

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Том 58, номер 4, 2022

---

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Исследование устойчивости решений непрерывно-дискретных стохастических систем с последствием методом регуляризации  
*Р. И. Кадиев, А. В. Поносов* 435
- Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом  
*А. М. Камачкин, Д. К. Потапов, В. В. Евстафьева* 456
- О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра  
*А. В. Липницкий* 470
- 

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Обобщённые решения стационарных краевых задач для биволновых уравнений  
*Л. А. Алексеева* 477
- Асимптотика фундаментальных решений параболических уравнений с одной пространственной переменной  
*А. Н. Коненков* 489
- Разрушение состояний в динамике, заданной уравнением Шрёдингера со степенной нелинейностью в потенциале  
*В. Ж. Сакбаев, А. Д. Ширяева* 498
- О решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях с сильно (слабо) проницаемыми плёнками в виде отрезка  
*С. Е. Холодовский* 509
- 

## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Об А-орбитальной линеаризации трёхмерных аффинных систем с одним управлением  
*Д. А. Фетисов* 519
- Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем  
*А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова* 534
- 

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Численное решение одного слабо сингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов в разных классах функций  
*Г. А. Расолько, В. М. Волков* 545
- О приближённом решении одного класса систем криволинейных интегральных уравнений  
*Э. Г. Халилов* 554
-

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Применение теории полугрупп к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений

*В. В. Власов, Н. А. Раутиан*

568

---

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929+519.216.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2022 г. Р. И. Кадиев, А. В. Поносов

Изучается новый класс стохастических систем с запаздыванием, содержащий одновременно как компоненты с непрерывным, так и компоненты с дискретным временем. Для анализа различных видов устойчивости таких систем предложен и обоснован модифицированный метод регуляризации, основанный на выборе вспомогательного уравнения и применении теории положительно обратимых матриц. Разработка этого метода для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений осуществлена Н.В. Азбелевым и его учениками. Приводятся достаточные условия моментной устойчивости решений как в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем, так и в терминах коэффициентов. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных систем уравнений.

DOI: 10.31857/S037406412204001X, EDN: BZESBP

*Светлой памяти нашего дорогого учителя  
Николая Викторовича Азбелева (15.04.1922–03.11.2006),  
выдающегося советского и российского математика,  
в связи со 100-летием со дня его рождения  
посвящают авторы эту работу*

**Введение.** Непрерывно-дискретные системы уравнений, образующие важный подкласс так называемых “гибридных систем”, характеризуются наличием двух составляющих в пространстве состояний, а именно, компонент с непрерывным временем и компонент с дискретным временем. Интуитивно это означает, что динамика одной из компонент является чисто непрерывной, тогда как другая подвергается дополнительным воздействиям в определённые моменты времени. Такие системы естественным образом возникают в приложениях, например, в теории управления [1], экологических [2] или биологических [3] моделях.

Поведение многих реальных процессов в природе и технике определяется состоянием не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени. Примерами могут служить динамические системы, управляемые на значительном расстоянии, а также системы с транспортным запаздыванием. Исследования показывают, что решения таких систем без учёта запаздывания, даже при малой его величине, могут существенно отличаться от решений тех же систем с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчёркивает необходимость и принципиальную важность изучения систем с запаздыванием.

Одним из основных условий физической реализуемости процесса является его устойчивость. Поэтому изучение непрерывно-дискретных систем и их приложений естественным образом приводит к необходимости создания соответствующего направления в теории устойчивости. Систематическое изучение качественной теории детерминированных непрерывно-дискретных систем с запаздыванием, в том числе их устойчивости, начато в работах В.М. Марченко и его соавторов [4, 5] и продолжено в статье [6]. В этих работах непрерывно-дискретные системы называются “гибридными”, но, как справедливо указано в [5], в англоязычной литературе последний термин обычно используется в несколько ином контексте. Поэтому в данной статье мы называем подобные системы *непрерывно-дискретными*, что согласуется с более поздними публикациями по этой тематике, посвящёнными как общей теории таких систем, так и их приложениям (см., например, статью [7] и приведённые в ней ссылки).

Наконец, учёт стохастических эффектов – важная часть любого реалистичного подхода к моделированию. Например, в популяционной динамике демографическая и экологическая стохастичность возникают из-за изменения во времени факторов, внешних по отношению к системе, но влияющих на выживание популяции, а в теории управления случайные коэффициенты могут моделировать, например, неточности при измерениях. Поэтому изучение непрерывно-дискретных (гибридных) стохастических систем привлекает в последнее время внимание многих специалистов (см., например, [8] и использованные в ней ссылки).

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами часто проводятся методом функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина [9, 10]. Однако, как отмечается в монографии [11], применение прямого метода Ляпунова и его стохастических аналогов для функционально-дифференциальных уравнений в многих случаях встречает серьёзные трудности. В частности, эффективные признаки устойчивости обычно удаётся доказывать этими методами лишь для сравнительно простых классов уравнений.

В данной статье изучается задача, которая ранее, по-видимому, не исследовалась – задача устойчивости линейных непрерывно-дискретных (гибридных) стохастических уравнений с запаздываниями. Главное отличие систем, рассматриваемых в статье, от стохастических систем, изученных в работе [8], заключается в наличии в нашем случае взаимозависимости компонент системы, что приводит к дополнительным трудностям в использовании функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина. Учитывая сложности, связанные с обоснованием и применением этой теории, алгоритм получения признаков устойчивости основан в настоящей работе на методе регуляризации, также известном как метод модельных (вспомогательных) уравнений или “ $W$ -метод Азбелева” [11, 12]. Этот подход доказал свою эффективность как в теории стохастических дифференциальных уравнений [13], так и при исследовании стохастических разностных уравнений [14–16]. Суть метода заключается в том, что вместо функционала на пространстве траекторий решений рассматривается “модельное” уравнение, которое обладает заданным свойством устойчивости и которое используется для регуляризации исходного уравнения. Проверка устойчивости последнего состоит в оценке нормы некоторого интегрального оператора или проверки положительной обратимости некоторой матрицы. Последняя версия  $W$ -метода разработана в публикациях [17, 18].

**1. Постановка задачи.** В статье систематически используются следующие обозначения:

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$  – стохастический базис, где  $\Omega$  – множество элементарных событий,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра событий на  $\Omega$ ,  $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$  – непрерывный справа поток  $\sigma$ -алгебр на  $\Omega$ ,  $P$  – полная вероятностная мера на  $\mathcal{F}$ ;

$E$  – символ математического ожидания на этом пространстве;

$k^n$  – линейное пространство  $n$ -мерных  $\mathcal{F}_0$ -измеримых случайных величин;

$\mathcal{B}_i$  ( $i = \overline{2, m}$ ) – независимые стандартные скалярные винеровские процессы;

$D^n$  – линейное пространство  $n$ -мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на  $[0, \infty)$ , траектории которых почти наверное (п.н.) непрерывны справа и имеют пределы слева;

$L^n$  – линейное пространство  $n$ -мерных случайных процессов на  $(-\infty, 0)$ , которые не зависят от винеровских процессов  $\mathcal{B}_i$  ( $i = \overline{2, m}$ ) и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории;

$|\cdot|$  – некоторая норма в  $\mathbb{R}^n$ ;

$\|\cdot\|$  – норма  $m \times n$ -матриц, согласованная с нормой в  $\mathbb{R}^n$ ;

$\bar{E}$  – единичная матрица порядка  $m$ ;

$e$  –  $n$ -мерный вектор-столбец, все элементы которого равны единице;

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ;

$\|\cdot\|_X$  – норма в нормированном пространстве  $X$ ;

$\mu$  – мера Лебега на  $[0, \infty)$ ;

$[t]$  – целая часть числа  $t$ ;

$\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$  – некоторая положительная непрерывная функция;

$M_q^\gamma = \{x : x \in D^n, \|x\|_{M_q^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}$ ,  $M_q^1 = M_q$  ( $1 \leq q < \infty$ );

$$k_q^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\} \quad (1 \leq q < \infty);$$

$$L_q^n = \{\varphi : \varphi \in L^n, \|\varphi\|_{L_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vraisup}_{\varsigma < 0} (E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\} \quad (1 \leq q < \infty).$$

В дальнейшем для описания класса непрерывно-дискретных систем будет зафиксировано натуральное число  $l$  ( $1 \leq l < n$ ) такое, что  $x_1(t), \dots, x_l(t)$  ( $t \geq 0$ ) – компоненты вектора состояний системы с непрерывным временем, тогда как  $x_{l+1}(s), \dots, x_n(s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) – его компоненты с дискретным временем. В векторных обозначениях это будет записываться следующим образом:  $\hat{x}(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_l(t))$  ( $t \geq 0$ ),  $\tilde{x}(s) = \text{col}(x_{l+1}(s), \dots, x_n(s))$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) и  $x(t) = \text{col}(\hat{x}(t), \tilde{x}([t])) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \dots, x_n([t]))$  ( $t \geq 0$ ).

В статье для решений системы линейных дифференциальных и разностных уравнений Ито с последствием вида

$$d\hat{x}(t) = - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) - \sum_{j=-\infty}^s A_1(s, j)x(j)h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^s A_i(s, j)x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh)) \quad (s \in \mathbb{N}_+) \quad (1)$$

исследуются вопросы моментной устойчивости по начальным данным

$$x(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \quad (\varsigma < 0), \quad (1a)$$

$$x(0) = b. \quad (1b)$$

Здесь:

$x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \dots, x_n([t]))$  ( $t \geq 0$ ) –  $n$ -мерный неизвестный случайный процесс;

$A_{ij}(t)$  –  $l \times n$ -матрицы ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m_i}$ ), причём элементами матриц  $A_{1j}(t)$ ,  $j = \overline{1, m_1}$ , являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы на интервале  $[0, \infty)$  с п.н. локально суммируемыми траекториями, а элементами матриц  $A_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{2, m}, j = \overline{1, m_i}$ , – прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы на  $[0, \infty)$ , траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

$h_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m_i}$ , – измеримые по Борелю функции, заданные на  $[0, \infty)$  и такие, что  $h_{ij}(t) \leq t$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -почти всюду (п.в.),  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m_i}$ ;

$h$  – положительное действительное число;

$A_i(s, j)$  –  $(n-l) \times n$ -матрицы, элементами которых являются  $\mathcal{F}_s$ -измеримые скалярные случайные величины при  $i = \overline{1, m}, s \in \mathbb{N}_+, j = \overline{-\infty, s}$ ;

$\varphi(\varsigma) = \text{col}(\varphi_1(\varsigma), \dots, \varphi_l(\varsigma), \varphi_{l+1}([\varsigma]), \dots, \varphi_n([\varsigma]))$  ( $\varsigma < 0$ ) –  $\mathcal{F}_0$ -измеримый  $n$ -мерный случайный процесс с п.н. ограниченными в существенном траекториями;

$b = \text{col}(b_1, \dots, b_n)$  –  $\mathcal{F}_0$ -измеримая  $n$ -мерная случайная величина, т.е.  $b \in k^n$ .

**Определение 1.** Под *решением* задачи (1), (1a), (1b) понимается случайный процесс  $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \dots, x_n([t]))$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), являющийся прогрессивно измеримым при  $t \geq 0$  и удовлетворяющий соотношениям

$$x(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \quad (\varsigma < 0), \quad x(0) = \text{col}(\hat{x}(0), \tilde{x}(0)) = b,$$

а также  $P$ -п.в. системе

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) - \sum_{j=1}^{m_1} \int_0^t A_{1j}(\varsigma)x(h_{1j}(\varsigma))d\varsigma + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t A_{ij}(\varsigma)x(h_{ij}(\varsigma))d\mathcal{B}_i(\varsigma) \quad (t \geq 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) - \sum_{j=-\infty}^s A_1(s, j)x(j)h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^s A_i(s, j)x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh)) \quad (s \in \mathbb{N}_+),$$

в которой первый интеграл – это интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Используя метод сжимающих отображений, можно убедиться (см., например, [19]), что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение. В частности, при нулевых начальных условиях эта задача имеет только тривиальное (т.е. нулевое) решение.

Обозначим решение задачи (1), (1a), (1b) через  $x(t, b, \varphi)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Очевидно, на интервале  $[0, +\infty)$  выполнено соотношение  $x(\cdot, b, \varphi) \in D^n$ .

Пусть  $1 \leq q < \infty$ .

**Определение 2.** Систему (1) назовём:

*q-устойчивой* по начальным данным, если для любого  $\epsilon > 0$  найдётся такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что при всех  $b \in k_q^n$  и  $\varphi \in L_q^n$ , для которых  $\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\epsilon)$ , выполняется неравенство  $(E|x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} \leq \epsilon$  для любого  $t \geq 0$ ;

*асимптотически q-устойчивой* относительно начальных данных, если оно *q-устойчиво*, и, кроме того, для всех  $b \in k_q^n$  и  $\varphi \in L_q^n$ , для которых  $\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\epsilon)$ , выполняется соотношение  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (E|x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} = 0$ ;

*экспоненциально q-устойчивой* относительно начальных данных, если существуют положительные числа  $c$  и  $\lambda$  такие, что для решения  $x(t, b, \varphi)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) задачи (1), (1a), (1b) при всех  $b \in k_q^n$  и  $\varphi \in L_q^n$  выполняется неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} \leq c \exp\{-\lambda t\} (\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \quad (t \geq 0).$$

В настоящей статье, в основном, изучается экспоненциальная *q-устойчивость*, однако используемый метод регуляризации применим в гораздо более общем контексте. Так как все виды устойчивости из определения 2 представляют практический интерес, метод исследования будет ниже изложен в максимально общем виде.

**2. Метод регуляризации в задачах устойчивости.** В этом пункте излагается основной метод исследования, применяемый в настоящей статье и адаптированный к непрерывно-дискретным стохастическим системам. Для этой цели свойства стохастической устойчивости из определения 2 будут переформулированы в более удобном виде.

Следующее свойство объединяет все виды стохастической устойчивости из определения 2.

Пусть  $1 \leq q < \infty$ .

**Определение 3.** Систему (1) назовём  $M_q^\gamma$ -устойчивой, если при любых  $b \in k_q^n$ ,  $\varphi \in L_q^n$  для решения  $x(t, b, \varphi)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) задачи (1), (1a), (1b) на интервале  $[0, \infty)$  выполняются соотношение  $x(\cdot, b, \varphi) \in M_q^\gamma$  и неравенство  $\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_q^\gamma} \leq c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$  для некоторого положительного числа  $c$ .

Непосредственное сравнение определений 2 и 3 приводит к следующим очевидным выводам, на которых основан метод регуляризации (т.е. *W-метод* Азбелева) для непрерывно-дискретных стохастических систем:

- из  $M_q$ -устойчивости системы (1) следует *q-устойчивость* этой же системы относительно начальных данных;
- из  $M_q^\gamma$ -устойчивости системы (1) (где  $\gamma(t) \geq \delta > 0$  ( $t \geq 0$ ) и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$ ) вытекает асимптотическая *q-устойчивость* этой же системы относительно начальных данных;
- из  $M_q^\gamma$ -устойчивости системы (1) (где  $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$  ( $t \geq 0$ ),  $\lambda$  – некоторое положительное число) следует экспоненциальная *q-устойчивость* этой же системы по начальным данным.

Для дальнейшего описания метода регуляризации рассмотрим следующую вспомогательную ("модельную") непрерывно-дискретную систему линейных стохастических уравнений:

$$d\hat{x}(t) = (-B(t)\hat{x}(t) + f_1(t))dt + \sum_{i=2}^m f_i(t) d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) + (-\bar{B}(s)\tilde{x}(s) + g_1(s))h + \sum_{i=2}^m g_i(s)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(s h)) \quad (s \in \mathbb{N}_+), \quad (2)$$

где  $B(t)$  –  $l \times l$ -матрица, элементами которой являются прогрессивно измеримые случайные процессы на интервале  $[0, \infty)$  с п.н. локально суммируемыми траекториями,  $f_1(t)$  –  $l$ -мерный прогрессивно измеримый случайный процесс на  $[0, \infty)$  с п.н. локально суммируемыми траекториями,  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{2, m}$ , –  $l$ -мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на  $[0, \infty)$  с п.н. локально суммируемыми с квадратом траекториями,  $\bar{B}(s)$  –  $(n-l) \times (n-l)$ -матрица, элементами которой являются  $\mathcal{F}_s$ -измеримые скалярные случайные величины ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $g_i(s)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , –  $(n-l)$ -мерные  $\mathcal{F}_s$ -измеримые случайные величины ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $h > 0$  – константа из уравнения (1).

Справедливость следующей леммы непосредственно вытекает из известных формул, дающих представления решений линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных и разностных уравнений. В случае обыкновенных линейных дифференциальных уравнений Ито доказательства аналога этой леммы можно найти в диссертации [19].

**Лемма 1.** Для решения  $x(t)$  системы (2) имеет место представление

$$\hat{x}(t) = \hat{X}(t, 0)\hat{x}(0) + \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) f(\varsigma) d\varsigma + \sum_{i=2}^m \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) f_i(\varsigma) dB_i(\varsigma) \quad (t \geq 0),$$

$$\tilde{x}(s) = \tilde{X}(s, 0)\tilde{x}(0) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \tilde{X}(s, \tau+1)g_1(\tau)h + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} \tilde{X}(s, \tau+1)g_i(\tau) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma) \quad (s \in \mathbb{N}_+),$$

где  $\hat{X}(t, \varsigma)$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ) –  $l \times l$ -матрица, столбцы которой являются решениями системы  $d\hat{x}(t) = -B(t)\hat{x}(t)dt$  ( $t \geq 0$ ), причём  $\hat{X}(t, t)$  ( $t \geq 0$ ) – единичная матрица порядка  $l$ , а  $\tilde{X}(s, \tau)$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ) –  $(n-l) \times (n-l)$ -матрица, столбцы которой являются решениями системы  $\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) + \bar{B}(s)\tilde{x}(s)h$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ), причём  $\tilde{X}(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) – единичная матрица порядка  $n-l$ .

Используя вспомогательную систему (2) и лемму 1, запишем задачу (1), (1a), (1b) в эквивалентном виде

$$\bar{x}(t) = X(t)b + (\Theta\bar{x})(t) + (K\varphi)(t) \quad (t \geq 0), \quad (3)$$

где  $X(t)$  – блочно-диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят матрицы  $\hat{X}(t, 0)$  и  $\tilde{X}([t], 0)$ , а вне неё – нулевые матрицы  $\hat{0}$  и  $\tilde{0}$  размеров  $l \times (n-l)$  и  $(n-l) \times l$  соответственно. Операторы  $\Theta$  и  $K$  имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} (\Theta\bar{x})(t) = & \operatorname{col} \left( \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) \left( B(\varsigma)\hat{x}(\varsigma) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(\varsigma)\bar{x}(h_{1j}(\varsigma)) \right) d\varsigma + \right. \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) A_{ij}(\varsigma)\bar{x}(h_{ij}(\varsigma)) dB_i(\varsigma), - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{X}([t], \tau+1) \left( \bar{B}(\tau)\tilde{x}(\tau) - \sum_{j=0}^{\tau} A_1(\tau, j)\bar{x}(j) \right) h + \\ & \left. + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{X}([t], \tau+1) \sum_{j=0}^{\tau} A_i(\tau, j)\bar{x}(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma) \right), \\ (K\varphi)(t) = & \operatorname{col} \left( - \sum_{j=1}^{m_1} \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) A_{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t \hat{X}(t, \varsigma) A_{ij}(\varsigma)\bar{\varphi}(h_{ij}(\varsigma)) dB_i(\varsigma) - \right. \\ & - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{X}([t], \tau+1) \sum_{j=-\infty}^{-1} A_1(\tau, j)\varphi(j)h + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{X}([t], \tau+1) \sum_{j=-\infty}^{-1} A_i(\tau, j)\varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma) \left. \right), \end{aligned}$$

$\bar{x}(t) = \text{col}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_l(t), \bar{x}_{l+1}([t]), \dots, \bar{x}_n([t]))$  – неизвестный  $n$ -мерный случайный процесс на  $\mathbb{R}$  такой, что  $\bar{x}(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\bar{x}(t) = x(t)$  при  $t \geq 0$ ,

$$\hat{\bar{x}}(t) = \text{col}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_l(t)), \quad \tilde{\bar{x}}(t) = \text{col}(\bar{x}_{l+1}([t]), \dots, \bar{x}_n([t])),$$

а  $\bar{\varphi}(t)$  – известные  $n$ -мерные случайные процессы на  $\mathbb{R}$ , причём  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$  при  $t < 0$  и  $\bar{\varphi}(t) = 0$  при  $t \geq 0$ . Этот способ представления решений систем с запаздыванием, заданных на  $\mathbb{R}$  в виде уравнений на полуоси  $[0, \infty)$ , широко используется в теории функционально-дифференциальных уравнений [12].

**Теорема 1.** Пусть  $1 \leq q < \infty$  и существует система (2) такая, что при любых  $b \in k_q^n$ ,  $\varphi \in L_q^n$ ,  $\bar{x} \in M_q^\gamma$  для системы (3) на интервале  $[0, \infty)$  справедливы оценки

$$\|Xb\|_{M_q^\gamma} \leq c_1 \|b\|_{k_q^n}, \quad \|\Theta \bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leq c_2 \|\bar{x}\|_{M_q^\gamma}, \quad \|K\varphi\|_{M_q^\gamma} \leq c_3 \|\varphi\|_{L_q^n},$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – некоторые положительные постоянные, причём  $c_2 < 1$ . Тогда система (1) является  $M_q^\gamma$ -устойчивой.

**Доказательство.** Из представления (3) следует неравенство

$$\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leq \|Xb\|_{M_q^\gamma} + \|\Theta \bar{x}\|_{M_q^\gamma} + \|K\varphi\|_{M_q^\gamma},$$

из которого в силу предположений теоремы получаем, что

$$\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leq c_1 \|b\|_{k_q^n} + c_2 \|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} + c_3 \|\varphi\|_{L_q^n}.$$

Так как  $c_2 < 1$  и  $x(t, b, \varphi) = \bar{x}(t)$  при  $t \geq 0$ , то из предыдущего неравенства вытекает, что при любых  $b \in k_q^n$ ,  $\varphi \in L_q^n$  для решения  $x(t, b, \varphi)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) задачи (1), (1a), (1b) на интервале  $[0, \infty)$  выполняются соотношение  $x(\cdot, b, \varphi) \in M_q^\gamma$  и неравенство

$$\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_q^\gamma} \leq c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где  $c$  – некоторая положительная постоянная. Значит, система (1) является  $M_q^\gamma$ -устойчивой, и теорема доказана.

Теорему 1 можно использовать для получения достаточных условий устойчивости системы (1) в терминах параметров этой системы, как это делается в классической версии  $W$ -метода [11]. Однако, как показано в работах [17, 18], такие условия получаются более точными, если использовать покомпонентные оценки решений. Поэтому ниже предлагается улучшенный метод регуляризации для случая непрерывно-дискретных стохастических систем с последействием.

**Определение 4.** Обратимая матрица  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$  называется положительно обратимой, если все элементы матрицы  $B^{-1}$  положительны.

Согласно [20, гл. 16, с. 305] матрица  $B$  положительно обратима, если  $b_{ij} \leq 0$  при  $i, j = \overline{1, m}$ ,  $i \neq j$ , и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) все диагональные миноры матрицы  $B$  положительны;
- 2) существуют  $\xi_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , такие, что  $\xi_i b_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^m \xi_j |b_{ij}|$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;
- 3) существуют  $\xi_j > 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ , такие, что  $\xi_j b_{jj} > \sum_{i=1, i \neq j}^m \xi_i |b_{ij}|$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

В частности, если положить  $\xi_i = 1$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то получим класс матриц со строгим диагональным преобладанием и неположительными внедиагональными элементами.

Для случайного процесса  $\bar{x}(t) = \text{col}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_l(t), \bar{x}_{l+1}([t]), \dots, \bar{x}_n([t]))$  и константы  $1 \leq q < \infty$  введём обозначение  $\bar{x}^\gamma(q) = \text{col}(\bar{x}_1^\gamma(q), \dots, \bar{x}_n^\gamma(q))$ , где  $\bar{x}_i^\gamma(q) = \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)\bar{x}_i(t)|^q)^{1/q}$  при  $i = \overline{1, l}$  и  $\bar{x}_i^\gamma(q) = \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)\bar{x}_i([t])|^q)^{1/q}$  при  $i = \overline{l+1, n}$ .

Пусть для некоторых  $1 \leq q < \infty$  и положительной непрерывной функции  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$  нам удалось с помощью покомпонентных оценок решений системы (3) получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E}\bar{x}^\gamma(q) \leq C\bar{x}^\gamma(q) + \bar{c}\|b\|_{k_q^n}e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}e, \quad (4)$$



где  $C$  – некоторая неотрицательная  $n \times n$ -матрица, а  $\bar{c}$ ,  $\hat{c}$  – некоторые неотрицательные постоянные. Тогда справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть существует вспомогательная система (2) такая, что в неравенстве (4) матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой. Тогда система (1)  $M_q^\gamma$ -устойчива.

**Доказательство.** Пользуясь положительной обратимостью матрицы  $\bar{E} - C$ , запишем неравенство (4) в следующем виде:

$$\bar{x}^\gamma(q) \leq (\bar{E} - C)^{-1}(\bar{c}\|b\|_{k_q^n}e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}e),$$

откуда получаем, что

$$|\bar{x}^\gamma(q)| \leq c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}), \quad (5)$$

где  $c = \|(\bar{E} - C)^{-1}\|e \max\{\bar{c}, \hat{c}\}$ . Так как  $x(t, b, \varphi) = \bar{x}(t)$  при  $t \geq 0$  и  $\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_q^\gamma} \leq |\bar{x}^\gamma(q)|$ , то из неравенства (5) следует, что при любых  $b \in k_q^n$ ,  $\varphi \in L_q^n$  для решений  $x(t, b, \varphi)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) задачи (1), (1a), (1b) на интервале  $[0, \infty)$  выполняются соотношение  $x(\cdot, b, \varphi) \in M_q^\gamma$  и неравенство

$$\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_q^\gamma} \leq c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где  $c$  – некоторая положительная постоянная. Значит, система (1) является  $M_q^\gamma$ -устойчивой. Теорема доказана.

На основании теоремы 2 в п. 3 будут получены достаточные условия моментной устойчивости системы (1) по начальным данным в терминах параметров этой системы.

**3. Достаточные условия  $M_q^\gamma$ -устойчивости.** В этом пункте изучается задача устойчивости системы (1) в смысле определения 3. При этом пространства  $M_q^\gamma$  рассматриваются с весом и без него (т.е.  $\gamma = 1$ ). В последнем случае система (1) будет устойчива в смысле определения 2, т.е. по начальным данным. Понятие  $M_q^\gamma$ -устойчивости с экспоненциальным весом  $\gamma$  используется в п. 4 для доказательства признаков экспоненциальной моментной устойчивости системы (1) по начальным данным. В дальнейшем считаем, что  $1 \leq p < \infty$ .

Сформулируем две леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

**Лемма 2.** Пусть  $f(\varsigma)$  – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу  $\mathcal{B}(\varsigma)$  на отрезке  $[0, t]$ . Тогда справедливо неравенство

$$\left(E \left| \int_0^t f(\varsigma) d\mathcal{B}(\varsigma) \right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq c_p \left(E \left( \int_0^t |f(\varsigma)|^2 d\varsigma \right)^p\right)^{1/(2p)}, \quad (6)$$

где  $c_p$  – некоторая постоянная, зависящая от  $p$ .

Справедливость неравенства (6) следует из неравенства, приведённого в монографии [21, § 65], где указаны и конкретные оценки для  $c_p$ .

**Лемма 3.** Пусть  $g(\varsigma)$  – скалярная функция на  $[0, \infty)$ , квадрат которой локально суммируем, а  $f(\varsigma)$  – скалярный случайный процесс такой, что  $\sup_{\varsigma \geq 0} (E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ . Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(\varsigma) f(\varsigma) d\varsigma \right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left( \int_0^t |g(\varsigma)| d\varsigma \right) \sup_{\varsigma \geq 0} (E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \quad (7)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(\varsigma)^2 f(\varsigma)^2 d\varsigma \right|^p\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left( \int_0^t g(\varsigma)^2 d\varsigma \right)^{1/2} \sup_{\varsigma \geq 0} (E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}. \quad (8)$$

Лемма 3 доказана в работе [13].

В дальнейшем используются обозначения, введённые в предыдущих пунктах. Кроме того, элементы матрицы  $A_{ij}(t)$  из системы (1) обозначаются ниже  $a_{kr}^{ij}(t)$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , при

$i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $t \geq 0$ , а элементы матрицы  $A_i(s, j)$  из этой системы обозначаются  $a_{kr}^i(s, j)$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , при  $i = \overline{1, m}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s}$ .

Для формулировки теоремы 3 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

$a_1$ ) существуют суммируемые функции  $\bar{a}_{kr}^{1j}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $j = \overline{1, m_1}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , и суммируемые с квадратом функции  $\bar{a}_{kr}^{ij}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{ij}(t)$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ;

$a_2$ ) существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^i(s, j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s}$ , такие, что  $|a_{kr}^i(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^i(s, j)$   $P$ -п.в. при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s}$ ;

$a_3$ ) имеет место соотношение  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) < \infty$  при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Определим элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$c_{kr} = \sum_{j=1}^{m_1} \int_0^{\infty} \bar{a}_{kr}^{1j}(\varsigma) d\varsigma + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \int_0^{\infty} \bar{a}_{kr}^{ij}(\varsigma)^2 d\varsigma \right)^{1/2}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n},$$

$$c_{kr} = h \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j), \quad k = \overline{l+1, n}, \quad r = \overline{1, n}.$$

В этих обозначениях справедлива

**Теорема 3.** Если выполнены условия  $a_1) - a_3)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратной, то система (1)  $M_{2p}$ -устойчива.

**Доказательство.** Применим теорему 2 при  $q = 2p$  и  $\gamma(t) \equiv 1$  ( $t \geq 0$ ). В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, у которой элементы матриц  $B(t)$  и  $\bar{B}(s)$  тождественно нулевые. В этом случае матрицы  $\hat{X}(t, \varsigma)$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ) и  $\tilde{X}(s, \tau)$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ) являются единичными матрицами порядков  $l$  и  $n-l$  соответственно. Представление (3) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k(t) &= b_k - \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right) - \\ &- \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right) \quad (t \geq 0), \quad k = \overline{1, l}, \\ \bar{x}_k([t]) &= b_k - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \sum_{j=0}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{kr}^1(\tau, j) \bar{x}_r(j) h + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \sum_{j=0}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{kr}^i(\tau, j) \bar{x}_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma) - \\ &- \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^1(\tau, j) \varphi_r(j) h + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^i(\tau, j) \varphi_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma) \quad (t \geq 0), \quad k = \overline{l+1, n}. \end{aligned}$$

Из этого представления, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также с учётом оценок

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)} \leq \|b\|_{k_{2p}^n} \quad (k = \overline{1, n}), \quad \text{vrai sup}_{\varsigma < 0} (E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \quad (r = \overline{1, n})$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}_k^1(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr} \bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n c_{kr} \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{1, l}, \\ \bar{x}_k^1(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr} \bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr} \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{l+1, n}, \end{aligned}$$

где  $\bar{c}_{kr} = h \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j)$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Последнюю систему неравенств запишем в матричной форме

$$\bar{E} \bar{x}^1(2p) \leq C \bar{x}^1(2p) + \|b\|_{k_{2p}^n} e + \hat{c} \|\varphi\|_{L_q^n} e,$$

где  $\hat{c} = \max\{\sum_{r=1}^n c_{kr}, k = \overline{1, l}, \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr}, k = \overline{l+1, n}\}$ . Так как матрица  $\bar{E} - C$  положительно обратима, то в силу теоремы 2 система (1)  $M_{2p}$ -устойчива. Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 4 предположим, что для системы (1) выполнены условия:

- $b_1)$  справедливо равенство  $h_{11}(t) = t$  ( $t \geq 0$ );
- $b_2)$  диагональные элементы матриц  $A_{11}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^{11}(t) + \lambda_k$  ( $t \geq 0$ ),  $k = \overline{1, l}$ , и  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ , соответственно, где  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , – некоторые положительные числа, причём  $0 < \lambda_k h < 1$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ;
- $b_3)$  существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{ij}$ ,  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при всех этих индексах;
- $b_4)$  существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^i(s, j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s}$ , такие, что  $|a_{kr}^i(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^i(s, j)$   $P$ -п.в. при всех этих индексах, причём  $\sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=-\infty}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) < \infty$  при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Определим элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{kr} &= \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \\ c_{kr} &= \frac{1}{\lambda_k} \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=0}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \frac{c_p}{\lambda_k \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m \sup_{\varsigma \geq 0} \sum_{j=0}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j), \quad k = \overline{l+1, n}, \quad r = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива

**Теорема 4.** Если выполнены условия  $b_1)$ – $b_4)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (1)  $M_{2p}$ -устойчива.

**Доказательство.** Снова воспользуемся теоремой 2 при  $q = 2p$  и  $\gamma(t) \equiv 1$  ( $t \geq 0$ ). В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, у которой  $B(t)$  и  $\bar{B}(s)$  являются постоянными диагональными матрицами с диагональными элементами  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, l}$ , и  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ , соответственно. В этом случае  $\hat{X}(t, \varsigma)$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ) и  $\tilde{X}(s, \tau)$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ) также являются диагональными матрицами с диагональными элементами  $\hat{x}_k(t, \varsigma) = \exp\{-\lambda_k(t - \varsigma)\}$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ),  $k = \overline{1, l}$ , и  $\tilde{x}_k(s, \tau) = (1 - \lambda_k h)^{s - \tau}$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ , соответственно. Тогда систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_k(t) = \hat{x}_k(t, 0) b_k - \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right) - \\
& - \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) + \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right),
\end{aligned}$$

если  $t \geq 0$ ,  $k = \overline{1, l}$ , и

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k([t]) &= \tilde{x}_k([t], 0) b_k - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=0}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{kr}^1(\tau, j) \bar{x}_r(j) h + \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=0}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{kr}^i(\tau, j) \bar{x}_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma) - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^1(\tau, j) \varphi_r(j) h + \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^i(\tau, j) \varphi_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma),
\end{aligned}$$

если  $t \geq 0$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ . Из этой системы, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также учитывая оценки

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)} \leq \|b\|_{k_{2p}^n} \quad (k = \overline{1, n}), \quad \forall \sup_{\varsigma < 0} (E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \quad (r = \overline{1, n})$$

и равенства

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq 0} \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) d\varsigma &= \frac{1}{\lambda_k}, \quad \sup_{t \geq 0} \left( \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma)^2 d\varsigma \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}} \quad (k = \overline{1, l}), \\
\sup_{t \geq 0} \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) &= \sup_{t \geq 0} (1 + (1 - \lambda_k h) + \dots + (1 - \lambda_k h)^{[t]-1} = \\
&= \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \lambda_k h)^{\tau} = \frac{1}{1 - (1 - \lambda_k h)} = \frac{1}{\lambda_k h} \quad (k = \overline{l+1, n}),
\end{aligned}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k^1(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr} \bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n c_{kr} \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{1, l}, \\
\bar{x}_k^1(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr} \bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr} \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{l+1, n},
\end{aligned}$$

где

$$\bar{c}_{kr} = \frac{1}{\lambda_k} \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=-\infty}^{-1} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \frac{c_p}{\lambda_k \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=-\infty}^{-1} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j), \quad k = \overline{l+1, n}, \quad r = \overline{1, n}.$$

Последнюю систему неравенств запишем в матричной форме

$$\bar{E}\bar{x}^1(2p) \leq C\bar{x}^1(2p) + \|b\|_{k_q^n} e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n} e,$$

где  $\hat{c} = \max\{\sum_{r=1}^n c_{kr}, k = \overline{1, l}; \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr}, k = \overline{l+1, n}\}$ . Так как матрица  $\bar{E}-C$  положительно обратима, то система (1) будет  $M_{2p}$ -устойчивой в силу теоремы 2. Теорема доказана.

В следующей теореме рассматривается  $M_{2p}^\gamma$ -устойчивость системы (1) с экспоненциальным весом  $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$  ( $t \geq 0$ ), где  $\lambda$  – некоторое положительное число. Эта теорема является главным источником признаков экспоненциальной  $2p$ -устойчивости системы (1) по начальным данным, которые будут установлены в следующем пункте работы. Как отмечается в [11], примеры показывают, что экспоненциальная устойчивость решений систем детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений, как правило, наблюдается только в случае ограниченных запаздываний. Это объясняет, в частности, первое из условий  $c_1$ ), накладываемых на систему (1) в приводимой ниже теореме 5. Предположим, что:

- $c_1$ ) существуют неотрицательные числа  $\tau_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , такие, что  $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в. при всех этих индексах;
- $c_2$ ) существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при всех этих индексах; кроме того, пусть существуют положительные числа  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для которых
- $c_3$ ) диагональные элементы матрицы  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ ;
- $c_4$ ) справедливо неравенство  $\sum_{j \in I_k} a_{kk}^{1j}(t) \geq \lambda_k$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$  для некоторых подмножеств  $I_k \subset \{1, \dots, m_1\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ;
- $c_5$ ) выполняются оценки  $0 < \lambda_k h < 1$  при  $k = \overline{l+1, n}$ ;
- $c_6$ ) существуют  $d_i \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = \overline{1, m}$ , для которых:
- элементы матриц  $A_i(s, j)$  равны нулю  $P$ -п.в. при  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s - d_i - 1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;
- $|a_{kr}^i(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^i(s, j)$   $P$ -п.в. при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_i, s}$ , причём для всех  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) < \infty,$$

где  $\nu_i(\tau) = 0$  при  $0 \leq \tau \leq d_i$  и  $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$  при  $\tau > d_i$ .

Элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  определим следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{1}{\lambda_k} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1\nu} \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{i\nu} \sqrt{\tau_{1j}} \right) + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1j} \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{ij}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$j \in \{1, \dots, m_1\} / I_k$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kr}^{1j} \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \sqrt{\tau_{1j}} \right) + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j} \right) +$$

$$+ \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k h} \left( h \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right), \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}.$$

Тогда справедлива

**Теорема 5.** Если выполнены условия  $c_1) - c_6)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратной, то система (1)  $M_{2p}'$ -устойчива с экспоненциальным весом  $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$  ( $t \geq 0$ ), где

$$0 < \lambda < \min\{\lambda_i, i = \overline{1, l}; -\ln(1 - \lambda_i h), i = \overline{l+1, n}\}. \quad (9)$$

**Доказательство.** Положим  $q = 2p$  и воспользуемся схемой доказательства двух предыдущих теорем. В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, где  $B(t)$  и  $\bar{B}(s)$  являются диагональными матрицами с диагональными элементами  $\sum_{j \in I_k} a_{kk}^{1j}(t)$ ,  $k = \overline{1, l}$ , и  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ , соответственно. В этом случае  $\hat{X}(t, \varsigma)$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ) и  $\tilde{X}(s, \tau)$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ) также являются диагональными матрицами с диагональными элементами  $\hat{x}_k(t, \varsigma) = \exp\{-\int_{\varsigma}^t \sum_{j \in I_k} a_{kk}^{1j}(\varsigma) d\varsigma\}$  ( $t \geq 0$ ,  $0 \leq \varsigma \leq t$ ),  $k = \overline{1, l}$ , и  $\tilde{x}_k(s, \tau) = (1 - \lambda_k h)^{s-\tau}$  ( $s, \tau \in \mathbb{N}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq s$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ , соответственно. Тогда систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k(t) = & \hat{x}_k(t, 0)b_k + \sum_{j \in I_k} \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kk}^{1j}(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{x}_k(\zeta) - \sum_{j \in \{1, \dots, m_1\}/I_k} a_{kk}^{1j}(t) \bar{x}_k(h_{1j}(t)) - \\ & - \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \bar{x}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right) - \\ & - \sum_{j=1}^{m_1} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \chi_{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{1j}(\varsigma) \chi_{1j}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{1j}(\varsigma)]) d\varsigma \right) + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \left( \sum_{r=1}^l \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \chi_{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \sum_{r=l+1}^n \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) a_{kr}^{ij}(\varsigma) \chi_{ij}(\varsigma) \bar{\varphi}_r([h_{ij}(\varsigma)]) d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right), \end{aligned}$$

если  $t \geq 0$ ,  $k = \overline{1, l}$ , и

$$\begin{aligned} \bar{x}_k([t]) = & \tilde{x}_k([t], 0)b_k - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{r=1}^n a_{kr}^1(\tau, j) \bar{x}_r(j)h + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{kr}^i(\tau, j) \bar{x}_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma) - \\ & - \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=-d_1}^{-1} \sum_{r=1}^n \chi_1(\tau) a_{kr}^1(\tau, j) \varphi_r(j)h + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \sum_{j=-d_i}^{-1} \sum_{r=1}^n \chi_i(\tau) a_{kr}^i(\tau, j) \varphi_r(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma), \end{aligned}$$

если  $t \geq 0$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ . Здесь  $\chi_{ij}(\varsigma)$  – характеристическая функция отрезка  $[0, \tau_{ij}]$  при  $\varsigma \geq 0$  для  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , а  $\chi_i(\tau)$  – характеристическая функция множества  $0 \leq \tau \leq d_i$  при  $\tau \in \mathbb{N}_+$  для  $i = \overline{1, m}$ ,  $\nu_i(\tau) = 0$  при  $0 \leq \tau \leq d_i$ ,  $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$  при  $\tau > d_i$  для  $i = \overline{1, m}$ .

Пусть  $\bar{h}_{ij}$  – измеримая по Борелю функция, заданная на  $\mathbb{R}$  и такая, что  $\bar{h}_{ij}(t) = h_{ij}(t)$  при  $t \geq 0$  и  $\bar{h}_{ij}(t) = 0$  при  $t < 0$  для  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ . Из предыдущей системы, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также учитывая, что

$$d\bar{x}_k(\varsigma) = - \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^{1\nu}(\varsigma)(\bar{x}_r(h_{1\nu}(\varsigma)) + \chi_{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{1\nu}(\varsigma)))d\varsigma +$$

$$+ \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n a_{kr}^{i\nu}(\varsigma)(\bar{x}_r(h_{i\nu}(\varsigma)) + \chi_{i\nu}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{i\nu}(\varsigma)))d\mathcal{B}_i(\varsigma),$$

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)} \leq \|b\|_{k_{2p}^n} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$\text{vrai sup}_{\varsigma < 0} (E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} \leq \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \quad (r = \overline{1, n}),$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \hat{x}_k(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1} d\varsigma \leq \frac{1}{\lambda_k - \lambda},$$

$$\sup_{t \geq 0} \left( \int_0^t (\hat{x}_k(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1})^2 d\varsigma \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \quad (k = \overline{1, l}),$$

$$\chi_{ij}(\varsigma) \gamma(\varsigma) \leq \gamma(\tau_{ij}) \quad (\varsigma \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m_i}),$$

$$\chi_i(\tau) \gamma(\tau + 1) \leq \gamma(d_i + 1) \quad (\tau \in \mathbb{N}_+, \quad i = \overline{1, m}),$$

$$\lambda < \max\{\lambda_i, \quad i = \overline{1, l}; \quad -\ln(1 - \lambda_i h), \quad i = \overline{l+1, n}\},$$

$$\sup_{t \geq 0} \left( \gamma(t) \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau + 1) \gamma(\tau + 1)^{-1} \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} (1 + \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\} + \dots + \exp\{[t](\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda)\}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \exp\{\tau(\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda)\} = \frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\}}, \quad k = \overline{l+1, n},$$

$$\gamma(t) \gamma(\bar{h}_{ij}(t))^{-1} \leq \gamma(\tau_{ij}) \quad (t \geq 0), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m_i},$$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \gamma(\tau + 1) \gamma(j)^{-1} \hat{a}_{kr}^i(\tau, j) \leq \gamma(d_i + 1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \hat{a}_{kr}^i(\tau, j),$$

где  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , и, наконец,

$$\sup_{\varsigma \geq 0} \left( E \left| \gamma(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{x}_k(\varsigma) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} = \sup_{\varsigma \geq 0} \left( E \left| \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \left( - \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n a_{kr}^{1\nu}(\varsigma)(\bar{x}_r(h_{1\nu}(\varsigma)) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \chi_{1\nu}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{1\nu}(\varsigma)))d\varsigma + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n a_{kr}^{i\nu}(\varsigma)(\bar{x}_r(h_{i\nu}(\varsigma)) + \chi_{i\nu}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{i\nu}(\varsigma)))d\mathcal{B}_i(\varsigma) \right) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n \sup_{\varsigma \geq 0} \left( E \left| \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{kr}^{1\nu}(\zeta) (\bar{x}_r(h_{1\nu}(\zeta)) + \chi_{1\nu}(\zeta) \bar{\varphi}_r(h_{1\nu}(\zeta))) d\zeta \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \\
&+ \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n \sup_{\varsigma \geq 0} \left( E \left| \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{kr}^{i\nu}(\zeta) (\bar{x}_r(h_{i\nu}(\zeta)) + \chi_{i\nu}(\zeta) \bar{\varphi}_r(h_{i\nu}(\zeta))) d\mathcal{B}_i(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{1\nu} \sup_{\varsigma \geq 0} \left( \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-1} \gamma(\zeta) \gamma(\bar{h}_{1\nu}(\zeta))^{-1} d\zeta \right) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
&+ \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{1\nu} \sup_{\varsigma \geq 0} \left( \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-1} \gamma(\zeta) \chi_{1\nu}(\zeta) d\zeta \right) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} + \\
&+ c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{i\nu} \sup_{\varsigma \geq 0} \left( \gamma(\varsigma)^2 \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-2} \gamma(\zeta)^2 \gamma(\bar{h}_{i\nu}(\zeta))^{-2} d\zeta \right)^{1/2} \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
&+ c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{i\nu} \sup_{\varsigma \geq 0} \left( \gamma(\varsigma)^2 \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-2} \gamma(\zeta)^2 \chi_{i\nu}(\zeta)^{-2} d\zeta \right)^{1/2} \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \leq \\
&\leq \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{1\nu} \gamma(\tau_{1j}) \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{i\nu} \bar{x}_r^\gamma(2p) \gamma(\tau_{1j}) \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) (\bar{x}_r^\gamma(2p) + \|\varphi\|_{L_{2p}^n}) = \\
&= \sum_{r=1}^n \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) (\bar{x}_r^\gamma(2p) + \|\varphi\|_{L_{2p}^n}),
\end{aligned}$$

где  $k = \overline{1, l}$ ,  $j \in I_k$ , получаем

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k^\gamma(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \sum_{r=1}^n \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
&+ \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j \in \{1, \dots, m_1\} / I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \bar{x}_k^\gamma(2p) + \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{r=1, r \neq k}^n \bar{a}_{kr}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
&+ \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{r=1}^n \bar{a}_{kr}^{ij} \gamma(\tau_{ij}) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
&+ \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \sum_{r=1}^n \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} + \\
&+ \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij} \gamma(\tau_{ij}) \right) \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{1, l}, \\
\bar{x}_k^\gamma(2p) &\leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \sup_{t \geq 0} \left( \gamma(t) \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \bar{x}_k([t], \tau + 1) \gamma(\tau + 1)^{-1} \right) \times
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left( \sum_{r=1}^n \left( h \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \gamma(\tau+1) \gamma(j)^{-1} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \gamma(\tau+1) \gamma(j)^{-1} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right) \right) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
& \quad + \sup_{t \geq 0} \left( \gamma(t) \sum_{\tau=0}^{[t]-1} \tilde{x}_k([t], \tau+1) \gamma(\tau+1)^{-1} \right) \times \\
& \quad \times \left( \sum_{r=1}^n \left( h \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \gamma(d_1+1) \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \gamma(d_i+1) \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right) \right) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \leq \\
& \leq \|b\|_{k_{2p}^n} + \frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\}} \left( \sum_{r=1}^n \left( h \gamma(d_1+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \gamma(d_i+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right) \right) \bar{x}_r^\gamma(2p) + \\
& \quad + \frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\}} \left( \sum_{r=1}^n \left( h \gamma(d_1+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \gamma(d_i+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right) \right) \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k = \overline{1+1, n}.
\end{aligned}$$

В матричной форме последняя система неравенств принимает вид

$$\bar{E} \bar{x}^\gamma(2p) \leq C(\lambda) \bar{x}^\gamma(2p) + \|b\|_{k_{2p}^n} e + \hat{c}(\lambda) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

где  $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n$  —  $n \times n$ -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_{kk}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1, j \in \{1, \dots, m_1\}/I_k}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{ij} \gamma(\tau_{ij}), \quad k = \overline{1, l}, \\
c_{kr}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) \right) + \\
& \quad + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{ij} \gamma(\tau_{ij}), \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r, \\
c_{kr}(\lambda) &= \frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\}} \left( h \gamma(d_1+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \right. \\
& \quad \left. + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \gamma(d_i+1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right), \quad k = \overline{1+1, l}, \quad r = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

а компоненты зависящего от параметра  $\lambda$  вектора  $\hat{c}(\lambda) = \text{col}\{v_1(\lambda), \dots, v_n(\lambda)\}$  задаются равенствами

$$v_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \sum_{r=1}^n \gamma(\tau_{1j}) \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \gamma(\tau_{1\nu}) \tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \gamma(\tau_{i\nu}) \sqrt{\tau_{1j}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j} \gamma(\tau_{1j}) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k - \lambda)}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij} \gamma(\tau_{ij}) \right), \quad k = \overline{1, l}, \\
v_k(\lambda) = & \frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - \lambda_k h) + \lambda\}} \left( \sum_{r=1}^n \left( h \gamma(d_1 + 1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) + \right. \right. \\
& \left. \left. + c_p \sqrt{h} \sum_{i=2}^m \gamma(d_i + 1) \sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^i(\tau, j) \right) \right), \quad k = \overline{l+1, n}.
\end{aligned}$$

В силу условий теоремы матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, причём  $C(0) = C$ . Следовательно, при достаточно малых  $\lambda$  матрица  $\bar{E} - C(\lambda)$  также будет положительно обратимой, а значит, в силу теоремы 2, система (1)  $M_{2p}^\gamma$ -устойчива с показателем  $\lambda$ , удовлетворяющим оценкам  $0 < \lambda < \min\{\lambda_i, \quad i = \overline{1, l}; \quad -\ln(1 - \lambda_i h), \quad i = \overline{l+1, n}\}$ . Теорема доказана.

**4. Признаки экспоненциальной моментной устойчивости.** В этом пункте предполагается, что  $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$  ( $t \geq 0$ ), где  $\lambda$  – некоторое положительное число.

Для формулировки предложения 1 предположим, что для системы (1) выполняются следующие условия:

- $d_1$ ) элементы матриц  $A_{ij}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , равны нулю  $P \times \mu$ -п.в.;
- $d_2$ ) элементы матриц  $A_i(s, j)$  ( $s \in \mathbb{N}_+, j = \overline{-\infty, s}$ ),  $i = \overline{2, m}$ , равны нулю  $P$ -п.в.;
- $d_3$ ) существуют неотрицательные числа  $\tau_{1j}$ ,  $j = \overline{1, m_1}$ , такие, что  $0 \leq t - h_{1j}(t) \leq \tau_{1j}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в. при  $j = \overline{1, m_1}$ ;
- $d_4$ ) существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{1j}$ ,  $j = \overline{1, m_1}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{1j}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{1j}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $j = \overline{1, m_1}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ;
- $d_5$ ) существуют положительные числа  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для которых:  
диагональные элементы матрицы  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ ;
- справедливо неравенство  $\sum_{j \in I_k} a_{kk}^{1j}(t) \geq \lambda_k$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$  для некоторых подмножеств  $I_k \subset \{1, \dots, m_1\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ;
- выполняются оценки  $0 < \lambda_k h < 1$  при  $k = \overline{l+1, n}$ ;
- $d_6$ ) существует  $d_1 \in \mathbb{N}_+$ , для которого:  
элементы матрицы  $A_1(s, j)$  равны нулю  $P$ -п.в. при  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s - d_1 - 1}$ ;
- имеет место неравенство  $|a_{kr}^1(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^1$   $P$ -п.в. при  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_1, s}$ , для некоторых неотрицательных чисел  $\bar{a}_{kr}^1$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_{kk} = & \frac{1}{\lambda_k} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1\nu} \tau_{1j} + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1j} \right), \quad k = \overline{1, l}, \\
c_{kr} = & \frac{1}{\lambda_k} \left( \sum_{j \in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu} \tau_{1j} + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j} \right), \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r, \\
c_{kr} = & \frac{(d_1 + 1) \bar{a}_{kr}^1}{\lambda_k}, \quad k = \overline{l+1, l}, \quad r = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Тогда справедливо следующее следствие из теоремы 5.

**Предложение 1.** Если выполнены условия  $d_1) - d_6)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным (т.е. в смысле определения 2), причём для показателя  $\lambda$  справедлива оценка (9).

**Замечание.** Если при выполнении условий предложения 1 элементы матриц  $A_{1j}(t)$  ( $t \geq 0$ ,  $j = \overline{1, m_1}$ ) являются измеримыми локально суммируемыми функциями, а элементы

матрицы  $A_1(s, j)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_1, s}$ ) – действительные числа, то система (1) является детерминированной гибридной системой линейных дифференциальных и разностных уравнений с ограниченными запаздываниями в смысле статьи [5], и эта система будет экспоненциально устойчива по начальным данным.

Для формулировки предложения 2 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

$e_1$ ) элементы матриц  $A_{1j}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $j = \overline{2, m_1}$ , и  $A_{ij}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , равны нулю  $P \times \mu$ -п.в., а элементы матриц  $A_i(s, j)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s}$ ),  $i = \overline{2, m}$ , равны нулю  $P$ -п.в.;

$e_2$ ) существует неотрицательное число  $\tau_{11}$  такое, что  $0 \leq t - h_{11}(t) \leq \tau_{11}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в.;

$e_3$ ) существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{11}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{11}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{11}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ;

$e_4$ ) существуют положительные числа  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для которых: диагональные элементы матрицы  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ ;

$e_5$ ) справедливо неравенство  $a_{kk}^{11}(t) \geq \lambda_k$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ;

$e_6$ ) выполняются оценки  $0 < \lambda_k h < 1$  при  $k = \overline{l+1, n}$ ;

$e_7$ ) существует  $d_1 \in \mathbb{N}_+$ , для которого:

элементы матрицы  $A_1(s, j)$  равны нулю  $P$ -п.в. при  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s - d_1 - 1}$ ;

для некоторых неотрицательных чисел  $\bar{a}_{kr}^1$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , имеют место оценки  $|a_{kr}^1(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^1$   $P$ -п.в. при  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_1, s}$ .

Элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  определим следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{(\bar{a}_{kk}^{11})^2 \tau_{11}}{\lambda_k}, \quad k = \overline{1, l}, \quad c_{kr} = \frac{\bar{a}_{kk}^{11} \bar{a}_{kr}^{11} \tau_{11} + \bar{a}_{kr}^{11}}{\lambda_k}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1) \bar{a}_{kr}^1}{\lambda_k}, \quad k = \overline{l+1, n}, \quad r = \overline{1, n}.$$

Тогда в силу предложения 1 справедливо

**Предложение 2.** Если выполняются условия  $e_1)$ – $e_7)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным, причём для показателя  $\lambda$  справедлива оценка (9).

Для формулировки предложений 3 и 4 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

$f_1$ )  $m_1 = 1$ ;

$f_2$ ) существуют неотрицательные числа  $\tau_{11}$  и  $\tau_{ij}$ ,  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , такие, что  $0 \leq t - h_{11}(t) \leq \tau_{11}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в.,  $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в. при  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ;

$f_3$ ) существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{11}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $\bar{a}_{kr}^{ij}$ ,  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , для которых  $|a_{kr}^{11}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{11}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $|a_{kr}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ;

$f_4$ ) существуют положительные числа  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для которых:

диагональные элементы матрицы  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{l+1, n}$ ;

справедливо неравенство  $\sum_{j \in I_k} a_{kj}^{1j}(t) \geq \lambda_k$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ;

выполняются оценки  $0 < \lambda_k h < 1$  при  $k = \overline{l+1, n}$ ;

$f_5$ ) существуют числа  $d_i \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = \overline{1, m}$ , для которых:

элементы матрицы  $A_i(s, j)$  равны нулю  $P$ -п.в. при  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s - d_i - 1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

для некоторых неотрицательных чисел  $\bar{a}_{kr}^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , выполняются оценки  $|a_{kr}^i(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^i$   $P$ -п.в. при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{l+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_i, s}$ ;

имеет место соотношение  $\sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) < \infty$ , где  $\nu_i(\tau) = 0$  при  $0 \leq \tau \leq d_i$ ,

$\nu_i(\tau) = \tau - d_i$  при  $\tau > d_i$  для  $i = \overline{1, m}$ .

Определим элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{\bar{a}_{kk}^{11}}{\lambda_k} \left( \bar{a}_{kk}^{11} \tau_{11} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \sqrt{\tau_{11}} \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{ij}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k} \left( \bar{a}_{kr}^{11} \left( \bar{a}_{kr}^{11} \tau_{11} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu} \sqrt{\tau_{11}} \right) + \bar{a}_{kr}^{11} \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1) \bar{a}_{kr}^1}{\lambda_k} + \frac{c_p}{\lambda_k \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m (d_i + 1) \bar{a}_{kr}^i, \quad k = \overline{1+1, l}, \quad r = \overline{1, n}.$$

Тогда имеют место

**Предложение 3.** Если выполнены условия  $f_1) - f_5)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным, причём для показателя  $\lambda$  справедлива оценка (9).

**Предложение 4.** Пусть в системе (1)  $n = 2$ ,  $l = 1$  и для этих значений выполнены все условия предложения 3. Пусть, далее, для  $c_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , справедливы неравенства  $1 - c_{11} > 0$  и  $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$ . Тогда система (1) является экспоненциально  $2p$ -устойчивой по начальным данным, причём для показателя  $\lambda$  имеет место оценка (9), где  $n = 2$ ,  $l = 1$ .

Справедливость предложения 4 следует из предложения 3 и из того, что при данных предположениях  $2 \times 2$ -матрица  $\bar{E} - C$  будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

Для формулировки двух последних предложений предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

- $g_1)$   $m_1 = 1$ ;
- $g_2)$  справедливо равенство  $h_{11}(t) = t$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в.;
- $g_3)$  существуют неотрицательные числа  $\tau_{ij}$ ,  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , такие, что  $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $\mu$ -п.в. при  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ;
- $g_4)$  существуют неотрицательные числа  $\bar{a}_{kr}^{11}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $\bar{a}_{kr}^{ij}$ ,  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , такие, что  $|a_{kr}^{11}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{11}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $|a_{kr}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{kr}^{ij}$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ;
- $g_5)$  существуют положительные числа  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для которых: диагональные элементы матрицы  $A_1(s, s)$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ) имеют вид  $a_{kk}^1(s, s) + \lambda_k$  ( $s \in \mathbb{N}_+$ ),  $k = \overline{1+1, n}$ ;
- справедливо неравенство  $a_{kk}^{11}(t) \geq \lambda_k$  ( $t \geq 0$ )  $P \times \mu$ -п.в. при  $k = \overline{1, l}$ ;
- выполняются оценки  $0 < \lambda_k h < 1$  при  $k = \overline{1+1, n}$ ;
- $g_6)$  существуют числа  $d_i \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = \overline{1, m}$ , для которых: элементы матрицы  $A_i(s, j)$  равны нулю  $P$ -п.в. при  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{-\infty, s - d_i - 1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ; для некоторых чисел  $\bar{a}_{kr}^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ , выполняются оценки  $|a_{kr}^i(s, j)| \leq \bar{a}_{kr}^i$   $P$ -п.в. при  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1+1, n}$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $s \in \mathbb{N}_+$ ,  $j = \overline{s - d_i, s}$ ;
- имеет место соотношение  $\sup_{\tau \in \mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau, j) < \infty$ , где  $\nu_i(\tau) = 0$  при  $0 \leq \tau \leq d_i$  и  $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$  при  $\tau > d_i$  для  $i = \overline{1, m}$ .

Определим элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kk}^{ij}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{\bar{a}_{kr}^{11}}{\lambda_k} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1)\bar{a}_{kr}^1}{\lambda_k} + \frac{c_p}{\lambda_k \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m (d_i + 1)\bar{a}_{kr}^i, \quad k = \overline{1+1, \bar{l}}, \quad r = \overline{1, \bar{n}}.$$

Тогда в силу предложения 3 справедливы следующие

**Предложение 5.** Если выполнены условия  $g_1) - g_6)$  и матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным, причём для показателя  $\lambda$  справедлива оценка (9).

**Предложение 6.** Пусть в системе (1)  $n = 2$ ,  $l = 1$  и для этих значений выполнены все условия предложения 5. Пусть, далее, для  $c_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , справедливы неравенства  $1 - c_{11} > 0$  и  $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$ . Тогда система (1) является экспоненциально  $2p$ -устойчивой по начальным данным, причём для показателя  $\lambda$  имеет место оценка (9), где  $n = 2$ ,  $l = 1$ .

Справедливость предложения 6 следует из предложения 5 и из того, что в этих предположениях  $2 \times 2$ -матрица  $\bar{E} - C$  будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

**5. Примеры.** Рассмотрим непрерывно-дискретную систему стохастических уравнений с постоянными коэффициентами и ограниченными запаздываниями

$$d\hat{x}(t) = - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j} x(t - h_{1j}) dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} x(t - h_{ij}) dB_i(t) \quad (t \geq 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) - A_1 \sum_{j=s-d_1}^s x(j)h + \sum_{i=2}^m A_i \sum_{j=s-d_i}^s x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh)) \quad (s \in \mathbb{N}_+), \quad (10)$$

где  $A_{ij} = (a_{kr}^{ij})_{k,r=1}^{l,n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , —  $l \times n$ -матрицы и  $A_i = (a_{kr}^i)_{k=l+1, r=1}^n$ ,  $i = \overline{1, m}$ , —  $(n - l) \times n$ -матрицы, элементами которых являются действительные числа,  $h_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , — неотрицательные действительные числа,  $h$  — достаточно малое положительное действительное число. Положим также  $\sum_{j=1}^{m_1} a_{kk}^{1j} = a_k$ ,  $k = \overline{1, \bar{l}}$ , и определим элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{1}{a_k} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{kk}^{1j}| \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{k\nu}^{1\nu}| h_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{k\nu}^{i\nu}| \sqrt{h_{1j}} \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2a_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kk}^{ij}|, \quad k = \overline{1, \bar{l}},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{a_k} \left( \sum_{j=1}^{m_1} |a_{kr}^{1j}| \left( \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{k\nu}^{1\nu}| h_{1j} + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{k\nu}^{i\nu}| \sqrt{h_{1j}} \right) + \sum_{j=1}^{m_1} |a_{kr}^{1j}| \right) +$$

$$+ \frac{c_p}{\sqrt{2a_k}} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kr}^{ij}|, \quad k = \overline{1, \bar{l}}, \quad r = \overline{1, \bar{n}}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kk} = \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^1 \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m |a_{kk}^i|, \quad k = \overline{1+1, \bar{l}},$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1)|a_{kr}^1|}{a_{kk}^1} + \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^1 \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m |a_{kr}^i|, \quad k = \overline{1+1, \bar{l}}, \quad r = \overline{1, \bar{n}}, \quad k \neq r.$$

Тогда имеет место

**Предложение 7.** Если  $a_k > 0$ ,  $k = \overline{1, \bar{l}}$ ,  $a_{kk}^1 > 0$ ,  $k = \overline{1+1, \bar{n}}$ , а матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (10) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным.

Справедливость утверждения следует из теоремы 5, в которой в данном случае  $I_k = \{1, \dots, m_1\}$  для всех  $k = \overline{1, \bar{l}}$ .

**Следствие 1.** Пусть в системе (10)  $n = 2$ ,  $l = 1$  и для этих значений выполнены все условия предложения 7. Пусть, далее, для  $c_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , выполнены неравенства:  $1 - c_{11} > 0$  и  $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$ . Тогда система (10) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным.

Справедливость следствия вытекает из предложения 7 и из того, что при предположениях следствия  $2 \times 2$ -матрица  $\bar{E} - C$  будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

Определим теперь элементы  $n \times n$ -матрицы  $C$  следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{11}} \sum_{j=2}^{m_1} |a_{kk}^{1j}| + \frac{c_p}{\sqrt{2}a_k} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kk}^{ij}|, \quad k = \overline{1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{a_{kk}^{11}} + \sum_{j=1}^{m_1} |a_{kr}^{1j}| + \frac{c_p}{\sqrt{2}a_k} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kr}^{ij}|, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kk} = \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^1 \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m |a_{kk}^i|, \quad k = \overline{1 + 1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1)|a_{kr}^1|}{a_{kk}^1} + \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^1 \sqrt{h}} \sum_{i=2}^m |a_{kr}^i|, \quad k = \overline{1 + 1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r.$$

Тогда справедливо

**Предложение 8.** Если  $h_{11} = 0$ ,  $a_{kk}^{11} > 0$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $a_{kk}^1 > 0$ ,  $k = \overline{l + 1, n}$ , а матрица  $\bar{E} - C$  является положительно обратимой, то система (10) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным.

Справедливость утверждения следует из теоремы 5, в которой в данном случае  $I_k = \{1\}$  для всех  $k = \overline{1, l}$ .

**Следствие 2.** Пусть в системе (10)  $n = 2$ ,  $l = 1$  и для этих значений выполнены все условия предложения 8. Пусть, далее, для  $c_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , выполнены неравенства:  $1 - c_{11} > 0$  и  $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$ . Тогда система (10) экспоненциально  $2p$ -устойчива по начальным данным.

Справедливость следствия вытекает из предложения 8 и из того, что при предположениях следствия  $2 \times 2$ -матрица  $\bar{E} - C$  будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

**Закключение.** В статье изложен метод регуляризации для анализа вопросов моментной устойчивости систем стохастических уравнений, содержащих компоненты как с непрерывным, так и с дискретным временем. В качестве вспомогательной, т.е. регуляризирующей, системы используется сравнительно простая система линейных дифференциальных и разностных уравнений, для которой легко проверяются необходимые для применения метода свойства устойчивости. Отметим, однако, что для получения более тонких признаков устойчивости необходимо выбирать более сложные регуляризирующие системы линейных дифференциальных и разностных уравнений с последствием, так как в этом случае также имеют место аналогии леммы 1 и теорем 1 и 2 настоящей статьи. Эти исследования планируется провести в будущем.

Авторы выражают благодарность рецензенту работы, предложения которого способствовали существенному улучшению её изложения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.М. Вполне регулярные системы с последствием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 7. С. 97–104.
2. Singh A., Nisbet R.M. Semi-discrete host-parasitoid models // J. of Theor. Biology. 2007. V. 247. P. 733–742.
3. Mailleret L., Lemsle V. A note on semi-discrete modeling in the life sciences // Phil. Trans. R. Soc. A. 2009. V. 367. P. 4779–4799.

4. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Представление решений гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 741–755.
5. Марченко В.М., Луазо Ж.Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728–740.
6. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестн. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2013. Т. 13. № 4. С. 34–37.
7. Chudov A., Maksimov V. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Funct. Differ. Equat. 2012. V. 19. № 1–2. С. 49–62.
8. Li X., Mao X. Stabilization of highly nonlinear hybrid stochastic differential delay equations by delay feedback control // Automatica. 2020. V. 12. № 108657.
9. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
10. Mao X.R. Stochastic Differential Equations and Applications. Oxford; Cambridge; Philadelphia; New Delhi, 1997.
11. Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of Differential Equations With Aftereffect. London, 2002.
12. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatulina L.F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications. Hindawi; New York, 2007.
13. Kadiev R., Ponosov A. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Anal. and Appl. 2012. V. 389. № 2. P. 1239–1250.
14. Кадиев Р.И. Устойчивость решений линейных разностных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 293–301.
15. Кадиев Р.И. Устойчивость решений систем линейных разностных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 842–850.
16. Kadiev R., Ponosov A. Exponential stability of Ito-type linear functional difference equations // Comput. and Math. with Appl. 2013. V. 66. № 11. P. 2295–2306.
17. Кадиев Р.И., Поносков А.В. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 53. № 5. С. 579–590.
18. Кадиев Р.И., Поносков А.В. Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 8. С. 18–35.
19. Кадиев Р.И. Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Махачкала, 2000.
20. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969.
21. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М., 1986.

Дагестанский федеральный исследовательский  
центр РАН, г. Махачкала,  
Дагестанский государственный университет,  
г. Махачкала,  
Норвежский университет естественных наук,  
г. Ос, Норвегия

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.  
После доработки 07.02.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925+517.93

# НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОРОЖДЁННОГО СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2022 г. А. М. Камачкин, Д. К. Потапов, В. В. Евстафьева

Рассматривается  $n$ -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом в правой части. Решение системы при определённых условиях задаёт отображение ограниченных множеств, принадлежащих поверхностям разрыва, в себя. Получены условия существования неподвижных точек отображения, единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений. Одному типу отображения отвечает один вид периодических орбит: или с двумя точками переключения (так называемые унимодальные орбиты), или с чётным числом точек переключения, большим двух. В случае унимодальных орбит приведены примеры существования орбит различных конфигураций.

DOI: 10.31857/S0374064122040021, EDN: BZFMVK

**Введение. Постановка задачи.** В теории нелинейных колебаний основными являются задача о существовании периодических режимов в нелинейных системах и задача построения орбит решений таких систем, т.е. установление их свойств, параметров и конфигураций в фазовом пространстве. Данная работа посвящена решению этих задач для многомерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих гистерезисные нелинейности.

Рассмотрим математические модели, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) + Kf(t) \quad (1)$$

(модель неавтономной системы) и

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) \quad (2)$$

(модель автономной системы). Здесь  $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  – вектор состояний системы ( $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство),  $A$  – постоянная ненулевая  $n \times n$ -матрица с вещественными элементами,  $B$  и  $K$  – ненулевые векторы из  $\mathbb{R}^n$ ,  $F(\sigma)$  – функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями  $l_1$ ,  $l_2$  ( $l_1 < l_2$ ) и значениями выхода  $m_1$ ,  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ),  $\sigma = (\Gamma, X)$  – скалярное произведение векторов  $\Gamma$  и  $X$ , где  $\Gamma$  – заданный ненулевой вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $F(\sigma(t))$  определена при непрерывном входе  $\sigma(t)$  для  $t \geq 0$  в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [1] следующим образом: из неравенства  $\sigma(t) \leq l_1$  следует равенство  $F(\sigma) = m_1$ , из неравенства  $\sigma(t) \geq l_2$  – равенство  $F(\sigma) = m_2$ , а из неравенств  $l_1 < \sigma(t) < l_2$  ( $t_1 < t \leq t_2$ ) – равенство  $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$ .

Таким образом, функция  $F(\sigma(t))$  принимает постоянное значение на отрезке  $[t_1, t_2]$ , если либо  $\sigma(t) < l_2$  при  $t \in [t_1, t_2]$  (и тогда  $F(\sigma(t_1)) = m_1$ ), либо  $\sigma(t) > l_1$  при  $t \in [t_1, t_2]$  (и тогда  $F(\sigma(t_1)) = m_2$ ). В приложениях функцию  $F(\sigma)$  называют *нелинейной характеристикой* системы [2, с. 43, 52]. Петля гистерезиса, описываемая в координатах  $(\sigma, F)$  уравнениями  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $F = F(\sigma(t))$ , обегается против хода часовой стрелки (см., например, рисунок в [3]). Функция  $f(t)$  описывает внешнее воздействие на систему и может быть как периодической (т.е.  $f(t) = f(t + T)$  для всех  $t \geq 0$  и некоторого  $T > 0$ ), так и непериодической, но в любом случае полагаем, что она непрерывная и ограниченная, т.е.  $f \in C([0, \infty))$  и существует постоянная  $M > 0$  такая, что  $|f(t)| \leq M$  для любого  $t \geq 0$ .



Из последних работ по исследованию нелинейных систем, замкнутых обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, отметим работы [4–15].

Уравнение  $(\Gamma, X) = l_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяет в пространстве  $\mathbb{R}^n$  гиперплоскость, которую называют *поверхностью разрыва* [16] или *поверхностью переключения*, так как на ней происходит склеивание кусков фазовых траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_i + Kf(t), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

или

$$\dot{X} = AX + Bm_i, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Таким образом, в силу решения систем (1) или (2) происходит отображение поверхностей переключения в себя или, по крайней мере, некоторого подмножества поверхности переключения в неё же. Обозначим поверхность переключения  $(\Gamma, X) = l_i$  через  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Допустим нам удалось (аналитически или численно) найти хотя бы одну неподвижную точку такого отображения, т.е. построить соответствующую ей замкнутую траекторию в фазовом пространстве. Тогда возникают вопросы: является ли эта точка единственной или нет, сколько неподвижных точек может иметь система (1) или (2), другими словами, сколько периодических режимов существует у таких систем и при каких условиях на их параметры. Кроме того, важно выяснить конфигурации этих периодических режимов. Будем считать, что две орбиты имеют различные конфигурации, если одна орбита расположена в множестве

$$\{X \in \mathbb{R}^n : l_1 \leq (\Gamma, X) \leq l_2\},$$

т.е. не выходит из зоны неоднозначности релейного гистерезиса в фазовом пространстве, а другая орбита имеет части, принадлежащие множествам

$$\{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) \leq l_1\} \quad \text{и/или} \quad \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) \geq l_2\}.$$

Если рассматривать  $u = F(\sigma)$  в качестве функции управления, то системы (1) или (2) описывают систему автоматического управления [17, с. 8–10], которая часто используется в приложениях и для которой сформулированные выше вопросы имеют первостепенное значение.

В силу сложной динамики, описываемой моделями (1) и (2), к настоящему времени окончательные ответы на поставленные вопросы не известны и исчерпывающие как аналитические, так и численные методы исследования таких систем не разработаны.

Вопросы точности и достоверности математического моделирования всегда актуальны. Практика требует применения таких моделей и методов решения, которые могут гарантировать надёжность результатов. Абсолютную надёжность обеспечивают аналитические методы. Применение только численных методов к системам вида (1) и (2) выявило присущие таким методам недостатки, к которым, в первую очередь, относится невозможность надёжной оценки расчётных результатов.

В данной статье для аналитического исследования нелинейных динамических систем вида (1) и (2) применяются топологические методы и результаты, связанные с понятием алгебраического числа неподвижных точек отображения [18–23].

**1. Общая характеристика решений.** В фазовом пространстве траектория любого решения систем (1) или (2) составлена из кусков траекторий систем (3) или (4) соответственно, склеивание которых происходит по непрерывности в точках, лежащих на поверхностях переключения. Периодическому решению систем (1) или (2) соответствует замкнутая ограниченная фазовая траектория. Очевидно, что точка переключения  $X^* \in L_i$  периодического решения удовлетворяет равенствам

$$X^* = X(t_0) = X(t_0 + T_r), \quad (\Gamma, X^*) = l_i,$$

где  $t_0$  – начальный момент времени,  $T_r$  – период времени, за который изображающая точка решения возвращается в начальную точку  $X^*$ .

Пусть система (1) или (2) не имеет положений равновесия. Тогда “рабочими” режимами системы будем считать её стационарные колебания, которым соответствуют в фазовом пространстве периодические траектории, составленные из конечного числа кусков траекторий в силу разных систем вида (3) или (4) соответственно. Число кусков траекторий совпадает с числом точек переключения за период  $T_r$ .

Рассмотрим условия на параметры системы, при которых стационарные колебания существуют, и дадим геометрическую интерпретацию этим условиям. Пусть все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части. Тогда на поверхностях переключения можно выделить два выпуклых компактных множества, которые в силу решения системы (1) или (2) отображаются в себя (подробнее см. [15]). Это нетрудно показать с помощью некоторой положительно определённой квадратичной функции  $V(X)$ , поскольку нулевое решение системы  $\dot{X} = AX$  является асимптотически устойчивым. Пусть выполняется неравенство

$$\|X\| > \|A\|^{-1} \left( \max_{i=1,2} |m_i| \cdot \|B\| + M\|K\| \right) \quad (5)$$

(константа  $M$  из неравенства  $|f(t)| \leq M$ ). Тогда

$$(V(X))'_t < 0. \quad (6)$$

Уравнение вида

$$V(X) = C,$$

где  $C$  – постоянная, определяет в фазовом пространстве замкнутую поверхность. Очевидно, что существует минимальное значение  $C$  (обозначим  $\min C$ ), для которого выполняются неравенства (5) и (6). Для того чтобы поверхность  $V(X) = \min C$  пересекала поверхности переключения, необходимо, чтобы для системы (4) выполнялось равенство  $\dot{X} = 0$  в точках  $X_1 = -A^{-1}Bm_1$  и  $X_2 = -A^{-1}Bm_2$ , лежащих в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции  $F(\sigma)$ . Пересечение множества, заданного неравенством  $V(X) \leq \min C$ , с каждой поверхностью переключения даёт два выпуклых компактных множества  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_i \subset L_i$ ,  $i = 1, 2$ ), которые описываются следующей системой:

$$(\Gamma, X) = l_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\|X\| \leq \|A\|^{-1} \left( \max_{i=1,2} |m_i| \cdot \|B\| + M\|K\| \right). \quad (7)$$

Множество  $S_i$  является пересечением ограниченного замкнутого множества из  $\mathbb{R}^n$  с гиперплоскостью  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ). Следовательно, множество  $S_i$  лежит в пространстве  $\mathbb{R}^{n-1}$ . В таком пространстве ограниченные замкнутые множества компактны. Установлено [15], что изображающая точка любого решения системы (1) или (2) за конечное время попадает и остаётся в ограниченной области фазового пространства. Более того, при  $(\Gamma, B) \neq 0$  получены достаточные условия, при выполнении которых в случае существования периодического решения с  $2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) изолированными точками переключения эти точки локально непрерывно зависят от параметров  $A$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $\Gamma$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  и параметров функции  $f(t)$ . Условие изолированности точек переключения периодического решения является необходимым условием этих результатов и существенно зависит от свойств функции  $f(t)$ . Общие результаты, относящиеся к свойству изолированности точек переключения, в случае неавтономной системы (1) пока не получены, но таковые имеются для автономной системы (2) (см. [24, 25]).

Орбита *изолирована* на множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в том смысле, что в любой окрестности её точек переключения не существует точек переключения других орбит. Условие изолированности орбит на множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) тесно связано со свойством *трансверсальности*, согласно которому траектории систем вида (4) не касаются поверхностей переключения. Условия касания можно представить равенством

$$(\Gamma, AX + Bm_i) = 0 \quad \text{или} \quad (\Gamma, AX) = -m_i(\Gamma, B), \quad i = 1, 2.$$

Если  $(\Gamma, B) \neq 0$ , то в точках на поверхностях переключения нет одновременного касания в силу систем (4). Таким образом, получаем систему уравнений, которая определяет на  $L_i$  множество точек, удовлетворяющих равенству  $(\Gamma, AX) = -m_i(\Gamma, B)$ , а именно:

$$\begin{aligned}(\Gamma, X) &= l_i, \quad i = 1, 2, \\(\Gamma, AX) &= -m_i(\Gamma, B), \quad (\Gamma, B) \neq 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Следовательно, точки переключения орбиты не должны принадлежать множеству, описываемому системой (8). Последнее утверждение и есть условие трансверсальности для системы (2). Далее везде будем считать, что точки переключения не удовлетворяют системе (8).

В самом общем виде непрерывный оператор  $P$ , отображающий в силу решений системы (1) множество  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в себя, можно представить следующим образом:

$$P(X_0, T(X_0)) = e^{A(T(X_0)-t_0)} \left( X_0 + \int_{t_0}^{T(X_0)} e^{-A(\tau-t_0)} (BF(\sigma) + Kf(\tau)) d\tau \right), \tag{9}$$

где  $X_0 = X(t_0)$  – начальная точка отображения,  $X_0 \in S_i$ ;  $T(X_0)$  – время возврата изображающей точки по траектории, задаваемой системой (1), в множество  $S_i$ . Отметим, что точка  $X_0$  может как принадлежать периодическому решению, так и не принадлежать ему.

В дальнейшем будем рассматривать только систему (2). Допустим, что существует хотя бы одно периодическое решение системы (2) с  $2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) точками переключения. Пусть изображающая точка этого решения начинает своё движение в точке  $X^1 \in L_1$  в момент  $t_0 = 0$  и достигает  $L_2$  в точке  $X^2$  в момент  $t_1$  в силу системы (2) при  $m_i = m_1$ . Затем она переходит на  $L_1$  в точку  $X^3$  в момент  $t_2$  в силу системы (2) при  $m_i = m_2$ . Далее она достигает  $L_2$  в точке  $X^4$  в момент  $t_3$  в силу (2) при  $m_i = m_1$  и так далее. В момент времени  $t_{2k}$  изображающая точка возвращается на  $L_1$  в начальную точку  $X^1 = X^{2k+1}$  в силу (2) при  $m_i = m_2$ . Следовательно,  $t_{2k} = T_r$ , где  $T_r$  – период стационарных колебаний.

В этом случае условие, что для системы (4) выполняется равенство  $\dot{X} = 0$  в точке  $X_i = -A^{-1}Bm_i$  ( $i = 1, 2$ ), лежащей в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции  $F(\sigma)$ , принимает вид неравенств

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \tag{10}$$

Описанный процесс может быть формализован в виде системы равенств относительно точек и моментов переключения:

$$\begin{aligned}X^2 &= e^{At_1} X^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bm_1 d\tau, \quad (\Gamma, X^1) = l_1, \\X^3 &= e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} Bm_2 d\tau, \quad (\Gamma, X^2) = l_2, \\X^4 &= e^{A(t_3-t_2)} X^3 + \int_{t_2}^{t_3} e^{A(t_3-\tau)} Bm_1 d\tau, \quad (\Gamma, X^3) = l_1, \\&\dots \\X^{2k+1} &= X^1 = e^{A(t_{2k}-t_{2k-1})} X^{2k} + \int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k}-\tau)} Bm_2 d\tau, \quad (\Gamma, X^{2k}) = l_2.\end{aligned}\tag{11}$$

Аналогично можно описать процесс отображения множества  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в себя в силу систем (4) для любого  $k \in \mathbb{N}$ , не полагая, что точка  $X^j$ ,  $j = 1, 2k+1$ , принадлежит периодическому решению. Тогда в системе (11) моменты переключения  $t_1, t_2, \dots, t_{2k}$  можно рассматривать как функции начальных точек  $X^1, X^2, \dots, X^{2k}$  соответственно. Таким образом, для любого  $k \in \mathbb{N}$  получаем отображение с оператором вида (9). Если отображение  $S_i$  в себя имеет два перехода в силу систем (4), то обозначим оператор  $P$  через  $P_2$ , если четыре перехода, то через  $P_4$  и т.д. В результате приходим к семейству операторов  $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}_{k=1}^\infty$ , каждый из которых соответствует отображению множества  $S_i$  в себя.

Для того чтобы воспользоваться топологическими результатами, покажем, что семейство  $\mathcal{P}$  – это семейство определённых на некотором пространстве непрерывных вещественных функций, которое решает задачу топологического вложения пространства в куб [19, с. 157]. Кубы играют роль стандартных пространств, и мы хотим описать топологическое пространство, гомеоморфное подпространствам кубов. Далее понадобится лемма о вложении [19, с. 158], приведём её формулировку в обозначениях данной статьи.

**Лемма.** Пусть  $\mathcal{P}$  – семейство, произвольный элемент которого  $P_{2k}$  есть непрерывное отображение топологического пространства  $Y$  в некоторое топологическое пространство  $Y_{P_{2k}}$ . Тогда

- 1) отображение вычисления  $e$  является непрерывным отображением пространства  $Y$  в пространство произведения  $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$ ;
- 2) если семейство  $\mathcal{P}$  различает точки и замкнутые множества, то отображение  $e$  является открытым отображением пространства  $Y$  на пространство  $e[Y]$ ;
- 3) отображение  $e$  взаимно однозначно в том и только в том случае, когда семейство  $\mathcal{P}$  различает точки.

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть система (2) удовлетворяет предположениям, сделанным относительно её правой части, собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части,  $(\Gamma, B) \neq 0$  и выполнены неравенства (10). Тогда семейство операторов  $\mathcal{P}$  удовлетворяет лемме.

**Доказательство.** Семейство  $\mathcal{P}$  – это семейство отображений, определённых на одном и том же ограниченном замкнутом множестве  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , из пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  со значениями в этом же множестве. Пространство значений отображения  $P_{2k} \in \mathcal{P}$  обозначим через  $Y_{P_{2k}}$ . Тогда множество  $S_i$  отображается в произведение  $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$ , т.е. точка  $X \in S_i$  переходит при этом отображении в элемент произведения,  $P_{2k}$ -я координата которого и есть значение функции  $P_{2k}$  (это так называемое отображение вычисления  $e$ ). Если  $k = 1$ , то  $P_2$  – отображение множества  $S_i$  в себя с двумя переходами. При  $k \geq 2$  получаем последовательность отображений  $\{P_{2k}\}_{k=2}^\infty$ , являющихся последовательными суперпозициями непрерывных отображений вида  $P_2(X)$ . Следовательно, функция  $e(X)$  является непрерывным отображением  $S_i$  в пространство произведения  $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$ . Утверждение 1) леммы справедливо.

Семейство  $\mathcal{P}$  отображений множества  $S_i$  различает точки, т.е. для каждой пары различных точек  $X'$  и  $X''$  найдётся элемент  $P_{2k} \in \mathcal{P}$  такой, что  $P_{2k}(X') \neq P_{2k}(X'')$ . Это очевидно, например, при  $k = 1$ . Каждое отображение из семейства  $\mathcal{P}$  обладает тем свойством, что для любого замкнутого подмножества  $S \subset S_i$  и каждой точки  $X \in S_i \setminus S$  значение  $P_{2k}(X)$  не принадлежит замыканию множества  $P_{2k}(S)$ . Действительно, отображение  $P_{2k}$  переводит каждое замкнутое подмножество  $S \subset S_i$  в замкнутое ограниченное множество  $P_{2k}(S)$ . Между множествами  $S$  и  $P_{2k}(S)$  имеет место взаимно однозначное соответствие. Пусть  $X \in S_i \setminus S$ . Если  $P_{2k}(X) \in P_{2k}(S)$ , то точка  $X$  должна принадлежать множеству  $S$ , что противоречит включению  $X \in S_i \setminus S$ . Следовательно, семейство  $\mathcal{P}$  различает точки и замкнутые множества. Утверждение 2) леммы выполнено. Из утверждения 2) леммы следует, что отображение  $e(X)$  взаимно однозначно (см. утверждение 3) леммы). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Лемма о вложении утверждает, что отображение вычисления  $e(X)$  является гомеоморфизмом.

**2. Неподвижные точки отображения.** Как и в работе [23], исходная задача свелась к задаче существования неподвижных точек соответствующего отображения. Далее перейдём к нахождению условий существования неподвижных точек отображения  $e(X)$ . Снача-

ла рассмотрим примеры исследования фазового пространства систем вида (2) для отображения  $P_2(X)$ . Исследования в следующих далее примерах проведены численно.

Система уравнений (11) при  $k = 1$  принимает вид

$$X^2 = e^{At_1} X^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau, \quad X^3 = X^1 = e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau, \\ (\Gamma, X^i) = l_i, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

**Пример 1.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \\ l_1 = -1, \quad l_2 = 1, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 1.$$

Петля гистерезиса симметричная.

Проверим выполнение условий теоремы 1. Матрица  $A$  имеет собственные числа  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$  ( $i$  – мнимая единица) с отрицательными вещественными частями,  $(\Gamma, B) = -16/3 \neq 0$ . Точка  $X_j = -A^{-1}Bm_j$  ( $j = 1, 2$ ) лежит в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции  $F(\sigma)$ , так как выполняются неравенства (10). Действительно,  $-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) = -272/101 < -1 = l_1$  и  $-(\Gamma, A^{-1}Bm_1) = 272/101 > 1 = l_2$ . Значит, изображающая точка решения за конечное время попадет в ограниченную область фазового пространства и останется в ней.

Чтобы найти моменты и точки переключения орбит с двумя переходами, решаем систему (12). Получаем моменты  $t_1 \approx 0.7027$ ,  $t_2 = 2t_1$  и точки переключения первой орбиты (далее – орбиты I)  $X_I^1 = -X_I^2 \approx (0.1438, 0.0059, 0.6752)^T$ , а также моменты  $t_1 \approx 0.2452$ ,  $t_2 = 2t_1$  и точки переключения второй орбиты (далее – орбиты II)  $X_{II}^1 = -X_{II}^2 \approx (0.6469, 0.3651, 0.2440)^T$ . Здесь и ниже символом  $^T$  обозначается операция транспонирования.

Обе унимодальные орбиты симметричные, орбита I асимптотически устойчивая, орбита II неустойчивая. Действительно, если взять начальную точку из окрестности орбиты II, то при  $t \rightarrow \infty$  решение, соответствующее орбите II, стремится к решению, соответствующему орбите I. Обе орбиты являются изолированными (выполняется условие трансверсальности) и не выходят за пределы зоны неоднозначности. На множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в некоторых окрестностях точек  $X_I^i$ ,  $X_{II}^i$  меняется направление поля касательных.

Отметим, что пример 1 рассматривался в [25], но в данной работе исследование проведено полнее, с большей степенью детализации.

В следующих примерах условия теоремы 1 также выполняются, упоминание о них далее опускаем.

**Пример 2.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.13 \\ 2.9 \end{pmatrix}, \\ l_1 = -3.5, \quad l_2 = 3.5, \quad m_1 = -1.4024, \quad m_2 = 1.4024.$$

Петля гистерезиса симметричная. Для орбиты I находим точки переключения

$$X_I^1 = -X_I^2 \approx (1.798912, -1.951576, -1.294381)^T,$$

а для орбиты II ими будут точки

$$X_{II}^1 = -X_{II}^2 \approx (-1.992098, -4.359154, -1.402307)^T.$$

Точки переключения каждой из двух периодических орбит являются симметричными в фазовом пространстве. В окрестностях этих точек на поверхностях переключения поле касательных не перпендикулярно вектору  $\Gamma$ , т.е. условие трансверсальности выполняется. Орбиты асимптотически устойчивые, не выходят из зоны неоднозначности и на каждом множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в некоторых окрестностях точек  $X_I^i$ ,  $X_{II}^i$  меняется направление поля касательных.

**Пример 3.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1.15 \\ -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1, \quad l_2 = 2, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 1.$$

Петля гистерезиса несимметричная. Орбита – с двумя несимметричными точками переключения

$$X^1 \approx (-0.1724, 1.3361, 0.4502, 0.4722)^T \quad \text{и} \quad X^2 \approx (1.8114, 0.1384, -0.9452, -0.7440)^T.$$

Орбита не выходит из зоны неоднозначности и является асимптотически устойчивой. На множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в некоторой окрестности точки  $X^i$  меняется направление поля касательных.

**Пример 4.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1.5, \quad l_2 = 1.5, \quad m_1 = -10, \quad m_2 = 10.$$

Петля гистерезиса симметричная. Орбита содержит симметричные точки переключения

$$X^1 = -X^2 \approx (10.2201, -1.5000, 0.4810)^T.$$

Орбита симметричная, асимптотически устойчивая и с симметричным выходом из зоны неоднозначности. При этом на множестве  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в некоторой окрестности точки  $X^i$  не меняется направление поля касательных. Именно, оба вектора  $AX^1 + Bm_2$  и  $AX^1 + Bm_1$  направлены в противоположную сторону по сравнению с вектором  $\Gamma$  относительно  $S_1$ , а векторы  $AX^2 + Bm_2$  и  $AX^2 + Bm_1$ , наоборот, направлены в одну сторону с вектором  $\Gamma$  относительно  $S_2$ .

**Пример 5.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1, \quad l_2 = 1, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 2.$$

Петля гистерезиса симметричная. Орбита – с двумя точками переключения

$$X^1 = -X^2 \approx (0.0673, 0.0589, 0.4937)^T.$$

Орбита симметричная, без выхода из зоны неоднозначности и асимптотически устойчивая, т.е. эта орбита имеет такие же свойства, что и орбиты в примере 2.

Аналогичные исследования проводились авторами и других работ. Например, в работе [24] рассматривались системы с симметричной петлёй гистерезиса: в одном примере указаны две

изолированные симметричные орбиты с разными периодами, а в другом – две орбиты с равными периодами и перестановочными точками переключения.

Естественно возникают вопросы: во-первых, если по крайней мере одно периодическое решение найдено, то как искать другое решение; во-вторых, если другое периодическое решение существует, будет ли отличаться его конфигурация от конфигурации первого решения. Далее дадим ответы на поставленные вопросы. Справедлива

**Теорема 2.** Пусть для системы (2) выполнены условия теоремы 1. Тогда отображение  $P_2(X)$  имеет хотя бы одну неподвижную точку  $X_{fp}$ . Если, кроме того,  $n \geq 3$  и для отображения  $P_2(X)$  отлично от нуля число  $\Lambda(P_2)$ , определяемое равенством

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \text{sign } J_{P_2}(X_{fp}),$$

где  $J_{P_2}(X_{fp})$  – якобиан отображения  $P_2(X)$ , вычисленный в точке  $X_{fp}$ , то существует по крайней мере ещё одна неподвижная точка  $X$ , отличная от  $X_{fp}$ . В противном случае, когда  $\Lambda(P_2) = 0$ , точка  $X_{fp}$  единственная.

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы 1 получаем два выпуклых компактных множества  $S_1$  и  $S_2$  [15]. Каждое множество  $S_i$  лежит на гиперплоскости  $L_i$ , которая, напомним, определяется уравнением  $(\Gamma, X) = l_i$ ,  $i = 1, 2$ . Эти множества описываются системой (7). Каждое множество  $S_i$  в силу фазовых траекторий непрерывно отображается в себя. Следовательно, выполнены условия теоремы Шаудера [26] о существовании хотя бы одной неподвижной точки. Таким образом, отображение  $P_2(X)$  имеет на множестве  $S_i$  неподвижную точку, если множество  $S_i$  имеет пустое пересечение со всеми множествами, которые определяются системой уравнений (8).

Если это не так, то рассмотрим непрерывное поле касательных к фазовым траекториям в точках множества  $S_i$ . Множеству  $S_i$  принадлежат точки, которые удовлетворяют одному из условий:

$$(\Gamma, AX + Bm_i) < 0, \quad (\Gamma, AX + Bm_i) = 0, \quad (\Gamma, AX + Bm_i) > 0.$$

Однако  $(\Gamma, B) \neq 0$ , поэтому равенства  $(\Gamma, AX + Bm_1) = 0$  и  $(\Gamma, AX + Bm_2) = 0$  не могут иметь место одновременно в какой-либо точке на одном множестве  $S_i \subset L_i$ . Предположим для определённости, что если фазовая траектория системы (4) с  $i = 1$  пересекает последовательно поверхности  $L_1$  и  $L_2$ , то выполняется неравенство  $(\Gamma, AX + Bm_1) > 0$ . Тогда для траектории системы (4) с  $i = 2$ , которая пересекает последовательно поверхности  $L_2$  и  $L_1$ , имеет место неравенство  $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$ . Рассмотрим, например, множество  $S_2$ . Ему обязательно принадлежат точки  $X$ , в которых  $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$ , а также могут принадлежать точки, в которых  $(\Gamma, AX + Bm_2) \geq 0$ . Пересечение множества точек  $X$ , для которых  $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$ , с поверхностью  $L_2$  и множеством  $S_2$  также является выпуклым множеством. Обозначим его  $S_2^-$ . Аналогично, при условиях  $(\Gamma, AX + Bm_2) > 0$  и  $(\Gamma, AX + Bm_2) = 0$  определим соответственно выпуклые множества  $S_2^+$  и  $S_2^0$ . Очевидно, что для множества  $S_1$  можно построить множества  $S_1^-$ ,  $S_1^+$  и  $S_1^0$  с аналогичными свойствами.

Решение  $X(t)$  системы (2) отображает замкнутое выпуклое множество  $\hat{S}_2 = S_2^- \cup S_2^0$  в себя и является функцией, непрерывной по  $X_0 \in \hat{S}_2$ , где  $X_0 = X(t_0)$ . Точно так же функция  $X(t)$  ведёт себя и на множестве  $\hat{S}_1 = S_1^+ \cup S_1^0$ , которое является выпуклым замкнутым множеством. Это решение  $X(t)$  является конкретной реализацией оператора (9) в случае, когда фазовая траектория состоит только из двух кусков траекторий систем (4). Ранее такое отображение мы обозначили через  $P_2(X)$ . Отсюда по теореме Шаудера следует существование по крайней мере одной неподвижной точки отображения  $P_2(X)$  и, следовательно, периодического решения системы (2) с двумя точками переключения, расположенными на гиперплоскостях  $L_1$  и  $L_2$ . Первое утверждение доказано.

Итак, мы установили, что в любом случае отображение  $P_2(X)$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $X_{fp}$ . Выясним, когда на указанных выше множествах могут существовать другие неподвижные точки отображения  $P_2(X)$ .

Например, множества  $S_2$  и  $\hat{S}_2$  обладают одинаковыми свойствами, а именно, являются ограниченными замкнутыми выпуклыми множествами из пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Эти множества можно рассматривать как полные метрические пространства размерности  $n - 1$  (см. [27,

с. 64]). Воспользуемся известным из топологии [20, с. 252] фактом: пространство  $\mathbb{R}^{n-1}$  с выколотой точкой гомотопически эквивалентно сфере  $S^{n-2}$ . Здесь размерности соответствуют поставленной задаче. Рассмотрим случай  $n \geq 3$ . Пусть известна неподвижная точка  $X_{fp} \in S_2$  (или  $\hat{S}_2$ ). Тогда множество с выколотой точкой  $S_2 \setminus \{X_{fp}\}$  является гомотопически эквивалентным сфере  $S^{n-2}$ . Теперь продолжим рассмотрение отображения на сфере  $S^{n-2}$ . Согласно теореме Лефшеца о неподвижной точке (см., например, [18, с. 419] или [21, с. 257]), если отображение  $f: X \rightarrow X$ , где  $X$  – некоторое пространство, имеет ненулевое число Лефшеца  $\Lambda(f)$ , то  $f$  имеет неподвижную точку. Другими словами, неравенство  $\Lambda(f) \neq 0$  является достаточным условием существования неподвижной точки. По теореме Лефшеца для всякого отображения  $f: S^n \rightarrow S^n$  имеет место равенство

$$\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f, \quad (13)$$

где  $\deg f$  – топологическая степень непрерывного отображения  $f$ . Как известно, целое число  $\deg f$  однозначно определено. Следовательно, применительно к поставленной задаче из формулы (13) следует, что

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \deg P_2(X)$$

и, если  $\Lambda(P_2) \neq 0$ , то существует ещё одна неподвижная точка отображения  $P_2(X)$  на множестве  $S_2 \setminus \{X_{fp}\}$  (или  $\hat{S}_2 \setminus \{X_{fp}\}$ ).

Известно [22, с. 94–95], что степень отображения определяется знаком якобиана отображения. В нашем случае якобиан  $J_{P_2}(X)$  отображения  $P_2(X)$  отличен от нуля в каждой точке  $S_i$ . Множество  $S_i$  (как и  $\hat{S}_i$ ) не только замкнуто, но и связно. Следовательно, степень отображения  $P_2(X)$  будет одинаковой на всём множестве. Тогда достаточно вычислить  $J_{P_2}(X_{fp})$ . Окончательно получаем, что число Лефшеца вычисляется по формуле

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \text{sign } J_{P_2}(X_{fp}) \quad (14)$$

и, если оно не равно нулю, то существует по крайней мере ещё одна неподвижная точка  $X$  отображения  $P_2$  и  $X \neq X_{fp}$ . Теорема доказана.

**Замечание 2.** Процесс поиска неподвижных точек способом, изложенным в доказательстве теоремы 2, может быть продолжен.

**Замечание 3.** Из формулы (14) вытекает, что если  $\deg P_2(X) = \text{sign } J_{P_2}(X_{fp}) = 1$  и  $n = 3$ , то  $\Lambda(P_2) = 0$  и не существует других неподвижных точек, отличных от  $X_{fp}$ . Однако если  $\deg P_2(X) = 1$  и  $n = 4$ , то  $\Lambda(P_2) = 2 \neq 0$ , а это означает, что существует неподвижная точка  $X$ , отличная от  $X_{fp}$ .

**Замечание 4.** Ниже в формулировке следствия 1 под автоколебанием понимается орбитально асимптотически устойчивая замкнутая фазовая траектория, состоящая из двух кусков в силу разных систем (4).

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и равенство  $A^T \Gamma = \alpha \Gamma$ , где постоянная  $\alpha \neq 0$ ,  $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$  ( $k \leq n$ ),  $\Gamma_k$  – собственный вектор матрицы  $A^T$ , который отвечает вещественному собственному значению  $\alpha$  матрицы  $A$ . Тогда отображение  $P_2(X)$  имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует автоколебание с областью притяжения, совпадающей со всем фазовым пространством.

**Доказательство.** Умножим уравнение (2) слева на вектор  $\Gamma$ . Получим

$$\dot{\sigma} = (\Gamma, AX) + (\Gamma, B)F(\sigma) = (A^T \Gamma, X) + (\Gamma, B)F(\sigma).$$

Если  $A^T \Gamma = \alpha \Gamma$ , то приходим к уравнению

$$\dot{\sigma} = \alpha \sigma(t) + (\Gamma, B)F(\sigma) \quad (15)$$

относительно функции  $\sigma(t)$ . Так как  $\alpha < 0$  (по предположению теоремы 1 все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части), то уравнение (15) имеет



периодическое решение. Отсюда следует, что периодическое решение системы (2) имеет траекторию, не выходящую из зоны неоднозначности функции  $F(\sigma)$ . При этом единственность такого решения не гарантирована.

Возьмём две точки  $X_0^1$  и  $X_0^2$  в множестве  $\hat{S}_1$  (или  $\hat{S}_2$ ), и пусть  $X_0^1$  принадлежит периодической траектории. Поскольку траектории, определяемые уравнениями (4), имеют ограниченную кривизну, построим гиперплоскость  $(\Gamma, X) = l$  для  $l \in (l_1, l_2)$  так, что точки пересечения выходящих из  $X_0^1$  и  $X_0^2$  траекторий с  $(\Gamma, X) = l$  можно представить следующим образом:

$$\hat{X}^1 = X_0^1 + t_1 A X_0^1 + o(t_1) \quad \text{и} \quad \hat{X}^2 = X_0^2 + t_2 A X_0^2 + o(t_2).$$

Примем  $t_2$  за текущее время  $t$ . Тогда величина  $t_1$  зависит от  $t$ , т.е.

$$t_1 = (\Gamma, A X_0^2)(\Gamma, A X_0^1)^{-1} t = \omega t.$$

Введём расстояние между точками  $\hat{X}^1$  и  $\hat{X}^2$  равенством

$$\rho(\hat{X}^1, \hat{X}^2) = (\hat{X}^1(\omega t) - \hat{X}^2(t))^T V (\hat{X}^1(\omega t) - \hat{X}^2(t)),$$

где  $V$  – некоторая симметричная положительно определённая матрица.

Рассмотрим на  $S_1$  (или  $S_2$ ), т.е. при  $t = 0$ , производную

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = (\Delta X)^T (W + \dot{V}) \Delta X + 2(\omega - 1)(X_0^1)^T A^T V \Delta X, \quad (16)$$

где  $\Delta X = X_0^1 - X_0^2$ ,  $W = A^T V + V A$ . Аналогично  $\dot{\rho}$  можно найти на любой гиперплоскости  $(\Gamma, X) = l$ , где  $l \in (l_1, l_2)$ . Если в качестве текущего времени взять  $t_1$ , то в равенстве (16) следует  $\omega - 1$  заменить на  $1 - \omega^{-1}$ , а  $X_0^1$  на вектор  $X_0^2$ . При условии, что  $A^T \Gamma = \alpha \Gamma$ , получаем

$$\dot{\rho} = (\Delta X)^T (W + \dot{V}) \Delta X.$$

Так как все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части, то существует постоянная положительно определённая матрица  $V$  такая, что  $\dot{\rho} < 0$ . Геометрически это означает, что по любому направлению, ортогональному вектору  $\Gamma$ , решение исходной системы осуществляет сжатие относительно траектории периодического решения. Следствие доказано.

**3. Степень и якобиан отображения.** В доказательстве теоремы 2 мы использовали понятие степени отображения. Степень отображения зависит от знака якобиана отображения. Имеет место

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для вычисления степени отображения  $P_2(X)$  достаточно определить знак якобиана этого отображения хотя бы в одной точке множества  $\hat{S}_1$  (или  $\hat{S}_2$ ).

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы 2 для  $X \in \hat{S}_1$  (или  $X \in \hat{S}_2$ ) исследуем якобиан  $J_{P_2}(X)$ . Рассмотрим отображение  $P_2(X)$  в виде (12). Время  $t_1$  перехода с  $L_1$  на  $L_2$  зависит от выбранной начальной точки  $X^1$ . В свою очередь, время  $t_2$  возврата на  $L_1$  зависит от точки  $X^2 = X(t_1)$ . Таким образом, время  $t_1$  является функцией точки  $X^1$ .

Первое уравнение системы (11) представим в виде

$$X^2 = X^1 + \int_0^{t_1} (A X(\tau) + B m_1) d\tau, \quad (17)$$

где  $t_1 = t_1(X^1)$ . Из равенства (17) следует, что

$$l_2 = l_1 + \int_0^{t_1} (\Gamma, A X(\tau) + B m_1) d\tau = l_1 + (\Gamma, B) m_1 t_1 + \int_0^{t_1} (\Gamma, A X(\tau)) d\tau. \quad (18)$$

Продифференцируем (18) по параметру  $X$ . Получим

$$0 = (\Gamma, B)m_1(t_1)'_X + \int_0^{t_1} A^T \Gamma d\tau + (t_1)'_X \cdot (\Gamma, AX(t_1)).$$

При этом  $X(t_1) = X^2 \in L_2$ , т.е.

$$0 = (\Gamma, B)m_1(t_1)'_X + A^T \Gamma t_1 + (t_1)'_X (\Gamma, AX^2).$$

Отсюда выражаем вектор-строку  $(t_1)'_X$ . Имеем

$$(t_1)'_X = -\frac{(A^T \Gamma)^T t_1}{(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)}. \quad (19)$$

Эта производная существует, если

$$(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2) \neq 0 \quad \text{для любых } X^2 \in L_2.$$

Последнее выражение равно нулю, когда либо  $X^2 = -A^{-1}Bm_1$ , либо  $(\Gamma, AX^2 + Bm_1) = 0$ , но эти условия мы ранее исключили.

Теперь второе уравнение системы (11) представим в виде

$$X^1 = X^2 + \int_{t_1}^{t_2} (AX(\tau) + Bm_2) d\tau.$$

Тогда

$$l_1 = l_2 + \int_{t_1}^{t_2} ((\Gamma, AX(\tau)) + (\Gamma, B)m_2) d\tau = l_2 + (\Gamma, B)m_2(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (\Gamma, AX(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

Продифференцируем (20) по параметру  $X$ . Получим

$$0 = (\Gamma, B)m_2((t_2)'_X - (t_1)'_X) + A^T \Gamma(t_2 - t_1) + (t_2)'_X (\Gamma, AX^1) - (t_1)'_X (\Gamma, AX^2),$$

где  $X^1 = X(t_2)$ ,  $X^2 = X(t_1)$ . Откуда, учитывая равенство (19), находим

$$(t_2)'_X = -\frac{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^2)}{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)} \frac{(A^T \Gamma)^T t_1}{(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)} - \frac{(A^T \Gamma)^T (t_2 - t_1)}{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)}. \quad (21)$$

Выражения  $(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)$  и  $(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)$  в формуле (21) не могут обращаться в нуль в силу сделанных ранее предположений, в том числе предположения о трансверсальности траекторий. Функции  $t_1(X)$  и  $t_2(X)$  являются непрерывными как для  $X \in \hat{S}_1$ , так и для  $X \in \hat{S}_2$ . Следовательно, функции  $(t_1)'_X$  и  $(t_2)'_X$  также являются непрерывными на этих множествах. Действительно, мы рассматривали пространственные окрестности точек из множества  $\hat{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ), но всё остаётся в силе, если начальный вектор  $X$  меняется только на множестве  $\hat{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Найдём якобиан отображения  $P_2(X)$ , заданного системой уравнений (11). Подставим первое уравнение во второе. Получим

$$X^1 = e^{A(t_2-t_1)} \left( e^{At_1} X^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bm_1 d\tau \right) + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} Bm_2 d\tau. \quad (22)$$

Обозначим  $X^1$  через  $X$ . После интегрирования выражений в представлении (22) приходим к равенству

$$X = e^{At_2}X + e^{A(t_2-t_1)}(-A^{-1}Bm_1 + A^{-1}e^{At_1}Bm_1) + (-A^{-1}Bm_2 + A^{-1}e^{A(t_2-t_1)}Bm_2),$$

откуда

$$X = -A^{-1}Bm_2 + e^{At_2}(X + A^{-1}Bm_1) + e^{A(t_2-t_1)}A^{-1}B(m_2 - m_1). \quad (23)$$

Обозначим правую часть равенства (23) через  $G(X)$  (это вектор-функция) и найдём её якобиан. Полная производная функции  $G(X)$  имеет вид

$$G'(X) = (e^{At_2})'_X(X + A^{-1}Bm_1) + e^{At_2} + (e^{A(t_2-t_1)})'_XA^{-1}B(m_2 - m_1). \quad (24)$$

Воспользуемся формулами (19) и (21) для  $(t_1)'_X$  и  $(t_2)'_X$  соответственно. После подстановки их в (24) будем иметь

$$\begin{aligned} G'(X) = & e^{At_2} - Ae^{At_2} \frac{(\Gamma, B)(m_2 - m_1)t_1 + ((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))t_2}{((\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1))((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))} (A^T \Gamma)^T (X + A^{-1}Bm_1) + \\ & + Ae^{A(t_2-t_1)} \frac{((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^1))t_1 - ((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))t_2}{((\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1))((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))} (A^T \Gamma)^T A^{-1}B(m_2 - m_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно,

$$J_{P_2}(X) = \det G'(X).$$

Виртуальные особые точки системы (2) находятся вне зоны неоднозначности и условие трансверсальности выполняется, поэтому  $J_{P_2}(X) \neq 0$  в каждой точке множества  $\hat{S}_1$  (аналогично для  $\hat{S}_2$ ).

Как отмечалось выше, степень отображения зависит от знака якобиана  $J_{P_2}(X)$ . Тогда в силу связности и замкнутости  $\hat{S}_1$  (или  $\hat{S}_2$ ) заключаем, что степень отображения одинакова на всём множестве. Значит, чтобы найти степень  $\deg P_2(X)$  отображения достаточно определить знак  $J_{P_2}(X)$  хотя бы в одной точке множества  $\hat{S}_1$  (или  $\hat{S}_2$ ). Это мы и сделали в доказательстве теоремы 2, вычислив  $\text{sign } J_{P_2}(X)$  в неподвижной точке  $X_{fp}$ . Теорема доказана.

**Замечание 5.** Чтобы вычислить  $\text{sign } J_{P_2}(X_{fp})$ , следует в представление (25) вместо  $X$  и  $X^1$  подставить  $X_{fp}$ , а  $X^2$  заменить согласно первой формуле в (11). Это означает, что нам должны быть известны точки переключения  $X^1$  и  $X^2$  периодической орбиты, а также моменты переключения  $t_1$  и  $t_2$ .

**Следствие 2.** Достаточным условием отсутствия неподвижных точек отображения  $P_2(X)$  является условие  $(X, G(X)) = 0$  для любого  $X \in \hat{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Доказательство.** Если в некоторой точке  $X \in \hat{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ) выполняется равенство  $(X, G(X)) = 0$ , то  $G(X) \neq X$ . Отсюда следует отсутствие неподвижной точки  $X$ . Докажем это утверждение от противного. Пусть  $X$  – неподвижная точка. Тогда  $G(X) = X$ . Отсюда вытекает, что  $(X, G(X)) = (X, X) \neq 0$  при любом  $X \neq 0$ . Пришли к противоречию. Следствие доказано.

Рассмотрим вопрос о существовании неподвижных точек отображения  $P_{2k}(X)$  при  $k > 1$ . Справедлива

**Теорема 4.** Пусть для системы (2) с  $n \geq 3$  выполнены условия теоремы 1, отображение  $P_2(X)$  имеет единственную неподвижную точку  $X_{fp}$  и для отображения  $P_4(X)$  отлично от нуля выражение

$$\Lambda(P_4) = 1 + (-1)^{n-2} \text{sign } J_{P_4}(X_{fp}),$$

где  $J_{P_4}(X_{fp})$  – якобиан отображения  $P_4(X)$ , вычисленный в точке  $X_{fp}$ . Тогда существует по крайней мере одна неподвижная точка  $X \neq X_{fp}$  отображения  $P_4(X)$ . Более того, если

$\Lambda(P_4) = 0$ , то отображение  $P_4(X)$  не имеет неподвижных точек, отличных от  $X_{fp}$ , и следует рассматривать отображение  $P_6(X)$  и т.д.

**Доказательство.** Пусть  $X = X_{fp}$  – единственная неподвижная точка отображения  $P_2(X)$  и число  $\Lambda(P_4)$  не равно нулю. Тогда с точностью до обозначений можно повторить ту часть доказательства теоремы 2, в которой установлено достаточное условие существования второй неподвижной точки отображения  $P_2(X)$ , если заменить в доказательстве отображение  $P_2(X)$  на отображение  $P_4(X)$ .

Далее рассмотрим отображение  $P_{2k}(X)$  для  $k = 3$ . Ранее мы установили, что существуют единственные неподвижные точки для отображений  $P_2(X)$  и  $P_4(X)$ , поэтому для  $P_6(X)$  строим новое множество, которое не содержит эти точки, но является связным замкнутым выпуклым и лежит в  $\hat{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Для  $k > 3$  построения следует продолжить по аналогии. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 4 описан процесс последовательного поиска неподвижных точек отображения  $P_{2k}(X)$ , где  $k > 1$ . Ниже приведём численный пример, иллюстрирующий, что отображение  $P_{2k}(X)$  при  $k > 1$  может иметь несовпадающие неподвижные точки, которые также не совпадают с неподвижными точками отображения  $P_2(X)$ .

**Пример 6.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1.000 & 0.999 & -0.045 \\ -0.999 & -0.004 & -0.089 \\ -0.045 & -0.089 & -1.996 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.000 \\ -1.087 \\ -1.953 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9029 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -2, \quad l_2 = 5, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 4.$$

Петля гистерезиса несимметричная. Система имеет по крайней мере три несимметричные орбиты: орбита I – с 2-мя, орбита II – с 4-мя, а орбита III – с 6-ю точками переключения. При этом точки переключения орбиты II и орбиты III не совпадают между собой и с точками переключения орбиты I. Дальнейший численный поиск затруднён из-за невозможности отделить области притяжения различных периодических решений.

**Заключение.** Доказана теорема существования периодических решений (и соответственно периодических орбит в фазовом пространстве)  $n$ -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом в правой части. Установлены условия, при выполнении которых периодическое решение является единственным, и условия, при которых существует второе решение с подобной конфигурацией. Наряду с унимодальными орбитами рассмотрены решения с большим чётным числом точек переключения и приведён пример существования таких решений. В доказательствах применялась известная из алгебраической топологии теорема Лефшеца о неподвижной точке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покровский А.В. Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.
2. Петров В.В., Гордеев А.А. Нелинейные сервомеханизмы. М., 1979.
3. Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equat. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.
4. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Contr. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
5. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
6. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Contr. Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
7. Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.G. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems // Proc. Engin. 2017. V. 201. P. 578–583.

8. Евстафьева В.В. Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
9. Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В. Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информ. Проц. управ. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
10. Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П. О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
11. Евстафьева В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
12. Евстафьева В.В. Существование  $T/k$ -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
13. Евстаф'єва В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
14. Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
15. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
16. Уткин В.И., Орлов Ю.В. Системы управления с векторным реле // Автоматика и телемеханика. 2019. № 9. С. 143–155.
17. Цыткин Я.З. Релейные автоматические системы. М., 1974.
18. Лефшец С. Алгебраическая топология. М., 1949.
19. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1968.
20. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М., 1971.
21. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
22. Понтрягин Л.С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М., 1976.
23. Павленко В.Н., Потапов Д.К. Положительные решения суперлинейных эллиптических задач с разрывными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 2. С. 95–112.
24. Varigonda S., Georgiou T.T. Dynamics of relay relaxation oscillators // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46. № 1. P. 65–77.
25. Камачкин А.М. Периодические орбиты одного класса релейных свободных осцилляторов // Уч. зап. Петрозавод. гос. ун-та. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2014. № 2 (139). С. 113–117.
26. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen // Stud. Math. 1930. V. 2. № 1. P. 171–180.
27. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.

После доработки 26.03.2022 г.

Принята к публикации 21.04.2022 г.

## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА  
С НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ  
ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

© 2022 г. А. В. Липницкий

В однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра, содержащих неправильные по Ляпунову системы с квазипериодическими коэффициентами, доказано наличие неустойчивых систем.

DOI: 10.31857/S0374064122040033, EDN: BZILIN

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0 \quad (1_\mu)$$

с матрицами  $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu) \operatorname{diag} [1, -1], & 2k - 2 \leq t < 2k - 1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k - 1 \leq t < 2k, \end{cases}$  где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

и вещественным параметром  $\mu$ ; условия, которым удовлетворяют числа  $b_k \in \mathbb{R}$  и функции  $d_k(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , будут указаны ниже.

В работе [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы  $(1_\mu)$ , рассматриваемый как функция параметра  $\mu$ , положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда функции  $d_k(\cdot)$  не зависят от  $\mu$ , положительны и равномерно по  $k \in \mathbb{N}$  отделены от нуля, т.е. если выполнено условие  $d_k(\mu) \equiv d_k \geq d > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В [2] приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – произвольные числа. Положим

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := a_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Обозначим через  $X_{A_\mu}(t, s)$ ,  $t, s \geq 0$ , матрицу Коши системы  $(1_\mu)$ . Для любого  $\varphi \in \mathbb{R}$  матрицу поворота на угол  $\varphi$  по часовой стрелке обозначим через  $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

Несложно убедиться, что в случае, когда матрица  $A_\mu(\cdot)$  определяется условиями (2), для любого  $k \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $X_{A_\mu}(2^{k+1}, 0) = U(a_{k+1} - a_k)X_{A_\mu}^2(2^k, 0)$ .

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  сходится, то матрица  $A_\mu(\cdot)$  является равномерным по  $t \geq 0$  пределом последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [3–5] (см. также [6]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Предложенные в этих работах методы требуют получения оценок собственных значений и векторов матрицы Коши системы  $(1_\mu)$ . Критерий Барабанова [7] правильности линейной системы, состоящий в точности её сингулярных показателей, инициировал другой подход, состоящий в применении сингулярного представления матрицы Коши (см. формулу (5<sub>n</sub>) ниже).

В работе [2] при выполнении условий (2), в которых  $d(\mu) > 2^{20}$ , и в случае непрерывной функции  $d(\cdot)$  доказано существование такого значения параметра  $\mu \in \mathbb{R}$ , при котором соответствующая система  $(1_\mu)$  неустойчива. В настоящей работе аналогичный результат получен при любой непрерывной  $d(\mu) > 0$ .

Положим  $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$ ,  $\psi_1(\mu) := 0$ . Для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  определим рекуррентно вещественные числа  $\eta_k \geq 1$  и  $\psi_k$  следующим образом. Обозначим  $\xi_k := 2\psi_k + a_k + \mu$ . Так как  $\eta_k \geq 1$  и, следовательно,  $\operatorname{sh}(2 \ln \eta_k) \geq 0$ , найдутся единственные  $1 \leq \eta_{k+1} \in \mathbb{R}$  и  $\varphi_k \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi)$  такие, что выполнены равенства

$$\operatorname{sh} \ln \eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2 \ln \eta_k)) |\cos \xi_k|, \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_k = (\operatorname{ch}(2 \ln \eta_k)) \operatorname{ctg} \xi_k, \quad \text{если } \sin \xi_k \neq 0, \quad \text{и } \varphi_k = 0, \quad \text{если } \sin \xi_k = 0. \quad (4)$$

Наконец, полагаем  $\psi_{k+1} = \psi_k + \varphi_k/2 + \pi(1 - \operatorname{sgn} \cos \xi_k)/4$ . В дальнейшем вместо  $\xi_k$ ,  $\varphi_k$  и  $\eta_k$ , поскольку они зависят от  $\mu$ , будем также писать  $\xi_k(\mu)$ ,  $\varphi_k(\mu)$  и  $\eta_k(\mu)$  соответственно.

**Лемма 1** [2]. Для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (2) имеет место пред-  
ставление

$$Y_n := X_{A_\mu}(2^n - 1, 0) = U(\psi_n) \begin{pmatrix} \eta_n & 0 \\ 0 & \eta_n^{-1} \end{pmatrix} U(\psi_n). \quad (5_n)$$

Пусть  $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ , где  $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$  и  $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$ , обозначает прямоугольник  $\{(x, y) : \mathfrak{a} \leq x \leq \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \leq y \leq \mathfrak{d}\}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Лемма 2** [8]. Пусть  $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$  и  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) – непрерывные пути в  $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ , удовлетворяющие условиям

$$h_1(-1) = \mathfrak{a}, \quad h_1(1) = \mathfrak{b}, \quad u_2(-1) = \mathfrak{c}, \quad u_2(1) = \mathfrak{d}.$$

Тогда эти два пути пересекаются, т.е.  $h(s) = u(t)$  для некоторых  $s, t$  из  $[-1, 1]$ .

Для любого множества  $M \subset \mathbb{R}$  обозначим через  $\operatorname{int} M$  и  $\operatorname{cl} M$  соответственно его внутренность и замыкание в  $\mathbb{R}$ , а через  $C(M)$  – множество всех непрерывных функций из  $M$  в  $\mathbb{R}$  (топология в  $M$  индуцирована из  $\mathbb{R}$ ).

**Теорема.** Для любых  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и любой непрерывной функции  $d(\cdot)$  при выполнении условий (2) найдётся  $\mu \in \mathbb{R}$  такое, что система  $(1_\mu)$  неустойчива.

**Доказательство.** Обозначим  $\alpha_1 := 0$ ,  $\beta_1 := \pi$ ,  $V_1 := [0, \pi]$ ,  $\tilde{V}_1 := V_1$ ,  $\omega_1(\mu) := \mu$ ,  $\mu \in V_1$ ;  $\zeta_1(\nu) := \xi_1 \circ \omega_1^{-1}(\nu) - a_1$ ,  $\nu \in [0, \pi]$ .

Зафиксируем какое-либо  $k \in \mathbb{N}$ .

Очевидно, в случае  $k = 1$  выполняются сравнение

$$\zeta_k \circ \omega_k(\mu) \equiv (\xi_k(\mu) - a_k) \pmod{\pi}, \quad \mu \in V_k, \quad (6_k)$$

равенство

$$\zeta_k(\alpha_k) = -\pi + \zeta_k(\beta_k) \quad (7_k)$$

и включения

$$\zeta_k \in C(\tilde{V}_k), \quad (8_k)$$

$$\eta_k \circ \omega_k^{-1} \in C(\tilde{V}_k). \quad (9_k)$$

Предположим, что существуют множество  $V_k \subset \mathbb{R}$ , числа  $\alpha_k < \beta_k \in \mathbb{R}$ , биекция  $\omega_k(\cdot) : V_k \rightarrow \tilde{V}_k := [\alpha_k, \beta_k]$  и функция  $\zeta_k(\cdot) : \tilde{V}_k \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что справедливы включения  $(8_k)$ ,  $(9_k)$  и соотношения  $(6_k)$ ,  $(7_k)$ . Предположим также, что для любого  $\mu \in V_k$  справедливо неравенство

$$\operatorname{sh} \ln \eta_k(\mu) \geq \varkappa_k := (\sqrt{2})^{k-1} \min_{\mu \in [0, \pi]} \operatorname{sh} e^{d(\mu)}. \quad (10_k)$$

Пусть  $n_{k, \mu} \in \mathbb{Z}$  таково, что  $\tilde{\xi}_k(\mu) := \xi_k(\mu) + n_{k, \mu} \pi \in (-\pi/2, \pi/2]$ .

Возьмём произвольное  $\mu \in V_k$ , для которого выполняется условие

$$|\varphi_k(\mu) + \tilde{\xi}_k(\mu)| < \pi/2. \quad (11)$$

В силу соотношений (4)  $\varphi_k$  и  $\tilde{\xi}_k$  одного знака. Поэтому

$$|\varphi_k(\mu)| + |\tilde{\xi}_k(\mu)| = |\varphi_k(\mu) + \tilde{\xi}_k(\mu)| \stackrel{(11)}{<} \pi/2. \quad (12)$$

Тогда вследствие монотонного возрастания функции  $\operatorname{tg}(\cdot)$  на промежутке  $[0, \pi/2)$  имеем в случае  $\tilde{\xi}_k(\mu) \neq 0$  оценки

$$|\operatorname{tg} \varphi_k(\mu)| = \operatorname{tg} |\varphi_k(\mu)| \stackrel{(12)}{<} \operatorname{tg} (\pi/2 - |\tilde{\xi}_k(\mu)|) = \operatorname{ctg} |\tilde{\xi}_k(\mu)| = |\operatorname{ctg} \tilde{\xi}_k(\mu)|. \quad (13)$$

Таким образом, для любого  $\mu \in V_k$ , удовлетворяющего условию (11) и неравенству  $\varphi_k(\mu) \neq 0$ , справедливы неравенства

$$|\operatorname{tg} \xi_k(\mu)| \stackrel{(13)}{<} |\operatorname{ctg} \varphi_k(\mu)| \stackrel{(4)}{=} (\operatorname{ch} (2 \ln \eta_k(\mu))) |\operatorname{ctg} \xi_k(\mu)|, \quad (14)$$

откуда следуют соотношения

$$\cos^{-2} \xi_k = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi_k \stackrel{(14)}{<} 1 + \operatorname{ch} (2 \ln \eta_k) = 2 \operatorname{ch}^2 \ln \eta_k. \quad (15)$$

Тогда выполняются оценки

$$\operatorname{sh} \ln \eta_{k+1} \stackrel{(3)}{=} (\operatorname{sh} (2 \ln \eta_k)) |\cos \xi_k| \stackrel{(15)}{>} \frac{\operatorname{sh} (2 \ln \eta_k)}{\sqrt{2} |\operatorname{ch} \ln \eta_k|} = \sqrt{2} \operatorname{sh} \ln \eta_k, \quad \text{если } \varphi_k(\mu) \neq 0. \quad (16_k)$$

Если же  $\tilde{\xi}_k(\mu) = 0$ , то  $\cos \xi_k = 1$ , поэтому в силу равенства (3) справедливы соотношения  $\operatorname{sh} \ln \eta_{k+1} \stackrel{(3)}{=} (\operatorname{sh} (2 \ln \eta_k)) |\cos \xi_k| = 2 \operatorname{sh} \ln \eta_k \operatorname{ch} \ln \eta_k > \sqrt{2} \operatorname{sh} \ln \eta_k$ . Отсюда и из неравенства (16<sub>k</sub>), применяя оценку (10<sub>k</sub>), получаем для всех  $\mu \in V_k$ , удовлетворяющих условию (11), неравенства

$$\operatorname{sh} \ln \eta_{k+1}(\mu) \stackrel{(16_k)}{>} \sqrt{2} \operatorname{sh} \ln \eta_k(\mu) \stackrel{(10_k)}{\geq} (\sqrt{2})^k \operatorname{sh} \delta = \varkappa_{k+1}. \quad (17)$$

Обозначим  $\Omega_1 := \{\nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\nu) \equiv 2^{-1}\pi - a_k \pmod{\pi}\}$ . Из непрерывности функции  $\zeta_k(\cdot)$  на отрезке  $\tilde{V}_k$  в силу равенства (7<sub>k</sub>) следует существование  $\gamma_0 := \inf \Omega_1$  и  $\gamma_1 := \sup \Omega_1$ . В случае, когда  $\zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\gamma_1)$ , положим  $W_k := [\alpha_k, \gamma_0] \cup [\gamma_1, \beta_k]$ .

Определим функцию  $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами  $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu)$  для всех  $\mu = \omega_k^{-1}([\alpha_k, \gamma_0])$ ,  $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu) + \alpha_k - \beta_k$  в случае, если  $\mu \in \omega_k^{-1}([\gamma_1, \beta_k])$ .

Обозначим  $\tilde{\gamma}_0 := \gamma_1 + \alpha_k - \beta_k$ ,  $\tilde{\gamma}_1 := \gamma_0$ ,  $\tilde{W}_k := [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1] = \omega_{k+1} \circ \omega_k^{-1}(W_k)$ . Очевидно, что функция  $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \rightarrow \tilde{W}_k$  биективна, поэтому на отрезке  $\tilde{W}_k$  определено обратное к ней отображение  $\omega_{k+1}^{-1}(\cdot)$ .

Определим функцию  $\hat{\zeta}_k : \tilde{W}_k \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами  $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k \circ \omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) - \zeta_k(\gamma_0) - a_k + 2^{-1}\pi$ , если  $\nu \in [\alpha_k, \gamma_0]$ ,  $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k \circ \omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) - \zeta_k(\gamma_1) - a_k - 2^{-1}\pi$ , если  $\nu \in [\gamma_1, \beta_k]$ . В силу равенств

$$\hat{\zeta}_k(\alpha_k) = \zeta_k(\alpha_k) - \zeta_k(\gamma_0) - a_k + 2^{-1}\pi \stackrel{(7_k)}{=} \zeta_k(\beta_k) - \zeta_k(\gamma_1) - a_k - 2^{-1}\pi = \lim_{\tilde{W}_k \ni \nu \rightarrow \beta_k} \hat{\zeta}_k(\nu)$$

функция  $\hat{\zeta}_k(\cdot)$  непрерывна на отрезке  $\tilde{W}_k$ .



Если имеет место оценка  $\zeta_k(\gamma_0) \geq \pi + \zeta_k(\alpha_k)$ , то из непрерывности функции  $\zeta_k(\cdot)$  на отрезке  $\tilde{V}_k$  следует существование  $v_0 \in [\alpha_k, \gamma_0)$ , для которого выполняется равенство  $\zeta_k(v_0) = \zeta_k(\gamma_0) - \pi$ . Из него следует сравнение  $\zeta_k(v_0) \equiv 2^{-1}\pi - a_k \pmod{\pi}$ , т.е.  $\zeta_k(v_0) \in \Omega_1$ , что в совокупности с неравенством  $v_0 < \gamma_0$  противоречит определению числа  $\gamma_0$ . Поэтому справедлива оценка  $\zeta_k(\gamma_0) < \pi + \zeta_k(\alpha_k)$ .

Аналогично доказывается неравенство  $\zeta_k(\beta_k) < \pi + \zeta_k(\gamma_1)$ . Тогда имеют место соотношения  $\zeta_k(\gamma_0) < \pi + \zeta_k(\alpha_k) \stackrel{(7_k)}{=} \zeta_k(\beta_k) < \pi + \zeta_k(\gamma_1)$ . Поэтому в случае, когда  $\zeta_k(\gamma_0) \neq \zeta_k(\gamma_1)$ , выполняется неравенство  $\zeta_k(\gamma_0) \leq \zeta_k(\gamma_1) - \pi$ . Следовательно, существует  $\tilde{\gamma}_1 := \inf\{\gamma_0 < \nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\nu) - \pi\}$ .

Положим  $\tilde{\gamma}_0 := \sup\{\tilde{\gamma}_1 > \nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\nu)\}$ . В этом случае обозначим  $\tilde{W}_k = W_k := [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1]$  и определим функции  $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{\zeta}_k : W_k \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами  $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu)$ ,  $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k(\nu) - \zeta_k(\tilde{\gamma}_0) - a_k - 2^{-1}\pi$  для всех  $\mu \in \omega_k^{-1}(W_k)$ ,  $\nu \in W_k$ .

Очевидно, имеют место включения

$$\hat{\zeta}_k \in C(\tilde{W}_k) \quad (18)$$

и вследствие соотношения (8<sub>k</sub>)

$$\hat{\zeta}_k(\text{int } \tilde{W}_k) \in (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k + 2^{-1}\pi). \quad (19)$$

Определим функцию  $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot) : \tilde{W}_k \rightarrow [1, +\infty)$  равенством  $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot) := \text{sh } \ln \eta_{k+1} \circ \omega_{k+1}^{-1}(\cdot)$ . В силу верных для любого  $\mu \in \omega_{k+1}^{-1}(\tilde{W}_k)$  сравнений

$$\hat{\zeta}_k \circ \omega_{k+1}(\mu) \equiv \zeta_k \circ \omega_k(\mu) \stackrel{(6_k)}{=} (\xi_k(\mu) - a_k) \pmod{\pi} \quad (20)$$

получаем, что

$$\tilde{\eta}_{k+1}(\nu) \stackrel{(3),(20)}{=} \text{sh}(2 \ln \tilde{\eta}_k(\nu)) |\cos(\hat{\zeta}_k(\nu) + a_k)|, \quad \nu \in \tilde{W}_k. \quad (21)$$

Так как  $\cos \hat{\zeta}_k(\nu) \neq 0$ ,  $\nu \in \text{int } \tilde{W}_k$ , согласно (19), то справедливо равенство

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) \stackrel{(4),(20)}{=} \arctg((\text{ch}^{-1}(2 \ln \tilde{\eta}_k(\nu))) \text{tg}(\hat{\zeta}_k + a_k)), \quad \nu \in \text{int } \tilde{W}_k. \quad (22)$$

Из соотношений (9<sub>k</sub>), (18) и (21) следует включение

$$\tilde{\eta}_{k+1} \in C(\tilde{W}_k), \quad (23)$$

а из соотношений (9<sub>k</sub>), (18) и (22) – включение

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1} \in C(\text{int } \tilde{W}_k). \quad (24)$$

В силу включения (19) и непрерывности на отрезке  $\tilde{W}_k$  функции  $\hat{\zeta}_k(\cdot)$  существуют числа  $\gamma_2, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{W}_k$ , определяемые соотношениями  $\gamma_2 := \inf\{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$ ,  $\tilde{\gamma}_2 := \sup\{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$ .

Согласно неравенству (17) выполняются оценки  $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_2) > \varkappa_{k+1}$ ,  $\tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_2) > \varkappa_{k+1}$ , а согласно формуле (3) – равенства  $\tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_0) = \tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_1) = 0$ . Отсюда вследствие вытекающей из включения (23) непрерывности функции  $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$  на отрезках  $[\tilde{\gamma}_0, \gamma_2]$  и  $[\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1]$  заключаем, что существуют  $v_1 \in (\tilde{\gamma}_0, \gamma_2)$ ,  $v_2 \in (\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1)$ , для которых  $\tilde{\eta}_{k+1}(v_i) = \varkappa_{k+1}$ ,  $i = 1, 2$ .

Обозначим  $\Omega_2 := \{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) \in [-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \tilde{\eta}_{k+1}(\nu) = \varkappa_{k+1}\}$ ,  $\Omega_3 := \{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) \in [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi], \tilde{\eta}_{k+1}(\nu) = \varkappa_{k+1}\}$ .

Из включений (18), (19) и равенств  $\hat{\zeta}_k(\tilde{\gamma}_0) = -a_k - 2^{-1}\pi$ ,  $\hat{\zeta}_k(\tilde{\gamma}_1) = -a_k + 2^{-1}\pi$  вытекают соотношения

$$\hat{\zeta}_k([\tilde{\gamma}_0, \gamma_2]) = [-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \quad (25)$$

$$\hat{\zeta}_k([\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1]) = [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi]. \quad (26)$$

Отсюда следует включение  $v_1 \stackrel{(25)}{\in} \Omega_2$ .

Тогда найдётся  $\gamma_3 := \sup(\Omega_2 \cap [v_1, v_2])$ . В силу очевидного неравенства  $\gamma_3 \leq v_2$  и, как следствие, непустоты множества  $[\gamma_3, v_2]$  получаем включение  $v_2 \stackrel{(26)}{\in} \Omega_3 \cap [\gamma_3, v_2]$ . Поэтому существует  $\gamma_4 := \inf(\Omega_3 \cap [\gamma_3, v_2])$ .

Из непрерывности функции  $\hat{\zeta}_k(\cdot)$  на отрезке  $\hat{W}_k := [\gamma_3, \gamma_4] \subset [v_1, v_2] \subset \text{int } \tilde{W}_k$  и вытекающих из соотношения (19) включений

$$\hat{\zeta}_k(\gamma_3) \in (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \quad \hat{\zeta}_k(\gamma_4) \in [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi) \quad (27)$$

следует, что  $\hat{\zeta}_k(\hat{W}_k) \supset [\hat{\zeta}_k(\gamma_3), \hat{\zeta}_k(\gamma_4)] \ni -a_k$ . Поэтому множество  $\Omega_4 := \{\nu \in \hat{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$  не пусто. Следовательно, найдутся  $\gamma_5 := \inf \Omega_4$  и  $\gamma_6 := \sup \Omega_4$ .

Обозначим  $M_{-1} := [\gamma_3, \gamma_5]$ ,  $M_1 := [\gamma_6, \gamma_4]$ . В силу непрерывности функции  $\tilde{\eta}_{k+1}$  на отрезках  $M_{-1}$  и  $M_1$  найдутся  $j \in \{-1, 1\}$  и  $\gamma_7 \in M_j$  такие, что  $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_7) = \sup_{\nu \in M_{-1} \cup M_1} \tilde{\eta}_{k+1}(\nu)$ .

Обозначим  $\tilde{M}_{-1} := [\gamma_3, \gamma_7]$ ,  $\tilde{M}_1 := [\gamma_7, \gamma_4]$ ,

$$L_{-1} := [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi + \zeta_{k+1}(\gamma_3)) \times \{\varkappa_{k+1}\}, \quad L_1 := (-2^{-1}\pi + \zeta_{k+1}(\gamma_4), 2^{-1}\pi] \times \{\varkappa_{k+1}\},$$

$$\zeta_{k+1}(\nu) := \hat{\zeta}_k(\nu) + \varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) + a_k,$$

$$h_k^i(\nu) := (\zeta_k(\nu) - i2^{-1}\pi, \text{sh } \ln \tilde{\eta}_k(\nu))^T \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \{-1, 1\}, \quad \nu \in \hat{W}_k,$$

$$C_k^j := \{h_{k+1}^j(\nu) : \nu \in \tilde{M}_j\}, \quad C_k^{3-j} := \{h_{k+1}^{3-j}(\nu) : \nu \in M_{3-j}\}.$$

Вследствие неравенства (17) выполняется оценка  $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_5) > \varkappa_{k+1}$ . Отсюда, поскольку для любого  $\gamma \in (\gamma_3, \gamma_4)$  имеет место неравенство  $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma) \neq \varkappa_{k+1}$ , в силу непрерывности на отрезке  $[\gamma_3, \gamma_4]$  функции  $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$  верна оценка

$$\tilde{\eta}_{k+1}(\nu) > \varkappa_{k+1}, \quad \nu \in (\gamma_3, \gamma_4). \quad (28)$$

Положим  $h := C_k^j$ ,  $u := C_k^{3-j} \cup L_{3-j}$ ,  $\mathbf{a} := \varkappa_{k+1}$ ,  $\mathbf{b} := \text{sh } \ln \tilde{\eta}_k(\gamma_7)$ ,  $\mathbf{c} := -\pi/2$ ,  $\mathbf{d} := \pi/2$ . Из включений (19) и (27) следуют соотношения

$$\hat{\zeta}_k(M_{-1}) \subset (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \quad \hat{\zeta}_k(M_1) \subset [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi). \quad (29)$$

Отсюда в силу сравнения (20) вытекает равенство

$$\hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k + \tilde{\xi}_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu), \quad \nu \in M_{-1} \cup M_1. \quad (30)$$

Тогда вследствие включений (29) и равенства (22) получаем соотношения

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M_{-1}) \subset (-2^{-1}\pi, 0], \quad \varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M_1) \subset [0, 2^{-1}\pi). \quad (31)$$

Включения (29) и (31) в свою очередь влекут за собой соотношения  $\zeta_{k+1}(M_{-1}) \subset [-\pi, 0]$ ,  $\zeta_{k+1}(M_1) \subset [0, \pi]$ . Отсюда имеем включения  $C_k^j, C_k^{3-j} \subset [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi] \times \mathbb{R}$ . Из них в силу неравенства (27) получаем, что  $h, u \subset E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}, \mathbf{d})$ . При этом вследствие включений (18), (23) и (24)  $h$  и  $u$  — непрерывные кривые. Кроме того, очевидно, выполняются все равенства в условиях леммы 2. Тогда в силу неё существует вектор  $r = (r_1, r_2)^T \in h \cap u$ .

Для любого  $l \in \{3, 4\}$  из непрерывности на отрезке  $\tilde{W}_k$  функций  $\hat{\zeta}_k(\cdot)$  и  $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$  следует замкнутость множеств  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Поэтому верны включения  $\gamma_l \in \Omega_{l-1}$ , откуда вытекает равенство  $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_l) = \varkappa_{k+1}$ . Таким образом, в случае, если  $\mu = \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l)$ , оценка (17) не верна.

Следовательно, для таких  $\mu$  не выполняется неравенство (11). Отсюда в силу равенства (30) имеем соотношения

$$|\zeta_{k+1}(\gamma_l)| \stackrel{(30)}{=} |\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l) + \tilde{\xi}_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l)| \geq \pi/2, \quad l \in \{3, 4\}. \quad (32)$$

Из них вытекают включения

$$L_{-1} \subset [-2^{-1}\pi, 0) \times \mathbb{R}, \quad L_1 \subset (0, 2^{-1}\pi] \times \mathbb{R}. \quad (33)$$

Если  $r_2 = \varkappa_{k+1}$ , то, поскольку  $r \in C_k^j$ , из включений (27) следует соотношение  $r \in \{h_{k+1}^{-1}(\gamma_3), h_{k+1}^1(\gamma_4)\}$ . Поэтому в силу неравенств (32) выполняются оценки

$$jr_1 = j\zeta_k(\gamma_{(7+j)/2}) - 2^{-1}\pi \leq 0.$$

Отсюда вследствие включений (33) получаем, что  $r \notin L_{3-j}$ . Это же соотношение верно и в случае, когда  $r_2 \neq \varkappa_{k+1}$ .

Таким образом, в обоих случаях справедливо включение  $r \in C_k^{3-j}$ . Поэтому найдутся такие  $\gamma_8 \in [\gamma_3, \gamma_5]$  и  $\gamma_9 \in [\gamma_6, \gamma_4]$ , для которых справедливо равенство

$$h_{k+1}^{-1}(\gamma_8) = h_{k+1}^1(\gamma_9). \quad (34)$$

Положим  $\tilde{V}_{k+1} := [\gamma_8, \gamma_9]$ ,  $V_{k+1} := \omega_{k+1}^{-1}(\tilde{V}_{k+1})$ .

Тогда вследствие включений (18) и (24) функция  $\zeta_{k+1}$  непрерывна на  $\tilde{V}_{k+1}$ . Кроме того, из равенства (30) вытекает сравнение  $(6_{k+1})$ , а в силу равенства (34) справедливо сравнение  $(7_{k+1})$ . При этом из оценки (28) следует неравенство  $(10_{k+1})$ .

По индукции с учётом вытекающего из включения (23) соотношения  $(9_{k+1})$  получаем, что оценка  $(10_k)$  справедлива при всех  $k \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  и любого отрезка  $M \subset \tilde{V}_k$  найдутся отрезки  $f_{k,i}(M) \subset \tilde{V}_1$ ,  $i = 1, 2^{k-1}$ , такие, что

$$\omega_1 \circ \omega_k^{-1}(M) = \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k,i}(M). \quad (35_k)$$

Для любого отрезка  $M \subset \tilde{V}_{k+1}$  существуют отрезки  $g_{k,i}(M) \subset \tilde{V}_k$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , для которых

$$\omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M) = \bigcup_{i=1}^2 g_{k,i}(M). \quad (36)$$

Положим  $f_{k+1,i}(M) := f_{k,i}(g_{k,1}(M))$ ,  $f_{k+1,2^{k-1}+i}(M) := f_{k,i}(g_{k,2}(M))$ ,  $i = \overline{1, 2^{k-1}}$ .

Тогда из равенств  $(35_k)$  и  $(36)$  следуют соотношения

$$\omega_1 \circ \omega_{k+1}^{-1}(M) \stackrel{(36)}{=} \bigcup_{i=1}^2 \omega_1 \circ \omega_k^{-1}(g_{k,i}(M)) \stackrel{(35_k)}{=} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k+1,i}(M).$$

Таким образом, равенство  $(35_{k+1})$  выполняется. По индукции, учитывая очевидное равенство  $(35_1)$ , получаем, что равенство  $(35_k)$  справедливо для любого  $k \in \mathbb{N}$ .

Поэтому, поскольку  $V_{k+1} \subset V_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , имеют место соотношения

$$V_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} V_k \stackrel{(35_k)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_1^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k,i}(\tilde{V}_k) \right).$$

Следовательно,  $\omega_1(V_\infty)$  является пределом последовательности вложенных друг в друга замкнутых множеств, что влечёт за собой его не пустоту.

Тогда в силу леммы 1 для любого  $\mu \in V_\infty$  справедливы оценки

$$\|X_{A_\mu}(2^n - 1, 0)\| \stackrel{(5_n)}{=} \eta_n \stackrel{(10_n)}{>} \exp(2^{n/2-1}) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липницкий А.В.* Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М., 2014. С. 171–177.
2. *Липницкий А.В.* О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 270–277.
3. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.
4. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983.
5. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 569.
6. *Липницкий А.В.* О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.
7. *Барабанов Е.А.* Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 147–157.
8. *Maehara R.* The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem // The American Math. Monthly. 1984. V. 91. № 10. P. 641–643.

Институт математики НАН Беларуси,  
г. Минск

Поступила в редакцию 13.12.2021 г.  
После доработки 07.03.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22

ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ  
СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ БИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Л. А. Алексеева

Рассматриваются краевые задачи для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений. Такие уравнения представляют собой бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака. Исследуются монохроматические решения с фиксированной частотой колебаний. Построены фундаментальные и обобщённые решения для бикватернионных амплитуд колебаний на пространстве обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. С использованием метода обобщённых функций найдены решения биволнового уравнения в ограниченной области по известным значениям решения на границе области, даны их регулярные интегральные представления для внутренних точек и интегральное представление характеристической функции области через фундаментальное решение уравнения. На основании последней из перечисленных формул, представляющей собой бикватернионные аналоги известных формул Грина и Гаусса для эллиптических уравнений, построены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения для решения стационарных краевых задач.

DOI: 10.31857/S0374064122040045, EDN: BZLLWX

Настоящая работа связана с построением решений краевых задач для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений, которые являются бикватернионными обобщениями уравнений Максвелла и Дирака. Отметим, что кватернионное представление уравнений Максвелла началось с работы самого Максвелла и имеет довольно обширную библиографию ([1–10] и др.), в отличие от работ по построению решения краевых задач для кватернионных и бикватернионных обобщений этих уравнений. Бикватернионные волновые уравнения относятся к классу гиперболических и описывают решения гиперболических систем из восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальные решения таких уравнений и их свойства рассмотрены автором в статье [11]. Основы дифференциальной алгебры бикватернионов изложены в работе [12], обозначения из которой здесь используем.

Особый класс решений биволнового уравнения составляют *монохроматические* решения, которые описывают гармонические (синусоидальные) колебания с фиксированной частотой. Уравнение для бикватернионных амплитуд колебаний – стационарное биволновое уравнение – в этом случае становится эллиптическим. В настоящей работе развивается теория краевых задач для таких уравнений с использованием методов теории обобщённых функций. Построены фундаментальные и обобщённые решения этих уравнений на пространстве обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. Даны интегральные представления решений биволнового уравнения в ограниченной области по известным значениям решения на границе области. Построено интегральное представление характеристической функции множества через фундаментальное решение стационарного биволнового уравнения. Эти формулы являются аналогами известных формул Грина и Гаусса для уравнения Лапласа и вообще эллиптических уравнений и систем, их бикватернионным обобщением. На их основе построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения стационарных краевых задач.

**1. Бикватернионы и их биградиенты.** Рассмотрим бикватернионное волновое уравнение вида

$$\nabla^{\pm} \mathbf{B}(\tau, x) + \mathbf{F} \circ \mathbf{B}(\tau, x) = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \mathbb{M}, \quad (1)$$

в котором бикватернионы  $\mathbf{B}(\tau, x)$  и  $\mathbf{G}(\tau, x)$  имеют вид

$$\mathbf{B}(\tau, x) = b(\tau, x) + B(\tau, x), \quad \mathbf{G} = g(\tau, x) + G(\tau, x),$$

структурный коэффициент  $\mathbf{F} = f + F$  является постоянным бикватернионом, а  $\mathbb{M} = \{(\tau, x) : \tau \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^3\}$  – пространство Минковского, где  $\tau = ct$ ,  $t$  – время,  $c$  – скорость света. Здесь и далее используем гамильтонову скалярно-векторную запись бикватернионов, употребляя для их скалярных и векторных величин одноимённые с обозначением бикватерниона (для которого мы используем заглавные латинские буквы жирного шрифта) соответственно строчные и заглавные одинарные буквы курсивного шрифта, т.е., например, в бикватерионе  $\mathbf{F} = f + F$ , величина  $f$  – скаляр, а  $F = \sum_{j=1}^3 F_j e_j$  – вектор. Согласно кватернионному умножению

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{B} = (f + F) \circ (b + B) = \{fb - (F, B)\} + \{fB + bF + [F, B]\}, \quad (2)$$

где справа в скобках стоят скалярное и векторное произведения указанных векторов и векторных функций

$$(F, B) = \sum_{j=1}^3 F_j B_j, \quad [F, B] = \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{klm} F_k B_l e_m,$$

$\varepsilon_{klm}$  – псевдотензор Леви-Чивиты,  $e_m$  – базисные элементы алгебры бикватернионов ( $m = 0, 1, 2, 3$ ). Предполагается, что  $\mathbf{B}(\tau, x)$ ,  $\mathbf{G}(\tau, x)$  принадлежат функциональному пространству  $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$  на  $\mathbb{M}$ . Под таковым понимаем бикватернионы, компоненты которых принадлежат классу обобщённых комплексных функций медленного роста [13, с. 149].

В уравнении (1) дифференциальные бикватернионные операторы  $\nabla^+$  и  $\nabla^-$  – *взаимные биградиенты* – имеют вид

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla,$$

$\nabla = \text{grad}$ . Их действие на  $\mathbf{B}(\tau, x)$  определяется алгеброй бикватернионов

$$\begin{aligned} \nabla^\pm \mathbf{B} &= (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b + B) = (\partial_\tau b \mp i(\nabla, B) + \partial_\tau B \pm i(\nabla b + [\nabla, B])) = \\ &= (\partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B) + \partial_\tau B \pm i \operatorname{grad} b \pm i \operatorname{rot} B \end{aligned}$$

(соответственно верхнему и нижнему знакам).

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида

$$\mathbf{A} \circ \nabla^\pm \mathbf{B} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B} = \mathbf{H},$$

которые приводятся к (1), если существует обратный бикватернион  $\mathbf{A}^{-1}$ , т.е.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^-},$$

где  $\mathbf{A}^- = a - A$  – взаимный с  $\mathbf{A} = a + A$  бикватернион. В этом случае, умножая (2) слева на  $\mathbf{A}^{-1}$ , получаем уравнение (1), в котором  $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{H}$ .

Введём также сопряжённый к  $\mathbf{A}$  бикватернион  $\mathbf{A}^*$  равенством  $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^-$ . Здесь чертой над символом обозначается комплексное сопряжение скалярной и векторной частей бикватерниона (подробнее о дифференциальной алгебре бикватернионов см. [12]).

**2. Свойства взаимных биградиентов и МД-операторов.** Введём дифференциальные бикватернионные операторы

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^+ = \nabla^+ + \mathbf{F} = \nabla^+ + f + F, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- = \nabla^- + \mathbf{F}^- = \nabla^- + f - F,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В соответствии с использованной выше терминологией назовём их *взаимными МД-операторами* (операторами Максвелла–Дирака). Используем далее обозначения для классических волновых операторов – даламбертиана и лапласиана соответственно:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Взаимные биградиенты и МД-операторы обладают очень полезными для приложений свойствами.

**Лемма 1.** *Взаимные биградиенты коммутируют между собой, и для их композиции имеет место равенство*

$$\nabla^+ \circ \nabla^- = \nabla^- \circ \nabla^+ = \square.$$

*МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство*

$$\mathbf{D}_F^+ \circ \mathbf{D}_F^- = \mathbf{D}_F^- \circ \mathbf{D}_F^+ = \square + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) - 2i(F, \nabla). \quad (3)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla^+ \circ \nabla^- &= (\partial_\tau + i\nabla) \circ (\partial_\tau - i\nabla) = \\ &= \partial_\tau \partial_\tau - (\nabla, \nabla) - i\partial_\tau \nabla + i\partial_\tau \nabla - [\nabla, \nabla] = \nabla^- \circ \nabla^+ = \square. \end{aligned}$$

Аналогично получим равенства (3):

$$\mathbf{D}_F^+ \circ \mathbf{D}_F^- = \mathbf{D}_F^- \circ \mathbf{D}_F^+ = (\nabla^+ + f + F) \circ (\nabla^- + f - F) = \square + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) - 2i(F, \nabla).$$

Лемма доказана.

Далее значок кватернионного умножения (композиции) между операторами опускаем.

**3. Стационарные МД-операторы и их свойства.** В работах [14, 15] построены фундаментальные и обобщённые решения уравнения (1) при произвольной правой части с носителем на положительной полуоси времени (нестационарные решения). Здесь построим и исследуем свойства периодических решений биволновых уравнений. В частности, рассмотрим случай гармонических колебаний с частотой  $\omega$ , т.е. когда правая часть уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{G}(\tau, x) = \mathbf{G}(x)\exp(-i\omega\tau).$$

Здесь комплексная биамплитуда принадлежит классу обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. Решение уравнения (1) будем искать в аналогичном виде:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = \mathbf{B}(x)\exp(-i\omega\tau).$$

В этом случае биволновое уравнение (1) для верхнего знака (+) биградиента приобретает вид

$$\nabla_\omega^- \mathbf{B}(x) + i\mathbf{F} \circ \mathbf{B}(x) = i\mathbf{G}(x).$$

Здесь операторы  $\nabla_\omega^\pm = \omega \pm \nabla$  назовём  $\omega$ -градиентами, а оператор  $\nabla$  – градиентом:

$$\nabla \mathbf{G}(x) = -\operatorname{div} G(x) + \operatorname{grad} g(x) + \operatorname{rot} G(x).$$

Таким образом, для определения комплексных амплитуд (не вводя новые обозначения) мы приходим к уравнениям типа

$$\nabla_\omega^\pm \mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}. \quad (4)$$

Назовём такие уравнения *стационарными МД-уравнениями*. Соответственно введём *стационарные взаимные МД-операторы* равенствами

$$\mathbf{D}_\omega^+ = \nabla_\omega^+ + \mathbf{F}, \quad \mathbf{D}_\omega^- = \nabla_\omega^- + \mathbf{F}^-.$$

Аналогично лемме 1 доказывается

**Лемма 2.** *Взаимные стационарные МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство*

$$\mathbf{D}_\omega^+ \mathbf{D}_\omega^- = \mathbf{D}_\omega^- \mathbf{D}_\omega^+ = \Delta + (\omega + f)^2 + (F, F) + 2(F, \nabla). \quad (5)$$

Это свойство используем далее при построении решений уравнения (4).

**4. Стационарное МД-уравнение и его обобщённые решения.** Далее решения построим для верхнего знака (+) уравнения (4). Для нижнего знака оно строится аналогично. Для этого используем свойство МД-операторов (5). В результате получаем

$$\mathbf{D}_{\omega}^{-}\mathbf{D}_{\omega}^{+}\mathbf{B} = \{\Delta + (\omega + f)^2 + (F, F) + 2(F, \nabla)\}\mathbf{B} = \mathbf{D}_{\omega}^{-}\mathbf{G} = \mathbf{Q},$$

т.е. каждая компонента бикватерниона  $\mathbf{B}$  удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta u + (\omega + f)^2 u + (F, F)u + 2(F, \nabla u) = q \quad (6)$$

с соответствующей компонентой  $q$  в правой части.

Обозначим через  $\psi(x)$  фундаментальное решение уравнения (6) (при  $q(x) = \delta(x)$ ), а через  $\psi^0(x)$  решения однородного уравнения (при  $q = 0$ ).

Далее построим решения (4) для верхнего знака (+).

**Теорема 1.** *Решение уравнения (4) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_{\omega}^{-}\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_{\omega}^{-}\mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \quad (7)$$

если свёртка в первом слагаемом существует. Здесь  $\mathbf{B}^0(x)$  – решение однородного уравнения (4).

**Доказательство.** В силу линейности уравнения достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (7). Подставим первое слагаемое в уравнение (4) и, используя (3), свойство дифференцирования свёртки и свойство дельта-функции, будем иметь

$$\mathbf{D}_{\omega}^{+}\mathbf{D}_{\omega}^{-}(\psi * \mathbf{G}) = \{\Delta\psi + (\omega + f)^2\psi + (F, F)\psi + 2(F, \nabla\psi)\} * \mathbf{G} = \delta * \mathbf{G} = \mathbf{G},$$

$$\mathbf{D}_{\omega}^{-}\mathbf{B}^0 = 0.$$

Если  $\mathbf{B}_1$  – любое решение уравнения (4), то  $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}) = \mathbf{B}_2$  – решение однородного уравнения (4), следовательно,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{B}_2$ . Лемма доказана.

Заметим, что свёртку в первом слагаемом, согласно правилам дифференцирования свёрток обобщённых функций [13, с.126] можно брать разными способами, что удобно при вычислении.

**Теорема 2.** *Бикватернион вида*

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \mathbf{D}_{\omega}^{-}\psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \psi^0 * \mathbf{D}_{\omega}^{-}\mathbf{C}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \mathbf{D}_{\omega}^{-}(\psi^0 * \mathbf{C}^0)$$

является решением однородного уравнения (4) ( $\mathbf{G} \equiv 0$ ). Здесь  $\{\psi^0(x)\}$  – конечное множество произвольных решений однородного уравнения (6),  $\mathbf{C}^0 \in \mathbb{B}'(\mathbb{R}^3)$  – произвольные бикватернионы, допускающие такую свёртку.

**Доказательство** следует из равенства

$$\mathbf{D}_{\omega}^{+}\mathbf{D}_{\omega}^{-}(\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{\Delta\psi^0 + (\omega + f)^2\psi^0 + (F, F)\psi^0 + 2(F, \nabla\psi^0)\} * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Следовательно, класс решений уравнения (4) определяется скалярными функциями  $\psi(x)$  и  $\psi^0(x)$  – решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными МД-потенциалами* решений стационарного МД-уравнения.

**5. Фундаментальные решения МД-уравнения и их потенциалы.** Рассмотрим фундаментальные решения (4), которые удовлетворяют уравнению

$$\nabla_{\omega}^{+}\mathbf{U}(x) + \mathbf{F} \circ \mathbf{U}(x) = \delta(x), \quad (8)$$

правая часть которого – сингулярная дельта-функция. Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного уравнения (с нулевой правой частью).



Свойства фундаментальных решений позволяют строить частные решения уравнения (4) в виде *бикватернионной свёртки*

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} * \mathbf{U} = (g + G) * (u + U) = \left\{ g * u - \sum_{k=1}^3 G_k * U_k \right\} + \left\{ u * G + g * U + \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} e_j (G_k * U_l) \right\},$$

где в правой части стоят покомпонентные функциональные свёртки, которые следует брать согласно правилам свёртки обобщённых функций [13, с. 126]. Условия существования таких свёрток определяют класс бикватернионов в правой части уравнения (4), для которых указанные решения существуют.

Используя формулу (7) и свойство свёрток с дельта-функцией, получаем фундаментальные решения уравнения (4) в следующем виде:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{D}_\omega^- \psi(x) * \delta(x) + \mathbf{B}^0(x) = \mathbf{D}_\omega^- \psi(x) + \mathbf{B}^0(x) = (\omega + f)\psi(x) - \text{grad } \psi(x) - \psi(x)F + \mathbf{B}^0(x).$$

**Определение.** Назовём *функцией Грина* фундаментальное решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности:

$$\mathbf{U}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

порождённое фундаментальным решением уравнения (6), удовлетворяющим некоторым условиям излучения для расходящихся волн.

Для построения такого решения используем преобразование Фурье обобщённых функций. Переменные Фурье, соответствующие  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , обозначаем  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  соответственно. Используя свойство преобразования Фурье производной [13, с. 162]  $\partial/\partial x_j \leftrightarrow -i\xi_j$ , получаем преобразование Фурье уравнения (6):

$$(-\|\xi\|^2 + (\omega + f)^2 - 2i(F, \xi) + (F, F))\bar{\psi}(\xi) = 1,$$

которое можно записать в виде  $\{-(\xi + iF, \xi + iF) + (f + \omega)^2\}\bar{\psi} = 1$ . Откуда находим преобразование Фурье скалярного потенциала

$$\bar{\psi}(\xi) = -\frac{1}{(\xi + iF, \xi + iF) - (\omega + f)^2}.$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta \chi(x) + k^2 \chi(x) = \delta(x), \quad \text{Re } k > 0,$$

удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда при  $\|x\| \rightarrow \infty$ :

$$\psi(x) = O(1/r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \mp ik\psi = o(1/r), \quad r = \|x\|,$$

которое описывает затухающую на бесконечности сферическую волну [13, с. 203]

$$\chi(x)e^{-i\omega t} = -\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{i(\pm k\|x\| - \omega t)}.$$

Она расходится из точки  $x = 0$  для верхнего знака (+), а для нижнего знака (−) сходится. Им соответствуют следующие регуляризации преобразования Фурье функции  $(\|\xi\|^2 - \omega^2)^{-1}$ :

$$\mathbf{F}[\chi(x)] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - (\omega \pm i0)^2}.$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [13, с. 162]

$$\mathbf{F}[\chi(x)e^{i(a,x)}] = \mathbf{F}[\chi(x)](\xi + a),$$

получаем

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|} e^{\pm ik\|x\| - (F,x)}, \quad k = \omega + f.$$

Этим комплексным амплитудам соответствуют волны вида

$$\begin{aligned} \psi_+(x)e^{-i\omega\tau} &= -\frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\|x\|} \exp(i((\omega + f)\|x\| - \omega\tau)), \\ \psi_-(x)e^{-i\omega\tau} &= -\frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\|x\|} \exp(-i((\omega + f)\|x\| + \omega\tau)). \end{aligned} \quad (9)$$

Их свойства на бесконечности зависят от структурного коэффициента  $\mathbf{F} = f + F$ . В частности,

$$\psi_+(x) \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} f \geq 0, \quad \operatorname{Re} F = 0, \quad (10)$$

$$\psi_-(x) \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} f \leq 0, \quad \operatorname{Re} F = 0. \quad (11)$$

Эти волны расходятся на бесконечности, если

$$\operatorname{Re}(\omega + f) > 0 \quad \text{для} \quad \psi_+(x), \quad \operatorname{Re}(\omega + f) < 0 \quad \text{для} \quad \psi_-(x). \quad (12)$$

Приведённые условия – это условия излучения для скалярных МД-потенциалов. Выбираем тот из потенциалов (10), для которых они выполняются. В противном случае фундаментальные решения экспоненциально растут на бесконечности и функции Грина не существует.

Используя соответствующее представление потенциала (9) и формулу теоремы 1, находим фундаментальное решение стационарного МД-уравнения. В частности, при условиях (10), (12) для  $\phi_+(x)$  получаем

$$\mathbf{U}(x) = \omega\psi(x) - \operatorname{grad} \psi(x) = -\frac{e^{i\omega f\|x\| + i(F,x)}}{4\pi\|x\|} (\omega - iF - i(\omega + if + i\|x\|^{-1})e_x), \quad (13)$$

где  $e_x = x/\|x\|$ . Соответственно, используя теорему 1, с учётом (9) находим решение стационарного МД-уравнения. В частности, из неё следует

**Теорема 3.** Если  $\mathbf{G}(x)$  – регулярный бикватернион с компактным носителем, частные производные которого являются интегрируемыми функциями, то уравнение (4) имеет решение вида

$$\begin{aligned} 4\pi\mathbf{B}(x) &= -\frac{e^{(i\omega - f)\|x\| - (F,x)}}{\|x\|} * \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- \mathbf{G}(x) = \\ &= e^{-(F,x)} \int_{\operatorname{supp} \mathbf{G}(y)} \frac{e^{(i\omega - f)\|x-y\| + (F,y)}}{\|x-y\|} \{\omega g(y) + \operatorname{div} G(y) + \omega G(y) - \operatorname{rot} G(y)\} dV(y) - \\ &\quad - e^{-(F,x)} \mathbf{F}^- \circ \int_{\operatorname{supp} \mathbf{G}(y)} \frac{e^{(i\omega - f)\|x-y\| + (F,y)}}{\|x-y\|} \mathbf{G}(y) dV(y), \end{aligned}$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$ . При условиях (10), (12) оно описывает порождаемые источником расходящиеся и затухающие на бесконечности волны.

Аналогично при условиях (11), (12) вычисляется решение  $\mathbf{U}(x)$  для  $\psi_-(x)$  и переформулируется теорема 3.

Если носитель бикватерниона  $\mathbf{G}(x)$  неограничен, то условия существования интеграла определяют условия на  $\mathbf{G}$ , при которых решение существует.

Бикватернион  $\mathbf{G}$  может быть сингулярным. В этом случае следует использовать первое равенство в (7), взять свёртку по правилам нахождения свёртки в пространстве обобщённых функций [13, с. 132], а затем подействовать МД-оператором.

**6. Построение аналога формулы Грина методом обобщённых функций.** Под таким аналогом мы понимаем представление решения уравнения в ограниченной области  $S^- \subset \mathbb{R}^3$  по его граничным значениям на границе  $S$  по аналогии с представлением решения уравнения Лапласа по граничным значениям решения и его производных [13, с. 252]. Для этого используем характеристическую функцию этой области  $H_S^-(x)$ . Её производная в пространстве обобщённых функций имеет вид

$$\partial_j H_S^-(x) = -n_j(x)\delta_S(x),$$

где сингулярная обобщённая функция  $n_j(x)\delta_S(x)$  – простой слой на поверхности  $S$ , а  $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$  – внешняя единичная нормаль к  $S$ .

Введём регулярный бикватернион

$$\hat{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{B}(x)H_S^-(x),$$

равный решению уравнения (4) в этой области с её границей, а вне их равный нулю. Обобщённые частные производные этого бикватерниона в пространстве  $\mathbb{B}'(\mathbb{R}^3)$  представляются в виде [13, с. 104]

$$\partial_j \hat{\mathbf{B}}(x) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_j} H_S^-(x) - \mathbf{B}_S(x)n_j(x)\delta_S(x), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь первое слагаемое справа – классическая частная производная бикватерниона,  $\mathbf{B}_S(x)$  – значения бикватерниона  $\mathbf{B}(x)$  на  $S$ . С учётом представления (14) получаем

$$\begin{aligned} \nabla_\omega^+ \hat{\mathbf{B}}(x) &= \{(\omega - \operatorname{div} B(x)) + \omega B(x) + (\operatorname{grad} b(x) + \\ &+ \operatorname{rot} B(x))\} H_S^-(x) + \{(n(x), B) - b n(x) - [n(x), B]\} \delta_S(x). \end{aligned}$$

Тогда действие МД-операторов на этот бикватернион в пространстве обобщённых бикватернионов примет вид

$$\begin{aligned} \nabla_\omega^+ \hat{\mathbf{B}}(x) + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}}(x) &= \mathbf{G}(x)H_S^-(x) + i\{(n(x), B_S(x)) - b_S(x)n(x) - [n(x), B_S(x)]\} \delta_S(x) = \\ &= \hat{\mathbf{G}}(x) - (n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{B}_S(x) = b_s(x) + B_S(x)$ . Введём сингулярный бикватернион простого слоя

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(x) = -(n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x) = i\{n(x), B_s(x) - b_s n(x) - [n(x), B_s(x)]\} \delta_S(x).$$

Здесь  $(-n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))$  – плотность простого слоя на  $S$ . В результате приходим к уравнению вида

$$\nabla^+ \hat{\mathbf{B}}(x) + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}}(x) = \hat{\mathbf{G}}(x) + \hat{\mathbf{\Gamma}}(x).$$

Бикватернионная свёртка правой части этого уравнения с функцией Грина, согласно теореме 1, является решением уравнения (4):

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{G}} + \mathbf{U} * \hat{\mathbf{\Gamma}}.$$

Первое слагаемое  $\hat{\mathbf{B}}_1$  вычисляется по формуле теоремы 3. Вычисляя второе слагаемое  $\hat{\mathbf{B}}_2$ , имеем

$$\hat{\mathbf{B}}_2(x) = \mathbf{U}(x) * \hat{\mathbf{\Gamma}}(x) = \left\{ -\frac{e^{(i\omega - f)\|x\| + j(F, x)}}{4\pi\|x\|} (\omega - iF - (i\omega - f - \|x\|^{-1})e_x) \right\} * (n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ - \frac{e^{(i\omega-f)\|x-y\|+i(F,x)}}{\|x-y\|} (\omega - iF - (i\omega - f - \|x-y\|^{-1})e_{x-y}) \right\} * (n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)) dS(y).$$

Здесь и далее  $e_{y-x} = (y-x)/\|x-y\|$ .

Результат сформулируем в виде теоремы, которая является аналогом формулы Грина для эллиптических уравнений и систем.

**Теорема 4.** Если  $G(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 3, то решение стационарного МД-уравнения (4) определяется своими граничными значениями на  $S$  формулой

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{B}(x) H_S^-(x) = & -e^{i(F,x)} \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r-i(F,y)}}{r} \{\omega - iF + (i\omega - f)e_{y-x}\} \circ \{(n(y) \circ \mathbf{B}_S(y))\} dS(y) - \\ & - e^{i(F,x)} \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r-i(F,y)}}{r^2} e_{y-x} \circ \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} dS(y) + \hat{\mathbf{B}}_1(x), \quad r = \|x-y\|. \end{aligned}$$

Заметим, что для всех  $x \notin S$  подынтегральные функции интегрируемы и интегралы существуют.

Однако для граничных точек  $x \in S$  второй интеграл содержит неинтегрируемую на  $S$  особенность при  $x = y$  порядка  $r^{-2}$ . Исследование предельных свойств этого интегрального представления приводит к сингулярным граничным интегральным уравнениям (СГИУ), которые являются разрешающими для краевых задач для уравнения (4). Заметим также, что и для граничных точек формула сохраняет тот же вид, если положить, что  $H_S^-(x) = 1/2$  на границе  $S$ . Только в этом случае интеграл следует брать в смысле главного значения. Для доказательства этого факта дадим вначале представление функции  $H_S^-(x)$  через функцию Грина уравнения (4).

**7. Представление характеристической функции множества  $S^-$ . Аналог формулы Гаусса.** Хорошо известна формула Гаусса, которая представляет характеристическую функцию множества  $S^-$  через значения фундаментального решения уравнения Лапласа и его нормальной производной на границе  $S$  [13, с. 412]. Построим аналогичную формулу, используя функцию Грина стационарного МД-уравнения. Для этого свернём уравнение для фундаментального решения (8) с  $H_S^-(x)$ , воспользуемся свойством свёрток с дельта-функцией и производных свёрток обобщённых функций. В результате получим

$$\begin{aligned} H_S^-(x) = \nabla_\omega^+ \mathbf{U}(x) * H_S^-(x) + (\mathbf{F} \circ \mathbf{U}(x)) * H_S^-(x) = (\omega + \mathbf{F}) \circ \mathbf{U}(x) * H_S^-(x) - \mathbf{U}(x) * n(x) \delta_S(x) = \\ = (\omega + \mathbf{F}) \circ \int_{S^-} \mathbf{U}(x-y) dV(y) - \int_S \mathbf{U}(x-y) \circ n(y) dS(y). \end{aligned}$$

Эта формула имеет следующее интегральное представление.

**Лемма 3.** Характеристическая функция множества  $S^-$ , ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова  $S$ , представима в виде

$$\begin{aligned} 4\pi H_S^-(x) = (\omega + \mathbf{F}) \circ \int_{S^-} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r} (\omega - \{F + (i\omega - f - r^{-1})e_{x-y}\}) dV(y) - \\ - \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r} (\omega - \{iF + (i\omega - f)e_{x-y}\}) \circ n(y) dS(y) - \\ - \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} e_{y-x} \circ n(y) dS(y). \end{aligned} \quad (15)$$

Для  $x \notin S$  все интегралы регулярны, а для  $x \in S$  второй интеграл является сингулярным и берётся в смысле главного значения. На границе, по определению,  $H_S^-(x) = 1/2$ .

**Доказательство.** Формула (15) вытекает непосредственно из представления функции Грина (13). Если  $x \notin S$ , то все подынтегральные функции непрерывны, а множество интегрирования ограничено, поэтому интегралы существуют и для таких  $x$  являются непрерывными и дифференцируемыми функциями.

Для  $x \in S$  первый интеграл в формуле (15) имеет слабую сингулярность порядка  $1/r^2$ , интегрируемую при  $y = x$ , так как интеграл берётся по трёхмерному множеству. Второй поверхностный интеграл также имеет слабую интегрируемую сингулярность порядка  $1/r$ . Однако у третьего поверхностного интеграла особенность порядка  $1/r^2$  является сильной и, вообще говоря, неинтегрируемой:

$$I(x) = \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} e_{x-y} \circ n(y) dS(y) = \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{e_{y-x}, n(y) - [e_{y-x}, n(y)]\} dS(y).$$

Вычислим его значение при  $x \rightarrow x^* \in S$ . Обозначим  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x^*$  на поверхности  $S$  через  $O_\varepsilon(x^*) = \{y \in S : \|y - x^*\| < \varepsilon\}$ .

Пусть  $x \in S$ ,  $x - x^* = -\varepsilon_1 n(x^*)$ . Разобьём этот интеграл на два. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &= - \int_{S \setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{x-y}n(y)) - [e_{x-y}n(y)]\} dS(y) - \\ &- \int_{S \setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{x-y}n(y)) - [e_{x-y}n(y)]\} dS(y) \xrightarrow{x \rightarrow x^*} I(x^*, \varepsilon), \\ I(x^*, \varepsilon) &= - \int_{S \setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r(x^*,y)+i(F,x^*-y)}}{r^2} \{(e_{x^*-y}n(y)) - [e_{x^*-y}n(y)]\} dS(y) - \\ &- \lim_{x \rightarrow x^*} \int_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{y-x}, n(y)) - [e_{y-x}, n(y)]\} dS(y). \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое будет регулярным для всех  $x$ , в том числе для  $x$  на поверхности, так как подынтегральные функции непрерывны в области интегрирования. При  $x \in S$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  оно стремится к интегралу в смысле главного значения, который существует в силу того, что  $e_{x-y} = -e_{y-x}$ .

Пусть  $x - x^* = -\varepsilon_1 n(x^*)$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Вычислим второе слагаемое. Заметим, что

$$\int_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y-x^2)} (e_{y-x}, n(y)) dS(y) = \Omega(x) + O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi,$$

где  $\Omega(x)$  – телесный угол, который доставляет конус с вершиной в точке  $x$  и с образующими, проходящими через границу окрестности  $O_\varepsilon(x^*)$ .

Далее, поскольку  $n(y) \rightarrow n(x^*)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и при всех  $x \notin S$  справедливо соотношение

$$\int_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y-x)^2} [e_{y-x}, n(y)] dS(y) = \int_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{(1+O(\varepsilon))}{(y-x)^2} [n(x^*), n(y)] dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y-x)^2} [e_{y-x}, n(y)] dS(y) = 0.$$

С учётом этого, суммируя, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^*} \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r} (-\omega + \{iF + (i\omega - f - r^{-1})e_{y-x}\}) \circ n(y) dS(y) = \\ = \text{V.P.} \int_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r} (-\omega + \{iF + (i\omega - f - r^{-1})e_{y-x}\}) \circ n(y) dS(y) + 2\pi. \end{aligned}$$

Так как  $4\pi H_S^-(x) = 4\pi$  для  $x \in S^-$ , то, переходя в этом равенстве к пределу при  $x \rightarrow S$  и перенося  $2\pi$  в левую часть, приходим с учётом предыдущего, согласно определению функции  $H_S^-(x)$  на границе, к формуле (15). Теорема доказана.

Если положить  $\mathbf{F} = 0$ , то отсюда, как следствие, получим аналог формулы Гаусса через фундаментальное решение стационарного обобщённого уравнения Максвелла (ОУМ).

**Следствие 1.** Характеристическая функция множества  $S^-$ , ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова  $S$ , представима в виде

$$4\pi H_S^-(x) = \omega \int_{S^-} \frac{e^{i\omega r}}{r} (\omega + \{i(\omega - r^{-1})e_{y-x}\}) dV(y) - \int_S \frac{e^{i\omega r}}{r} (\omega + i(\omega - r^{-1})e_{y-x}) \circ n(y) dV(y).$$

Если здесь положить  $\omega = 0$ , то отсюда, как следствие, получим аналог формулы Гаусса через фундаментальное решение статического ОУМ.

**Следствие 2.** Характеристическая функция множества  $S^-$ , ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова  $S$ , представима в виде

$$4\pi H_S^-(x) = - \int_S \frac{e_{y-x} \circ n(y)}{r^2} dS(y) = \int_S \frac{(e_{y-x}, n(y))}{r^2} dS(y) - \int_S \frac{[e_{y-x}, n(y)]}{r^2} dS(y).$$

Скалярная часть этого равенства

$$4\pi H_S^-(x) = \int_S \frac{(e_{y-x}, n(y))}{r^2} dS(y)$$

– это формула Гаусса, а векторная часть равна нулю:

$$\int_S \frac{[e_{y-x}, n(y)]}{r^2} dS(y) = 0.$$

Здесь для  $x \in S$  интегралы берутся в смысле главного значения.

**8. Сингулярные граничные интегральные уравнения.** Следствием теоремы 4 и леммы 3 является

**Теорема 5.** Если бикватернион  $\mathbf{G}(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 3, то существуют решения уравнения (4), при этом все они удовлетворяют граничному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} 2\pi \mathbf{B}_S(x) = \omega \int_{y \in S^-} \|y\|^{-1} e^{ik\|y\|-(F,y)} \mathbf{G}(x-y) dV(y) - \int_{y \in S^-} r^{-1} e^{ikr-(F,x-y)} \nabla \mathbf{G}(y) dV(y) + \\ + e^{-(F,x)} \mathbf{F}^- \circ \left\{ \int_{y \in S^-} r^{-1} e^{ikr+(F,y)} \mathbf{G}(y) dV(y) - \int_S r^{-1} e^{ikr+(F,y)} n(y) \circ \mathbf{B}_S(y) dV(y) \right\} + \\ + \omega \int_S r^{-1} e^{ikr+(F,y)} n(y) \circ \mathbf{B}_S(y) dV(y) - \text{V.P.} \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y). \quad (16) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Вычислим сингулярное слагаемое в формуле (16) при  $x \in S^-$  с учётом формулы (15) для внутренних точек. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) = \\ &= \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) + \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) = \\ &= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) + \nabla \int_S \left\{ \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) \right\} dS(y) = \\ &= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) + \int_S \left\{ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} n(y) \right\} dS(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) = \\ &= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} dS(y) + 4\pi \mathbf{B}_S(x^*). \end{aligned}$$

Здесь  $x^* \in S$ . Переходя в первом слагаемом получившегося выражения к пределу при  $x \rightarrow x^*$ , с учётом формулы (15) для граничных точек, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x^*} \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} dS(y) = \\ &= \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} dS(y) = \\ &= \text{V.P.} \int_S n(y) \circ \mathbf{B}_S(y) \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} - \text{V.P.} \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} dS(y) = \\ &= \text{V.P.} \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} dS(y) - 2\pi \mathbf{B}_S(x^*). \end{aligned}$$

Переходя в формуле теоремы 4 к пределу при  $x \rightarrow x^*$ , с учётом этих соотношений приходим к формуле (16). Теорема доказана.

**Заключение.** Построенное в теореме 5 граничное бикватернионное уравнение эквивалентно четырём сингулярным граничным интегральным уравнениям для четырёх комплексных компонент, которые связывают их с его значением на границе. Значения на границе определяются значениями восьми действительных функций, определяющих действительную и мнимую части на границе. Следовательно, на границе из восьми граничных функций можно задавать только четыре. Остальные четыре определяются решением системы из четырёх СГИУ, которые являются разрешающими для краевых задач для стационарного МД-уравнения (4).

При  $\mathbf{F} = 0$  получим СГИУ и решения стационарных краевых задач для ОУМ [12]. При  $\mathbf{F} = i\mathbf{f}$  получим СГИУ и решения стационарных краевых задач для уравнений Дирака [14, 15].

Если исследуется периодический по времени процесс под действием периодических внешних источников возмущений, то, разлагая решение и действие источников в ряды Фурье по времени, получим рассмотренные здесь задачи для каждой гармоники ряда. Сумма решений для каждой гармоники ряда даст решение периодической по времени задачи.

Если положить  $\omega = 0$ , то эти формулы дают решения статических краевых задач для уравнений Максвелла и Дирака.

Так как уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, то построенные решения могут использоваться для решения краевых задач электродинамики и теории поля при исследовании периодических по времени решений для электромагнитных (ЭМ) полей и элементарных частиц. В этом случае граничные условия задаются, исходя из физических представлений об исследуемом процессе.

Полученные представления могут использоваться в экспериментах, поскольку зачастую полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая соответствующее СГИУ.

Заметим также, что трансформация электрогравимагнитных (ЭГМ) зарядов и токов под действием внешних электрогравимагнитных полей описывается бикватернионными дифференциальными уравнениями вида (1) (см. [16, 17]). Построенные решения можно использовать для решения краевых задач в ЭГМ-полях.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (гранты AP09261033, AP09258948).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W.R.* On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions // *Proc. of the Royal Irish Academy* (Nov 13, 1843). P. 424–434.
2. *Edmonds J.D.* Eight Maxwell equations as one quaternionic // *Amer. J. Phys.* 1978. V. 46. № 4. P. 430.
3. *Шпилькер Г.Л.* Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // *Докл. АН СССР*. 1983. Т. 272. № 6. С. 1359–1363.
4. *Rodrigues Jr. W.A., Capelas de Oliveira E.* Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin Clifford bundles // *Int. J. of Theor. Phys.* 1990. V. 29. P. 397–412.
5. *Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D.* Foundations of quaternion quantum mechanics // *J. Math. Phys.* 1992. V. 3. P. 207–220.
6. *Adler S.L.* Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York, 1995.
7. *De Leo S., Rodrigues Jr. W.A.* Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions // *Int. J. Theor. Phys.* 1997. V. 36. P. 2725–2757.
8. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. 2004. Т. 1. № 1. С. 111–127.
9. *Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M.* Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations // *Apeiron*. 2005. V. 12. № 4. P. 371.
10. *Марчук Н.Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М.; Ижевск, 2009.
11. *Алексеева Л.А.* Бикватернионные волновые уравнения и свойства их обобщённых решений // *Дифференц. уравнения*. 2021. Т. 57. № 5. С. 614–624.
12. *Alexeyeva L.A.* Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications*. 2012. V. 7. № 1. P. 19–39.
13. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
14. *Алексеева Л.А.* Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // *Мат. журн.* 2011. Т. 11. № 1. С. 30–38.
15. *Alexeyeva L.A.* Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // *Progress in Analysis*. Moscow, 2013. *Proc. of the 8th Congress of ISAAC (Moscow, Aug 22–27, 2011)*. P. 153–161.
16. *Alexeyeva L.A.* Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // *J. of Phys. Math.* 2009. V. 1. Art. ID S090604.
17. *Alexeyeva L.A.* Biquaternionic form of laws of electro-gravimagnetic charges and currents interactions // *J. of Modern Phys.* 2016. V. 7. P. 1351–1358.

Институт математики и математического моделирования  
Министерства образования и науки Республики Казахстан,  
г. Алматы

Поступила в редакцию 28.11.2021 г.  
После доработки 30.03.2022 г.  
Принята к публикации 21.04.2022 г.



## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2022 г. А. Н. Коненков

Рассматриваются равномерно параболические уравнения с одной пространственной переменной как дивергентного, так и недивергентного вида без младших членов. Старший коэффициент уравнения предполагается не зависящим от времени, никаких условий гладкости на него не накладывается. Устанавливается асимптотика слабого фундаментального решения и его производных по временной переменной любого порядка при условии, что старший коэффициент уравнения имеет слабый предел на бесконечности. Кроме того, рассматривается вопрос об асимптотической близости фундаментальных решений и скорость стабилизации производных по времени решений задачи Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122040057, EDN: BZPNYP

**Введение.** Рассматривается параболическое уравнение

$$p(x)\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (1)$$

в котором измеримая функция  $p$  удовлетворяет условию

$$0 < \mu \leq p(x) \leq \mu^{-1} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

и такова, что существуют пределы

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R p(x) dx = a_1^2, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^0 p(x) dx = a_2^2, \quad a_1, a_2 > 0. \quad (3)$$

При выполнении условий (2) и (3) и гёльдеровости коэффициента  $p$  А.К. Гуцин и В.П. Михайлов [1] получили необходимые и достаточные условия на начальную функцию, при которых решение задачи Коши для уравнения (1) стабилизируется при  $t \rightarrow +\infty$ . Подобные результаты для уравнений как дивергентного, так и недивергентного вида установлены Ф.О. Порпером и С.Д. Эйдельманом [2]. В.В. Жиковым [3] найдены необходимые и достаточные условия стабилизации для уравнений дивергентного вида в многомерном случае. Обзор результатов по стабилизации решений задачи Коши имеется в [4].

Для параболических уравнений дивергентного вида без младших членов первые оценки их фундаментальных решений  $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ , в которых постоянные не зависят от гладкости коэффициентов, впервые получены Дж. Нэшем [5]. Д. Аронсон [6] установил двусторонние гауссовы оценки фундаментальных решений

$$K_1(t - \tau)^{-n/2} e^{-k_1(x-\xi)^2/(t-\tau)} \leq \Gamma(x, \xi, t, \tau) \leq K_2(t - \tau)^{-n/2} e^{-k_2(x-\xi)^2/(t-\tau)}.$$

Здесь константы зависят только от размерности  $n$  уравнения и его постоянной параболичности. В работе [7] для уравнения с одной пространственной переменной без младших членов с коэффициентами, не зависящими от времени, показано, что фундаментальное решение  $\Gamma(x, \xi, t, \tau) = \Gamma(x, \xi, t - \tau)$  является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной  $t$  и справедливы оценки

$$|\partial_t^m \partial_x^l \Gamma(x, \xi, t)| \leq C_m t^{-(2m+l+1)/2} e^{-c_m(x-\xi)^2/t}, \quad l = 0, 1, \quad m \geq 0, \quad (4)$$

где постоянные  $C_m$  и  $c_m$  зависят только от постоянной параболичности. Из последнего неравенства следует, в частности, что функции  $t^{n+1/2}\partial_t^n\Gamma(x, \xi, t)$  являются ограниченными в полупространстве  $t > 0$ . В настоящей работе устанавливается, что если выполнено условие (3), то эти функции стабилизируются при  $t \rightarrow +\infty$ . Это даёт возможность выписать главный член асимптотики производных  $\partial_t^n\Gamma(x, \xi, t)$ .

**1. Асимптотическая близость фундаментальных решений.** Получим асимптотику фундаментального решения уравнения (1), сравнивая его с фундаментальным решением некоторого “модельного” уравнения. Поэтому сначала рассмотрим вопрос о близости фундаментальных решений двух уравнений вида (1) при больших  $t$ , если их коэффициенты в определённом смысле близки при  $x \rightarrow \infty$ . Асимптотическая близость решений задачи Коши изучалась в работе [2].

Даже для непрерывного коэффициента  $p$  уравнение (1) не имеет, вообще говоря, классического фундаментального решения. Однако для  $p \in L_\infty(\mathbb{R})$  при выполнении условия равномерной параболичности (2) существует слабое фундаментальное решение  $\Gamma$ , причём функция  $\Gamma(x, \xi, t)/p(\xi)$  является непрерывной по совокупности аргументов при  $t > 0$  [7].

Для уравнения (1) с коэффициентом  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , через  $\Gamma_i$  обозначим его слабое фундаментальное решение.

Через  $\delta$  (возможно, с индексами) будем обозначать различные функции, положительные и невозрастающие на  $[0, \infty)$ , такие, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = 0$ . Будем говорить, что функция  $f$  стабилизируется к числу  $A$  со скоростью не меньшей чем  $\delta(t)$ , если  $|f(t) - A| \leq \delta(t)$  для всех  $t \geq t_0 > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть для коэффициентов  $p_1$  и  $p_2$  выполнены условие (2) и для некоторого  $x \in \mathbb{R}$  оценка

$$\left| \frac{1}{R} \int_x^{x+R} (p_1(y) - p_2(y)) dx \right| \leq \delta(|R|), \quad R \neq 0. \quad (5)$$

Тогда для  $n \geq 0$  и  $\xi \in \mathbb{R}$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} (\partial_t^n \Gamma_1(x, \xi, t)/p_1(\xi) - \partial_t^n \Gamma_2(x, \xi, t)/p_2(\xi)) = 0.$$

Если для каждого компакта  $Q \subset \mathbb{R}$  существует функция  $\delta_Q$ , для которой условие (5) справедливо при всех  $x \in Q$ , то сходимость равномерна по  $(x, \xi)$  на компактах  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

Установим предварительно несколько утверждений о стабилизации функций одного переменного.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f \in C^2(0, \infty)$  удовлетворяет оценке  $|f''(t)| \leq Mt^{-2}$  и выполняется соотношение  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = A \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t f'(t) = 0.$$

Если  $f(t)$  стабилизируется к  $A$  со скоростью не меньшей чем  $\delta(t)$ , то найдётся функция  $\delta_1$ , определяемая лишь числом  $M$  и функцией  $\delta$ , такая, что  $t f'(t)$  стабилизируется к нулю со скоростью не меньшей чем  $\delta_1(t)$ .

**Доказательство.** Для  $\varepsilon > 0$  имеем

$$f(t + \varepsilon t) = f(t) + \varepsilon t f'(t) + \frac{\varepsilon^2 t^2 f''(t_1)}{2}, \quad t_1 \in (t, t + \varepsilon t),$$

$$|t f'(t)| \leq \varepsilon^{-1} |f(t + \varepsilon t) - f(t)| + \frac{\varepsilon}{2} |t^2 f''(t_1)|,$$

$$|t f'(t)| \leq 2\varepsilon^{-1} \delta(t) + \frac{\varepsilon M}{2}.$$

Минимизируя по  $\varepsilon > 0$  правую часть последнего неравенства, получаем  $|tf'(t)| \leq 2\sqrt{M\delta(t)}$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  для некоторого  $\alpha \in \mathbb{R}$  удовлетворяет оценкам  $|f^{(k)}(t)| \leq C_k t^{\alpha-k}$ ,  $t > 0$ ,  $k \geq 1$ , и, кроме того,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\alpha} f(t) = A$ . Тогда для  $n \in \mathbb{N}$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = (\alpha)_n A, \quad (6)$$

где  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$  – убывающий факториал. Если функция  $t^{-\alpha}f(t)$  стабилизируется к  $A$  со скоростью не меньшей чем  $\delta(t)$ , то для каждого  $n$  найдётся функция  $\delta_n$ , определяемая лишь числами  $n$ ,  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, n+2$ , и функцией  $\delta$ , такая, что скорость стабилизации в (6) не меньше чем  $\delta_n(t)$ .

**Доказательство** проведём индукцией по  $n$ . Пусть утверждение верно для некоторого  $n \geq 0$ . Тогда функция  $g(t) = t^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$  удовлетворяет оценке  $|g''(t)| \leq Mt^{-2}$ , где  $M$  зависит лишь от  $n$ ,  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, n+2$ , и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = (\alpha)_n A$ . По лемме 1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} tg'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((n-\alpha)t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) + t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t)) = 0$$

и  $|tg'(t)| \leq \delta_n^*(t)$ , откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t) = (\alpha-n) \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = (\alpha-n)(\alpha)_n A = (\alpha)_{n+1} A,$$

причём

$$\begin{aligned} |t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t) - (\alpha)_{n+1} A| &\leq |tg'(t)| + |n-\alpha| |t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) - (\alpha)_n A| \leq \\ &\leq \delta_n^*(t) + |n-\alpha| \delta_n(t) = \delta_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим через  $I_t^{1/2}$  оператор дробного интегрирования порядка  $1/2$ , т.е.

$$I_t^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} f(\tau) d\tau.$$

**Лемма 3.** Пусть  $f \in L_\infty(0, \infty)$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t) = 0.$$

Если  $|f(t)| \leq \delta(t)$ , то найдётся функция  $\delta_1$ , определяемая лишь  $\|f\|_{L_\infty(0, \infty)}$  и функцией  $\delta$ , такая, что  $t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t)$  стабилизируется со скоростью не меньшей чем  $\delta_1(t)$ .

**Доказательство.** Для  $t \geq 4$  имеем

$$\begin{aligned} |\sqrt{\pi} t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t)| &= \left| t^{-1/2} \left( \int_0^{t^{1/2}} + \int_{t^{1/2}}^t \right) (t-\tau)^{-1/2} f(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{\|f\|_{L_\infty(0, \infty)}}{(t-t^{1/2})^{1/2}} + t^{-1/2} \delta(t^{1/2}) \int_{t^{1/2}}^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau \leq \sqrt{2} \|f\|_{L_\infty(0, \infty)} t^{-1/2} + 2\delta(t^{1/2}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть функция  $f \in C^1(0, \infty)$  удовлетворяет неравенствам  $|f^{(k)}(t)| \leq Ct^{-1/2-k}$ ,  $k = 0, 1$ , и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} \int_0^t f(\tau) d\tau = 0$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2} f(t) = 0$ . Если  $t^{-1/2} \int_0^t f(\tau) d\tau$  стабилизируется со скоростью не меньшей чем  $\delta(t)$ , то найдётся функция  $\delta_1$ , определяемая лишь числом  $C$  и функцией  $\delta$ , такая, что  $t^{1/2} f(t)$  стабилизируется к нулю со скоростью не меньшей чем  $\delta_1(t)$ .

**Доказательство.** Положим  $g(t) = t^{-1/2} \int_0^t f(\tau) d\tau$ . Тогда  $|g(t)| \leq 2C$ ,

$$|g'(t)| = \left| -\frac{1}{2}t^{-1}g(t) + t^{-1/2}f(t) \right| \leq C_1 t^{-1},$$

$$|g''(t)| = \left| \frac{3}{4}t^{-2}g(t) - t^{-3/2}f(t) + t^{-1/2}f'(t) \right| \leq C_2 t^{-2}.$$

Согласно лемме 1 получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t g'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2}g(t) + t^{1/2}f(t) \right) = 0,$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2}f(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

и

$$|t^{1/2}f(t)| \leq \frac{1}{2}|g(t)| + t|g'(t)| \leq \frac{1}{2}\delta(t) + \delta^*(t) = \delta_1(t).$$

Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть сначала коэффициенты  $p_i$  имеют на  $\mathbb{R}$  ограниченные производные любого порядка. Без ограничения общности положим  $x = 0$  и обозначим

$$V(\xi, t) = \Gamma_1(0, \xi, t)/p_1(\xi) - \Gamma_2(0, \xi, t)/p_2(\xi).$$

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t^{1/2} V(1, t) = 0. \quad (7)$$

Для этого воспользуемся тауберовой леммой из работы [2], утверждающей, что если функция  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет неравенствам

$$|g^{(k)}(t)| \leq Ct^{-k}, \quad k \leq 2, \quad (8)$$

и для её преобразования Лапласа

$$\tilde{g}(t) = \mathcal{L}[g](t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t) dt$$

имеет место оценка

$$|\lambda \tilde{g}(\lambda)| \leq \delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad |\lambda| < 1, \quad (9)$$

то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$  и  $|g(t)| \leq \delta_2(t)$ , где функция  $\delta_2$  зависит лишь от  $C$  и  $\delta_1$ . Таким образом, для доказательства соотношения (7) достаточно для функции  $g(t) = I_t^{1/2} V(1, t)$  установить оценки (8) и (9)

Докажем (8). С учётом равенств  $\partial_t^k V(1, 0) = 0$ ,  $k \geq 0$ , имеем

$$\sqrt{\pi} \partial_t^k I_t^{1/2} V(1, t) = \sqrt{\pi} I_t^{1/2} \partial_t^k V(1, t) = \left[ \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t \right] (t - \tau)^{-1/2} \partial_\tau^k V(1, \tau) d\tau = J_1^k + J_2^k,$$

$$|J_1^0| \leq C \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-1/2} \tau^{-1/2} d\tau = C_1,$$

$$|J_1^1| = \left| \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-1/2} \partial_\tau V(1, \tau) d\tau \right| = \left| (t/2)^{-1/2} V(1, t/2) - \frac{1}{2} \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-3/2} V(1, \tau) d\tau \right| \leq C_2 t^{-1},$$

$$|J_1^2| = \left| (t/2)^{-1/2} \partial_t V(1, t/2) - \frac{1}{2} (t/2)^{-3/2} V(1, t/2) + \frac{3}{4} \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-5/2} V(1, \tau) d\tau \right| \leq C_3 t^{-2},$$

$$|J_2^k| \leq C \int_{t/2}^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^{-1/2-k} d\tau = C'_k t^{-k}, \quad k \leq 2.$$

Докажем (9). Обозначим

$$G_i(x, \xi, \lambda) = \mathcal{L}[\Gamma_i(x, \xi, \cdot)/p_i(\xi)](\lambda), \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{V}(\xi, \lambda) = \mathcal{L}[V(\xi, \cdot)](\lambda) = G_1(0, \xi, \lambda) - G_2(0, \xi, \lambda),$$

и для функций  $u_{0i} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  положим

$$U_i(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(0, y, \lambda) p_i(y) u_{i0}(y) dy, \quad i = 1, 2.$$

Справедливо представление [2]

$$\begin{aligned} U_1(\lambda) - U_2(\lambda) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} G_1(0, y, \lambda) (p_1(y) - p_2(y)) \int_{-\infty}^{\infty} G_2(y, \xi, \lambda) p_2(\xi) u_{20}(\xi) d\xi dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} G_2(0, \xi, \lambda) (p_1(y) u_{10}(y) - p_2(y) u_{20}(y)) dy. \end{aligned}$$

Через  $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \omega(\varepsilon^{-1}x)$ ,  $\varepsilon > 0$ , обозначим дельтообразное семейство функций, в котором неотрицательная функция  $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$ . Зафиксируем  $\xi \in \mathbb{R}$  и положим  $u_{i0}^\varepsilon(x) = \omega_\varepsilon(x - \xi)/p_i(x)$ . Устремляя в предыдущем представлении  $\varepsilon$  к нулю, получаем

$$\tilde{V}(\xi, \lambda) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} G_1(0, y, \lambda) (p_1(y) - p_2(y)) G_2(y, \xi, \lambda) dy = \lambda \Phi(\xi, \lambda).$$

Для функции  $\Phi$  при  $\xi \neq 0$  справедлива оценка [2]

$$|\Phi(\xi, \lambda)| \leq \lambda^{-3/2} \delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad |\xi| < 2|\lambda|^{-1},$$

где функция  $\delta_1$  зависит только от  $\mu$  и  $\delta$ . Так как  $\tilde{g}(\lambda) = \mathcal{L}[I_t^{1/2} V(1, \cdot)](\lambda) = \lambda^{-1/2} \tilde{V}(1, \lambda)$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  [8, гл. 2, § 7.2], то

$$|\lambda \tilde{g}(\lambda)| = |\lambda^{3/2} \Phi(1, \lambda)| \leq \delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad |\lambda| \leq 1,$$

что завершает доказательство оценки (9) и вместе с ней и соотношения (7).

По лемме 3 для функции  $g(t) = I_t^{1/2}V(1, t)$  с учётом оценки (8) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} I_t^{1/2} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} \int_0^t V(1, \tau) d\tau = 0.$$

Применяя последовательно леммы 4 и 2 при  $\alpha = 0$ , будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2} V(1, t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n V(1, t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

причём для каждого  $n$  скорость стабилизации не превышает некоторой функции  $\delta_n$ , зависящей лишь от  $\mu$ ,  $n$  и  $\delta$ .

Используя оценки (4), для произвольного  $\xi \in \mathbb{R}$  приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |t^{n+1/2} \partial_t^n V(\xi, t)| &\leq |t^{n+1/2} (\partial_t^n V(\xi, t) - \partial_t^n V(1, t))| + |t^{n+1/2} \partial_t^n V(1, t)| \leq \\ &\leq C_n |\xi - 1| t^{-1/2} + \delta_n(t) \leq C_n (|\xi| + 1) t^{-1/2} + \delta_n(t) \equiv \delta_n^*(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Если рассматривать стабилизацию для произвольного  $x$ , то в выражении для  $\delta_n^*$  вместо  $|\xi|$  появится  $|x - \xi|$ . Отсюда вытекает последнее утверждение теоремы о равномерной сходимости по  $(x, \xi)$  на компактах.

Наконец, если  $p_i \in L_\infty(\mathbb{R})$ , то сглаженные коэффициенты  $p_i^{(m)} = p_i * \omega_{1/m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , удовлетворяют условию равномерной параболичности (2) с той же постоянной  $\mu$ . Для соответствующих фундаментальных решений  $\Gamma_i^{(m)}$  производные  $\partial_t^n \Gamma_i^{(m)}(x, \xi, t)/p_i^{(m)}(\xi)$  сходятся при  $m \rightarrow \infty$  к  $\partial_t^n \Gamma_i(x, \xi, t)/p_i(\xi)$  равномерно на компактах  $Q \subset \mathbb{R}^3$  ([7, гл. 5, § 3, доказательство свойства 10]). Поэтому для слабых фундаментальных решений также справедливо неравенство (10). Теорема доказана.

**2. Асимптотика фундаментальных решений.** Установим асимптотику фундаментального решения при условии, что коэффициент  $p$  имеет слабый предел на бесконечности.

**Теорема 2.** Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда для  $n \geq 0$  и всех  $x, \xi \in \mathbb{R}$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n \Gamma(x, \xi, t)/p(\xi) = \frac{1}{(a_1 + a_2)\Gamma(1/2 - n)}, \quad (11)$$

причём сходимость равномерная по  $(x, \xi)$  на компактах  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

**Доказательство.** Пусть  $Z(x, t; c) = (4\pi ct)^{-1/2} e^{-x^2/4ct}$ ,  $c > 0$ , – фундаментальное решение уравнения теплопроводности  $\partial_t u - c \partial_x^2 u = 0$ . Положим

$$p_0(x) = \begin{cases} a_1^2, & x > 0, \\ a_2^2, & x < 0, \end{cases}$$

и обозначим через  $\Gamma_0(x, \xi, t)$  фундаментальное решение оператора  $L_0 u \equiv p_0(x) \partial_t u - \partial_x^2 u$ . Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_0(x, \xi, t) &= \left[ Z(x - \xi, t, a_1^{-2}) + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} Z(x + \xi, t, a_1^{-2}) \right] \theta(x) \theta(\xi) + \\ &+ \left[ Z(x - \xi, t, a_2^{-2}) + \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2} Z(x + \xi, t, a_2^{-2}) \right] \theta(-x) \theta(-\xi) + \\ &+ \frac{2a_2^2}{a_1(a_1 + a_2)} Z(x - a_2 \xi / a_1, t, a_1^{-2}) \theta(x) \theta(-\xi) + \frac{2a_1^2}{a_2(a_1 + a_2)} Z(x - a_1 \xi / a_2, t, a_2^{-2}) \theta(-x) \theta(\xi), \end{aligned}$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Это равенство получено с помощью преобразования Лапласа и решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Непосредственно проверяется, что функция  $\Gamma_0$  является слабым фундаментальным решением для оператора  $L_0$  в смысле работы [7]. Кроме того, доопределив по непрерывности  $\Gamma_0(x, \xi, t)/p_0(\xi)$  при  $x = 0$  и  $\xi = 0$ , получим непрерывную в  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  функцию, причём

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2} \Gamma_0(x, \xi, t)/p_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)}$$

равномерно по  $(x, \xi)$  на компактах.

Для  $d > 0$  функция

$$\delta_d(R) = \sup_{\substack{-d \leq x \leq d \\ |T| > R}} \left| \frac{1}{T} \int_x^{x+T} (p(y) - p_0(y)) dy \right|$$

является невозрастающей, стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  и не превосходит некоторой функции  $\tilde{\delta}$ , зависящей только от  $\mu$ ,  $d$  и  $\delta$  [1].

По теореме 1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2} \Gamma(x, \xi, t)/p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)}$$

и сходимостъ равномерная на компактах. Из леммы 2 при  $\alpha = -1/2$  теперь следует, что выполнено соотношение (11) при  $n \geq 1$ , так как  $(-1/2)_n/\sqrt{\pi} = 1/\Gamma(1/2 - n)$ . Теорема доказана.

Поскольку  $(t^{-1/2})^{(n)} = \sqrt{\pi}/(\Gamma(1/2 - n)t^{n+1/2})$ , из предыдущей теоремы вытекает

**Следствие 1.** Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление

$$\Gamma(x, \xi, t)/p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)t^{1/2}} + H(x, \xi, t),$$

где

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n H(x, \xi, t) = 0, \quad n \geq 0,$$

равномерно по  $(x, \xi)$  на компактах.

**Следствие 2.** Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление

$$\Gamma(x, \xi, t)/p(\xi) = \frac{g(x, \xi, t)}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)t^{1/2}},$$

где

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(x, \xi, t) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \partial_t^n g(x, \xi, t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно по  $(x, \xi)$  на компактах.

**Доказательство.** Положим  $f(t) = t^{1/2} \Gamma(x, \xi, t)/p(\xi)$ . Из оценки (4) вытекает, что  $|f^{(n)}(t)| \leq C_n t^{-n}$ ,  $n \geq 0$ , и по теореме 2 – что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (\sqrt{\pi}(a_1 + a_2))^{-1}$ . Применяя лемму 2 при  $\alpha = 0$ , получаем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \partial_t^n f(t) = 0$ . Следствие доказано.

Рассмотрим теперь уравнение дивергентного вида

$$\partial_t u - \partial_x(p(x)\partial_x u) = 0 \tag{12}$$

и обозначим его фундаментальное решение через  $\tilde{\Gamma}(x, \xi, t)$ .

**Теорема 3.** Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда для  $n \geq 0$  и всех  $x, \xi \in \mathbb{R}$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n \tilde{\Gamma}(x, \xi, t) = \frac{1}{(a_1 + a_2)\Gamma(1/2 - n)},$$

причём сходимостъ равномерная по  $(x, \xi)$  на компактах  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

**Доказательство.** Для гладкого коэффициента  $p$  заменой  $x \mapsto q(x) = \int_0^x dy/p(y)$  уравнение (12) сводится к уравнению не дивергентного вида (1) с коэффициентом  $p_1(x) = p(q^{-1}(x))$ , где  $q^{-1}$  – обратная к  $q$  функция. Обозначим его фундаментальное решение через  $\Gamma(x, \xi, t)$ . Справедливо равенство [2]

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi, t) = \Gamma(q(x), q(\xi), t)/p_1(q(\xi)). \quad (13)$$

Для коэффициента  $p \in L_\infty(\mathbb{R})$  рассмотрим его приближение гладкими функциями  $p_\varepsilon = p * \omega_\varepsilon$ . Учитывая равномерную сходимость фундаментальных решений к соответствующим слабым фундаментальным решениям при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  на компактах  $Q \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  [7], заключаем, что равенство (13) справедливо и для слабых фундаментальных решений. Требуемое утверждение вытекает теперь из теоремы 2. Теорема доказана.

**Следствие 3.** Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)t^{1/2}} + H(x, \xi, t),$$

где

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n H(x, \xi, t) = 0, \quad n \geq 0,$$

равномерно по  $(x, \xi)$  на компактах.

**Следствие 4.** Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi, t) = \frac{g(x, \xi, t)}{\sqrt{\pi}(a_1 + a_2)t^{1/2}},$$

где

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(x, \xi, t) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \partial_t^n g(x, \xi, t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно по  $(x, \xi)$  на компактах.

Уже пример фундаментального решения  $Z(x, t; c)$  уравнения теплопроводности показывает, что в утверждениях этого пункта нельзя заменить равномерную сходимость на компактах на равномерную сходимость во всей плоскости.

**3. Скорость стабилизации производных решения задачи Коши.** Отметим ещё стабилизацию функций  $t^n \partial_t^n u$ ,  $n \geq 1$ , для ограниченного решения  $u$  задачи Коши

$$Lu = 0, \quad u|_{t=0} = \psi \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad (14)$$

если имеется стабилизация самого решения. Существование у коэффициента  $p$  предельных средних (3) при этом не предполагается.

**Теорема 4.** Пусть для уравнения (1) выполнено условие (2), а функция  $u$  является ограниченным в  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  решением задачи (14). Если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x_0, t) = 0$$

для некоторого  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \partial_t^n u(x, t) = 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \geq 1$ , где сходимость равномерная на компактах  $K \subset \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Так как решение задачи Коши (14) единственно в классе ограниченных функций [7], то оно представляется в виде потенциала Пуассона:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, y, t) \psi(y) dy.$$



Используя оценку (4) для фундаментального решения, получаем

$$|\partial_t^n u(x, t)| \leq \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_t^n \Gamma(x, y, t)| dy \leq C_n \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} t^{-n}, \quad n \geq 0.$$

Утверждение теоремы для точки  $x_0$  следует теперь из леммы 2 при  $\alpha = 0$ :

$$|\partial_t^n u(x_0, t)| \leq \delta_n(t).$$

Для произвольного  $x$  имеем

$$|\partial_x \partial_t^n u(x, t)| \leq \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x \partial_t^n \Gamma(x, y, t)| dy \leq C'_n \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} t^{-n-1/2}$$

и

$$t^n |\partial_t^n u(x, t)| \leq t^n (|\partial_t^n u(x, t) - \partial_t^n u(x_0, t)| + |\partial_t^n u(x_0, t)|) \leq C'_n |x - x_0| t^{-1/2} \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \delta_n(t).$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуцин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с одной пространственной переменной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 181–202.
2. Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д. Асимптотическое поведение классических и обобщенных решений одномерных параболических уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1978. Т. 36. С. 85–130.
3. Жиков В.В. О стабилизации решений параболических уравнений // Мат. сб. 1977. Т. 104 (146). № 4 (12). С. 597–616.
4. Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 4 (364). С. 145–212.
5. Nach J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. № 4. P. 931–954.
6. Aronson D.G. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 890–896.
7. Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д. Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. Вып. 3 (237). С. 107–156.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Рязанский государственный университет  
им. С.А. Есенина

Поступила в редакцию 14.06.2020 г.  
После доработки 14.06.2020 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.4+517.988.6

# РАЗРУШЕНИЕ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИКЕ, ЗАДАННОЙ УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

© 2022 г. В. Ж. Сакбаев, А. Д. Ширяева

Исследованы особенности динамики квантовых состояний, порождаемой фокусирующим нелинейным уравнением Шрёдингера. Установлены взаимосвязи между явлениями самофокусировки, неограниченным возрастанием градиента решения и перехода квантового состояния из чистого в смешанное. Показано, что продолжение динамики чистого квантового состояния через момент градиентного взрыва может быть реализовано с помощью частичного следа нелинейной динамики чистого состояния в расширенном гильбертовом пространстве.

DOI: 10.31857/S0374064122040069, EDN: BZUVZR

**Введение.** В настоящей работе исследуется эволюция множества квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) со степенной зависимостью потенциала от плотности вероятности состояния в координатном пространстве

$$i\frac{du}{dt} = \Delta u(t) + \mathbf{V}(u(t))u(t), \quad t \in (0, T); \quad T \in (0, +\infty]; \quad (1)$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2(G). \quad (2)$$

Здесь в качестве координатного пространства  $G$  могут выступать либо пространство  $\mathbb{R}^d$ , либо ограниченная звёздная область  $d$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^d$  с гладкой (задаваемой локально графиками бесконечно дифференцируемых функций) границей  $\partial G$ , либо  $d$ -мерный тор  $\mathbb{T}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ). Пусть  $\mathbf{V}(u) \equiv |u|^p$ ,  $p \geq 0$ . В уравнении (1)  $\Delta$  – оператор Лапласа  $D(\Delta) \rightarrow H$ , областью определения которого является пространство  $D(\Delta)$ , состоящее из функций пространства Соболева  $W_2^2(G)$ , удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Так, если  $G = \mathbb{R}^d$ , то  $D(\Delta) = W_2^2(G)$ ; если  $G$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$  с гладкой границей, то  $D(\Delta) = \{u \in W_2^2(G) : u|_{\partial G} = 0\} \equiv \dot{W}_2^2(G)$ ; если  $G = \mathbb{T}^d$ , то  $D(\Delta) \subset W_2^2(G)$  в том смысле, что сужение функции из  $D(\Delta)$  на любую локальную карту  $B$  многообразия  $\mathbb{T}^d$  принадлежит пространству  $W_2^2(B)$ .

В работах [1–8] показано, что для малых показателей нелинейности  $p \in [0, 4/d)$  задача Коши (1), (2) порождает непрерывную группу  $\mathbf{U}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , нелинейных преобразований  $u_0 \mapsto u(t, u_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , пространства начальных данных  $H^1 = D(\sqrt{-\Delta})$ , которые сохраняют  $H$ -норму решения и значение функционала энергии

$$E(u) = \int_G \left( -\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2} |u|^{p+2} \right) dx$$

на векторах  $u(t, u_0) = \mathbf{U}(t)u_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Если же  $p \geq 4/d$ , то существуют такие начальные данные (2), при которых решение задачи Коши допускает явление самофокусировки за конечное время, сопровождающееся явлением градиентного взрыва решения.

Нелинейное уравнение Шрёдингера интенсивно изучалось в связи с математическим описанием явления самофокусировки волн в нелинейной оптической среде (см. [1]). Нелинейное уравнение Шрёдингера изучалось в  $d$ -мерном евклидовом пространстве и его областях, исследовались различные виды нелинейной зависимости потенциала взаимодействия от неизвестной волновой функции (см. [2, 5, 9–12]).

Как показано в работах [2, 5, 9, 10], задача Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера со степенной зависимостью нелинейного потенциала от неизвестной функции может иметь только либо единственное глобальное решение, либо локальное решение, допускающее разрушение при приближении к границе промежутка существования решения. В первом случае задача Коши определяет однопараметрическую группу преобразований пространства начальных условий, во втором случае длина промежутка существования может принимать любое положительное значение в зависимости от выбора начального условия (см. [5, 8–10]).

В работе [8] исследована связь явления разрушения решения с явлением самофокусировки [13] и явлением перехода из чистого состояния квантовой системы в смешанное состояние в случае задачи с одномерным координатным пространством. В настоящей статье изучаются обобщения этих результатов на случай многомерного координатного пространства.

В связи с возможностью разрушения чистого состояния становится естественной постановка вопроса о динамике, порождаемой нелинейным уравнением Шрёдингера в множестве смешанных квантовых состояний. Динамику смешанных квантовых состояний описывает соответствующее нелинейному уравнению Шрёдингера уравнение Лиувилля–фон Неймана (см. [14, 15]), для которого получены как условия глобального существования единственного решения задачи Коши, так и условия разрушения решения этой задачи.

Для задачи Коши, допускающей явление разрушения решения, в работах [7, 16] предложена процедура регуляризации, позволяющая аппроксимировать её направленным семейством задач Коши. *Регуляризацией* задачи Коши называется такое топологическое пространство начально-краевых задач, в котором исследуемая задача Коши представляет собой предельную точку (см. [16]). Для изучения задачи Коши (1), (2) в качестве регуляризации рассматривается однопараметрическое семейство задач Коши для нелинейных уравнений Шрёдингера, в каждой из которых функционал энергии является полуограниченным (что обеспечивает глобальную разрешимость регуляризованной задачи Коши в соответствующем энергетическом функционале пространстве). При этом направленное семейство гамильтоновых векторных полей регуляризованных задач Коши сходится к гамильтонову векторному полю исследуемой задачи Коши на всюду плотной общей области определения этих полей. В работах [7, 8] исследована регуляризация функционала энергии исходного уравнения Шрёдингера (1) направленным семейством полуограниченных снизу функционалов энергии

$$E_\epsilon(u) = \int_G \left( \frac{\epsilon}{2} |\Delta u|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2} |u|^{p+2} \right) dx, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

В [7, 8] установлено, что направленное семейство решений задач Коши для регуляризованных уравнений Шрёдингера сходится к решению задачи Коши (1), (2) на всём промежутке существования решения последней. На промежутках, содержащих граничные точки промежутка существования решения задачи (1), (2), установлена расходимость последовательности регуляризованных решений; за пределами промежутка существования решения задачи Коши (1), (2) направленное семейство решений задач Коши для уравнения Шрёдингера с регуляризованным оператором имеет предельное множество в пространстве  $(B(H))^*$  квантовых состояний, снабжённом  $*$ -слабой топологией. Наделение множества регуляризованных задач структурой измеримого пространства позволяет определить однопараметрическое семейство мер на множестве векторных квантовых состояний и, тем самым, однопараметрическое семейство смешанных квантовых состояний.

Структура настоящей работы следующая. В п. 1 приведены результаты о разрешимости задачи Коши (1), (2), о её регуляризации и поведении последовательности решений регуляризованных задач. В п. 2 установлены взаимосвязи между явлением разрушения квантового состояния с явлением градиентного взрыва задачи Коши и с явлением самофокусировки. В п. 3 регуляризация задачи Коши (1), (2) представлена как нелинейная динамика чистых состояний в расширенном гильбертовом пространстве.

## 1. Задача Коши и её регуляризации.

**1.1. Разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера.** Приведём известные результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения Шрёдингера

(см. [4, 7]). Пусть выполнены приведённые во введении после условия (2) предположения относительно координатного пространства  $G$ , нелинейного потенциала  $\mathbf{V}$  и оператора  $\Delta$ . Обозначим через  $H^k$  область определения неотрицательного оператора  $(\sqrt{-\Delta})^k$  при  $k \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.**  $H^1$ -решением задачи Коши (1), (2) на промежутке  $[0, T)$  при некотором  $T \in (0, +\infty]$  называется функция  $u \in C([0, T), H^1)$ , удовлетворяющая равенству

$$u(t) = e^{-it\Delta}u_0 - i \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} \mathbf{V}(u(s))u(s) ds, \quad t \in [0, T).$$

**Теорема 1.** Для каждого  $\rho > 0$  существует  $T > 0$  такое, что если  $u_0 \in H^1$ ,  $\|u_0\| \leq \rho$ , то задача Коши имеет единственное решение  $u(\cdot, u_0)$  на отрезке  $[-T, T]$ . При этом  $\|u(t, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$ ,  $E(u(t, u_0)) = E(u_0)$  для всех  $t \in [-T, T]$ .

**Теорема 2.** Пусть  $0 \leq p < 4/d$ . Тогда для каждого  $u_0 \in H^1$  существует единственное решение задачи Коши (1), (2) на промежутке  $[0, +\infty)$ , причём значения этого решения ограничены в пространстве  $H^1$ .

**Теорема 3.** Пусть  $p \geq 4/d$ . Тогда если  $u_0 \in H^3$  и  $E(u_0) < 0$ , то существует число  $T_1(u_0) > 0$  такое, что на промежутке  $[0, T_1)$  задачи Коши (1), (2) имеет единственное  $H^1$ -решение и при этом  $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$ .

Случай  $G = \mathbb{R}^d$  исследован в большом числе публикаций, теоремы 1–3 для него изложены в монографии [17]. Для случая  $G = \mathbb{T}^d$  результаты этих теорем установлены в работах [4, 6, 15]. В случае, когда  $G$  – ограниченная звёздная относительно некоторой точки область в  $\mathbb{R}^d$  с гладкой границей, теоремы 1–3 установлены в работах [7, 8].

**1.2. Регуляризация задачи Коши.** Неограниченность в пространстве  $H^1$  поверхностей уровня функционала энергии  $E(u)$ ,  $u \in H^1$ , служит причиной наличия градиентных взрывов решений при сверхкритических значениях параметра нелинейности  $p$ . Поэтому в качестве аппроксимации НУШ (1) рассмотрим однопараметрическое семейство нелинейных уравнений Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} u = \mathbf{L}_\epsilon u \equiv \Delta u + |u|^p u + \epsilon \Delta^2 u, \quad t > 0, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad (3)$$

где  $\epsilon \in (0, 1)$  – параметр регуляризации. Регуляризованный энергетический функционал при каждом значении параметра  $\epsilon \in (0, 1)$  имеет вид

$$E_\epsilon(u) = \int_G \left[ \frac{1}{p+2} |u|^{p+2} - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\Delta u|^2 \right] dx, \quad u \in H^2.$$

Тогда при каждом  $\epsilon \in (0, 1)$  поверхности уровня функционала энергии ограничены в энергетическом пространстве  $H^2$  и компактны в пространстве  $H^1$ . Задача Коши (2), (3) имеет единственное решение при каждом  $u_0 \in H^2$  (см. [7, 8]).

Можно рассмотреть и другие способы регуляризации задачи Коши (1), (2). Так, в работах [9, 15] регуляризация задаётся направленным семейством задач Коши вида (1), (2), в которых степенной нелинейный потенциал заменяется на направленное семейство ограниченных нелинейных потенциалов  $V_n(u) = \min(|u|^p, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , в [9] или

$$V_\epsilon(|u|) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 |u|^{2p+4}} |u|^{p+2}, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad \epsilon \rightarrow +0,$$

в [15]. Благодаря полуограниченности функционала энергии и сохранению на значениях решения в каждой точке его интервала существования значения функционала энергии, оказывается возможным установить равномерную по интервалу существования решения ограниченность соболевской нормы значений решения и компактность множества значений решения в пространстве Лебега.

Дальнейшее исследование поведения направленного семейства решений регуляризованных задач проводится по схеме, не зависящей от выбора регуляризации.

В работах [7, 8, 15] установлено, что если задача Коши (1), (2) имеет  $H^1$ -решение на промежутке  $[0, T)$ , то оно служит пределом последовательности решений регуляризованных задач в пространстве  $C([0, T), H)$ . Если же задача Коши (1), (2) не имеет  $H^1$ -решения на промежутке  $[0, T)$ , то направленное семейство решений регуляризованных задач не имеет предела (не имеет предельных точек) в гильбертовом пространстве чистых векторных состояний, но имеет непустое множество предельных точек в симплексе квантовых состояний в локально выпуклом банаховом пространстве  $(B(H))^*$  квантовых состояний. Эти предельные точки не являются чистыми состояниями квантовой системы в исходном гильбертовом пространстве.

**1.3. Решения регуляризованных задач.** Пусть  $\epsilon \in (0, 1)$  и  $l \in \mathbb{N}$ . Функция  $u_\epsilon \in C([0, +\infty), H^l)$  называется  $H^l$ -решением задачи Коши (2), (3) на полуоси  $[0, +\infty)$ , если она удовлетворяет уравнению

$$u_\epsilon(t) = e^{-i(\Delta + \epsilon \Delta^2)t} u_0 + \int_0^t e^{-i(\Delta + \epsilon \Delta^2)(t-s)} |u_\epsilon(s)|^p u_\epsilon(s) ds, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Теорема 4** [8]. Пусть  $\epsilon > 0$ ,  $p \geq 0$ . Тогда для каждого  $u_0 \in H^2$  задача Коши (2), (3) на полуоси  $[0, +\infty)$  имеет единственное  $H^2$ -решение  $u_\epsilon(t, u_0)$ . Кроме того,

$$N(u(t, u_0)) = N(u_0), \quad E_\epsilon(u(t, u_0)) = E(u_0), \quad u_\epsilon(t, u_0) = \mathbf{V}_\epsilon(t) u_0 \quad \text{при } t \geq 0, \quad u_0 \in H^2.$$

Предельные точки последовательности решений регуляризованных задач и частичные следы чистых состояний в расширенном пространстве описывает

**Теорема 5** [8, 15]. Пусть  $u_0 \in H^2$  и выполнены условия теоремы 4. Пусть  $T_1 \in (0, +\infty)$  – супремум длин интервалов, на которых  $H^1$ -решение  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T)$ , задачи Коши (1), (2) существует. Тогда при любом  $T \in (0, T_1)$  направленное семейство  $\{u_\epsilon(t, u_0) : t > 0\}$  решений задачи (2), (3) сходится к решению  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T_1)$ , задачи Коши (1), (2) в следующем смысле:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\epsilon(t, u_0) - u(t, u_0)\|_H = 0 \quad \text{для любого } T \in [0, T_1).$$

Если  $p = 4$  ( $p = 4/d$ ) и  $T \geq T_1$ , то для каждой бесконечно малой последовательности  $\{\epsilon_k\}$  последовательность  $\{u_{\epsilon_k}\}$  расходится в пространстве  $C([0, T], H)$ .

## 2. Явления градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения состояния.

**2.1. Множество квантовых состояний.** Множество  $\Sigma(H) = S_1((B(H))^*) \cap (B(H))_+^*$  квантовых состояний представляет собой пересечение единичной сферы банахова пространства  $(B(H))^*$  с конусом  $(B(H))_+^*$  положительных элементов пространства  $(B(H))^*$ .

В множестве квантовых состояний выделяется множество  $\Sigma_p(H)$  чистых векторных состояний. Чистое состояние  $\rho_u$ , задаваемое единичным вектором  $u \in H$ , определяется как линейный непрерывный функционал  $\rho_u : B(H) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle \rho_u, \mathbf{A} \rangle = (u, \mathbf{A}u)_H$ ,  $\mathbf{A} \in B(H)$ .

Множество состояний, непрерывных относительно  $\sigma$ -слабой [18, п. 2.4.3] топологии на пространстве  $B(H)$ , называется *множеством нормальных состояний*  $\Sigma_n(H)$ . Согласно теореме Глизона [19] всякое нормальное состояние задаётся на алгебре  $B(H)$  как операция взятия следа произведения элемента алгебры  $B(H)$  и некоторого неотрицательного ядерного оператора с единичным следом  $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rho_{u_k}$ , где  $\{u_k\}$  – ортонормированный базис.

**Лемма 1** [20]. Для состояния  $\rho$  условие  $\rho \in \Sigma_p(H)$  выполняется, если и только если  $\sup_{u \in S_1(H)} \langle \rho, \mathbf{P}_u \rangle = 1$ . Состояние  $\rho$  является нормальным, если и только если

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}_f(H)} \langle \rho, \mathbf{P} \rangle = 1.$$

Здесь  $\mathcal{P}_f(H)$  – множество конечномерных ортогональных проекторов, действующих в пространстве  $H$ .

Для доказательства леммы 1 достаточно воспользоваться леммой 1 работы [20], рассмотрев последовательность величин  $\alpha_n = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}_f(H): \dim \mathbf{P} = n} \langle \rho, \mathbf{P} \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда состояние  $\rho$  является чистым векторным, если и только если  $\alpha_1 = 1$ . Оно является нормальным, если и только если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ , откуда и следует второе утверждение леммы 1.

Множество  $\Sigma_p^k = \{\rho_u : u \in S_1(H) \cap H^k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , называется *множеством чистых соболевских состояний*.

## 2.2. Градиентный взрыв, самофокусировка и разрушение состояния.

**Определение 2.** Решение  $u(\cdot, u_0)$  задачи Коши (1), (2) допускает

1) явление *градиентного взрыва*, если существует число  $T_1 \in (0, +\infty)$ , при котором имеет место соотношение  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$ ;

2) явление *самофокусировки* в точке  $x_1 \in G$ , если существует число  $T_1 \in (0, +\infty)$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} (M_{|x-x_1|^2} u(t, u_0), u(t, u_0))_H = 0$ , где  $M_{|x-x_1|^2}$  — действующий в пространстве  $H$  оператор умножения на функцию  $\|x - x_1\|_{R^d}^2$ ,  $x \in G$ ;

3) явление *разрушения чистого состояния*, если существует такое число  $T_1 \in (0, +\infty)$ , что  $\sup_{\phi \in S_1(H)} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P}_\phi \rangle] < \|u_0\|_H^2 = 1$ ,

4) явление *разрушения нормального состояния*, если существует число  $T_1 \in (0, +\infty)$  такое, что выполняется неравенство  $\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(H)} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P} \rangle] < 1$ .

**Лемма 2.** Условие 4) равносильно следующему условию: существуют число  $T_1 \in (0, +\infty)$  и последовательность  $\{t_k\}$  такие, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и последовательность векторов  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо в пространстве  $H$  к элементу  $u_*$ , для которого  $\|u_*\|_H < \|u_0\|_H$ .

Действительно, если последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо к вектору  $u_* \in H$  такому, что  $\|u_*\|_H < \|u_0\|_H$ , то  $\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(H)} [\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \rho_{u(t_k, u_0)}, \mathbf{P} \rangle] \leq \|u_*\|_H^2 < 1$  и выполняется условие 4).

Пусть выполняется условие 4). Докажем, что тогда существует такая последовательность чисел  $\{t_k\}$ , что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо к элементу  $u_*$ , для которого  $\|u_*\|_H < \|u_0\|_H$ .

Допустим противное: для любой последовательности чисел  $\{t_k\}$  такой, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо к некоторому элементу  $u_*$ , выполняется условие  $\|u_*\|_H \geq \|u_0\|_H$ . Тогда поскольку  $\|u(t, u_0)\| = \|u_0\|$  для любого  $t \in [0, T_1)$ , то  $\|u_*\| = \|u_0\|$ . Следовательно, любая сходящаяся слабо последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  будет сходящейся по норме пространства  $H$ . Значит, ограниченная условием  $\|u(t_k, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$  последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  будет компактной не только в слабой топологии пространства  $H$ , но и в топологии нормы. Таким образом, для любой последовательности чисел  $\{t_k\}$  такой, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$ , последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  компактна в пространстве  $H$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P}_n \rangle] = 1$ , где  $\{\mathbf{P}_n\}$  — последовательность операторов проектирования на линейную оболочку первых  $n$  векторов некоторого ОНБ. Тогда  $\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(H)} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P} \rangle] = 1$ ,

а это противоречит условию 4). Лемма доказана.

**Лемма 3.** Условие 3) равносильно следующему условию: функция  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T_1)$ , не имеет в пространстве  $H$  предела при  $t \rightarrow T_1 - 0$ .

Действительно, если функция  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T_1)$ , имеет в пространстве  $H$  предел  $u_1$  при  $t \rightarrow T_1 - 0$ , то тогда

$$\sup_{\phi \in S_1(H)} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P}_\phi \rangle] = \lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P}_{u_1} \rangle = \lim_{t \rightarrow T_1 - 0} |(u(t, u_0), u_1)|^2 = \|u_0\|_H^2 = 1.$$

Обратно, если  $\sup_{\phi \in S_1(H)} [\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P}_\phi \rangle] = 1$ , то множество значений непрерывной функции  $u(t, u_0)$  при  $t \in [0, T_1)$  компактно в пространстве  $H$  и существует предел  $u_1 = \lim_{t \rightarrow T_1 - 0} u(t, u_0) \in H$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Если решение задачи Коши (1), (2) допускает явление разрушения нормального состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ , то оно допускает и явление разрушения чистого состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ . Если решение задачи Коши (1), (2) допускает явление разрушения чистого состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ , но не допускает явление разрушения нормального состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ , то это означает, что решение  $u(t, u_0)$  при  $t \rightarrow T_1 - 0$  имеет в пространстве  $H$  компактное множество частичных пределов, состоящее более чем из одной точки.

**2.3. Самофокусировка и разрушение чистого состояния.** Установим связи между явлениями градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения чистого состояния.

**Теорема 6.** Пусть  $u_0 \in H^3$  и  $H^1$ -решение  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T_1)$ , задачи Коши (1), (2) определено на интервале  $[0, T_1)$  для некоторого  $T_1 \in (0, +\infty)$ . Тогда справедливы следующие импликации:

- c)  $\Rightarrow$  b);
  - b)  $\Rightarrow$  a), если либо  $G = \mathbb{R}^1$ , либо  $G$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$  с гладкой границей;
  - a)  $\Rightarrow$  b), если  $p = 4/d$  и  $pd < 2(p + 2)$ .
- Здесь условия a), b) и c) следующие:

- a) решение допускает градиентный взрыв при  $t \rightarrow T_1 - 0$ ;
- b) решение допускает разрушение нормального состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ ;
- c) решение допускает явление самофокусировки при  $t \rightarrow T_1 - 0$ .

**Доказательство.**

- c)  $\Rightarrow$  b). Докажем, что из равенства  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \int_G |x - x_0|^2 |u(t, x, u_0)|^2 dx = 0$  следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} (u(t, u_0), \phi) = 0$$

для любого  $\phi \in H$ . Действительно, при любом  $\delta > 0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \int_{G \setminus O_\delta(x_0)} |u(t, x, u_0)|^2 dx = 0.$$

Следовательно, при любом  $\delta > 0$  и всех  $\phi \in H$  выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \int_{G \setminus O_\delta(x_0)} \phi(x) u(t, x, u_0) dx = 0.$$

Так как  $\|u(t, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$  для любого  $t \in [0, T_1)$ , то последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  слабо компактна в пространстве  $H$  при произвольном выборе последовательности  $\{t_k\}$  такой, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$ . Для произвольного частичного предела  $u_* \in H$  последовательности  $\{u(t_k, u_0)\}$  в слабой топологии пространства  $H$  и для каждого элемента  $\phi \in H$  имеет место равенство  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{O_\delta(x_0)} \phi(x) u(t, x, u_0) dx = 0$ . Поэтому слабый предел функции  $u(t, u_0)$ ,  $t \in [0, T_1)$ , при  $t \rightarrow T_1 - 0$  существует и равен нулю. Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P} \rangle = 0$  для любого конечномерного ортогонального проектора  $\mathbf{P}$  и, значит, при  $t \rightarrow T_1 - 0$  происходит разрушение нормального состояния.

b)  $\Rightarrow$  a). Пусть решение допускает разрушение нормального состояния при  $t \rightarrow T_1 - 0$ . Тогда, согласно лемме 2, существует последовательность  $\{t_k\}$  такая, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо в  $H$  к элементу  $u_* \in H$ , при этом  $\|u_*\| < \|u_0\|$ . Покажем, что тогда выполняется соотношение  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$ .

Действительно, пусть последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится слабо в  $H$  к элементу  $u_* \in H$  и пусть  $\|u_0\|^2 - \|u_*\|^2 = \sigma > 0$ .

Предположим, что  $G$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда оператор Лапласа  $\Delta$  имеет дискретный спектр (см. [21, теорема 8.4]). Пусть  $\{e_k\}$  – собственный ОНБ в пространстве  $H$ .

Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} (u(t_k, u_0), e_k) = (u_*, e_k)$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, для каждого  $N \in \mathbb{N}$  существует  $T_2 \in (0, T_1)$  такое, что при любом  $t \in (T_2, T_1)$  выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^N |(u(t, u_0), e_k)_H|^2 \leq \|u_*\|_H^2 + \frac{\sigma^2}{2},$$

поэтому

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |(u(t, u_0), e_k)_H|^2 \geq \|u_0\|^2 - \|u_*\|_H^2 - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Значит, для любого  $N \in \mathbb{N}$  существует  $T_2 \in (0, T_1)$  такое, что при любом  $t \in (T_2, T_1)$  выполняется неравенство  $\|u(t, u_0)\|_{W_2^1} \geq \sigma^2 \lambda_N / 2$ . Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$ .

Пусть  $G = \mathbb{R}$ . Докажем, что выполняется условие а). Предположим противное: существует такая последовательность  $\{t_k\}$ , что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|u(t_k, u_0)\|_{H^1} < \infty$ . Тогда последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  ограничена в пространстве  $H^1$  и в силу теоремы о компактности вложения пространства  $H^1$  в пространство  $H$  (при  $d = 1$ ) компактна в пространстве  $H$ . Это противоречит разрушению нормального состояния в силу леммы 2.

а)  $\Rightarrow$  б). Пусть  $p = 4/d$  и  $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$ . Докажем, что тогда ни для какой последовательности чисел  $\{t_k\}$  такой, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$ , последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  не является сходящейся в пространстве  $H$  (и потому в силу леммы решение допускает явление разрушения нормального состояния). Для этого используем подход работы [9]. Предположим противное: существует последовательность  $\{t_k\}$  такая, что  $t_k \rightarrow T_1 - 0$  и последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится в пространстве  $H$ . Согласно теореме 1 для каждого  $k \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t_k, u_0)\|_H^2 = E(u_0) + \frac{1}{p+2} \|u(t_k, u_0)\|_{p+2}^{p+2}.$$

Согласно неравенству Гальярдо–Ниренберга (см. [22]), если  $dp < 2(p+2)$ , то оценка

$$\|u(t, u_0)\|_{p+2} \leq C \|u(t, u_0)\|_2^{1-\alpha} \|u(t, u_0)\|_{H^1}^{\alpha},$$

где  $\alpha = dp/(2(p+2))$ , справедлива при всех  $t \in [0, T_1)$  (здесь константа  $C$  не зависит от  $u(t, u_0)$ ). Так как  $p = 4/d$ , то  $\alpha(p+2) = 2$ . Следовательно, для любых  $m, n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\begin{aligned} \|u(t_n, u_0)\|_{p+2}^{p+2} &\leq (\|u(t_m, u_0)\|_{p+2} + \|u(t_n, u_0) - u(t_m, u_0)\|_{p+2})^{p+2} \leq \\ &\leq c_p (\|u(t_m, u_0)\|_{p+2}^{p+2} + \|u(t_n, u_0) - u(t_m, u_0)\|_{p+2}^{p+2}) \leq \\ &\leq c_p \|u(t_m, u_0)\|_{p+2}^{p+2} + c_p C \|u_m(t, u_0) - u_n(t, u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)} \|u_m(t, u_0) - u_n(t, u_0)\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что при всех  $m, n \in \mathbb{N}$  и при  $p = 4/d$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t_n, u_0)\|_H^2 &\leq E(u_0) + \frac{1}{p+2} [c_p \|u(t_m, u_0)\|_{p+2}^{p+2} + 2c_p C \|u_m(t, u_0) - u_n(t, u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)} \times \\ &\times (\|\nabla u_m(t, u_0)\|_H^2 + \|\nabla u_n(t, u_0)\|_H^2 + \|u_m(t, u_0)\|_H^2 + \|u_n(t, u_0)\|_H^2)]. \end{aligned}$$

По предположению последовательность  $\{u(t_k, u_0)\}$  сходится в пространстве  $L_2$ . Так как  $\alpha \in (0, 1)$ , то существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что для любых  $n, m \geq N$  выполнено неравенство

$$\frac{2}{p+2} c_p C \|u_m(t, u_0) - u_n(t, u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)} < \frac{1}{4}.$$



Значит, существует константа  $B > 0$  такая, что для любого  $n \geq N$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t_n, u_0)\|_H^2 \leq B + \frac{1}{4} \|\nabla u(t_n, u_0)\|_H^2.$$

Но это неравенство противоречит условию а)  $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$ . Теорема доказана.

### 3. Продолжение динамики через момент разрушения состояния.

**3.1. Динамика множества квантовых состояний.** Обозначим через  $\mathbf{T}$  группу преобразований множества соболевских состояний

$$\Sigma_p^k(H) = \{\rho_u : u \in H^k, \|u\|_H = 1\}, \quad (4)$$

порождаемую уравнением Шрёдингера.

Если  $p \in [0, 4/d)$ , то группа  $\mathbf{T}$  действует на элемент  $\rho_u \in \Sigma_p^1(H)$  согласно правилу

$$\mathbf{T}\rho_u = \rho_{u(t, u_0)}, \quad \rho_u \in \Sigma_p^1(H).$$

Динамика нормального смешанного состояния задаётся (см. [15]) уравнением Лиувилля–фон Неймана со следующей нелинейной зависимостью потенциала от состояния:

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [\Delta + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0; \quad (5)$$

$$\rho(+0) = \rho_0, \quad \rho_0 \in \Sigma(H), \quad (6)$$

$$\mathbf{f}(\rho(t))\phi(x) = (w_{\rho(t)}(x))^{p/2} \phi(x), \quad \phi \in H,$$

где  $w_{\rho(t)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) |u_k(t, x)|^2$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in G$ , если

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \rho_{u_k(t)}.$$

Регуляризованная динамика нормальных квантовых состояний может быть задана для соболевских состояний  $\Sigma_p^2$  (см. (4)) с помощью регуляризованного нелинейного уравнения Лиувилля–фон Неймана (см. [14, 15])

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [\epsilon \Delta^2 + \Delta + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0. \quad (7)$$

Если  $p \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$ , то группа  $\mathbf{T}_\epsilon$  действует на произвольный элемент  $\rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H)$  согласно правилу (здесь полугруппа преобразований  $\mathbf{V}_\epsilon$  определена в теореме 4)

$$\mathbf{T}_\epsilon \rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}, \quad t \geq 0, \quad \rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H).$$

Исследуем сходимость и дадим описание множества предельных точек обобщённой последовательности  $\rho_\epsilon(t, \rho_{u_0})$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  в слабой-\* топологии пространства  $(B(H))^*$ . Пусть  $\mathcal{A}^*$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств, порождённая семейством функционалов  $\{\Phi_{\mathbf{A}} : \rho \mapsto \rho(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in B(H)\}$  на множестве  $\Sigma(H)$ .

Пусть  $W_0(0, 1)$  – множество неотрицательных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве  $((0, 1), 2^{(0, 1)})$ , сконцентрированных в произвольном интервале  $(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , и нормализованных условием  $\nu((0, 1)) = 1$ . Здесь  $2^{(0, 1)}$  –  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств интервала  $(0, 1)$ .

Фиксируем некоторое  $u_0 \in H^2$ . Тогда множество решений регуляризованных задач Коши (2), (3) вместе с мерой  $\nu$  на измеримом пространстве  $((0, 1), 2^{(0, 1)})$  задают случайный процесс со значениями в множестве чистых состояний  $\Sigma_p(H)$ , рассматриваемом как измеримое пространство  $(\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$ :

$$\rho_{\mathbf{V}_\epsilon(\cdot)u_0} : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_p(H); \quad (\epsilon, t) \mapsto \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}. \quad (8)$$

### 3.2. Квантовые состояния и меры на единичной сфере $S_1(H)$ .

**Лемма 4** [23]. Для любого  $\rho \in \Sigma(H)$  существует такая нормированная мера  $\nu : 2^{S_1(H)} \rightarrow [0, 1]$ , что

$$\langle \rho, \mathbf{A} \rangle = \int_{S_1(H)} (u, \mathbf{A}u) d\nu(u) \quad \text{для любого } \mathbf{A} \in B(H). \quad (9)$$

Если мера  $\nu$  в равенстве (9) счётно-аддитивна, то состояние  $\rho$  является нормальным.

Таким образом, квантовые состояния являются математическими ожиданиями случайных величин со значениями в измеримом пространстве чистых состояний  $(\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$ .

**3.3. Случайный процесс, продолжающий решение через момент градиентного взрыва.** Пусть  $(E, \mathcal{A}, \nu)$  – измеримое пространство с мерой, причём  $E = (0, 1)$ ,  $\mathcal{A} = 2^{(0,1)}$ ,  $\nu \in W_0(0, 1)$ . Тогда, согласно (8), при каждом  $u_0 \in H^2$  и каждом  $t \geq 0$  определена случайная величина

$$\rho_{\mathbf{V} \cdot (t)u_0} : (E, \mathcal{A}, \nu) \rightarrow (\Sigma(H), \mathcal{A}^*).$$

Следовательно, в силу теоремы 4 направленное семейство задач Коши (2), (3) определяет случайный процесс  $\mathcal{T}$  со значениями в пространстве непрерывных отображений множества  $\Sigma_p^2(H)$  в себя:

$$\mathcal{T} : E \times [0, +\infty) \rightarrow C(\Sigma_p^2(H), \Sigma_p^2(H)); \quad \mathcal{T}_\epsilon(t)\rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}.$$

Среднее значение такого случайного процесса задаётся равенством

$$M\mathcal{T} = \mathcal{T}^\nu, \quad \text{где} \quad \mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = M(\rho_{u_\epsilon(t, u_0)}) = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int_E \rho_{u_\epsilon(t, u_0)} d\nu(\epsilon), \quad t \geq 0;$$

$$\langle \rho^\nu(t, \rho_{u_0}), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \rho_{u_\epsilon(t, u_0)}, \mathbf{A} \rangle d\nu(\epsilon) \quad \text{для любого } \mathbf{A} \in B(H).$$

**Теорема 7** [8, 9]. Пусть  $\nu \in W_0(0, 1)$  и  $u_0 \in H^2$ , а  $[0, T_1)$  – промежуток существования  $H^1$ -решения задачи Коши (1), (2).

Тогда среднее значение случайного процесса  $\rho_{u_\epsilon(t, u_0)}$ ,  $t \geq 0$ , определяет однопараметрическое семейство квантовых состояний

$$\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}); \quad \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int_{(0,1)} \rho_{u_\epsilon(t, u_0)} d\nu(\epsilon), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

При этом семейство преобразований (10) обладает следующими свойствами:

- i)  $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \rho_{u(t, u_0)}$  для всех  $t \in [0, T_1)$ ;
- ii)  $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) \in \Sigma(H)$  для всех  $t > T_1$ , если  $T_1 < +\infty$ ;
- iii)  $\rho^\nu(T_1, \rho_{u_0}) \notin \Sigma_n(H)$ , если  $p = 4/d$  и  $T_1 < +\infty$ .

**3.4. Нелинейная динамика чистого состояния в расширенном пространстве.** Покажем, что однопараметрическое семейство преобразований квантовых состояний (10) представимо как частичный след группы нелинейных преобразований множества чистых состояний в расширенном гильбертовом пространстве.

В качестве расширенного гильбертова пространства рассмотрим пространство

$$\mathcal{H} = L_2((0, 1), 2^{(0,1)}, \nu, H)$$

квадратично интегрируемых по Петтису относительно меры  $\nu$  отображений  $(0, 1) \rightarrow H$ .

Начальному условию (2) соответствует следующий вектор расширенного пространства:

$$U_0(\epsilon) = u_0, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad (11)$$

а регуляризованная динамика задаётся однопараметрической группой преобразований расширенного пространства

$$\mathcal{U}(t)U_0(\epsilon) = u_\epsilon(t, u_0), \quad t \geq 0, \quad \epsilon \in (0, 1). \quad (12)$$

Согласно теореме 4 однопараметрическое семейство операторов  $\mathcal{U}(t)$ ,  $t \geq 0$ , корректно определено равенством (12) на подпространстве  $\mathcal{H}^2$  пространства  $\mathcal{H}$ , состоящем из отображений  $(0, 1) \rightarrow H^2$ . Тем самым на множестве чистых состояний  $\Sigma_p^2(\mathcal{H}) = \{\rho_{U_0} : U_0 \in \mathcal{H}^2\}$  задана однопараметрическая группа преобразований  $\mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t)$ ,  $t \geq 0$ , действующих по правилу

$$\mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t)\rho_U = \mathcal{U}(t)\rho_U\mathcal{U}(t)^* = \rho_{\mathcal{U}(t)U}, \quad t \geq 0, \quad U \in \mathcal{H}^2.$$

В алгебре ограниченных операторов  $B(\mathcal{H})$  выделим подалгебру  $\mathcal{A}_H = \{\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{(0,1)} : \mathbf{A} \in B(H)\}$  операторов, действующих согласно равенству

$$(V, \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{(0,1)}U) = \int_{(0,1)} (V(\epsilon), \mathbf{A}U(\epsilon)) d\nu(\epsilon) \quad \text{для любых } U, V \in \mathcal{H}. \quad (13)$$

**Теорема 8.** Пусть  $\nu \in W_0(E)$ . Тогда для произвольного  $u_0 \in H^2$  справедливо соотношение

$$\langle \mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0}, \mathbf{A} \rangle = (\mathcal{U}(t), \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{0,1}\mathcal{U}(t)U_0)_{\mathcal{H}}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{A} \in B(H),$$

где вектор  $U_0 \in \mathcal{H}$  определён равенством (11).

Утверждение теоремы 8 следует из теоремы 7 и определения (13) подалгебры  $\mathcal{A}_H$ .

Таким образом, однопараметрическое семейство  $\mathcal{T}^\nu(t)$ ,  $t \geq 0$ , динамических преобразований множества квантовых состояний  $\Sigma(H)$ , служащее продолжением решения задачи Коши (1), (2), является частичным следом группы  $\mathbb{T}_{\mathcal{U}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , задаваемым сужением на подалгебру  $\mathcal{A}_H$ , т.е.  $\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t)\rho_U|_{\mathcal{A}_H}$ ,  $t \geq 0$ .

Решение задачи Коши (1), (2) продолжается на полуось  $[0, +\infty)$  посредством случайного процесса  $\mathcal{T}_{u_0} : E \times [0, +\infty) \rightarrow \Sigma_2(H)$ . Математическое ожидание продолжения решения случайным процессом представляет собой продолжение решения однопараметрическим семейством квантовых состояний  $\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0}$ ,  $t \geq 0$ .

Однопараметрическое семейство операторов  $\mathcal{T}^\nu(t)$ ,  $t \geq 0$ , не является полугруппой. Однопараметрическое семейство усреднённых отображений множества состояний в себя изучалось в работе [24] в связи с задачей продолжения решения сингулярного линейного уравнения Шрёдингера с симметричным линейным оператором  $\mathbf{L}$  вместо самосопряжённого гамильтониана. Для предельного семейства  $\mathcal{T}^\nu(t)$ ,  $t \geq 0$ , динамических преобразований множества состояний на  $C^*$ -подалгебрах алгебры ограниченных линейных операторов в [24] получено разложение Краусса в выпуклую комбинацию двух полугрупп. Также в этой работе установлена сходимости последовательности итераций  $\{(\mathcal{T}^\nu(t/n))^n\}$  к предельной полугруппе линейных преобразований множества состояний на  $C^*$ -подалгебре. В силу теоремы Наймарка существует расширение симметрического оператора  $\mathbf{L}$  до самосопряжённого оператора в расширенном пространстве такое, что предельное семейство  $\mathcal{T}^\nu(t)$ ,  $t \geq 0$ , динамических преобразований множества состояний исходной квантовой системы является частичным следом унитарной динамики в расширенном пространстве на специальную подалгебру операторов, изоморфную алгебре операторов в исходном пространстве. Нелинейным аналогом теоремы Наймарка является полученное в теореме 8 расширение семейства преобразований  $\mathcal{T}^\nu(t)$  до группы преобразований  $\mathbb{T}_{\mathcal{U}}$  подпространства  $\mathcal{H}^2$  в расширенном пространстве  $\mathcal{H}$  [25].

**Заключение.** В первой части статьи установлены взаимосвязи между явлениями самофокусировки, неограниченным возрастанием градиента решения и перехода квантового состояния из чистого в смешанное. Во второй части показано, что продолжение динамики чистого квантового состояния через момент градиентного взрыва может быть реализовано с помощью частичного следа нелинейной динамики чистого состояния в расширенном гильбертовом пространстве.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в журн. эксп. и теор. физики. 1964. Т. 2. № 5. С. 218–222.
2. Glassey R.T. On the blowing up of solution to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 4. P. 1794–1797.
3. Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case // J. Funkt. Anal. 1979. V. 32. № 1. P. 1–32.
4. Bourgain J. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures // Commun. Math. Phys. 1994. V. 66. P. 1–26.
5. Zhidkov P.E. Korteweg de Vries and nonlinear Schrödinger equations: qualitative theory // Lect. Not. Math. V. 1756. Berlin, 2001.
6. Colliander J., Keel M., Staffilani G., Takaoka H., Tao T. Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation // Math. Res. Lett. 2002. V. 9. № 5–6. P. 659–682.
7. Сакбаев В.Ж. Градиентный взрыв решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера // Тр. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 171–187.
8. Efremova L.S., Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh. Phase flow generated by Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation and dynamical mappings of quantum states // Lobachevski J. of Math. 2019. Т. 40. № 10. С. 1455–1469.
9. Merle F., Tsutsumi Y.  $L_2$  convergence of blow-up solutions for nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity // J. of Differ. Equat. 1990. V. 84. P. 205–214.
10. Насибов Ш.М. О коллапсе решений задачи Коши для кубического эволюционного уравнения Шрёдингера // Мат. заметки. 2019. Т. 105. № 1. С. 76–83.
11. Насибов Ш.М. Нелинейное эволюционное уравнение Шрёдингера в сверхкритическом случае // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 209. № 3. С. 427–437.
12. Tsvetkov N. Invariant measures for the defocusing nonlinear Schrödinger equation // Annales de l'Institut Fourier. 2008. V. 58. № 7. P. 2543–2604.
13. Амосов А.А., Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Коробкин В.В., Прохоров А.М., Серов Р.В. Самофокусировка волновых пучков с платообразным распределением интенсивности // Письма в журн. эксп. и теор. физики. 1979. Т. 30. № 2. С. 119–122.
14. Spohn H. Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Berlin, 1991.
15. Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh. Dynamics of a set of quantum states generated by a nonlinear Liouville–von Neumann equation // Comp. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. № 8. P. 1337–1347.
16. Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж. Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // Теор. и мат. физика. 2015. Т. 185. № 2. С. 252–271.
17. Linares F., Ponce G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. New York, 2009.
18. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М., 1982.
19. Шерстнев А.Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М., 2008.
20. Sakbaev V.Zh. On the variational description of the trajectories of averaging quantum dynamical maps // P-adic, Ultrametric Anal. 2012. V. 4. № 2. P. 115–129.
21. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М., 2003.
22. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2011.
23. Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж. Геометрические свойства систем векторных состояний и разложение состояний в интегралы Петтиса // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 4. С. 1–14.
24. Волович И.В., Сакбаев В.Ж. О квантовой динамике на  $C^*$ -алгебрах // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 33–47.
25. Amosov G.G., Sakbaev V.Zh., Smolyanov O.G. Linear and nonlinear liftings of states of quantum systems // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 4. P. 417–427.

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва,  
Лётно-исследовательский институт  
им. М.М. Громова, г. Жуковский

Поступила в редакцию 11.02.2022 г.  
После доработки 11.02.2022 г.  
Принята к публикации 21.04.2022 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.225

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ПУАССОНА В ОБЛАСТЯХ С СИЛЬНО (СЛАБО)  
ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛЁНКАМИ В ВИДЕ ОТРЕЗКА

© 2022 г. С. Е. Холодовский

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости с плёнкой, представляющей собой отрезок, который при исследовании моделируется семейством конфокальных эллипсов, пересечение которых совпадает с этим отрезком. Выведены условия сопряжения и граничные условия как для сильно, так и для слабо проницаемых плёнок. Построены явные решения различных краевых задач с плёнками внутри и на границе областей. Решения задач с плёнками выражены в квадратурах через известные решения аналогичных задач без плёнок.

DOI: 10.31857/S0374064122040070, EDN: SAVITP

**Введение.** Реальные среды, в которых протекают процессы тепломассопереноса, зачастую содержат теплоизоляторы, наноразмерные покрытия, экраны, дренажи, мембраны, трещины и т.п. – все они моделируются плёночными включениями или покрытиями.

В монографиях [1, 2] решения краевых задач ищутся в виде интегралов типа Коши по контуру плёнки с неизвестной плотностью при выполнении обобщённых условий сопряжения на плёнке и сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений. Общие задачи для сильно проницаемой плёнки произвольной формы приводят к решению интегро-дифференциального уравнения [1, с. 111]. Метод потенциалов с неизвестной плотностью получил развитие в работах [3–7]. Краевые задачи для гармонических функций вне криволинейных разрезов на плоскости с различными условиями на сторонах разрезов изучались в работах [8–10]. В статьях [11–14] решены задачи с аналогичными условиями сопряжения на плёнках без концевых точек. В данной работе решаются задачи для плёнок, имеющих концевые точки.

**1. Вывод условий сопряжения и граничных условий на плёнках.** На плоскости  $z = x + iy$  будем рассматривать эллиптическую систему координат  $(\xi, \eta)$ , т.е.

$$x = a \operatorname{ch} \xi \cdot \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \cdot \sin \eta, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad -\pi < \eta \leq \pi,$$

где  $a = \operatorname{const} > 0$ .

Рассмотрим на плоскости  $z = x + iy$  какую-либо область  $D$ , содержащую отрезок  $S = \{-a < x < a\} \times \{y = 0\} = \{\xi = 0\} \times \{-\pi < \eta < \pi\}$ , который будем моделировать сильно или слабо проницаемой плёнкой. Для вывода условий сопряжения на плёнке  $S$  используем язык задач тепломассопереноса. Заменим плёнку  $S$  областью  $D_0 (0 \leq \xi < l, -\pi < \eta < \pi)$  с постоянной проницаемостью  $k_0$ , ограниченную эллипсом  $\xi = l$ , где  $\overline{D_0} \subset D$ . Пусть внешняя область  $D \setminus \overline{D_0}$  имеет постоянную проницаемость  $k$ .

Рассмотрим для функций  $u(\xi, \eta)$  в  $D \setminus \overline{D_0}$  и  $u_0(\xi, \eta)$  в  $D_0$  для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad \xi > l; \quad \Delta u_0 = 0, \quad 0 < \xi < l, \quad (1)$$

задачу с классическими условиями сопряжения на  $\partial D_0$ :

$$u_0(l, \eta) = u(l, \eta), \quad k_0 \partial_\xi u_0(l, \eta) = k \partial_\xi u(l, \eta), \quad (2)$$

$$u_0(0, \eta) = u_0(0, -\eta), \quad \partial_\xi u_0(0, \eta) = -\partial_\xi u_0(0, -\eta), \quad (3)$$

где  $\Delta u = \partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u$ ,  $\partial_{\xi\xi} = \partial^2 / \partial \xi^2$ ,  $\partial_\xi = \partial / \partial \xi$ .

Из условий (3) следует, что потенциал и нормальная скорость непрерывны на разрезе  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ , т.е. разрезом  $S$  можно пренебречь.

Найдём приращения функции  $u(\xi, \eta)$  (потенциала) и нормальной скорости  $k \partial_\xi u$  в точках  $(l, \pm\eta)$  (эти точки при каждом фиксированном  $\eta$  при вырождении области  $D_0$  в отрезок  $S$  (при  $l \rightarrow 0$ ) сливаются в одну точку). Из условий (2), (3) с учётом теоремы Лагранжа о среднем получаем

$$\begin{aligned} u(l, \eta) - u(l, -\eta) &= u_0(l, \eta) - u_0(0, \eta) - u_0(l, -\eta) + u_0(0, -\eta) = \\ &= \frac{l}{k_0} (k_0 \partial_\xi u_0(c_1, \eta) - k_0 \partial_\xi u_0(c_2, -\eta)), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} k(\partial_\xi u(l, \eta) + \partial_\xi u(l, -\eta)) &= k_0(\partial_\xi u_0(l, \eta) - \partial_\xi u_0(0, \eta) + \\ &+ \partial_\xi u_0(l, -\eta) - \partial_\xi u_0(0, -\eta)) = lk_0(\partial_{\xi\xi} u_0(c_3, \eta) + \partial_{\xi\xi} u_0(c_4, -\eta)), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_i = c_i(l) \in (0, l)$ .

Пусть в равенствах (4), (5) имеют место сходимости

$$l \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow \infty, \quad lk_0 \rightarrow A. \quad (6)$$

При этом область  $D_0$  вырождается в сильно проникаемую плёнку (с параметром  $A$ ) в виде отрезка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ . Из условия  $u_0(l, \eta) - u_0(0, \eta) = l \partial_\xi u_0(c_1, \eta)$  следует равенство  $\lim u_0(l, \eta) = \lim u_0(0, \eta)$  при  $l \rightarrow 0$ . Отсюда с учётом того, что, согласно первому условию в (2),  $u_0(l, \eta) = u(l, \eta)$ , для любого  $c = c(l) \in (0, \xi_0)$  при  $l \rightarrow 0$  получаем

$$\lim u_0(c, \eta) = \lim u_0(l, \eta) = \lim u(l, \eta), \quad (7)$$

так как если для некоторых  $c = c(l) \in (0, l)$ ,  $\eta_0 \in (-\pi, \pi)$  выполняется соотношение

$$\lim u_0(c, \eta_0) \neq \lim u_0(l, \eta_0),$$

то кривизна  $\partial_{\xi\xi} u_0(\xi, \eta_0)$  графика  $u_0(\xi, \eta_0)$ , а значит, в силу уравнения Лапласа (1) и величина  $\partial_{\eta\eta} u_0(\xi, \eta_0)$ , стремится к  $\infty$  при  $l \rightarrow 0$ , что для гармонической функции  $u_0(\xi, \eta)$  в  $D_0$  невозможно.

Дифференцируя равенство (7) дважды по  $\eta$ , найдём с учётом уравнений Лапласа (1), что  $\lim \partial_{\xi\xi} u_0(c, \eta) = \lim \partial_{\xi\xi} u(l, \eta)$  для любого  $c = c(l) \in (0, l)$ . Отсюда, переходя в равенствах (4), (5) к пределу (6), приходим к условиям сопряжения на сильно проникаемой плёнке в виде отрезка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ :

$$u(0, \eta) = u(0, -\eta), \quad \partial_\xi u(0, \eta) + \partial_\xi u(0, -\eta) = \frac{2A}{k} \partial_{\xi\xi} u(0, \eta). \quad (8)$$

Здесь второе условие упрощено с учётом второго условия в (3) и соотношения (5).

Пусть в равенствах (4), (5) имеют место сходимости

$$l \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow 0, \quad l/k_0 \rightarrow B. \quad (9)$$

При этом область  $D_0$  вырождается в слабо проникаемую плёнку (с параметром  $B$ ) в виде отрезка  $S$ .

Из условия  $\partial_\xi u_0(l, \eta) - \partial_\xi u_0(0, \eta) = l \partial_{\xi\xi} u_0(c_3, \eta)$  следует, что  $\lim \partial_\xi u_0(l, \eta) = \lim \partial_\xi u_0(0, \eta)$  при  $l \rightarrow 0$ . Отсюда с учётом второго равенства в (2) имеем  $\lim k_0 \partial_\xi u_0(c, \eta) = \lim k_0 \partial_\xi u_0(l, \eta) = \lim k \partial_\xi u(l, \eta)$  для любого  $c = c(l) \in (0, l)$ . Тогда, переходя в равенствах (4), (5) к пределу (9), приходим к условиям сопряжения на слабо проникаемой плёнке в виде отрезка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ :

$$u(0, \eta) - u(0, -\eta) = 2Bk \partial_\xi u(0, \eta), \quad \partial_\xi u(0, \eta) = -\partial_\xi u(0, -\eta). \quad (10)$$

Здесь первое условие упрощено с учётом второго условия в (2).

Из условий сопряжения (8) следует, что на сильно проницаемой плёнке потенциал непрерывен, а нормальная скорость при  $u(0, \eta) \neq \text{const}$  имеет разрыв. Последнее объясняется тем, что частицы подвижной среды при входе в сильно проницаемую плёнку под углом  $\theta \neq \pi/2$  протекают внутри плёнки и вытекают из неё в точках, отличных от точек втекания. На слабо проницаемой плёнке нормальная скорость непрерывна, а потенциал при  $\partial_\xi u(0, \eta) \neq 0$  имеет разрыв (10), при этом скорость потока сквозь плёнку пропорциональна разности потенциалов на сторонах плёнки, что согласуется с физическими представлениями.

Если область динамического процесса  $D$  расположена в верхней полуплоскости  $y > 0$  ( $\xi > 0$ ,  $0 < \eta < \pi$ ) и плёнка  $S(\xi = 0, 0 < \eta < \pi)$  находится на её границе, то в условиях сопряжения (8), (10) функции  $u(0, -\eta)$  и  $\partial_\xi u(0, -\eta)$  соответственно в случае граничных условий 1-го и 2-го рода являются функциями  $\varphi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$ , заданными на внешней стороне плёнки. При этом граничные условия на сильно и слабо проницаемых плёнках имеют соответственно вид

$$\partial_\xi u(0, \eta) - \frac{2A}{k} \partial_\xi u(0, \eta) = -\psi(\eta), \quad (11)$$

$$u(0, \eta) - 2Bk \partial_\xi u(0, \eta) = \varphi(\eta). \quad (12)$$

Значения потенциала на сторонах сильно проницаемой плёнки совпадают между собой (см. (8)). Отсюда вытекает, что сильно проницаемая плёнка, на которой задано граничное условие 1-го рода, не влияет на процесс. На сторонах слабо проницаемой плёнки значения нормальной скорости совпадают между собой (см. (10)). Отсюда следует, что слабо проницаемая плёнка, на которой задано граничное условие 2-го рода, не влияет на процесс.

Отметим, что классическое граничное условие 3-го рода является граничным условием 1-го рода на слабо проницаемой плёнке при заданном потенциале на внешней стороне плёнки (12) (при отсутствии плёнки, т.е. при идеальном контакте области  $D$  с внешней средой, скачок потенциала в граничном условии 3-го рода приводит к бесконечной скорости в точках границы).

**2. Плёнки на плоскости при отсутствии границ.** Рассмотрим на плоскости  $z = x + iy$  для функции  $u(\xi, \eta)$  уравнение Пуассона

$$\Delta u = F(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \quad (13)$$

с условиями сопряжения (8) или (10) соответственно на сильно или слабо проницаемой плёнке  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ , где  $\xi, \eta$  – эллиптические координаты плоскости  $z = x + iy$ , функция  $F(\xi, \eta)$  является периодической по  $\eta$  с периодом  $2\pi$  и в окрестности плёнки тождественно нулевой.

На вспомогательной плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  рассмотрим для функции  $f(\xi, \eta)$  в полосе  $G(-\infty < \xi < \infty, -\pi < \eta < \pi)$  аналогичное уравнение (без плёнки)

$$\Delta f = \begin{cases} F(\xi, \eta), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

в предположении, что существует классическое решение  $f(\xi, \eta)$  этого уравнения, удовлетворяющее при  $\xi \rightarrow -\infty$  условию

$$f(\xi, \eta) = O(e^{c|\xi|}), \quad 0 < c < \gamma,$$

где постоянная  $\gamma$  равна  $k/A$  для сильно проницаемой плёнки и  $1/(Bk)$  для слабо проницаемой плёнки (см. ниже (21) и (23) соответственно).

Функцию  $f(\xi, \eta)$  можно найти по известному на всей плоскости  $\omega = \alpha + i\beta = re^{i\eta}$ , где  $r = e^\xi$ , решению  $f_0(r, \eta)$  уравнения Пуассона

$$\Delta_{r,\eta} f_0 = \begin{cases} F(\ln r, \eta), & r > 1, \\ 0, & r \leq 1, \end{cases}$$

здесь  $\Delta_{r,\eta}$  – оператор Лапласа в полярных координатах  $r, \eta$ . При этом  $f(\xi, \eta) = f_0(e^\xi, \eta)$ . В частности, рассматривая на плоскости  $\omega$  гармоническую функцию  $f_0(r, \eta)$ , имеющую произвольные особые точки при  $r > 1$ , получим функцию  $f(\xi, \eta) = f_0(e^\xi, \eta)$ . Например, потенциал источника (фундаментальное решение) с особой точкой  $(\xi_0, \eta_0)$ ,  $\xi_0 > 0$ ,  $-\pi < \eta_0 < \pi$  имеет вид

$$f(\xi, \eta) = Q \ln(e^{2\xi} + e^{2\xi_0} - 2e^{\xi+\xi_0} \cos(\eta - \eta_0)).$$

Методом свёртывания разложений Фурье [11] выразим решения задач (13), (8) и (13), (10) соответственно с сильно и слабо проницаемой плёнкой через решение  $f(\xi, \eta)$  задачи (14).

Функция  $f(\xi, \eta)$  при  $\xi \leq 0$  (где она удовлетворяет уравнению Лапласа (14)) представима в виде

$$f(\xi, \eta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} (a_n \cos(n\eta) + b_n \sin(n\eta)), \quad \xi \leq 0, \quad (15)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(0, \eta) \cos(n\eta) d\eta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(0, \eta) \sin(n\eta) d\eta.$$

Отсюда следуют равенства

$$f(\xi, \eta) - f(\xi, -\eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} b_n \sin(n\eta), \quad (16)$$

$$f(\xi, \eta) + f(\xi, -\eta) - a_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} a_n \cos(n\eta). \quad (17)$$

Заменяя в равенствах (16), (17) переменную  $\xi \leq 0$  на  $\xi - t$ , умножая полученные выражения на  $e^{-\gamma t}$ ,  $\gamma > 0$ , и интегрируя по  $t \in (0, \infty)$ , найдём, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (f(\xi - t, \eta) - f(\xi - t, -\eta)) dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} \frac{b_n}{n + \gamma} \sin(n\eta), \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (f(\xi - t, \eta) + f(\xi - t, -\eta) - a_0) dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} \frac{a_n}{n + \gamma} \cos(n\eta). \quad (19)$$

Решения задач (13), (8) и (13), (10) будем искать в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} (p_n \cos(n\eta) + q_n \sin(n\eta)), \quad \xi > 0, \quad (20)$$

где постоянные  $p_n$ ,  $q_n$  подлежат определению; в частности, функция  $u(\xi, \eta)$  должна удовлетворять уравнению (13) (при условии сходимости и дифференцируемости ряда (20)).

Рассмотрим случай сильно проницаемой плёнки. Подставляя функции (20), (15) в условия сопряжения (8) и приравнявая в получившемся равенстве коэффициенты при  $\cos(n\eta)$  и  $\sin(n\eta)$  слева и справа, для коэффициентов  $p_n$ ,  $q_n$  получаем систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$q_n = -b_n, \quad p_n = \left( \frac{2\gamma}{n + \gamma} - 1 \right) a_n, \quad \gamma = \frac{k}{A} > 0. \quad (21)$$



Отсюда с учётом разложения (15) функции  $f(-\xi, \eta)$  при  $\xi > 0$  и равенства (19) решение (20) задачи (13), (8) с сильно проницаемой плёнкой  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$  выражается непосредственно через решение  $f(\xi, \eta)$  уравнения (14) по формуле (без разложений Фурье, т.е. без сильных осцилляций):

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(-\xi, \eta) + \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} (f(-\xi - t, \eta) + f(-\xi - t, -\eta)) dt, \quad \xi > 0, \quad (22)$$

где постоянная  $\gamma$  определена в (21).

В случае слабо проницаемой плёнки  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$ , рассуждая аналогично, решение задачи (13), (10) с учётом равенства (18) найдём в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, \eta) - \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} (f(-\xi - t, \eta) - f(-\xi - t, -\eta)) dt, \quad \xi > 0, \quad (23)$$

где  $\gamma = 1/(Bk) > 0$ , а  $f(\xi, \eta)$  – решение уравнения (14).

При отсутствии плёнки решение  $u(\xi, \eta)$  уравнения (13) с классическими условиями сопряжения  $u(0, \eta) = u(0, -\eta)$ ,  $\partial_\xi u(0, \eta) = -\partial_\xi u(0, -\eta)$  на разрезе  $S$  получим в виде

$$U(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, -\eta), \quad \xi > 0. \quad (24)$$

### Свойства решений.

**2.1.** Рассмотрим предельные случаи параметров плёнки  $0 < A, B < \infty$ .

При  $A \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ , см. (21)) сильно проницаемая плёнка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$  исчезает, при этом из формулы (22) с помощью интегрирования по частям получаем, что

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, -\eta) + \int_0^\infty e^{-\gamma t} (\partial_\xi f(-\xi - t, \eta) + \partial_\xi f(-\xi - t, -\eta)) dt \rightarrow U(\xi, \eta),$$

где функция  $U(\xi, \eta)$  определена равенством (24).

При  $A \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) из формулы (22) непосредственно находим

$$u(\xi, \eta) \rightarrow f(\xi, \eta) - f(-\xi, \eta),$$

а значит, предельная функция  $u(\xi, \eta)$  является решением задачи (13),  $u(0, \eta) = 0$ , т.е. плёнка  $S$  вырождается в линию нулевого потенциала (при этом линии тока перпендикулярны плёнке). В данном случае плёнка является абсолютно проницаемым отрезком  $S$  (каверной).

При  $B \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ , см. (23)) из формулы (23) с помощью интегрирования по частям получаем, что  $u(\xi, \eta) \rightarrow U(\xi, \eta)$ , где функция  $U(\xi, \eta)$  задана в (24), т.е. слабо проницаемая плёнка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$  исчезает.

При  $B \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) из представления (24) находим

$$u(\xi, \eta) \rightarrow f(\xi, \eta) + f(-\xi, \eta),$$

а значит, предельная функция  $u(\xi, \eta)$  является решением задачи (13),  $\partial_\xi u(0, \eta) = 0$ , т.е. в данном случае имеем обтекание непроницаемого отрезка  $S$  заданным потоком.

Таким образом, потенциалы (22), (23) описывают процессы тепломассопереноса на плоскости с сильно и слабо проницаемыми плёнками в виде отрезка  $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$  в диапазоне от абсолютно проницаемой каверны до непроницаемого экрана.

**2.2.** Обозначим функции  $u(\xi, \eta)$ ,  $f(\xi, \eta)$  через  $u_1(\xi, \eta)$ ,  $f_1(\xi, \eta)$  в случае задачи (13), (8) с сильно проницаемой плёнкой и через  $u_2(\xi, \eta)$ ,  $f_2(\xi, \eta)$  в случае задачи (13), (10) со слабо проницаемой плёнкой.

Тогда, если в задачах (13), (8) и (13), (10)  $k/A = 1/(Bk) = \gamma$ , а  $f_1(\xi, \eta)$  и  $f_2(\xi, \eta)$  – сопряжённые друг другу гармонические функции ( $\partial_\xi f_1 = \partial_\eta f_2$ ,  $\partial_\eta f_1 = -\partial_\xi f_2$  вне особых точек), решения  $u_1(\xi, \eta)$  (22) и  $u_2(\xi, \eta)$  (23) задач с сильно и слабо проницаемыми плёнками также являются сопряжёнными друг другу гармоническими функциями, что проверяется непосредственно.

**2.3.** Рассмотрим на плоскости с разрезом  $S$  в эллиптических координатах  $\xi, \eta$  потенциал некоторого процесса без плёнки:  $U(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, -\eta)$  (см. (24)). При внесении в указанный поток сильно проницаемой плёнки в виде отрезка  $S$  потенциал в каждой точке изменится на величину

$$\Delta_1 u(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - U(\xi, \eta),$$

где функция  $u(\xi, \eta)$  определена равенством (22). Из выражения (22) следует, что  $u(\xi, \eta) - u(\xi, -\eta) = U(\xi, \eta) - U(\xi, -\eta)$ . Отсюда получаем равенство

$$\Delta_1 u(\xi, \eta) = \Delta_1 u(\xi, -\eta),$$

т.е. приращения  $\Delta_1 u(\xi, \eta)$  потенциалов в точках, симметричных относительно прямой, на которой расположена сильно проницаемая плёнка (относительно оси  $x$ ), одинаковые.

При внесении в невозмущённый поток с потенциалом  $U(\xi, \eta)$  (см. (24)) слабо проницаемой плёнки  $S$  потенциал изменится на величину

$$\Delta_2 u(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - U(\xi, \eta),$$

где функция  $u(\xi, \eta)$  определена равенством (23). Из выражения (23) следует, что  $u(\xi, \eta) + u(\xi, -\eta) = U(\xi, \eta) + U(\xi, -\eta)$ . Отсюда получаем равенство

$$\Delta_2 u(\xi, \eta) = -\Delta_2 u(\xi, -\eta),$$

т.е. приращения  $\Delta_2 u(\xi, \eta)$  потенциалов в точках, симметричных относительно прямой, на которой расположена слабо проницаемая плёнка, отличаются лишь знаками.

**3. Плёнки внутри областей.** Рассмотрим в области  $D(0 < \xi < \infty, -b < \eta < b)$ ,  $0 < b < \pi$ , для функции  $u(\xi, \eta)$  краевую задачу

$$\Delta u = F(\xi, \eta), \quad Lu|_{\eta=b} = h_1(\xi), \quad Lu|_{\eta=-b} = h_2(\xi) \quad (25)$$

с условиями сопряжения (8) или (10) на плёнке. Здесь  $L$  – оператор граничных условий 1-го или 2-го рода:  $Lu \equiv u$  или  $Lu \equiv \partial_\eta u$ . В данном случае область  $D$  ограничена гиперболой  $\eta = \pm b$  и содержит сильно или слабо проницаемую плёнку  $S(\xi = 0, 0 < \eta < b)$  в виде отрезка, примыкающего правым концом к границе в точке  $(\xi = 0, \eta = b)$ . В частности при  $b = \pi/2$  область  $D$  является правой полуплоскостью  $x > 0$  с плёнкой  $S(0 < x < a, y = 0)$ , перпендикулярной границе.

На плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  в полосе  $G(-\infty < \xi < \infty, -b < \eta < b)$  рассмотрим аналогичную краевую задачу без плёнки для уравнения Пуассона (14) с граничными условиями вида

$$Lf|_{\eta=b} = \begin{cases} h_1(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases} \quad Lf|_{\eta=-b} = \begin{cases} h_2(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Отметим, что решение задачи (14), (26), как и решения рассмотренных ниже классических задачи (14), (30) и задач (38) и (45), строится в квадратурах методами функции Грина и конформных отображений полосы  $G$  на полуплоскость или квадрант.

Решения  $u(\xi, \eta)$  краевых задач (25), (8) и (25), (10) с плёнкой  $S(\xi = 0, 0 < \eta < b)$  выражаются через решение  $f(\xi, \eta)$  классической задачи (14), (26) соответственно по формулам (22) и (23), что проверяется непосредственно.

#### 4. Плёнки на границе областей.

**4.1. Однородные граничные условия на плёнках.** Рассмотрим область  $D(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$ ,  $0 \leq b < d \leq \pi$ , ограниченную гиперболами  $\eta = b$ ,  $\eta = d$  и отрезком

$S(\xi = 0, b < \eta < d)$  в виде сильно или слабо проницаемых плёнок. При  $b = 0$ ,  $d = \pi$  область  $D$  является верхней полуплоскостью  $y > 0$  с плёнкой  $S(-a < x < a, y = 0)$  на границе.

Для функции  $u(\xi, \eta)$  рассмотрим в области  $D$  краевую задачу

$$\Delta u = F(\xi, \eta), \quad L_1 u|_{\eta=b} = h_1(\xi), \quad L_2 u|_{\eta=d} = h_2(\xi) \quad (27)$$

с однородными граничными условиями на сильно или слабо проницаемой плёнке соответственно вида (11), (12):

$$(\partial_{\xi\xi} u - \gamma \partial_{\xi} u)|_{\xi=0} = 0 \quad (28)$$

или

$$(\partial_{\xi} u - \mu u)|_{\xi=0} = 0, \quad (29)$$

где  $\gamma = k/(2A) > 0$ ,  $\mu = 1/(2Bk) > 0$ ,  $L_i$  – операторы граничных условий 1-го или 2-го рода в произвольном сочетании.

Выразим решения задач (27), (28) и (27), (29) через решение  $f(\xi, \eta)$  аналогичной классической задачи (без плёнки) в полосе  $G(-\infty < \xi < \infty, b < \eta < d)$  для уравнения Пуассона (14) с граничными условиями вида

$$L_1 f|_{\eta=b} = \begin{cases} h_1(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases} \quad L_2 f|_{\eta=d} = \begin{cases} h_2(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (30)$$

Для вывода общих формул рассмотрим задачи (27), (28) и (27), (29) и (14), (30) при  $b = 0$ ,  $d = \pi$ ,  $h_i(\xi) = 0$ ,  $L_i u \equiv u$ . Тогда решение  $f(\xi, \eta)$  задачи (14), (30) при  $\xi \leq 0$  представимо в виде

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} b_n \sin(n\eta), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(0, \eta) \sin(n\eta) d\eta. \quad (31)$$

Отсюда следует равенство (аналогичное (18), (19))

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(\xi - t, \eta) dt = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} \frac{b_n}{n + \gamma} \sin(n\eta), \quad \xi \leq 0, \quad \gamma > 0. \quad (32)$$

Решения задач (27), (28) и (27), (29) будем искать в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} p_n \sin(n\eta), \quad \xi > 0; \quad (33)$$

в частности, функция  $u(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению и граничным условиям (27).

В случае сильно проницаемой плёнки из граничного условия (28) и разложений (31), (33) найдём  $p_n = (2\gamma/(n + \gamma) - 1)b_n$ . Отсюда с учётом равенства (32) решение (33) задачи (27), (28) с плёнкой  $S(\xi = 0, b < \eta < d)$  получаем в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(-\xi, \eta) + 2\gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(-\xi - t, \eta) dt, \quad \xi > 0, \quad (34)$$

где  $f(\xi, \eta)$  – решение задачи (14), (30) без плёнки.

В случае слабо проницаемой плёнки из граничного условия (29) и разложений (31), (33) находим  $p_n = (1 - 2\mu/(n + \mu))b_n$ . Отсюда, учитывая представление (32), решение (33) задачи (27), (29) приводим к виду

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, \eta) - 2\mu \int_0^\infty e^{-\mu t} f(-\xi - t, \eta) dt, \quad \xi > 0, \quad (35)$$

где  $f(\xi, \eta)$  – решение задачи (14), (30).

Для общего случая задач (27), (28) и (27), (29) и задачи (14), (30) при  $0 \leq b < d \leq \pi$ ,  $h_i(\xi) \neq 0$ ,  $L_i u \equiv u$  или  $L_i u \equiv \partial_\eta u$  формулы (34), (35) сохраняются, что проверяется непосредственно.

**4.2. Неоднородные граничные условия на плёнках.** Рассмотрим задачу (27), (28) с неоднородным условием на сильно проницаемой плёнке вида

$$\Delta u = 0, \quad L_1 u|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 u|_{\eta=d} = 0, \quad (36)$$

$$(\partial_{\xi\xi} u - \gamma \partial_\xi u)|_{\xi=0} = \gamma \psi(\eta), \quad (37)$$

где  $\gamma = k/(2A)$ . Выразим её решение через решение  $f(\xi, \eta)$  аналогичной задачи (без плёнки) в полуполосе  $G_1(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$ :

$$\Delta f = 0, \quad L_1 f|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 f|_{\eta=d} = 0, \quad \partial_\xi f|_{\xi=0} = \psi(\eta). \quad (38)$$

Для вывода общих формул, как и выше, рассмотрим обе задачи (36), (37) и (38) при  $b = 0$ ,  $d = \pi$ ,  $L_i u \equiv u$ . Представим решение задачи (38) в виде разложения Фурье

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} b_n \sin(n\eta), \quad \xi \geq 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(0, \eta) \sin(n\eta) d\eta. \quad (39)$$

Тогда из граничного условия (38) при  $\xi = 0$  вытекает равенство

$$\psi(\eta) = - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin(n\eta), \quad (40)$$

а из равенства (39) следует, что

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(\xi + t, \eta) dt = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} \frac{b_n}{n + \gamma} \sin(n\eta), \quad \xi \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (41)$$

Решение задачи (36), (37) будем искать в виде

$$u(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} p_n \sin(n\eta), \quad \xi > 0; \quad (42)$$

в частности, функция  $u(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению и граничным условиям (36). Из граничного условия (37) и равенства (40) найдём  $p_n = -\gamma b_n/(n + \gamma)$ . Отсюда с учётом представления (41) решение (42) задачи (36), (37) с сильно проницаемой плёнкой  $S(\xi = 0, b < \eta < d)$  получаем в виде

$$u(\xi, \eta) = -\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(\xi + t, \eta) dt, \quad \xi > 0, \quad (43)$$

где  $f(\xi, \eta)$  – решение задачи (38) без плёнки. Для общего случая задач (36), (37) и (38) при  $0 \leq b < d \leq \pi$ ,  $L_i u \equiv u$  или  $L_i u \equiv \partial_\eta u$  формула (43) сохраняется, что проверяется непосредственно.

В случае слабо проницаемой плёнки  $S(\xi = 0, b < \eta < d)$  граничное условие (37) заменяется условием

$$(\partial_\xi u - \mu u)|_{\xi=0} = \mu \varphi(\eta), \quad (44)$$

где  $\mu = 1/(2Bk)$ . Выразим решение задачи (36), (44) через решение  $f(\xi, \eta)$  классической задачи

$$\Delta f = 0, \quad L_1 f|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 f|_{\eta=d} = 0, \quad f|_{\xi=0} = \varphi(\eta) \quad (45)$$

в полуполосе  $G_1(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$ . Рассматривая обе задачи (36), (44) и (45) при  $b = 0$ ,  $d = \pi$ ,  $L_i u \equiv u$  и представляя граничную функцию  $\varphi(\eta)$  из (44), (45) в виде ряда

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\eta), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\eta) \sin(n\eta) d\eta, \quad (46)$$

решение задачи (45) найдём в виде разложения (39) с коэффициентами  $b_n$  вида (46). При этом равенство (41) сохраняется. Представляя решение задачи (36) в виде (42), из граничного условия (44) с учётом равенств (46) найдём  $p_n = -\mu b_n/(n + \mu)$ . Отсюда и из равенства (41) решение (42) задачи (36), (44) со слабо проницаемой плёнкой  $S(\xi = 0, b < \eta < d)$  получаем в виде

$$u(\xi, \eta) = -\mu \int_0^\infty e^{-\mu t} f(\xi + t, \eta) dt, \quad \xi > 0, \quad (47)$$

где  $f(\xi, \eta)$  – решение задачи (45) без плёнки. В общем случае при  $0 \leq b < d \leq \pi$ ,  $L_i u = u$  или  $L_i u = \partial_\eta u$  решение задачи (36), (44) строится также по формуле (47).

Решения краевых задач (27), (37) и (27), (44) с неоднородными условиями в области  $D(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$  имеют вид суммы соответствующих решений (34), (43) и (35), (47).

**Заключение.** Найденные явные решения дополняют результаты о краевых задачах математической физики в областях, содержащих плёночные включения.

Работа выполнена в рамках гранта Совета по научной и инновационной деятельности Забайкальского государственного университета (проект 358-ГР).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., 1966.
2. Мухомеллишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М., 1987.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
5. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242–247.
6. Сетуха А.В. О построении фундаментальных решений краевой задачи Неймана в области вне разомкнутой плоской поверхности // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 505–515.
7. Крутицкий П.А., Прозоров К.В. К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268–1283.
8. Крутицкий П.А. Обобщение задачи Неймана для гармонических функций вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1100–1112.
9. Крутицкий П.А., Сгибнев А.И. Метод интегральных уравнений в обобщенной задаче о скачке для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1199–1213.

10. *Крутицкий П.А.* Краевая задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости с разными условиями третьего рода на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 86–100.
11. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
12. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа в шаре, ограниченном многослойной пленкой // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 919–926.
13. *Холодовский С.Е.* Об установившихся процессах на плоскости с круговым включением, экранированным двухслойной пленкой // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 9. С. 89–97.
14. *Холодовский С.Е.* О многослойных пленках на границе полупространства // Мат. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 3. С. 421–427.

Забайкальский государственный университет,  
г. Чита

Поступила в редакцию 19.04.2021 г.  
После доработки 02.03.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УДК 517.977.1

## ОБ А-ОРБИТАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2022 г. Д. А. Фетисов

Рассматривается задача об А-орбитальной линеаризации нелинейных систем, аффинных по управлению. В известных к настоящему времени условиях А-орбитальной линеаризуемости предполагается, что  $C^\infty$ -модуль, порождённый векторными полями, соответствующими системе, имеет постоянный ранг. В настоящей работе это предположение не выполняется. Доказывается необходимое и достаточное локальное условие, при котором трёхмерная аффинная система с одним управлением А-орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности положения равновесия.

DOI: 10.31857/S0374064122040082, EDN: CABTCS

**Введение.** Задача преобразования нелинейной системы с управлением в линейную управляемую систему (т.е. в линейную систему, удовлетворяющую условию управляемости Р. Калмана) является одной из классических задач теории управления. Первые результаты в этой области были получены для аффинных систем с одним управлением при специальном классе преобразований [1]. Впоследствии эти результаты были обобщены в работах [2, 3].

Напомним [2], что если одну аффинную систему можно преобразовать в другую с использованием гладких невырожденных замен состояния и управления, то такие системы называют *эквивалентными по обратной связи и состоянию*. В случае, если аффинная система эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *линеаризуема обратной связью*. Условия линеаризуемости обратной связью [2, 3] для многих систем не выполняются, в связи с чем были предложены многочисленные обобщения этого понятия, позволившие распространить идею линеаризации на более широкие классы систем. Среди таких обобщений выделим приближённую линеаризацию обратной связью [4], линеаризацию обратной связью по выходу [5] и орбитальную линеаризацию [6].

Напомним [6], что две аффинные системы называют *орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию*, если одну из них можно преобразовать в другую с помощью гладких невырожденных замен состояния, управления и независимой переменной, при этом предполагается, что замена независимой переменной не зависит от управления. В случае, если аффинная система орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *орбитально линеаризуема* [6]. Необходимые и достаточные условия орбитальной линеаризуемости для аффинных систем с одним управлением получены в работах [6, 7], а для систем с векторным управлением – в работе [8].

Как оказалось, использование замен независимой переменной, зависящих от управления, позволяет преобразовать в линейную управляемую систему даже системы, не линеаризуемые орбитально [9]. Напомним [10], что две аффинные системы называют *А-орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию*, если одна система преобразуется в другую с использованием гладких невырожденных замен состояния, управления и независимой переменной, причём замены независимой переменной могут зависеть как от состояния, так и от управления. Если аффинная система А-орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *А-орбитально линеаризуема*. Необходимые и достаточные условия А-орбитальной линеаризуемости для систем с одним управлением получены в работах [11, 12], а для систем с векторным управлением – в работе [10]. Все указанные условия найдены на основе построения производного флага кораспределения, ассоциированного с системой. При этом предполагалось, что ранги всех элементов

производного флага постоянны в окрестности рассматриваемой точки. Такое допущение автоматически выводит из рассмотрения положения равновесия аффинной системы.

Вместе с тем, линеаризация системы в окрестности положений равновесия имеет приоритетное значение с точки зрения приложений. В настоящей работе для трёхмерных аффинных систем с одним управлением формулируется и доказывается необходимое и достаточное локальное условие  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности нулевого положения равновесия.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^m f_j(x)u_j, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in M$  – состояние,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $\dot{x} \equiv dx/dt$ ,  $M$  – открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f_j = \sum_{k=1}^n f_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad f_{jk} \in C^\infty(M), \quad j = \overline{0, m}, \quad k = \overline{1, n},$$

$C^\infty(M)$  – кольцо гладких функций  $M \rightarrow \mathbb{R}$ . На протяжении всей статьи под *гладкостью* понимается бесконечная дифференцируемость.

Напомним понятие  $A$ -орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию. Для этого рассмотрим наряду с системой (1) систему

$$y' = h_0(y) + \sum_{j=1}^m h_j(y)v_j, \quad (2)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in P$  – состояние,  $v = (v_1, \dots, v_m)^T \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $y' \equiv dy/d\tau$ ,  $P$  – открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$h_j = \sum_{k=1}^n h_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad h_{jk} \in C^\infty(P), \quad j = \overline{0, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Говорят [10], что системы (1) и (2)  *$A$ -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию* на множествах  $M$  и  $P$ , если существует матрица  $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{0,m}}$ ,  $\alpha_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = \overline{0, m}$ , гладкая и невырожденная на множестве  $M$ , и диффеоморфизм  $\Phi : M \rightarrow P$  такие, что

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} = \Phi_* \left( (A^{-1})^T \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} \right),$$

где  $\Phi_*$  – касательное отображение, индуцированное диффеоморфизмом  $\Phi$ .

Пусть  $x_0 \in M$ ,  $y_0 \in P$ . Будем говорить, что системы (1) и (2)  *$A$ -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек*  $(x_0, y_0)$ , если существуют окрестности  $U(x_0)$  и  $V(y_0)$  точек  $x_0$  и  $y_0$  соответственно такие, что системы (1) и (2)  $A$ -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию на множествах  $U(x_0)$  и  $V(y_0)$ , причём соответствующий диффеоморфизм  $\Phi : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$  удовлетворяет условию  $\Phi(x_0) = y_0$ .

Как показано в работе [10],  $A$ -орбитальная эквивалентность систем (1) и (2) по обратной связи и состоянию на множествах  $M$  и  $P$  означает, что система (1) заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_{00}(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_{0j}(x)u_j,$$



заменой управления

$$v_i = \frac{\alpha_{i0}(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(x)u_j}{\alpha_{00}(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_{0j}(x)u_j}, \quad i = \overline{1, m},$$

и заменой состояния  $y = \Phi(x)$  преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \left\{ (x, u) : x \in M, \alpha_{00}(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_{0j}(x)u_j \neq 0 \right\}$$

в систему (2), ограниченную на множество  $M_{yv} = \{(y, v) : y \in P, \Delta(\Phi^{-1}(y), v) \neq 0\}$ , где

$$\Delta(x, v) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{01}(x) & \dots & \alpha_{0m}(x) \\ v_1 & \alpha_{11}(x) & \dots & \alpha_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_m & \alpha_{m1}(x) & \dots & \alpha_{mm}(x) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что известные из работ [2] и [6] понятия эквивалентности и орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию являются частными случаями  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию, а именно: системы (1) и (2) эквивалентны по обратной связи и состоянию, если они  $A$ -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix};$$

системы (1) и (2) орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию, если они  $A$ -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Наибольший интерес представляет  $A$ -орбитальная эквивалентность по обратной связи и состоянию системы (1) линейной управляемой системе

$$\begin{aligned} (y_1^1)' &= y_2^1, \quad \dots, \quad (y_{\rho_1-1}^1)' = y_{\rho_1}^1, \quad (y_{\rho_1}^1)' = v_1, \\ &\dots \\ (y_1^m)' &= y_2^m, \quad \dots, \quad (y_{\rho_m-1}^m)' = y_{\rho_m}^m, \quad (y_{\rho_m}^m)' = v_m, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho_1 + \dots + \rho_m = n$ , либо системе

$$\begin{aligned} (y^0)' &= 1, \\ (y_1^1)' &= y_2^1, \quad \dots, \quad (y_{\rho_1-1}^1)' = y_{\rho_1}^1, \quad (y_{\rho_1}^1)' = v_1, \\ &\dots \\ (y_1^m)' &= y_2^m, \quad \dots, \quad (y_{\rho_m-1}^m)' = y_{\rho_m}^m, \quad (y_{\rho_m}^m)' = v_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho_1 + \dots + \rho_m = n - 1$ , которая становится линейной управляемой системой после перехода к новой независимой переменной  $y^0$ .

Задача нахождения условий  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системы (1) системе (4) в случае  $m > 1$  рассматривалась в работе [10], а в случае  $m = 1$  – в работе [12]. Различные аспекты задачи об  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системы (1) системе (3) в случае  $m = 1$  обсуждались в работах [9, 11]. В работе [9] получена система уравнений в частных производных, решив которую можно найти линеаризующие преобразования. В работе [11] в случае  $m = 1$  найдено необходимое и достаточное условие  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системе (3). С использованием этого условия разработан алгоритм построения линеаризующих преобразований, основанный на построении производного флага кораспределения, ассоциированного с системой.

Отметим, что условие и алгоритм из работы [11] применимы лишь к регулярным точкам производного флага, т.е. к таким точкам, в окрестности которых все кораспределения, составляющие производный флаг, имеют постоянный ранг. Это предположение исключает из рассмотрения положения равновесия системы. Вместе с тем, для приложений важны условия  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системе (3) именно в окрестностях положений равновесия.

Целью настоящей работы является нахождение для трёхмерных аффинных систем условий  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системы, рассматриваемой в окрестности нулевого положения равновесия.

Далее будем рассматривать систему

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u, \quad (5)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in M$  – состояние,  $u \in \mathbb{R}$  – управление,  $\dot{x} \equiv dx/dt$ ,  $M$  – открытое подмножество  $\mathbb{R}^3$ ,

$$f_j = \sum_{k=1}^3 f_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad f_{jk} \in C^\infty(M), \quad j = 0, 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Пусть  $x_0 \in M$ . Рассмотрим задачу об  $A$ -орбитальной эквивалентности системы (5) и системы

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \quad y'_3 = v \quad (6)$$

по обратной связи и состоянию в паре точек  $(x_0, 0)$ .  $A$ -орбитальная эквивалентность систем (5) и (6) по обратной связи и состоянию в паре точек  $(x_0, 0)$  означает существование окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , окрестности  $V(0)$  точки  $y = 0$ , матрицы  $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$ ,  $\alpha_{ij} \in C^\infty(U(x_0))$ ,  $i, j = 0, 1$ , невырожденной в  $U(x_0)$ , и диффеоморфизма  $\Phi : U(x_0) \rightarrow V(0)$  таких, что  $\Phi(x_0) = 0$ , и заменами независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u,$$

управления

$$v = \frac{\alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u}{\alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u}$$

и состояния  $y = \Phi(x)$  система (5) преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \{(x, u) : x \in U(x_0), \quad \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u \neq 0\}$$

в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество  $M_{yv} = \{(y, v) : y \in V(0), \quad \alpha_{11}(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$ .

Отметим, что в окрестности точки  $y = 0$  модуль, порождённый векторными полями, соответствующими системе (6), имеет переменный ранг, поэтому рассматриваемая в настоящей работе задача не может быть решена методом, предложенным в статье [11]. Условие орбитальной эквивалентности систем (5) и (6) по обратной связи и состоянию в паре точек  $(x_0, 0)$

известно [6], в настоящей работе это условие обобщается на более широкий класс преобразований.

**2. Условие линеаризуемости.** Будем далее обозначать  $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей, заданных на множестве  $M$ , через  $\mathcal{T}(M)$ . Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{T}(M)$ . Запись  $\mathcal{P} = \text{span} \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  означает, что

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi \in \mathcal{T}(M) : \xi = \sum_{j=1}^k \beta_j \xi_j, \quad \beta_j \in C^\infty(M) \right\},$$

т.е.  $\mathcal{P}$  – подмодуль модуля  $\mathcal{T}(M)$ , порождённый векторными полями  $\xi_1, \dots, \xi_k$ . Через  $[\xi, \eta]$  обозначаем коммутатор векторных полей  $\xi, \eta \in \mathcal{T}(M)$ . Используем также обозначения

$$\text{ad}_\xi^0 \eta = \eta, \quad \text{ad}_\xi^{k+1} \eta = [\xi, \text{ad}_\xi^k \eta], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поставим в соответствие системе (5) модуль  $\mathcal{F} = \text{span} \{f_0, f_1\}$ . Напомним, что *производным флагом* модуля  $\mathcal{F}$  называют последовательность модулей  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ , построенную по правилу

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k + [\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем использовать обозначения  $d_k = \dim \mathcal{F}_k(x_0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{F}_1(x) < 3\}.$$

Известно [6], что если выполнены равенства  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$ , то  $S$  – гладкая двумерная поверхность.

Главным результатом настоящей работы является

**Теорема.** Системы (5) и (6) А-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек  $(x_0, 0)$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1)  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$ ;
- 2) существует векторное поле  $f \in \mathcal{F}$ , касательное к поверхности  $S$  и такое, что  $f(x_0) \neq 0$ .

**Доказательство. Достаточность.** Поскольку  $f \in \mathcal{F}$ , то  $f = \beta_0 f_0 + \beta_1 f_1$ , где  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – некоторые гладкие функции. Так как  $f(x_0) \neq 0$ , то по крайней мере для одного значения индекса  $k \in \{0, 1\}$  имеют место соотношения  $\beta_k(x_0) \neq 0$ ,  $f_k(x_0) \neq 0$ . Не ограничивая общности, считаем, что  $k = 1$ . Заменим образующую  $f_1$  модуля  $\mathcal{F}$  на образующую  $f$ . Очевидно, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix},$$

причём матрица

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

невырождена в точке  $x_0$ , так как  $\det \beta(x_0) = \beta_1(x_0) \neq 0$ . Следовательно, модуль  $\mathcal{F}$  представим в окрестности точки  $x_0$  в виде  $\mathcal{F} = \text{span} \{f_0, f\}$ . Отметим, что векторные поля  $f_0$  и  $f_1$  выражаются через векторные поля  $f_0$  и  $f$  по формуле

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \beta^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Так как  $f(x_0) \neq 0$ , то векторное поле  $f$  имеет в окрестности точки  $x_0$  два функционально независимых первых интеграла  $z_1$  и  $z_2$ . Дополним  $z_1$  и  $z_2$  функцией  $z_3$  до системы из трёх функций, независимых в окрестности точки  $x_0$ . Отметим, что функции  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  всегда

можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства  $z_i(x_0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Отображение  $\Phi_1$ , задаваемое соотношениями

$$z_1 = z_1(x), \quad z_2 = z_2(x), \quad z_3 = z_3(x),$$

является локальным диффеоморфизмом, при этом имеет место равенство  $\Phi_1(x_0) = 0$ . Образами векторных полей  $f$  и  $f_0$  при касательном отображении  $\Phi_{1*}$ , индуцированном отображением  $\Phi_1$ , являются векторные поля

$$\Phi_{1*}f = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad \Phi_{1*}f_0 = \gamma_{01} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02} \frac{\partial}{\partial z_2} + \gamma_{03} \frac{\partial}{\partial z_3},$$

где  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{0i}$  – некоторые функции, гладкие в окрестности точки  $z = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку в окрестности точки  $x_0$  выполнены равенства  $fz_1 = 0$  и  $fz_2 = 0$ , то  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  и, следовательно, векторное поле  $\Phi_{1*}f$  в окрестности точки  $z = 0$  представимо в виде

$$\Phi_{1*}f = \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z_3}. \quad (8)$$

Так как  $f(x_0) \neq 0$ , то  $\Phi_{1*}|_{x_0}f(x_0) \neq 0$  и, следовательно,  $\gamma_3(0) \neq 0$ . Модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}$  в результате принимает вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F} = \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right\} = \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\},$$

где

$$\Phi_{1*}f_0 = \gamma_{01} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02} \frac{\partial}{\partial z_2} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}. \quad (9)$$

Так как  $\dim \mathcal{F}(x_0) = 1$ , то  $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}(x_0) = 1$  и поэтому  $\gamma_{01}(0) = \gamma_{02}(0) = 0$ .

Построим модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ . Из сравнения (9) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 &= \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\} + \text{span} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z_3}, \gamma_{01} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02} \frac{\partial}{\partial z_2} \right] \right\} = \\ &= \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\} + \text{span} \left\{ (\gamma_{01})'_{z_3} \frac{\partial}{\partial z_1} + (\gamma_{02})'_{z_3} \frac{\partial}{\partial z_2} \right\}. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\gamma_{11} = (\gamma_{01})'_{z_3}, \quad \gamma_{12} = (\gamma_{02})'_{z_3} \quad (10)$$

и перепишем выражение для модуля  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$  в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \gamma_{11} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{12} \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}. \quad (11)$$

Покажем, что хотя бы для одного номера  $j \in \{1, 2\}$  выполнены соотношения  $\gamma_{1j}(0) \neq 0$ ,  $(\det \gamma)'_{z_j}(0) \neq 0$ , где

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{01} & \gamma_{02} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

Так как  $\dim \mathcal{F}_1(x_0) = 2$ , то  $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_1(x_0) = 2$  и, следовательно, хотя бы одна из функций  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$  отлична от нуля в точке  $z = 0$ . Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что  $\gamma_{12}(0) \neq 0$ . Это предположение позволяет записать выражение (11) в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ \Phi_{1*}f_0, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}.$$

Из сравнения (9) вытекает, что

$$\Phi_{1*}f_0 = \frac{\det \gamma}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02} \left( \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}. \quad (12)$$

В силу определения множества  $S$  с учётом сравнения (12) получаем, что  $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \det \gamma(z) = 0\}$ . Из соотношения (8) вытекает, что векторное поле  $\partial/\partial z_3$  является касательным к поверхности  $S$ . Отметим, что из равенств  $\gamma_{01}(0) = \gamma_{02}(0) = 0$  следует равенство  $\det \gamma(0) = 0$ . Отсюда заключаем, что  $0 \in S$ .

Так как функция  $(\det \gamma)/\gamma_{12}$  равна нулю на поверхности  $S$  и векторное поле  $\partial/\partial z_3$  является касательным к  $S$ , то на поверхности  $S$  имеет место равенство

$$\left( \frac{\det \gamma}{\gamma_{12}} \right)'_{z_3} = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\left( \gamma_{01} - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \gamma_{02} \right)'_{z_3} = 0, \quad z \in S.$$

Учитывая обозначения (10), приходим к равенству

$$\left( \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \right)'_{z_3} \gamma_{02} = 0, \quad z \in S. \quad (13)$$

Пусть  $V(0)$  – окрестность точки  $z = 0$ , в которой функция  $\gamma_{12}$  не обращается в нуль. Покажем, что  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0$  на множестве  $S \cap V(0)$ . Предположим, что в некоторой точке  $z_0 \in S \cap V(0)$  выполнено соотношение  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}(z_0) \neq 0$ . Вследствие непрерывности функции  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}$  это означает, что соотношение  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} \neq 0$  выполнено и в некоторой окрестности  $W(z_0)$  точки  $z_0$ . Всегда можем считать, что  $W(z_0)$  целиком содержится в  $V(0)$ . В силу соотношения (13) получаем, что на множестве  $S \cap W(z_0)$  выполнено равенство  $\gamma_{02} = 0$ . Так как векторное поле  $\partial/\partial z_3$  является касательным к  $S$ , то на участке поверхности  $S$ , который расположен в  $W(z_0)$ , имеет место равенство  $(\gamma_{02})'_{z_3} = 0$ , или, что то же самое,  $\gamma_{12} = 0$ . Полученное противоречие доказывает, что  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0$  на множестве  $S \cap V(0)$ , в том числе и в точке  $z = 0$ .

В силу сравнения (12) модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_2$  имеет вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \text{span} \left\{ \left[ \det \gamma \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right], \left[ \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right] \right\}.$$

Поскольку

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right] = \left( \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \right)'_{z_3} \frac{\partial}{\partial z_1},$$

$(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}(0) = 0$  и  $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_2(x_0) = 3$ , то

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \text{span} \left\{ \left[ \det \gamma \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right] \right\}.$$

Введём обозначение

$$\xi = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Так как

$$\left[ \det \gamma \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right] = \det \gamma \left[ \frac{\partial}{\partial z_1}, \xi \right] - \xi(\det \gamma) \frac{\partial}{\partial z_1},$$

то

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \text{span} \left\{ \det \gamma \left[ \frac{\partial}{\partial z_1}, \xi \right] - \xi(\det \gamma) \frac{\partial}{\partial z_1} \right\}.$$

Поскольку  $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_2(x_0) = 3$  и  $\det \gamma(0) = 0$ , то  $\xi(\det \gamma)(0) \neq 0$ . С учётом вида векторного поля  $\xi$  полученный результат означает, что по крайней мере одна из частных производных  $(\det \gamma)'_{z_1}$ ,  $(\det \gamma)'_{z_2}$  отлична от нуля в точке  $z = 0$ . Если  $(\det \gamma)'_{z_2}(0) \neq 0$ , то требуемое утверждение доказано. Если же  $(\det \gamma)'_{z_2}(0) = 0$ , то

$$\xi(\det \gamma)(0) = \frac{\gamma_{11}(0)}{\gamma_{12}(0)}(\det \gamma)'_{z_1}(0).$$

Так как  $\xi(\det \gamma)(0) \neq 0$ , то  $\gamma_{11}(0) \neq 0$ ,  $(\det \gamma)'_{z_1}(0) \neq 0$ . Таким образом, показано, что существует номер  $j \in \{1, 2\}$ , для которого выполнены неравенства  $\gamma_{1j}(0) \neq 0$ ,  $(\det \gamma)'_{z_j}(0) \neq 0$ .

Далее будем предполагать, что имеют место соотношения  $\gamma_{12}(0) \neq 0$ ,  $(\det \gamma)'_{z_2}(0) \neq 0$ . Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение  $\det \gamma(z) = 0$  разрешимо относительно  $z_2$  в окрестности точки  $z = 0$  и может быть записано в этой окрестности в виде  $z_2 = \psi(z_1, z_3)$ , где  $\psi$  – некоторая гладкая функция, удовлетворяющая условию  $\psi(0, 0) = 0$ . Поскольку функция  $z_2 - \psi(z_1, z_3)$  равна нулю на поверхности  $S$  и векторное поле  $\partial/\partial z_3$  является касательным к  $S$ , то на поверхности  $S$  имеет место равенство

$$(z_2 - \psi(z_1, z_3))'_{z_3} = 0.$$

Запишем его в виде

$$\psi'_{z_3}(z_1, z_3)|_{z_2=\psi(z_1, z_3)} = 0$$

и заметим, что поскольку функция  $\psi'_{z_3}(z_1, z_3)$  не зависит от  $z_2$ , то в окрестности точки  $z = 0$  выполнено равенство

$$\psi'_{z_3}(z_1, z_3) = 0.$$

Следовательно, поверхность  $S$  в окрестности точки  $z = 0$  задаётся уравнением  $z_2 = \psi(z_1)$ , в котором функция  $\psi$  удовлетворяет условию  $\psi(0) = 0$ . Из доказанного вытекает, что функция  $\det \gamma$  в окрестности точки  $z = 0$  представима в виде  $\det \gamma(z) = (z_2 - \psi(z_1))C(z)$ , где  $C(z)$  – некоторая гладкая функция. Из соотношения  $(\det \gamma)'_{z_2}(0) \neq 0$  вытекает, что  $C(0) \neq 0$ . Отсюда следует, что модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$  в окрестности точки  $z = 0$  имеет вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ (z_2 - \psi(z_1)) \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}.$$

Как показано выше, на участке поверхности  $S$ , расположенном в некоторой окрестности точки  $z = 0$ , имеет место равенство  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0$ , поэтому в окрестности точки  $z = 0$  функция  $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}$  представима в виде

$$\left( \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \right)'_{z_3} = (z_2 - \psi(z_1))B(z),$$

где  $B(z)$  – некоторая функция, гладкая в окрестности точки  $z = 0$ . Интегрируя полученное равенство по переменной  $z_3$ , находим

$$\frac{\gamma_{11}(z)}{\gamma_{12}(z)} = (z_2 - \psi(z_1))D(z) + \varphi(z_1, z_2), \quad (14)$$

где  $D(z)$ ,  $\varphi(z_1, z_2)$  – некоторые гладкие функции. Модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ , таким образом, принимает вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ (z_2 - \psi(z_1)) \frac{\partial}{\partial z_1}, ((z_2 - \psi(z_1))D(z) + \varphi(z_1, z_2)) \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}.$$

Вычитая из второй образующей первую образующую, умноженную на  $D(z)$ , получаем

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ (z_2 - \psi(z_1)) \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} + \varphi(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}.$$

Из сравнения (12) и равенства (14) вытекает, что

$$\Phi_{1*}f_0 = (z_2 - \psi(z_1))\tilde{\varepsilon}_{00} \frac{\partial}{\partial z_1} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_2} + \varphi(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\},$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{00} = \frac{C}{\gamma_{12}} + \gamma_{02}D.$$

Так как  $C(0) \neq 0$  и  $\gamma_{02}(0) = 0$ , то  $\tilde{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$ .

Выпрямляя векторное поле  $\partial/\partial z_2 + \varphi(z_1, z_2)\partial/\partial z_1$ , оставляя для упрощения записи прежние обозначения  $z_1, z_2, z_3$  для переменных состояния и опуская специальное обозначение для выпрямляющего диффеоморфизма, представим модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$  в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ (z_2 - \hat{\psi}(z_1)) \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}, \quad (15)$$

где  $\hat{\psi}(z_1)$  – гладкая функция, удовлетворяющая условию  $\hat{\psi}(0) = 0$ ,

$$\Phi_{1*}f_0 = (z_2 - \hat{\psi}(z_1))\hat{\varepsilon}_{00} \frac{\partial}{\partial z_1} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}, \quad (16)$$

$\hat{\varepsilon}_{00}$  – гладкая функция такая, что  $\hat{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$ .

Рассмотрим диффеоморфизм  $\Phi_2$ , задаваемый равенствами

$$\bar{y}_1 = z_1, \quad \bar{y}_2 = z_2 - \hat{\psi}(z_1), \quad \bar{y}_3 = z_3.$$

Отметим, что поскольку  $\hat{\psi}(0) = 0$ , то  $\Phi_2(0) = 0$ . Установим образы при отображении  $\Phi_{2*}$  векторных полей, порождающих, согласно равенству (15), модуль  $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ . Обозначим через  $\Phi_{12}$  композицию диффеоморфизмов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , т.е.  $\Phi_{12} = \Phi_2 \circ \Phi_1$ . Матрица Якоби отображения  $\Phi_2$  имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\hat{\psi}' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{2*} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \right) = -\hat{\psi}'(\bar{y}_1) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1}, \quad \Phi_{2*} \left( \frac{\partial}{\partial z_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2}, \quad \Phi_{2*} \left( \frac{\partial}{\partial z_3} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3}.$$

Так как

$$\Phi_{2*} \left( (z_2 - \hat{\psi}(z_1)) \frac{\partial}{\partial z_1} \right) = \bar{y}_2 \left( -\hat{\psi}'(\bar{y}_1) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} \right) = \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right\}, \quad (17)$$

то модуль  $\Phi_{12*}\mathcal{F}_1$  принимает вид

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_1 = \text{span} \left\{ \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3} \right\}.$$

Из сравнений (16) и (17) следует, что

$$\Phi_{12*}f_0 = \bar{\varepsilon}_{00}\bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3} \right\},$$

где  $\bar{\varepsilon}_{00}$  – гладкая функция, удовлетворяющая условию  $\bar{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$ . Отсюда, в свою очередь, вытекает сравнение

$$\Phi_{12*}f_0 = \bar{\varepsilon}_{00} \left( \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right) \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3} \right\}, \quad (18)$$

в котором  $\mu$  – некоторая гладкая функция. Из доказанного следует также равенство

$$\Phi_{12*}f = \bar{\varepsilon}_{11} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3}, \quad (19)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{11}$  – гладкая функция, удовлетворяющая условию  $\bar{\varepsilon}_{11}(0) \neq 0$ .

Поскольку  $\bar{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$  и  $\bar{\varepsilon}_{11}(0) \neq 0$ , то из равенства  $\Phi_{12*}\mathcal{F}_0 = \text{span} \{ \Phi_{12*}f_0, \Phi_{12*}f \}$  вытекает соотношение

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_0 = \text{span} \left\{ \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3} \right\}. \quad (20)$$

Из условия  $\dim \Phi_{12*}|_{x_0}\mathcal{F}_0(x_0) = 1$  следует, что  $\mu(0) = 0$ .

Покажем, что  $\mu'_{\bar{y}_3}(0) \neq 0$ . Действительно, модуль  $\Phi_{12*}\mathcal{F}_1$  представим в виде

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_1 = \Phi_{12*}\mathcal{F}_0 + \text{span} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3}, \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right] \right\}.$$

Из равенств

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3}, \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right] = \mu'_{\bar{y}_3} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2}$$

и  $\dim \Phi_{12*}|_{x_0}\mathcal{F}_1(x_0) = 2$  вытекает, что  $\mu'_{\bar{y}_3}(0) \neq 0$ .

Рассмотрим диффеоморфизм  $\Phi_3$ , задаваемый равенствами

$$y_1 = \bar{y}_1, \quad y_2 = \bar{y}_2, \quad y_3 = \mu(\bar{y}).$$

Так как  $\mu(0) = 0$ , то  $\Phi_3(0) = 0$ . Найдём образы при отображении  $\Phi_{3*}$  векторных полей, порождающих модуль  $\Phi_{12*}\mathcal{F}_0$ . Пусть  $\Phi$  – композиция диффеоморфизмов  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_3$ , т.е.  $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_{12}$ . Матрица Якоби отображения  $\Phi_3$  имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \bar{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu'_{\bar{y}_1} & \mu'_{\bar{y}_2} & \mu'_{\bar{y}_3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{3*} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu'_{\bar{y}_i}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad i = 1, 2, \quad \Phi_{3*} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}_3} \right) = \mu'_{\bar{y}_3}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Поскольку

$$\Phi_{3*} \left( \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right) = y_2 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + \mu'_{\bar{y}_1}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3} \right) + \mu(\Phi_3^{-1}(y)) \left( \frac{\partial}{\partial y_2} + \mu'_{\bar{y}_2}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3} \right),$$

то в силу равенства  $\mu(\Phi_3^{-1}(y)) = y_3$  будем иметь

$$\Phi_{3*} \left( \bar{y}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right) = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \bmod \left\{ \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}.$$

В силу соотношения (20) и того, что  $\mu'_{\bar{y}_3}(0) \neq 0$ , получаем

$$\Phi_{3*}\mathcal{F}_0 = \text{span} \left\{ y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}.$$



Из равенства (19) вытекает, что

$$\Phi_* f = \varepsilon_{11} \frac{\partial}{\partial y_3},$$

а из сравнения (18) – равенство

$$\Phi_* f_0 = \varepsilon_{00} \left( y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \varepsilon_{01} \frac{\partial}{\partial y_3},$$

в котором  $\varepsilon_{00}$ ,  $\varepsilon_{01}$ ,  $\varepsilon_{11}$  – гладкие функции, удовлетворяющие условиям  $\varepsilon_{00}(0) \neq 0$ ,  $\varepsilon_{11}(0) \neq 0$ .

Таким образом, установлено, что

$$\begin{pmatrix} \Phi_* f_0 \\ \Phi_* f \end{pmatrix} = \varepsilon(y) \begin{pmatrix} y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon_{01} \\ 0 & \varepsilon_{11} \end{pmatrix}.$$

Так как  $\varepsilon_{00}(0) \neq 0$ ,  $\varepsilon_{11}(0) \neq 0$ , то  $\det \varepsilon(0) \neq 0$ . Используя формулу (7), окончательно приходим к представлению

$$\begin{pmatrix} \Phi_* f_0 \\ \Phi_* f_1 \end{pmatrix} = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(y)) \varepsilon(y) \begin{pmatrix} y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Введём в рассмотрение матрицу  $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j=0,1}$  по формуле  $\tilde{A}(y) = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(y)) \varepsilon(y)$ . Поскольку обе матрицы в правой части этого равенства невырождены в точке  $y = 0$ , то и матрица  $\tilde{A}(y)$  невырождена в точке  $y = 0$ . Из представления (21) вытекает, что диффеоморфизм  $\Phi$  преобразует в некоторой окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  систему (5) в систему

$$\dot{y}_1 = \tilde{\alpha}_{00}(y)y_2 + \tilde{\alpha}_{10}(y)y_2u, \quad \dot{y}_2 = \tilde{\alpha}_{00}(y)y_3 + \tilde{\alpha}_{10}(y)y_3u, \quad \dot{y}_3 = \tilde{\alpha}_{01}(y) + \tilde{\alpha}_{11}(y)u. \quad (22)$$

Несложно видеть, что замена независимой переменной

$$\dot{\tau} = \tilde{\alpha}_{00}(y) + \tilde{\alpha}_{10}(y)u$$

и замена управления

$$v = \frac{\tilde{\alpha}_{01}(y) + \tilde{\alpha}_{11}(y)u}{\tilde{\alpha}_{00}(y) + \tilde{\alpha}_{10}(y)u}$$

преобразуют систему (22) на множестве  $M_{yu} = \{(y, u) : y \in \Phi(U(x_0)), \tilde{\alpha}_{00}(y) + \tilde{\alpha}_{10}(y)u \neq 0\}$  в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество

$$M_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(U(x_0)), \tilde{\alpha}_{11}(y) - \tilde{\alpha}_{10}(y)v \neq 0\}.$$

Отметим, что матрица  $A$  из определения  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию связана с матрицей  $\tilde{A}$  соотношением  $A(x) = \tilde{A}^T(\Phi(x))$ .

**Необходимость.** Пусть системы (5) и (6)  $A$ -орбитально эквивалентны в паре точек  $(x_0, 0)$ . Системе (6) соответствуют векторные поля

$$h_0 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad h_1 = \frac{\partial}{\partial y_3},$$

порождающие модуль  $\mathcal{H} = \text{span}\{h_0, h_1\}$ .  $A$ -орбитальная эквивалентность систем (5) и (6) в паре точек  $(x_0, 0)$  означает, что существуют окрестности  $U(x_0)$  и  $V(0)$ , матрица  $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$ ,  $\alpha_{ij} \in C^\infty(U(x_0))$ ,  $i, j = 0, 1$ , невырожденная в  $U(x_0)$ , и диффеоморфизм  $\Phi: U(x_0) \rightarrow V(0)$ , удовлетворяющие условиям  $\Phi(x_0) = 0$  и

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \Phi_* \left( (A^{-1})^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right).$$

Из последнего равенства следует представление

$$\Phi_* \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = A^T(\Phi^{-1}(y)) \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix},$$

означающее, что заменой переменных  $y = \Phi(x)$  система (5) преобразуется в систему  $\dot{y} = g_0(y) + g_1(y)u$ , где

$$g_0 = \alpha_{00}(\Phi^{-1}(y))h_0 + \alpha_{10}(\Phi^{-1}(y))h_1, \quad g_1 = \alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))h_0 + \alpha_{11}(\Phi^{-1}(y))h_1.$$

Так как матрица  $A(x)$  невырождена при  $x \in U(x_0)$ , то матрица  $A^T(\Phi^{-1}(y))$  невырождена при  $y \in V(0)$ . Поэтому в окрестности точки  $y = 0$  модуль, порождённый векторными полями  $g_0$  и  $g_1$ , совпадает с модулем  $\mathcal{H}$ . Таким образом,  $\Phi_*\mathcal{F} = \mathcal{H}$ . Построение производного флага модуля  $\mathcal{H}$  даёт следующий результат:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_1 = \text{span} \left\{ y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}, \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что  $\dim \mathcal{H}_0(0) = 1$ ,  $\dim \mathcal{H}_1(0) = 2$ ,  $\dim \mathcal{H}_2(0) = 3$ . Отсюда вытекает, что имеют место равенства  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$ .

Множество  $S_y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{H}_1(y) < 3\}$ , очевидно, принимает вид  $S_y = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0\}$ . Поскольку  $h_1 y_2 = 0$ , то векторное поле  $h_1 \in \mathcal{H}$  является касательным к поверхности  $S_y$ . Из доказанного следует, что в качестве векторного поля  $f$  из условия теоремы может быть взято векторное поле  $\Phi_*^{-1}h_1$ .

**3. Алгоритм линеаризации.** Из доказательства достаточности теоремы вытекает следующий алгоритм преобразования системы (5) в систему (6).

Построим производный флаг модуля  $\mathcal{F} = \text{span}\{f_0, f_1\}$ , т.е. найдём модули  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ . Вычислим размерности  $d_k = \dim \mathcal{F}_k(x_0)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , и проверим выполнение равенств  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$ . Построим множество  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{F}_1(x) < 3\}$  и найдём векторное поле  $f \in \mathcal{F}$ , касательное к  $S$  и отличное от нуля в точке  $x_0$ .

Определим независимые первые интегралы  $z_1$  и  $z_2$  векторного поля  $f$  в окрестности точки  $x_0$ . Дополним  $z_1$  и  $z_2$  функцией  $z_3$  до системы функций, независимых в окрестности точки  $x_0$ . Выберем все функции  $z_i$  такими, чтобы выполнялись равенства  $z_i(x_0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Обозначим через  $\Phi_1$  диффеоморфизм, задаваемый системой функций

$$z_1 = z_1(x), \quad z_2 = z_2(x), \quad z_3 = z_3(x).$$

Из равенства  $d_0 = 1$  следует, что найдётся номер  $k \in \{0, 1\}$  такой, что  $f_k(x_0) \neq 0$ . Найдём образ векторного поля  $f_{1-k}$  при отображении  $\Phi_{1*}$ :

$$\Phi_{1*}f_{1-k} = \gamma_{01}\frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02}\frac{\partial}{\partial z_2} \mod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_3} \right\},$$

положим  $\gamma_{11} = (\gamma_{01})'_{z_3}$ ,  $\gamma_{12} = (\gamma_{02})'_{z_3}$  и обозначим  $\gamma = (\gamma_{ij})_{i=0,1;j=1,2}$ . Как показано в доказательстве теоремы, хотя бы для одного номера  $j \in \{1, 2\}$  выполнены соотношения  $\gamma_{1j}(0) \neq 0$ ,  $(\det \gamma)'_{z_j}(0) \neq 0$ . В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что  $j = 2$ . Тогда уравнение

$\det \gamma(z) = 0$  в окрестности точки  $z = 0$  разрешимо относительно  $z_2$ . Как показано в доказательстве теоремы, при этом получается соотношение вида  $z_2 = \psi(z_1)$ , где  $\psi$  – некоторая гладкая функция.

В доказательстве теоремы показано, что существуют гладкие функции  $D(z)$  и  $\varphi(z_1, z_2)$ , для которых имеет место равенство (14). Пусть  $\bar{z}_1 = \sigma(z_1, z_2)$ ,  $\bar{z}_2 = z_2$ ,  $\bar{z}_3 = z_3$  – диффеоморфизм, выпрямляющий векторное поле  $\partial/\partial z_2 + \varphi(z_1, z_2)\partial/\partial z_1$ . Положим

$$y_1 = \sigma(z_1(x), z_2(x)), \quad y_2 = z_2(x) - \psi(z_1(x)).$$

Вычислим производную  $\dot{y}_1$  функции  $y_1$  в силу системы (5) и разделим её на  $y_2$ . В результате получим соотношение вида

$$\frac{\dot{y}_1}{y_2} = \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u,$$

в котором  $\alpha_{00}$  и  $\alpha_{01}$  – некоторые функции, являющиеся, как показано в доказательстве теоремы, гладкими в окрестности точки  $x_0$ . Вычислим производную  $\dot{y}_2$  функции  $y_2$  в силу системы (5) и положим

$$y_3 = \frac{\dot{y}_2}{\alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u}.$$

Как показано в доказательстве теоремы, функция  $y_3$  зависит только от состояния  $x$  и является гладкой в окрестности точки  $x_0$ . Наконец, вычислим производную функции  $y_3$  в силу системы (5):

$$\dot{y}_3 = \alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u.$$

Функции  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  задают линеаризующий диффеоморфизм  $\Phi$  в пространстве состояний, а функции  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , – матрицу  $A$ , которая определяет линеаризующие замены управления и независимой переменной.

**4. Пример.** Покажем, что система

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}^2 = x_3 + x_1^3 + (2x_1 - x_2x_3 - x_1^3x_2)u, \quad \dot{x}_3 = x_1 - (x_1x_2 + 3x_1^2)u \quad (23)$$

А-орбитально эквивалентна системе (6) в паре точек  $(0, 0)$  и построим линеаризующие преобразования. Отметим, что точка  $x = 0$  является положением равновесия системы (23).

Системе (23) соответствуют векторные поля

$$f_0 = (x_3 + x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + (2x_1 - x_2x_3 - x_1^3x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} - (x_1x_2 + 3x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

и модуль  $\mathcal{F} = \text{span}\{f_0, f_1\}$ . Построим производный флаг модуля  $\mathcal{F}$ . По определению  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ . Очевидно, что  $\dim \mathcal{F}_0(0) = 1$ . Вычисления показывают, что векторное поле  $\text{ad}_{f_0}f_1$  имеет вид

$$\text{ad}_{f_0}f_1 = -(x_3 + x_1^3)^2\frac{\partial}{\partial x_2} - (1 + x_1x_3 + x_1^4)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Так как  $\text{ad}_{f_0}f_1 \notin \mathcal{F}_0$ , то  $\mathcal{F}_1 = \text{span}\{f_0, f_1, \text{ad}_{f_0}f_1\}$ . Нетрудно проверить, что  $\dim \mathcal{F}_1(0) = 2$ . Векторные поля  $\text{ad}_{f_0}^2f_1$  и  $[f_1, \text{ad}_{f_0}f_1]$  имеют вид

$$\text{ad}_{f_0}^2f_1 = (1 - x_1x_3 - x_1^4)\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1^2\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$[f_1, \text{ad}_{f_0}f_1] = (-x_2 + x_1x_2x_3 + x_1^4x_2 - (x_3 + x_1^3)^3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_3 - x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1(x_3 + x_1^3)^2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что  $\text{ad}_{f_0}^2f_1 \notin \mathcal{F}_1$  и

$$[f_1, \text{ad}_{f_0}f_1] = -x_2\text{ad}_{f_0}^2f_1 + (x_3 + x_1^3)\text{ad}_{f_0}f_1.$$

Следовательно,  $\mathcal{F}_2 = \text{span}\{f_0, f_1, \text{ad}_{f_0}f_1, \text{ad}_{f_0}^2f_1\}$ . Нетрудно убедиться, что  $\dim \mathcal{F}_2(0) = 3$ . Таким образом, условие 1) теоремы выполнено.

Построим множество  $S$ . Чтобы найти множество точек  $x$ , в которых  $\dim \mathcal{F}_1(x) < 3$ , приравняем к нулю определитель, столбцами которого являются столбцы координат векторных полей  $f_0, f_1, \text{ad}_{f_0}f_1$ . В результате получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_3 + x_1^3 & 2x_1 & 0 \\ x_1 & -3x_1^2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

или  $x_3 + x_1^3 = 0$ . Следовательно,  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 + x_1^3 = 0\}$ . Проверим, найдётся ли в модуле  $\mathcal{F}$  векторное поле  $f$ , отличное от нуля в точке  $x = 0$  и касательное к поверхности  $S$ . Будем искать поле  $f$  в виде  $f = \beta_0 f_0 + \beta_1 f_1$ , где функции  $\beta_0, \beta_1$  необходимо найти. В силу условия  $f(x_3 + x_1^3) = 0$ ,  $x \in S$ , получаем равенство  $\beta_0 f_0(x_3 + x_1^3) + \beta_1 f_1(x_3 + x_1^3) = 0$ ,  $x \in S$ , которое приводит к соотношению  $\beta_0 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 = 0$ ,  $x \in S$ . Найденное соотношение превращается в тождество (выполненное не только на поверхности  $S$ , но и всюду в  $\mathbb{R}^3$ ), если положить, например,  $\beta_0 = x_2$ ,  $\beta_1 = 1$ . Отсюда следует, что в качестве векторного поля  $f$  можно взять поле

$$f = x_2 f_0 + f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - 3x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Двумя независимыми первыми интегралами векторного поля  $f$  являются, например, функции  $z_1 = x_2 - x_1^2$  и  $z_2 = x_3 + x_1^3$ . Дополним  $z_1$  и  $z_2$  функцией  $z_3 = x_1$  до системы из трёх независимых функций и рассмотрим диффеоморфизм  $\Phi_1$ , задаваемый равенствами

$$z_1 = x_2 - x_1^2, \quad z_2 = x_3 + x_1^3, \quad z_3 = x_1.$$

Поскольку  $f_1(0) \neq 0$ , то необходимо найти образ векторного поля  $f_0$  при касательном отображении  $\Phi_{1*}$ . Так как матрица Якоби отображения  $\Phi_1$  имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\Phi_{1*}f_0 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Из полученного представления вытекает, что  $\gamma_{01} = z_2$ ,  $\gamma_{02} = z_3$ . Следовательно,  $\gamma_{11} = 0$ ,  $\gamma_{12} = 1$  и  $\det \gamma(z) = z_2$ . Равенство  $\det \gamma(z) = 0$  эквивалентно соотношению  $z_2 = 0$ . Следовательно,  $\psi(z_1) = 0$ . Представление (14) выполнено с  $D(z) = 0$ ,  $\varphi(z_1, z_2) = 0$ . Так как  $\varphi = 0$ , то диффеоморфизм, выпрямляющий векторное поле  $\partial/\partial z_2 + \varphi(z_1, z_2)\partial/\partial z_1$ , является тождественным отображением. Первые два соотношения, задающие линейризирующую замену состояния, имеют, таким образом, вид  $y_1 = z_1(x)$ ,  $y_2 = z_2(x)$  или, что то же самое,  $y_1 = x_2 - x_1^2$ ,  $y_2 = x_3 + x_1^3$ .

Чтобы завершить нахождение линейризирующих преобразований, осталось найти функцию  $y_3$  и матрицу  $A$ . Вычисления показывают, что производная функции  $y_1$  в силу системы (23) имеет вид  $\dot{y}_1 = x_3 + x_1^3 - x_2(x_3 + x_1^3)u$ . Следовательно,  $\dot{y}_1/y_2 = 1 - x_2u$ . Отсюда вытекает, что  $\alpha_{00} = 1$ ,  $\alpha_{01} = -x_2$  и

$$y_3 = \frac{\dot{y}_2}{1 - x_2u} = \frac{x_1 - x_1 x_2 u}{1 - x_2u} = x_1.$$

Так как производной функции  $y_3$  в силу системы (23) будет  $\dot{y}_3 = u$ , то  $\alpha_{10} = 0$ ,  $\alpha_{11} = 1$ .

Таким образом, линейризирующая замена состояния в системе (23) задаётся равенствами

$$y_1 = x_2 - x_1^2, \quad y_2 = x_3 + x_1^3, \quad y_3 = x_1, \quad (24)$$

а матрица  $A$ , определяющая линеаризующие замены управления и независимой переменной, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что заменой состояния (24), заменой управления  $v = u/(1 - x_2u)$  и заменой независимой переменной  $\dot{t} = 1 - x_2u$  система (23) преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \{(x, u) : x \in \mathbb{R}^3, 1 - x_2u \neq 0\}$$

в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество

$$M_{yv} = \{(y, v) : y \in \mathbb{R}^3, 1 + (y_1 + y_3^2)v \neq 0\}.$$

В заключение отметим, что поскольку  $f_1(x_3 + x_1^3) = -x_1x_2$ , то векторное поле  $f_1$  не является касательным к поверхности  $S$ . Следовательно [6], системы (23) и (6) не являются орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию в паре точек  $(0, 0)$ . Таким образом, применение замен независимой переменной, зависящих от управления, позволило линеаризовать систему, не линеаризуемую орбитально.

**Заключение.** Для трёхмерных аффинных систем в работе получено необходимое и достаточное локальное условие  $A$ -орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности положения равновесия. Найденное условие позволяет распространить результаты в области  $A$ -орбитальной линеаризации на случай, когда векторные поля, соответствующие системе, порождают  $C^\infty$ -модуль переменного ранга. Предложен алгоритм  $A$ -орбитальной линеаризации, с помощью которого трёхмерная аффинная система может быть преобразована в линейную управляемую систему, рассматриваемую в окрестности положения равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00279).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brockett R.W.* Feedback invariants for nonlinear systems // Proc. of IFAC Congress. Helsinki, 1978. P. 1115–1120.
2. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
3. *Hunt L.R., Su R.* Linear equivalents of nonlinear time-varying systems // Proc. of the MTNS. 1981. P. 119–123.
4. *Krener A.* Approximate linearization by state feedback and coordinate change // Systems and Contr. Lett. 1984. № 5. P. 181–185.
5. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
6. *Respondek W.* Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // Proc. of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Enschede, 1998. P. 499–504.
7. *Guay M.* An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Contr. Lett. 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.
8. *Li S.-J., Respondek W.* Orbital feedback linearization for multi-input control systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Contr. 2015. V. 25. P. 1352–1378.
9. *Фетисов Д.А.* Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1514–1525.
10. *Fetisov D.A.* A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Contr. 2020. V. 30. № 14. P. 5602–5627.
11. *Фетисов Д.А.* А-орбитальная линеаризация аффинных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1518–1532.
12. *Fetisov D.A.* On some approaches to linearization of affine systems // IFAC-PapersOnline. 2019. V. 52. № 16. P. 700–705.

Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 30.01.2022 г.  
После доработки 30.01.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УДК 517.977.1

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ  
ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Для переключаемых интервальных линейных систем установлены достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов. В частности, для переключаемой интервальной системы с режимами различных порядков условие существования стабилизатора в форме статической обратной связи по состоянию сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств, а для переключаемой интервальной системы с медленными переключениями условие существования цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу сформулировано в терминах разрешимости системы нелинейных матричных неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064122040094, EDN: CAGTXK

**1. Достаточное условие существования статического регулятора.** В работе [1] рассматривалась задача стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами различных динамических порядков

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i, j) \in \Omega\}, \quad (1)$$

где  $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке,  $I$  – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1);  $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$  – композиция отображения  $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$  ( $[A_i] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ) и переключающего сигнала  $\sigma$ ,  $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$  – аналогичная композиция для отображения  $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$  ( $[b_i] \in \mathbb{R}^{n_i}$ ); пары интервальных матриц  $([A_i], [b_i])$ ,  $i = \overline{1, m}$ , определяют режимы функционирования системы (1);  $u \in \mathbb{R}^1$  – управляющий скалярный вход;  $\Omega \subseteq I \times I$  – множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. пара индексов  $(i, j)$  принадлежит множеству  $\Omega$ , если и только если возможно переключение с  $j$ -го на  $i$ -й режим функционирования;  $S(\Omega)$  – множество допустимых переключающих сигналов  $\sigma$ , т.е. если  $\sigma \in S(\Omega)$ , то для любой его точки разрыва  $\tilde{t}$  такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}-0} \sigma(t) = j, \quad \lim_{t \rightarrow \tilde{t}+0} \sigma(t) = i,$$

выполняется условие  $(i, j) \in \Omega$ .

Под  $i$ -м режимом функционирования системы (1) понимается динамическая система

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u.$$

При этом предполагается, что, в общем случае, режимы имеют различные динамические порядки, определяемые векторами состояния

$$x^{(i)} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_i}}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad j_1 < \dots < j_{n_i}, \quad \{j_1, \dots, j_{n_i}\} \subseteq \{1, \dots, n\},$$

где  $n = \max\{j_{n_1}, \dots, j_{n_m}\}$ . Таким образом,  $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$  для каждого  $i = \overline{1, m}$ . Обозначим упорядоченный набор индексов  $\{j_1, \dots, j_{n_i}\}$  через  $\Gamma_i$ , а множество  $\{1, \dots, n\}$  через  $\Gamma$ . Далее будем обозначать через  $\tilde{x}^{(i)}$  вектор из  $\mathbb{R}^n$ , все компоненты которого с индексами из множества

$\Gamma \setminus \Gamma_i$  равны нулю. Заметим, что если для различных режимов ( $i$ -го и  $j$ -го) совпадают наборы переменных состояния, то в этом случае  $\Gamma_i = \Gamma_j$ .

В силу кусочной непрерывности функции  $\sigma(t)$  переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Для согласования перехода между различными режимами задаётся множество  $Z(\Omega)$ , состоящее из матриц преемственности  $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $(i, j) \in \Omega$  [1]. Каждая такая матрица  $Z_{ij}$  определяет линейное преобразование конечного состояния предыдущего  $j$ -го режима  $x^{(j)}(t_{ij})$  в начальное состояние текущего  $i$ -го режима  $x^{(i)}(t_{ij})$  ( $t_{ij}$  – момент переключения между  $j$ -м и  $i$ -м режимами), т.е.

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij}x^{(j)}(t_{ij}).$$

Более точно,

$$x^{(j)}(t_{ij}) = \lim_{t \rightarrow t_{ij}-0} x^{(j)}(t), \quad x^{(i)}(t_{ij}) = \lim_{t \rightarrow t_{ij}+0} x^{(i)}(t).$$

В работе [1] введено понятие  $S(\Omega)$ -устойчивости для системы (1) и исследована задача поиска  $S(\Omega)$ -стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию  $u = -k^T x$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

В результате в [1] показано, что данная задача стабилизации в соответствии с методом динамического расширения может быть сведена к задаче стабилизации интервальной системы с режимами одинаковых порядков

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma]x + [\tilde{b}_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (i, j) \in \Omega\}. \quad (2)$$

Замыкая систему (2) обратной связью  $u = -k^T x$ , приходим к задаче поиска такого вектора  $k = (k_1, \dots, k_n)^T$ , который обеспечивает  $S(\Omega)$ -устойчивость системы

$$\dot{x} = ([\tilde{A}_\sigma] - [\tilde{b}_\sigma]k^T)x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (i, j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

или, что то же самое, семейства переключаемых систем вида

$$\dot{x} = (\tilde{A}_\sigma - \tilde{b}_\sigma k^T)x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (i, j) \in \Omega\},$$

где  $\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i]$ ,  $\tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]$ .

В [1] сформулировано также достаточное условие устойчивости системы (3) при заданном векторе  $k$  (теорема 1), которое предполагает переход от системы (3) к её интервальному расширению

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma(k)]x \quad (4)$$

и проверке существования единой функции Ляпунова для семейства линейных стационарных систем, матрицы которых образуют множество вершинных матриц для всех режимов системы (4).

Заметим, что это условие позволяет сформулировать конструктивное достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи  $u = -k^T x$  для системы (2) в случае, когда  $[b_i] = \overline{b_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Однако оно не позволяет сформулировать эффективный алгоритм нахождения вектора  $k$  стабилизирующей обратной связи в случае интервальных векторов  $[b_i]$ .

В настоящей работе предлагается конструктивный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора вида  $u = -k^T x$  для переключаемой интервальной системы (2) с режимами одинаковых порядков  $n$  и импульсными эффектами (скачкообразное изменение текущего состояния системы при переключениях). Этот алгоритм основан на некотором достаточном условии существования стабилизирующей обратной связи по состоянию  $u = -k^T x$  для системы (2).

Рассмотрим вначале задачу стабилизации интервальной системы

$$\dot{x} = [A]x + [b]u \quad (5)$$

с помощью обратной связи  $u = -k^T x$ . Здесь  $[A] = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{i,j=1}^n$ ,  $[b] = ([\underline{b}^i, \overline{b}^i])_{i=1}^n$ .

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти вектор

$$k = (k_1, \dots, k_n)^T$$

такой, что для любого вектора параметров

$$w = (g, s)^T,$$

где  $g = (g_1, \dots, g_{2n})$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{11}]$ ,  $\dots$ ,  $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n}]$ ,  $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \bar{a}_{21}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \bar{a}_{n1}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$ ,  $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$ ,  $s_1 \in [\underline{b}^1, \bar{b}^1]$ ,  $\dots$ ,  $s_n \in [\underline{b}^n, \bar{b}^n]$ , система

$$\dot{x} = \Psi(w, k)x \quad (6)$$

с матрицей

$$\Psi(w, k) = \begin{pmatrix} g_1 - s_1 k_1 & \dots & g_n - s_1 k_n \\ g_{n+1} - s_2 k_1 & \dots & g_{2n} - s_2 k_n \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n^2-n+1} - s_n k_1 & \dots & g_{n^2} - s_n k_n \end{pmatrix}$$

является асимптотически устойчивой.

Заметим, что множество матриц  $\Psi(w, k)$  при каждом фиксированном  $k \in \mathbb{R}^n$  и при всех возможных значениях вектора  $w$  образует выпуклое множество в пространстве  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Действительно, поставим в соответствие матрице

$$\Psi(w, k) = (\psi_{ij}(w, k))_{i,j=1}^n$$

вектор

$$\psi(w, k) = (\psi_{11}(w, k), \dots, \psi_{1n}(w, k), \psi_{21}(w, k), \dots, \psi_{2n}(w, k), \dots, \psi_{n1}(w, k), \dots, \psi_{nn}(w, k))^T.$$

Другими словами, вектор  $\psi(w, k)$  фактически является “развёрткой” матрицы  $\Psi(w, k)$  по строкам. Несложно заметить, что векторы  $\psi(w, k)$  и  $w$  связаны линейным соотношением

$$\psi(w, k) = \Theta(k)w, \quad (7)$$

в котором матрица  $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{(n^2+n) \times (n^2+n)}$  имеет вид

$$\Theta(k) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \dots & O_n & -k & \bar{o}_n & \dots & \dots & \bar{o}_n \\ O_n & I_n & \dots & \dots & \bar{o}_n & -k & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_n & \dots & O_n & I_n & \bar{o}_n & \dots & \dots & \bar{o}_n & -k \end{pmatrix}.$$

Здесь  $I_n$  – единичная матрица порядка  $n$ ,  $O_n$  – нулевая матрица порядка  $n$ , а  $\bar{o}_n$  – нулевой вектор-столбец размерности  $n$ .

Введём следующие обозначения:  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  – единичный вектор размерности  $n$ ,  $i$ -я компонента которого равна 1, а  $E_i = (O_n \dots O_n \ I_n \ O_n \dots O_n)^T \in \mathbb{R}^{n^2+n}$  – единичный блочный вектор-столбец,  $i$ -й блок которого – единичная матрица порядка  $n$ .

Используя соотношение (7) и введённые обозначения, представим матрицу  $\Psi(w, k)$  следующим образом:

$$\Psi(w, k) = \sum_{j=1}^n e_j \psi^T(w, k) E_j = \sum_{j=1}^n e_j w^T \Theta^T(k) E_j. \quad (8)$$

Теперь заметим, что множество  $D$  допустимых параметров  $w$  образует параллелотоп в пространстве  $\mathbb{R}^{n^2+n}$ , являющийся выпуклой оболочкой конечного набора его вершин  $p_i$ , т.е.

$$D = \text{Conv} \{p_i : i = 1, \overline{2^{n^2+n}}\}.$$



При этом вершины  $p_i$  представляются векторами, содержащими в качестве изменяющихся компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих промежутков  $[a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$  и  $[\underline{b}^i, \bar{b}^i]$ . Тогда любой вектор  $w \in D$  записывается в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1. \quad (9)$$

Вследствие представлений (8) и (9) получаем

$$\begin{aligned} \Psi(w, k) &= \sum_{j=1}^n e_j \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i \right)^T \Theta^T(k) E_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_i e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right). \end{aligned}$$

Обозначим  $\Psi_i(k) = \sum_{j=1}^n e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j$ . Таким образом, получаем, что при любом  $w \in D$  справедливо включение

$$\Psi(w, k) \in \text{Conv} \{ \Psi_i(k) : i = \overline{1, 2^{n^2+n}} \}. \quad (10)$$

Заметим, что каждую матрицу  $\Psi_i(k)$  можно представить в виде  $\Psi_i(k) = F_i - g_i k$ , где  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g_i \in \mathbb{R}^n$ .

Сформулируем достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи для системы (5).

**Теорема 1.** Пусть система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} PF_i^T + F_i P + z g_i^T + g_i z^T < 0, \\ P > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \quad (11)$$

имеет решение  $(z_0, P_0)$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_0^T = P_0$ . Тогда обратная связь  $u = -k^T x$ , где  $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$ , стабилизирует систему (5).

**Доказательство.** Действительно, пусть система линейных матричных неравенств (11) имеет решение  $(z_0, P_0)$  и пусть  $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$ . Тогда

$$P_0 F_i^T + F_i P_0 + z_0 g_i^T + g_i z_0^T < 0. \quad (12)$$

Умножим неравенство (12) с двух сторон на положительно определённую матрицу  $P_0^{-1}$ . В результате получим

$$F_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i + P_0^{-1} z_0 g_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} g_i z_0^T P_0^{-1} < 0,$$

откуда следует, что

$$F_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i - k g_i^T P_0^{-1} - P_0^{-1} g_i k^T < 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$(F_i - g_i k^T)^T P_0^{-1} + P_0^{-1} (F_i - g_i k^T) < 0, \quad (13)$$

которое означает, что системы

$$\dot{x} = (F_i - g_i k^T)x, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}},$$

асимптотически устойчивы.

Рассмотрим теперь для произвольного  $w \in D$  матрицу  $\Psi(w, k)$ . В силу включения (10) имеем

$$\Psi(w, k) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi^T(w, k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi(w, k) &= \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k) \right)^T P_0^{-1} + P_0^{-1} \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i (\Psi_i^T(k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi_i(k)). \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неотрицательность  $\lambda_i$  и неравенство (13), получаем, что

$$\Psi^T(w, k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi(w, k) < 0$$

для положительно определённой матрицы  $P_0^{-1}$ . Это неравенство означает, что система (6) асимптотически устойчива. Таким образом, обратная связь  $u = -k^T x$  стабилизирует систему (5). Теорема доказана.

Вернёмся теперь к задаче  $S(\Omega)$ -стабилизации системы (2).

Основываясь на результатах работы [1] и на рассуждениях, использованных при приведённом выше доказательстве теоремы 1, можем сформулировать достаточное условие  $S(\Omega)$ -устойчивости системы (3), которое содержит

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1) при некотором  $k \in \mathbb{R}^n$  существует единая функция Ляпунова  $V(x) = x^T H x$  ( $H > 0$ ) для семейства систем

$$\dot{x} = \Psi_l^{(i)}(k)x, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}},$$

где  $\Psi_l^{(i)}(k) = \sum_{j=1}^n e_j (p_l^{(i)})^T \Theta^T(k) E_j$ ,  $\text{Conv} \{p_l^{(i)} : l = \overline{1, 2^{n^2+n}}\} = D_i$  — множество допустимых векторов параметров  $w$  для  $i$ -го режима системы (2);

2) для матриц преемственности из множества  $\tilde{Z}(\Omega)$  системы (2) выполнены условия

$$\begin{pmatrix} H^{-1} & \tilde{Z}_{ij} H^{-1} \\ \tilde{Z}_{ij}^T H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

при всех  $(i, j) \in \Omega$ . Тогда система (3) является  $S(\Omega)$ -устойчивой.

Из теорем 1 и 2, а также из результатов работы [1] вытекает следующее достаточное условие существования  $S(\Omega)$ -стабилизирующей обратной связи для системы (2).

**Теорема 3.** Пусть для системы (2) разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P(F_l^{(i)})^T + F_l^{(i)}P + z(g_l^{(i)})^T + g_l^{(i)}z^T < 0, & i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \\ P > 0, \\ \begin{pmatrix} P & \tilde{Z}_{ij}P \\ P\tilde{Z}_{ij}^T & P \end{pmatrix} \geq 0, & (i, j) \in \Omega, \end{cases} \quad (14)$$

где матрицы  $F_l^{(i)}$  и вектор-столбцы  $g_l^{(i)}$  таковы, что  $\Psi_l^{(i)}(k) = F_l^{(i)} - g_l^{(i)}k^T$ .

Тогда если пара  $(z_0, P_0)$  — решение системы (14), то обратная связь  $u = -k^T x$ , где  $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$ , является  $S(\Omega)$ -стабилизирующей для системы (2).

**2. Достаточное условие существования динамического регулятора.** В работе [2] рассматривалась задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in S_\tau, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке;  $S_T$  – множество переключающих сигналов  $\sigma$ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше  $\tau$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $y \in \mathbb{R}$  – измеряемый скалярный выход,  $u \in \mathbb{R}$  – управляющий вход;  $[A_\sigma] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ ;  $[b_\sigma] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ ,  $[c_\sigma] : I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$ . Здесь  $[A_i]$ ,  $[b_i]$ ,  $[c_i]$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – интервальные матрицы соответствующих размеров.

При этом поиск цифрового стабилизатора осуществлялся в классе дискретных динамических обратных связей вида

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \quad (16)$$

где  $T$  – заданный период квантования по времени. При этом предполагалось, что переключающие сигналы  $\sigma$  системы (15) принадлежат множеству  $S_T$  (переключения сигнала  $\sigma$  могут происходить только в моменты времени  $lT$ ,  $l = 0, 1, \dots$ ).

В работе [2] предложен алгоритм сведения указанной задачи стабилизации системы (15) к задаче стабилизации специальным образом построенной дискретной переключаемой интервальной системы (точной дискретизации системы (15))

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}, \end{cases} \quad (17)$$

дискретным регулятором (16).

В частности, одним из основных результатов работы [2] является конструктивное достаточное условие  $[S]_{T,T}$ -устойчивости системы (17), замкнутой регулятором (16), т.е. системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] + [\mu_\sigma^*]h[c_\sigma])x[lT] + [\mu_\sigma^*]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = g[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}. \end{cases} \quad (18)$$

При этом в [2] остался открытым вопрос об условиях существования стабилизирующего регулятора вида (16), обеспечивающего  $[S]_{T,T}$ -устойчивость системы (18).

В настоящей работе на основании изложенного выше подхода и результатов работы [2] сформулировано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора для системы (17) (а следовательно, и для системы (15)) в случае, когда вектор  $c_\sigma$  “точечный”, т.е.  $[c_i] = c_i$  для всех  $i = \overline{1, m}$ . Данное условие, как и приведённая выше теорема 3, сформулировано на языке матричных неравенств.

Рассмотрим сначала задачу стабилизации по выходу дискретной интервальной системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [A]x[lT] + [b]u[lT], \\ y[lT] = cx[lT], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (19)$$

с помощью динамического регулятора

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \quad (20)$$

т.е. задачу поиска матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} Q & q \\ H & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1) \times (r+1)}, \quad (21)$$

обеспечивающей устойчивость параметрически неопределённой системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([A] + [b]hc)x[lT] + [b]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = qc x[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \quad (22)$$

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти матрицу  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^r$ , векторы  $q = (q_1, \dots, q_r)^T$ ,  $H = (h_1, \dots, h_r)^T$  и константу  $h$  такие, что для любого вектора параметров  $w = (g, s)^T$ , где  $g = (g_1, \dots, g_{n^2})$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{11}]$ ,  $\dots$ ,  $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n}]$ ,  $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \bar{a}_{21}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \bar{a}_{n1}]$ ,  $\dots$ ,  $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$ ,  $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$ ,  $s_1 \in [\underline{b}^1, \bar{b}^1]$ ,  $\dots$ ,  $s_n \in [\underline{b}^n, \bar{b}^n]$ , матрица

$$\Psi(w, \Theta) = \begin{pmatrix} g_1 + s_1 h c_1 & \dots & g_n + s_1 h c_n & s_1 h_1 & \dots & s_1 h_r \\ g_{n+1} + s_2 h c_1 & \dots & g_{2n} + s_2 h c_n & s_2 h_1 & \dots & s_2 h_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n^2-n} + s_n h c_1 & \dots & g_{n^2} + s_n h c_n & s_n h_1 & \dots & s_n h_r \\ q_1 c_1 & \dots & q_1 c_n & q_{11} & \dots & q_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_r c_1 & \dots & q_r c_n & q_{r1} & \dots & q_{rr} \end{pmatrix}$$

является шуровской матрицей, или, что то же самое, дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Заметим, что множество матриц  $\Psi(w, \Theta)$  при каждой фиксированной матрице (21) образует выпуклое множество в пространстве матриц  $\mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ .

Действительно, как и выше (в п. 1), поставим в соответствие матрице

$$\Psi(w, \Theta) = (\psi_{ij}(w, \Theta))_{i,j=1}^{n+r}$$

вектор

$$\psi(w, \Theta) = (\psi_{11}(w, \Theta), \dots, \psi_{1,n+r}(w, \Theta), \psi_{21}(w, \Theta), \dots, \psi_{2,n+r}(w, \Theta), \dots, \psi_{n+r,1}(w, \Theta), \dots, \psi_{n+r,n+r}(w, \Theta))^T,$$

который является “развёрткой” матрицы  $\Psi(w, \Theta)$  по строкам. Далее заметим, что вектор  $\psi(w, \Theta)$  можно представить следующим образом:

$$\psi(w, \Theta) = \Gamma(\Theta)w^*, \quad (23)$$

где

$$w^* = (g_1, \dots, g_{n^2}, s_1, \dots, s_n, \overbrace{1, \dots, 1}^{rn}, \overbrace{1, \dots, 1}^{r^2})^T,$$

т.е.  $w^*$  – это вектор параметров  $w$ , дополненный  $rn + r^2$  единицами, а матрица  $\Gamma(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (n^2+n+nr+r^2)}$  имеет следующий вид:

$$\Gamma(\Theta) = (\Delta_1(\Theta) \Delta_2(\Theta)),$$

где

$$\Delta_1(\Theta) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \dots & O_n & hc & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & H & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ O_n & I_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & hc & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & H & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_n & O_n & \dots & I_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & hc \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & H \\ O_n & O_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_n & O_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ q_1 c_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q_1 c_n & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_1 r & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & q_r c_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & q_r c_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & q_{r1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_{rr} \end{pmatrix},$$

здесь  $O_{r \times n}$  – нулевая  $r \times n$ -матрица; очевидно, что

$$\Delta_1(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (n^2+n)}, \quad \Delta_2(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (nr+r^2)}.$$

Введём следующие обозначения:  $l_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  – единичный вектор размерности  $n+r$ ,  $i$ -я компонента которого равна 1, а

$$L_i^* = (O_{n+r} \quad \dots \quad O_{n+r} \quad I_{n+r} \quad O_{n+r} \quad \dots \quad O_{n+r})^T$$

– единичный блочный вектор-столбец,  $i$ -й блок которого – единичная матрица порядка  $n+r$ .

Используя представление (23) и введённые обозначения, запишем матрицу  $\Psi(w, \Theta)$  следующим образом:

$$\Psi(w, \Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* (w^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^*. \quad (24)$$

Заметим, что множество  $D^*$  допустимых наборов параметров  $w^*$  образует вырожденный параллелотоп размерности  $n^2+n$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n^2+n+nr+r^2}$ . При этом

$$D^* = \text{Conv} \{p_i^* : i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\},$$

где вершины  $p_i^*$  представляются векторами, содержащими в качестве изменяющихся компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих промежутков  $[a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$  и  $[b^i, \bar{b}^i]$ . Тогда любой вектор  $w^* \in D^*$  записывается в виде линейной комбинации

$$w^* = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i^*, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1. \quad (25)$$

Из представлений (24) и (25) следует, что

$$\Psi(w, \Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i^* \right)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* = \sum_{j=1}^{n+r} \left( \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i l_j^* (p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \left( \sum_{j=1}^{n+r} \lambda_i l_j^* (p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \left( \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* (p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right).$$

Обозначим

$$\Psi_i(\Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* (p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^*.$$

Таким образом, получаем, что для любого  $w^* \in D^*$  имеет место равенство

$$\Psi(w, \Theta) = \text{Conv} \{ \Psi_i(\Theta) : i = \overline{1, 2^{n^2+n}} \}. \quad (26)$$

Заметим, что каждую матрицу  $\Psi_i(\Theta)$  можно представить [3] в виде

$$\Psi_i(\Theta) = A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0,$$

где

$$A_0^{(i)} = \begin{pmatrix} A^{(i)} & O_{n \times r} \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad B_0^{(i)} = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & b^{(i)} \\ I_{r \times r} & \bar{o}_r \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} O_{r \times n} & I_{r \times r} \\ c^T & (\bar{o}_r)^T \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матриц  $A^{(i)}$  и векторов  $b^{(i)}$  зависят от компонент соответствующих вершин  $p_i^*$ .

Сформулируем достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (20) для системы (19).

**Теорема 4.** Пусть система матричных неравенств

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G^{-1} & A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0 \\ (A_0^{(i)})^m + (C_0)^m (\Theta)^m (B_0^{(i)})^m & G \end{pmatrix} > 0, \\ G > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \quad (27)$$

имеет решение  $(G_0, \Theta_0)$ . Тогда регулятор

$$\begin{cases} z[(l+1)T] = Q_0 z[lT] + q_0 y[lT], \\ u[lT] = H_0 z[lT] + h_0 y[lT], \end{cases} \quad (28)$$

где  $\begin{pmatrix} Q_0 & q_0 \\ H_0 & h_0 \end{pmatrix} = \Theta_0$ , стабилизирует систему (19).

**Доказательство.** Действительно, пусть система (27) имеет решение  $(G_0, \Theta_0)$ . Тогда в силу леммы Шура [3, с. 19], выполняется неравенство

$$G_0 - \Psi_i^T(\Theta_0) G_0 \Psi_i(\Theta_0) > 0,$$

из которого следует, что матрица  $\Psi_i(\Theta_0)$  является шуровской. Отсюда вытекает, что дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi_i(\Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим теперь для произвольного  $w^* \in D^*$  матрицу  $\Psi(w, \Theta_0)$ . В силу (26) имеем

$$\Psi_i(w, \Theta_0) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(\Theta_0), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Но тогда, используя результаты работы [2], получаем неравенство

$$G_0 - \Psi^T(w, \Theta_0)G_0\Psi(w, \Theta_0) > 0,$$

и, следовательно, система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Рассмотрим переключаемую интервальную систему (15) с “точечным” вектором  $c_\sigma$ , т.е. систему

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = c_\sigma x, \quad \sigma \in S_{T,T}. \end{cases} \quad (29)$$

Пусть переключаемая интервальная система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}, \end{cases} \quad (30)$$

является точной дискретизацией [2] системы (29) и пусть

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_i]x[lT] + [\mu_i]u[lT], \\ y[lT] = c_i x[lT], \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (31)$$

– различные режимы системы (30).

Замкнув  $i$ -й режим (31) ( $i = \overline{1, 2^{n^2+n}}$ ) регулятором (16), получаем

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_i] + [\mu_i]h c_i)x[lT] + [\mu_i]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = g c_i x[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \quad (32)$$

По аналогии с системой (22) построим для каждой  $i$ -й системы (32) матрицу  $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$ , где  $\Theta$  – матрица параметров регулятора (16), а  $w^{(i)}$  – вектор параметров, определяемый интервальными коэффициентами матрицы  $[\Lambda_i]$  и вектора  $[\mu_i]$ . Далее, используя приведённые выше рассуждения, построим для каждого  $i = \overline{1, m}$  множество матриц  $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$  ( $l = \overline{1, n^2+n}$ ), выпуклая оболочка которых содержит матрицы  $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$  для любого допустимого набора параметров  $w^{(i)}$ . Теперь заметим, что матрицы  $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$  могут быть представлены в виде

$$\Psi_l^{(i)}(\Theta) = A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)}\Theta C_{0,i},$$

где

$$A_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} A_i^{(l)} & O_{n \times r} \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad B_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & b_i^{(l)} \\ I_{r \times r} & \bar{\sigma}_r \end{pmatrix}, \quad C_{0,i} = \begin{pmatrix} O_{r \times n} & I_{r \times r} \\ c_i^T & (\bar{\sigma}_r)^T \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 4 и результатов работы [2] вытекает, что для переключаемой интервальной системы (29) имеет место следующее достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (16).

**Теорема 5.** Пусть для системы (30) система матричных неравенств

$$\begin{cases} \left( \begin{pmatrix} G^{-1} & A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)}\Theta C_{0,i} \\ (A_{0,i}^{(l)})^m + C_{0,i}^m(\Theta)^m(B_{0,i}^{(l)})^m & G \end{pmatrix} \right) > 0, \\ G > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \quad (33)$$

имеет решение  $(G_0, \Theta_0)$ . Тогда регулятор (28) стабилизирует систему (29).

В заключение отметим, что решение системы нелинейных матричных неравенств (33) является значительно более сложной задачей, чем решение системы (14). В качестве возможного подхода к численному решению системы (33) можно использовать методику, приведённую в работе [3, с. 230].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1555–1563.
2. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М.* Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова,  
Институт проблем передачи информации  
им. А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.  
После доработки 02.03.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.



УДК 519.642.7

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В РАЗНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. Г. А. Расолько, В. М. Волков

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение с логарифмической особенностью, используемое в математической модели рассеяния Е-поляризованных электромагнитных волн. Для численного анализа его решений из разных функциональных классов Мухелишвили построены четыре вычислительные схемы, основанные на представлении части искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышёва и спектральных соотношениях, что позволяет получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышёва вычисляются как решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближённого решения не превышает вычислительной погрешности.

DOI: 10.31857/S0374064122040100, EDN: CAKLSU

**Введение.** Аппарат интегральных уравнений широко используется при решении прикладных задач аэродинамики, дифракции и многих других областей естествознания. Точность приближённого численного решения интегральных уравнений в существенном определяется способом их дискретизации, т.е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, с помощью которых исходная задача сводится при численном интегрировании к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. Для сингулярных интегральных уравнений, вследствие наличия особенностей в подынтегральных функциях, требуется максимально учитывать специфику задачи.

Данная работа является продолжением исследований [1–5], посвящённых разработке вычислительных схем приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с использованием ортогональных многочленов Чебышёва.

**1. Постановка задачи.** Математическое описание рассеяния Е-поляризованных электромагнитных волн криволинейным экраном сводится к решению сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью вида (см. [6, с. 85])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln |t - x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь  $K(x, t)$  – известная функция из класса Гёльдера  $H_\mu$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , по обоим аргументам,  $f(x) \in H_\mu$ ,  $\varphi(x)$  – неизвестная функция.

Обзор результатов исследований по вопросам разрешимости уравнений вида (1) в различных функциональных классах приведён в [6]. В частности, если  $f(x)$  – непрерывная функция с ограниченной производной, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое принадлежит функциональному классу  $h(0)$  Мухелишвили и представляется в виде  $\varphi(x) = v(x)/\sqrt{1-x^2}$ , где  $v(x) \in H_\mu$ . Там же [6, с. 85, 58] рассматривается квадратурный метод приближённого решения уравнения (1) в классе  $h(0)$ , который использует известные спектральные соотношения для слабо сингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln |t - x| dt = \alpha_k T_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2)$$

где  $\alpha_0 = -\ln 2$ ,  $\alpha_k = -1/k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , а  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$  – многочлены Чебышёва первого рода,  $x \in [-1, 1]$ .

В данной работе предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) в разных функциональных классах Мухелишвили методом ортогональных многочленов. Этот метод основан на использовании для входящих в уравнение интегралов спектральных (квазиспектральных) соотношений, позволяющих получить аналитические выражения для сингулярных интегралов, не прибегая к квадратурным формулам.

**2. Предварительные сведения.** В монографии [7, с. 31] определены классы функций  $h(-1)$ ,  $h(0)$ ,  $h(1)$  и  $h(-1, 1)$ . Согласно [7] функция принадлежит классу  $h(-1)$ , если она определена на полуинтервале  $[-1, 1)$ , на каждом отрезке  $[-1, 1 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$  – любое достаточно малое число, удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точки  $x = 1$  имеет интегрируемую особенность. Функция  $\psi(x)$  принадлежит классу  $h(1)$ , если функция  $\psi(-x)$  принадлежит классу  $h(-1)$ . Функция принадлежит классу  $h(0)$ , если она определена на интервале  $(-1, 1)$ , на каждом отрезке  $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$  – любое достаточно малое число, удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точек  $x = \pm 1$  имеет интегрируемую особенность. Класс  $h(-1, 1)$  состоит из функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на любом отрезке интервала  $(-1, 1)$  и ограниченных в окрестности точек  $\pm 1$ .

Для произвольной непрерывной функции  $f(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ , используем приближённое представление в виде интерполяционного многочлена по узлам Чебышёва первого рода [8, с. 104]

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n F_j^n T_j(x), \quad (3)$$

где

$$F_0^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k), \quad F_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

Для разложения функции  $f(x)$  по многочленам Чебышёва второго рода  $U_k(x)$  воспользуемся в представлении (3) известными тождествами [7, с. 23]:

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2.$$

В результате будем иметь

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n U_j(x), \quad (4)$$

здесь

$$f_j^n = G_j^n - G_{j+2}^n, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^n = G_{n-1}^n, \quad f_n^n = G_n^n,$$

$$G_j^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Используя разложения (3) и (4), несложно построить следующие интерполяционные многочлены  $K_{n,n}(x, t)$  функции двух переменных  $K(x, t)$ :

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{m,j}^*, \quad (5)$$

где

$$k_{m,j}^* = \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) T_j(x_r), \quad \delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n};$$

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t), \quad (6)$$

где

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

**3. Приближённое решение уравнения (1) в классе  $h(0)$ .** Приближённое решение  $\varphi_n(x)$  уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_n(x), \quad |x| < 1, \quad (7)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным вида (5),  $f_n(x)$  – интерполяционный многочлен (3) степени  $n$  функции  $f(x)$ . Тогда

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} v_n(x). \quad (8)$$

Отметим, что уравнение (7), как и уравнение (1), разрешимо в рассматриваемом классе  $h(0)$  [6]. Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (9)$$

где  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , – неизвестные пока постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (7) с учётом представления (9) и равенств (2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n T_k(x) c_k \alpha_k, \quad (10)$$

где, согласно (2),  $\alpha_0 = -\ln 2$ ,  $\alpha_k = -1/k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Формула (10) даёт разложение интеграла по многочленам Чебышёва первого рода.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (7). Учитывая представления (9) и (5) и свойство ортогональности многочленов Чебышёва первого рода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,k}^* = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}^*, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\omega_{m,k}^* = \begin{cases} k_{m,k}^*, & k = 0, \\ 0.5 k_{m,k}^*, & k > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя представления (10), (11) и выражение для правой части (3) в уравнение (7), получаем

$$\sum_{j=0}^n T_j(x) \left( c_j \alpha_j + \sum_{k=0}^n c_k \omega_{j,k}^* \right) = \sum_{j=0}^n F_j^n T_j(x). \quad (13)$$

Равенство (13) верно тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковой степени, т.е. когда имеет место следующая линейная алгебраическая система уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$c_j \alpha_j + \sum_{k=0}^n c_k \omega_{j,k}^* = F_j^n, \quad j = \overline{0, n}, \quad (14)$$

в которой коэффициенты  $\omega_{j,k}^*$  вычисляются согласно (12),  $\alpha_0 = -\ln 2$ ,  $\alpha_k = -1/k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Решив систему (14) относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , приближённое решение уравнения (1) с учётом (8) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (15)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x, t) = \frac{2t^2 - 1}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = -2x - \left( \frac{28\sqrt{3}}{3} - 16 \right) \frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в данном случае является функция  $\varphi(x) = 2x/\sqrt{1-x^2}$ . Как показывают расчёты, проведённые в среде компьютерной математики MathCad, уже при сравнительно небольших значениях  $n$ , равных 9, 14 и 19, погрешность приближённого решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (15) в системе точек  $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$ , не превосходит  $1.8 \cdot 10^{-10}$ ,  $4.2 \cdot 10^{-14}$  и  $3.6 \cdot 10^{-14}$  соответственно.

**4. Приближённое решение уравнения (1) в классе  $h(-1, 1)$ .** Аналогично предыдущему пункту работы рассмотрим следующее вспомогательное уравнение относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln |t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{n+2}(x), \quad |x| < 1, \quad (16)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен (6) функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным,  $f_{n+2}(x)$  – интерполяционный многочлен функции  $f(x)$  вида (4) степени  $n+2$ . Отметим, что уравнение (16) в заданном классе разрешимо [6].

Далее докажем

**Утверждение 1.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln |t-x| dt = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{2k} T_k(x) + \frac{1}{2k+4} T_{k+2}(x), & k \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

**Доказательство.** С учётом известного соотношения  $2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$  (см. [7, с. 23]) подынтегральная функция в (17) сводится к виду (2), откуда и следует (17).

**Утверждение 2.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln |t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) + \frac{1}{8}U_2(x), & k = 0, \\ -\frac{1}{6}U_1(x) + \frac{1}{24}U_3(x), & k = 1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) - \frac{5}{32}U_2(x) + \frac{1}{32}U_4(x), & k = 2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases} \quad (18)$$

**Доказательство.** Равенство (18) доказывается непосредственной подстановкой [7, с. 23] в интеграл, определяющий функцию  $I_k(x)$ , выражения  $T_k(x) = (U_k(x) - U_{k-2}(x))/2$ ,  $k \geq 1$ ,  $U_{-1}(x) = 0$ ,  $T_0 = U_0$ , с учётом ранее полученных равенств (17) для  $J_k(x)$ . Утверждение доказано.

Используем далее представление искомой функции  $v_n(x)$  в виде (9) с неизвестными  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Рассмотрим первый интеграл в (16) с учётом представления (9):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x).$$

Подставляя в последнее равенство выражения для  $I_k(x)$  из (18), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln |t-x| dt &= c_0 \left( \frac{1}{8} U_2(x) - \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) \right) + \\ &+ c_1 \left( -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x) \right) + c_2 \left( \left( \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x) \right) + \\ &+ \sum_{k=3}^n c_k \left( -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

После несложных преобразований придём к равенству

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} B_k U_k(x), \quad (20)$$

в котором выражения для  $B_k$  несложно получить, приводя подобные члены в представлении (19). Равенство (20) даёт разложение интеграла по многочленам Чебышёва второго рода.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (16), используя интерполяционный многочлен (6) функции  $K(x, t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^n U_m(x) \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^n c_k k_{m,k} + c_0 k_{m,0} \right) = \sum_{m=0}^n D_m U_m(x), \quad (21)$$

где  $D_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}$ ,

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} 0.5k_{m,k}, & k = 0, \\ 0.25k_{m,k}, & k > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Подстановка в уравнение (16) представлений (20), (21) и выражения для  $f_{n+2}(x)$  в виде (4) приводит к равенству

$$\sum_{k=0}^n (B_k + D_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} B_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k^{n+2} U_k(x). \quad (23)$$

Равенство (23) верно тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковой степени, т.е. когда имеет место система уравнений  $B_k + D_k = f_k^{n+2}$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $B_k = f_k^{n+2}$ ,  $k = \overline{n+1, n+2}$ . После несложных её преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$\begin{aligned} \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, 1}, \\ \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{2, n-4}, \\ \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-3, n-2}, \\ \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-1, n}, \\ \alpha_k c_{k-2} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{8}, & k = 2, \\ \frac{1}{8k}, & k > 2, \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}, & k = 0, \\ -\frac{1}{6}, & k = 1, \\ -\frac{3k+4}{8k(k+2)}, & k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}, & k = 0, \\ \frac{3k+2}{8k(k+2)}, & k > 0, \end{cases} \quad \delta_k = \begin{cases} -\frac{1}{16}, & k = 0, \\ -\frac{1}{8(k+2)}, & k > 0, \end{cases}$$

коэффициенты  $\omega_{k,q}$  вычисляются согласно (22).

Решив систему (24) относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , приближённое решение  $\varphi_n(x)$  уравнения (1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (25)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в данном случае является функция  $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ . Как показывают расчёты, уже при сравнительно небольших значениях  $n$ , равных 7, 14 и 29, погрешность приближённого решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (25) в системе точек  $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$ , не превосходит  $4.6 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.8 \cdot 10^{-7}$  и  $1.7 \cdot 10^{-13}$  соответственно.

**5. Приближённое решение уравнения (1) в классах  $h(\pm 1)$ .** Аналогично рассмотренным выше случаям приближённое решение  $\varphi_n(x)$  уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} v_n(t) \ln |t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{n+1}(x), \quad |x| < 1, \quad (26)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен (5) функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным,  $f_{n+1}(x)$  – интерполяционный многочлен вида (3) функции  $f(x)$  степени  $n+1$ . Здесь и далее из знаков “ $\pm$ ” или “ $\mp$ ” для класса  $h(1)$  выбирается верхний, а для класса  $h(-1)$  – нижний. Решения  $\varphi_n$  и  $v_n$  связаны равенством

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1 \mp x}{1 \pm x}} v_n(x). \quad (27)$$

Отметим, что уравнение (26), как и уравнение (1), в рассматриваемых классах функций разрешимо [6].

Используем представление функции  $v_n(x)$  в виде (9) с неизвестными  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

**Утверждение 3.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} T_k(t) \ln |t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2T_0(x) \pm T_1(x), & k=0, \\ \pm \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) \pm \frac{1}{4} T_2(x), & k=1, \\ \pm \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{T_k(x)}{k} \pm \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (28)$$

**Доказательство.** Умножим на  $\sqrt{1 \mp t}$  числитель и знаменатель подынтегральной функции и учтём соотношение  $xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$  [7, с. 23]. В результате подынтегральная функция в (28) сводится к виду (2), откуда и следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (26). С учётом представления (27) и равенств (28) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} v_n(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} T_k(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^n L_k(x) c_k. \quad (29)$$

Приводя подобные члены в (29) с учётом равенства (28), приходим к следующему представлению рассматриваемого интеграла по многочленам Чебышёва первого рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} v_n(t) \ln |t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+1} B_k T_k(x).$$

Выражения для  $B_k$  несложно получить из равенства (29).

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (26). Используем интерполяционный многочлен  $K_{n,n}(x, t)$  вида (5). Вследствие ортогональности многочленов Чебышёва первого рода, используя равенство (27), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1 \mp t)}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \left( k_{m,k}^* \omega_k^* \mp \frac{1}{2} k_{m,|k-1|}^* \omega_{|k-1|}^* \right) \mp \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \frac{1}{2} k_{m,k+1}^* \omega_{k+1}^* = \\ &= \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{m,k} &= k_{m,k}^* \omega_k^* \mp \frac{1}{2} k_{m,|k-1|}^* \omega_{|k-1|}^* \mp \frac{1}{2} k_{m,k+1}^* \omega_{k+1}^* \delta_{k+1}, \\ \delta_k^* &= \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n}, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad \omega_k^* = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0.5, & k > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Подстановка в уравнение (26) представлений (29), (30) и выражения для его правой части в виде (3) приводит к равенству

$$\sum_{j=0}^n T_j(x) \left( B_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} \right) + B_n T_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} F_j^{n+1} T_j(x).$$

Данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковых степеней, т.е. когда имеет место следующая система уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$B_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} = F_j^{n+1}, \quad j = \overline{0, n}, \quad B_{n+1} = F_{n+1}^{n+1},$$

где коэффициенты  $\Omega_{j,k}$  вычисляются согласно (31). После несложных преобразований этой системы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$\begin{aligned} -\ln 2 c_0 \pm \frac{\ln 2}{2} c_1 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{0,q} &= F_0^{n+1}, \\ c_0 - c_1 \pm 0,5 c_2 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{1,q} &= F_1^{n+1}, \\ \pm \frac{1}{2k} c_{k-1} - \frac{1}{k} c_k + \frac{1}{2k} c_{k+1} \pm \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{k,q} &= F_k^{n+1}, \quad k = \overline{2, n-1}, \\ \pm \frac{1}{2n} c_{n-1} - \frac{1}{n} c_n + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{n,q} &= F_n^{n+1}, \\ \pm \frac{1}{2n+2} c_n &= F_{n+1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (32)$$



Вычисляя коэффициенты  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , как решение системы (32), приближённое решение уравнения (1) найдём по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (33)$$

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в классах  $h(\pm 1)$  являются функции  $\varphi(x) = (2x \pm 2x^2)\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ . Как показывают расчёты, уже при сравнительно небольших значениях  $n$ , равных 7, 14 и 29, погрешность приближённого решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (33) в системе точек  $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$ , не превосходит  $5.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.5 \cdot 10^{-7}$  и  $7 \cdot 10^{-13}$  соответственно.

**Заключение.** Построенные схемы численного решения сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью вида (1) в разных функциональных классах Мусхелишвили, в отличие от ранее известных методик [6], позволяют получить приближённое решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближённого решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью, во всех рассмотренных классах функции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расолько Г.А.* Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
2. *Расолько Г.А.* К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
3. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1285–1292.
4. *Расолько Г.А., Шешко С.М.* Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 10–20.
5. *Расолько Г.А., Волков В.М.* Метод ортогональных многочленов для приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в приложении к двумерным задачам дифракции // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 830–839.
6. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

Белорусский государственный университет,  
г. Минск

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.  
После доработки 17.01.2022 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

# О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Э. Г. Халилов

Дано обоснование метода коллокации для системы интегральных уравнений в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел. Система интегральных уравнений в специально выбранных точках аппроксимируется системой алгебраических уравнений, для которой устанавливается существование и единственность решения. Доказывается сходимость решения полученной системы алгебраических уравнений к точному решению системы интегральных уравнений и указывается скорость сходимости метода.

DOI: 10.31857/S0374064122040112, EDN: CALBHE

**1. Введение и постановка задачи.** Рассмотрим в однородном изотропном пространстве цилиндрическое тело  $\Omega_1$  с поперечным сечением  $D_1$  и с образующей, направленной вдоль оси  $z$ , боковая поверхность которого представляет собой тонкий экран  $S_\Lambda$  толщиной  $\Lambda$ . Для упрощения системы интегральных уравнений экран  $S_\Lambda$  заменяется идеально тонкой поверхностью  $S$ , на которой вводятся специальные граничные условия (см. [1]). Обозначим через  $\Omega_2$  область вне тела  $\Omega_1$  (т.е.  $\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup S \cup \Omega_2$ ), а через  $D_2$  сечение области  $\Omega_2$  плоскостью  $z = \text{const}$ . Среда в области  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) характеризуется электромагнитными параметрами  $\gamma_j = 0$ ,  $\varepsilon_j$  и  $\mu_j$ , а материал экрана – параметрами  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Пусть замкнутая кривая Ляпунова  $\Gamma$  является контуром ортогонального сечения поверхности  $S$ , а  $\vec{n}(y)$  – внешняя единичная нормаль в точке  $y \in \Gamma$ . В работе [2] показано, что если электромагнитное поле распространяется ортогонально образующей цилиндра, то краевая задача экранирования сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + k_1^2 u_1 &= 0 \quad \text{в } D_1, \quad \Delta u_2' + k_2^2 u_2' = 0 \quad \text{в } D_2, \\ u_1|_\Gamma &= \left( \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_\Gamma, \\ u_2|_\Gamma &= \left( \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} + \beta_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_\Gamma, \quad u_2 = u_0 + u_2', \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $k_j = \omega \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$  ( $j = 1, 2$ ),

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\omega\mu_1} \left( \frac{1}{\Pi} - N \right), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2\omega\mu_2} \left( \frac{1}{\Pi} + N \right), \\ \beta_1 &= \frac{1}{2\omega\mu_1} \left( \frac{1}{\Pi} + N \right), \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\omega\mu_2} \left( \frac{1}{\Pi} - N \right), \\ N &= \frac{1}{2}\omega\mu\Lambda, \quad \Pi = \frac{1}{2}\omega \left( \varepsilon + i\frac{\gamma}{\omega} \right) \Lambda, \end{aligned}$$

$\omega$  – круговая частота поля, а  $u_0$  – потенциал источника, определяющий внешнее электромагнитное поле, воздействующее на экран.

Используя интегральную формулу Грина, в работе [2] доказано, что неизвестные функции

$$\varphi(x) = u_1(x)|_{x \in \Gamma} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{\partial u_1(x)}{\partial \vec{n}(x)} \Big|_{x \in \Gamma}$$

удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \int_{\Gamma} (K_{11}(x, y)\varphi(y) + K_{12}(x, y)\psi(y)) dl_y &= 0, \\ \psi(x) + \int_{\Gamma} (K_{21}(x, y)\varphi(y) + K_{22}(x, y)\psi(y)) dl_y &= 2\frac{\alpha_2}{\delta}u_0(x),\end{aligned}$$

которую запишем в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x) + (A_{11}\varphi)(x) + (A_{12}\psi)(x) &= 0, \\ \psi(x) + (A_{21}\varphi)(x) + (A_{22}\psi)(x) &= 2\frac{\alpha_2}{\delta}u_0(x),\end{aligned}\quad (2)$$

здесь

$$(A_{jm}f)(x) = \int_{\Gamma} K_{jm}(x, y)f(y) dl_y, \quad x \in \Gamma, \quad j, m = 1, 2,$$

$$K_{11}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \vec{n}(y)}, \quad K_{12}(x, y) = -\frac{1}{\pi} G_1(x, y),$$

$$K_{21}(x, y) = \frac{1}{\pi\delta} \left[ G_2(x, y) - \beta_2 \left( \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} + \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right) \right],$$

$$K_{22}(x, y) = \frac{1}{\pi\delta} \left[ \beta_2 G_1(x, y) - \alpha_1 G_2(x, y) - \delta \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right],$$

$\delta = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$ ,  $G_j(x, y) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_j|x - y|)$  – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в  $D_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой  $H_0^{(1)}(w) = J_0(w) + iN_0(w)$ , где

$$J_0(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left( \frac{w}{2} \right)^{2m}$$

– функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(w) = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{w}{2} + C \right) J_0(w) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left( \frac{w}{2} \right)^{2m}$$

– функция Неймана нулевого порядка, а  $C = 0.57721 \dots$  – постоянная Эйлера.

Из задачи (1) следует, что

$$u'_2(y) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \varphi(y) + \frac{\delta}{\alpha_2} \psi(y) - u_0(y), \quad y \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial u'_2(y)}{\partial \vec{n}(y)} = \frac{1}{\alpha_2} \varphi(y) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \psi(y) - \frac{\partial u_0(y)}{\partial \vec{n}(y)}, \quad y \in \Gamma.$$

При этом функции (см. [2])

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ G_1(x, y) \frac{\partial u_1(y)}{\partial \vec{n}(y)} - u_1(y) \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right] dl_y, \quad x \in D_1,$$

$$u'_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ G_2(x, y) \frac{\partial u'_2(y)}{\partial \vec{n}(y)} - u'_2(y) \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right] dl_y, \quad x \in D_2,$$

являются решением краевой задачи (1).

Известно, что, вообще говоря, найти точное решение системы интегральных уравнений (2) невозможно. Поэтому возникает интерес к исследованию её приближённого решения с теоретическим обоснованием. Отметим, что в работах [3–8] изучены приближённые решения некоторых классов систем интегральных уравнений. Но исследование приближённого решения системы интегральных уравнений (2) до настоящего времени отсутствовало. Кроме того, в работе [9] построена квадратурная формула для логарифмических потенциалов простого и двойного слоёв, а в работе [10] – квадратурная формула для их потенциалов. Однако в работе [10] для этого использована асимптотическая формула для функции Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не позволяет определить скорость сходимости указанных квадратурных формул. Поэтому более практичный способ построения квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоёв, а также исследование приближённого решения системы интегральных уравнений (2) имеют важное значение, чему и посвящена настоящая работа.

**2. Построение квадратурной формулы.** Предположим, что кривая  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  задана параметрическим уравнением  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Разобьём промежуток  $[a, b]$  на  $n > 2M_0(b-a)/d$  равных частей точками  $t_p = a + (b-a)p/n$ ,  $p = \overline{0, n}$ , здесь

$$M_0 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} < +\infty$$

(см. [11, с. 560]) и  $d$  – стандартный радиус (см. [12, с. 400]). В качестве опорных точек возьмём  $x(\tau_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ , где  $\tau_p = a + (b-a)(2p-1)/(2n)$ . Тогда кривая  $\Gamma$  разбивается на элементарные части  $\Gamma = \bigcup_{p=1}^n \Gamma_p$ , где  $\Gamma_p = \{x(t) : t_{p-1} \leq t \leq t_p\}$ . В дальнейшем запись  $a(n) \sim b(n)$  означает, что

$$C_1 \leq \frac{a(n)}{b(n)} \leq C_2 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – положительные постоянные, не зависящие от  $n$ .

Известно, что (см. [9])

1) для каждого  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеет место отношение  $r_p(n) \sim R_p(n)$ , где

$$r_p(n) = \min\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\}, \quad R_p(n) = \max\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\};$$

2) для любого  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  выполняется неравенство  $R_p(n) \leq d/2$ ;

3) для всех  $p, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  справедливо отношение  $r_j(n) \sim r_p(n)$ ;

4) имеют место отношения  $r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}$ , где  $R(n) = \max_{p=\overline{1, n}} R_p(n)$ ,  $r(n) = \min_{p=\overline{1, n}} r_p(n)$ .

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой  $\Gamma$  на *регулярные элементарные части*.

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [13], несложно показать, что справедлива

**Лемма.** *Существуют такие постоянные  $C'_0 > 0$  и  $C'_1 > 0$ , не зависящие от  $n$ , для которых при всех  $p, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \neq p$ , и любом  $y \in \Gamma_j$  справедливо двойное неравенство*

$$C'_0 |y - x(\tau_p)| \leq |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \leq C'_1 |y - x(\tau_p)|.$$

Через  $C(\Gamma)$  обозначим пространство всех непрерывных функций на  $\Gamma$  с нормой  $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|$  и для функции  $\varphi \in C(\Gamma)$  вводим модуль непрерывности

$$\omega(\varphi, h) = \max_{\substack{|x-y| \leq h \\ x, y \in \Gamma}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad h > 0.$$

Обозначим

$$K_{11}^n(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G_1^n(x, y)}{\partial \vec{n}(y)}, \quad K_{12}^n(x, y) = -\frac{1}{\pi} G_1^n(x, y),$$

$$K_{21}^n(x, y) = \frac{1}{\pi\delta} \left[ G_2^n(x, y) - \beta_2 \left( \frac{\partial G_1^n(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} + \frac{\partial G_2^n(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right) \right],$$

$$K_{22}^n(x, y) = \frac{1}{\pi\delta} \left[ \beta_2 G_1^n(x, y) - \alpha_1 G_2^n(x, y) - \delta \frac{\partial G_2^n(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right],$$

где  $n \in \mathbb{N}$  и

$$G_j^n(x, y) = \frac{\pi i}{2} H_{0,n}^{(1)}(k_j |x - y|), \quad x, y \in \Gamma, \quad x \neq y, \quad j = 1, 2,$$

$$H_{0,n}^{(1)}(w) = J_{0,n}(w) + iN_{0,n}(w), \quad J_{0,n}(w) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left( \frac{w}{2} \right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(w) = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{w}{2} + C \right) J_{0,n}(w) + \sum_{m=1}^n \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left( \frac{w}{2} \right)^{2m}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\frac{\partial G_j^n(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} = \frac{\pi i}{2} \left( \frac{\partial J_{0,n}(k_j |x - y|)}{\partial \vec{n}(y)} + i \frac{\partial N_{0,n}(k_j |x - y|)}{\partial \vec{n}(y)} \right), \quad j = 1, 2,$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k_j |x - y|)}{\partial \vec{n}(y)} = (y - x, \vec{n}(y)) \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m k_j^{2m} |x - y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{0,n}(k_j |x - y|)}{\partial \vec{n}(y)} &= \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{k_j |x - y|}{2} + C \right) \frac{\partial J_{0,n}(k_j |x - y|)}{\partial \vec{n}(y)} + \frac{2(y - x, \vec{n}(y))}{\pi |x - y|^2} J_{0,n}(k_j |x - y|) + \\ &+ (y - x, \vec{n}(y)) \sum_{m=1}^n \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k_j^{2m} |x - y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Построим сначала квадратурную формулу для интеграла  $(A_{12}\psi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Далее через  $M$  обозначается положительная постоянная, разная в различных неравенствах.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\psi \in C(\Gamma)$ . Тогда выражение

$$(A_{12}^n \psi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n K_{12}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \psi(x(\tau_j))$$

в опорных точках  $x(\tau_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ , является квадратурной формулой для интеграла  $(A_{12}\psi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , причём справедливы следующие оценки:

$$\max_{p=\overline{1, n}} |(A_{12}\psi)(x(\tau_p)) - (A_{12}^n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left( \omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad \text{при } 0 < \alpha < 1,$$

$$\max_{p=\overline{1, n}} |(A_{12}\psi)(x(\tau_p)) - (A_{12}^n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left( \omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right) \quad \text{при } \alpha = 1.$$

**Доказательство.** Несложно видеть, что

$$(A_{12}\psi)(x(\tau_p)) - (A_{12}^n \psi)(x(\tau_p)) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_p} G_1(x(\tau_p), y) \psi(y) dl_y -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{\Gamma_j} (G_1(x(\tau_p), y) - G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))) \psi(y) dl_y - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{\Gamma_j} G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) (\psi(y) - \psi(x(\tau_j))) dl_y - \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \left( \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \psi(x(\tau_j)) dt.
\end{aligned}$$

Слагаемые в правой части этого равенства обозначим в порядке их следования через  $h_1^n(x(\tau_p))$ ,  $h_2^n(x(\tau_p))$ ,  $h_3^n(x(\tau_p))$  и  $h_4^n(x(\tau_p))$ .

Очевидно, что

$$|J_0(k_1|x-y|)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|k_1| \operatorname{diam} L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad x, y \in \Gamma, \quad (3)$$

и

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left( \frac{k_1|x-y|}{2} \right)^{2m} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(|k_1| \operatorname{diam} L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad x, y \in \Gamma. \quad (4)$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$|G_1(x, y)| \leq M |\ln |x-y||, \quad x, y \in \Gamma, \quad x \neq y. \quad (5)$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, находим

$$|h_1^n(x(\tau_p))| \leq \frac{1}{\pi} \|\psi\|_{\infty} \int_{\Gamma_p} |G_1(x(\tau_p), y)| dl_y \leq M \|\psi\|_{\infty} \int_0^{R(n)} |\ln \tau| d\tau \leq M \|\psi\|_{\infty} R(n) |\ln R(n)|.$$

Пусть  $y \in \Gamma_j$  и  $j \neq p$ . Учитывая лемму, получаем

$$|x(\tau_p) - y|^q - |x(\tau_p) - x(\tau_j)|^q \leq Mq |x(\tau_j) - y| |x(\tau_p) - y|^{q-1} \leq Mq R(n) (\operatorname{diam} L)^{q-1} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned}
|\ln(k_1|x(\tau_p) - y|) - \ln(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|)| &= \left| \ln \left( 1 + \frac{|x(\tau_p) - x(\tau_j)| - |x(\tau_p) - y|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq \\
&\leq \left| \ln \left( 1 + \frac{|x(\tau_j) - y|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq M \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $q \in \mathbb{N}$ . Тогда, принимая во внимание неравенства (3), (4), (6) и (7), будем иметь

$$\begin{aligned}
& |G_1(x(\tau_p), y) - G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leq \\
& \leq \frac{\pi}{2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left( \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\
& + \left| \left( \ln \frac{k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} + C \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left( \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\
& + \left| (\ln(k_1|x(\tau_p) - y|) - \ln(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} \right| +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left( \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left( \frac{k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| \leq \frac{MR(n)}{|x(\tau_p) - y|}.$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$|J_0(k_1|x - y|) - J_{0,n}(k_1|x - y|)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|k_1|^{2m}|x - y|^{2m}}{4^m(m!)^2} \leq \frac{M}{(n+1)!}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (8)$$

и

$$|N_0(k_1|x - y|) - N_{0,n}(k_1|x - y|)| \leq \frac{M|\ln|x - y||}{(n+1)!}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (9)$$

получаем

$$|G_1(x(\tau_p), x(\tau_j)) - G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leq \frac{M|\ln|x(\tau_p) - x(\tau_j)||}{(n+1)!} \leq \frac{M}{(n+1)!|x(\tau_p) - y|}.$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} & |G_1(x(\tau_p), y) - G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leq |G_1(x(\tau_p), y) - G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))| + \\ & + |G_1(x(\tau_p), x(\tau_j)) - G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - y|} \left( R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|h_2^n(x(\tau_p))| \leq M\|\psi\|_{\infty} \left( R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau} \leq M\|\psi\|_{\infty} \left( R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) |\ln R(n)|.$$

Из неравенства (5) вытекает сходимость несобственного интеграла

$$\int_{\Gamma} |G_1(x, y)| dl_y,$$

а также неравенство

$$\int_{\Gamma} |G_1(x, y)| dl_y \leq M, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\int_{\Gamma} |G_1^n(x, y)| dl_y \leq \int_{\Gamma} |G_1(x, y)| dl_y + \int_{\Gamma} |G_1(x, y) - G_1^n(x, y)| dl_y \leq M, \quad x \in \Gamma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В итоге, принимая во внимание лемму, будем иметь

$$|h_3^n(x(\tau_p))| \leq M\omega(\psi, R(n)) \int_{\Gamma} |G_1^n(x(\tau_p), y)| dl_y \leq M\omega(\psi, R(n)).$$

Очевидно, что

$$\left| \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right| \leq M(R(n))^{\alpha}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (10)$$

Пусть  $y \in \Gamma_j$  и  $j \neq p$ . Учитывая лемму и неравенства (3) и (4), получаем

$$|J_{0,n}(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j))| \leq \sum_{m=0}^n \frac{(|k_1| \operatorname{diam} L)^{2m}}{4^m(m!)^2} \leq M, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$|N_{0,n}(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j))| \leq M |\ln |x(\tau_p) - y||, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$|G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leq M |\ln |x(\tau_p) - y||, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} |h_4^n(x(\tau_p))| &\leq M \|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| dt \leq \\ &\leq M \|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{\Gamma_j} |G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| dl_y \leq \\ &\leq M \|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \int_\Gamma |\ln |x(\tau_p) - y|| dl_y \leq M \|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha. \end{aligned}$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений  $h_1^n(x(\tau_p))$ ,  $h_2^n(x(\tau_p))$ ,  $h_3^n(x(\tau_p))$  и  $h_4^n(x(\tau_p))$  и принимая во внимание отношение  $R(n) \sim 1/n$ , завершаем доказательство теоремы 1.

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла  $(A_{11}\varphi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\varphi \in C(\Gamma)$ . Тогда выражение

$$(A_{11}^n \varphi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n K_{11}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках  $x(\tau_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ , является квадратурной формулой для интеграла  $(A_{11}\varphi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , причём справедлива следующая оценка:

$$\max_{p=\overline{1, n}} |(A_{11}\varphi)(x(\tau_p)) - (A_{11}^n \varphi)(x(\tau_p))| \leq M \left( \omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha} \right).$$

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (A_{11}\varphi)(x(\tau_p)) - (A_{11}^n \varphi)(x(\tau_p)) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} \varphi(y) dl_y + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right) \varphi(y) dl_y + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) dl_y + \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \left( \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \varphi(x(\tau_j)) dt.$$

Слагаемые в правой части этого равенства обозначим в порядке их следования через  $\delta_1^n(x(\tau_p))$ ,  $\delta_2^n(x(\tau_p))$ ,  $\delta_3^n(x(\tau_p))$  и  $\delta_4^n(x(\tau_p))$ .

Несложно убедиться, что

$$\frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} = \frac{\pi i}{2} \left( \frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} + i \frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} \right),$$

где

$$\frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} = (y-x, \vec{n}(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k_1^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} &= \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{k_1|x-y|}{2} + C \right) \frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} + \frac{2(y-x, \vec{n}(y))}{\pi|x-y|^2} J_0(k_1|x-y|) + \\ &+ (y-x, \vec{n}(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k_1^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}. \end{aligned}$$

Так как (см. [12, с. 403])

$$|(y-x, \vec{n}(y))| \leq M|x-y|^{1+\alpha}, \quad (11)$$

то

$$\left| \frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} \right| \leq M|x-y|^{1+\alpha} \quad (12)$$

и

$$\left| \frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial \vec{n}(y)} \right| \leq M \left( |x-y|^{1+\alpha} \ln |x-y| + \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} + |x-y|^{1+\alpha} \right), \quad (13)$$

а значит,

$$\left| \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| \leq \frac{M}{|x-y|^{1-\alpha}}, \quad x, y \in \Gamma, \quad x \neq y. \quad (14)$$

Поэтому, учитывая формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$|\delta_1^n(x(\tau_p))| \leq M \|\varphi\|_{\infty} \int_0^{R(n)} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \leq M \|\varphi\|_{\infty} (R(n))^{\alpha}.$$

Пусть  $y \in \Gamma_j$  и  $j \neq p$ . В силу леммы и неравенства (11) очевидно, что

$$\begin{aligned} &|(y-x(\tau_p), \vec{n}(y)) - (x(\tau_j)-x(\tau_p), \vec{n}(x(\tau_j)))| = \\ &= |(y-x(\tau_j), \vec{n}(y))| + |(x(\tau_j)-x(\tau_p), \vec{n}(y) - \vec{n}(x(\tau_j)))| \leq M|y-x(\tau_p)|(R(n))^{\alpha}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда, учитывая неравенства (6), будем иметь

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial J_0(k_1|x(\tau_p)-y|)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial J_0(k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq \\ &\leq |(y-x(\tau_p), \vec{n}(y)) - (x(\tau_j)-x(\tau_p), \vec{n}(x(\tau_j)))| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k_1|^{2m} |x(\tau_p)-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |(x(\tau_j) - x(\tau_p), \vec{n}(x(\tau_j)))| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k_1|^{2m} |x(\tau_p) - x(\tau_j)|^{2m-2} - |x(\tau_p) - y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!} \leq \\
& \leq M |y - x(\tau_p)| (R(n))^\alpha.
\end{aligned} \tag{16}$$

Кроме того, вследствие леммы и неравенств (11), (15) и (16) получаем

$$\left| \frac{(y - x(\tau_p), \vec{n}(y))}{|x(\tau_p) - y|^2} - \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_p), \vec{n}(x(\tau_j)))}{|x(\tau_p) - x(\tau_j)|^2} \right| \leq M \left( \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|^{2-\alpha}} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_p) - y|} \right).$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (3), (7), (12), (13), (15) и (16), нетрудно показать, что

$$\left| \frac{\partial N_0(k_1 |x(\tau_p) - y|)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial N_0(k_1 |x(\tau_p) - x(\tau_j)|)}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq M \left( \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|^{2-\alpha}} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_p) - y|} \right).$$

В результате находим

$$\left| \frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq M \left( \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|^{2-\alpha}} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_p) - y|} \right).$$

Учитывая неравенство

$$\left| \frac{\partial G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} - \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - y|^{1-\alpha} n!}, \tag{17}$$

заключаем, что

$$\left| \frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq M \left( \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|^{2-\alpha}} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_p) - y|} + \frac{1}{|x(\tau_p) - y|^{1-\alpha} n!} \right).$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
|\delta_2^n(x(\tau_p))| & \leq M \|\varphi\|_\infty \left( R(n) \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}} + (R(n))^\alpha \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{n!} \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \right) \leq \\
& \leq M \|\varphi\|_\infty \left( (R(n))^\alpha |\ln R(n)| + \frac{1}{n!} \right).
\end{aligned}$$

Пусть  $y \in \Gamma_j$  и  $j \neq p$ . Так как из леммы и неравенств (14) и (17) следует, что

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| & \leq \left| \frac{\partial G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| + \left| \frac{\partial G_1(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} - \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| \leq \\
& \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - x(\tau_j)|^{1-\alpha}} + \frac{M}{|x(\tau_p) - y|^{1-\alpha} n!} \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - y|^{1-\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{18}$$

то

$$|\delta_3^n(x(\tau_p))| \leq \frac{1}{\pi} \omega(\varphi, R(n)) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| dl_y \leq M \omega(\varphi, R(n)).$$

Кроме того, учитывая лемму и неравенства (10) и (18), получаем

$$|\delta_4^n(x(\tau_p))| \leq M \|\varphi\|_\infty (R(n))^\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| dt \leq$$

$$\leq M \|\varphi\|_{\infty} (R(n))^{\alpha} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| dl_y \leq M \|\varphi\|_{\infty} (R(n))^{\alpha}.$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений  $\delta_1^n(x(\tau_p))$ ,  $\delta_2^n(x(\tau_p))$ ,  $\delta_3^n(x(\tau_p))$  и  $\delta_4^n(x(\tau_p))$  и учитывая отношение  $R(n) \sim 1/n$ , завершаем доказательство теоремы 2.

Аналогичным образом доказывается справедливость следующих теорем.

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\varphi \in C(\Gamma)$ . Тогда выражение

$$(A_{21}^n \varphi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n K_{21}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках  $x(\tau_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ , является квадратурной формулой для интеграла  $(A_{21} \varphi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , причём справедлива следующая оценка:

$$\max_{p=\overline{1, n}} |(A_{21} \varphi)(x(\tau_p)) - (A_{21}^n \varphi)(x(\tau_p))| \leq M \left( \omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \right).$$

**Теорема 4.** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\psi \in C(\Gamma)$ . Тогда выражение

$$(A_{22}^n \psi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n K_{22}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \psi(x(\tau_j))$$

в опорных точках  $x(\tau_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ , является квадратурной формулой для интеграла  $(A_{22} \psi)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , причём справедлива следующая оценка:

$$\max_{p=\overline{1, n}} |(A_{22} \psi)(x(\tau_p)) - (A_{22}^n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left( \omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \right).$$

**3. Обоснование метода коллокации для системы уравнений (1).** Пусть  $\mathbb{C}^{2n}$  – пространство  $2n$ -мерных векторов  $z^{2n} = (z_1^{2n}, z_2^{2n}, \dots, z_{2n}^{2n})^T$ ,  $z_l^{2n} \in \mathbb{C}$ ,  $l = \overline{1, 2n}$ , с нормой  $\|z^{2n}\| = \max_{l=\overline{1, 2n}} |z_l^{2n}|$ , где запись “ $a^T$ ” означает транспонирование вектора  $a$ . Рассмотрим квадратную матрицу  $A^{2n} = (a_{pj})_{p,j=1}^{2n}$  порядка  $2n$  с элементами

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j)|(b-a)}{n} K_{11}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}$$

при  $p = \overline{1, n}$  и  $j = \overline{1, n}$ ;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j+n)|(b-a)}{n} K_{12}^n(x(\tau_p), x(\tau_{j-n})) \sqrt{(x'_1(\tau_{j-n}))^2 + (x'_2(\tau_{j-n}))^2}$$

при  $p = \overline{1, n}$  и  $j = \overline{n+1, 2n}$ ;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j-n)|(b-a)}{n} K_{21}^n(x(\tau_{p-n}), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}$$

при  $p = \overline{n+1, 2n}$  и  $j = \overline{1, n}$ ;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j)|(b-a)}{n} K_{22}^n(x(\tau_{p-n}), x(\tau_{j-n})) \sqrt{(x'_1(\tau_{j-n}))^2 + (x'_2(\tau_{j-n}))^2}$$

при  $p = \overline{n+1, 2n}$  и  $j = \overline{n+1, 2n}$ .

Если через  $z_p^{2n}$ ,  $p = \overline{1, n}$ , обозначим приближённое значение величины  $\varphi(x(\tau_p))$ , а через  $z_{p+n}^{2n}$ ,  $p = \overline{1, n}$ , – приближённое значение величины  $\psi(x(\tau_p))$ , то, используя построенные квадратурные формулы для интегралов  $(A_{jm}f)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $j, m = 1, 2$ , систему интегральных уравнений (2) заменим системой алгебраических уравнений относительно  $z^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ , которую запишем в виде

$$\begin{aligned} z_p^{2n} + \sum_{j=1}^{2n} a_{pj} z_j^{2n} &= 0, \quad p = \overline{1, n}, \\ z_p^{2n} + \sum_{j=1}^{2n} a_{pj} z_j^{2n} &= 2 \frac{\alpha_2}{\delta} u_0(x(\tau_p)), \quad p = \overline{n+1, 2n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема 5.** Пусть функция  $u_0$  непрерывна на кривой  $\Gamma$ . Тогда система уравнений (2) и система уравнений (19) для несобственных частот имеют единственные решения  $\rho_* = (\varphi_*, \psi_*)^T \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  и  $w^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$  ( $n \geq n_0$ ) соответственно, причём

$$\begin{aligned} \max_{p=\overline{1, n}} |w_p^{2n} - \varphi_*(x(\tau_p))| &\leq M \left( \omega(u_0, 1/n) + \frac{\ln n}{n^\alpha} \right), \\ \max_{p=\overline{1, n}} |w_{p+n}^{2n} - \psi_*(x(\tau_p))| &\leq M \left( \omega(u_0, 1/n) + \frac{\ln n}{n^\alpha} \right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Для обоснования метода коллокации воспользуемся теоремой Г.М. Вайнника о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [14]). Для этого сначала запишем уравнения (2) и (19) в операторном виде.

Рассмотрим матричный оператор 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

определённый в пространстве  $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ . Тогда систему интегральных уравнений (2) можно записать в виде

$$(I + A)\rho = \chi, \quad (20)$$

где  $I$  – единичный оператор на  $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ ,  $\rho = (\varphi, \psi)^T$  и  $\chi = (0, 2\alpha_2 u_0 / \delta)^T$ . Отметим, что пространство  $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  является банаховым с нормой

$$\|\rho\|_1 = \max\{\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\}.$$

Очевидно, что систему алгебраических уравнений (19) можно записать в виде

$$(I^{2n} + A^{2n})z^{2n} = \chi^{2n}, \quad (21)$$

где  $I^{2n}$  – единичная матрица  $2n$ -го порядка,  $\chi^{2n} = p^{2n}\chi$ , а  $p^{2n} : C(\Gamma) \times C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$  – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^{2n}\rho = (\varphi(x(\tau_1)), \varphi(x(\tau_2)), \dots, \varphi(x(\tau_n)), \psi(x(\tau_1)), \psi(x(\tau_2)), \dots, \psi(x(\tau_n)))^T.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.2 из [14], используя из этой работы обозначения и необходимые определения и предложения. В работе [2] доказано, что система интегральных уравнений (2) для несобственных частот  $k_2 \neq k_2^{(s)} = \omega_s \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) имеет единственное решение в пространстве  $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  при любых непрерывных правых частях, где  $k_2^{(s)}$  – собственные значения внутренней краевой задачи Дирихле

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \quad \text{в } D_1,$$

$$u_2|_\Gamma = 0.$$

Следовательно,  $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$ . Кроме того, операторы  $I^{2n} + A^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , фредгольмовы с нулевым индексом. Принимая во внимание способ разбиения кривой  $\Gamma$  на регулярные элементарные части, получаем, что для любого  $\rho \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|p^{2n}\rho\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\max_{l=\overline{1,n}} |\varphi(x(\tau_l))|, \max_{l=\overline{1,n}} |\psi(x(\tau_l))|\right\} = \\ &= \max\left\{\max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|, \max_{x \in \Gamma} |\psi(x)|\right\} = \|\rho\|_1. \end{aligned}$$

Поэтому система операторов  $P = \{p^{2n}\}$  является связывающей для пространств  $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  и  $\mathbb{C}^{2n}$ . Тогда  $\chi^{2n} \xrightarrow{P} \chi$  и, принимая во внимание теоремы 1–4, получаем, что по определению 2.1 из [14] отображение  $I^{2n} + A^{2n} \xrightarrow{PP} I + A$ . Так как, согласно определению 3.2 из [14],  $I^{2n} \rightarrow I$  устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из [14] осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1.1 из [14] равносильно условию: для любой последовательности  $\{z^{2n}\}$ ,  $z^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ ,  $\|z^{2n}\| \leq M$ , существует относительно компактная последовательность  $\{A_{2n}z^{2n}\} \subset C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  такая, что

$$\|A^{2n}z^{2n} - p^{2n}(A_{2n}z^{2n})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В качестве  $\{A_{2n}z^{2n}\}$  выберем последовательность

$$(A_{2n}z^{2n})(x) = \left( \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(1)}(x)z_j^{2n}, \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(2)}(x)z_j^{2n} \right)^T,$$

где

$$\begin{aligned} a_j^{(1)}(x) &= \int_{\Gamma_j} K_{11}^n(x, y) dl_y \quad \text{и} \quad a_j^{(2)}(x) = \int_{\Gamma_j} K_{21}^n(x, y) dl_y, \quad \text{если } j = \overline{1, n}. \\ a_j^{(1)}(x) &= \int_{\Gamma_{j-n}} K_{12}^n(x, y) dl_y \quad \text{и} \quad a_j^{(2)}(x) = \int_{\Gamma_{j-n}} K_{22}^n(x, y) dl_y, \quad \text{если } j = \overline{n+1, 2n}. \end{aligned}$$

Из неравенств (3), (4) и (11) очевидно вытекает, что для любых точек  $x, y \in \Gamma$ ,  $x \neq y$ , и при каждом  $n \in \mathbb{N}$  справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |K_{11}^n(x, y)| &\leq M \left( |\ln |x - y|| + \frac{1}{|x - y|^{1-\alpha}} \right), \quad |K_{12}^n(x, y)| \leq M |\ln |x - y||, \\ |K_{2i}^n(x, y)| &\leq M \left( |\ln |x - y|| + \frac{1}{|x - y|^{1-\alpha}} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда получаем

$$\left| \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(m)}(x)z_j^{2n} \right| \leq M \|z^{2n}\|, \quad x \in \Gamma, \quad m = 1, 2,$$

т.е.

$$|(A_{2n}z^{2n})(x)| \leq M \|z^{2n}\|, \quad x \in \Gamma.$$

Поэтому, принимая во внимание условие  $\|z^{2n}\| \leq M$ , заключаем, что последовательность  $\{A_{2n}z^{2n}\}$  равномерно ограничена.

Теперь возьмём любые точки  $x', x'' \in \Gamma$  такие, что  $|x' - x''| = h < d/2$ . Тогда, рассуждая точно так же, как и в работе [15], несложно показать, что

$$\left| \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(k)}(x')z_j^{2n} - \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(k)}(x'')z_j^{2n} \right| \leq M \|z^{2n}\| h |\ln h|, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно,

$$|(A_{2n}z^{2n})(x') - (A_{2n}z^{2n})(x'')| \leq M\|z^{2n}\|\|x' - x''\|\ln|x' - x''|,$$

а значит,  $\{A_{2n}z^{2n}\} \subset C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ . Отсюда непосредственно вытекает равностепенная непрерывность последовательности  $\{A_{2n}z^{2n}\}$ . Тогда из теоремы Арцеля следует относительная компактность последовательности  $\{A_{2n}z^{2n}\}$ . Кроме того, рассуждая точно так же, как и в доказательствах теорем 1 и 2, получаем

$$\|A^{2n}z^{2n} - p^{2n}(A_{2n}z^{2n})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [14], заключаем, что уравнения (20) и (21) имеют единственные решения  $\rho_* = (\varphi_*, \psi_*)^T \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  и  $w^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$  ( $n \geq n_0$ ) соответственно, причём

$$c_1\delta_n \leq \|w^{2n} - p^{2n}\rho_*\| \leq c_2\delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_{n \geq n_0} \|I^{2n} + A^{2n}\| > 0, \quad c_2 = \sup_{n \geq n_0} \|(I^{2n} + A^{2n})^{-1}\| < +\infty, \quad \delta_n = \|(I^{2n} + A^{2n})(p^{2n}\rho_*) - \chi^{2n}\|.$$

Принимая во внимание равенство  $\chi^{2n} = p^{2n}\chi = p^{2n}\rho_* + p^{2n}(A\rho_*)$  и оценки погрешности построенных квадратурных формул для интегралов  $(A_{jm}f)(x)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $j, m = 1, 2$ , имеем

$$\delta_n = \|A^{2n}(p^{2n}\rho_*) - p^{2n}(A\rho_*)\| \leq M \left( \|\rho_*\|_1 \frac{\ln n}{n^\alpha} + \omega(\rho_*, 1/n) \right).$$

Здесь модуль непрерывности вектор-функций  $\rho_*$  определяется формулой

$$\omega(\rho_*, h) = \max_{\substack{|x-y| \leq h \\ x, y \in \Gamma}} \sqrt{(\varphi_*(x) - \varphi_*(y))^2 + (\psi_*(x) - \psi_*(y))^2}, \quad h > 0.$$

Воспользовавшись оценками (22) при  $n \rightarrow \infty$  и такими же, как и в работе [16], рассуждениями, нетрудно показать, что

$$|(A_{jm}f)(x') - (A_{jm}f)(x'')| \leq M\|f\|_\infty|x' - x''|\ln|x' - x''|, \quad x', x'' \in \Gamma, \quad j, m = 1, 2.$$

Следовательно,

$$|(A\rho_*)(x') - (A\rho_*)(x'')| \leq M\|\rho_*\|_1|x' - x''|\ln|x' - x''|, \quad x', x'' \in \Gamma,$$

т.е.

$$\omega(A\rho_*, 1/n) \leq M\|\rho_*\|_1 \frac{\ln n}{n}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства

$$\omega(\rho_*, 1/n) = \omega(\chi - A\rho_*, 1/n) \leq \omega(\chi, 1/n) + \omega(A\rho_*, 1/n) \leq \omega(u_0, 1/n) + M\|\rho_*\|_1 \frac{\ln n}{n}$$

и

$$\|\rho_*\|_1 \leq \|(I + A)^{-1}\|\|\chi\|_1,$$

получаем, что

$$\delta_n \leq M \left( \omega(u_0, 1/n) + \frac{\ln n}{n^\alpha} \right).$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Ерофеев В.Т. Дифракция электромагнитных волн на сверхпроводящих тонких цилиндрических оболочках // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 25–27
2. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242–247.
3. Бойков И.В., Тында А.Н. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1214–1223.
4. Булатов М.В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерры I рода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 4. С. 607–611.
5. Гуат М., Камуш С., Хеллаф А., Мерчела В. Об одной системе интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярным ядром // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 193. С. 33–44.
6. Ставцев С.Л. Итерационный подход к численному решению системы интегральных уравнений для краевых задач скалярного уравнения Гельмгольца // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1282–1290.
7. Тында А.Н., Сидоров Д.Н., Муфтахов И.Р. Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры I рода с разрывными ядрами // Журн. Средне-Волжск. мат. о-ва. 2018. Т. 20. № 1. С. 55–63.
8. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса систем интегральных уравнений // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69. № 6. С. 823–835.
9. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. № 1. P. 155–162.
10. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. and Comput. Model. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
11. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1976.
13. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
14. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближённое решение уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.
15. Бахшалиева М.Н., Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 6. С. 936–950.
16. Халилов Э.Г., Бахшалиева М.Н. Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа // Уфимск. мат. журн. 2021. Т. 13. № 1. С. 86–98.

Азербайджанский государственный университет  
нефти и промышленности, г. Баку

Поступила в редакцию 15.10.2021 г.  
После доработки 15.10.2021 г.  
Принята к публикации 09.03.2022 г.

УДК 517.968.72

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. Представлены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также результаты о свойствах генератора указанной полугруппы.

DOI: 10.31857/S0374064122040124, EDN: CAMA0J

**Введение.** Настоящая работа посвящена изучению свойств линейных операторов, которые являются генераторами полугрупп, порождаемых абстрактными вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, в частности, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью.

В настоящее время существует обширная литература, посвящённая исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, появляющихся в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–5] и приведённую в них библиографию).

**1. Определения. Обозначения. Постановка задачи.** Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $A$  – самосопряжённый положительный,  $A^* = A \geq \kappa_0 I$  ( $\kappa_0 = \text{const} > 0$ ), оператор, действующий в пространстве  $H$  и имеющий ограниченный обратный. Пусть  $B$  – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве  $H$ , с областью определения  $D(B)$  такой, что  $D(A) \subseteq D(B)$ , удовлетворяющий для любого  $x \in \text{Dom}(A)$  неравенству  $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$  при некотором  $\kappa = \text{const} > 0$ , через  $I$  обозначаем тождественный оператор в пространстве  $H$ .

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \int_0^t K_1(t-s)Au(s)ds - \int_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Предположим, что ядра интегральных операторов  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , имеют следующее представление:

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2,$$



где  $d\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) – положительные меры, которым соответствуют неубывающие непрерывные справа функции распределения  $\mu_i$  соответственно. Интеграл понимается в смысле Стильбеса. Будем предполагать, что функции  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Зададим оператор  $A_0$  равенством

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B.$$

**Замечание 1.** Из свойств операторов  $A$  и  $B$  и неравенства Гайнца (см. [6, гл. 1, теорема 7.1]) следует, что оператор  $A_0$  является обратимым, операторы  $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$ ,  $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$  допускают ограниченное замыкание в  $H$ , оператор  $A_0^{-1}$  ограничен.

Предположим, что вектор-функция  $A_0^{1/2}f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$  и вектор  $\varphi_0 \in D(A_0^{3/2})$ .

**Определение 1.** Будем называть вектор-функцию  $u(t)$  *классическим решением* задачи (1), (2), если  $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$ ,  $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$  и  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения  $t \in \mathbb{R}_+$  и начальному условию (2).

Преобразование Лапласа  $\hat{u}(\lambda)$  решения  $u(t)$  задачи (1), (2) с начальными условиями  $u(+0) = 0$ ,  $u^{(1)}(+0) = 0$  имеет следующее представление:  $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$ , в котором  $\hat{f}$  – преобразование Лапласа функции  $f$ , а оператор-функция  $L(\lambda)$  является символом уравнения (1) и задаётся равенством

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B,$$

здесь  $\hat{K}_i(\lambda)$  ( $i = 1, 2$ ) – преобразование Лапласа ядра  $K_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ), имеющее, очевидно, вид

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2.$$

Через  $\Omega_k$  ( $i = 1, 2$ ) обозначим пространства  $L_{\mu_k}^2(\mathbb{R}_+, H)$  вектор-функций на полуоси  $\mathbb{R}_+$  со значениями в  $H$ , снабжённые соответственно нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left( \int_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2 d\mu_k(s) \right)^{1/2}.$$

Пространства  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [7, с. 142]).

**Замечание 2.** Формально элементы  $\xi(s)$  пространства  $\Omega_k$  достаточно определить только на подмножестве  $\bigcup_{k=1}^2 \text{supp } d\mu_k \subset \mathbb{R}_+$ .

## 2. Абстрактная задача Коши в расширенном функциональном пространстве.

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу  $L_k(t)$  в пространстве  $\Omega_k$  (см. [8, с. 65]):  $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$ ,  $\xi(\tau) \in \Omega_k$ ,  $t \geq 0$ ,  $\tau \in \text{supp } \mu_k$ . Известно, что линейный оператор  $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$  в пространстве  $\Omega_k$  с областью определения  $D(T_k) := \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}$  является генератором полугруппы  $L_k(t)$  (см. [8, с. 65]).

Определим взаимно сопряжённые операторы  $\mathbb{B}_k : H \rightarrow \Omega_k$  и  $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \rightarrow H$  равенствами

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau), \quad \tau \in \text{supp } d\mu_k, \quad k = 1, 2.$$

Введём гильбертово пространство  $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$ , снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^2 \text{supp } d\mu_k.$$

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{H}$  линейный оператор  $\mathbb{A}$  с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(T_k), \quad k = 1, 2 \right\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T = \left( -A_0^{1/2} \left[ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - T_k \xi_k(\tau), \quad k = 1, 2 \right)^T.$$

В работе [9] показано, что при выполнении условий (3) оператор  $\mathbb{A}$  в пространстве  $\mathbb{H}$  с плотной областью определения  $D(\mathbb{A})$  является максимально диссипативным и, следовательно, представляет собой генератор сжимающей  $C_0$ -полугруппы  $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$  в пространстве  $\mathbb{H}$ .

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad t > 0, \quad Z(0) = Z_0. \quad (4)$$

В работе [9] доказана теорема о существовании и единственности классического решения  $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$  задачи (4) в предположениях, что вектор-функция  $F(t)$  имеет вид  $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0)$ , где  $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$  и  $M_k(t) := \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \tau^{-1} d\mu_k(\tau)$ ,  $k = 1, 2$ , вектор  $Z_0$  имеет вид  $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, 0, 0)$ . Установлено также, что при указанных предположениях  $v(t) = u'(t)$ ,  $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$ , где  $u(t)$  – классическое решение задачи (1), (2). Кроме того, получена оценка нормы решения задачи (4) в пространстве  $\mathbb{H}$  и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве  $H$ .

### 3. Свойства оператор-функции $L(\lambda)$ и оператора $\mathbb{A}$ .

**Определение 2.** Множество значений  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется *резольвентным множеством*  $R(L)$  оператор-функции  $L(\lambda)$ , если для любого  $\lambda \in R(L)$  оператор-функция  $L^{-1}(\lambda)$  существует и ограничена. Множество  $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus R(L)$  называется *спектром* оператор-функции  $L(\lambda)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (3) и  $\text{supp } d\mu_k \subset (d, +\infty)$ , где  $d > 0$  ( $k = 1, 2$ ). Тогда спектр оператор-функции  $L(\lambda)$  и спектр оператора  $\mathbb{A}$  лежат в открытой левой полуплоскости  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$ . При этом не вещественный спектр оператор-функции  $L(\lambda)$  совпадает с не вещественным спектром оператора  $\mathbb{A}$ , симметричен относительно вещественной оси и состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.

**Доказательство** теоремы 1 содержится в статье [10]. Условия (3) являются существенными для устойчивости задачи решения (1), (2).

Перейдём теперь к уточнению локализации спектра оператор-функции  $L(\lambda)$  в левой полуплоскости в случае, когда носитель меры  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежит полуоси  $[d_1, +\infty)$ ,  $0 < d_1 < +\infty$ . Рассмотрим уравнения

$$\tau \hat{K}_1(x) + (1 - \tau) \hat{K}_2(x) = 1, \quad (5)$$

$$\tau \hat{K}_1(x) + (1 - \tau) \hat{K}_2(x) = 1 + x^2/\omega^2. \quad (6)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (3) и носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат полуси  $[d_1, +\infty)$ ,  $0 < d_1 < +\infty$ . Тогда множество вещественных корней уравнения (6) принадлежит спектру оператор-функции  $L(\lambda)$ , причём вещественный корень  $x_1(\tau) \in (-d_1, 0)$  уравнения (6), если он существует, удовлетворяет неравенству  $x_1(\tau) < x_0(\tau) < \tilde{x}_0 < 0$ , где  $\tilde{x}_0 := \max\{x_0(\tau'), x_0(\tau'')\}$ , а  $x_0(\tau)$  – вещественный корень уравнения (5), лежащий в интервале  $(-d_1, 0)$ ,  $\tau' := \|(A + B)^{1/2} A^{-1/2}\|^{-2}$ ,  $\tau'' := \|A^{1/2}(A + B)^{-1/2}\|^2$ . Если носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ , то уравнения (5) и (6) не имеют корней на полуинтервале  $(-\infty, -d_2]$ .

Уточним локализацию не вещественной части спектра оператор-функции  $L(\lambda)$  в случае, когда мера  $d\mu_k(\tau)$  имеет компактный носитель.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (3) и носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ . Тогда не вещественная часть спектра оператор-функции  $L(\lambda)$  принадлежит полосе  $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha_2\}$ , где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[ \frac{K_1(0)(Af, f) + K_2(0)(Bf, f)}{((A + B)f, f)} \right], \quad f \in D(A), \quad (7)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \left[ \int_{d_1}^{d_2} \frac{(Af, f)d\mu_1(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} + \int_{d_1}^{d_2} \frac{(Bf, f)d\mu_2(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} \right], \quad f \in D(A). \quad (8)$$

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия (3) и носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < +\infty$ . Тогда существует такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  оператор функции  $(\lambda \mathbb{A}^{-1} - \mathbb{I})^{-1}$  ограничена в области  $\Gamma_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \varepsilon^{-1}, |\arg \lambda \pm \pi/2| \geq \varepsilon\}$ .

**Доказательство** теорем 2–4 содержится в статье [11].

Пусть носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ . Тогда на основании теоремы 1, а также представлений (23) и (35) из статьи [9] заключаем, что вещественная часть спектра оператора  $\mathbb{A}$  принадлежит множеству  $[-d_2, \tilde{x}_0)$ . Кроме того, из теоремы 2 следует существование такого числа  $\delta > 0$ , что внутри контура  $\Gamma = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-d_2 - \delta, \tilde{x}_0 + \delta], y = \pm \delta\}$  нет не вещественных точек спектра оператора  $\mathbb{A}$ .

Обозначим через  $\mathbb{Q}$  проектор Рисса  $\mathbb{Q} = -1/(2\pi i) \int_\Gamma (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^{-1} d\lambda$ . Рассмотрим подпространства  $\mathbb{H}_1 := \mathbb{Q}\mathbb{H}$  и  $\mathbb{H}_2 := (\mathbb{I} - \mathbb{Q})\mathbb{H}$ . Заметим, что подпространство  $\mathbb{H}_1$  отвечает вещественной части, а подпространство  $\mathbb{H}_2$  – не вещественной части спектра оператора  $\mathbb{A}$ .

Обозначим  $s_j(A_0^{-1/2})$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) – собственные значения самосопряжённого компактного положительного оператора  $(A_0^{-1/2})$ , упорядоченные по убыванию, с учётом кратности.

**Теорема 5** (о полноте). Пусть выполнены условия (3), носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ , и для некоторого  $p > 0$  выполнено соотношение

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (js_j^p(A_0^{-1/2})) = 0. \quad (9)$$

Тогда система собственных и присоединённых векторов оператора  $\mathbb{A}$ , отвечающих собственным значениям, принадлежащим множеству  $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha_2\}$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются формулами (7), (8), является полной в подпространстве  $\mathbb{H}_2$ .

**Доказательство** теоремы 5 содержится в статье [10].

**4. Представление решений.** Представим начальный вектор  $Z_0$  задачи (4) в виде  $Z_0 = Z_{01} + Z_{02}$ , где  $Z_{0k} \in \mathbb{H}_k$ ,  $k = 0, 1$ . Напомним, что подпространство  $\mathbb{H}_1$  отвечает вещественной части, а подпространство  $\mathbb{H}_2$  – не вещественной части спектра оператора  $\mathbb{A}$ . Обозначим  $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}_2 := \mathbb{I} - \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{A}_k := \mathbb{Q}_k \mathbb{A} \mathbb{Q}_k$ ,  $k = 1, 2$ , – сужение оператора  $\mathbb{A}$  на подпространство  $\mathbb{H}_k$ , которое является диссипативным оператором. Согласно теореме 5 система корневых векторов оператора  $\mathbb{A}_2$  полна в пространстве  $\mathbb{H}_2$ . Следовательно, при любом  $\varepsilon > 0$  каждый

вектор  $Z_{02} \in \mathbb{H}_2$  можно приблизить, с точностью до слагаемого  $Z_{0\varepsilon}$  ( $\|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}} < \varepsilon$ ), линейной комбинацией корневых векторов  $\xi_{njs} \in \mathbb{H}_2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, j_n}$ ,  $s = \overline{0, s_{nj}}$ , оператора  $\mathbb{A}_2$ , соответствующих не вещественным собственным значениям  $\lambda_n$  ( $\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$ ),  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N(\varepsilon)$ . В указанных обозначениях решение  $Z(t)$  задачи (4) при  $F(t) \equiv 0$  представимо в виде  $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$ , где  $Z_k(t) \in \mathbb{H}_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $Z_k(t) = e^{t\mathbb{A}_k} Z_{0k} = e^{t\mathbb{A}_k} \mathbb{Q}_k Z_0$ ,  $t > 0$ .

**Теорема 6** (представление решений). Пусть выполнены условия (3), носители мер  $d\mu_k(\tau)$  ( $k = 1, 2$ ) принадлежат отрезку  $[d_1, d_2]$ ,  $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ , и при некотором  $p > 0$  выполнено соотношение (9). Тогда решение  $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}$  задачи Коши (4) при  $F(t) \equiv 0$  для любого  $\varepsilon > 0$  представимо в следующем виде:

$$Z(t) = e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01} + \sum_{n=-N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{j_n} \sum_{s=0}^{s_{nj}} c_{njs} \left( \frac{t^s}{s!} \xi_{nj0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \xi_{nj1} + \dots + t \xi_{nj(s-1)} + \xi_{njs} \right) e^{\lambda_n t} + e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon},$$

где  $\|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}} < \varepsilon$ ,  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ( $\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$ ) – не вещественные собственные значения оператора  $\mathbb{A}$ , которые принадлежат полосе  $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha_2\}$  с величинами  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ), определяемыми формулами (7), (8),  $(\xi_{nj0}, \xi_{nj1}, \dots, \xi_{njs})$  – цепочки собственных и присоединённых векторов оператора  $\mathbb{A}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda_n$ ,  $s_{nj}$  – максимальная длина производной цепочки, отвечающей вектору  $\xi_{nj0}$ ,  $\sum_{j=1}^{j_n} s_{nj} = p_n$  – алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda_n$ , вектор-функции  $e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}$  и  $e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon}$  для любого  $\varepsilon > 0$  и любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  удовлетворяют неравенствам  $\|e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} \leq C(\delta) \|Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} e^{(\bar{x}_0 + \delta)t}$  и  $\|e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}_2} < \|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}_2} < \varepsilon$ ,  $t \geq 0$ , с константой  $C(\delta)$ , не зависящей от вектора  $Z_{01}$ . Кроме того, вектор-функция  $u(t) = \int_0^t v(s) ds + \varphi_0$  является решением задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288 А).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New; York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. Gurtin M.E., Pipkin A.C. General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967.
7. Гельфанд И.М., Виленькин Н.Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
8. Engel K.J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
9. Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стильтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
10. Rautian N.A. On the properties of the generators of semigroups associated with Volterra integro-differential equations // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1652–1664.
11. Rautian N.A. Studying Volterra integro-differential equations by methods of the theory of operator semigroups // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.  
После доработки 20.03.2022 г.  
Принята к публикации 21.04.2022 г.