0642	0.0647	0.8
9	9.2590	0.0552	0.0568	2.9
$f_0 = 0.3$				
0	0	0.3	0.3	0
1	1.4104	0.2982	0.2991	0.3
1.3	1.9110	0.2936	0.2973	1.3
1.5	2.2875	0.2867	0.2948	2.8
1.7	2.7077	0.2737	0.2908	6.25
2	3.4049	0.2364	0.2804	18.6
3	5.0207	0.1011	0.1855	83.5
3.5	5.4510	0.0835	0.1240	48.5
4	5.8348	0.0856	0.0835	2.45
4.3	6.0627	0.0936	0.0719	23.2
4.5	6.2145	0.1011	0.0692	31.55
5	6.5854	0.1245	0.0771	38.1
6	7.2561	0.1693	0.1325	21.7
7	7.9410	0.1925	0.1835	5.3

Таблица 14. Сопоставление на приближенной траектории точного φ_{ex} и параксиального φ_{ap} значений потенциала для плоского магнетрона (72)

τ	$f_0 = 0.1$				$f_0 = 0.3$			
	τ_*	φ_{ex}	φ_{ap}	$\delta, \%$	τ_*	φ_{ex}	φ_{ap}	$\delta, \%$
0.2	0.226	7.497	7.718	2.96	0.269	10.359	11.027	6.44
0.3	0.338	16.944	17.448	2.97	0.405	23.456	24.967	6.44
1	1.148	190.34	196.53	3.25	1.412	270.90	289.64	6.92
2	2.494	719.76	749.02	4.07	3.783	1105.5	1200.5	8.59
3	4.142	1243	1291	3.86	6.075	1860.7	2031.8	9.20
4	4.793	1424	1451	1.90	5.808	1777.9	1859.9	4.61

$$N_J = \frac{1}{f}(\rho V_l f)' + [\rho(kV_l + \Omega_x)]' s +$$

$$+ [2\Omega_x - 3k(kV_l + \Omega_x)s] \rho \frac{f'}{f} s, \quad (95)$$

$$N_\rho = \frac{1}{h_1^2} k' \left[U' + E' s + \frac{1}{2}(\rho - \bar{N})' s^2 \right] s +$$

$$+ \frac{1}{h_1} \left[U'' + E'' s + \frac{1}{2}(\rho - \bar{N})'' s^2 \right] - U'' + k(2\bar{N} - \rho) s,$$

$$N_{H1} = \left[(-\Omega_l' + k\Omega_s') + 2k(\Omega_s' + k\Omega_l') \right] s,$$

$$N_{H2} = \left[(\Omega_s' + k\Omega_l') - 2k(-\Omega_l' + k\Omega_s') \right] s;$$

$$f' \equiv df/dl.$$

Решение (4) с траекториями-окружностями. Отличие решения (9) от точного решения (4) характеризуется единственной отличной от нуля невязкой N_ρ

$$N_\rho = \frac{1}{h_1} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} \times$$

$$\times \left[\left(4\text{ctg}^2 \frac{3\Psi}{2} - 20 \right) s + \left(2\text{ctg}^2 \frac{3\Psi}{2} + 2 \right) s^2 \right]. \quad (96)$$

В последнем столбце табл. 1 приведены значения N_ρ на линии симметрии решения $\Psi = \pi/3$. Параксиальный подход не дает возможности восстановить структуру особенности на катоде при существенно неоднородном токоотборе, заменяя точную зависимость для плотности тока J из (4) константой. По этой причине невязка N_ρ при $\Psi \rightarrow 0$ обращается в бесконечность, но затем

быстро убывает (при $3\Psi/2 = 10^\circ$, $s = 0.1$, $N_\rho = 1.12$), проходит через нуль и приближается к приведенному в таблице значению. Видно, что $N_\rho \sim 1$ соответствует ошибке в 1.5%, $N_\rho \sim 2$ — ошибке в 5.5%. Подобного же соответствия можно ожидать при эмиссии со слабо искривленной поверхности с неоднородным токоотбором.

Решение (44) с осью пучка в виде гиперболы. Для параксиальных течений с гиперболической осью формулы (95) принимают вид

$$D = [\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2 + C]^{-1/2}, \quad F = \bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1)y^2 - C,$$

$$N_{m1} = -\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1)^2(\bar{\Omega}y^2 + C)FD^7y^2(2 + FD^3s)s,$$

$$N_{m2} = \bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1)D^8 \times$$

$$\times [\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1)(\bar{\Omega}^2 - 1)y^6 + C\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)(2\bar{\Omega}^2 -$$

$$- 4\bar{\Omega} - 1)y^4 - C^2(3\bar{\Omega}^2 + 4\bar{\Omega} - 1)y^2 + C^3]s^2,$$

$$N_J = -2\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)\sqrt{\bar{\Omega}y^2 + CFD^5}y \left(1 + \frac{3}{2}C\bar{\Omega}D^3s \right) s,$$

$$N_\rho = (\bar{\Omega} - 1)CD^{10} \left[\frac{3}{2}\bar{\Omega}^3(\bar{\Omega} + 1)^2 \times \right.$$

$$\times (2\bar{\Omega}^3 + 2\bar{\Omega}^2 - 1)y^6 + C\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1) \times$$

$$\times \left(4\bar{\Omega}^4 + 9\bar{\Omega}^3 + 5\bar{\Omega}^2 - 2\bar{\Omega} - \frac{5}{2} \right) y^4 + \quad (97)$$

$$+ C^2\bar{\Omega} \left(3\bar{\Omega}^4 + \bar{\Omega}^3 + 3\bar{\Omega}^2 - \frac{1}{2}\bar{\Omega} - \frac{1}{2} \right) y^2 +$$

$$+ C^3 \left(-\bar{\Omega}^3 - \bar{\Omega} + \frac{1}{2} \right) \left. \right] s^2 + C^2\bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)D^{13} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{3}{2}\bar{\Omega}^4(\bar{\Omega} + 1)^3y^8 + \bar{\Omega}^3(\bar{\Omega} + 1)^2 \left[\frac{3}{2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 2C(\bar{\Omega} - 1) \Big] y^6 + C\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1) \times \\
 & \times \left[\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega}^2 - 1) + \frac{1}{2}(4\bar{\Omega} + 7) - C\left(4\bar{\Omega} + \frac{7}{2}\right) \right] y^4 + \\
 & + C^2\bar{\Omega} \left[(\bar{\Omega} + 1) \left(-2\bar{\Omega}^2 + \frac{5}{2} \right) - C(2\bar{\Omega} + 1) \right] y^2 + \\
 & + C^3 \left(-\bar{\Omega}^3 - \bar{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \right) s^3, \quad N_{m3} = N_{H1} = N_{H2} = 0.
 \end{aligned}$$

При $y \rightarrow \infty$ все невязки в (97) обращаются в нуль, а при $y = 0$, где кривизна оси максимальна, имеем

$$\begin{aligned}
 N_{m1} = 0, \quad N_{m2} = \frac{\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1)}{C} s^2, \quad N_J = 0, \\
 N_\rho = -\frac{\bar{\Omega} - 1}{C} \left[\bar{\Omega}^2(\bar{\Omega} + 1) - \frac{1}{2} \right] \left(1 + \frac{\bar{\Omega}}{\sqrt{C}} s \right) s^2.
 \end{aligned} \tag{98}$$

Из формул (98) видно, что при нулевой невязке по интегралу энергии N_{m1} невязки по второму уравнению движения N_{m2} и уравнению Пуассона N_ρ , примерно сравнивающиеся при $\bar{\Omega} = 2$, различаются в четыре раза при $\bar{\Omega} = 5$. Как и следовало ожидать, небольшая невязка по интегралу энергии, часто анализируемая в программах траекторного анализа, является необходимым, но далеко не достаточным условием близости приближенного решения к точному. Для модельной задачи о пучке с гиперболической осью ошибка может быть сколь угодно велика при увеличении начальной кривизны оси и толщины пучка при $N_{m1} = 0$.

При отсутствии магнитного поля формулы (97) принимают вид

$$\begin{aligned}
 N_{m1} = \frac{C(x^2 + 2C)}{\sqrt{2}(x^2 + C)^{7/2}} \left[2 + \frac{C}{\sqrt{2}(x^2 + C)^{3/2}} s \right] s, \\
 N_{m2} = -\frac{C(3x^4 + 6Cx^2 - 2C^2)}{2(x^2 + C)^4} s^2, \quad N_\rho \equiv 0, \\
 N_J = \frac{C\sqrt{2}x\sqrt{x^2 + 2C}}{(x^2 + C)^{5/2}} \left[1 + \frac{3C}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2 + C)^{3/2}} s \right] s.
 \end{aligned} \tag{99}$$

В вершине гиперболы отлична от нуля только невязка N_{m2} :

$$N_{m2}(0) = -\frac{1}{C} s^2, \tag{100}$$

причем функции N_{m1} , N_{m2} и N_J на интервале $(0, \infty)$ достигают максимума. Для N_{m2} это значение N_{m2}^*

$$(x_*^2 + C)^2 = \frac{10}{3} C^2, \quad N_{m2}^* = \frac{9}{40C} s^2, \tag{101}$$

составляет 0.225 от $|N_{m2}(0)|$ из (100). Квадратичными членами в выражениях для N_{m1} , N_J можно пренебречь при вычислении максимальных величин. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 (x_*^2 + C)^2 = \frac{7}{3} C^2, \quad N_{m1}^* = \frac{4}{7\sqrt{2}C} \left(\frac{3}{7} \right)^{3/4} \times \\
 \times \left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}C} \left(\frac{3}{7} \right)^{3/4} s \right] s;
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$(x_*^2 + C)^2 = \frac{5}{3} C^2, \quad N_J^* = \frac{6}{5\sqrt{5}C} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}C} \left(\frac{3}{5} \right)^{3/4} s \right] s.$$

В этом случае невязку имеет смысл оценивать по формуле

$$N = \left[N_{m1}^{*2} + N_{m2}^2(0) + N_J^{*2} \right]^{1/2}. \tag{103}$$

Приведенные в табл. 6 значения N показывают, что, выраженная в процентах, эта величина практически совпадает с δ . Исключение составляют варианты $C = 0.5, 1, f(0) = 0.1$, где соответствующие значения превышает ошибку в 2 и 1.5 раза.

Функция N практически линейна по s . Типичный закон изменения различных невязок приведен на рис. 11. Упомянутое соотношение величин δ и N может быть принято для электростатических потоков в области, удаленной от катода, при характерных значениях кривизны базовой траектории порядка единицы.

В табл. 8 приведены значения невязок для случая $\vec{H} \neq 0$, а на рис. 12 представлено типичное поведение этих функций при $\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.05$. Из табл. 8 видно, что при $\bar{\Omega} = 2$ выраженное в процентах значение N близко к δ , при кривизне оси в диапазоне 3...4 имеем $\delta \sim N/(\bar{\Omega} - 1)$, при $\bar{\Omega} = 5$ соотношение принимает форму $\delta \sim N/\bar{\Omega}$. Увеличение кривизны оси соответствует возрастанию магнитного поля H_z .

Решение (72) для плоского магнетрона. Выражения (95) для невязок в этом случае принимают вид

$$N_{m1} = \Omega^2 \left[\bar{\rho} - \bar{N} - \bar{k}^2 \bar{h}^2 - \bar{\Omega}_l^2 - (T\dot{f}/f)^2 \right] s^2,$$

$$T = 1 + \bar{\Omega} \bar{k} s,$$

$$\begin{aligned}
 N_{m2} = \bar{\Omega} \Omega^2 \left\{ T \frac{\dot{f}}{f} \left[\frac{1}{\bar{h}} \left(T \frac{\dot{f}}{f} \right) \right] + 2\bar{k}^2 \bar{h} \right\} + \\
 + \frac{\bar{\Omega} \bar{k}}{\bar{h}} \left(\frac{1}{\bar{\Omega}} \bar{y} + \bar{\Omega}_l s \right) \left(\dot{\bar{\Omega}}_l - \bar{k} \bar{h} \bar{\Omega}_s \right) s^2,
 \end{aligned}$$

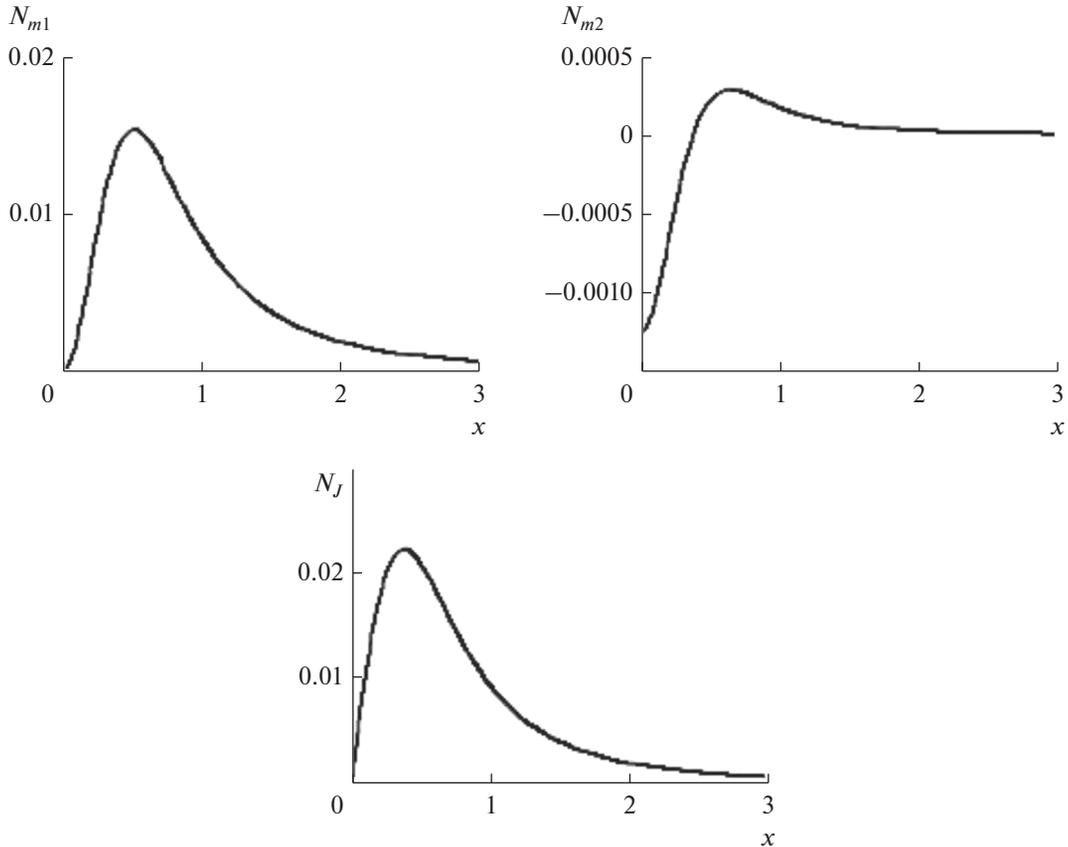


Рис. 11. Невязки для электростатического потока с осью-гиперболой ($C = 0.5$, $f(0) = 0.025$).

$$\begin{aligned}
 N_{m3} &= \bar{\Omega}\Omega^2 T\bar{h} \left[\frac{\bar{k}}{h_1} \left(-\frac{1}{h} \dot{\bar{\Omega}}_l + \bar{k} \bar{\Omega}_s \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{h} \frac{\dot{f}}{f} \left(\frac{1}{h} \dot{\bar{\Omega}}_s + \bar{k} \bar{\Omega}_l \right) \right] s^2, \\
 N_J &= \frac{\bar{\Omega}\Omega^3}{h \cos \alpha} \left[\left(\frac{\bar{k}}{f} \right)' - 3\bar{\Omega}\bar{k}^2 \frac{\dot{f}}{f^2} s \right] s, \\
 N_\rho &= \left(\frac{\bar{\Omega}\Omega}{h\bar{h}} \right)^2 \bar{k} \left[\frac{1}{\bar{\Omega}} \dot{\bar{U}} + \dot{\bar{E}}s + \frac{1}{2} \bar{\Omega} (\bar{\rho} - \bar{N})' s^2 \right] s + \\
 &\quad + \frac{\bar{\Omega}\Omega^2}{h_1} \left\{ \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\dot{\bar{E}}}{h} \right)' + \frac{\bar{k}}{h} \left(\frac{\dot{\bar{U}}}{h} \right)' + \bar{k} (2\bar{N} - \bar{\rho}) \right] s + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\Omega} \left[\frac{1}{2h} \left(\frac{1}{h} (\bar{\rho} - \bar{N})' \right)' - \bar{k}^2 (2\bar{N} - \bar{\rho}) \right] s^2 \right\}, \\
 N_{H1} &= \frac{\bar{\Omega}^2\Omega}{h} \left[-\frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \dot{\bar{\Omega}}_l \right)' + (\bar{k} \bar{\Omega}_s)' + 2\bar{k} (\dot{\bar{\Omega}}_s + k \bar{\Omega}_l) \right] s, \\
 N_{H2} &= \frac{\bar{\Omega}^2\Omega}{h} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \dot{\bar{\Omega}}_s \right)' + (\bar{k} \bar{\Omega}_l)' + 2\bar{k} (\dot{\bar{\Omega}}_l - k \bar{\Omega}_s) \right] s; \\
 \bar{\Omega} &= \frac{\Omega^3}{J \cos \alpha}, \quad s = \bar{f} f_0.
 \end{aligned} \tag{104}$$

Как и при эмиссии в ρ -режиме с полуплоскости, сингулярная стартовая поверхность магнетрона приводит к бесконечной невязке N_ρ при $x_m = 0$. Две последние строки в табл. 12 дают представление о затухании этого эффекта при $\tau = 1$ ($x_m = 0.0343$) и $\tau = 2$ ($x_m = 0.1175$). Невязки N_{m3} , N_{H1} , N_{H2} практически равны нулю. Главную роль играет функция N_ρ , превышающая невязку по интегралу энергии N_{m1} в 60...330 раз. Значения δ из табл. 12, 13 имеют один порядок (~ 20 и $\sim 30\%$ соответственно). Закон изменения невязок по длине пучка иллюстрирует рис. 13.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тестирование параксиальной модели ленточных пучков проведено на эталонных точных решениях, описывающих электростатические потоки в отсутствие эмитирующих поверхностей (неограниченное в продольном направлении периодическое течение, пучок с гиперболической осью и увеличивающейся компрессией), а также при рассмотрении потока с полуплоскости с тра-

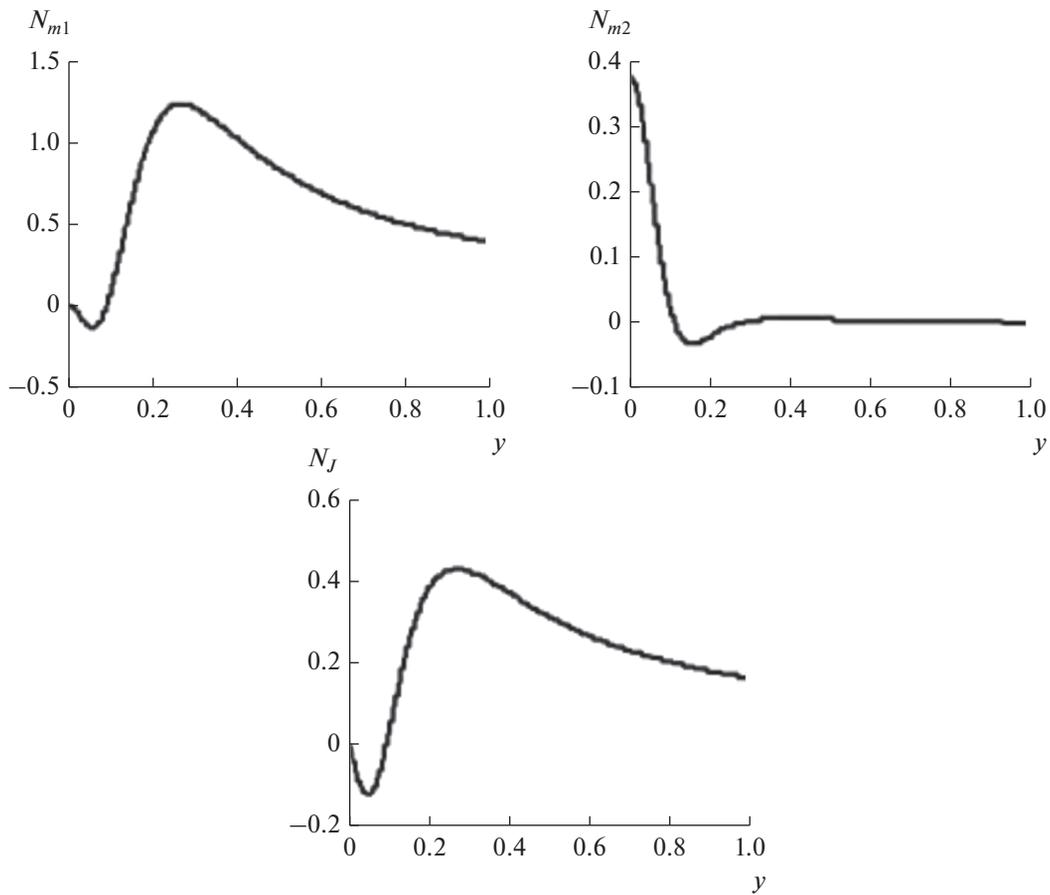


Рис. 12. Невязки для гиперболического потока в магнитном поле ($\bar{\Omega} = 5$, $f(0) = 0.05$).

екториями-окружностями, эмиссией в ρ -режиме и существенно неоднородным токоотбором [9]. В присутствии однородного магнитного поля исследованы потоки с гиперболической осью, финитной эллиптической базовой траекторией, решение для плоского магнетрона в T -режиме в магнитном поле, составляющем острый угол с катодом.

Относительная ошибка параксиальной модели оценивалась по возмущенному значению кривизны оси в точке максимума, из сравнения потенциала на приближенной траектории и толщины пучка. Для достижения ошибки порядка 2% оказалось недостаточным выбрать эту толщину, на порядок меньшей характерного линейного размера $L_* = 1/k$, определяемого кривизной оси, но потребовалось уменьшить ее в 15...50 раз. Параксиальная модель, предполагающая постоянство плотности в поперечном сечении, обнаружила нечувствительность к этому параметру: эталонные решения с постоянной плотностью не

имели преимуществ перед решениями с поперечным градиентом.

Ошибка по кривизне параксиальной траектории оказалась довольно жестким критерием: геометрически приближенная граница пучка могла быть достаточно близка к точной при существенном (пятикратном в случае эллиптической оси) отличии кривизн.

Параксиальная модель для течения [9] и осью $R = 1$ при толщине пучка 0.1 дает ошибку порядка 1.5% при перепаде плотности в 40%. Подобных результатов естественно ожидать для слабо искривленного катода с неоднородным токоотбором в ρ -режиме.

При практических расчетах представление о точности приближенного решения можно получить, вычисляя невязку при подстановке этого решения в точные уравнения пучка и сопоставляя результат с соотношением относительной ошибки и невязки в рассмотренных выше эталонных

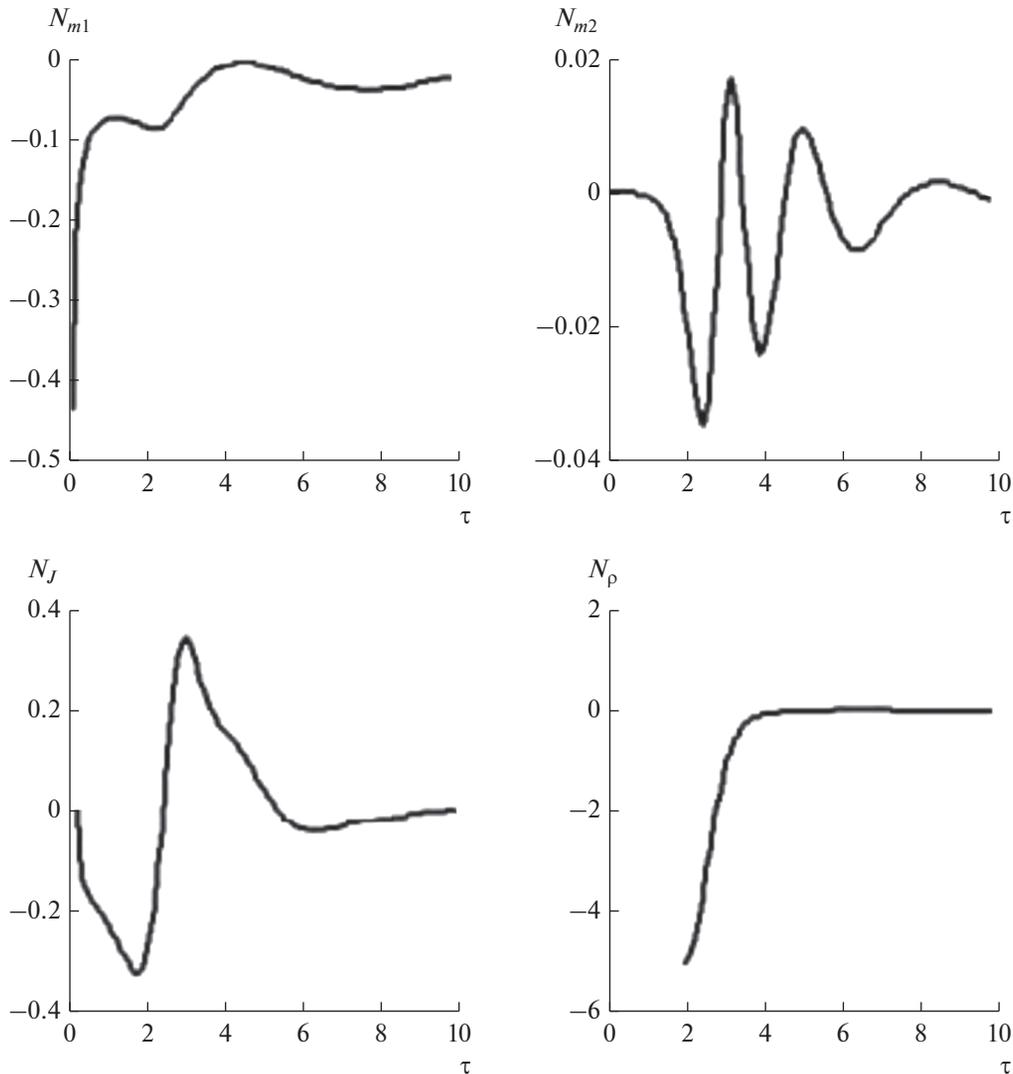


Рис. 13. Характерный закон изменения невязок по длине пучка для плоского магнетрона ($f_0 = 0.1$).

задачах. Так, для решения [9] невязка $N_\rho \sim 1$ соответствует $\delta \sim 1.5\%$, $N_\rho \sim 2$ — ошибке $\delta \sim 5.5\%$.

Рассмотренные примеры показали, что невязка по интегралу энергии N_{m1} , часто используемая в численных моделях, является необходимым, но далеко не достаточным критерием близости приближенного решения к точному. Так, для плоского магнетрона невязка по уравнению Пуассона N_ρ превышала N_{m1} в 60...330 раз, невязка по уравнению сохранения тока N_J — в 4...48 раз.

Наметившаяся в последние годы тенденция проведения электронно-оптических расчетов пучков с высокой компрессией и близким к прямоугольному сечением исключительно при помощи коммерческих программ траекторного анализа порождает

ряд неадекватных результатов, обсуждавшихся в работе [6]. При реализации электронных приборов подобный подход приводит к необходимости экспериментальной доводки, в то время как совместное использование приближенных и численных моделей, основанное на знании теории интенсивных пучков, могло бы способствовать устранению этого недостатка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.

3. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 584.
4. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1106.
5. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1116.
6. Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А. // Электрон. техника. Сер. 1. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.
7. Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др. // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.
8. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
9. Meltzer B. // J. Electr. Contr. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
10. Kirstein P.T. // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
11. Сыровой В.А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 3. С. 365.
12. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62B. № 355. P. 431.
13. Цимринг Ш.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 10. С. 1550.
14. Manuilov V.N., Zaslavsky V.Yu., Ginzburg N.S. et al. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. № 2. P. 023106.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 537.868:621.382

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКОВУЮ ЭЛЕМЕНТНУЮ БАЗУ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ, НЕ ИМЕЮЩИХ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРИЕМНЫХ АНТЕНН

© 2020 г. В. Г. Усыченко^{а, *}, Л. Н. Сорокин^{а, **}, А. С. Усыченко^{б, ***}

^аГосударственный научно-исследовательский институт прикладных проблем,
наб. Обводного канала, 29, Санкт-Петербург, 191167 Российская Федерация

^бСанкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
14 лин. Васильевского острова, 39, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

*E-mail: usychenko@rphf.spbstu.ru

**E-mail: sorokinln@mail.ru

***E-mail: yas0210@mail.ru

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.

После доработки 16.03.2020 г.

Принята к публикации 04.04.2020 г.

Решена задача о рассеянии энергии электромагнитных излучений в полупроводниковых приборах технических средств, у которых поля улавливаются не направленными частотно-избирательными антеннами, а разнонаправленными рецепторами. Рассмотрено воздействие как узкополосных СВЧ-импульсов с различными несущими частотами, так и сверхкоротких электромагнитных импульсов, спектр которых простирается до частот, порядка нескольких гигагерц. Результаты расчетов согласуются с опубликованными экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0033849420110170

ВВЕДЕНИЕ

С течением времени возрастает интерес к воздействию мощных электромагнитных излучений на полупроводниковую элементную базу, используемую в различных технических средствах (ТС). Так, в работах [1, 2] исследовали чувствительность компьютерных сетей и систем, микроконтроллеров, интегральных микросхем и др. к воздействию мощных электромагнитных импульсов различной длительности, узкополосных СВЧ-импульсов (СВЧИ) и сверхкоротких электромагнитных импульсов (СКЭМИ). Измерены пороговые уровни электрических полей, при которых начинаются обратимые отказы, требующие перезагрузки аппаратуры, и необратимые (катастрофические) отказы в работе устройств. Показано, что многие объекты испытаний наиболее чувствительны к воздействию СВЧИ и СКЭМИ.

В работе [3] персональные компьютеры (ПК) различных модификаций облучали СВЧИ одинаковой длительности, но с разными несущими частотами f_0 . Установлено, что пороговые значения напряженности поля СВЧИ, вызывающего отказы в работе ПК, требующие его перезагрузки, растут

пропорционально частоте. Аналогичного вида отказы изучали и в работе [4], облучая ПК СВЧ-импульсами с несущей частотой $f_0 \approx 2.8$ ГГц, длительность τ которых меняли в диапазоне от 1 нс до 70 мкс. Отмечено, что при $\tau > 10$ нс зависимость пороговой мощности отказов от τ удовлетворительно описывается в рамках модели теплового поражения полупроводниковых приборов (ПП). (Модель будет рассмотрена ниже, см. рис. 4.)

В работе [5] изучали стойкость различных типов интегральных микросхем к воздействию СВЧ-импульсов с несущей частотой $f_0 \approx 7.5$ ГГц, длительность которых меняли от 0.1 мкс до 10 мс. Измеряли пороговую плотность потока падающей на микросхему импульсной энергии, при которой происходит катастрофический отказ. Из приведенных данных следует, что при $\tau > 5$ мкс пороговая мощность отказов $P_{\text{пор}}(\tau)$ снижается слабо, а при $\tau < 5$ мкс быстро растет с уменьшением τ . Такое поведение зависимости $P_{\text{пор}}(\tau)$ характерно для теплового разрушения ПП в результате нагрева энергией воздействующих импульсов до температуры плавления. Обобщая результаты работ [4, 5], можно сделать вывод, что обратимые отка-

зы в работе ПК, требующие перезагрузки, как и катастрофические отказы ПП, происходят в результате рассеяния в ПП определенных уровней энергии, поступающей от воздействующих импульсов.

В работах [1, 2, 6] изучали стойкость микроконтроллеров к воздействиям СКЭМИ. Обсуждены вероятные законы распределения пороговых уровней напряженности электрических полей СКЭМИ, превышение которых вызывает обратимые и необратимые отказы в их работе; предложены модели, интерпретирующие результаты измерений.

К настоящему времени уже разработаны [7] аналитические методы оценки стойкости СВЧ радиоприемных устройств к различным видам электромагнитных воздействий. Решение задачи облегчается наличием у таких устройств направленных частотно-избирательных приемных антенн, параметры которых известны. Воспринятая антенной энергия рассеивается в наиболее уязвимом ПП, находящемся на входе приемника. Но у цифровых микроэлектронных ПП технических средств нет специализированных приемных антенн, и чувствительность к электромагнитным полям оценивается экспериментальными методами. Например, в работе [8] изучали воздействие СКЭМИ на систему видеонаблюдения, оснащенную микропроцессорными устройствами и компьютером. При напряженности поля $E \geq 10$ кВ/м произошел сбой всех устройств. По словам авторов, “электромагнитные поля проникают через щели в экранах и наводятся в цепях “жила–экран” кабелей, подсоединенных к входам аппаратуры”. В работе [9] воздействие СКЭМИ на беспилотный летательный аппарат (квадрокоптер) вызвало его падение на землю.

Примеров экспериментальных исследований много, труднее с аналитическими моделями, которые позволяли бы оценивать уровни мощности (энергии), рассеиваемой электромагнитными полями в ПП технических средств, у которых нет специализированных приемных антенн. В данной статье сделана попытка оценить эти уровни, исходя из общефизических представлений.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Согласно международной и отечественной практике [10, 11] при воздействии электромагнитных помех на ТС, содержащие полупроводниковые электронные приборы (диоды, транзисторы, микроконтроллеры, микросхемы и т.д.), обычно различают четыре степени влияния помех на их работоспособность:

“А” – незначительное влияние помех (функционирование в пределах установленных требований);

“В” – обратимые отказы, приводящие к временной потере работоспособности, которая восстанавливается после прекращения воздействия без вмешательства оператора;

“С” – обратимые отказы, приводящие к временной потере работоспособности, которая восстанавливается после прекращения воздействия, но только после перезагрузки аппаратуры, осуществляемой оператором (или специальной программой);

“D” – необратимые (катастрофические) отказы, приводящие к полной потере работоспособности, которая не восстанавливается после прекращения воздействия из-за необратимых повреждений ПП (выход из строя).

События “А” и отказы типа “В” возникают при воздействии слабых помех в результате искажения циркулирующих в аппаратуре ТС сигналов из-за наложения на них наведенного напряжения помехи. В цифровых системах такие отказы приводят к ошибкам, которые описываются в рамках теории вероятностей, см., например, [12]. На появление таких отказов влияют амплитуда, форма и частота следования импульсов помехи, энергия помехи практически не расходуется. Иное дело – отказы типа “С” и типа “D”.

Необратимые отказы типа “D” наступают при разрушении структуры ПП, на что затрачивается энергия воздействующего импульса, которая рассеивается в ПП, нагревая его [7]. Обратимые отказы типа “С” также возникают в результате рассеяния в ПП энергии помехи, но в меньших количествах. О решающей роли энергии в появлении этих отказов говорили выше при обобщении результатов работ [4, 5]. Дополнительным подтверждением сказанному является тот факт, что у некоторых типов микроконтроллеров построенные по экспериментальным данным зависимости функций распределения отказов типа “С” и типа “D” от напряженности поля воздействующих импульсов подобны друг другу [1, 2]. В результате отказов типа “D” и типа “С” изменяется физическое состояние ПП: в первом случае наступает катастрофический отказ, во втором случае меняется лишь форма функционирования ПП (например, “защелкивание” микроконтроллера). В этой статье учитываются только отказы типа “С” и “D”, требующие энергетических затрат.

Эффективная поглощающая площадь любой антенны [13] связана с ее коэффициентом усиления G формулой

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G, \quad (1)$$

где $\lambda = c/f_0$ – длина волны воздействующего колебания, c – скорость света. У микросхемы рецепторами электромагнитного поля, наряду с внутренними дорожками разводки, соединяющими внешние выводы с кристаллом полупроводни-

ка, на котором изготовлена электронная схема [14], являются подключенные к входам–выходам полосковые линии печатных плат [14, 15], шлейфы, шины [6], интерфейсы, то есть проводники разных размеров, по-разному ориентированные, изогнутые, скрученные. Такие рецепторы воспринимают излучение, поступающее практически со всех сторон, поэтому значение коэффициента направленного действия, усредненного по всем возможным углам и ориентациям вектора поляризации, близко к 1. Соответственно, при малых потерях, и коэффициент усиления G рецепторов близок к 1. Сказанное подтверждается также тем (см. [16, табл. 9-1]), что у всех типов простейших антенн $A \approx \lambda^2/4\pi$. Например,

у ненаправленной антенны	$A = \lambda^2/4\pi$,
у малой одновитковой рамки любой формы	$A = 1.5\lambda^2/4\pi$,
у короткого вибратора на идеально проводящей земле	$A = 3\lambda^2/4\pi$,
у полуволнового вибратора	$A = 1.64\lambda^2/4\pi$,
у диполя Герца	$A = 1.5\lambda^2/4\pi$.

Таким образом, в первом приближении можно считать, что у неэранированных рецепторов, подключаемых к полупроводниковым кристаллам микропроцессоров, микроконтроллеров и других элементов, расположенных на печатных платах аппаратуры технических средств, эффективная поглощающая площадь описывается выражением (1), коэффициент усиления G в котором порядка единицы. К такому же мнению приходят и авторы статьи [15].

2. ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭНЕРГИИ СВЧИ

В основу расчетов положим формулу идеальной радиопередачи [16, § 9.11]

$$P_{\text{пл}} = P_{\text{пр}} \frac{\lambda^2 r^2}{A_{\text{пл}} A_{\text{пр}}}, \quad (2)$$

где $P_{\text{пл}}$ – мощность, излучаемая антенной передатчика; $P_{\text{пр}}$ – мощность, подводимая антенной приемника к согласованной нагрузке; $A_{\text{пл}}$ и $A_{\text{пр}}$ – эффективные поглощающие площади (1) антенн передатчика и приемника; r – расстояние между антеннами. Из (2) с учетом (1) следует выражение для энергетического потенциала излучателя в дальней зоне:

$$P_{\text{пл}} G_{\text{пл}} = \left(\frac{4\pi r f_0}{c} \right)^2 \frac{P_{\text{пр}}}{G_{\text{пр}}} = 4\pi r^2 \frac{E_{\text{mr}}^2}{2Z_0}. \quad (3)$$

Здесь $G_{\text{пл}}$ и $G_{\text{пр}}$ – коэффициенты усиления антенн передатчика и приемника на частоте f_0 колебания; $E_{\text{mr}}^2/(2Z_0)$ – модуль вектора Пойнтинга в дальней зоне; E_{mr} – амплитуда напряженности электрического поля волны; $Z_0 = 120\pi$ – волновое сопротивление свободного пространства. В дальнейшем полагаем, что в формуле (3) роль антенны приемника, направленной на антенну передатчика, исполняет рецептор, коэффициент усиления которого $G_{\text{пр}} \approx 1$.

Пусть нагрузкой рецептора является микропроцессор, или какой-либо иной ПП. Известно [7], что при выгорании ПП (отказ типа “D”) в большинстве случаев происходит плавление кристаллической решетки, на что затрачивается энергия воздействующего импульса, намного превышающая энергию, потребляемую прибором в режиме “малого сигнала”. Полагаем, что подобное увеличение потребляемой энергии происходит и при отказах типа “C”. Пусть известно значение рассеиваемой в ПП пороговой мощности $(P_{\text{пр}})_{\text{пор}}$, превышение которой вызывает отказ типа “C” или “D”. Мощность поступает от импульса, цепь рецептор–нагрузка оказывается рассогласованной. В радиоприемных устройствах подобное рассогласование нагрузки с антенным трактом учитывается [7] коэффициентом $K_{\text{ВАХ}}$ влияния вольтамперной характеристики ПП, значение которого не превышает несколько единиц. Полагаем, что в нашем случае порядок величин сохраняется. Подставив $(P_{\text{пр}})_{\text{пор}}$ в (3), зная расстояние r и частоту излучаемого колебания, полагая $G_{\text{пр}} \approx 1$, можно оценить пороговые значения энергетического потенциала $(P_{\text{пл}} G_{\text{пл}})_{\text{пор}}$ и напряженности электрического поля $(E_{\text{mr}})_{\text{пор}}$ в зоне нахождения рецептора, превышение которых вызовет отказ в работе ПП.

В формуле (3) выразим квадрат напряженности поля через мощность $P_{\text{пр}}$, рассеиваемую в нагрузке рецептора:

$$E_{\text{mr}}^2 = \frac{64\pi^2}{G_{\text{пр}} \lambda^2} 15 P_{\text{пр}} = \frac{960\pi^2 f_0^2}{G_{\text{пр}} c^2} P_{\text{пр}}. \quad (4)$$

При $G_{\text{пр}} = 1$ это выражение совпадает с возведенным в квадрат полем формулы (2) статьи [3], которую авторы получили, полагая, что приемная антенна “на 100% эффективна и идеально согласована”.

Из (3) видно, что для рассеяния в ПП одной и той же мощности $P_{\text{пр}}$ энергетический потенциал излучателя, перестраиваемого по частоте, должен меняться по закону $P_{\text{пл}} G_{\text{пл}} \propto f_0^2$. Соответственно по такому же закону меняется и квадрат напряженности поля (4).

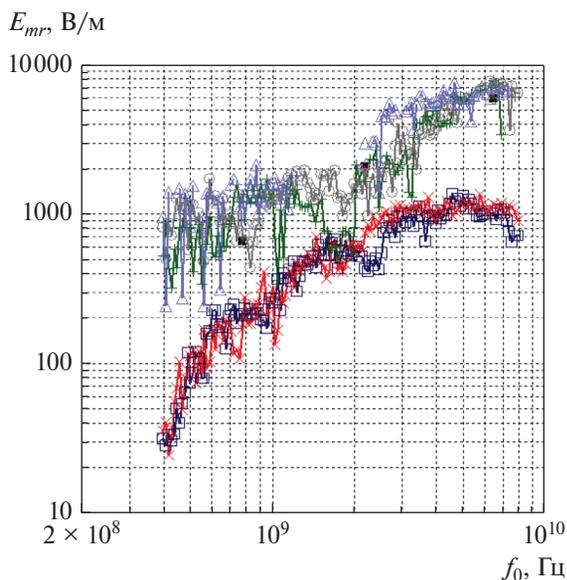


Рис. 1. Пороговая восприимчивость ПК к узкополосным СВЧ-импульсам различной несущей частоты [3]: \square – Brand C 486 66 MHz; \times – Brand D 486 100 MHz; $+$ – Brand E PIII 667 MHz; \circ – Brand C PIV 1.4 GHz; \triangle – Brand I PIV 1.4 GHz.

Если рецептор экранирован, например, корпусом самого технического средства, или если ПП рассогласован с рецептором, то условие идеальной радиопередачи не выполняется, и вместо (3) получаем формулу

$$P_{\text{пд}} G_{\text{пд}} = 4\pi r^2 \frac{E_{mr}^2}{2Z_0} = \left(\frac{4\pi r f_0}{c} \right)^2 \beta^2(f_0) \frac{P_{\text{пр}}}{G_{\text{пр}}}, \quad (5)$$

где $\beta(f_0)$ – коэффициент, учитывающий все виды ослабления электрического поля волны при ее распространении от внешних границ ТС до кристалла ПП.

Для проверки полученных соотношений обратимся к экспериментальным результатам работы [3]. В этой работе ПК помещали в реверберационную камеру, в которой посредством перемешивания мод создавали в среднем однородное изотропное поле с равновероятным распределением углов распространения и поляризации. Облучали ПК последовательностью “длинных” СВЧИ (у всех импульсов длительность $\tau = 30$ мкс), но с разной несущей частотой f_0 , которая дискретно (сто значений на декаду) перестраивалась в диапазоне 0.4...8 ГГц. На рис. 1, взятом из этой статьи, представлены в зависимости от несущей частоты пиковых значений напряженности E_{mr} электрического поля СВЧ-импульсов, превышение которых вызывало отказы типа “С”.

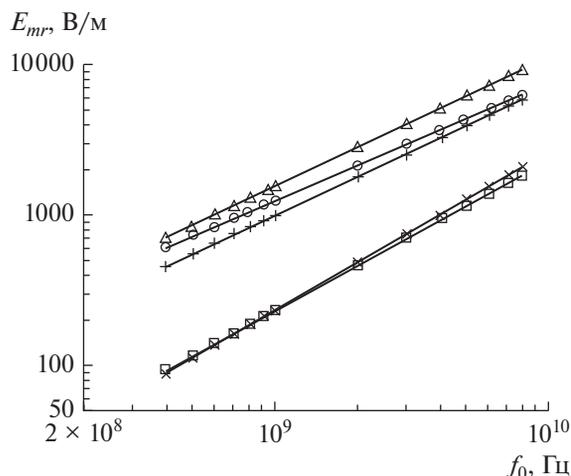


Рис. 2. Пороги сбоев пяти типов ПК [3] (только линии трендов): \square – Brand C 486 66 MHz; \times – Brand D 486 100 MHz; $+$ – Brand E PIII 667 MHz; \circ – Brand C PIV 1.4 GHz; \triangle – Brand I PIV 1.4 GHz.

Результаты измерений, приведенные на рис. 1, были усреднены [3] методом наименьших квадратов относительно линейных трендов. Линии трендов для пяти обследованных типов ПК, построенные на базе микропроцессоров с различной тактовой частотой, представлены на рис. 2. Нижняя линия тренда характерна для маломощных ПК, микропроцессоры которых оказались наиболее восприимчивыми к электромагнитным воздействиям. Верхние линии относятся к более производительным ПК, микропроцессоры которых потребовали их усиленного экранирования. По сути, линия тренда характеризует усредненную по частотам восприимчивость рецептора к сверхширокополосным электромагнитным излучениям.

Видно, что все линии трендов меняются с частотой по закону пропорциональности $E_{mr} \propto f_0$, что согласуется с формулой (4). Разница лишь в том, что в (4) под E_{mr} понимается амплитудное значение напряженности поля в области нахождения рецептора, а в работе [3] измеряли усредненную за время экспозиции пиковую напряженность поля E_m в камере с ПК, микропроцессор которого был экранирован корпусом ПК.

Аппроксимируем линии трендов зависимостью

$$E_{mr} \cong \frac{\bar{\beta} E_{mr1}}{f_{mr1}} f_0, \quad (6)$$

где E_{mr1} и f_{mr1} – связанные между собой значения напряженности поля и частоты, принадлежащие одной линии тренда; $\bar{\beta} \geq 1$ – усредненный по диапазону частот коэффициент ослабления поля, ха-

рактически одинаков у всех линий; коэффициент $\bar{\beta}$ определяет высоту этих линий по оси ординат. На линиях тренда значения коэффициентов $\bar{G}_{\text{пр}} \approx 1$ и $\bar{\beta} \geq 1$ являются постоянными, а относительно линий тренда значения E_{mr} , как видно из рис. 1, меняются с частотой. Отклонения ΔE_{mr} могут быть вызваны тем, что или коэффициент усиления $G_{\text{пр}}$ приемника, или коэффициент экранировки β , или обе эти величины зависят от частоты СВЧ колебания. В экспериментах работы [3] эти отклонения не выходят за пределы $\Delta E_{mr} = \pm 5$ дБ.

Запишем правые части формулы (5) в виде

$$P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2 = \frac{G_{\text{пр}} c^2}{960 \pi^2 f_0^2} E_{mr}^2. \quad (8)$$

Полагаем, что при рассеянии в микропроцессоре мощности, превышающей значение $P_{\text{пр}}$, у ПК происходят отказы типа “С”. Тогда $P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2$ – это мощность, которую должно затратить поле E_{mr} воздействующего СВЧИ, чтобы вызвать отказы у микропроцессора, экранированного от этого поля. Положив $G_{\text{пр}} = 1$, с учетом формул (6) и (7) получим мощность $P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2 \approx 0.4$ Вт, превышение которой должно вызвать отказы типа “С” у ПК, относящихся к нижней линии тренда. На верхней линии тренда, как видно из рис. 2, значение $\bar{\beta}$ в 9 раз больше, чем на нижней линии. Микропроцессоры более мощных ПК лучше экранированы, поэтому от поля потребуется мощность, превышающая $P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2 \approx 31$ Вт.

В работе [4] исследовали отказы типа “С” у компьютера РС386DX-40, лицевую панель которого облучали СВЧ-импульсами с несущей частотой $f_0 = 2.8$ ГГц; длительность τ импульсов варьировали в широких пределах. Из данных работы [4] следует, что при $\tau > 3$ мкс отказы начинают возникать при амплитуде напряженности поля $E_{mr} \approx 710$ В/м. Подстановка этих значений в (8) приводит к мощности $P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2 \approx 0.61$ Вт. Это близко к результату, полученному выше для ПК нижней линии тренда.

У нас нет экспериментальных данных о значениях рассеиваемой в микропроцессорах ПК мощности $P_{\text{пр}}$, превышение которой вызывает отказы типа “С” при воздействии “длинных” СВЧИ. Нет также данных о степени экранировки микропроцессоров. Поэтому комментировать полученные

результаты сложно. Вместе с тем известно [7], что у маломощных кремниевых и арсенидо-галлиевых транзисторов, используемых в радиоприемных устройствах СВЧ, отказы типа “D” при воздействии “длинных” СВЧИ происходят при рассеянии в них мощности близкой к 1 Вт. Микропроцессоры изготавливаются с использованием СВЧ-технологий, поэтому следует ожидать, что у них отказы типа “С” будут происходить при рассеянии меньшей мощности. Значение $P_{\text{пр}} \bar{\beta}^2 \approx 0.4$, полученное для ПК нижней линии тренда, удовлетворяет этому условию при $\bar{\beta} = 1$, и, тем более, при $\bar{\beta} > 1$.

3. ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭНЕРГИИ СКЭМИ

Рассмотрим излучатель СКЭМИ, сверхширокополосная антенна которого возбуждается униполярным сверхкоротким электрическим импульсом (СКЭИ). Длительность переднего фронта СКЭИ может достигать значений порядка (<http://www.fidetechnology.com/products.html>) десятковсотен пикосекунд, длительность заднего фронта, как правило, значительно больше. Антенна характеризуется коэффициентом перекрытия по диапазону (band ratio) $br = f_b / f_n$, где f_b и f_n – верхняя и нижняя частоты полосы пропускания. У часто используемых в излучателях ТЕМ-рупоров коэффициент перекрытия может достигать значений $br = 6 \dots 12$ и более.

Пусть $U(t)$ – напряжение произвольного по форме СКЭИ, измеренное на сопротивлении нагрузки, которое равно волновому сопротивлению W_0 тракта и выходному сопротивлению генератора СКЭИ. Найдем временные зависимости тока $I(t) = U(t) / W_0$ и мощности

$$P(t) = U(t) I(t),$$

рассеиваемой в нагрузке. Определим энергию импульса

$$\Theta_U = \int_t P(t) dt = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{+\infty} U^2(t) dt. \quad (9)$$

Рассчитаем фурье-спектр импульса

$$\dot{S}_U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

и найдем квадрат модуля этого спектра:

$$S_W(\omega) = \dot{S}_U(\omega) \dot{S}_U^*(\omega) = |\dot{S}_U(\omega)|^2 = S_U^2(\omega), \text{ В}^2 / \text{Гц}^2.$$

Здесь $\dot{S}_U^*(\omega)$ – спектральная функция, комплексно сопряженная функции $\dot{S}_U(\omega)$. Задание модуля

$S_U(\omega)$, т.е. амплитудно-частотного спектра, однозначно определяет энергию сигнала, что следует из равенства Парсеваля, но ничего не говорит о форме сигнала. Поэтому все дальнейшие соотношения справедливы лишь в энергетическом смысле.

Согласно равенству Парсеваля [17, раздел 2.8], энергия (9) выражается через энергетический спектр импульса:

$$\Theta_U = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{+\infty} U^2(t) dt = \frac{2}{W_0} \int_0^{+\infty} S_U^2(f) df.$$

Здесь вместо “круговой” частоты ω использована физическая частота f . Величина $2S_U^2(f)/W_0$ имеет размерность Вт/Гц² = Дж/Гц и является спектральной плотностью энергии сигнала. Спектр $S_U^2(f)$ короткого униполярного импульса качественно изображен в верхней части рис. 3.

Предположим, что генератор СКЭИ согласован с волновым сопротивлением тракта на всех частотах спектра $S_U^2(f)$, а вместо нагрузки используется передающая антенна, являющаяся частотно-избирательным фильтром. Пусть $G_{\text{пд}}(f) = K(f)G(f_m)$ – амплитудно-частотная характеристика коэффициента усиления антенны в дальней зоне на оси излучения. Здесь $K(f) = P_{\text{вых}}(f)/P_{\text{вх}}(f)$ – амплитудно-частотная характеристика антенны как фильтра, измеренная или рассчитанная в диапазоне частот, $P_{\text{вх}}(f)$ и $P_{\text{вых}}(f)$ – мощности гармонических сигналов на входе и выходе антенны; $G(f_m)$ – коэффициент усиления антенны на частоте максимального значения $K(f)$. Тогда энергия излучателя СКЭМИ, поступающая в дальнюю зону, удовлетворяет пропорциональности

$$\Theta_{\text{пд}} \propto \frac{2}{W_0} \int_0^{\infty} S_U^2(f) G_{\text{пд}}(f) df. \quad (10)$$

Антенна “вырезает” из спектра $S_U^2(f)$ (см. рис. 3) составляющие, которые попадают в полосу ее пропускания, и излучает их в свободное пространство. Энергетический спектр СКЭМИ

$$\frac{2}{W_0} S_U^2(f) G_{\text{пд}}(f),$$

изображен в нижней части рис. 3 с точностью до постоянного множителя $2/W_0$.

Энергетический потенциал (5) излучателя, передающего в нагрузку рецептора мощность $P_{\text{пр}}$, получен для достаточно длинных (узкополосных) СВЧИ, характеризуемых мощностью колебания и несущей частотой f_0 . Предположим теперь, что излучается СВЧИ, амплитуда которого меняется в течение его длительности таким образом, что

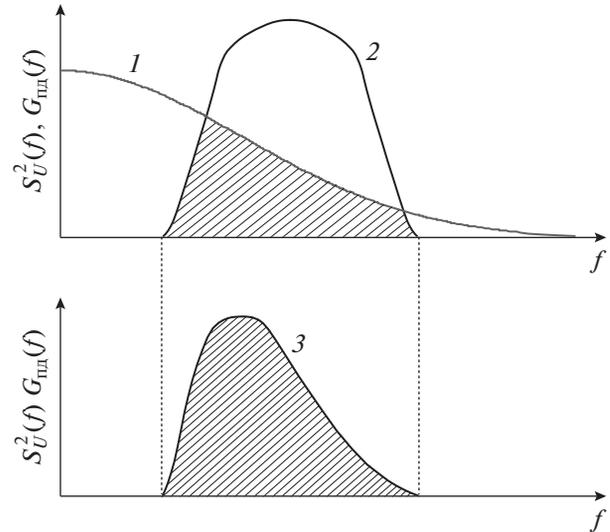


Рис. 3. Спектр $S_U^2(f)$ униполярного СКЭИ (кривая 1) и коэффициент усиления $G_{\text{пд}}(f)$ передающей антенны (кривая 2) –вверху; спектр излучаемого СКЭМИ (кривая 3) – внизу.

спектр импульса можно считать по-прежнему узкополосным. В этом случае формула (5) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}}(t) &= \left(\frac{c}{4\pi r f \beta} \right)^2 P_{\text{пд}}(t) G_{\text{пд}} G_{\text{пр}} = \\ &= \frac{c^2 G_{\text{пр}}}{4\pi Z_0 \beta^2 f^2} E_r^2(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $P_{\text{пр}}(t)$ – временная форма мощности импульса на нагрузке, согласованной с рецептором; $G_{\text{пр}} \approx 1, f \approx f_0$; $E_r(t)$ – временная зависимость напряженности электрического поля импульса в области нахождения технического средства. Поскольку спектр импульса узок, то параметры $G_{\text{пд}}$ и β имеют практически такие же значения, как на несущей частоте.

Устремим длительность импульса к настолько малому значению, что понятие несущей частоты начинает утрачивать свой смысл, а сам импульс трансформируется в СКЭМИ со сверхширокополосным спектром. Воздействие столь короткого импульса удобнее характеризовать не мощностью, а энергией, для чего преобразуем выражение (11) с помощью равенства Парсеваля. С учетом (10) получим

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{пр}} &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{пр}}(t) dt = \left(\frac{c}{4\pi r \beta} \right)^2 \frac{2G_{\text{пр}}}{W_0} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2} S_U^2(f) G_{\text{пд}}(f) df = \frac{c^2 G_{\text{пр}}}{2\pi Z_0 \beta^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2} S_E^2(f) df. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $G_{\text{пр}} \approx 1$ и $\bar{\beta}$ – усредненные по всему спектральному диапазону частот коэффициент усиления рецептора и коэффициент ослабления поля волны, которые обладают такими же свойствами, как и в формуле (6). Эти коэффициенты определяют ординаты линий трендов, изображенных на рис. 2. Но в реальности коэффициенты $G_{\text{пр}}$ и $\bar{\beta}$ при изменении частоты могут отклоняться от своих средних значений в большую или меньшую сторону, как и на рис. 1. Множитель $1/f^2$ учитывает весовой вклад различных спектральных составляющих в полную энергию, передаваемую рецептором в нагрузку. Левая часть формулы (12)

$$\Theta_{\text{пр}} = \left(\frac{c}{4\pi r \bar{\beta}} \right)^2 \frac{2G_{\text{пр}}}{W_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2} S_U^2(f) G_{\text{пл}}(f) df, \quad (13)$$

определяет воспринятую рецептором энергию СКЭМИ, выраженную через энергетический спектр СКЭИ, возбуждающего антенну излучателя, коэффициент усиления $G_{\text{пл}}(f)$ которой является функцией частоты. Правая же часть формулы (12) определяет воспринятую рецептором энергию, выраженную через энергетический спектр напряженности поля СКЭМИ:

$$\Theta_{\text{пр}} = \frac{c^2 G_{\text{пр}}}{2\pi Z_0 \bar{\beta}^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2} S_E^2(f) df. \quad (14)$$

Здесь $S_E^2(f)$ – квадрат модуля спектра $\dot{S}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(-j\omega t) dt$ напряженности электрического поля СКЭМИ в области нахождения технического средства. Из формул (13) и (14) видно, что чем ниже частота спектральных составляющих СКЭИ и СКЭМИ, тем больше их весовой вклад в энергию, потребляемую нагрузкой рецептора.

Для инженерных оценок желательны более простые формулы. С этой целью упростим интегралы, стоящие в правых частях (13), (14), введя нижнюю f_n и верхнюю f_b граничные частоты, между которыми находится подавляющая часть энергии СКЭМИ и где энергетические спектры $S_U^2(f)G_{\text{пл}}(f)$ и $S_E^2(f)$ не снижаются, положим, ниже 10% от максимума. На примере формулы (14) получим приближенный интеграл

$$\int_{f_n}^{f_b} \frac{1}{f^2} S_E^2(f) df.$$

Каждая из подынтегральных функций $1/f^2$ и $S_E^2(f)$ интегрируема в промежутке $\Delta f = f_b - f_n$ и во всем промежутке не меняет знак. В этом случае

действует обобщенная теорема о среднем, используя которую получаем:

$$\int_{f_n}^{f_b} \frac{1}{f^2} S_E^2(f) df = \frac{f_b - f_n}{f_b f_n} \langle S_E^2(f) \rangle, \quad (15)$$

где $\langle S_E^2(f) \rangle$ – усредненное на интервале Δf значение функции $S_E^2(f)$. Если $f_b \gg f_n$, то можно использовать приближенную формулу

$$\int_{f_n}^{f_b} \frac{1}{f^2} S_E^2(f) df \approx \frac{1}{f_n} \langle S_E^2(f) \rangle.$$

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Пороговые значения мощности, рассеиваемой в полупроводниковом приборе одиночным прямоугольным электрическим импульсом, вызывающим выгорание ПП (необратимый отказ типа “D”), зависят от длительности τ импульса и в рамках тепловой модели описываются формулой Ванша–Белла–Таска [18, 7]

$$P_{\text{выг}} = A/\tau + B/\sqrt{\tau} + C,$$

где постоянные A, B, C зависят от вида и типа ПП. У многих транзисторов и диодов СВЧ-диапазона [7], а также у различных типов цифровых микросхем [5], постоянная B близка к нулю, и в пределе $B = 0$ нормированная зависимость $P_{\text{выг}}(\tau)$ принимает вид, изображенный на рис. 4.

При относительном значении длительности импульса $\tau/\tau_{\text{выг}} \gg 1$ пороговая мощность выгорания постоянна (в среднестатистическом смысле) и равна мощности $P_{\text{выг}}(\infty)$ квазистатического нагрева. При $\tau/\tau_{\text{выг}} \ll 1$ происходит адиабатический нагрев активной области ПП, когда тепло не успевает покинуть эту область за время длительности импульса, и энергия выгорания $\Theta_{\text{выг}} = \tau P_{\text{выг}}(\tau)$ не зависит от τ . На рис. 4 эти асимптотические зависимости проведены пунктирными линиями, которые пересекаются при значении абсциссы $\tau/\tau_{\text{выг}} = 1$, где $\tau_{\text{выг}}$ – постоянная времени выгорания, характерная для приборов данного типа. Из сказанного следует, что сравнение теоретических оценок с экспериментом будет корректным, если длительности СКЭМИ и СВЧИ удовлетворяют условию $\tau < \tau_{\text{выг}}$. У различных типов цифровых микросхем, обследованных в [5], значение $\tau_{\text{выг}}$ меняется от нескольких микросекунд до 10 мкс, как и у ряда СВЧ-приборов, используемых в приемных устройствах сантиметрового диапазона [7]. Если энергия, рассеянная импульсом и накопившаяся в микросхеме (или в любом другом ПП), превысит пороговое значение

$\Theta_{\text{выг}} = \tau P_{\text{выг}}(\tau)$, то произойдет выгорание – необратимый отказ типа “D”. При энергии в несколько раз меньше могут наблюдаться отказы типа “C”.

Умножив формулу (8) на длительность СВЧИ, удовлетворяющую условию $\tau < \tau_{\text{выг}}$, получим энергию, поступающую в нагрузку рецептора:

$$\Theta_{\text{пр}} = P_{\text{пр}} \tau = \frac{E_{\text{mr}}^2 G_{\text{пр}} c^2 \tau}{960 \pi^2 f_0^2 \beta^2}. \quad (16)$$

Считаем, что именно количество накопившейся в ПП энергии определяет вид его отказа – “C” или “D”. При этом не важно, какой импульс передал свою энергию – СВЧИ, видеоимпульс или СКЭМИ. От вида воздействия зависят лишь пути проникновения различных спектральных составляющих внутрь ПП, в то время как основную роль играет количество энергии, накопившейся в тех активных частях ПП, которые ответственны за отказы того или иного типа. Именно такие количества накопленной энергии, поступающей от СКЭМИ и СВЧИ длительностью $\tau < \tau_{\text{выг}}$, и отображают формулы (13), (14), (16).

Для проверки адекватности рассмотренных моделей идеальным был бы эксперимент, в котором одинаковые технические средства облучали бы короткими $\tau < \tau_{\text{выг}}$ СВЧ-импульсами и СКЭМИ с последующим сопоставлением полученных результатов. Но в литературе такие эксперименты не описаны, поэтому воспользуемся косвенными методами доказательства.

В работе [5] при воздействии СВЧИ с несущей частотой $f_0 = 7.5$ ГГц измеряли пороговые уровни полей, характеризующие стойкость широкой номенклатуры интегральных микросхем, в том числе транзисторно-транзисторной логики. Обследовали как отдельные микросхемы, так и находящиеся в составе печатных плат. (В таких экспериментах коэффициент экранировки $\bar{\beta}$ равен коэффициенту рассогласования рецептора с нагрузкой, значение которого порядка нескольких единиц.) При длительности СВЧИ $\tau = 1$ мкс, удовлетворяющей условию $\tau < \tau_{\text{выг}}$, катастрофические отказы у различных типов микросхем происходили при напряженностях поля, укладываемых в диапазон $8.7 \leq E_{\text{mr}} \leq 47.5$ кВ/м. Выберем из этого ряда значение $E_{\text{mr}} = 10$ кВ/м, подставим его в (16) и найдем мощность $P_{\text{пр}} \approx 17$ Вт, рассеиваемую в микросхеме при воздействии такого СВЧИ.

В литературе не обнаружены пороговые зависимости мощности выгорания $P_{\text{выг}}(\tau)$, измеренные у тех или иных типов микросхем, в том числе микроконтроллеров. Вместе с тем, известно [7], что у некоторых видов маломощных кремниевых и

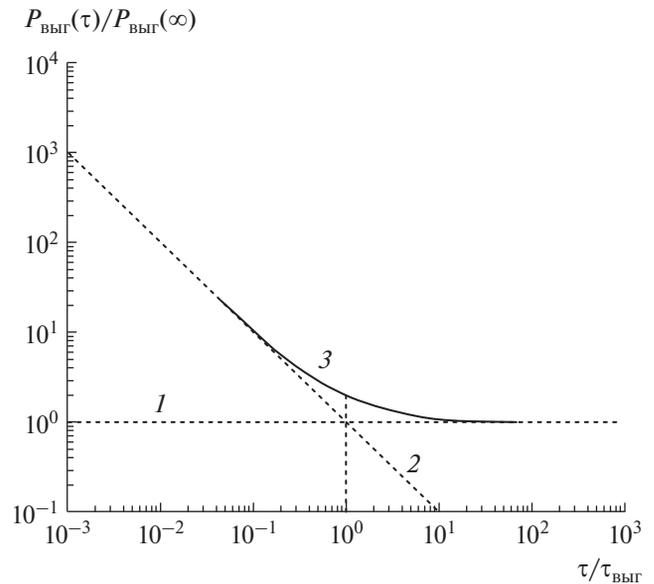


Рис. 4. Типичная нормированная зависимость пороговой мощности выгорания ПП $P_{\text{выг}}(\tau)$ от длительности $\tau/\tau_{\text{выг}}$ одиночного импульса: линия 1 – квазистатистический нагрев $P_{\text{выг}}(\infty) \propto \text{const}(\tau)$; линия 2 – адиабатический нагрев $P_{\text{выг}}(\tau) \propto 1/\tau$; кривая 3 – зависимость $P_{\text{выг}}(\tau)/P_{\text{выг}}(\infty)$.

арсенидо-галлиевых биполярных и полевых транзисторов, используемых в приемниках СВЧ-диапазона, время тепловой релаксации $\tau_{\text{выг}}$ может быть в несколько раз больше 1 мкс, т.е. примерно такое же, как у микросхем (судя по рис. 3 работы [5]). Например, у кремниевых СВЧ-транзисторов 2Т3132 и 2Т3120 измеренная при $\tau = 1$ мкс мощность выгорания $P_{\text{выг}}$ равна, соответственно, 3.5 и 10 Вт, что в 4.8 и 1.7 раза меньше расчетного значения $P_{\text{пр}} \approx 17$ Вт у микросхемы. Такое расхождение вполне возможно, например, из-за различия значений $\tau_{\text{выг}}$ и/или $\bar{\beta}$.

Из-за отсутствия данных об энергии выгорания микроконтроллеров предположим, что у приборов этого типа значение $\tau_{\text{выг}}$ такое же, как у микросхем работы [5], и мощность выгорания при $\tau = 1$ мкс равна 17 Вт. Определим теперь параметры СКЭМИ, воздействие которого может вызвать его катастрофический отказ. Подставив энергию $\Theta_{\text{пр}} = P_{\text{пр}} \tau \approx 1.7 \times 10^{-5}$ Дж в формулу (14), найдем с учетом (15)

$$\begin{aligned} \langle S_E^2(f) \rangle &= \frac{f_{\text{в}} f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}} \frac{2\pi Z_0 \Theta_{\text{пр}}}{c^2 G_{\text{пр}}} \approx \\ &\approx 4.5 \times 10^{-19} \bar{\beta}^2 \frac{f_{\text{в}} f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}}. \end{aligned}$$

Согласно стандарту международной электротехнической комиссии [19] энергетический спектр СКЭМИ может занимать диапазон частот от $f_n = 200$ МГц до $f_b = 5$ ГГц. Примерно такой же стандарт действует и в России [20]. Подставив приведенные значения в формулу, найдем среднее по диапазону значение квадрата спектральной плотности электрического поля СКЭМИ в зоне нахождения технического средства:

$$\langle S_E^2(f) \rangle \approx 0.9 \times 10^{-10} \bar{\beta}^2 (B^2/m^2) / \Gamma_{\text{ц}}^2. \quad (17)$$

На практике об интенсивности СКЭМИ чаще судят по пиковой напряженности его поля E_{pr} в области нахождения объекта воздействия. Оценим значение E_{pr} , которое обеспечивает спектральную плотность (17). Для этого заменим СКЭМИ эквивалентным ему по энергии прямоугольным импульсом, амплитуда которого $E_{mr} = E_{pr}$ равна пиковой напряженности поля СКЭМИ, а эквивалентная длительность описывается выражением

$$\tau_e = \frac{1}{E_{mr}^2} \int_0^{\infty} E_r^2(t) dt.$$

Спектр прямоугольного импульса в области положительных частот известен:

$$S_{\perp}(f) = 2E_{mr}\tau_e \left[\frac{\sin(\pi f \tau_e)}{\pi f \tau_e} \right].$$

На частоте $f_b = 1/\tau_e$ функция $S_{\perp}(f)$ обращается в ноль, причем в диапазоне частот $0 < f \leq 1/\tau_e$ содержится около 90% энергии импульса. Распределив эту энергию равномерно в диапазоне частот $0 < f \leq 1/\tau_e$, получим средний уровень

$$\begin{aligned} \langle S_{\perp}(f) \rangle &= 2E_{mr}\tau_e \left\langle \frac{\sin \pi f \tau_e}{\pi f \tau_e} \right\rangle \approx \\ &\approx 2E_{mr}\tau_e \sqrt{0.9} \approx 2E_{mr}\tau_e. \end{aligned}$$

Из равенства $\langle S_{\perp}(f) \rangle = \sqrt{\langle S_E^2(f) \rangle}$, где $\langle S_E^2(f) \rangle$ определено в (15), полагая $\tau_e = 1/f_b$, найдем $E_{mr} \approx 0.5 f_b \sqrt{\langle S_E^2(f) \rangle}$. Подставив сюда значение $S_E^2(f)$ из (17) и $f_b = 5 \times 10^9$ Гц, получим оценку $E_{mr} \approx 25\bar{\beta}$ кВ/м порогового значения поля СКЭМИ, вызывающего выгорание ПП.

В работе [1] при испытании неэкранированных микросхем транзисторно-транзисторной логики на стойкость к воздействиям СКЭМИ катастрофические отказы наблюдали в диапазоне значений напряженности поля (60...150) кВ/м, среднее значение примерно 100 кВ/м. Полученная нами оценка совпадает с этим значением при $\bar{\beta} = 4$, что можно считать неплохим результатом

при тех грубых допущениях, которые сделаны по причине отсутствия необходимых данных.

Возможны и другие причины несоответствия. Например, на биполярных СВЧ-транзисторах [7] и на ПК [4] экспериментально установлено, что при длительности воздействующих импульсов $\tau < 10^{-8}$ с пороговые значения мощности выгорания $P_{\text{выг}}(\tau)$ возрастают гораздо круче, чем это следует из тепловой модели и рис. 4. Иными словами, на разрушение ПП сверхкороткими импульсами требуется больше энергии, чем при импульсах длительностью $\tau > 10^{-8}$ с.

В целом же можно сказать, что результаты теоретических оценок не вступают в противоречие с имеющимися экспериментальными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена аналитическая модель проникновения энергии электромагнитных полей в полупроводниковую элементную базу технических средств, у которых нет специализированных частотно-избирательных приемных антенн, подобных антеннам сверхвысокочастотных радиоприемных устройств. Получены оценки значений напряженности электромагнитных полей СВЧИ и СКЭМИ, приводящие к сбоям и отказам в работе микроконтроллеров и ПК. Сопоставление теоретических оценок с опубликованными экспериментальными данными показало их качественное и, в доступной на сегодняшний день мере, количественное соответствие. Для повышения точности полученных оценок и определения границ практического применения модели желательны провести целенаправленные эксперименты.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-29-06010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nitsch D., Camp M., Sabath F. et al. // IEEE Trans. 2004. V. EMC-46. № 3. P. 380.
2. Camp M., Gerth H., Garbe H., Haas H. // IEEE Trans. 2004. V. EMC-46. № 3. P. 368.
3. Hoad R., Carter N., Herke D., Watkins S. // IEEE Trans. 2004. V. EMC-46. № 3. P. 390.
4. Юшков Ю.Г., Чумерин П.Ю., Артеменко С.Н. и др. // РЭ. 2001. Т. 46. № 8. С. 1020.
5. Ключник А.В., Пирогов Ю.А., Солодов А.В. // РЭ. 2011. Т. 56. № 3. С. 1.
6. Camp M., Garbe H., Sabath F. // Proc. IEEE Int. Symp. in Electromagnetic Compatibility. Chicago. 8–12 Aug. N.Y.: IEEE, 2005. V. 2. P. 483.

7. *Усыченко В.Г., Сорокин Л.Н.* Стойкость сверхвысокочастотных радиоприемных устройств к электромагнитным воздействиям. М.: Радиотехника, 2017.
8. *Акбашев Б.Б., Алешко А.И., Галич Ю.В. и др.* // Технологии ЭМС. 2012. № 1(24). С. 22.
9. *Sakharov K.Yu., Sukhov A.V., Ugolev V.L., Gurevich Yu.M.* // Proc. 2018 Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe). Amsterdam. 27–30 Aug. N.Y.: IEEE, 2018. P. 40.
10. Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 9 / Eds. by F. Sabath, D.V. Giri, F. Rachidi, A.F. Kaelin. N.Y.: Springer, 2010. P. 325.
11. ГОСТ Р 51317.2.5-2000. Совместимость технических средств электромагнитная. Электромагнитная обстановка. Классификация электромагнитных помех в местах размещения технических средств. М.: Госстандарт России, 2001. <https://meganorm.ru/Data2/1/4294813/4294813400.pdf>
12. *Здухов Л.Н., Парфенов Ю.В., Тарасов О.А., Ченелев В.М.* // Технологии ЭМС. 2018. № 2(65). С. 22.
13. *Фрадин А.З.* Антенны сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1957.
14. *Степовик А.П., Шамаев Е.Ю., Арманов М.М.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 8. С. 812.
15. *Авдеев В.Б., Бердышев А.В., Григорьев И.А., Шеренков В.В.* // Антенны. 2007. Вып. 4(119). С. 23.
16. *Мейнке Х., Гундлах Ф.* Радиотехнический справочник. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1960. Т. 1.
17. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. Радио, 1977.
18. *Dwyer V.M., Franklin A.J., Campbell D.S.* // Solid-State Electronics. 1990. V. 33. № 5. P. 553.
19. IEC 61000-2-13. Electromagnetic compatibility (EMC) – Part 2-13: Environment – High-power electromagnetic (HPEM) environments – Radiated and conducted. https://www.techstreet.com/standards/iec-61000-2-13-ed-1-0-en-2005?product_id=1210737.
20. ГОСТ Р 52863-2007. Защита информации. Автоматизированные системы в защищенном исполнении. Испытания на устойчивость к преднамеренным силовым электромагнитным воздействиям. Общие требования. М.: Стандартинформ, 2008. <https://meganorm.ru/Data/474/47480.pdf>.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ № 1–12 ЗА 2020 ГОД

А

Аверина Л.И. **11**, 1116
Аквилонова А.Б. **7**, 658
Акиншин Н.С. **7**, 705
Аксенов В.О. **3**, 257
Алексеев С.Г. **11**, 1131
Алтухов И.В. **11**, 1128
Анисимкин В.И. **1**, 96
Анциперов В.Е. **8**, 774
Анютин А.П. **2**, 128, **3**, 240, **6**, 531
Артёменко С.Н. **3**, 277
Асафьев Н.О. **11**, 1137

Б

Байбурин В.Б. **7**, 714
Бакулин М.Г. **3**, 257
Банков С.Е. **1**, 31, **2**, 118, **3**, 211, **4**, 342, 363, **6**,
523, **9**, 852, **10**, 951, **11**, 1043
Барабанова Е.А. **7**, 627, 636
Басков К.М. **10**, 939
Батшев В.И. **7**, 667, 674
Бобрешов А.М. **10**, 1030
Бобровский С.Ю. **12**, 1190
Бова Ю.И. **12**, 1160
Бойко С.Н. **6**, 551
Большаков А.П. **11**, 1128
Борзов А.Б. **7**, 684
Боритко С.В. **7**, 667
Бугаев А.С. **10**, 1008
Бузов А.Л. **4**, 380
Бурдюгов В.М. **6**, 601
Бурлаков А.Б. **7**, 717
Быстров Р.П. **7**, 705
Бышевский-Конопко О.А. **9**, 919

В

Варламов Д.О. **9**, 927
Васильев К.К. **5**, 487
Васин А.А. **10**, 967
Вдовин В.А. **2**, 189
Веденеев А.С. **10**, 1008
Векшин Ю.Е. **2**, 165
Венецкий А.С. **9**, 872

Верба В.С. **11**, 1091
Весник М.В. **4**, 363, **11**, 1052, **12**, 1147
Вилков Е.А. **9**, 919
Виноградов А.В. **7**, 717
Вишневский В.М. **7**, 627, 636
Власенко В.Д. **11**, 1074
Волков М.В. **7**, 674
Воронова Н.В. **1**, 96
Вытовтов К.А. **7**, 627, 636

Г

Гайнутдинов Р.Р. **3**, 221
Галка А.Г. **9**, 911
Гамаюнов Ю.Г. **5**, 507
Гаранин С.М. **4**, 330
Герм В.Э. **6**, 559
Герус А.В. **10**, 994
Гильмутдинов А.Х. **12**, 1198
Гладких В.А. **11**, 1074
Гольшшин А.В. **11**, 1137
Горбачев К.В. **2**, 145
Горев С.А. **3**, 257
Гранков А.Г. **10**, 959
Граченко Е.Н. **8**, 804
Гребенчиков А.П. **9**, 927
Гребенчиков Н.П. **9**, 927
Григорьев В.А. **3**, 257
Гуляев И.Б. **2**, 174
Гуляев Ю.В. **2**, 189
Гунбина А.А. **1**, 65

Д

Давидович М.В. **2**, 107
Давыдов В.В. **5**, 513
Давыдов Р.В. **5**, 513
Данилов Д.Е. **10**, 939
Данилов И.Н. **4**, 330
Данилычев М.В. **7**, 658, 674
Данилычева И.В. **7**, 674
Даутов Р.З. **12**, 1198
Дементьев В.Е. **5**, 487
Джеладзе В.Б. **5**, 419
Дмитриев А.С. **9**, 902

Дмитриев С.Г. 7, 725
Донченко А.В. 5, 427
Дудкин В.И. 5, 513
Дупленкова М.Д. 3, 211
Дьяконова О.А. 8, 764
Дятлов Р.Н. 2, 197

Е

Емельянов А.В. 10, 1008
Еремин И.С. 8, 764
Есиков О.В. 7, 705
Ефремов А.М. 5, 442

Ж

Жабин А.С. 10, 1030
Жураковский В.Н. 5, 479

З

Загребельный И.Р. 11, 1091
Зайцев Г.В. 5, 464
Запевалов А.С. 6, 601
Заргано Г.Ф. 5, 427
Заридзе Р.С. 5, 419
Земляков В.В. 5, 427
Зиангирова М.Ю. 11, 1137
Зудилин А.С. 11, 1109
Зуев С.М. 9, 927
Зыбцев С.Г. 10, 1001

И

Иванов А.В. 6, 568
Иванов О.В. 8, 749
Иванов П.А. 8, 820
Игнатков К.А. 6, 612
Ипанов Р.Н. 6, 578, 9, 894
Исаев А.В. 6, 551
Исаенков Ю.И. 2, 145

К

Каган М.С. 11, 1128
Каевицер В.И. 8, 798
Казанцев Ю.Н. 3, 228, 6, 537
Каленов Д.С. 8, 764
Калинин В.И. 3, 285
Калиничев В.И. 6, 523, 542, 9, 852, 10, 951, 11, 1043
Калошин В.А. 2, 158, 3, 250, 5, 457, 6, 537, 542, 9, 872, 10, 979, 11, 1083
Капустин С.А. 11, 1068

Карандин А.В. 7, 667
Керимов Э.А. 3, 303
Кибардина И.Н. 7, 658
Китиашвили И.З. 10, 1019
Клещенков А.Б. 5, 427
Клюев А.В. 1, 90
Клюев Д.С. 4, 380
Ключник А.В. 2, 145
Кобрисев П.А. 6, 606
Козлов А.Б. 7, 667
Кокошкин А.В. 12, 1181
Колесникова В.М. 8, 764
Колодко Д.В. 3, 288
Колчин Г.С. 2, 174
Комаров Д.А. 3, 308
Комаров Д.А. 5, 504
Комоцкий В.А. 2, 203
Комраков Д.В. 6, 568
Копылов Д.А. 4, 380
Корженевский А.В. 6, 606
Коротков В.А. 12, 1181
Костров А.В. 9, 911
Котов В.Д. 3, 285
Котом В.М. 11, 1122
Кошелев В.И. 5, 442
Кошкидько В.Г. 11, 1061
Кравченко В.Ф. 4, 363, 390, 11, 1109
Краснобаев К.И. 3, 288
Краснопольская Л.М. 11, 1137
Крафтмахер Г.А. 3, 228, 6, 537
Кревский М.А. 1, 90
Крейнделин В.Б. 3, 257
Крысанов Д.В. 9, 864
Крюковский А.С. 12, 1160
Кудинов Д.С. 8, 757
Кудояров М.Ф. 8, 820
Кузнецова И.Е. 11, 1137
Кузьмин Г.П. 2, 165
Куликов Г.В. 8, 804
Кутуза Б.Г. 7, 658
Кюркчан А.Г. 7, 644, 9, 864

Л

Лабунец Л.В. 7, 684
Лавлинский С.С. 11, 1116
Лагунов И.М. 3, 245, 7, 653, 8, 769, 12, 1170
Ле Д.Т. 6, 542
Ле Н.Т. 10, 979
Леванов В.А. 10, 1008
Лежнина Ю.А. 10, 1019

Лелюх А.А. **8**, 804
 Леонидов В.В. **2**, 183
 Лернер З.Д. **9**, 881
 Ливашвили А.И. **7**, 695
 Логвиненко А.С. **5**, 479
 Локк Э.Г. **3**, 267
 Ломонов В.А. **7**, 667, 717
 Лузанов В.А. **11**, 1131
 Лузанов В.А. **3**, 292, **12**, 1206
 Лукин Д.С. **12**, 1160
 Лукша О.И. **8**, 813
 Луу Д.Т. **5**, 457
 Любченко В.Е. **3**, 285

М

Макаренкова Е.В. **6**, 559
 Максименко В.Г. **2**, 141, 10, 987
 Максименко Ю.А. **7**, 627, 636
 Малахов В.А. **12**, 1176
 Малеев Р.А. **9**, 927
 Мальцев В.П. **3**, 228, **6**, 537
 Мамонтов Е.В. **2**, 197
 Маненков С.А. **7**, 644, **9**, 852
 Маргарянц Н.Б. **7**, 674
 Маречек С.В. **3**, 285
 Мартусевич А.К. **9**, 911
 Мартьянов П.С. **10**, 1037
 Марьянов В.Б. **6**, 551
 Масальский Н.В. **8**, 827
 Масленников С.П. **3**, 308, **5**, 504
 Мацукатова А.Н. **10**, 1008
 Мачихин А.С. **7**, 667, 674, 717
 Мележик П.Н. **4**, 317
 Меркулов В.И. **11**, 1091
 Мещанов В.П. **7**, 714
 Мижирицкий В.И. **2**, 145
 Мильшин А.А. **10**, 959
 Минаев И.М. **2**, 165
 Миннеханов А.А. **10**, 1008
 Михайлов В.М. **2**, 145
 Мошков А.В. **5**, 434
 Музыченко Н.Ю. **8**, 809
 Мусаева С.Н. **3**, 303
 Мязин Н.С. **5**, 513

Н

Назаров Л.Е. **6**, 587, **11**, 1109
 Нгуен К.Т. **3**, 250, **11**, 1083
 Нестеров Е.В. **2**, 145

Нечаев А.С. **12**, 1176
 Нещерет А.М. **4**, 380
 Низаметдинов А.М. **8**, 749
 Никируй К.Э. **10**, 1008
 Никитин А.А. **12**, 1176
 Никитин М.В. **10**, 1001
 Никитов С.А. **5**, 495, **9**, 919
 Николаев С.Н. **10**, 1008
 Новичихин Е.П. **10**, 959, **12**, 1181
 Нозадзе Т.Р. **5**, 419
 Носков В.Я. **6**, 612

О

Орлов А.П. **10**, 1001
 Осташев В.Е. **3**, 234

П

Павлов Г.Л. **7**, 684
 Панова О.Ю. **7**, 658, **10**, 994
 Папроцкий С.К. **11**, 1128
 Парамонов Ю.Н. **3**, 308
 Пархоменко М.П. **8**, 764
 Патрушева Е.В. **5**, 507
 Перов А.Ю. **7**, 684
 Петоев-Дарсавелидзе И.А. **5**, 419
 Петров Б.М. **2**, 135
 Петрова И.Ю. **10**, 1019
 Плиско В.В. **5**, 442
 Пожар В.Э. **7**, 667
 Пожидаев В.Н. **5**, 434
 Покровский В.Я. **10**, 1001, 1015
 Ползикова Н.И. **11**, 1131
 Политико А.А. **10**, 939
 Пономарев Д.В. **5**, 495
 Пономарёв Л.И. **10**, 967
 Пономаренко В.И. **3**, 245, **7**, 653, **8**, 769, **12**, 1170
 Попов М.Г. **9**, 902
 Потапов А.А. **7**, 705
 Потапов А.С. **8**, 820
 Потемкин А.В. **7**, 674
 Привалова Т.Ю. **4**, 353
 Пришвин М.М. **5**, 419
 Просыпкин С.Е. **10**, 939
 Пустовойт В.И. **4**, 390, **11**, 1109

Р

Радченко Д.Е. **3**, 285
 Раевский А.С. **11**, 1068, **12**, 1176
 Раевский С.Б. **4**, 330, **11**, 1068, **12**, 1176

Ральченко В.Г. **11**, 1128
Рогозин А.А. **10**, 939
Родионов Н.Б. **11**, 1128
Розанов К.Н. **12**, 1190
Розов А.С. **7**, 714
Романова Г.Н. **8**, 757
Рузанов О.М. **5**, 495
Рухадзе А.А. **2**, 165
Рыжов А.И. **9**, 902
Рыльков В.В. **10**, 1008

С

Савельев В.В. **2**, 135
Саворский В.П. **7**, 658, **10**, 994
Савченко А.В. **11**, 1101
Савченко В.В. **11**, 1101
Самсонова Т.П. **8**, 820
Сапецкий С.А. **6**, 606
Сапронова Т.М. **12**, 1209
Сафин А.Р. **9**, 919
Седаков А.Ю. **4**, 330
Семененко В.Н. **10**, 939
Семерня Е.И. **4**, 372
Сердюк Э.С. **11**, 1061
Сиренко Ю.К. **4**, 317
Ситников А.В. **10**, 1008
Скворцов А.А. **9**, 927
Скобелев С.П. **4**, 372
Скрипаль А.В. **5**, 495
Смирнов А.В. **11**, 1137
Смолянинов В.М. **8**, 798
Смолянинов И.В. **8**, 798
Соколов Ю.М. **2**, 203
Сокольский В.М. **10**, 1019
Сокольский М.В. **10**, 1019
Солосин В.С. **3**, 228, **6**, 537
Сорокин Б.П. **11**, 1137
Сорокин И.А. **3**, 288
Сорокин Л.Н. **12**, 1234
Стародубцев В.Г. **2**, 169
Старостенко С.Н. **12**, 1190
Степкин В.А. **10**, 1030
Стрелков Г.М. **1**, 49, **8**, 731
Строганов В.А. **2**, 145
Судаков М.Ю. **2**, 197
Суетин Н.В. **2**, 203
Сурков В.О. **6**, 568
Сучков В.Б. **7**, 684
Сыровой В.А. **3**, 294, **12**, 1209

Т

Табатадзе В.А. **5**, 419
Таранов И.В. **2**, 189
Тарасов М.А. **1**, 65
Темнов А.М. **2**, 174
Терёхин О.В. **10**, 967
Тимофеев И.О. **5**, 495
Тиссен О.В. **7**, 695
Титов С.А. **7**, 717
Тихоневич О.В. **2**, 165
Трофимов П.А. **8**, 813
Туйкин Т.С. **6**, 606
Турко Л.С. **10**, 967
Тхай Ле Н. **2**, 158

У

Ульянов А.В. **3**, 234
Усанов Д.А. **5**, 495
Усков Г.К. **10**, 1030
Усыченко А.С. **12**, 1234
Усыченко В.Г. **12**, 1234
Ушаков П.А. **12**, 1198

Ф

Федоров В.М. **3**, 234
Федосеев Н.А. **8**, 764
Фомин Л.А. **9**, 919
Фролов А.В. **10**, 1001
Фролова Е.В. **3**, 250, **6**, 537, **9**, 852, **10**, 951, **11**, 1043

Х

Хвальковский Н.А. **11**, 1128
Хзмалян А.Д. **5**, 464
Хмельницкий Р.А. **11**, 1128
Хомутов Г.Б. **2**, 189
Хохлов Д.Д. **7**, 674, 717

Ч

Чекушкин А.М. **1**, 65
Черепенин В.А. **2**, 189
Чермошенцев С.Ф. **3**, 221
Черноглазов К.Ю. **10**, 1008
Чернышев С.Л. **7**, 714
Чернышков А.И. **7**, 705
Чигарев С.Г. **9**, 919
Чистяев В.А. **10**, 939
Чуриков Д.В. **10**, 1037

Ш

Шайдуров Г.А. **8**, 757
Шайдуров К.Д. **6**, 612
Шарикова М.О. **7**, 667
Шахунов В.А. **6**, 621
Шевченко В.В. **4**, 388, **7**, 656
Шелобанова Н.К. **10**, 959
Шестеркин В.И. **1**, 3
Ширкаев А.В. **6**, 595
Широков С.В. **7**, 658
Ширяев А.О. **12**, 1190
Шкелев Е.И. **6**, 595

Щ

Щесняк А.С. **3**, 257

Э

Эдельман В.С. **1**, 65
Эминов С.И. **11**, 1079

Ю

Юневич Е.О. **3**, 285
Юрин А.В. **4**, 390
Юсупов Р.А. **1**, 65
Юсупова Л.И. **8**, 749
Юханов Ю.В. **4**, 353

Я

Якимов А.В. **1**, 90
Якушкин Е.П. **3**, 308, **5**, 504
Янин Д.В. **9**, 911
Ярлыков М.С. **1**, 75
Ярлыкова С.М. **1**, 75