СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2022

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Стабилизация системы неустойчивых маятников:
дискретный и непрерывный случай

П. А. Мелешенко, В. А. Нестеров, М. Е. Семенов, А. М. Соловьев, К. И. Сыпало 3

Стабилизация колебания связанных консервативных систем

И. Н. Барабанов, В. Н. Тхай 22

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Гипотезная триангуляция воздушных и наземных объектов
группой летательных аппаратов

Л. Е. Широков 29

Многокритериальная оптимизация индуцированных норм линейных операторов:
прямая и двойственная задачи управления и фильтрации

Д. В. Баландин, Р. С. Бирюков, М. М. Коган 43

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследование управляемости для некоторых динамических систем
с распределенными параметрами, описываемых
интегродифференциальными уравнениями

И. В. Романов 58

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оптимизация планирования наблюдения каталога объектов
подвижным наблюдателем с учетом накладываемых ограничений

Д. Н. Рулев 62

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Покадровое определение эмоций на видеозаписи при помощи
многослойных нейронных сетей

Ф. Р. Ахияров, Л. А. Деревягин, В. В. Макаров, В. И. Цурков, А. Н. Яковлев 80

Детектирование подделок в мобильных системах распознавания по лицу
при помощи стереокамеры

Ю. С. Ефимов, И. А. Матвеев 86

Распознавание движений человека по видеоданным

М. С. Каприелова, В. Ю. Леонов, Р. Г. Нейчев 100

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Калибровка блока ньютонометров с асимметричными моделями
показаний чувствительных элементов

А. А. Голован, А. И. Матасов, И. Е. Тарыгин 107

РОБОТОТЕХНИКА

Преодоление инсектоморфным роботом препятствия
в виде штабеля из шероховатых цилиндров

Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов 120

Искусственные мышцы (обзорная статья)

*А. П. Алисейчик, Д. А. Грибков, А. Р. Ефимов, И. А. Орлов, В. Е. Павловский,
А. В. Подопросветов, И. В. Хайдукова* 137

Разработка робастной системы управления манипуляционным роботом
с использованием аппарата грамианов

А. А. Анисимов, К. Е. Соколов, С. В. Тарарыкин 162

EDN: OYHRIJ
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 3–21

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 681.51

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ НЕУСТОЙЧИВЫХ МАЯТНИКОВ: ДИСКРЕТНЫЙ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ[1]

© 2022 г. П. А. Мелешенко[a,b], В. А. Нестеров[c], М. Е. Семенов[a,d,e,*], А. М. Соловьев[f], К. И. Сыпало[g]

[a] *Воронежский государственный ун-т, Воронеж, Россия*

[b] *Целевая поисковая лаборатория прорывных технологий радиосвязи Фонда перспективных исследований, НИУ МИЭТ, Зеленоград, Москва, Россия*

[c] *МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*

[d] *ФГБУН Федеральный исследовательский центр "Единая геофизическая служба Российской академии наук", Обнинск, Россия*

[e] *Воронежский государственный технический ун-т, Воронеж, Россия*

[f] *ГК Ростех, АО "Концерн "Созвездие", Воронеж, Россия*

[g] *Федеральное государственное унитарное предприятие "Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского", Жуковский, Россия*

**e-mail:mkl150@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.10.2021 г.
После доработки 30.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Исследуется динамика системы неустойчивых маятников в условиях упругих связей, находящихся под воздействием внешней вынуждающей силы, которая трактуется как управление, т.е. представлена задача управления неустойчивой системой с дефицитом управляющих воздействий. Кроме того, приведен случай нелинейных упругих связей (с кубической нелинейностью). Рассматривается переход от дискретной к непрерывной системе, описывающей материал, который является континуальным аналогом дискретной системы, находящийся в неравновесном, структурно-неустойчивом состоянии. Проводится исследование динамических характеристик неустойчивой системы и материала (в условиях дефицита управляющих воздействий), а также идентифицируются значения параметров, обеспечивающих ее стабилизацию.

Найдены необходимые и достаточные условия стабилизации системы перевернутых упругосвязанных маятников, формализуемые в виде ограничений на коэффициент жесткости упругой связи. Для континуального аналога рассматриваемой системы было доказано, что для стабилизации неустойчивого материала необходимо, чтобы ее параметры принимали значения, удовлетворяющие следующему условию: время прохождения упругой волны от одного конца системы до другого и обратно не должно превышать периода ее собственных колебаний. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие теоретические построения.

DOI: 10.31857/S0002338822020111

Введение. Одна из важных задач теории управления связана с проблемой стабилизации неустойчивых динамических систем, в частности, с проблемой синтеза управляющего воздействия, обеспечивающего ограниченность фазовых координат системы в окрестности неустойчивого положения равновесия. Еще одна классическая задача математического моделирования исследует динамические режимы систем связанных осцилляторов (отметим, что эта система традиционно используется в качестве простейшей модели твердого тела). В работе рассматривается задача стабилизации системы связанных неустойчивых осцилляторов. Отдельно отметим, что в классической постановке равновесное положение осцилляторов, как правило, предполагается устойчивым. В то же время известны примеры систем, в которых отдельные элементы находятся в структурно неустойчивых состояниях (например, ионизированные атомы в плазме).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 19-11-0197).

Указанная проблема становится еще более сложной, если число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы системы и ресурсы системы управления ограничены.

После того, как многими авторами в различных постановках был решен целый ряд задач управления однозвенным обратным маятником [1–14], интерес исследователей постепенно перемещается к более сложной проблеме управления системой обратных связанных маятников. При этом исследуемая система может представлять собой как многозвенные перевернутые маятники (двойной и тройной маятник), так и связанные однозвенные обратные маятники.

Значительные трудности вызывают задачи управления подобными системами с дефицитом числа управляющих воздействий, например, в случае многозвенного обратного маятника, когда управляющий момент прикладывается только в одном шарнире. При этом требуется так распорядиться относительным перемещением звеньев, чтобы приложенные силы гравитации вместе с внешним активным управляющим моментом способствовали приведению системы в желаемое положение [15–22]. Ряд публикаций указанной тематики посвящены построению различных контроллеров на основе нечеткого управления и искусственных нейронных сетей, предназначенных для стабилизации систем обратных маятников [23–27]. Отдельно отметим работы [28–31], в которых получены оригинальные и важные результаты в области оптимального по быстродействию управления перевернутым маятником. В частности, в [29] построены оптимальные переходные процессы (с учетом цилиндрической симметрии пространства состояний управляемой системы) для различных значений параметров и ограничений, накладываемых на управляющий момент. Помимо этого, следует отметить важную работу [32], которая посвящена новым методам управления сложными динамическими системами и описывает нелинейные системы управления, обладающие несколькими степенями свободы, а также подверженные неконтролируемым возмущениям и содержащие неопределенные параметры.

Исследования динамических свойств механических систем, в состав которых входят обратные мятники различных конфигураций, можно встретить во многих областях науки от медицины и биологии [33] до робототехники и космических технологий [34]. Данная статья является продолжением работ [8–14], посвященных решению задачи стабилизации обратного маятника для случая жесткого [8] и гибкого стержня [9–11], а также случая двух обратных маятников в условиях упругих связей [12, 13]. В настоящей работе производится обобщение классической системы связанных маятников для произвольного числа n упруго связанных обратных маятников, шарнирно закрепленных на подвижной платформе. При этом сила, приложенная к платформе и вызывающая ее горизонтальные перемещения, трактуется как управление. Кроме того, выполняется предельный переход от дискретной к непрерывной модели, описывающей материал, который находится в неравновесном, структурно-неустойчивом состоянии. Выполнено исследование динамических характеристик указанных систем (в случае управления по принципу обратной связи), а также получены условия, обеспечивающие их стабилизацию.

1. Дискретная система. 1.1. Математическая модель. Рассмотрим систему из n перевернутых маятников, каждый из которых имеет массу m и длину стержня l, жестко закрепленных на подвижной тележке и связанных между собой пружинами жесткостью k. При этом пружины находятся в недеформированном состоянии в случае, когда маятники занимают вертикальное положение. Будем считать, что тележка не имеет массы и движется без трения, а управляющее воздействие, приложенное к тележке, сообщает ей ускорение u (рис. 1).

Пренебрегая трением, запишем уравнения моментов исследуемой системы (в неинерциальной системе координат, связанной с тележкой):

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{M}_1^{(g)} + \vec{M}_1^{(kr)} + \vec{M}^{(u)}, \\ I_i \dfrac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \vec{M}_i^{(g)} + \vec{M}_i^{(kr)} + \vec{M}_i^{(kl)} + \vec{M}^{(u)}, \ i = \overline{2, n-1}, \\ I_n \dfrac{d\vec{\omega}_n}{dt} = \vec{M}_n^{(g)} + \vec{M}_n^{(kl)} + \vec{M}^{(u)}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь I – момент инерции маятника относительно оси шарнира, который соединяет его с тележкой, ω – угловая скорость, $M^{(g)}$ – возвращающий момент силы тяжести, $M^{(kl)}$ и $M^{(\kappa r)}$ – моменты силы упругости пружин, расположенных слева и справа от i-го маятника соответственно, а $M^{(u)}$ – момент управления, равный моменту переносной силы инерции.

Поскольку рассматривается плоское движение, все указанные векторы имеют направления, перпендикулярные плоскости рисунка, что позволяет перейти к уравнениям в скалярной форме.

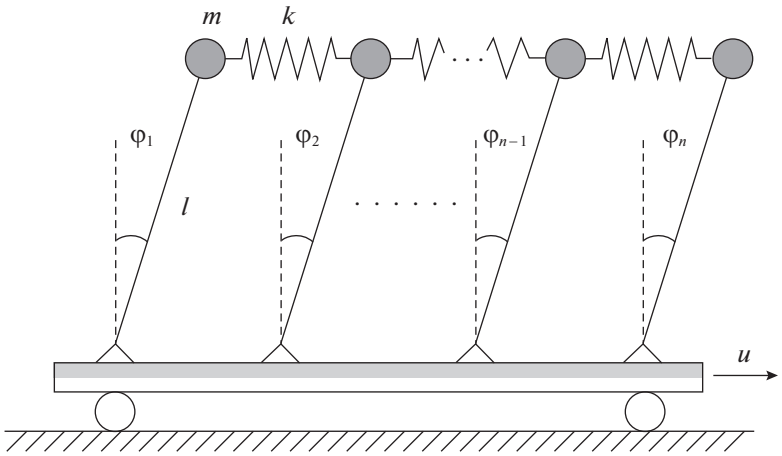

Рис. 1. Система связанных обратных маятников

Как следует из рис. 1, положение маятников характеризуется углами их отклонения от вертикальной оси φ. При этом углы отклонения маятников предполагаются малыми. В этом случае удлинение пружины Δx можно приближенно записать как

$$\Delta x_i \approx l\left(\varphi_{i+1} - \varphi_i\right). \tag{1.2}$$

Введем собственную частоту колебаний для изолированного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \tag{1.3}$$

Также предположим, что массы являются точечными, сосредоточенными на концах соответствующих стержней, тогда

$$I = ml^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{1.4}$$

Таким образом, учитывая равенства (1.2)–(1.4), система уравнений (1.1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega^2\varphi_1 + a\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - c, \\ \ddot{\varphi}_i = \omega^2\varphi_i + a\left(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}\right) - c, \\ \ddot{\varphi}_n = \omega^2\varphi_n - a\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) - c, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $a = k/m$, $c = u/l$.

1.2. Стабилизация системы. Стабилизацию дискретной системы (1.5) будем осуществлять посредством управления, формируемого по принципу обратной связи [8–13]. Найдем суммарное отклонение маятников относительно вертикального положения. С этой целью просуммируем все уравнения системы (1.5):

$$\ddot{s} = \omega^2 s - nc, \quad s = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \tag{1.6}$$

Тогда ускорение (управление), приложенное к тележке (рис. 1), определим следующим соотношением:

$$u = A\operatorname{sign}\left(Bs + \dot{s}\right), \tag{1.7}$$

где A и B – коэффициенты, задающие характер управления.

1.3. Коэффициенты управления. Проведем исследование динамики дискретной системы и найдем значения коэффициентов A и B, приводящие к стабилизации маятников в окрестности неустойчивого вертикального положения.

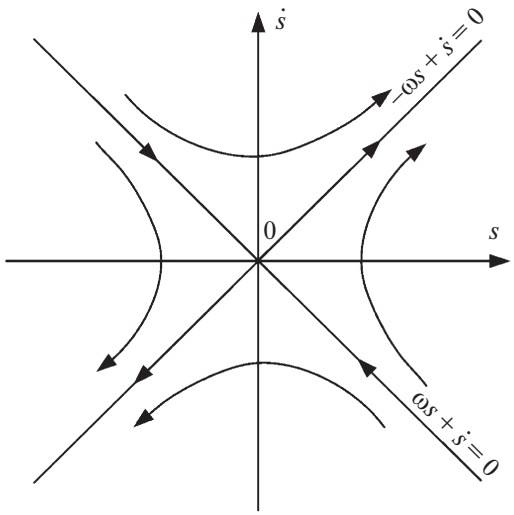

Рис. 2. Фазовый портрет системы

Заметим, что управление (ускорение) u, как видно из уравнения (1.6), влияет только на суммарное угловое положение маятников в пространстве, а жесткость пружин k – только на их положение относительно друг друга.

Общее решение дифференциального уравнения (1.6) на временном интервале с постоянным управлением имеет следующий вид:

$$s(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{nu}{\omega^2 l}. \tag{1.8}$$

Пусть начальное значение суммарного отклонения $s(0) = s_0$, а его производная $\dot{s}(0) = s_1$. Тогда решение задачи Коши уравнения (1.6) запишем как

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(s_0 + \frac{s_1}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(s_0 - \frac{s_1}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l}\right)e^{-\omega t} + \frac{nu}{\omega^2 l}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим фазовый портрет исследуемой системы (рис. 2) [13].

При отсутствии управления, как видно из рисунка, попадая на прямую $\omega s + \dot{s} = 0$, фазовые координаты будут “стремиться” к нулевому положению равновесия. Другими словами, когда управление u способно “довести” суммарное положение маятников до прямой $\omega s + \dot{s} = 0$, система будет стабилизирована [13]. Таким образом, из решения (1.9) следует, что для стабилизации системы необходимо (в начальный момент времени) выполнение условия

$$s_0 + \frac{s_1}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} = 0 \Rightarrow u = \frac{\omega l}{n}(\omega s_0 + s_1), \tag{1.10}$$

до тех пор, пока $\omega s + \dot{s}$ сохраняет знак. С учетом (1.10) управление (1.7) можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{\omega l}{n}|\omega s_0 + s_1|\operatorname{sign}(\omega s + \dot{s}). \tag{1.11}$$

Таким образом, искомые коэффициенты управления (1.7), приводящие к стабилизации системы (1.6), определяются посредством соотношений

$$\begin{cases} A = \dfrac{\omega l}{n}|\omega s_0 + s_1|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Отметим, что устойчивое положение маятников, к которому приводит выполнение условия (1.12), не является вертикальным, так как в этом случае суммарное отклонение маятников

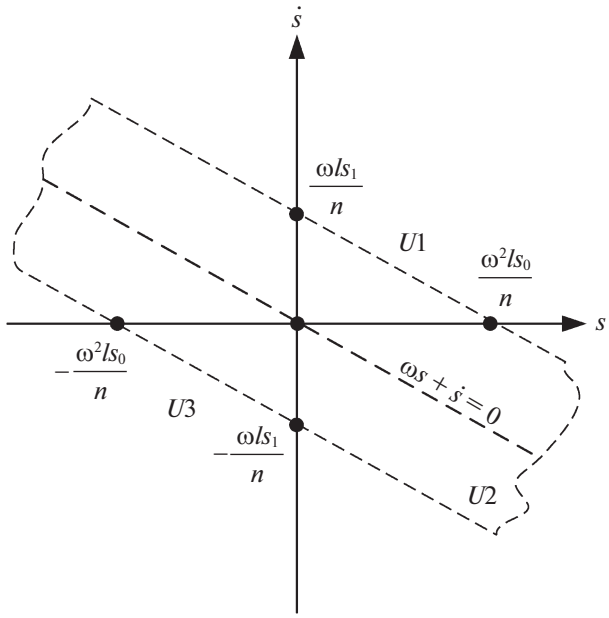

Рис. 3. Область устойчивости системы

$s \to nu/\omega^2 l$, что демонстрирует траектория a фазового пространства (рис. 3), при выполнении условий (1.12). Однако из решения (1.9) также следует, что при

$$s_0 + \frac{s_1}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} < 0 \tag{1.13}$$

управление будет "возвращать" маятники в сторону вертикального положения, что соответствует движению фазовых координат к прямой $\omega s + \dot{s} = 0$ фазового пространства. Попадая же на прямую $\omega s + \dot{s} = 0$, фазовые координаты будут "стремиться" к нулевому положению равновесия, что демонстрирует траектория b фазового пространства (рис. 3), при выполнении условия (1.13). Таким образом, необходимое условие стабилизации системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A \geq \dfrac{\omega l}{n}\left|\omega s_0 + s_1\right|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Графически условие (1.14) можно отобразить на фазовой плоскости в форме, представленной на рис. 3.

Области $U1$ и $U3$ определяют все возможные начальные состояния системы, при которых маятники невозможно "удержать" в окрестности вертикального положения равновесия, а область $U2$ является областью устойчивости системы при выполнении условий (1.14), наложенных на управляющее воздействие (1.7).

Отметим, что после воздействия управления суммарный угол отклонения маятников s может изменить знак, вследствие чего на каждой расчетной итерации необходимо переопределять управляющее воздействие. Однако из-за консервативности рассматриваемой системы для успешного управления достаточно переопределить лишь знак величины u исходя из текущих значений s и $\dot{s}$, согласно (1.7), при этом коэффициенты A и B, согласно (1.14), оставив неизменными.

1.4. Параметры системы. Условие (1.14) является необходимым, но не достаточным условием стабилизации системы (1.5). Как уже указывалось ранее, на положение маятников друг относительно друга и, как следствие, на возможность стабилизации системы также влияют ее параметры, а именно коэффициент жесткости пружин k, а также масса грузов m и количество маятников n. Найдем параметры системы, обеспечивающие ее стабилизацию при условии выполнения соотношений (1.14).

Исследуем относительное перемещение маятников. С этой целью найдем попарные разности уравнений системы (1.5):

$$\begin{cases} \ddot{d}_1 = \omega^2 d_1 + \dfrac{k}{m}(d_2 - 2d_1), \\ \ddot{d}_i = \omega^2 d_i + \dfrac{k}{m}(d_{i-1} - 2d_i + d_{i+1}), \quad i = \overline{2, m-1}. \\ \ddot{d}_m = \omega^2 d_m - \dfrac{k}{m}(d_{m-1} - 2d_m), \end{cases} \tag{1.15}$$

где $d_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$, а $m = n - 1$. Запишем систему уравнений (1.15) в матричной форме:

$$\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{A} \times \mathbf{D}, \tag{1.16}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a_{i,i} = \omega^2 - \dfrac{2k}{m}, \quad i = \overline{1, m}, \\ a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = \dfrac{k}{m}, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ a_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{i+2, m}, \\ a_{j,i} = 0, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{i+2, m}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Параметры системы (k, m, n), обеспечивающие стабилизацию маятников по относительному перемещению, можно определить из условия

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \le 0 \wedge \operatorname{Re}\lambda_2 \le 0 \ldots \wedge \operatorname{Re}\lambda_m \le 0, \tag{1.18}$$

где λ_i – собственные числа матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$.

Так, в качестве примера, при $n = 6$ из условия (1.18) можно найти область значений жесткости пружин k, при которой обеспечивается устойчивость маятников по отношению друг к другу:

$$k \ge \frac{\omega^2 m}{2 - \sqrt{3}}. \tag{1.19}$$

1.5. Результаты компьютерного моделирования. Проведем компьютерное моделирование динамики исследуемой механической системы. С этой целью найдем решение системы уравнений (1.5), когда

$$\begin{gathered} m = 0.1 \text{ кг}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad n = 6, \\ \varphi_1(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0.1 \text{ рад/с}, \\ \varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{2, n}. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Решение будем искать с помощью одношагового метода Рунге–Кутта 5-го порядка. Построим графики функций s и d, определяемых как

$$s = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \quad d = \sum_{j=1}^{n-1} d_j. \tag{1.21}$$

Здесь s – суммарное отклонение маятников от вертикальной оси, а d – суммарное отклонение маятников друг относительно друга.

На рис. 4 приведены графики функций s и d при выполнении условий (1.14) и (1.18), когда $k = 20$ Н/м, $A = 0.0722$, $B = 3.1337$, на рис. 5 – в случае невыполнения условия (1.14) и выполнения (1.18) при $k = 20$ Н/м, $A = 0.0322$, $B = 3.1337$, на рис. 6 – при невыполнении условия (1.18) и выполнении (1.14), когда $k = 3$ Н/м, $A = 0.0722$, $B = 3.1337$, а на рис. 7 – фазовые траектории при строгом выполнении условий (1.14) и (1.18).

Как видно из результатов компьютерного моделирования, неравенства (1.14), (1.18) являются необходимыми и достаточными условиями стабилизации системы (1.5).

1.6. Упругие волны. Как известно [35], при возбуждении цепочки связанных осцилляторов в условиях упругих связей возникает волновое движение, при котором фазовый волновой фронт перемещается с конечной скоростью, постоянной для однородной среды, перенося

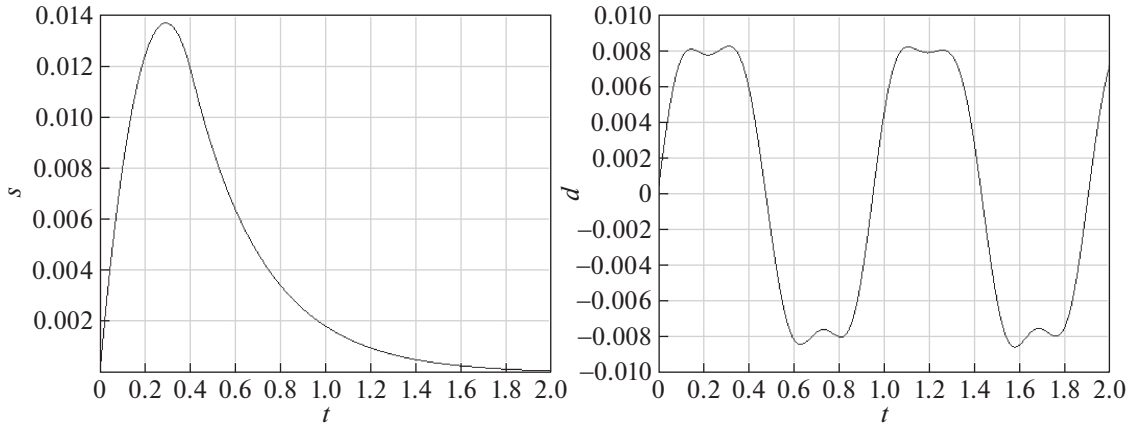

Рис. 4. Графики функций s (*слева*) и d (*справа*) при выполнении условий (1.14) и (1.18)

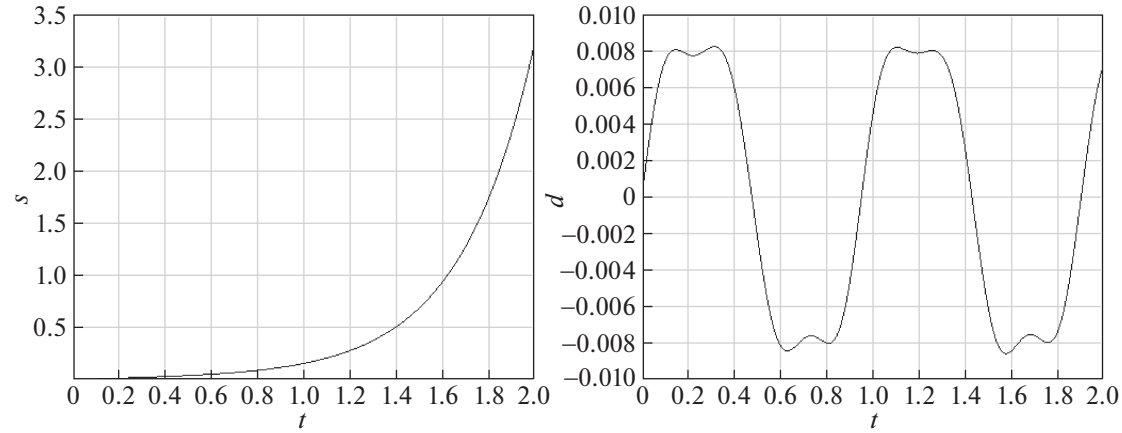

Рис. 5. Графики функций s (*слева*) и d (*справа*) при невыполнении условия (1.14) и выполнении условия (1.18)

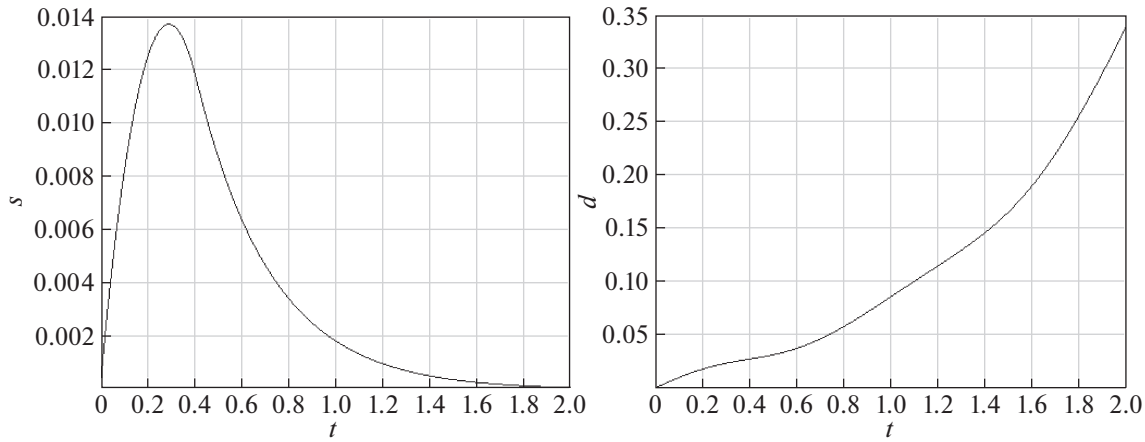

Рис. 6. Графики функций s (*слева*) и d (*справа*) при выполнении условия (1.14) и невыполнении условия (1.18)

энергию колебаний. Это явление называется бегущей волной. Примерами бегущих волн могут служить упругие волны в металлическом стержне, столбе газа или жидкости, электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль длинной линии или в волноводе.

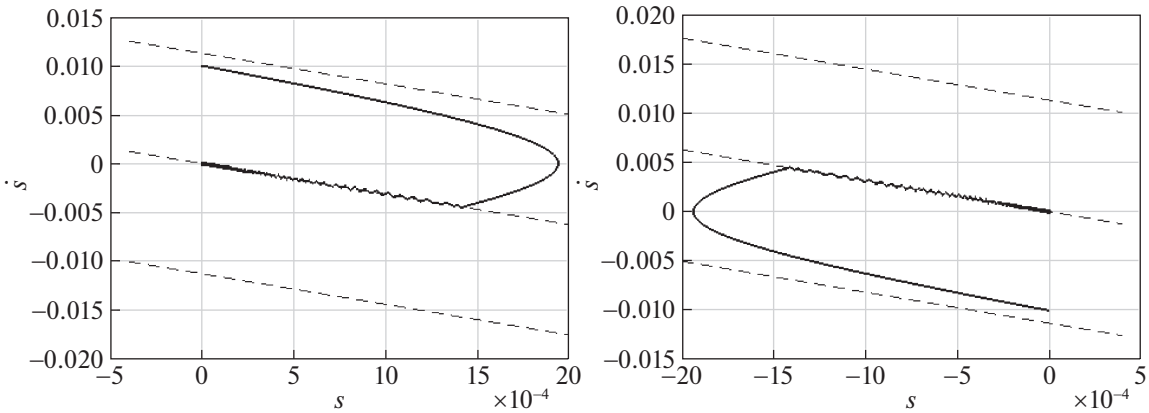

Рис. 7. Фазовые траектории при строгом выполнении неравенств (1.14), (1.18) и начальных условиях $s_0 = 0$, $s_1 = 0.01$ (*слева*), $s_0 = 0$, $s_1 = -0.01$ (*справа*)

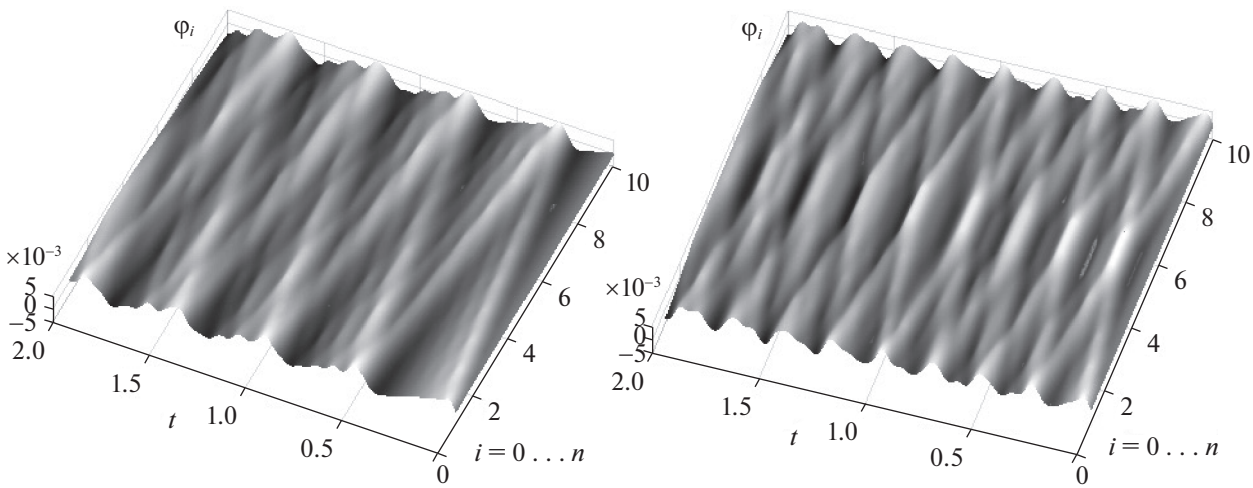

Рис. 8. Упругие волны в стабилизированной системе

В исследуемой механической системе при определенных начальных условиях в процессе стабилизации также возникают упругие волны, что демонстрируют результаты компьютерного моделирования. Так, на рис. 8 (*слева*) показана упругая волна, движущаяся от 1-го маятника системы к n-му и в обратном направлении, возникающая при следующих начальных условиях:

$$\begin{gathered}\varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad i = \overline{1,n}, \\ \dot{\varphi}_1(0) = 0.1 \text{ рад/с}, \quad \dot{\varphi}_j(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad j = \overline{2,n}.\end{gathered} \tag{1.22}$$

На рис. 8 (*справа*) изображены две упругие волны, движущиеся в противоположных направлениях, возникающие при начальных условиях:

$$\begin{gathered}\varphi_i(0) = 0 \text{ рад} \quad i = \overline{1,n}, \\ \dot{\varphi}_1(0) = 0.1 \text{ рад/с} \quad \dot{\varphi}_n(0) = -0.1 \text{ рад/с} \quad \dot{\varphi}_j(0) = 0 \text{ рад/с} \quad j = \overline{2,n-1}.\end{gathered} \tag{1.23}$$

2. Непрерывная система. 2.1. Математическая модель. Произведем формальный переход от дискретной системы, состоящей из n обратных маятников, к непрерывной, описывающей материал, который находится в неравновесном, структурно-неустойчивом состоянии. С этой целью перепишем второе уравнение системы (1.5) следующим образом:

$$\ddot{\varphi}_i = \omega^2\varphi_i + \frac{kh^2}{m}\frac{(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1})}{h^2} - \frac{u}{l}, \tag{2.1}$$

где h – расстояние между маятниками системы (по оси OX). Очевидно, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1})}{h^2}=\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=\varphi''(x,t). \tag{2.2}$$

Будем считать, что длина маятников сопоставима с расстоянием между ними, т.е. $l=h$. Тогда, учитывая (2.2), уравнение (2.1) в предельном случае будет иметь вид

$$\ddot{\varphi}(x,t)=\omega^2\varphi(x,t)+\frac{kh^2}{m}\varphi''(x,t)-\frac{u(\dot{\varphi},\varphi,t)}{h}. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) описывает материал с поперечным сечением S. Механическое напряжение под воздействием приложенной силы F в таком материале можно найти как

$$T=\frac{F}{S}. \tag{2.4}$$

С другой стороны, напряжение можно найти из закона Гука:

$$T=E\frac{\Delta x}{h}, \tag{2.5}$$

где E – модуль Юнга.

Исходя из того, что $F=k\Delta x$, из (2.4) и (2.5) можно выразить коэффициент жесткости пружин:

$$k=\frac{ES}{h}. \tag{2.6}$$

Будем считать, что материал имеет квадратное сечение ($S=h^2$), тогда масса, сосредоточенная в одной его элементарной ячейке

$$m=\rho h^3. \tag{2.7}$$

Также, будем считать, что материал имеет массу $M=mL/h$, где L – его длина по оси OX. Следовательно, из (2.7) найдем

$$h=\sqrt{\frac{M}{\rho L}}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6)–(2.8) в (2.3), получим

$$\ddot{\varphi}(x,t)=\omega^2\varphi(x,t)+\frac{E}{\rho}\varphi''(x,t)-\sqrt{\frac{\rho L}{M}}u(\dot{\varphi},\varphi,t). \tag{2.9}$$

Рассмотрим первое и последнее уравнение системы (1.5). В предельном случае данные уравнения можно получить из второго уравнения системы (1.5), если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi'(0,t)=0,\\ \left.\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=\varphi'(L,t)=0.\end{cases} \tag{2.10}$$

Таким образом, при учете (2.10) система уравнений, являющаяся континуальным аналогом системы (1.5) и описывающая динамику неустойчивого материала, имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(x,t) = \omega^2\varphi(x,t) + V^2\varphi''(x,t) - \alpha u(\dot{\varphi},\varphi,t), \\ \varphi'(0,t) = 0, \\ \varphi'(L,t) = 0, \\ \varphi(x,0) = f(x), \\ \dot{\varphi}(x,0) = g(x), \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\rho L}{M}}, \\ \omega^2 = g\alpha, \\ V^2 = \dfrac{E}{\rho}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Здесь M – масса материала, ρ – его плотность, L – длина, ω – собственная частота, V – скорость распространения упругой волны, а функции $f(x)$ и $g(x)$ формализуют начальные условия. Отметим, что выражение $\omega^2 = g\alpha$ в (2.11) является следствием равенства $l = h$ и выражения (2.8).

2.2. Стабилизация непрерывной системы. Стабилизацию системы (2.11) будем осуществлять посредством управления, формируемого по принципу обратной связи, аналогично (1.6), (1.7). Переходя к континуальному аналогу, запишем интегральное отклонение элементов материала:

$$s(t) = \int_0^L \varphi(x,t)\,dx. \tag{2.12}$$

Управляющее воздействие, аналогично дискретному случаю (1.7), будет иметь вид

$$u = A\operatorname{sign}(Bs + \dot{s}). \tag{2.13}$$

2.3. Коэффициенты управления. Найдем значения коэффициентов A и B (2.13), приводящие к стабилизации исследуемого материала. С этой целью проинтегрируем первое уравнение системы (2.11) в интервале $[0, L]$:

$$\ddot{s}(t) = \omega^2 s(t) + V^2\left[\varphi'(L,t) - \varphi'(0,t)\right] - L\alpha u(\dot{s},s,t). \tag{2.14}$$

Принимая во внимание 2-е и 3-е уравнения системы (2.11), окончательно получим

$$\ddot{s}(t) = \omega^2 s(t) - L\alpha u(\dot{s},s,t). \tag{2.15}$$

Аналогично дискретному случаю (1.8)–(1.11) можно получить необходимое условие стабилизации системы:

$$s_0 + \frac{s_1}{\omega} - \frac{L\alpha u}{\omega^2} = 0 \Rightarrow s_0 + \frac{s_1}{\omega} - \frac{Lu}{g} = 0 \Rightarrow u = \frac{g}{\omega L}(\omega s_0 + s_1). \tag{2.16}$$

Отсюда по аналогии с (1.14) найдем

$$\begin{cases} A \ge \dfrac{g}{\omega L}\left|\omega s_0 + s_1\right|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

2.4. Параметры материала. Как и в случае с дискретной системой, условие (2.17) является необходимым для стабилизации исследуемого материала, но отнюдь не достаточным. На возможность стабилизации материала, помимо коэффициентов управления, влияют также его параметры. Найдем параметры материала, обеспечивающие его стабилизацию в случае выполнения условия (2.17). С этой целью продифференцируем первое уравнение системы (2.11) по переменной x:

$$\ddot{\varphi}'(x,t) = \omega^2\varphi'(x,t) + V^2\varphi'''(x,t). \tag{2.18}$$

Произведем замену переменных $d(x,t) = \varphi'(x,t)$ и с учетом граничных условий из системы (2.11) получим

$$\begin{cases} \ddot{d}(x,t) = \omega^2 d(x,t) + V^2 d''(x,t), \\ d(0,t) = 0, \\ d(L,t) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

где величина d пропорциональна отклонению элементов материала относительно друг друга с течением времени.

Решим систему (2.19) с помощью метода Фурье (разделения переменных). Для этого представим решение первого уравнения системы (2.19) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$d(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.20}$$

Подставим (2.20) в первое уравнение системы (2.19):

$$X\ddot{T} = \omega^2 XT + V^2 X''T. \tag{2.21}$$

Перепишем уравнение (2.21) в виде

$$\frac{\ddot{T}}{\omega^2 T} = 1 + \frac{V^2 X''}{\omega^2 X}. \tag{2.22}$$

Уравнение (2.22) можно представить в виде системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{T}}{\omega^2 T} = \lambda, \\ 1 + \dfrac{V^2 X''}{\omega^2 X} = \lambda, \end{cases} \tag{2.23}$$

где $\lambda = \text{const}$.

Перепишем (2.23) в другом виде и, учитывая граничные условия из (2.19), получим систему

$$\begin{cases} V^2 X'' + \omega^2 X(1-\lambda) = 0, \\ \ddot{T} - \omega^2 T\lambda = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.24). С учетом граничных условий решение этого уравнения сводится к классической задаче Штурма–Лиувилля первого рода [36–38]:

$$\begin{cases} X'' + \beta X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

где

$$\beta = \left(\frac{\omega}{V}\right)^2 (1-\lambda). \tag{2.26}$$

Решением системы (2.25) является множество нетривиальных решений:

$$\begin{cases} \beta_n = \left(\dfrac{\pi n}{L}\right)^2, \\ X_n(x) = \sin(\sqrt{\beta_n}x), \\ n \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Произведем обратную замену (2.26) и получим решение первого уравнения системы (2.24):

$$\begin{cases} \lambda_n = 1 - \left(\dfrac{\pi n V}{\omega L}\right)^2, \\ X(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{L} x\right), \\ n \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (2.24). Общее решение этого уравнение имеет вид

$$T_n(t) = Ae^{\sqrt{\lambda_n}\omega t} + Be^{-\sqrt{\lambda_n}\omega t}. \tag{2.29}$$

Так как решение системы (2.19) ищется в виде (2.20), очевидно, что для устойчивости решения необходима ограниченность функций $X(x)$ и $T(t)$. Функция $X(x)$, согласно (2.28), имеет гармонический характер и является ограниченной. Из (2.29) также очевидно, что для ограниченности функции $T(t)$ необходимо выполнение условия $\lambda_n \le 0$. В этом случае функция (2.29) также будет иметь гармонический характер или принимать постоянное значение при $\lambda_n = 0$.

Таким образом, условие устойчивости решения системы (2.19) запишется как

$$1 - \left(\frac{\pi n V}{\omega L}\right)^2 \le 0 \tag{2.30}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\pi n V}{\omega L} \ge 1. \tag{2.31}$$

Так как собственные числа n изменяются в интервале $[1, +\infty)$, то $n = 1$ соответствует минимальному значению левой части неравенства (2.31). Учитывая этот факт, перепишем (2.31) следующим образом:

$$\frac{V}{L} \ge \frac{\omega}{\pi}. \tag{2.32}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T_v &= \frac{2L}{V}, \\ T_\omega &= \frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где T_v – время, за которое упругая волна проходит от одного конца материала до его другого конца и обратно, а T_ω – период собственных колебаний материала. Перепишем равенство (2.32) с учетом обозначений (2.33) и получим

$$T_v \le T_\omega. \tag{2.34}$$

Неравенство (2.34) определяет параметры материала, обеспечивающие его стабилизацию в случае выполнения условия (2.17). Также из неравенства (2.34) следует важный вывод: с физической точки зрения, для стабилизации исследуемого материала (с учетом управления по принципу обратной связи) необходимо, чтобы время прохождения упругих волн от одного конца материала до другого и обратно не превышало периода его собственных колебаний.

Таким образом, (2.17) и (2.34) являются необходимыми и достаточными условиями стабилизации материала, находящегося в неравновесном, структурно-неустойчивом состоянии, динамика которого описывается системой уравнений (2.11).

2.5. Результаты компьютерного моделирования. Проведем компьютерное моделирование динамики исследуемого материала. С этой целью найдем решение системы уравнений (2.11) для случая, когда

$$L = 0.6 \text{ м}, \quad M = 5 \text{ кг}, \quad \rho = 0.2 \times 10^5 \text{ кг/м}^3, \quad E = 0.1 \times 10^6 \text{ Н/м}^2. \tag{2.35}$$

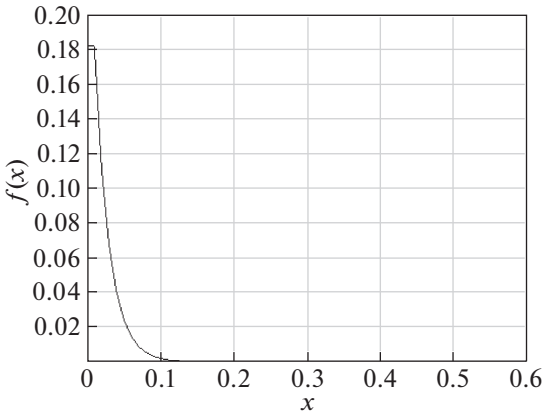

Рис. 9. Распределение отклонений по длине материала при $t = 0$

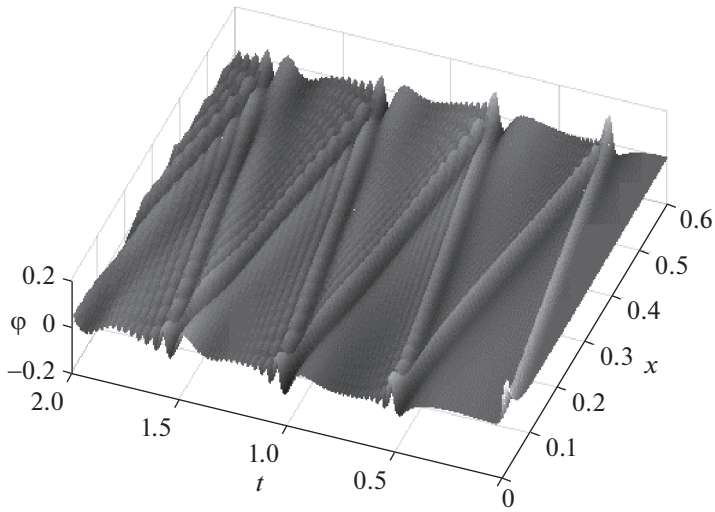

Рис. 10. Динамика материала при выполнении условий стабилизации

Пусть начальные условия из системы (2.11) имеют вид, приведенный на рис. 9 и формализуемый следующим образом:

$$\begin{cases} f(x) = 0.3e^{-0.5x}, \\ g(x) = 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

а параметры управления:

$$A = 0.1055, \quad B = 11.4663. \tag{2.37}$$

Заметим, что параметры системы (2.35) и коэффициенты управления (2.37) удовлетворяют условиям стабилизации (2.17) и (2.34). Численное решение системы (2.11) представлено на рис. 10.

Изменим коэффициент управления (2.37), пусть $A = 0.0455$, при этом перестанет выполняться условие (2.17). Решение системы (2.11) тогда будет иметь вид, описанный на рис. 11.

Вернем коэффициенты управления (2.37) и изменим массу материала (2.35). Пусть $M = 3.2$ кг, при этом перестанет выполняться условие (2.34). Решение системы (2.11) в этом случае будет иметь вид, приведенный на рис. 12.

Как видно из рис. 10–12, численное моделирование подтверждает необходимость выполнения условий стабилизации (2.17) и (2.34), а при невыполнении хотя бы одного из них исследуемый материал с течением времени разбалансируется и теряет устойчивость.

2.6. Упругие волны. Как и в случае дискретной системы обратных связанных маятников в исследуемом материале при определенных начальных условиях в процессе стабилизации также

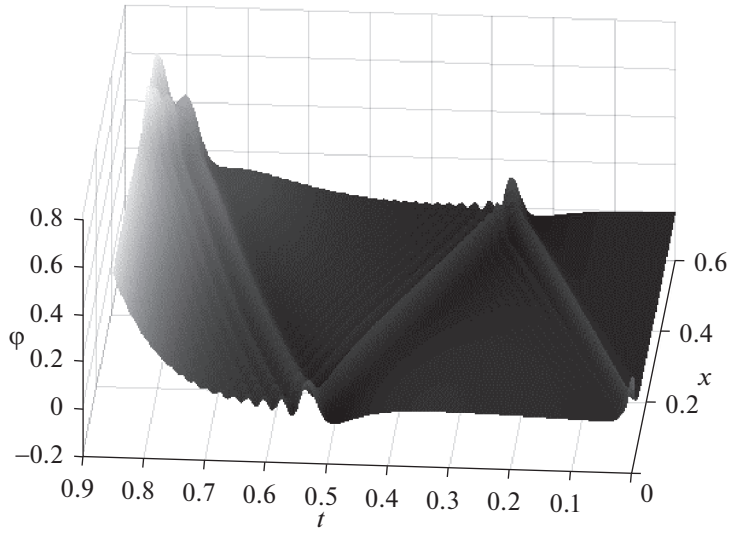

Рис. 11. Динамика материала при невыполнении условия (2.17) и выполнении (2.34)

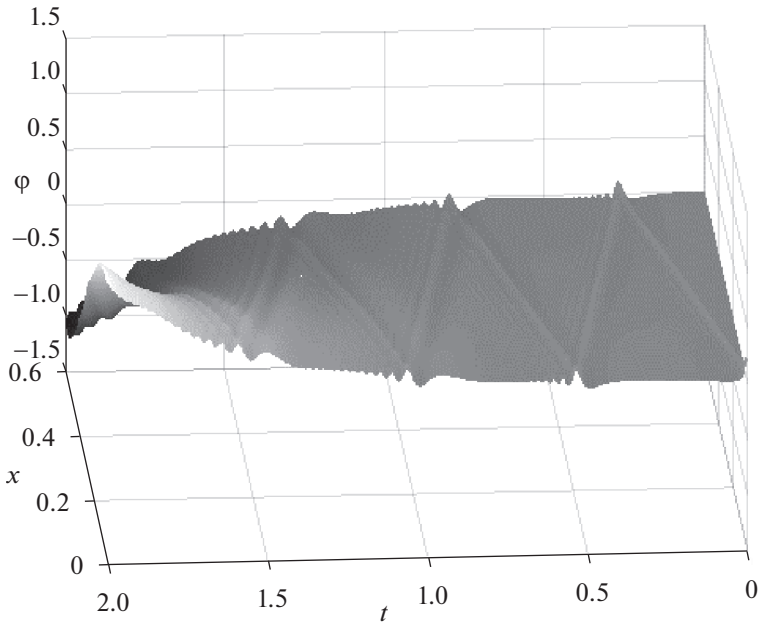

Рис. 12. Динамика материала при выполнении условия (2.17) и невыполнении (2.34)

возникают упругие волны, что демонстрируют результаты компьютерного моделирования (рис. 10–12).

Скорость упругих волн в материале, как указывалось ранее, можно определить с помощью равенства

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2.38}$$

а время, за которое волна проходит от одного конца материала до его другого конца, равно

$$T_v = \frac{2L}{V}. \tag{2.39}$$

Из параметров (2.35) можно найти $V = 2.2361$ м/с, $T_v = 0.54$ с. Это также полностью согласуется с результатом моделирования динамики материала, изображенном на рис. 10.

3. Дискретная система с нелинейными связями. 3.1. Математическая модель. Рассмотрим систему связанных обратных маятников из разд. 1.1. Представленная выше математическая модель предполагает линейный характер связей между обратными маятниками. Проведем исследование аналогичной механической системы с наличием нелинейности. С этой целью опишем модель, в которой сила жесткости, действующая со стороны пружины на каждый маятник системы, имеет нелинейный характер и описывается следующим равенством:

$$F^{(k)} = k_1\Delta x + k_2\Delta x^3, \tag{3.1}$$

где k_1 и k_2 – линейный и нелинейный коэффициенты жесткости, а Δx – удлинение пружины.

С учетом (3.1) система уравнений (1.5) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega^2\varphi_1 + a_1(\varphi_2 - \varphi_1) + a_2(\varphi_2 - \varphi_1)^3 - c, \\ \ddot{\varphi}_i = \omega^2\varphi_i + a_1(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + a_2[(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^3 - (\varphi_i - \varphi_{i-1})^3] - c, \\ \ddot{\varphi}_n = \omega^2\varphi_n - a_1(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - a_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^3 - c, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $a_1 = k_1/m$, $a_2 = k_2/m$, $c = u/l$.

Проводя аналогичные разд. 1.2 преобразования, можно показать, что для нелинейной системы (3.2) также справедливо условие стабилизации (1.14) в случае использования управления по принципу обратной связи (1.7). Однако следует отметить, что условие (1.14), описывающее параметры управляющего воздействия, является необходимым, но не достаточным условием стабилизации системы (3.2). Для успешной стабилизации также необходимо дополнительное условие, описывающее параметры непосредственно самой механической системы, аналогичное (1.19). В силу нелинейности системы (3.2) подобное условие получить весьма затруднительно, поэтому с целью упрощения анализа динамики будем считать параметры механической системы подборными на этапе проведения численного эксперимента.

3.2. Результаты компьютерного моделирования. Проведем компьютерное моделирование динамики исследуемой нелинейной механической системы. С этой целью найдем решение системы уравнений (3.2) для случая, когда

$$\begin{gathered} m = 0.1 \text{ кг}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad n = 40, \\ \varphi_1(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0.1 \text{ рад/с} \\ \varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{2,n}, \\ k_1 = 200 \text{ Н/м}, \quad k_2 = 10^5 \text{ Н/м}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

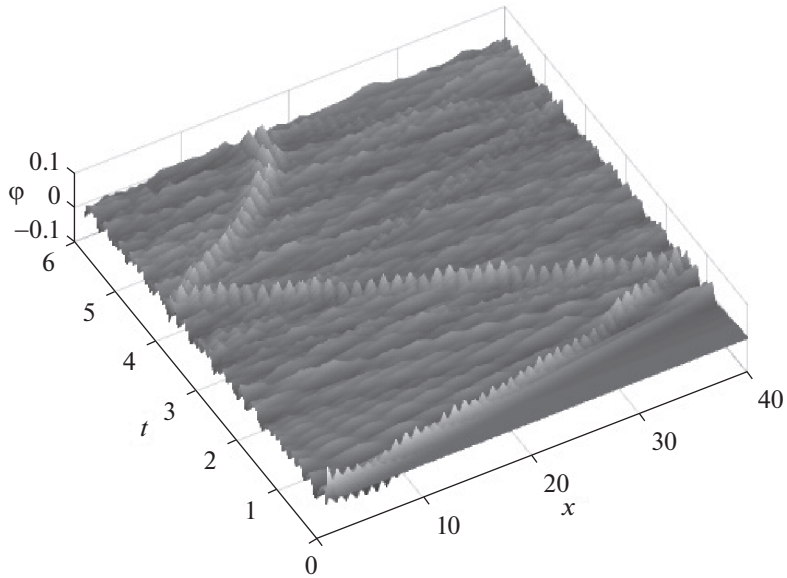

Рис. 13. Динамика системы с параметрами (3.3)

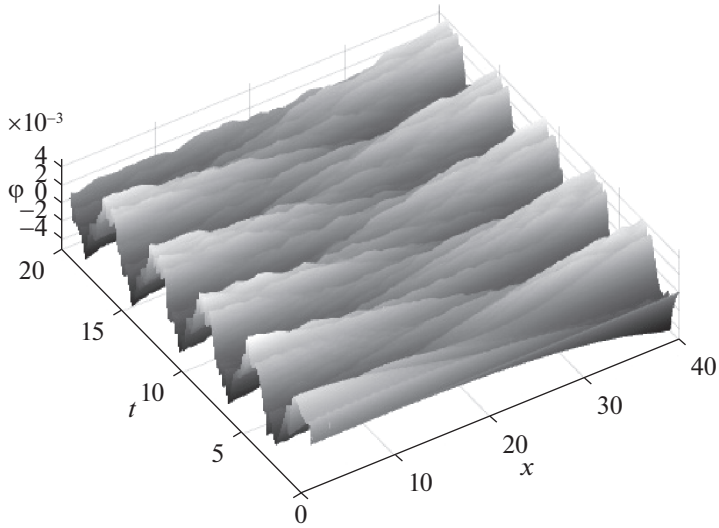

Рис. 14. Динамика системы с параметрами (3.4)

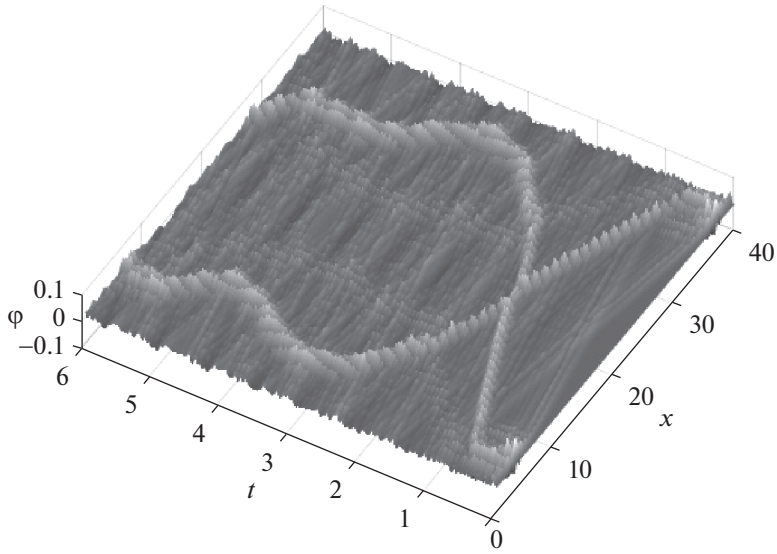

Рис. 15. Динамика системы с параметрами (3.5)

Решение будем искать с помощью одношагового метода Рунге–Кутта 5-го порядка. Далее рассмотрим случаи, когда управляющее воздействие удовлетворяет условию стабилизации (1.14). Результат компьютерного моделирования представлен на рис. 13.

Изменим начальные условия (3.3) следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi_1(0) = 0.1 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0 \text{ рад/с}, \\ \varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{2,n}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Динамика системы для (3.4) показана на рис. 14.

Изменим начальные условия следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\varphi}_4(0) = 0.1 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_{37}(0) = 0.1 \text{ рад/с}, \\ \varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{1,n} \wedge i \neq 4 \wedge i \neq 37.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Динамика системы для (3.5) представлена на рис. 15.

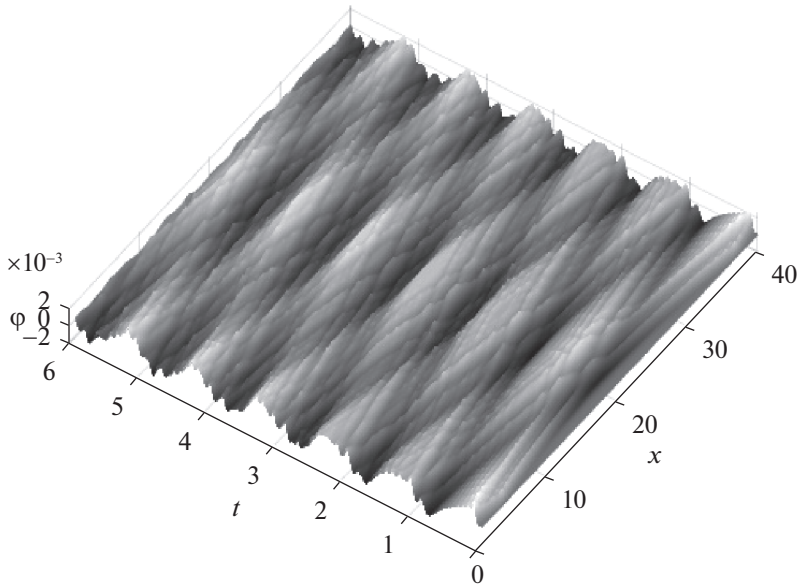

Рис. 16. Динамика системы с параметрами (3.6)

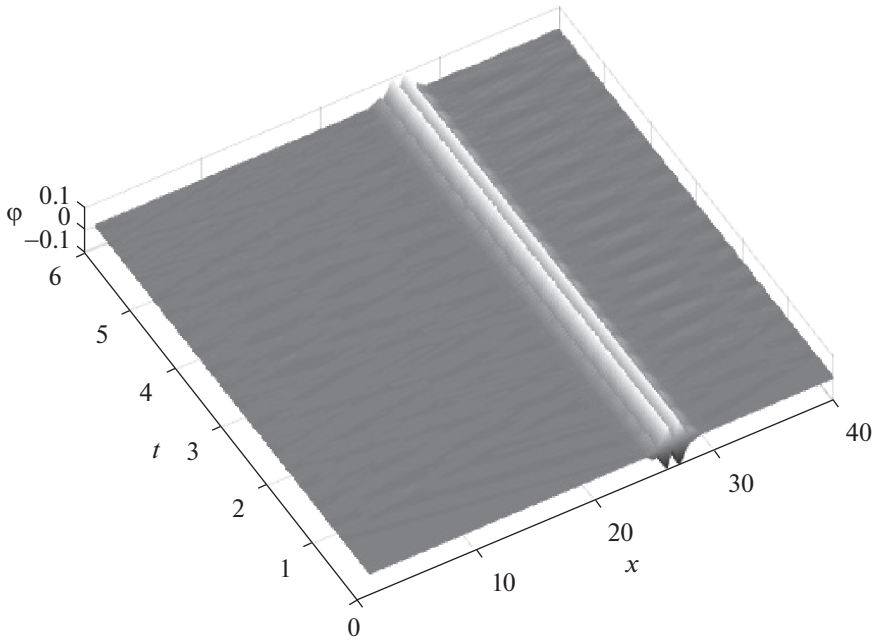

Рис. 17. Динамика системы с параметрами (3.7)

Изменим начальные условия следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi_4(0) = 0.1 \text{ рад}, \quad \varphi_{37}(0) = 0.1 \text{ рад/с}, \\ \varphi_i(0) = 0 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{1,n} \wedge i \neq 4 \wedge i \neq 37.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Динамика системы для случая (3.6) описана на рис. 16.

Изменим начальные условия следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\varphi}_{26}(0) = 0.1 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi}_{27}(0) = -0.1 \text{ рад/с}, \\ \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad i = \overline{1,n} \wedge i \neq 26 \wedge i \neq 27.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Динамика системы для (3.5) показана на рис. 17.

Таким образом, как видно из результатов компьютерного моделирования динамики системы (3.2), при ненулевом начальном отклонении и нулевой начальной скорости одного или нескольких маятников помимо линейных упругих волн имеют место также нелинейные колебания. В случае же нулевого начального отклонения и ненулевой начальной скорости система демонстрирует нелинейное поведение, характеризующееся появлением нелинейных локальных возмущений, имеющих динамику, сходную с динамикой уединенных нелинейных волн (солитонов) [39, 40]. Отметим также, что характер динамики таких солитоноподобных волн крайне чувствителен к малым изменениям параметров системы и, как следствие, к погрешностям вычислений, что в свою очередь приводит к зависимости от выбранного численного метода решения.

Заключение. Проведено обобщение системы связанных маятников для произвольного числа упругосвязанных перевернутых маятников, а также выполнен переход от дискретной к непрерывной системе, описывающей материал, который находится в неравновесном, структурно-неустойчивом состоянии. Исследованы динамические характеристики указанных систем в случае управления, формируемого по принципу обратной связи, найдены необходимые и достаточные условия их стабилизации. В частности, установлено условие устойчивости материала, являющегося континуальным аналогом системы из n обратных связанных маятников, которое заключается в следующем: необходимо, чтобы время прохождения упругих волн от одного конца материала до другого и обратно не превышало периода его собственных колебаний. Проведено компьютерное моделирование динамики изучаемых систем, результаты которого иллюстрируют теоретические построения. Также выполнено исследование динамики системы перевернутых связанных маятников с нелинейными связями. В результате было показано, что представленная система при определенных параметрах и начальных условиях демонстрирует нелинейное поведение, характеризующееся появлением локальных возмущений, которые имеют динамику, сходную с динамикой солитонов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boubaker O.* The Inverted Pendulum: a Fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics // Intern. Conf. on Education and e-Learning Innovations (ICEELI 2012). Sousse, Tunisia, 2012. P. 1–6.
2. *Chang L.H., Lee A.C.* Design of Nonlinear Controller for Bi-axial Inverted Pendulum System // IET Control Theory Appl. 2007. V. 1. P. 979–986.
3. *Dadios E.P., Fernandez P.S., Williams D.J.* Genetic Algorithm on Line Controller for the Flexible Inverted Pendulum Problem // J. Adv. Comput. Intell. Intell. Inform. 2006. V. 10. P. 155–160.
4. *Li G., Liu X.* Dynamic Characteristic Prediction of Inverted Pendulum Under the Reduced-gravity Space Environments // Acta Astronaut. 2010. V. 67. P. 596–604.
5. *Lozano R., Fantoni I., Block D.J.* Stabilization of the Inverted Pendulum Around its Homoclinic Orbit // Syst. Control Lett. 2000. V. 40. P. 197–204.
6. *Tang J., Ren G.* Modeling and Simulation of a Flexible Inverted Pendulum System // Tsinghua Sci. Technol. 2009. V. 14 (Suppl. 2). P. 22–26 .
7. *Wang J.J.* Simulation Studies of Inverted Pendulum Based on PID Controllers // Simul. Model. Pract. Theory. 2011. V. 19. P. 440–449.
8. *Semenov M.E., Abbas Z.H., Ishchuk I.N., Kanishcheva O.I., Meleshenko P.A.* State-feedback Control Principles for Inverted Pendulum with Hysteresis in Suspension // J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2016. № 4 (9). P. 498–509.
https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-498-509
9. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.* Elastic Inverted Pendulum with Backlash in Suspension: Stabilization Problem // Nonlinear Dyn. 2015. V. 82. P. 677.
https://doi.org/10.1007/s11071-015-2186-y
10. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Kanishcheva O.I.* Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum via Hysteresis Control: the Bouc-Wen approach // Vibration Engineering and Technology of Machinery: Proceedings of VETOMAC XV 2019. Springer International Publishing, 2021. P. 267–279.
11. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М.* Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. 58–82.
https://doi.org/10.31857/S0002338820030099
12. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.* Stabilization of Coupled Inverted Pendula: From Discrete to Continuous Case // J. Vibration and Control. 2021. V. 27. № 1–2. P. 43–56.
13. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Popov M.A., Meleshenko P.A.* Coupled Inverted Pendulums: Stabilization Problem // J. Archive of Applied Mechanics. 2018. V. 88. № 4. P. 517–524.
https://doi.org/10.1007/s00419-017-1323-0
14. *Meleshenko P.A., Semenov M.E., Klinskikh A.F.* Conservative Chaos in a Simple Oscillatory System with Nonsmooth Nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 101. № 4. P. 2523–2540.
15. *Bortoff S., Spong M.W.* Pseudolinearization of the Acrobot Using Spline Functions // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Tucson, 1992. P. 593–598.

16. *Spong M.W.* The Swing up Control Problem for the Acrobot // IEEE Control Systems Magazine. 1995. V. 15. № 1. P. 49–55.
17. *Olfati-Saber R.* Control of Underactuated Mechanical Systems with two Degrees of Freedom and Symmetry // Proc. American Control Conf. Chicago, 2000. V. 6. P. 4092–4096.
18. *Olfati-Saber R.* Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems with Symmetry // IEEE Trans. on Automat. Control. 2002. V. 47. № 2. P. 305–308.
19. *Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче управления перевернутым двойным маятником с использованием одного управляющего момента // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 6. С. 28–45.
20. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 121–128.
21. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
22. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
23. *Wai R.J., Kuo M.A., Lee J.D.* Design of Cascade Adaptive Fuzzy Sliding-mode Control for Nonlinear Two-axis Inverted-pendulum Servomechanism // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2008. V. 16. № 5. P. 1232–1244. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924277
24. *Wei H., Qian Q., Qiang H.* Optimization of Sliding Mode Controller for Double Inverted Pendulum Based on Genetic Algorithm // 2008 2nd Intern. Sympos. on Systems and Control in Aerospace and Astronautics. Shenzhen, China, 2008.
https://doi.org/10.1109/ISSCAA.2008.4776281
25. *Chaoui H., Sicard P.* Motion and Balance Neural Control of Inverted Pendulums with Nonlinear Friction and Disturbance // 2011 24th Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering (CCECE). Niagara Falls, Ontario, Canada, 2011.
https://doi.org/10.1109/CCECE.2011.6030657.
26. *Haibo He, Zhen Ni, Jian Fu.* A Three-network Architecture for On-line Learning and Optimization Based on Adaptive Dynamic Programming // Neurocomputing. 2012. V. 78. № 1. P. 3–13.
https://doi.org/10.1016/j.neucom.2011.05.031
27. *Zhong W., Rock H.* Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart // Control Applications. (CCA '01). Proceedings of the IEEE Intern. Conf. Mexico City, Mexico, 2001
https://doi.org/10.1109/CCA.2001.973983.
28. *Chernous'ko F.L., Reshmin, S.A.* Time-optimal Swing-up Feedback Control of a Pendulum // Nonlinear Dynamics. 2007. V. 47. P. 65–73.
https://doi.org/10.1007/s11071-006-9059-3
29. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
30. *Reshmin S.A., Chernous'ko F.L.* Properties of the Time-optimal Feedback Control for a Pendulum-like System // J. Optimization Theory and Applications. 2014. V. 163. № 1. P. 230–252.
https://doi.org/10.1007/s10957-013-0480-8
31. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
https://doi.org/10.31857/S000233880002843-6
32. *Reshmin S.A., Chernous'ko F.L., Ananievski I.M.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 408 p.
33. *Ivanenko Y.P., Dominici N., Cappellini G., Dan B., Cheron G., Lacquaniti F.* Development of Pendulum Mechanism and Kinematic Coordination from the First Unsupported Steps in Toddlers // J. Experimental Biology. 2004. V. 207. P. 3797–3810.
https://doi.org/10.1242/jeb.01214
34. *Losurdo G.* An Inverted Pendulum Preisolator Stage for the VIRGO Suspension System // Review of Scientific Instruments. 1999. V. 70. № 5. P. 2507–2515.
https://doi.org/10.1063/1.114978
35. *Scott A., Sørensen M.P., Christiansen P.L.* Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. Oxford University Press, 1999. 474 p.
36. *Al-Gwaiz M.* Sturm-Liouville Theory and its Applications. London: Springer-Verlag, 2008. 264 p.
https://doi.org/10.1007/978-1-84628-972-9
37. *Zettl A.* Sturm-Liouville Theory // Mathematical Surveys and Monographs. 2005. V. 121.
https://doi.org/10.1090/surv/121
38. *Amrein W.O., Hinz A.M., Pearson D.B.* Sturm-Liouville Theory: Past and Present. Basel: Birkhäuser, 2005. 336 p.
https://doi.org/10.1007/3-7643-7359-8
39. *Semenov M.E., Reshetova O.O., Tolkachev A.V., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.* Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model // Topics in Nonlinear Mechanics and Physics. Singapore: Springer, 2019. P. 229–253.
40. *Tolkachev A.V., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Klinskikh A.F., Karpov E.A.* Sine-Gordon System with Hysteretic Links // J. Physics: Conference Series. V. 1096. № 1. P. 012072.

EDN: XXVUJZ
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 22–28

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5.037

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ[1]

© 2022 г. И. Н. Барабанов[a,*], В. Н. Тхай[a,]**

[a] *ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

**e-mail: ivbar@ipu.ru*

***e-mail: tkhaivn@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 21.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматриваются связанные консервативные системы, каждая из которых в отсутствие связи допускает семейство одночастотных колебаний. Решается задача стабилизации колебания всей системы. Находятся гладкие автономные универсальные связи-управления, строится орбитально асимптотически устойчивый цикл, устанавливается естественная стабилизация цикла, выводится синхронизация колебаний консервативных систем по частоте и фазе.

DOI: 10.31857/S0002338822020056

Введение. Фазовое пространство механической системы, подверженной действию позиционных сил, симметрично относительно неподвижного множества системы $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$, где q – обобщенная координата. Одночастотные колебания относятся к классу симметричных периодических движений (СПД). Поэтому в рамках самой модели механической системы с позиционными силами колебания не могут быть орбитально асимптотически устойчивыми. Для того, чтобы добиться такой устойчивости, необходимо прилагать силу, нарушающую симметрию фазового портрета системы. В случае равновесия для этой цели используется диссипация Релея.

Дополнительная сила действует как управление, и тем самым ставится задача стабилизации колебания управляемой механической системы. В случае малой силы стабилизируемое колебание будет близким к колебанию самой механической системы. Малая сила обычно приводит к локальной стабилизации. Однако существуют такие системы, где действие малой силы оказывает глобальный стабилизирующий эффект, в частности, это происходит в уравнении Ван дер Поля. Оказывается, для отдельной механической системы управление типа Ван дер Поля носит универсальный характер [1, 2]. Гладкое управление дается нелинейной функцией, приводящей к диссипации в каждой текущей точке цикла.

В настоящее время в различных областях знаний активно исследуются связанные системы. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда, некоторые другие примеры находятся в [3–12]. Предметом дальнейшего рассмотрения в статье будут связанные механические системы.

При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы, в [13] предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебаний связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений. Встает вопрос о реализации такой связи-управления на основе универсального управления, предложенного для отдельной системы в [1, 2].

В работе рассматриваются слабо связанные консервативные механические системы. Предполагается, что в каждой из них в отсутствие связи существует семейство невырожденных периодических движений, пересечение которых образует подобное семейство для всех систем. Находятся структура и конкретный вид универсальных связей–управлений, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания. Показывается, что в цикле

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00146).

происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе. При этом сначала подробно исследуется отдельная система; результаты обобщаются на связанные консервативные системы.

1. Многомерная механическая система как связанная система. Для описания механической системы используются уравнения Лагранжа второго рода; q – обобщенная координата. Предполагается, что система подвержена действию позиционных сил (потенциальных и неконсервативно позиционных) и допускает периодическое движение. В силу симметрии фазового пространства относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ скорость $\dot{q}$ на M обращается в ноль, а само периодическое движение является симметричным относительно M и представляет собой СПД.

Необходимые и достаточные условия существования СПД с периодом T даются равенствами

$$\dot{q}_s(q_1^0, \ldots, q_n^0, \tau) = 0; \quad \tau = 0, T/2; \quad s = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где q^0 – начальная точка при $t = 0$. Отсюда следует, что СПД образуют семейства, например, по параметру T.

Используется следующее определение невырожденного СПД.

О п р е д е л е н и е. Случай $\operatorname{rank}\|\partial\dot{q}(q^0, T/2)/\partial q^0\| = n$ называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Согласно определению, колебания математического маятника будут невырожденными, а колебания линейного осциллятора – вырожденными.

Невырожденные СПД в фазовом пространстве заполняют инвариантное двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$; период на семействе СПД монотонно зависит от одного параметра [14]. Такая ситуация типична для семейства невырожденных СПД. В консервативной системе за параметр h семейства колебаний Σ обычно выбирается постоянная интеграла энергии; на Σ обобщенная координата описывается формулой $q = \varphi(h, t + \gamma)$, где γ – временной сдвиг на траектории. При $\gamma = 0$ координата q дается четной функцией времени t.

Доказывается, что семейство невырожденных СПД в многомерной системе описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, из условий (1.1) при $\tau = T/2$ следуют линейные равенства

$$d\xi_s \equiv b_{s1}(q^0, \tau)dq_1^0 + \ldots + b_{sn}(q^0, \tau)dq_n^0 + c_s(q^0, \tau)dt = 0,$$
$$B = \left\|b_{sj}(q^0, \tau)\right\|, \quad b_{sj}(q^0, \tau) = \partial\dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial q_j^0,$$
$$C = \left\|c_s(q^0, \tau)\right\|, \quad c_s = \partial\dot{q}_s(q^0, \tau)/\partial t = \ddot{q}_s(q^0, \tau); \quad s, j = \overline{1, n},$$

которые выполняются тождественно на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства невырожденных СПД справедливо условие $\det B = n$, а вектор ускорения $C = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ на СПД отличен от нулевого. Поэтому посредством линейного преобразования $d\eta = Pd\xi$, $d\xi = (d\xi_1, \ldots, d\xi_n)^{\mathrm{T}}$, с постоянной матрицей $P = \|p_{sj}\|$, удовлетворяющй условиям $d\eta_2 = 0, \ldots, d\eta_n = 0$, в векторной форме $d\eta$ выделяется форма $d\eta_1$. Преобразование справедливо для любой точки (q^0, τ), поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. Тогда на $\tilde{\Sigma}$ получается:

$$d\eta_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{1j}(q^0, \tau)dq_j^0 + \tilde{c}_1(q^0, \tau)dt = 0,$$
$$d\eta_k(q^0, \tau) = 0, \quad k = \overline{2, n}, \tag{1.2}$$
$$\tilde{c}_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{1j}c_j(q^0, \tau).$$

Для семейства Σ невырожденных СПД найденное линейное преобразование означает существование координат $w_1, \ldots, w_n$, таких, что $n-1$ из них на Σ принимают нулевые значения:

$w_2 = 0,\ldots,w_n = 0$. Начальная точка q^0 на Σ является функцией одного параметра, например начального значения w_1^0 переменной w_1. Поэтому из первого равенства в (1.2) получается

$$\ddot{w}_1 + \tilde{c}_1 w_1 = 0,$$

и динамика на $\tilde{\Sigma}$ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Таким образом, в механической системе с $n > 1$ степенями свободы всегда выделяется консервативная система с одной степенью свободы, в которой, собственно, и реализуется семейство Σ. Поэтому многомерная система может рассматриваться как связанная система.

2. Конструирование управляемой механической системы. Пусть рассматриваемая консервативная система допускает семейство Σ невырожденных СПД по параметру h – постоянной интеграла энергии. Ему отвечает пара нулевых характеристических показателей (ХП) в жордановой клетке. Остальные ХП в консервативной системе образуют пары чисел противоположного знака. При действии малого управления одно из чисел в паре, находясь в положительной полуплоскости, остается в этой полуплоскости. Поэтому необходимым условием стабилизации цикла является принадлежность всех ХП мнимой оси. При выполнении этого условия в [1, 2] строится управляемая механическая система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом. В [2] доказывается существование искомого управления для системы с n степенями свободы. В [1] указывается конкретный вид управления при $n = 1$. Однако матрица для управления в случае $n > 1$ в [1], [2] не находится. Согласно разд. 1, многомерная система содержит связанные подсистемы, поэтому для управления этой системой необходимо находить связи-управления. Структура и конкретный вид связей-управлений также нужны при рассмотрении связанных консервативных систем.

В окрестности $\tilde{\Sigma}$ механическая система описывается в обобщенных координатах переменными (x, y), где $x = w_1$, $y = (w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm{T}}$. Тогда, согласно [2], в консервативной системе на $\tilde{\Sigma}$ используется универсальное управление с функцией $(1 - Kx^2)\dot{x}$, где K – постоянная, отвечающая энергии h^* для цикла. Для построения цикла периода T^* с энергией h^* на семействе Σ по параметру h используется зависимость $K(h^*)$.

В консервативной системе полная механическая энергия редуцированной системы по переменной x обозначается через E_x; она изменяется по закону

$$\frac{dE_x}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \tag{2.1}$$

где число σ равно $+1$ или -1; ε – коэффициент усиления, близкий к нулю для слабой связи. На траекториях системы $E_x = E_x(h,t)$. Равенство нулю интеграла от функции $E_x(h,t)$ на отрезке $[0, T^*]$ является необходимым условием существование цикла. Согласно [1], при выборе числа σ из условия $\sigma dK(h^*)/dh < 0$ выполняется достаточное условие, и на $\tilde{\Sigma}$ реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл, отвечающий энергии h^*. На цикле функция $E_x = E_x^c(t)$ становится периодической: ее среднее за период значение $\bar{E}_x^c(t) = h^*$.

Для полной механческой энергии E всей системы справедлив закон изменения

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \dot{y}^2 = \sum_{j=2}^{n}\dot{w}_j^2.$$

Согласно [2], во всей системе реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл, совпадающий с циклом на $\tilde{\Sigma}$. Для E_y – разности энергий $E - E_x$ – справедливо равенство

$$\frac{dE_y}{dt} = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{y}^2. \tag{2.2}$$

Из сравнения законов (2.1) и (2.2) следует, что при $E_x \to E_x^c(t)$ функция $E_y \to 0$ и траектория управляемой системы из окрестности $\tilde{\Sigma}$ стремится к циклу.

Управление $\varepsilon(1 - Kx^2)\dot{w}$ (с учетом обозначения $w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$) в преобразованной консервативной системе дается знакоположительной формой

$$\sum_{s=1}^{n} w_s^2.$$

Линейное преобразование в разд. 1 проводится с постоянной матрицей P, поэтому оно не меняет знака квадратичной формы. Следовательно, в исходных переменных получается управление со знакоположительной формой

$$R = \frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j > 0, \quad r_{sj} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, связь-управление с функциями

$$u_s = (1 - K(h^*)x^2)\sum_{s,j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_j, \quad s = \overline{1,n},$$

задаваемыми положительно-определенной квадратичной формой R, гарантирует существование в отдельной управляемой консервативной системе орбитально асимптотически устойчивого цикла, близкого к СПД системы с энергией $h = h^*$.

Заметим, что задача нахождения связи-управления для многомерной системы, поставленная в [2], получила решение.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений [15]

$$\begin{gathered}\ddot{\theta}_1 + \sin\theta_1 + \kappa(1 - 1/f)\left(\frac{c^2}{4}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{c}{2}\cos\theta_1\right) = 0,\\ \ddot{\theta}_2 + \sin\theta_2 + \kappa(1 - 1/f)\left(-\frac{c^2}{4}\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{c}{2}\cos\theta_2\right) = 0,\\ f^2 = 1 + \frac{c^2}{2} - c\sin\theta_1 + c\sin\theta_2 - \frac{c^2}{2}\cos(\theta_2 - \theta_1),\end{gathered} \tag{2.3}$$

описывающую движение двух связанных пружиной жесткости κ неуправляемых идентичных маятников, точки подвесов которых лежат на горизонтальной прямой; $\theta_{1,2}$ – углы отклонения маятников от вертикали, c – отношение расстояния от точки крепления маятника к ее длине. Система (2.3) допускает интегральное многобразие $\tilde{\Sigma}$:

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad x = (\theta_1 + \theta_2)/2, \quad y = (\theta_1 - \theta_2)/2 \equiv 0,$$

которое описывает движение двух маятников как одного целого (пружина недеформирована). Для этого многообразия строится управляемая система

$$\begin{gathered}\ddot{x} + \sin x = \sigma\varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{x},\\ \ddot{y} + y\left(1 + \frac{\kappa c^2}{2}\right)\cos x + \ldots = \sigma\varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{y},\end{gathered} \tag{2.4}$$

в которой во втором уравнении явно выписываются только линейные по y слагаемые.

Для математического маятника характеристика $K(h)$ дается в [16]: функция монотонно убывает. Поэтому $\sigma = 1$.

Система (2.4) с $\sigma = 1$ допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл, близкий к колебанию с энергией h^* на многообразии $\tilde{\Sigma}$, если ХП уравнения по y принадлежат мнимой оси.

3. Связанные консервативные системы. Рассматриваются m консервативных систем, где i-я система описывается координатой q^i и в отсутствие связей допускает семейство Σ^i невырожденных СПД. Предполагается, что для Σ^i выполняются условия принадлежности ХП мнимой оси, а множество условно-периодических движений $\cup\Sigma^i$ содержит семейство невырожденных СПД. Применяются слабые связи, что гарантируется малостью параметра ε. Исследуется связанная систе-

ма, в которой все подсистемы входят равноправно. Для нее применяются связи, полученные обобщением слабых связей для одной системы.

В каждой консервативной системе выделяется многообразие $\tilde{\Sigma}^i$, на котором движение по координате x^i описывается системой с одной степенью свободы. В окрестности $\tilde{\Sigma}^i$ используются координаты x^i и y^i. В отдельной системе диссипация $\varepsilon(1-K(x^i)^2)\dot{x}^i$ вводится в окрестности цикла, на котором $y^i = 0$. В связанной системе на цикле $y^i = 0$, $i = \overline{1,m}$. При этом квадрат радиуса для цикла равен

$$\rho = \sum_{i=1}^{m}(x^i)^2.$$

Поэтому в переменных x^i, y^i связующие функции с помощью коэффициентов σ_i, принимающих значения $+1$ или -1, приобретают вид

$$\begin{gathered} u_x^i = \sigma_i(1-K\rho(h,t))\dot{x}^i, \\ u_y^i = \sigma_i(1-K\rho(h,t))\dot{y}^i, \quad i = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Постоянная K находится по значению h полной механической энергии E, равной сумме энергий рассматриваемых консервативных систем.

С учетом функций (3.1) в связанной системе законы изменения энергий E_x^i и E_y^i во всех подсистемах даются равенствами

$$\frac{dE_x^i}{dt} = \varepsilon\sigma_i(1-K\rho(h,t))(\dot{x}^i)^2, \quad \frac{dE_y^i}{dt} = \varepsilon\sigma_i(1-K\rho(h,t))(\dot{y}^i)^2, \tag{3.2}$$

где индивидуальный для i-й системы коэффицент σ_i обеспечивает в отдельной системе существование орбитально асимптотически устойчивого цикла.

При $y^i \equiv 0$, $i = \overline{1,m}$, подсистема уравнений по переменным x^i отщепляется, образуя редуцированную связанную систему

$$\ddot{x}^i + f(x^i) = \varepsilon\sigma_i(1-K\rho)\dot{x}^i, \tag{3.3}$$

допускающую в отсутствии связей семейство СПД по параметру h. Для полной механической энергии

$$E_x = \sum_{i=1}^{m}E_x^i$$

системы (3.3) из m консервативных систем с одной степенью свободы справедлив закон

$$\frac{dE_x}{dt} = \varepsilon[1-K(h^*)\rho(h,t)]\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(\dot{x}^i(h,t))^2.$$

Отсюда при интегрировании на отрезке $[0,T^*]$ получается необходимое условие

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*}E_x(h,t)dt = 0$$

существования цикла с периодом T^*.

Вычисляется приращение ΔE_x энергии E_x на отрезке $[0,T^*]$:

$$\begin{gathered} \Delta E_x = \varepsilon\chi\nu(h-h^*) + o(\varepsilon), \\ \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{T^*}\rho(h^*,t)\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(\dot{x}^i(h^*\,t))^2dt. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Формула (3.4) справедлива при малых приращениях $\Delta h = h - h^*$. Из нее следует, что при $\chi\nu \neq 0$ выполняется достаточное условие существование цикла: верно условие $dI(h^*)/dh \neq 0$ простоты

корня h^* амплитудного уравнения $I(h) = 0$ [2]. При $\chi\nu < 0$ в каждом временном отрезке длиной T^* знак приращения энергии противоположен знаку приращения Δh. Значит, траектории системы (3.3) асимптотически приближаются к поверхности уровня энергии $h = h^*$, отвечающей циклу. При этом изменение энергий E_x^i описывается первой группой законов в (3.2).

На цикле связанной системы функции $E_x^i = E_x^{ic}(t)$ и $E_y^i = E_y^{ic}(t)$ имеют период T^*; он отвечает значению

$$h^* = \sum_{i=1}^{n} h_i^*;$$

h_i^* – значение энергии в i-й системе для цикла связанной системы. Числа $h_i^*(h^*)$ единственным образом вычисляются через энергию h^*.

Закон для E_x^i в (3.2) обеспечивает достижение в цикле среднего значения энергии E_x^i, равного h_i^*. При этом стремление траекторий происходит по одной скалярной переменной x^i. Стремление траекторий к уровню $h = h^*$ по всем переменным x^i, $i = \overline{1,n}$, приводит к орбитальной асимптотической устойчивости цикла редуцированной системы (3.3). Законы для E_y^i в (3.2), как и в случае отдельной системы, обеспечивают принадлежность цикла именно редуцированной системе (3.3).

Таким образом, получается следующий основной вывод. Задача конструирования орбитально асимптотически устойчивого цикла в связанной консервативной системе решается малыми связями-управлениями с функциями

$$u_s^i = \sigma_i(1 - K(h^*)\rho)\sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i, \quad \rho = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(q_s^i)^2, \quad r_{sj}^i = \text{const}, \quad s = \overline{1,n_i}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.5}$$

в которых r_{sj}^i – коэффициенты знакоположительных квадратичных форм.

Орбитальная асимптотическая устойчивость цикла управляемой консервативной системы со связями-управлениями (3.5) приводит к естественной стабилизации этого цикла. При этом в цикле реализуется синхронизация колебаний отдельных консервативных систем по частоте и фазе.

В частном случае основной вывод справедлив для связанных консервативных систем с одной степенью свободы.

Пример 2. Рассматриваются СПД – колебания слабо связанных идентичных маятников с кратными друг другу частотами. Строится управляемая система

$$\ddot{\theta}_i + \sin\theta_i = \sigma_i\varepsilon\tilde{o}[1 - K(h^*)\rho(h,t)]\dot{\theta}_i, \quad i = 1,2 \quad \rho = \theta_1^2 + \theta_2^2, \tag{3.6}$$

где h – энергия системы маятников, h^* – значение энергии для рассматриваемого СПД.

Для отдельного математического маятника характеристика $K(h)$ дается в [16]: функция монотонно убывает, поэтому $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Для системы из двух маятников получается характеристика $K(h)/2$.

Система (3.6), в которой $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл, близкий к колебанию маятников с энергией h^*.

Заключение. Предложен подход к стабилизации колебания связанных консервативных механических систем, использующий идею построения орбитально асимптотически устойчивого цикла. Реализация подхода приводит к естественной стабилизации колебания без привлечения иных управлений и одновременно – синхронизации колебаний систем по частоте и фазе. Найдены слабые связи-управления, имеющие универсальный характер. Подход применим как для многомерной консервативной системы, так и связанных консервативных систем. В [1] подход применяется к консервативной системе с одной степенью свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9 . С. 93–104.
3. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стрежня, вызванные кратковременным продольным ударом // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.
4. *Kovaleva A., Manevitch L.I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320. P. 1–8.
5. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
6. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. № 5. P. 794–803.
7. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
8. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
9. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. № 3. P. 271–282.
10. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270. P. 20–29.
11. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu.* Control of a System of Two Interacting Bodies on a Rough Inclined Plane // Proc. 15th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. M.: IEEE Xplore, 2020. https://ieeexplore.ieee.org/document/9140564. https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140564.
12. *Galyaev A., Lysenko P.* About Synchronization Problem of Group of Weakly Coupled Identical Oscillators // Proc. 15th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. M.: IEEE Xplore, 2020. https://ieeexplore.ieee.org/document/9140581. https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140581.
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.
14. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
15. *Евдокименко А.П.* О равновесных конфигурациях двух связанных маятников и их устойчивости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 47–58.
16. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // Intern. Scientific Conf. on Mechanics: 8th Polyakhov's Reading. Saint-Petersburg: AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. №. 030022. https://doi.org/10.1063/1.5034602.

EDN: UVEOBC
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 29–42

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК (629.7.018.7; 629.7.05).001.5

ГИПОТЕЗНАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ ВОЗДУШНЫХ И НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ ГРУППОЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2022 г. Л. Е. Широков

ГНЦ ФГУП ГосНИИАС, Москва, Россия

e-mail: shirokow.lev@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2021 г.
После доработки 08.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Решается задача повышения точности “скрытного” трассового сопровождения радио- и теплоизлучающих объектов на борту летательного аппарата путем субоптимальной оценки их фазовых координат многомерным нелинейным гипотезным фильтром. На вход фильтра подаются триангуляционные дальности, вычисляемые по критерию минимальной невязки измеренных пеленгов сопровождаемых объектов, полученных с борта другого летательного аппарата группы, и расчетных пеленгов этих объектов.

DOI: 10.31857/S0002338822020147

Введение. На борту летательного аппарата (ЛА) при наличии аппаратуры радиотехнической разведки (РТР), постов обнаружения теплового излучения оптиколокационной станции (ОЛС), бортовой радиолокационной станции (БРЛС), пеленгующей источники активных помех, “скрытно” имеем следующую измеренную информацию по радио- и теплоизлучающим воздушным и наземным объектам:

идентификатор РТР радиоэлектронной системы объекта, время измерения параметров сигнала, пеленг измерения в плоскости *XOZ* связанной системы координат (ССК), крен, тангаж, курс ЛА в момент измерения;

идентификатор ОЛС теплового излучения объекта, время измерения, пеленги измерения в ССК, крен, тангаж и курс ЛА в момент измерения;

идентификатор БРЛС постановщика активных помех (ПАП), время измерения, измеренные азимут и угол места ПАП.

Информация по координатам излучающих воздушных (ВО) и наземных (НО) объектов является неполной (неполное приборное обеспечение (НПО)). Не измеряется дальность, а в случае РТР не измеряется и второй пеленг в ССК. Комплексное гипотезное сопровождение [1, 2] излучающих ВО и НО на борту каждого ЛА группы формирует трассы этих объектов в двух системах координат ЛА: нормальной подвижной системе координат (НПСК), связанной с центром масс ЛА и стабилизированной по крену, и наземной системе координат (НСК) с началом в выбранной на ЛА “условной точке” с географическими координатами (λ_{ut}, φ_{ut}) [2].

Все основные процессы сопровождения (захват по первому измерению, ассоциация и фильтрация всех измерений, неоднозначная экстраполяция оценок фазовых координат) выполняются с помощью гипотезных трасс. Гипотезные трассы обеспечивают трассовое сопровождение ВО и НО при НПО.

По излучающим ВО на индикатор выдается (рис. 1):

нумерованный укороченный пеленг и наиболее вероятное местоположение на нем ВО, когда стандартная ошибка σ_D текущей дальности D больше $5\%D$ ($\sigma_D > 5\%D$) и полусфера еще не определена (НПО3) (рис. 1, *а*);

укороченный пеленг, наиболее вероятное местоположение на нем ВО с указанием полусферы, когда $\sigma_D > 5\%D$ и определена полусфера, но точность оценки вектора скорости $\sigma_\psi > 5°$ (НРО2 с признаком формирования курса $PR_FK = 0$) (рис. 1, *б*);

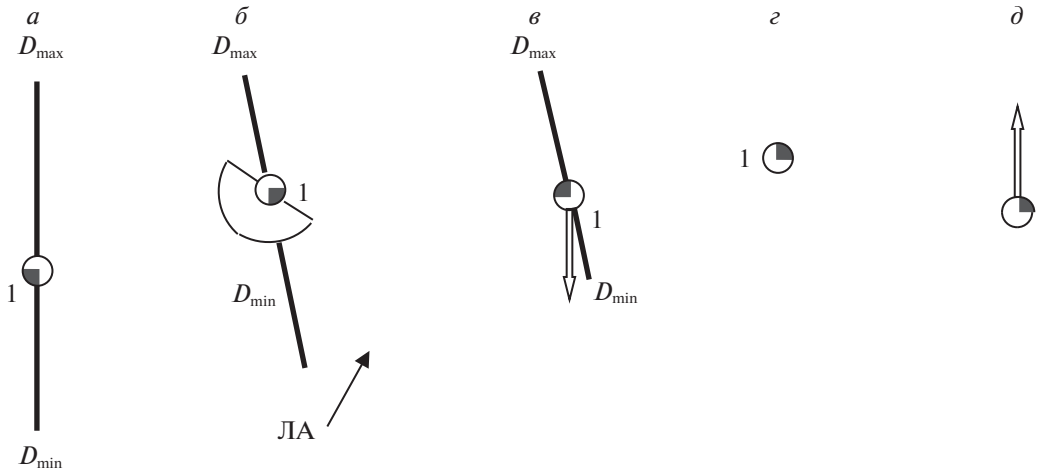

Рис. 1. *а* – НПО3, *б* – НПО2 (*PR_FK* = 0), *в* – НПО2 (*PR_FK* = 1), *г* – ППО (*PR_FK* = 0), *д* – ППО или НПО1 (*PR_FK* = 1)

Рис. 2

Рис. 3. *а* – абсолютная высота 10.1 км, горизонтальный полет, *б* – относительная высота 2.5 км, снижение

укороченный пеленг, наиболее вероятное местоположение на нем сопровождаемого объекта с вектором скорости, когда $\sigma_D > 5\%D$ и $\sigma_\psi \le 5°$ (НРО2 с признаком формирования курса *PR_FK* = 1) (рис. 1, *в*);

местоположение ВО с вектором скорости, когда $\sigma_D \le 5\%D$ и $\sigma_\psi \le 5°$ (НПО1) или полное приборное обеспечении (ППО с *PR_FK* = 1) (рис. 1, *д*);

местоположение ВО, когда при первом замере дальности *PR_FK* = 0 (рис. 1, *г*).

Признак приборного обеспечения *PR_PO* характеризует тип НПО: *PR_PO* = 1 при НПО1, *PR_PO* = 2 при НПО2, *PR_PO* = 3 при НПО3. При ППО *PR_PO* = 0.

Местоположение сопровождаемого объекта обозначается небольшим кругом с указанием всех текущих источников информации по этому объекту – БРЛС, ОЛС, РТР, КСС (комплекс средств связи) (рис. 2).

Для индикации высоты и вертикальной скорости сопровождаемых ВО целесообразно ввести на пульте кнопку “ФОРМУЛЯР”, при нажатии которой дополнительно к номеру сопровождаемого объекта выдается высота в сотнях метров (абсолютная или относительная) и стрелкой (вверх или вниз) указывается направление вертикальной скорости (рис. 3).

По излучающим НО на индикатор выдается (рис. 1, *а*, *г*):

нумерованный укороченный пеленг и наиболее вероятное местоположение на нем сопровождаемого объекта, когда точность оценки дальности $\sigma_D > 5\%D$ (НПО2);

местоположение сопровождаемого объекта, когда $\sigma_D \le 5\%D$ (НПО1) или ППО.

Точность трассового сопровождения излучающих ВО и НО на борту одиночного ЛА зависит от диапазонов $[D_{min}, D_{max}]$, $[V_{min}, V_{max}]$ возможных значений начальной дальности и скорости и

траектории движения самого ЛА. В случае одиночного ЛА для повышения точности сопровождения объектов НПО2 (НПО3) (перевода их в объекты НПО1) применяется информационный маневр и введение гипотезной трассы НПО1 (трассы с начальной "пробной" дальностью D и стандартной ошибкой $\sigma_D \le 5\% D$). Возможность выделения гипотезной трассы НПО1 зависит от близости "пробной" дальности к истинной дальности, а время выделения зависит от траектории движения ЛА (информационного маневра). Время достижения точности НПО1 для одиночного ЛА исчисляется несколькими десятками секунд.

В группе ЛА можно значительно сократить время гарантированного достижения НПО1, выполняя гипотезную триангуляцию. Для гипотезной триангуляции по каналам комплекса средств связи между ЛА группы производится обмен следующей информацией:

географическими координатами "условных точек" λ_{ut}, φ_{ut} ЛА группы,

координатами и скоростями ЛА в НСК,

трассами сопровождаемых ВО и НО в НСК (трассовыми поддержками),

измеренной информацией по излучающим ВО и НО и географическими координатами ЛА в момент измерения (измерениями).

1. Постановка задачи. В НПСК излучающий ВО определяется семью фазовыми координатами: азимут β, дальность D, радиальная скорость v_r и тангенциальная скорость v_t, угловая скорость разворота по курсу ω_ψ, угол места ε и вертикальная скорость v_h, а излучающий НО – тремя координатами: β, D, ε. Обозначим фазовые координаты p-го ВО: $\Theta_1^{(p)} = \beta^{(p)}$, $\Theta_2^{(p)} = 1/(D^{(p)}\cos\varepsilon^{(p)})$, $\Theta_3^{(p)} = v_r^{(p)}$, $\Theta_4^{(p)} = v_t^{(p)}$, $\Theta_5^{(p)} = |\omega_\psi^{(p)}|$, $\Theta_6^{(p)} = \varepsilon^{(p)}$, $\Theta_7^{(p)} = |v_h^{(p)}|$, а координаты q-го НО: $\Theta_1^{(q)} = \beta^{(q)}$, $\Theta_2^{(q)} = 1/(D^{(q)}\cos\varepsilon^{(q)})$, $\Theta_6^{(p)} = \varepsilon^{(q)}$.

Уравнения для p-го ВО имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
\dot\Theta_1^{(p)} = \Theta_2^{(p)}(V_x \sin\Theta_1^{(p)} + V_z \cos\Theta_1^{(p)} - \Theta_4^{(p)}),\\
\dot\Theta_2^{(p)} = \Theta_2^{(p)2}(V_x \cos\Theta_1^{(p)} - V_z \sin\Theta_1^{(p)} - \Theta_3^{(p)}),\\
\dot\Theta_3^{(p)} = -\Theta_4^{(p)}[j_\psi\Theta_5^{(p)} + \Theta_2^{(p)}(V_x \sin\Theta_1^{(p)} + V_z \cos\Theta_1^{(p)} - \Theta_4^{(p)})],\\
\dot\Theta_4^{(p)} = \Theta_3^{(p)}[j_\psi\Theta_5^{(p)} + \Theta_2^{(p)}(V_x \sin\Theta_1^{(p)} + V_z \cos\Theta_1^{(p)} - \Theta_4^{(p)})],\\
\dot\Theta_5^{(p)} = 0;\\
\dot\Theta_6^{(p)} = \Theta_2^{(p)}[(-V_y + j_h\Theta_7^{(p)})\cos\Theta_6^{(p)} + (V_x \cos\Theta_1^{(p)} - V_z \sin\Theta_1^{(p)} - \Theta_3^{(p)})\sin\Theta_6^{(p)}]\Theta_6^{(p)} +\\
+(V_x \cos\Theta_1^{(p)} - V_z \sin\Theta_1^{(p)})/(N(\varphi) + H),\\
\dot\Theta_7^{(p)} = 0,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости ЛА в НПСК, H, φ – высота и географическая широта местоположения ЛА, $N(\varphi)$ – длина нормали к точке поверхности земного эллипсоида на широте φ от оси OX.

Маневр p-го ВО по курсу и высоте представлен произведениями $j_\psi\Theta_5^{(p)}$ и $j_h\Theta_7^{(p)}$, где

$$j_\psi = \begin{cases} -1, \text{ маневр влево по курсу,}\\ 0, \text{ нет маневра по курсу,}\\ 1, \text{ маневр вправо по курсу,}\end{cases} \qquad j_h = \begin{cases} -1, \text{ снижение,}\\ 0, \text{ нет маневра по высоте,}\\ 1, \text{ набор высоты.}\end{cases}$$

Уравнения для q-го НО имеют вид

$$\begin{gathered}
\dot\Theta_1^{(q)} = \Theta_2^{(q)}(V_x \sin\Theta_1^{(q)} + V_z \cos\Theta_1^{(q)}),\\
\dot\Theta_2^{(q)} = \Theta_2^{(q)2}(V_x \cos\Theta_1^{(q)} - V_z \sin\Theta_1^{(q)}),\\
\dot\Theta_6^{(q)} = \Theta_2^{(q)}[-V_y \cos\Theta_6^{(q)} + (V_x \cos\Theta_1^{(q)} - V_z \sin\Theta_1^{(q)})\sin\Theta_6^{(q)}]\cos\Theta_6^{(q)} +\\
+ (V_x \cos\Theta_1^{(q)} - V_z \sin\Theta_1^{(q)})/(N(\varphi) + H).
\end{gathered} \tag{1.2}$$

На борту n-го ЛА группы аппаратурой РТР, ОЛС и БРЛС обнаружено p_n ВО и q_n НО, причем каждый из этих объектов может быть обнаружен разными источниками информации:

одним – РТР, ОЛС или БРЛС,

двумя – РТР и БРЛС, РТР и ОЛС, БРЛС и ОЛС,

тремя – РТР, БРЛС и ОЛС.

При описании канала измерения РТР используется формула расчета измеренного азимута $x_{1,R}^{(p,q)}$ по пеленгу $\varphi_y^{(p,q)}$ в ССК и углу места ε^j j-й гипотезной трассы, крену γ, тангажу υ и курсу ψ ЛА:

$$x_{1,R}^{(p,q)} = \arcsin(\cos\varphi_z^j\cos\varphi_y^{(p,q)}\sin\upsilon + \sin\varphi_z^j\cos\gamma\cos\upsilon + \cos\varphi_z^j\sin\varphi_y^{(p,q)}\sin\gamma\cos\upsilon),$$

где $\varphi_z^j = 2\mathrm{arctg}[(B - \sqrt{A^2 + B^2 - \sin^2\varepsilon^j})/(A + \sin\varepsilon^j)]$, $A = \cos\varphi_y^{(p,q)}\sin\upsilon + \sin\varphi_y^{(p,q)}\sin\gamma\cos\upsilon$, $B = \cos\gamma\cos\upsilon$.

Канал измерения РТР:

идентификатор РТР N_R,

признак объекта (ВО или НО),

время измерения t_z и измеренный азимут:

$$x_{1,R}^{(p,q)}(t_z) = \Theta_1^{(p,q)}(t_z) + \xi_{\beta,R}^{(n)}(t_z)\,, \tag{1.3}$$

где ошибка расчета измерения $\xi_{\beta,R}^{(n)}(t_z)$ – независимая гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_{\beta,R}^2(t_z)$.

При описании канала измерения ОЛС используются формулы расчета измеренных азимута $x_{1,O}^{(p,q)}$ и угла места $x_{6,O}^{(p,q)}$ по пеленгам $\varphi_y^{(p,q)}$ и $\varphi_z^{(p,q)}$, крену γ, тангажу υ и курсу ψ ЛА:

$$x_{6,O}^{(p,q)} = \arcsin(\cos\varphi_z^{(p,q)}\cos\varphi_y^{(p,q)}\sin\upsilon + \sin\varphi_z^{(p,q)}\cos\gamma\cos\upsilon + \cos\varphi_z^{(p,q)}\sin\varphi_y^{(p,q)}\sin\gamma\cos\upsilon),$$

$$x_{1,O}^{(p,q)} = \arcsin\{-[\cos\varphi_z^{(p,q)}\sin\varphi_y^{(p,q)}\cos\upsilon\sin\psi + \sin\varphi_z^{(p,q)}(\sin\gamma\cos\psi - \cos\gamma\sin\upsilon\sin\psi) - $$
$$- \cos\varphi_z^{(p,q)}\sin\varphi_y^{(p,q)}(\cos\gamma\cos\psi + \sin\gamma\sin\upsilon\sin\psi)]\,/\cos x_{6,O}^{(p,q)}\}.$$

Канал измерения ОЛС:

идентификатор ОЛС N_O,

признак объекта,

время измерения t_z и измеренные азимут и угол места:

$$x_{1,O}^{(p,q)}(t_z) = \Theta_1^{(p,q)}(t_z) + \xi_{\beta,O}^{(p,q)}(t_z) \qquad x_{6,O}^{(p,q)}(t_z) = \Theta_6^{(p,q)}(t_z) + \xi_{\varepsilon,O}^{(n)}(t_z), \tag{1.4}$$

где вектор ошибок расчета измерений $\{\xi_{\beta,O}^{(n)}(t_z), \xi_{\varepsilon,O}^{(n)}(t_z)\}$ – независимая гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R_O(t_z)$.

Канал измерения БРЛС по ПАП:

идентификатор БРЛС N_L,

признак объекта,

время измерения t_z и измеренные азимут и угол места:

$$x_{1,L}^{(p,q)}(t_z) = \Theta_1^{(p,q)}(t_z) + \xi_{\beta,L}^{(p,q)}(t_z) \qquad x_{6,L}^{(p,q)}(t_z) = \Theta_6^{(p,q)}(t_z) + \xi_{\varepsilon,L}^{(p,q)}(t_z), \tag{1.5}$$

где вектор ошибок измерений $\{\xi_{\beta,L}^{(n)}(t_z), \xi_{\varepsilon,L}^{(n)}(t_z)\}$ – независимая гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R_L(t_z)$.

Решение задачи комплексного гипотезного сопровождения p_n ВО и q_n НО при таких измерителях на борту n-го ЛА приведено в работе [2]. Оно выполняется алгоритмами захвата, отбора, ассоциации, фильтрации, управления гипотезами, экстраполяции и формирования выходных трасс.

В алгоритме захвата по измерению РТР формируется 24 гипотезные трассы по скорости для ВО (рис. 4, *а*) и 9 гипотезных трасс по дальности для НО (рис. 4, *б*).

В алгоритме захвата по измерению ОЛС формируется 10 гипотезных трасс по скорости для ВО (рис. 5, *а*) и 5 гипотезных трасс по дальности для НО (рис. 5, *б*).

В алгоритме захвата по измерению БРЛС формируется 24 гипотезные трассы по скорости для ВО (рис. 4, *а*) и 5 гипотезных трасс по дальности для НО (рис. 5, *б*).

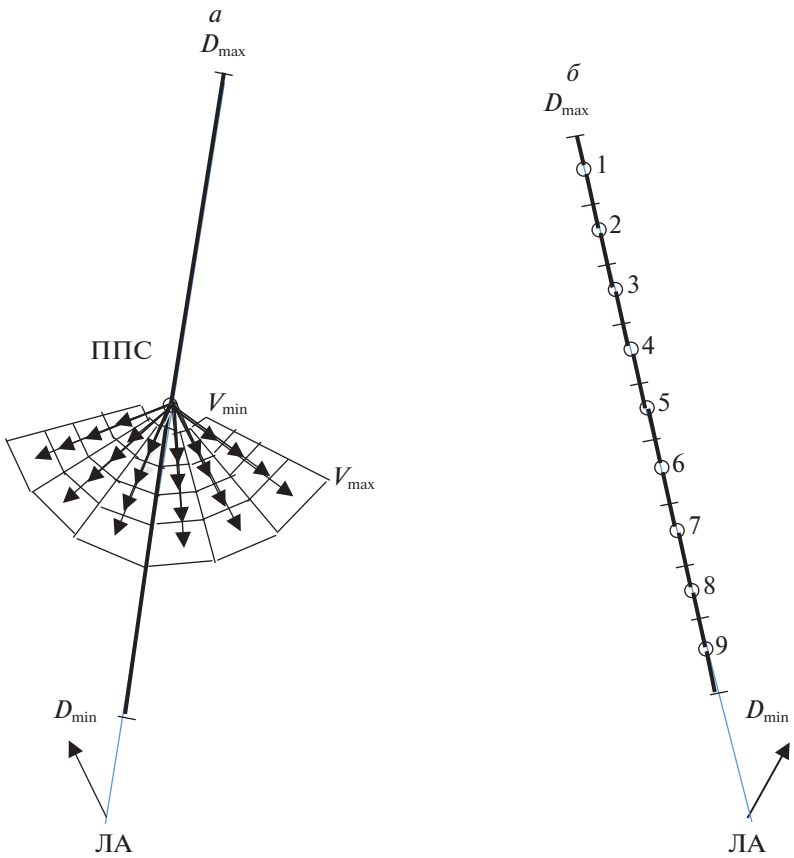

Рис. 4. *а* – воздушный объект РТР или БРЛС (ППС – передняя полусфера), *б* – наземный объект РТР

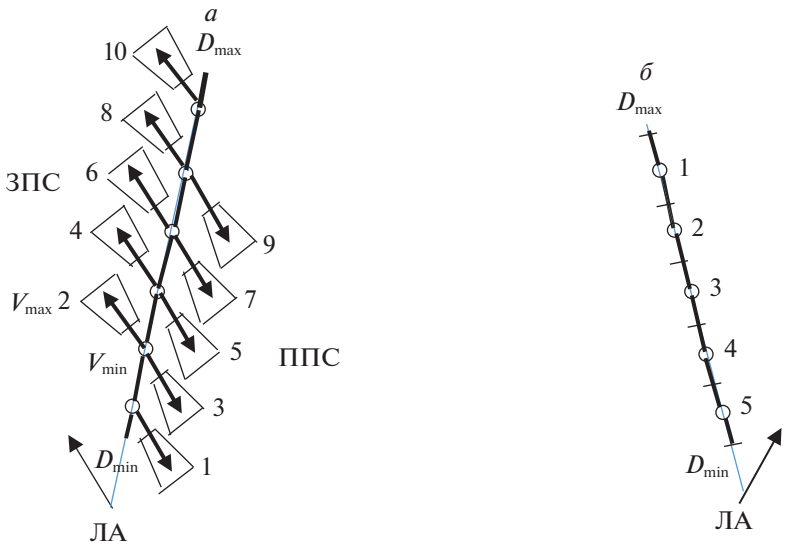

Рис. 5. *а* – воздушный объект ОЛС (ППС – передняя полусфера, ЗПС – задняя полусфера), *б* – наземный объект ОЛС или БРЛС

В качестве алгоритма фильтрации для измерений ОЛС и БРЛС используется азимутально-угломестный фильтр $\Phi_{\beta\varepsilon}$ [2], а для измерения РТР его частный случай – азимутальный фильтр Φ_{β}.

В рассматриваемой задаче гипотезной триангуляции предполагается наличие системы единого времени в группе ЛА и надо выполнить следующие действия.

1. Определить состав трассовой поддержки передаваемой ЛА по КСС, который необходим для решения задачи гипотезной триангуляции.

2. Определить состав измеренной информации, передаваемый ЛА по КСС, который необходим для решения задачи гипотезной триангуляции.

3. Произвести пересчет трассовых поддержек, полученных с бортов ЛА группы, в свою систему координат НПСК.

4. Выполнить однозначное отождествление по идентификаторам и координатам всех пересчитанных трассовых поддержек, полученных с бортов ЛА группы объектов НПО, с внутренними трассами своих сопровождаемых объектов.

5. Для каждого своего отождествленного p-го (q-го) объекта определить три гипотезные трассы j_1, j_2, j_3 по критерию минимальной приведенной невязки – невязки, деленной на число измеряемых координат:

пять – азимут, обратная дальность, радиальная и тангенциальная скорости, угол места для ВО с $PR_FK = 1$,

три – азимут, обратная дальность, угол места для НО и ВО с $PR_FK = 0$:

$$j_1 = \min_j \overline{\chi_j^2}, \quad j_2 = \min_{j \neq j_1} \overline{\chi_j^2}, \quad j_3 = \min_{j \neq j_1, j_2} \overline{\chi_j^2},$$

$$\overline{\chi_j^2} = \frac{1}{5} \sum_{k=1,4,6} [(x_k^{(p)}(t_z) - m_k^j(t_z))^2 / (\sigma_k^{(n)2} + d_{kk}^j)] \quad \text{для} \quad \text{ВО с} \quad PR_FK = 1, \tag{1.6}$$

$$\overline{\chi_j^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1,2,6} [(x_k^{(p,q)}(t_z) - m_k^j(t_z))^2 / (\sigma_k^{(n)2} + d_{kk}^j)] \quad \text{для НО и ВО с} \quad PR_FK = 0$$

и записать в них полученные измерения.

6. Вычислить триангуляционную дальность D^j и ее дисперсию d_{DD}^j для каждой j-й гипотезной трассы с измерением по критерию: $\min_{D^j} \Delta^j$ (или $\max_{D^j} \cos^2 \Delta^j$), где Δ^j – угол между вектором измеренных пеленгов $\{y_0, y_2, y_4\}$ и вектором пеленгов $\{D^j a^j + m_{x0}, D^j b^j + m_{y0}, D^j c^j + m_{z0}\}$ j-й гипотезной трассы на передающем ЛА в момент замера, рассчитаный по азимуту β^j, углу места ε^j и дальности D^j этой гипотезной трассы на принимающем ЛА:

$$\cos^2 \Delta^j(D^j) = \frac{(D^j A^j + B)^2}{(D^j)^2 E^j + 2D^j F^j + H}, \tag{1.7}$$

где $A^j = a^j y_0 + b^j y_2 + c^j y_4$, $B = m_{x0}^s y_0 + m_{y0}^s y_2 + m_{z0}^s y_4$, $E^j = (a^j)^2 + (b^j)^2 + (c^j)^2$,

$$F^j = a^j m_{x0}^s + b^j m_{y0}^s + c^j m_{z0}^s, \quad H = (m_{x0}^s)^2 + (m_{y0}^s)^2 + (m_{z0}^s)^2, \tag{1.8}$$

$$y_0 = \cos x_1^s \cos x_6^s, \quad y_2 = \sin x_6^s, \quad y_4 = -\cos x_1^s \sin x_6^s,$$

$$a^j = m_{xx}^s \cos m_6^j \cos m_1^j + m_{xy}^s \sin m_6^j - m_{zx}^s \cos m_6^j \sin m_1^j,$$

$$b^j = m_{yx}^s \cos m_6^j \cos m_1^j + m_{yy}^s \sin m_6^j - m_{yz}^s \cos m_6^j \sin m_1^j,$$

$$c^j = m_{zx}^s \cos m_6^j \cos m_1^j + m_{zy}^s \sin m_6^j - m_{zz}^s \cos m_6^j \sin m_1^j,$$

$m_{xx}^s, \ldots, m_{zz}^s, m_{x0}^s, m_{y0}^s, m_{y0}^s$ – коэффициенты перехода от НПСК своего ЛА к НПСК передающего ЛА в момент замера.

7. Для субоптимальной оценки фазовых координат сопровождаемого объекта вывести многомерный нелинейный гипотезный фильтр, на вход которого подается вычисленная триангуляционная дальность.

2. Решение задачи. Рассмотрим выполнение перечисленных требований.

2.1. Состав трассовой поддержки, передаваемой ЛА по КСС: Nf – номер формуляра трассы объекта, О – признак объекта, $ListI$ – список источников информации, PR_PO – признак приборного обеспечения, t_z – время последнего замера, $x(t_z)$, $y(t_z)$, $z(t_z)$ – не-

экстраполированные декартовые координаты объекта в НСК, $v_x(t_z)$, $v_y(t_z)$, $v_z(t_z)$ – неэкстраполированные проекции скорости объекта в НСК, $\beta(t_z)$ – неэкстраполированный азимут объекта, $s_D(t_z)$, $s_L(t_z)$, $s_h(t_z)$, $s_v(t_z)$, $s_\psi(t_z)$ и $k_{v\psi}(t_z)$ – стандартные ошибки по D, L (нормали к визирному лучу), h (высоте), v, ψ и коэффициент корреляции v и ψ, рассчитываемые по вероятностям $\pi_j(t_z)$, оценкам $m_k^j(t_z)$ и корреляционным моментам $d_{kl}^j(t_z)$ гипотезных трасс сопровождаемого объекта, *PR_UM*, *PR_FK* – признаки измерения угла места и формирования курса.

2.2. Состав измеренной информации, передаваемый ЛА по КСС: *Nf* – номер формуляра трассы объекта, $\beta^S(t_z)$ – измеренный азимут объекта, $\varepsilon^S(t_z)$ – измеренный угол места объекта, $s_\beta^S(t_z)$, $s_\varepsilon^S(t_z)$ – стандартные ошибки по β^S, ε^S, *PR_UM* – признак измерения угла места, $\lambda^S(t_z)$, $\varphi^S(t_z)$, $H^S(t_z)$ – географические координаты ЛА в момент замера t_z.

2.3. Формирование отметки измерения по трассовой поддержке, полученной с борта ЛА группы. Для отождествления трассовых поддержек с внутренними трассами своих сопровождаемых объектов формируются отметки измерения, которые формируются в три этапа:

запись в отметку измерения идентификаторов объекта N_R, N_O, N_L и признаков *PR_PO*, *PR_UM*, *PR_FK*,

пересчет трассовых поддержек в систему координат НПСК своего ЛА,

определение сферических координат переданного объекта.

Пересчет выполняется по формулам

$$\begin{aligned} x_0 &= m_{xx}x(t_z) + m_{xy}y(t_z) + m_{xz}z(t_z) + m_{x0},\\ y_0 &= m_{yx}x(t_z) + m_{yy}y(t_z) + m_{yz}z(t_z) + m_{y0},\\ z_0 &= m_{zx}x(t_z) + m_{yy}y(t_z) + m_{zz}z(t_z) + m_{z0}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для ВО при *PR_FK* = 1 вычисляются еще проекции вектора скорости:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= m_{xx}v_x(t_z) + m_{xy}v_y(t_z) + m_{xz}v_z(t_z),\\ v_{z0} &= m_{zx}v_x(t_z) + m_{zy}v_y(t_z) + m_{zz}v_z(t_z),\\ v_{y0} &= m_{yx}v_x(t_z) + m_{yy}v_y(t_z) + m_{yz}v_z(t_z), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где приведены коэффициенты перехода:

$$\begin{gathered} \Delta\lambda = \lambda_{ut} - \lambda(t_z);\\ m_{zz} = \cos(\Delta\lambda);\\ m_{xx} = m_{zz}\sin\varphi_{ut}\sin\varphi(t_z) + \cos\varphi_{ut}\cos\varphi(t_z),\\ m_{xy} = \sin\varphi_{ut}\cos\varphi(t_z) - m_{zz}\cos\varphi_{ut}\sin\varphi(t_z),\\ m_{xz} = \sin\varphi(t_z)\sin\Delta\lambda,\\ m_{yx} = \cos\varphi_{ut}\sin\varphi(t_z) - m_{zz}\sin\varphi_{ut}\cos\varphi(t_z),\\ m_{yy} = \sin\varphi_{ut}\sin\varphi(t_z) + m_{zz}\cos\varphi_{ut}\cos\varphi(t_z),\\ m_{yz} = -\cos\varphi(t_z)\sin\Delta\lambda,\\ m_{zx} = -\sin\varphi_{ut}\sin\Delta\lambda,\\ m_{zy} = \cos\varphi_{ut}\sin\Delta\lambda, \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} N(\varphi) = 6378.243/\sqrt{1 - e\sin^2\varphi}, \quad e = 0.00669421623,\\ m_{x0} = N(\varphi_{ut})m_{xy} + e[N(\varphi(t_z))\sin\varphi(t_z) - N(\varphi_{ut})\sin\varphi_{ut}]\cos\varphi(t_z),\\ m_{y0} = N(\varphi_{ut})m_{yy} - (N(\varphi(t_z)) + H(t_z)) + e[N(\varphi(t_z))\sin\varphi(t_z) - N(\varphi_{ut})\sin\varphi_{ut}]\sin\varphi(t_z),\\ m_{z0} = N(\varphi_{ut})m_{zy}. \end{gathered}$$

Здесь $\lambda(t_z)$, $\varphi(t_z)$, $H(t_z)$ – географические координаты своего ЛА в момент замера t_z:

$$\begin{gathered}\lambda(t_z) = \lambda(t) + V_z(t_z - t)/[(N(\varphi) + H)\cos\varphi - V_x\sin\varphi(t_z - t)],\\ \varphi(t_z) = \varphi(t) + V_x\cos\varphi(t_z - t)/[(N(\varphi) + H)\cos\varphi - V_x\sin\varphi(t_z - t)],\\ H(t_z) = H(t) + V_y(t_z - t),\end{gathered} \tag{2.4}$$

где t – текущее время.

Сферические координаты определяются по формулам

$$d(t_z) = \sqrt{x_0x_0 + z_0z_0}, \quad x_1(t_z) = \arcsin(-z_0/d(t_z)), D(t_z) = \sqrt{d^2(t_z) + y_0y_0}. \tag{2.5}$$

При $PR_UM = 1$ имеем $x_6(t_z) = \arcsin(y_0/D(t_z))$.

Далее вычисляются корреляционные моменты s_{11}, s_{1D}, s_{DD}, s_{66} сферических координат x_1 , D, x_6 объекта:

$$\begin{gathered}\Delta\beta = x_1(t_z) - \beta(t_z);\\ s_{DD} = (s_D(t_z)\cos\Delta\beta)^2 + (s_L(t_z)\sin\Delta\beta)^2 + \sigma_{XZ}^2,\\ s_{11} = [(s_D(t_z)\cos\Delta\beta)^2 + (s_L(t_z)\sin\Delta\beta)^2 + \sigma_{XZ}^2]/d^2(t_z),\\ s_{1D} = (s_L^2(t_z) - s_D^2(t_z))\sin\Delta\beta\cos\Delta\beta/d(t_z),\\ s_{66} = (\sigma_H^2 + s_h^2(t_z))\cos^2 x_6(t_z) + [(s_D(t_z)\sin x_6(t_z)/D(t_z)]^2,\end{gathered} \tag{2.6}$$

где σ_{XZ}^2, σ_H^2 – дисперсии декартовых координат и высоты полета передающего ЛА, рассчитанные по паспортным данным его навигационной системы.

При $PR_FK = 1$ определяются проекции скорости объекта и их корреляционные моменты:

$$\begin{gathered}x_3(t_z) = v_{x0}\cos x_1(t_z) - v_{z0}\sin x_1(t_z),\\ x_4(t_z) = v_{x0}\sin x_1(t_z) + v_{z0}\cos x_1(t_z),\\ s_{\bar{v}}(t_z) = \sqrt{(s_v^2(t_z)/(v_x^2(t_z) + v_z^2(t_z))},\\ s_{43} = x_3(t_z)x_4(t_z)[s_{\bar{v}}^2(t_z) - (s_\psi^2(t_z) + s_{11})] + (x_3^2(t_z) - x_4^2(t_z))k_{v\psi}(t_z)s_{\bar{v}}(t_z)s_\psi(t_z),\\ s_{33} = x_3^2(t_z)s_{\bar{v}}^2(t_z) + x_4^2(t_z)(s_\psi^2(t_z) + s_{11}) - 2x_3(t_z)x_4(t_z)k_{v\psi}(t_z)s_{\bar{v}}(t_z)s_\psi(t_z),\\ s_{44} = x_4^2(t_z)s_{\bar{v}}^2(t_z) + x_3^2(t_z)(s_\psi^2(t_z) + s_{11}) + 2x_3(t_z)x_4(t_z)k_{v\psi}(t_z)s_{\bar{v}}(t_z)s_\psi(t_z).\end{gathered} \tag{2.7}$$

2.4. Ассоциация сформированных отметок измерения с внутренними трассами своих сопровождаемых объектов. Необходимо установить однозначное соответствие: каждой отметке измерения одного ЛА группы соответствует одна внутренняя трасса, а каждая внутренняя трасса содержит не более одной отметки измерения этого ЛА. Для каждой внутренней трассы с отметками этого ЛА производится ранжирование этих отметок по средней приведенной невязке s_χ^2, вычисленной по гипотезным трассам. Внутренняя трасса ВО содержит неманеврирующие и маневрирующие гипотезные трассы, а внутренняя трасса НО – только неманеврирующие гипотезные трассы движения объекта в НПСК.

Сначала вычисляется s_χ^2 по неманеврирующим гипотезным трассам $j = 0$ с вероятностями π_j

$$s_\chi^2 = \frac{\sum_{j=0}\overline{\chi_j^2}\pi_j}{\sum_{j=0}\pi_j}.$$

При наличии маневрирующих гипотезных трасс возможна ее корректировка. Для каждой маневрирующей гипотезной трассы ($j \neq 0$) в цикле по интенсивности маневра прострелом определяется минимальная приведенная невязка $\overline{\chi_j^2}$. При $\overline{\chi_j^2} < s_\chi^2$ производится корректировка $s_\chi^2 = \overline{\chi_j^2}$. Если для отметки ЛА группы в ближайшей (по невязке s_χ^2) внутренней трассе эта отметка также является ближайшей из отметок этого ЛА (однозначная ассоциация), то она одна остается в этой внутренней трассе и вычеркивается из остальных внутренних трасс. В противном случае, из воз-

можных вариантов ассоциации выбирается тот, при котором минимальна сумма средних приведенных невязок.

Для трассовых поддержек с признаком $PR_PO > 1$, отождествленных с внутренними трассами без измерения дальности, назначается режим гипотезной триангуляции и корректируется состав измерения – остается только дальность. Вычисляются коэффициенты перехода от НПСК своего ЛА в момент замера с центром $\lambda(t_z)$, $\varphi(t_z)$, $H(t_z)$ к НПСК ЛА группы с центром $\lambda^s(t_z)$, $\varphi^s(t_z)$, $H^s(t_z)$:

$$\begin{gathered}
\Delta\lambda = \lambda(t_z) - \lambda^s(t_z)\,, \\
m_{zz}^s = \cos(\Delta\lambda), \\
m_{xx}^s = m_{zz}^s \sin\varphi(t_z)\sin\varphi^s(t_z) + \cos\varphi(t_z)\cos\varphi^s(t_z), \\
m_{xy}^s = \sin\varphi(t_z)\cos\varphi^s(t_z) - m_{zz}^s \cos\varphi(t_z)\sin\varphi^s(t_z), \\
m_{xz}^s = \sin\varphi^s(t_z)\sin\Delta\lambda, \\
m_{yx}^s = \cos\varphi(t_z)\sin\varphi^s(t_z) - m_{zz}^s \sin\varphi(t_z)\cos\varphi^s(t_z), \\
m_{yy}^s = \sin\varphi(t_z)\sin\varphi^s(t_z) + m_{zz}^s \mathrm{s}\cos\varphi(t_z)\cos\varphi^s(t_z), \\
m_{yz}^s = -\cos\varphi^s(t_z)\sin\Delta\lambda, \\
m_{zx}^s = -\sin\varphi(t_z)\sin\Delta\lambda, \\
m_{zy}^s = \cos\varphi(t_z)\sin\Delta\lambda, \\
N(\varphi) = 6378.243/\sqrt{1 - e\sin^2\varphi}, \quad e = 0.00669421623, \\
m_{x0}^s = (N(\varphi(t_z)) + H(t_z))m_{xy}^s + e[N(\varphi^s(t_z))\sin\varphi^s(t_z) - N(\varphi(t_z))\sin\varphi(t_z)]\cos\varphi^s(t_z), \\
m_{y0}^s = (N(\varphi(t_z)) + H(t_z))m_{yy}^s - (N(\varphi^s(t_z)) + H^s(t_z)) + e[N(\varphi^s(t_z))\sin\varphi^s(t_z) - N(\varphi(t_z))\sin\varphi(t_z)]\sin\varphi^s(t_z), \\
m_{z0}^s = (N(\varphi(t_z)) + H(t_z))m_{zy}^s.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

2.5. Определение трех ближайших по невязке гипотезных трасс и запись в них адресов отметок измерения. В процессе вычисления для внутренней трассы средней приведенной невязки s_χ^2 по каждой ее j-й гипотезной трассе вычисляется приведенная невязка $\overline{\chi_j^2}$ и по ней производится ранжирование гипотезных трасс, которое записывается в отметку измерения. В результате ассоциации во внутренней трассе остается одна отметка измерения. Выбираем в этой отметке измерения три первые гипотезные трассы и в остальных гипотезных трассах исключаем эту отметку измерения.

2.6. Вычисление триангуляционной дальности и ее дисперсии. Триангуляционная дальность D^j рассчитывается для каждой из трех выбранных гипотезных трасс объекта как точка минимума функции (1.7):

$$f(D^j) = \frac{(D^j A^j + B)^2}{(D^j)^2 E^j + 2D^j F^j + H}, \quad j = j_1, j_2, j_3.$$

Для трех выбранных гипотезных трасс объекта ОЛС и БРЛС

$$D^j(\beta^s(t_z), \varepsilon^j(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)) = \frac{BF^j - A^j H}{A^j F^j - BE^j}, \quad j = j_1, j_2, j_3,$$

где A^j, B, E^j, F^j, H вычисляются по формулам (1.8).

Для трех выбранных гипотезных трасс объекта РТР

$$D^j(\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)) = \frac{BF^j - A^j H}{A^j F^j - BE^j}, \quad j = j_1, j_2, j_3,$$

где E^j, F^j, H вычисляются по формулам (1.8), $A^j = a^j y_0 + c^j y_4$, $B = m_{x0} y_0 + m_{z0} y_4$,

$$y_0 = \cos x_1^s, \quad y_4 = -\sin x_1^s, \quad a^j = m_{xx}^s \cos m_1^j - m_{xz}^s \sin m_1^j, \quad c^j = m_{zx}^s \cos m_1^j - m_{zz}^s \sin m_1^j.$$

Поскольку углы $\beta^s(t_z)$, $\varepsilon^s(t_z)$, $m_1^j(t_z)$, $m_6^j(t_z)$ определяются со стандартными ошибками $s_\beta^s(t_z)$, $s_\varepsilon^s(t_z)$, $s_1^j(t_z) = \sqrt{d_{11}^j(t_z)}$, $s_6^j(t_z) = \sqrt{d_{66}^j(t_z)}$, где $d_{11}^j(t_z)$, $d_{66}^j(t_z)$ – дисперсии азимута и угла места в j-й гипотезной трассе, и коэффициенты перехода – нелинейные функции, то для вычисления несмещенной триангуляционной дальности и ее дисперсии методом статистического моделирования заменим непрерывное распределение ошибок вычисления $\beta^s(t_z)$, $\varepsilon^s(t_z)$, $m_1^j(t_z)$, $m_6^j(t_z)$ для объектов ОЛС и БРЛС дискретным с равными вероятностями в девяти точках:

$$\{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\}_0 = \{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\}_{1,2} = \{\beta^s(t_z) \pm 1.393 s_\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\}_{3,4} = \{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z) \pm 1.393 s_\varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\}_{5,6} = \{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z) \pm 1.393 s_1^s(t_z), m_6^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z)\}_{7,8} = \{\beta^s(t_z), \varepsilon^s(t_z), m_1^j(t_z), m_6^j(t_z) \pm 1.393 s_6^s(t_z)\},$$

а непрерывное распределение ошибок вычисления $\beta^s(t_z)$, $m_1^j(t_z)$ для объектов РТР – дискретным с равными вероятностями в пяти точках:

$$\{\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)\}_0 = \{\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)\}_{1,2} = \{\beta^s(t_z) \pm 1.393 s_\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)\},$$

$$\{\beta^s(t_z), m_1^j(t_z)\}_{3,4} = \{\beta^s(t_z), m_1^j(t_z) \pm 1.393 s_1^s(t_z)\}.$$

Для трех гипотезных трасс объекта ОЛС и БРЛС триангуляционная дальность

$$D^j(t_z) = \frac{1}{9} \sum_{k=\overline{0,8}} D^j(k), \quad j = j_1, j_2, j_3.$$

Ее дисперсия

$$d_{DD}^j = \frac{1}{8} \sum_{k=\overline{0,8}} (D^j(k) - D^j(t_z))^2, \quad j = j_1, j_2, j_3.$$

Для трех гипотезных трасс объекта РТР триангуляционная горизонтальная дальность

$$d^j(t_z) = \frac{1}{5} \sum_{k=\overline{0,4}} D^j(k), \quad j = j_1, j_2, j_3.$$

Ее дисперсия

$$d_{DD}^j = \frac{1}{4} \sum_{k=\overline{0,4}} (D^j(k) - d^j(t_z))^2, \quad j = j_1, j_2, j_3.$$

2.7. Многомерный нелинейный гипотезный фильтр триангуляционной дальности. Фильтр для триангуляционной дальности выводится из дальностного фильтра Φ_D [2] и имеет вид

$$\begin{gathered} \Delta_2^j = 1/d^j(t_z) - m_2^j(t_z - 0), \\ \lambda_{22}^j = d_{22}^j + s_{22}^j, \quad s_{22}^j = d_{DD}^j/(d^j(t_z))^4, \quad A_{2k}^j = d_{2k}^j/\lambda_{22}^j, \\ m_k^j(t_z) = m_k^j(t_z - 0) + \Delta_2^j A_{2k}^j, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$d_{kl}^j(t_z) = d_{kl}^j(t_z - 0) - d_{2k}^j A_{2l}^j, \quad l \le k = 1\text{–}7 \quad \text{для ВО}, \quad l \le k = 1, 2, 6 \quad \text{для НО}.$$

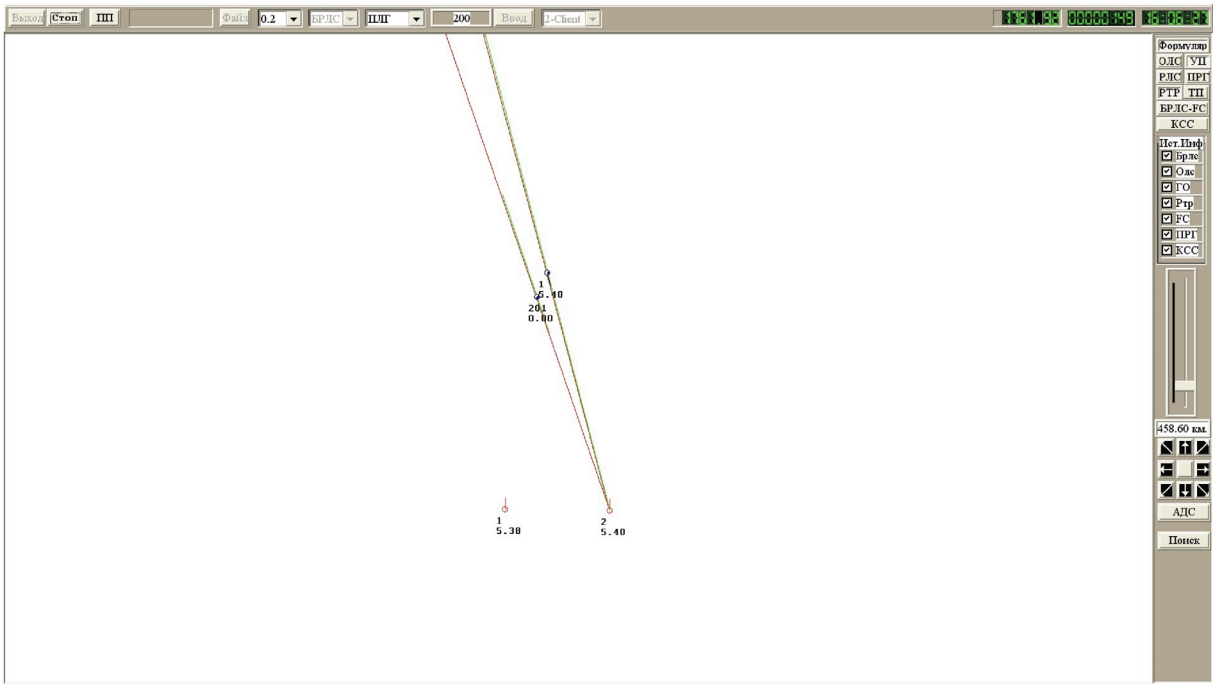

Рис. 6

Апостериорные вероятности гипотезных трасс пересчитываются по формулам

$$\pi_j(t_z) = \begin{cases} \pi_j(t_z - 0)(1 - P_o)H_1, & j \neq j_1, j_2, j_3, \\ \pi_j(t_z - 0)\sqrt{s_{22}^j/\lambda_{22}^j}\exp((\Delta_2^j)^2/\lambda_{22}^j)H_2, & j \neq j_1, j_2, j_3, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$H_1 = \frac{1}{\sum\limits_{j \neq j_1, j_2, j_3} [\pi_j(t_z - 0)(1 - P_o)] + \sum\limits_{j = j_1, j_2, j_3} \pi_j(t_z - 0)},$$

$$H_2 = \frac{1 - \sum\limits_{j \neq j_1, j_2, j_3} [\pi_j(t_z - 0)(1 - P_o)H_1]}{\sum\limits_{j = j_1, j_2, j_3} [\pi_j(t_z - 0)\sqrt{s_{22}^j/\lambda_{22}^j}\exp((\Delta_2^j)^2/\lambda_{22}^j)]},$$

где H_1, H_2 – нормирующие множители. Здесь $\pi_j(t_z - 0)$, $m_k^j(t_z - 0)$, $d_{kl}^j(t_z - 0)$ – значения параметров π_j, m_k^j, d_{kl}^j в точке t_z слева до фильтрации, т.е. экстраполированных ко времени t_z.

3. Пример. Гипотезная триангуляция ВО и НО РТР парой ЛА. РТР измеряет пеленг φ_y в плоскости XOZ ССК. Обмен информацией по КСС производится после завязки трасс и проверки их на истинность (рис. 6). Поэтому в первом обмене приходит информация только по НО. Между поступлениями информации по КСС на борту каждого ЛА обрабатываются замеры своего РТР.

На рис. 6–11 – вид тактического индикатора ведомого ЛА в характерные моменты времени: первая выдача выходной трассы по информации РТР (рис. 7), выделение гипотезной трассы, определение вектора скорости ВО, достижение НПО1. Красные линии показывают замеры пеленгов на каждом ЛА, укороченный пеленг зеленого цвета – текущий диапазон по дальности при НПО2.

Выделение гипотезной трассы НО происходит после второго обмена по КСС (рис. 8) .Стандартная ошибка оценки дальности превышает необходимые для НПО1 $5\%D$ (рис. 9). Для НО вводится дополнительная гипотезная трасса с парамерами НПО1 и на следующем третьем обмене достигается $\sigma_D < 5\%D$ (рис. 10).

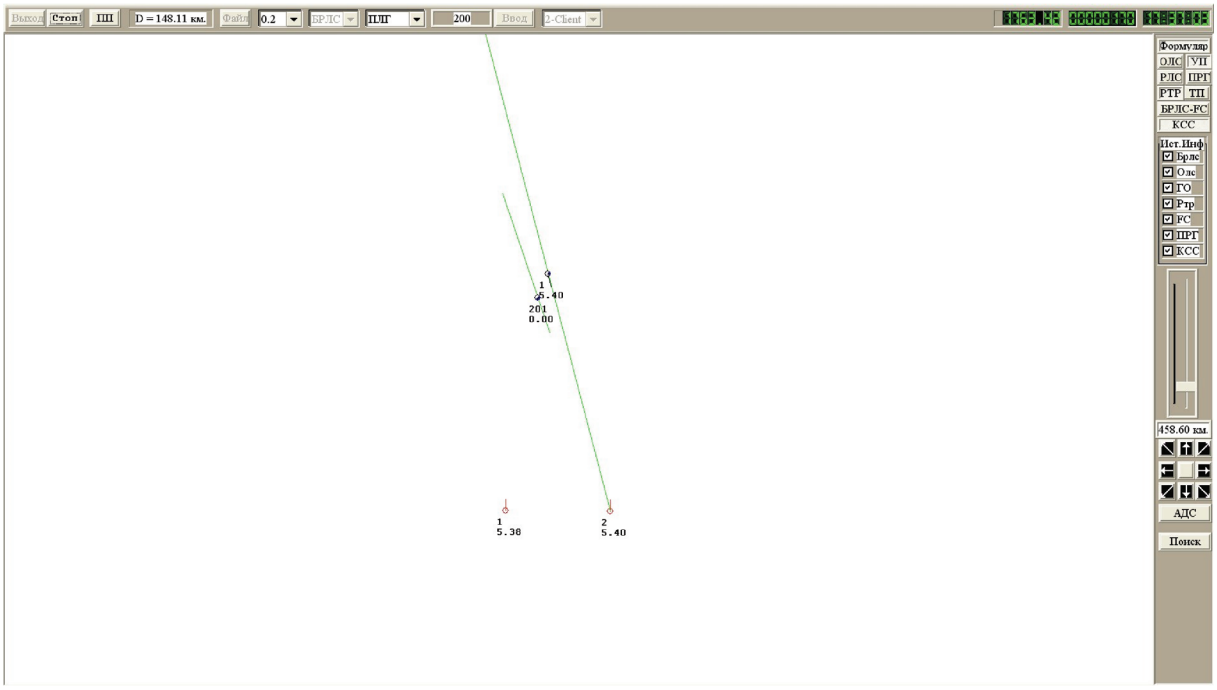

Рис. 7

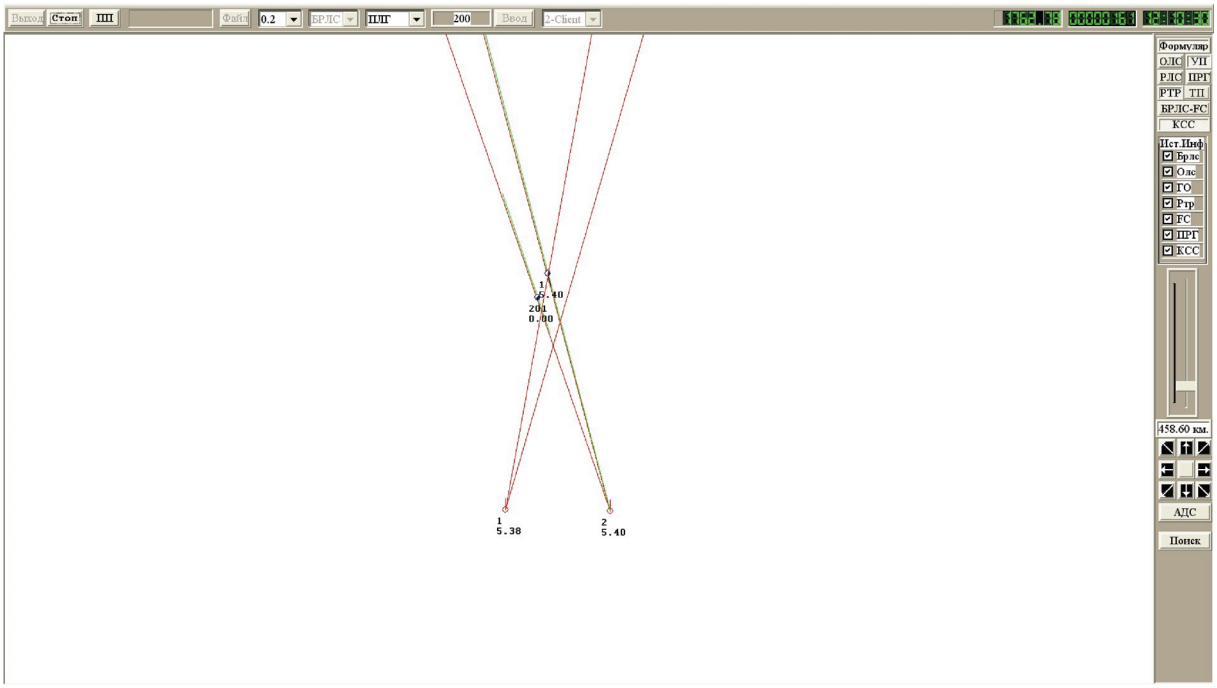

Рис. 8

Информация по ВО поступает начиная со второго обмена по КСС. При первом же поступлении информации по ВО формируется признак $PR_FK = 1$, т.е. стандартная ошибка оценки вектора скорости по курсу не превышает 5°.

Выделение гипотезной трассы ВО происходит после третьего обмена по КСС (информация по ВО поступает второй раз по КСС). Стандартная ошибка оценки дальности при этом $\sigma_D = 6.21\%D$ (рис. 9). Так как $\sigma_\psi < 5°$, то для достижения НПО1 необходимо снизить ошибку по

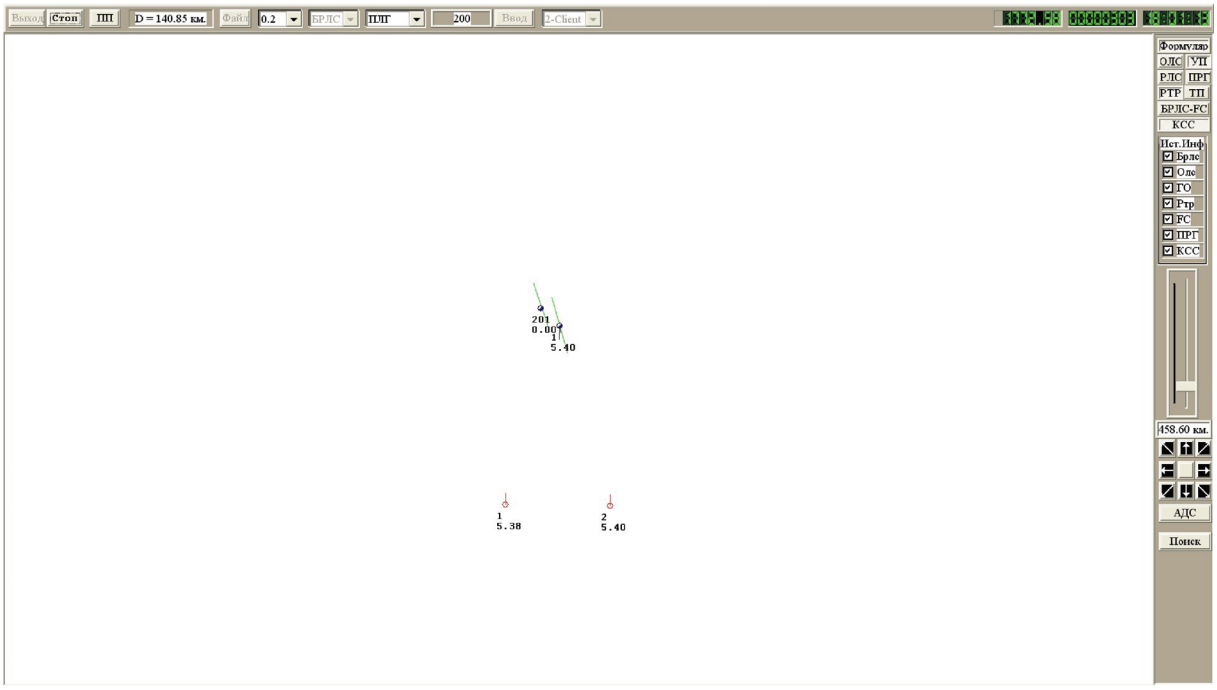

Рис. 9

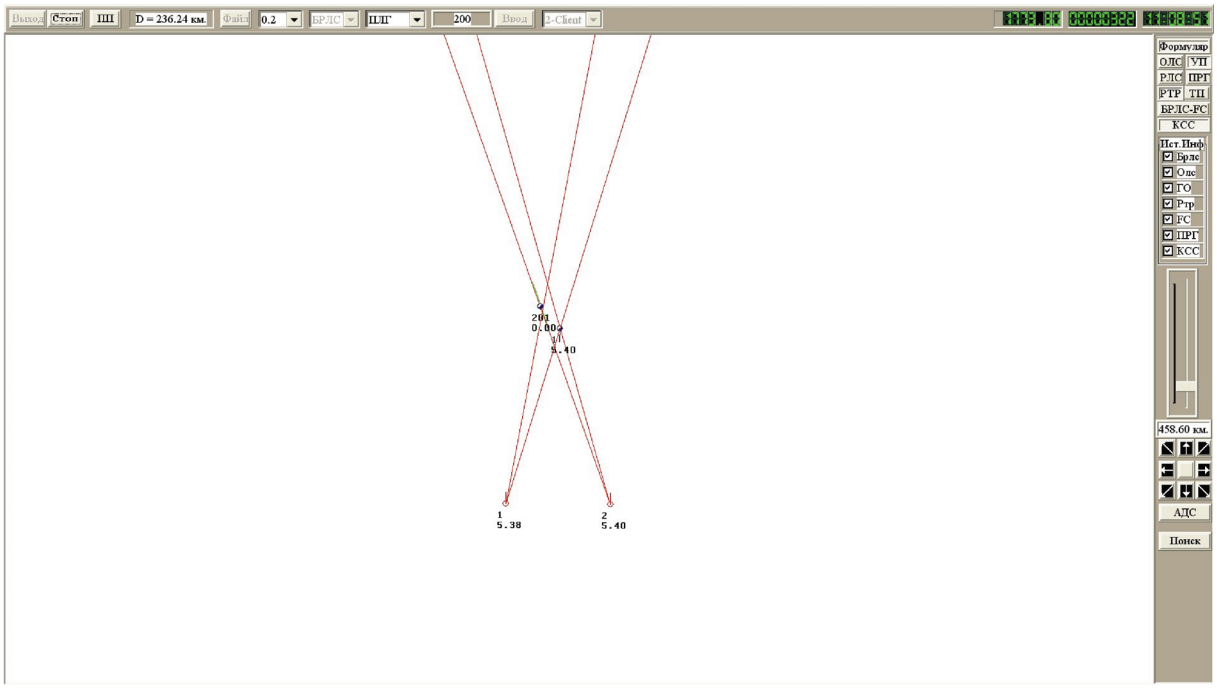

Рис. 10

дальности. Вводится дополнительная гипотезная трасса НПО1 и на следующем четвертом обмене (третье поступление информации о ВО по КСС) достигается $\sigma_D < 5\% D$ (рис. 11). Таким образом, для достижения НПО1 как для НО, так и ВО достаточно трех циклов триангуляции.

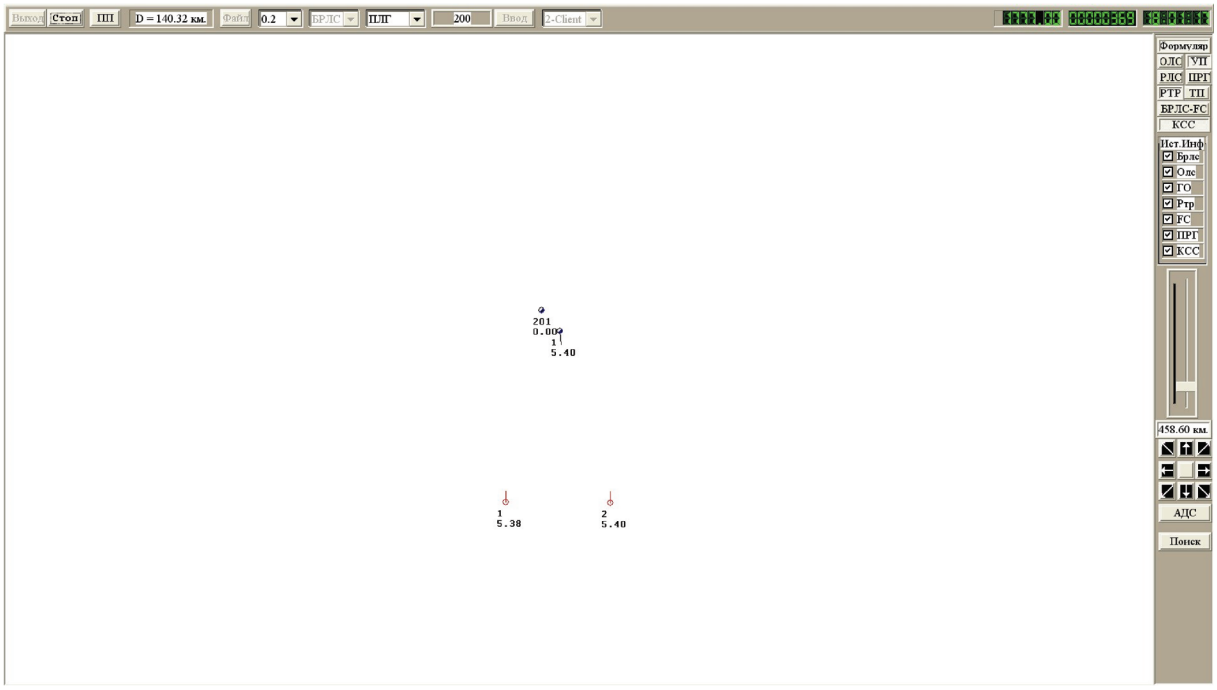

Рис. 11

Заключение. Решена задача повышения точности “скрытного” трассового сопровождения радио- и теплоизлучающих ВО и НО на борту ЛА за счет гипотезной триангуляции:

сброс неотождествленных гипотезных трасс (уменьшается диапазон значений дальности, а для ВО и скорости),

фильтрация в отождествленных гипотезных трассах многомерным нелинейным гипотезным фильтром Φ_D триангуляционных дальностей, вычисленных по критерию минимальной невязки измеренных пеленгов и их расчетных значений для этих гипотезных трасс,

ввод для ускорения достижения НПО1 дополнительной гипотезной трассы с пробной дальностью и точностью НПО1.

Гипотезная триангуляция позволяет достигать точности НПО1 ($\sigma_D \le 5\% D$ для НО, $\sigma_D \le 5\% D$ и $\sigma_\psi \le 5°$ для ВО) после трех обменов информацией по КСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Системы управления вооружением истребителей / Под ред. Е.А. Федосова. М.: Машиностроение, 2005.
2. *Широков Л.Е.* Вычисление трасс реальных объектов по измерениям сигналов, принимаемых собственными и внешними источниками информации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 4. С. 18–49.

EDN: NLIICI
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 43–57

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 62.50

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ИНДУЦИРОВАННЫХ НОРМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ: ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ[1]

© 2022 г. Д. В. Баландин[a,*], Р. С. Бирюков[a,b], М. М. Коган[b]

[a] *Нижегородский государственный ун-т им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

[b] *Нижегородский государственный архитектурно-строительный ун-т, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: dbalandin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 02.04.2021 г.
После доработки 25.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации индуцированных норм линейных операторов, зависящих от параметров и отображающих одно линейное пространство в несколько или несколько линейных пространств в одно. В обоих случаях непосредственная минимизация оптимальной целевой функции в виде линейной свертки отдельных критериев является затруднительной. Показано, что для задач каждого из этих типов можно указать субоптимальную целевую функцию в виде индуцированной нормы вспомогательного линейного оператора, минимизация которой приводит к субоптимальным по Парето решениям. При этом устанавливается возможность локализовать в критериальном пространстве множество Парето и тем самым оценить степень субоптимальности получаемых решений. В качестве приложения рассматриваются многокритериальные задачи оптимального управления и фильтрации с критериями вида обобщенных H_∞-норм.

DOI: 10.31857/S0002338822020044

Введение. В математических постановках задач управления или фильтрации оптимизируемыми критериями часто являются индуцированные нормы линейных операторов, отображающих в силу уравнений системы ее начальное состояние и/или внешнее возмущение в терминальное состояние и/или целевой выход. В результате находятся минимаксные регуляторы или фильтры, наилучшие в наихудшей ситуации. Так, для интегрируемых с квадратом возмущений из пространства L_2 к таким критериям относится обобщенная H_∞-норма, которая в общем случае соответствует уровню гашения начального и внешнего возмущений, а в частном случае при нулевом начальном состоянии системы превращается в стандартную H_∞-норму. Если целевой выход не учитывается, то обобщенная H_∞-норма характеризует максимальное значение евклидовой нормы терминального состояния относительно всех начальных и внешних возмущений с ограниченной нормой. Когда внешнее возмущение не учитывается, индуцированная норма оператора, отображающего начальное состояние в целевой выход, называемая также γ_0-нормой, показывает максимально возможное значение L_2-нормы целевого выхода относительно евклидовой нормы начального состояния, а оптимальное управление по этому критерию – это линейно-квадратичное управление при неопределенных начальных условиях.

Для каждого из этих критериев уже разработаны методы, позволяющие синтезировать оптимальные регуляторы и фильтры (см., например, [1, 2] и ссылки в них). Вместе с тем реальные задачи управления и фильтрации, как известно, всегда являются многокритериальными. В связи с этим представляет интерес синтез регуляторов, обеспечивающих минимальный уровень гашения начального и внешнего возмущений не для одного целевого выхода системы, а для нескольких. Кроме того, в реальных системах, как правило, имеются несколько входов для потенциально возможных возмущений и заранее неясно, на каком из этих входов действительно возникнет

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (Соглашение № 075-02-2021-1394).

возмущение. В таком случае требуется синтезировать регулятор, обеспечивающий оптимальное гашение возмущений, возникающих на любом из возможных входов.

Здесь нужно отметить, что нахождение оптимальных по Парето, т.е. неулучшаемых по совокупности критериев, решений, обеспечивающих определенный компромисс между конкурирующими критериями, представляет собой трудную задачу [3, 4]. В теории управления можно указать только отдельные случаи, в которых удается ее решить до конца. Это линейно-квадратичные гауссовские управления [5] и H_2-оптимальные управления [6] на основе Q-параметризации стабилизирующих регуляторов для линейных стационарных систем на бесконечном интервале времени, а также обобщенные H_2 оптимальные управления [7–10] для линейных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте. В задачах управления с критериями, включающими H_∞-норму, удавалось синтезировать многокритериальные управления, как правило, только при дополнительных ограничениях типа равенства матриц функций Ляпунова [11] или типа равенства вспомогательных матричных переменных [12, 13], налагаемых на матричные уравнения или линейные матричные неравенства, характеризующие каждый из критериев. Такое же ограничение неявно присутствует и в концепции так называемого смешанного H_2/H_∞-управления [14–18]. В [19] для синтеза двукритериального управления применялся подход, состоящий в получении конечномерных Q-аппроксимаций оптимальных по Парето регуляторов. В [20–22] для задач многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞- и γ_0-норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1-\sqrt{N}/N$, где N – число критериев.

Статья посвящена разработке некоторого общего подхода к многокритериальной минимаксной оптимизации применительно к линейным задачам управления и фильтрации. В ней установлено, что при многокритериальной оптимизации индуцированных норм N линейных операторов, зависящих от параметров и отображающих одно линейное пространство в N образов, можно указать область в N-мерном критериальном пространстве, содержащую точки множества Парето, которые являются оптимальными по отношению к линейной свертке критериев. Одна граница этой области соответствует субоптимальным по Парето решениям, которые оптимизируют индуцированную норму вспомогательного линейного оператора, отображающего исходное линейное пространство в прямую сумму образов исходных операторов. Знание другой границы этой области позволяет оценить, в какой мере значения критериев при найденных решениях отличаются от оптимальных по Парето. Далее показано, что для задачи многокритериальной оптимизации индуцированных норм N линейных операторов, отображающих N линейных пространств в одно линейное пространство, можно применить принцип двойственности и также указать единый критерий в виде индуцированной нормы некоторого вспомогательного линейного оператора, оптимизация которого позволяет находить субоптимальные по Парето решения. Все эти результаты применяются для синтеза субоптимальных по Парето регуляторов и фильтров в линейных нестационарных системах на конечном горизонте и в стационарных системах на бесконечном горизонте в многокритериальных задачах с обобщенными H_∞-нормами в качестве критериев. Для этого дается новая характеризация обобщенной H_∞-нормы в терминах дифференциальных линейных матричных неравенств. Приводятся иллюстрирующие примеры.

1. Локализация подмножества Парето-фронта в прямой и двойственной многокритериальных задачах. 1.1. Прямая многокритериальная задача. Пусть имеются N линейных ограниченных операторов, зависящих от параметров Θ и отображающих линейное пространство Ξ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Xi$ в линейные пространства Υ_i со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Upsilon_i}$, т.е.

$$\Gamma_i(\Theta):\ \Xi\to\Upsilon_i:\ \xi\mapsto\zeta_i,\quad i=\overline{1,N}.$$

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений в многокритериальной задаче минимизации с критериями $J_i(\Theta)$, $i=1,\ldots,N$, которые являются квадратами индуцированных норм этих операторов:

$$J_i(\Theta)=\|\Gamma_i(\Theta)\|^2=\sup_{\xi\in\Xi}\frac{\|\zeta_i\|^2}{\|\xi\|^2},\quad i=\overline{1,N}. \tag{1.1}$$

Напомним, что решение Θ_P называется оптимальным по Парето, если не существует такого решения Θ, что выполняются неравенства $J_i(\Theta) \le J_i(\Theta_P)$, $i = \overline{1,N}$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим. Множество точек $(J_1,\ldots,J_N)$ в N-мерном критериальном пространстве, соответствующих всем таким решениям, называется множеством Парето:

$$\mathcal{P} = \{(J_1(\Theta_P),\ldots,J_N(\Theta_P))\}.$$

Оптимальные по Парето решения – это множество неулучшаемых решений в том смысле, что для каждого из них не существует решения, при котором значения всех критериев были бы не больше, чем при данном, а значение хотя бы одного критерия было бы строго меньше.

Самым распространенным методом нахождения оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи является метод скаляризации, т.е. выбора одного критерия в виде, например, линейной свертки этих критериев:

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta) \qquad \alpha \in \mathcal{S} = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N):\ \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\right\}.$$

Назовем линейную свертку $J_\alpha(\Theta)$ оптимальной целевой функцией. Как известно [3], параметры Θ_α, для которых выполняется

$$\min_{\Theta} J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta_\alpha),$$

являются оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Обозначим соответствующее им множество точек в критериальном пространстве через

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{(J_1(\Theta_\alpha),\ldots,J_N(\Theta_\alpha)) \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S}\}.$$

В общем случае ими может не исчерпываться все множество Парето, т.е. $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}$.

Непосредственное нахождение параметров Θ_α для многокритериальной оптимизации квадратов индуцированных норм линейных операторов представляется затруднительным, так как оптимальная целевая функция для этой задачи оказывается линейной комбинацией максимумов разных функционалов. В связи с этим оценим ее снизу, заменяя сумму максимумов на максимум суммы:

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sup_{\xi \in \Xi} \frac{\|\zeta_i\|^2}{\|\xi\|^2} \ge \sup_{\xi \in \Xi} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\|\zeta_i\|^2}{\|\xi\|^2} = \|\Gamma_\alpha(\Theta)\|^2, \tag{1.2}$$

где линейный оператор $\Gamma_\alpha(\Theta)$ определяется как

$$\begin{gathered} \Gamma_\alpha(\Theta):\ \Xi \to \Upsilon = \Upsilon_1 \times \cdots \times \Upsilon_N\ : \xi \mapsto \zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_N), \\ \zeta_i = \alpha_i^{1/2} \Gamma_i(\Theta)\xi, \quad i = \overline{1,N}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

а скалярное произведение в Υ – как

$$\langle \cdot,\cdot \rangle_\Upsilon = \sum_{i=1}^{N} \langle \cdot,\cdot \rangle_{\Upsilon_i}.$$

Назовем $\hat{J}_\alpha(\Theta) = \|\Gamma_\alpha(\Theta)\|^2$ субоптимальной целевой функцией, а параметры $\hat{\Theta}_\alpha$, оптимальные по отношению к $\hat{J}_\alpha(\Theta)$, при которых

$$\min_{\Theta} \hat{J}_\alpha(\Theta) = \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha),$$

назовем субоптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Покажем, что можно указать границы области критериального пространства, в которой находится подмножество $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, и тем самым оценить степень субоптимальности решений $\hat{\Theta}_\alpha$.

Равенство

$$J_\alpha(\Theta_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$$

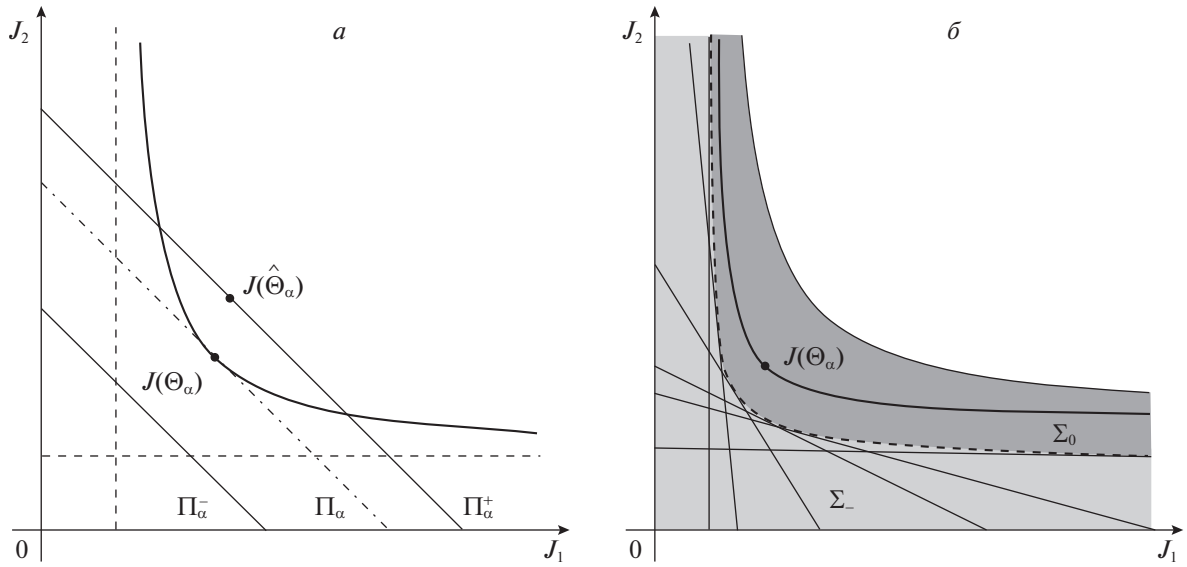

Рис. 1. Построение области Σ_0, содержащей точки множества Парето

означает, что в критериальном пространстве точка $J(\Theta_\alpha)$ с координатами $(J_1(\Theta_\alpha),\ldots,J_N(\Theta_\alpha))$ принадлежит гиперплоскости Π_α (см. рис. 1, *а*), уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}}J = \mu(\alpha)$, где $n_\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^{\mathrm{T}}$, $J = (J_1,\ldots,J_N)^{\mathrm{T}}$. Гиперплоскость Π_α отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha = |n_\alpha|^{-1}\mu(\alpha)$. Так как

$$\mu_+(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i J_i(\hat{\Theta}_\alpha) \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha), \tag{1.4}$$

то субоптимальным по Парето решениям $\hat{\Theta}_\alpha$ соответствует точка $J(\hat{\Theta}_\alpha)$, принадлежащая гиперплоскости Π_α^+, уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}}J = \mu_+(\alpha)$. Эта плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha^+ = |n_\alpha|^{-1}\mu_+(\alpha) \geq d_\alpha$.

Из справедливости неравенств

$$\mu(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = J_\alpha(\Theta_\alpha) \geq \hat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \geq \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha) \tag{1.5}$$

следует, что точка $J(\Theta_\alpha)$ удалена от начала координат не меньше, чем на $d_\alpha^- = |n_\alpha|^{-1}\mu_-(\alpha)$ – расстояние от плоскости Π_α^- с уравнением $n_\alpha^{\mathrm{T}}J = \mu_-(\alpha)$ до начала координат, т.е. $d_\alpha \geq d_\alpha^-$. Таким образом, точка $J(\Theta_\alpha)$ находится между двумя параллельными гиперплоскостями Π_α^- и Π_α^+.

Заметим, что гиперплоскость Π_α^0, параллельная гиперплоскостям Π_α^- и Π_α^+ и проходящая через точку $(\min_\Theta J_1(\Theta),\ldots,\min_\Theta J_N(\Theta))$, описывается уравнением

$$n_\alpha^{\mathrm{T}}J = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \min_\Theta J_i(\Theta).$$

Следовательно, гиперплоскость Π_α^- находится на большем расстоянии от начала координат, чем Π_α^0, при выполнении условия

$$\min_\Theta \hat{J}_\alpha(\Theta) = \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha) > \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \min_\Theta J_i(\Theta).$$

Определим в пространстве критериев для любого набора $\alpha \in \mathcal{S}$ следующие множества:

$$\Sigma_\alpha^- = \left\{ (J_1,\ldots,J_N) : \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i < \hat{J}_\alpha\left(\hat{\Theta}_\alpha\right), \quad J_i \geq 0, \quad i = \overline{1,N} \right\},$$

$$\Sigma_\alpha^+ = \left\{ (J_1,\ldots,J_N) : \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i\left(\hat{\Theta}_\alpha\right), \quad J_i \geq 0, \quad i = \overline{1,N} \right\}, \tag{1.6}$$

$$\Sigma_- = \bigcup_{\alpha \in S} \Sigma_\alpha^-, \quad \Sigma_+ = \bigcup_{\alpha \in S} \Sigma_\alpha^+, \quad \Sigma_0 = \Sigma_+ \backslash \Sigma_-.$$

Докажем, что точки $J(\Theta_\alpha) \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}$ принадлежат множеству Σ_0 (см. рис. 1,*б*).

Действительно, так как

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i\left(\hat{\Theta}_\alpha\right) = \mu_+(\alpha),$$

то $J(\Theta_\alpha) \in \Sigma_+$. Покажем, что для произвольного фиксированного набора $\hat{\alpha} \in \mathcal{S}$ точка $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_-$, т.е. $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_\alpha^-$ для любого $\alpha \in \mathcal{S}$. Из (1.5) следует, что $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_{\hat{\alpha}}^-$. Предположим, что для некоторого $\alpha \neq \hat{\alpha}$ выполнено $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \in \Sigma_\alpha^-$, т.е.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\hat{\alpha}}) < \mu_-(\alpha).$$

Так как

$$\hat{J}_\alpha\left(\hat{\Theta}_\alpha\right) \leq \hat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \leq J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

то

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\hat{\alpha}}) < \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha),$$

т.е. $J_\alpha(\Theta_{\hat{\alpha}}) < J_\alpha(\Theta_\alpha)$. Это противоречит тому, что Θ_α обеспечивает минимум линейной свертки $J_\alpha(\Theta)$. Таким образом, $\Theta_\alpha \in \Sigma_0$ и можно сформулировать следующий основной результат.

Теорема 1. В задаче многокритериальной оптимизации квадратов индуцированных норм (1.1) линейных операторов $\Gamma_i(\Theta)$, $i = \overline{1,N}$, множество точек $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}$ критериального пространства, которые соответствуют оптимальным по Парето параметрам Θ_α, минимизирующим оптимальную целевую функцию $J_\alpha(\Theta)$ в виде линейной свертки (1.2), принадлежит множеству Σ_0, определенному в (1.6) в терминах субоптимальной целевой функции $\hat{J}_\alpha(\Theta)$ в виде квадрата индуцированной нормы оператора $\Gamma_\alpha(\Theta)$, определенного в (1.3).

В двукритериальных задачах нижней и верхней границами области, которой принадлежит множество $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ в пространстве критериев (J_1, J_2), являются “огибающие” семейства прямых:

$$\alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \hat{J}_\alpha\left(\hat{\Theta}_\alpha\right), \quad \alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \alpha J_1\left(\hat{\Theta}_\alpha\right) + (1-\alpha) J_2\left(\hat{\Theta}_\alpha\right) \quad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Заметим, что значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ отвечают прямые $J_1 = \min_\Theta J_1(\Theta)$ и $J_2 = \min_\Theta J_2(\Theta)$ соответственно.

Для количественной оценки близости значений функционалов при найденных субоптимальных решениях $\hat{\Theta}_\alpha$ и неизвестных оптимальных решениях Θ_α введем показатель субоптимальности

$$\eta = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{d_\alpha^+ - d_\alpha^-}{d_\alpha^+} = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\mu_+(\alpha) - \mu_-(\alpha)}{\mu_+(\alpha)},$$

определяемый по относительной величине максимального “расстояния” между границами множества Σ_0. Чем ближе η к нулю, тем точнее оценка множества Парето и тем ближе друг к другу значения соответствующих критериев при субоптимальных и оптимальных решениях.

1.2. Двойственная многокритериальная задача. Пусть теперь имеются N линейных ограниченных операторов, зависящих от параметров Θ и отображающих линейные пространства Ξ_i со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Xi_i}$ в линейное пространство Υ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Upsilon}$, т.е.

$$\Lambda_i(\Theta):\ \Xi_i \to \Upsilon:\ \xi_i \mapsto \zeta, \quad i=\overline{1,N}.$$

Рассмотрим многокритериальную задачу минимизации квадратов индуцированных норм этих операторов:

$$J_i(\Theta) = \|\Lambda_i(\Theta)\|^2 = \sup_{\xi_i\in\Xi_i}\frac{\|\zeta\|^2}{\|\xi_i\|^2}, \quad i=\overline{1,N}. \tag{1.7}$$

Для нахождения субоптимальной целевой функции, позволяющей определить субоптимальные решения и локализовать множество Парето в этой задаче, применим теорию двойственности. А именно определим сопряженные линейные операторы

$$\Lambda_i^*(\Theta):\ \Upsilon \to \Xi_i:\ \hat\zeta \mapsto \hat\xi_i, \quad \langle\Lambda_i(\Theta)\xi_i,\hat\zeta\rangle_{\Upsilon} = \langle\xi_i,\Lambda_i^*(\Theta)\hat\zeta\rangle_{\Xi_i}.$$

Поскольку нормы взаимно сопряженных линейных ограниченных операторов равны, запишем критерии рассматриваемой задачи как $J_i(\Theta) = \|\Lambda_i^*(\Theta)\|^2$, $i=\overline{1,N}$. Согласно изложенному в предыдущем разделе, выберем субоптимальную целевую функцию в виде $\hat J_\alpha(\Theta) = \|\Lambda_\alpha(\Theta)\|^2$, где

$$\Lambda_\alpha(\Theta):\ \Upsilon \to \Xi = \Xi_1\times\cdots\times\Xi_N\ :\hat\zeta \mapsto \hat\xi = \left(\hat\xi_1,\ldots,\hat\xi_N\right), \quad \hat\xi_i = \alpha_i^{1/2}\Lambda_i^*(\Theta)\hat\zeta.$$

Мы получили субоптимальную целевую функцию, выраженную в терминах линейных операторов, сопряженных к заданным. Сделаем еще один шаг и найдем сопряженный оператор к $\Lambda_\alpha(\Theta)$, имеющий такую же индуцированную норму. Так как

$$\langle\Lambda_\alpha(\Theta)\hat\zeta,\xi\rangle_{\Xi} = \sum_{i=1}^N\langle\alpha_i^{1/2}\hat\xi_i,\xi_i\rangle_{\Xi_i} = \sum_{i=1}^N\langle\alpha_i^{1/2}\Lambda_i^*(\Theta)\hat\zeta,\xi_i\rangle_{\Xi_i} = \left\langle\hat\zeta,\sum_{i=1}^N\alpha_i^{1/2}\Lambda_i(\Theta)\xi_i\right\rangle_{\Upsilon} = \langle\hat\zeta,\Lambda_\alpha^*(\Theta)\xi\rangle_{\Upsilon},$$

то

$$\Lambda_\alpha^*(\Theta):\ \Xi = \Xi_1\times\cdots\times\Xi_N \to \Upsilon : \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N) \mapsto \zeta = \sum_{i=1}^N\alpha_i^{1/2}\Lambda_i(\Theta)\xi_i. \tag{1.8}$$

Таким образом, для рассматриваемой многокритериальной задачи с критериями (1.7) верно утверждение теоремы 1, где в качестве субоптимальной целевой функции выступает $\hat J_\alpha(\Theta) = \|\Lambda_\alpha^*(\Theta)\|^2$.

2. Применение к многокритериальным задачам оптимального управления и фильтрации. 2.1. Обобщенная H_∞-норма. Применим изложенные выше результаты к синтезу субоптимальных по Парето регуляторов и фильтров для линейных динамических систем вида

$$\begin{aligned}\dot x &= A(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0,\\ z &= C(t)x + D(t)v, \quad t\in[t_0,\ t_f].\end{aligned} \tag{2.1}$$

В качестве линейного оператора в этих задачах выберем отображение пары $(x(t_0), v(t)) \in \mathrm{R}^n\times L_2 = \Xi_0$, состоящей из начального состояния системы и возмущения на входе, в пару $(x(t_f), z(t)) \in \mathrm{R}^n\times L_2 = \Upsilon_0$, состоящую из терминального состояния и целевого выхода системы. Скалярные произведения в соответствующих пространствах определим как

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Xi_0} &= x_1^{\mathrm T}(t_0)R^{-1}x_2(t_0) + \langle v_1(t),v_2(t)\rangle_{L_2},\\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\Upsilon_0} &= x_1^{\mathrm T}(t_f)Sx_2(t_f) + \langle z_1(t),z_2(t)\rangle_{L_2},\end{aligned}$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и $S = S^{\mathrm{T}} \geq 0$ – весовые матрицы. Индуцированной нормой такого оператора будет обобщенная H_∞-норма [23]:

$$\|\Gamma\|_{g\infty}^2 = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|_{[t_0,t_f]}^2 + x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0,t_f]}^2}, \tag{2.2}$$

где предполагается, что знаменатель не обращается в ноль. Если начальное состояние нулевое, то обобщенная H_∞-норма переходит в стандартную H_∞-норму, а в отсутствие возмущений, т.е. при $v(t) \equiv 0$, переходит в так называемую γ_0-норму [24, 25], применяемую при синтезе линейно-квадратичного управления при неизвестном начальном состоянии системы. Если целевой выход не учитывается, т.е. $z(t) \equiv 0$, обобщенная H_∞-норма характеризует терминальное состояние системы и тем самым определяет границу области достижимости системы при всех допустимых начальных и внешних возмущениях. Напротив, при $S = 0$ терминальное состояние в этой норме не учитывается.

В следующей теореме сформулированы условия, при которых обобщенная H_∞-норма на конечном горизонте ограничена сверху заданным значением параметра $\gamma > 0$.

Т е о р е м а 2. Пусть выполняется неравенство

$$\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(t) D(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{2.3}$$

Следующие утверждения эквивалентны:

i) обобщенная H_∞-норма системы (2.1) удовлетворяет неравенству $\|\Gamma\|_{g\infty} < \gamma$;

ii) дифференциальные линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -\dot{Y}(t) + Y(t)A^{\mathrm{T}}(t) + A(t)Y(t) & B(t) & Y(t)C^{\mathrm{T}}(t) \\ B^{\mathrm{T}}(t) & -I & D^{\mathrm{T}}(t) \\ C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} Y(t_f) & Y(t_f)S^{1/2} \\ S^{1/2}Y(t_f) & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0 \tag{2.5}$$

при $Y(t_0) = R$ разрешимы относительно $Y(t) > 0$ и $\gamma^2 > 0$;

iii) дифференциальные линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X(t)A(t) & X(t)B(t) & C^{\mathrm{T}}(t) \\ B^{\mathrm{T}}(t)X(t) & -\gamma^2 I & D^{\mathrm{T}}(t) \\ C(t) & D(t) & -I \end{pmatrix} \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \tag{2.6}$$

$$X(t_0) < \gamma^2 R^{-1} \tag{2.7}$$

при $X(t_f) = S$ разрешимы относительно $X(t)$ и $\gamma^2 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала эквивалентность условий i) и ii). Пусть выполнено неравенство $\|\Gamma\|_{g\infty} < \gamma$, покажем, что это влечет выполнение неравенств (2.4) и (2.5). На траекториях системы (2.1) определим функционал

$$\bar{J}(v) = \gamma^2[\|v\|_{[t_0,t_f]}^2 + x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0] - \|z\|_{[t_0,\, t_f]}^2. \tag{2.8}$$

С учетом (2.2) неравенство $\|\Gamma\|_{g\infty} < \gamma$ эквивалентно неравенству

$$\bar{J}(v) > x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f) \quad \forall x_0 \in \mathrm{R}^{n_x}, \quad \forall v \in L_2 : \; x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0,t_f]}^2 \neq 0. \tag{2.9}$$

Поставим задачу минимизации этого функционала относительно v, которую будем решать методом динамического программирования.

С этой целью введем вдоль траектории системы функцию Беллмана

$$V(t,x) = \min_{v(\tau),\tau\in[t_0,t]}\{\gamma^2[\|v\|^2_{[t_0,t]} + x_0^{\mathrm{T}}R^{-1}x_0] - \|z\|^2_{[t_0,t]}\}, \tag{2.10}$$

где $x = x(t)$ – состояние системы в момент времени t. Запишем соответствующее уравнение Беллмана

$$\min_{v(t)}(-\dot{V} - |z|^2 + \gamma^2|v|^2) = 0, \quad V(t_0,x) = \gamma^2 x^{\mathrm{T}}R^{-1}x, \tag{2.11}$$

где $|a|$ – евклидова норма вектора a. Решая задачу на экстремум и полагая в качестве функции Беллмана квадратичную форму $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(t)x$, находим матрицу Q, удовлетворяющую уравнению Риккати:

$$\begin{gathered}\dot{Q} = AQ + QA^{\mathrm{T}} + QC^{\mathrm{T}}CQ + (B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ)^{\mathrm{T}}(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ),\\ Q(t_0) = \gamma^{-2}R.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь для сокращения записи опущен аргумент t у матриц, фигурирующих в матричном дифференциальном уравнении. Заметим, что из положительной полуопределенности квадратичных слагаемых в правой части дифференциального уравнения (2.12) и положительной определенности матрицы $Q(t_0)$ следует положительная определенность решения, т.е. $Q(t) > 0, t \in [t_0, t_f]$, и, следовательно, матрица $Q(t)$ обратима на всем рассматриваемом отрезке.

Обратимся опять к уравнению Беллмана (2.11), из которого следует что вдоль траектории системы (2.1) при любых возмущениях $v(t)$ для найденной функции Беллмана $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(t)x$ выполняется неравенство

$$\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0, \tag{2.13}$$

которое принимает вид квадратичного неравенства $\xi^{\mathrm{T}}M\xi \le 0$, $\xi^{\mathrm{T}} = (x^{\mathrm{T}} \;\; v^{\mathrm{T}})$ с отрицательно полуопределенной матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1} + A^{\mathrm{T}}Q^{-1} + Q^{-1}A + C^{\mathrm{T}}C & Q^{-1}B + C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}Q^{-1} + D^{\mathrm{T}}C & -(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D) \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу M слева и справа на положительно определенную матрицу $L = \mathrm{diag}(Q \;\; I)$, получим

$$LML = \begin{pmatrix} -\dot{Q} + QA^{\mathrm{T}} + AQ + QC^{\mathrm{T}}CQ & B + QC^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ & -(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D) \end{pmatrix} \le 0.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Шура [26] и делая замену $Q = \gamma^{-2}Y$, получаем матричное неравенство

$$\begin{gathered}-\dot{Y} + AY + YA^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}YC^{\mathrm{T}}CY +\\ +(B^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}CY)^{\mathrm{T}}(I - \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(B^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}CY) \le 0,\end{gathered} \tag{2.14}$$

которое повторным применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (2.4). Заметим далее, что, согласно (2.12), $Y(t_0) = R$. Наконец, используя неравенство (2.9), получаем квадратичное неравенство

$$\min_v \bar{J}(v) = \gamma^2 x^{\mathrm{T}}(t_f)Y^{-1}(t_f)x(t_f) > x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)$$

или матричное неравенство

$$\gamma^2 Y^{-1}(t_f) > S, \tag{2.15}$$

которое с применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (2.5). Таким образом, показано, что из i) следует ii).

Докажем теперь, что из ii) следует i). Пусть линейные матричные неравенства (2.4) и (2.5) разрешимы относительно $Y(t) > 0$ при $t \in [t_0,\ t_f]$ и $\gamma^2 > 0$. Тогда непосредственно проверяется, что для квадратичной формы $V = \gamma^2 x^{\mathrm{T}} Y^{-1}(t)\, x$ на траекториях системы (2.1) выполняется

$$\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \le 0. \tag{2.16}$$

Интегрируя неравенства (2.16) на отрезке $[t_0, t_f]$ и учитывая (2.15), получаем

$$\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)\, Sx(t_f) < \gamma^2 [\|v\|^2_{[t_0,t_f]} + x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0] \tag{2.17}$$

для любых допустимых возмущений v и начальных условий системы x_0. Отсюда следует $\|\Gamma\|_{g\infty} < \gamma$, и поэтому из ii) вытекает i).

Покажем далее эквивалентность условий i) и iii). На траекториях системы (2.1) определим функционал

$$\hat{J}(v) = \|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)\, Sx(t_f) - \gamma^2 \|v\|^2_{[t_0,t_f]}. \tag{2.18}$$

С учетом (2.2) неравенство $\|\Gamma\|_{g\infty} < \gamma$ эквивалентно неравенству

$$\hat{J}(v) < \gamma^2 x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 \ \ \forall x_0 \in \mathrm{R}^{n_x}, \quad \forall v \in L_2 :\ x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,t_f]} \ne 0. \tag{2.19}$$

Поставим задачу максимизации этого функционала относительно v, которую будем решать методом динамического программирования. Вдоль траектории системы введем функцию Беллмана

$$V(t,x) = \max_{v(\tau),\ \tau\in[t,t_f]} \left\{ \|z\|^2_{[t,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)\, Sx(t_f) - \gamma^2 \|v\|^2_{[t,t_f]} \right\}, \tag{2.20}$$

где $x = x(t)$ — состояние системы в момент времени t. Соответствующее уравнение Беллмана имеет вид

$$\max_{v(t)} (\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2) = 0, \quad V(t_f, x) = x^{\mathrm{T}} Sx. \tag{2.21}$$

Решая задачу на экстремум и полагая в качестве функции Беллмана квадратичную форму $x^{\mathrm{T}} X(t)\, x$, находим матрицу X, удовлетворяющую уравнению Риккати:

$$\begin{gathered} \dot{X} + A^{\mathrm{T}} X + XA + C^{\mathrm{T}} C + (B^{\mathrm{T}} X + D^{\mathrm{T}} C)^{\mathrm{T}} (\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}} D)^{-1} (B^{\mathrm{T}} X + D^{\mathrm{T}} C) = 0, \\ X(t_f) = S. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Из уравнения Беллмана (2.21) следует, что вдоль траектории системы (2.1) при любых возмущениях $v(t)$ для найденной функции Беллмана $V(t,x) = x^{\mathrm{T}} X(t)\, x$ выполняется неравенство

$$\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \le 0, \tag{2.23}$$

которое принимает вид квадратичного неравенства $\xi^{\mathrm{T}} \hat{M} \xi \le 0$, $\xi^{\mathrm{T}} = (x^{\mathrm{T}}\ v^{\mathrm{T}})$ с отрицательно полуопределенной матрицей:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \dot{X} + A^{\mathrm{T}} X + XA + C^{\mathrm{T}} C & XB + C^{\mathrm{T}} D \\ B^{\mathrm{T}} X + D^{\mathrm{T}} C & D^{\mathrm{T}} D - \gamma^2 I \end{pmatrix}.$$

Применение к этому неравенству леммы Шура приводит к дифференциальному линейному матричному неравенству (2.6). С учетом неравенства (2.19) получаем квадратичное неравенство

$$\max_v \hat{J}(v) = x_0^{\mathrm{T}} X(t_0)\, x_0 < \gamma^2 x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0,$$

которое влечет линейное матричное неравенство (2.7). Таким образом, показано, что из i) следует iii).

Доказательство того, что из iii) следует i), проводится аналогично факту, что из ii) следует i). Таким образом, показана эквивалентность i) и iii). Теорема полностью доказана.

Для вычисления обобщенной H_∞-нормы предлагается следующая процедура. Введем на отрезке $[t_0, t_f]$ равномерную сетку $t_k = t_{k-1} + h$, $k = \overline{1, N}$, где $h = (t_f - t_0)/N$, и проведем дискретизацию неравенства (2.4). В результате получаем следующую стандартную задачу полуопределенного программирования, решаемую средствами пакета Matlab (см., например, [2]): найти минимальное значение γ^2 при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -(Y_{k+1} - Y_k)/h + Y_k A_k^{\mathrm{T}} + A_k Y_k & B_k & Y_k C_k^{\mathrm{T}} \\ B_k^{\mathrm{T}} & -I & D_k^{\mathrm{T}} \\ C_k Y_k & D_k & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \le 0, \quad Y_k > 0, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{2.24}$$

$$Y_0 = R, \quad \begin{pmatrix} Y_N & Y_N S^{1/2} \\ S^{1/2} Y_N & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0. \tag{2.25}$$

Аналогичным образом обобщенная H_∞-норма вычисляется на основе неравенства (2.6).

Для стационарных систем вида (2.1) на бесконечном горизонте обобщенная H_∞-норма определяется как в (2.2) при $S = 0$, $t_f = \infty$ и характеризуется строгими линейными матричными неравенствами (2.4) при $Y(t) \equiv Y$, $\dot{Y} \equiv 0$ или (2.6), (2.7) при $X(t) \equiv X$, $\dot{X} \equiv 0$ [27, 28].

2.2. Синтез субоптимальных по Парето регуляторов и фильтров. Для того, чтобы компактно и единообразно изложить синтез субоптимальных по Парето регуляторов и фильтров, будем записывать уравнения системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, \\ z &= C(t)x + D(t)v + D_u(t)u \end{aligned}$$

с линейной обратной связью $u = \Theta(t)x$ и уравнения ошибок оценивания состояния системы и целевого выхода системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \\ y &= C_y(t)x + D_y(t)v, \\ z &= C_z(t)x + D_z(t)v \end{aligned} \tag{2.26}$$

с помощью наблюдателя, заданного уравнением

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + \Theta(t)[y - C_y(t)\hat{x}], \quad \hat{z} = C_z\hat{x},$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\Theta(t)x + B_\Theta(t)v, \\ z &= C_\Theta(t)x + D_\Theta(t)v. \end{aligned}$$

Здесь для задачи управления

$$\begin{aligned} A_\Theta(t) &= A(t) + B_u(t)\Theta(t), \quad B_\Theta(t) = B(t), \\ C_\Theta(t) &= C(t) + D_u(t)\Theta(t), \quad D_\Theta(t) = D(t) \end{aligned} \tag{2.27}$$

и для задачи фильтрации

$$\begin{aligned} A_\Theta(t) &= A(t) - \Theta(t)C_y(t), \quad B_\Theta(t) = B(t) - \Theta(t)D_y(t), \\ C_\Theta(t) &= C_z(t), \quad D_\Theta(t) = D_z(t). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Заметим, что при различных возмущениях в системе и измерениях уравнения системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + \hat{B}(t)v_1, \\ y &= C_y(t)x + \hat{D}_y(t)v_2 \end{aligned}$$

приводятся к виду двух первых уравнений в (2.26) при $v = \mathrm{col}(v_1, v_2)$, $B(t) = (\hat{B}(t)\ 0)$, $D_y(t) = (0\ \ \hat{D}_y(t))$.

Рассмотрим сначала многокритериальную задачу для системы с одним входом для возмущения и N целевыми выходами:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\Theta(t)x + B_\Theta(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ z_i &= C_{\Theta,i}(t)x + D_{\Theta,i}(t)v, \quad i = \overline{1,N} \end{aligned} \tag{2.29}$$

с квадратами обобщенных H_∞-норм выходов z_i в качестве критериев, т.е.

$$J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_0,v} \frac{\|z_i\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)S_i x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,t_f]}}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{2.30}$$

В данном случае оператор $\Gamma_\alpha(\Theta)$, определенный в (1.3), отображает пару $(x(t_0), v(t))$ в набор пар $((\alpha_1^{1/2}x(t_f), \alpha_1^{1/2}z_1(t)); \ldots; (\alpha_N^{1/2}x(t_f), \alpha_N^{1/2}z_N(t)))$, где $x(t_f)$ и $z_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.29) с начальными условиями $x(t_0)$ и возмущением $v(t)$, а квадрат его индуцированной нормы равен

$$\|\Gamma_\alpha(\Theta)\|^2_{g\infty} = \sup_{x_0,v} \frac{\|z_\alpha\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)S_\alpha x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,t_f]}}, \quad S_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_i,$$

где $z_\alpha(t)$ – выход системы (2.29), определяемый как

$$\begin{gathered} z_\alpha(t) = C_{\Theta,\alpha}(t)x + D_{\Theta,\alpha}(t)v, \\ C_{\Theta,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2}C_{\Theta,1}(t) \\ \cdots \\ \alpha_N^{1/2}C_{\Theta,N}(t) \end{pmatrix}, \quad D_{\Theta,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2}D_{\Theta,1}(t) \\ \cdots \\ \alpha_N^{1/2}D_{\Theta,N}(t) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.31}$$

Таким образом, субоптимальная целевая функция для этой задачи, совпадающая с квадратом нормы оператора $\Gamma_\alpha(\Theta)$, является квадратом обобщенной H_∞-нормы комбинированного выхода z_α системы (2.29) с матрицей терминального состояния S_α.

Субоптимальными по Парето регуляторами или фильтрами являются обобщенные H_∞-оптимальные решения по отношению к этой норме для всех $\alpha \in S$, которые находятся на основе теоремы 2. А именно для задачи управления подставим в неравенства (2.4), (2.5) соответствующие матрицы (2.27) и обозначим $Z_1(t) = \Theta(t)Y(t)$. Применяя вычислительную процедуру, описанную в разд. 2.1, находим параметры регулятора $\Theta(t_k) = Z_1(t_k)Y^{-1}(t_k)$. Для задачи фильтрации подставим в неравенства (2.6), (2.7) соответствующие матрицы (2.28), обозначим $Z_2(t) = X(t)\Theta(t)$ и найдем параметры фильтра как $\Theta(t_k) = X^{-1}(t_k)Z_2(t_k)$.

Заметим, что при выборе в одном из критериев в (2.30) $z_1 \equiv 0$ и $S_1 = I$, а в другом – $z_2 \not\equiv 0$ и $S_2 = 0$ находятся управления, обеспечивающие компромисс между величинами евклидовой нормы терминального состояния и интеграла от квадрата евклидовой нормы целевого выхода z_2, характеризующего переходный процесс в системе.

Рассмотрим теперь двойственную многокритериальную задачу для системы с N входами $v_i(t)$ и одним целевым выходом z, когда возмущение поступает только на один из входов. В этой задаче критериями являются квадраты обобщенных H_∞-норм от входа v_i к выходу z:

$$J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_{0,i},v_i,} \frac{\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)}{x_{0,i}^{\mathrm{T}} R^{-1} x_{0,i} + \|v\|^2_{i[t_0,t_f]}}, \quad i = \overline{1,N}$$

для систем

$$\begin{gathered} \dot{x} = A_\Theta(t)x + B_{\Theta,i}(t)v_i, \\ z = C_\Theta(t)x + D_{\Theta,i}(t)v_i, \\ x(t_0) = x_{0,i}. \end{gathered}$$

Согласно (1.8), оператор $\Lambda_\alpha^*(\Theta)$ для этой задачи отображает набор пар $((x_{0,1}, v_1(t))$; ...; $(x_{0,N}, v_N(t)))$ в пару $(x(t_f), z(t))$, где $z(t)$ – выход системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\Theta(t)x + (\alpha_1^{1/2}B_{\Theta,1}(t)\ldots\alpha_N^{1/2}B_{\Theta,N}(t))v, \\ z &= C_\Theta(t)x + (\alpha_1^{1/2}D_{\Theta,1}(t)\ldots\alpha_N^{1/2}D_{\Theta,N}(t))v \end{aligned} \tag{2.32}$$

с $v(t) = \mathrm{col}(v_1(t), \ldots, v_N(t))$ при начальном условии

$$x(t_0) = x_0 = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i^{1/2}x_{0,i}.$$

Квадрат индуцированной нормы этого оператора равен

$$\|\Lambda_\alpha^*(\Theta)\|_{g\infty}^2 = \sup_{x_{0,i}, i=\overline{1,N}, v} \frac{\|z\|_{[t_0,t_f]}^2 + x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)}{\sum_{i=1}^{N} x_{0,i}^{\mathrm{T}}R^{-1}x_{0,i} + \|v\|_{[t_0,t_f]}^2}.$$

Так как отношение в правой части этого равенства принимает максимальное значение при $x_{0,i} = \alpha_i^{1/2}x_0$ и при этом

$$\|\Lambda_\alpha^*(\Theta)\|_{g\infty}^2 = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|_{[t_0,t_f]}^2 + x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}}R^{-1}x_0 + \|v\|_{[t_0,t_f]}^2},$$

то субоптимальная целевая функция является обобщенной H_∞-нормой системы (2.32) с входом $v(t)$ и выходом $z(t)$, а субоптимальные по Парето регуляторы и фильтры находятся аналогично тому, как описано выше для прямой многокритериальной задачи.

Изложенные соображения относительно решений прямой и двойственной многокритериальных задач могут быть применены к системам с M входами для возмущений и N целевыми выходами следующего вида:

$$\dot{x} = A_\Theta(t)x + \sum_{j=1}^{M} B_{\Theta,j}(t)v_j,$$

$$z_i = C_{\Theta,i}(t)x + \sum_{j=1}^{M} D_{\Theta,i,j}(t)v_j \qquad i = \overline{1,N}.$$

Обозначая комбинированное возмущение $v = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_M)$ и выбирая в качестве критериев обобщенные H_∞-нормы системы от v к z_i, приведенные в (2.30), приходим к прямой многокритериальной задаче минимизации влияния возмущений на N целевых выходов. В другом случае, обозначая комбинированный целевой выход $z = \mathrm{col}(z_1, \ldots, z_N)$ и выбирая в качестве критериев обобщенные H_∞-нормы системы от v_i к z, приведенные в (1.7) при $N = M$, приходим к двойственной многокритериальной задаче минимизации влияния возмущения в каждом из потенциально возможных входов на комбинированный целевой выход.

3. Результаты математического моделирования. Рассмотрим в качестве примера механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 2, *а* и представляющую собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками *2* и *3*, связанными между собой линейными упругим и диссипативным элементами. Этот объект связан упругим и диссипативным элементами и управляемым элементом (называемым далее виброизолятором) с другим телом *1*, которое является подвижным основанием. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 + v + u, \\ \ddot{x}_2 &= -\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - x_2 + x_1 + v, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где x_1 и x_2 – координаты материальных точек *2* и *3* относительно подвижного основания, u – усилие, создаваемое виброизолятором при его деформации (т.е. при смещении точки *2* относительно точки *1*), v – с точностью до знака ускорение основания (материальной точки *1*), $\beta = 0.1$ –

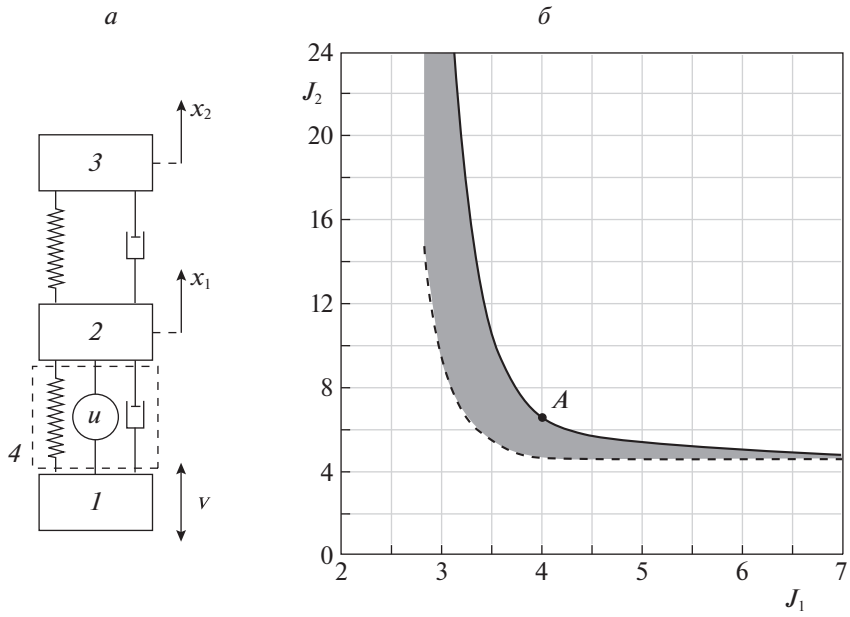

Рис. 2. Множество Парето на плоскости критериев

заданный положительный параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске нестационраного управления $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2 + \theta_3(t)\dot{x}_1 + \theta_4(t)\dot{x}_2$, обеспечивающего как наименьшую возможную деформацию механической системы, так и минимальную силу, противодействующую смещению упругого объекта относительно основания. С этой целью выберем выходы

$$z_1 = (x_1,\ x_2 - x_1)^{\mathrm{T}}, \quad z_2 = -x_1 - \beta\dot{x}_1 + u,$$

и в качестве критериев возьмем обобщенные H_∞-нормы вида (2.2) системы (3.1) относительно этих выходов.

Зададим на интервале времени длительностью $T = 10$ равномерную сетку с шагом $h = 0.05$. Положим $R = I$ и $S_1 = S_2 = I$. Используя вычислительную процедуру, приведенную после доказательства теоремы 2, найдем множество Σ_0 (см. рис. 2, *б*). Отметим, что точки верхней границы множества Σ_0 соответствуют субоптимальным по Парето регуляторам с показателем субоптимальности $\eta = 0.2303$. Точка *A* на верхней границе множества Σ_0 имеет координаты (4.006; 6.536) и соответствует свертке с $\alpha_1 = 0.7$ и $\alpha_2 = 0.3$. На рис. 3 приведены графики зависимости от времени оптимальных коэффициентов обратной связи, отвечающих точке *A*: сплошная кривая соответствует коэффициенту $\theta_1(t)$, пунктирная – $\theta_2(t)$, штрихпунктирная – $\theta_3(t)$ и точечная – $\theta_4(t)$.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу фильтрации на бесконечном горизонте для механической системы с двумя степенями свободы, схема которой показана на рис. 4, *а*. Она представляет собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками *1* и *2*, связанными между собой и основанием линейными упругим и диссипативным элементами. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{x}_1 = -2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 + v_1,$$
$$\ddot{x}_2 = -\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - x_2 + x_1 + w_1,$$
$$y = x_2 - x_1 + 0.7v_2 + 1.1w_2,$$
$$z = (x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}},$$

где x_1 и x_2 – координаты материальных точек *1* и *2* относительно основания, y – измеряемый выход, описывающий смещения между точками *1* и *2*, z – целевой выход, $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ и $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ – внешние возмущения и $\beta = 0.1$ – заданный положительный параметр демпфирования. Будем

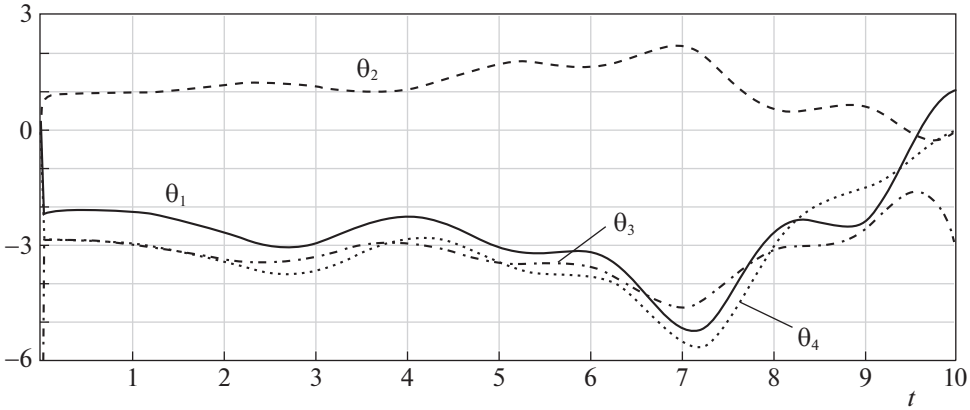

Рис. 3. Графики зависимостей от времени оптимальных коэффициентов обратной связи

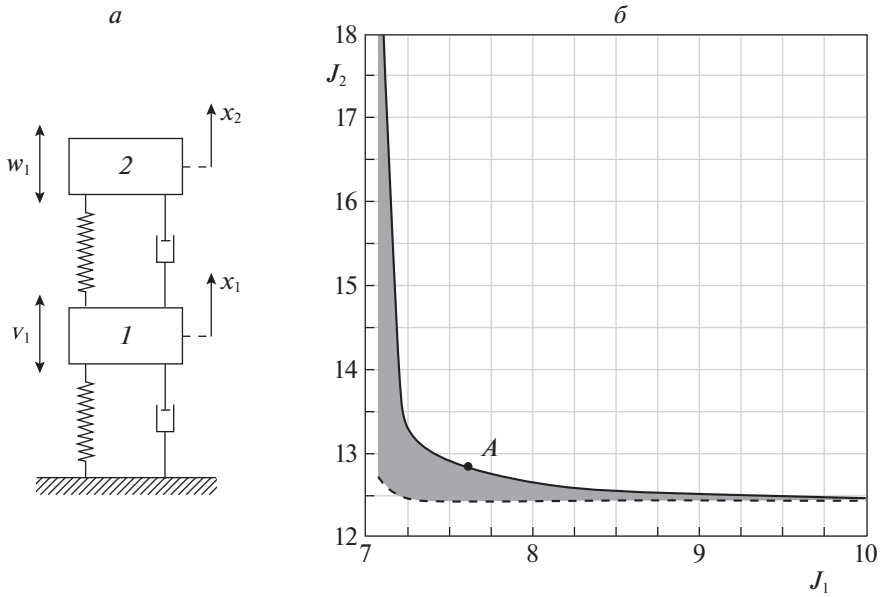

Рис. 4. Двухкритериальная фильтрация состояния механической системы

рассматривать внешние возмущения v и w раздельно, т.е. либо на материальную точку *1* действует возмущение v_1 и в измеряемом выходе присутствует помеха v_2, либо на материальную точку *2* действует возмущение w_1, а в выходе присутствует помеха w_2. Задача состоит в построении фильтра, при котором влияние каждого из возмущений v или w на ошибку фильтрации было бы минимальным.

В численных расчетах использовались неравенства (2.6) и (2.7) теоремы 2 при $R = \mathrm{diag}(0.1I; 0.5I)$. Найденное множество Σ_0 изображено на рис. 4, *б* серым цветом. Точки верхней границы множества Σ_0 соответствуют субоптимальным по Парето фильтрам со значением показателя субоптимальности $\eta = 0.054$. Это свидетельствует о том, что качество фильтрации при полученных фильтрах и оптимальных по Парето отличается незначительно. На верхней границе множества Σ_0 указана точка A с координатами (7.611; 12.812), отвечающая значению $\alpha = 0.65$, в этом случае матрица коэффициентов субоптимального по Парето фильтра равна $\hat{\Theta}_\alpha = (26.488; 42.519; -9.934; 2.450)^{\mathrm{T}}$. Для сравнения приведем матрицы коэффициентов фильтров при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, оптимальных по каждому из критериев:

$$\Theta_0 = (21.252; 33.369; -10.232; 1.440)^{\mathrm{T}}, \quad \Theta_1 = (5.385; 9.372; -1.216; 0.483)^{\mathrm{T}}.$$

Заключение. Показано, что при многокритериальной оптимизации индуцированных норм линейных операторов можно указать единый критерий в виде индуцированной нормы некоторого вспомогательного линейного оператора, оптимизация которого позволяет найти субоптимальные по Парето решения и локализовать в критериальном пространстве множество Парето. Применение этого результата в многокритериальных задачах управления и фильтрации на конечном и бесконечном горизонтах с обобщенными H_∞-нормами в качестве критериев позволяет характеризовать в терминах линейных матричных неравенств субоптимальные по Парето регуляторы и фильтры и оценить степень их субоптимальности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
4. *Ehrgott M.* Multicriteria Optimization. Berlin - Heidelberg: Springer, 2005.
5. *Mäkilä P.M.* On Muptiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. № 12. P. 1311–1313.
6. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Muptiple Objective Optimal Control of Linear Systems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. № 1. P. 14–24.
7. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.
8. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.
9. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized H_2 Control // Automatica. 2019. V. 99. № 1. P. 317–322.
10. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized H_2 Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. № 8. P. 27–34.
11. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. № 7. P. 896–911.
12. *Oliveira M. C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-time Robust Stability Condition // System Control Letters. 1999. V. 37. P. 261–265.
13. *Ebihara Y., Hagiwara T.* New Dilated LMI Characterisations for Continuous-time Control Multi-objective Controller Synthesis // Automatica. 2004. V. 40. P. 2003–2009.
14. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an H_∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. № 3. P. 293–305.
15. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. № 7. P. 824–831.
16. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. № 8. P. 1564–1574.
17. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. № 8. P. 1575–1587.
18. *Chen X., Zhou K.* Multiobjective H_2/H_∞ Control Design // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. № 2. P. 628–660.
19. *Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P.* Multi-objective H_2/H_∞ Optimal Control via Finite Dimensional Q-Parametrization and Linear Matrix Inequalities // Proc. Amer. Control Conf. Philadelphia, USA, 1998. P. 3244–3249.
20. *Баландин Д.В., Коган М.М.* О множестве Парето в задачах управления и фильтрации при детерминированных и стохастических возмущениях // АиТ. 2017. № 1. С. 35–58.
21. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Субоптимальные по Парето регуляторы против коалиций возмущений // АиТ. 2017. № 2. С. 3–26.
22. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto Suboptimal Controllers in Multi-objective Disturbance Attenuation Problems // Automatica. 2017. V. 84. № 10. P. 56–61.
23. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.* H_∞ Control with Transients // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29. № 6. P. 1373–1393.
24. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу оптимального управления при неопределенных начальных условиях // АиТ. 2009. № 11. С. 3–12.
25. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Revisited LQ Output-feedback Control: Minimax Controller for a Set of Initial States // Intern. J. Control. 2009. V. 82. № 11. P. 2051–2058.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
27. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.
28. *Balandin D.V., Kogan M.M.* LMI Based H_∞-optimal Control with Transients // Intern. J. Control. 2010. V. 83. № 8. P. 1664–1673.

EDN: PFUQMG
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 58–61

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

© 2022 г. И. В. Романов

Национальный исследовательский ун-т “Высшая школа экономики”, Москва, Россия
Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия
e-mail: romm1@list.ru

Поступила в редакцию 05.08.2021 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается проблема распределенной управляемости для уравнения Гуртина–Пипкина с ядром, представленным некоторым рядом из убывающих экспоненциальных функций, при этом на коэффициенты и показатели экспонент наложены определенные условия. Доказывается, что приведение данной системы в покой невозможно, если управляющее воздействие приложено даже ко всей области.

DOI: 10.31857/S0002338822020123

Введение. Работа посвящена задачам распределенного управления колебаниями системы, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина. Это уравнение содержит член сверточного (по временной переменной) типа, который часто называют памятью. Впервые данное уравнение появляется в статье [1]. Ставится вопрос о возможности приведения таких систем в состояние покоя. Заметим, что, вообще говоря, это понятие для систем с памятью не эквивалентно приведению системы в нулевое состояние. Как будет ясно в дальнейшем, управляемость в покой для подобных моделей не всегда возможна, даже если управляющее воздействие приложено ко всей области, занимаемой механической системой. В ходе доказательства мы не будем соблюдать должную строгость в части, касающейся разрешимости начально-краевых задач, а уделим больше внимания качественной стороне вопроса управляемости.

Рассмотрим важный класс ядер, имеющий вид ряда из счетного числа убывающих экспоненциальных функций. Также будет упомянуто ядро абелевского типа (ядро с особенностью). Эти ядра применяются в различных моделях механики, в частности для описания некоторых колебательных процессов.

1. Задача о неприводимости в состояние покоя системы, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина и ядром в виде ряда из убывающих экспоненциальных функций. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\theta_t(t,x) = \int_0^t K_1(t-s)\Delta\theta(s,x)ds + u(t,x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

$$\theta|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$\theta(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Здесь и далее

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t},$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151).

где c_j, γ_j – заданные положительные постоянные, такие, что

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_j < \ldots, \quad \gamma_j \to +\infty, \quad j \to +\infty.$$

В данном случае Ω – ограниченная односвязная область в R^n с бесконечно гладкой границей, Δ – оператор Лапласа с областью определения

$$D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$u(t, x)$ – функция управления. Существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) при дополнительных условиях, наложенных на ядро $K_1(t)$ и правую часть u, доказаны в [2].

Для уравнений, "похожих" на (1.1), и в ряде частных случаев (например, [3–5]) удается доказать, что колебания системы можно полностью остановить за конечное время, если управление приложено ко всей области Ω. В [6] доказывается, что механическую систему, описываемую уравнением Гуртина–Пипкина для двумерных областей и широкого класса непрерывных ядер нельзя привести в покой управлением, приложенным только к подобласти, замыкание которой содержится в Ω. Заметим, что $K_1(t)$ является примером такого ядра.

Пусть теперь ядро имеет вид

$$K_2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} t^{-\sigma}, \quad \sigma \in (0,1), \tag{1.4}$$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция. Это ядро Абеля. В [7] для одномерного уравнения теплопроводности с интегральной памятью и ядром (1.4) доказывается неуправляемость в покой данной системы, если управление приложено к одному концу отрезка, а второй конец закреплен. Заметим, что управляемость в покой в этом случае недостижима даже если мы управляем за всю область [8].

Здесь и далее для ядра $K_1(t)$ потребуем выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.1) является интегродифференциальным уравнением Гуртина–Пипкина, которое описывает процесс распространения тепла в средах с памятью, процесс распространения звука в вязкоупругих средах, а также оно возникает в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси). Заметим, что в ряде моделей производная $K_1'(t)$ от ядра имеет особенность при $t = 0$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j = +\infty. \tag{1.6}$$

Подробно с описанием моделей для условий (1.5), (1.6) и физических законов можно ознакомиться в статье [2].

Будем говорить, что система *управляема в состояние покоя*, если для всех начальных условий φ найдется управление $u(t, x)$ и момент времени $T > 0$ такой, что $u(t, x)$ тождественно равно нулю для $t > T$ и соответствующее решение $\theta(t, x, u)$ задачи (1.1)–(1.3) также тождественно равно нулю для $t > T$. Заметим, что для систем с памятью понятия управляемость в состояние покоя и управляемость в нулевое состояние не являются тождественными. Во многих случаях решение, достигнув нулевого значения в какой-то момент времени, затем может из этого значения выйти.

Для уравнений вида (1.1) и различных типов ядер можно поставить, например, следующие задачи управления: привести в покой, управляя за фиксированную подобласть, движущийся компакт или за всю область Ω. Можно также поставить задачу граничного управления, как это сделано, например, в [6, 7]. В данной статье будет показано, что для ядра $K_1(t)$ управляемости в покой для системы (1.1)–(1.3) нет, если управление производится даже за всю область. Остаются открытыми вопросы о возможности приведения в покой для некоторых других типов ядер. Для "похожих" уравнений иногда можно добиться управляемости в покой, если управление приложено к движущемуся по некоторому закону компакту (при этом управляемости за фиксированную подобласть нет). Например, проблема управляемости в покой для одномерного уравнения колебания струны с памятью рассмотрена в [9]. В этом случае ядро в интегральном члене урав-

нения тождественно равно единице и управление сосредоточено на подотрезке (части струны), который движется с постоянной скоростью.

Покажем, что в задаче управления (1.1)–(1.3) для ядра $K_1(t)$ привести систему в покой (вообще говоря) невозможно. А именно рассмотрим управление

$$u(t) \in L_2((0,T);\, L_2(\Omega)),$$

продолженное нулем при $t > T$. Далее докажем, что найдется такое начальное условие $\varphi(x)$, при котором движение системы невозможно остановить. Точнее, существует начальное условие $\varphi(x)$, такое, что для каждой функции управления $u(t,x)$, которая тождественно равна нулю при $t > T$ для некоторого $T > 0$, соответствующее решение не может быть тождественно равно нулю вне ограниченного сегмента (по переменной t).

Определение. Показателем сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ называется число

$$\tau = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^\alpha} < +\infty\right\}.$$

Теорема. Предположим, что выполнено условие (1.5) и для последовательности показателей $\{\gamma_k\}$ ядра $K_1(t)$ $\tau > 1$. Тогда управляемость в состояние покоя для системы (1.1)–(1.3) не имеет места.

Доказательство. Рассмотрим ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_n\}$ и собственные значения $-a_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ оператора Δ относительно краевого условия (1.3). Пусть

$$\varphi(x) = \xi_1 \psi_1(x),$$

где $\xi_1 \neq 0$. Разложим решение $\theta(t,x)$ и управляющее воздействие $u(t,x)$ в ряды Фурье по упомянутой системе собственных функций (это базис в $L_2(\Omega)$). В результате получается счетная система интегродифференциальных уравнений:

$$\dot{\theta}_n(t) = -a_n^2 \int_0^t K_1(t-s)\theta_n(s)ds + u_n(t), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Очевидно, что, в силу выбора φ, только первое уравнение из системы (1.7) имеет ненулевое начальное условие.

Сделаем преобразование Лапласа от обеих частей в равенстве (1.7) для $n = 1$:

$$(\lambda + a_1^2 \hat{K}_1(\lambda))\hat{\theta}_1(\lambda) = \xi_1 + \hat{u}_1(\lambda). \tag{1.8}$$

Напомним определение пространства PW_+ как линейного пространства образов преобразований Лапласа от элементов из $L_2(0,+\infty)$, таких, что они равны нулю на множестве $\{t : t > T\}$ для некоторого $T > 0$. Известно, что $f(\lambda) \in PW_+$, если и только если она является целой функцией, такой, что:

1) существуют вещественные числа C и T, такие, что $|f(\lambda)| \leq Ce^{T|\lambda|}$ (заметим, что C и T зависят от $f(\lambda)$);

2) $\sup\limits_{x \geq 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dy < +\infty.$

Предположим, что система (1.1)–(1.3) управляема в состояние покоя, тогда функции $\hat{\theta}_1(\lambda)$ и $\hat{u}_1(\lambda)$ являются элементами пространства PW_+. Следовательно, это целые функции экспоненциального типа.

Рассмотрим теперь корни уравнения

$$\lambda + a_1^2 \hat{K}_1(\lambda) = 0. \tag{1.9}$$

В [2] доказывается, что уравнение (1.9) имеет (в том числе) счетное число вещественных корней $\{\lambda_k\}$, для которых выполнены неравенства:

$$-\gamma_{k+1} < \lambda_k < -\gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

Из (1.10) и условия теоремы следует, что показатель сходимости τ для последовательности корней $\{\lambda_k\}$ больше единицы.

По определению целая функция $f(\lambda)$ имеет конечный порядок роста, если найдется число $\mu > 0$, такое, что

$$\max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)| < e^{r^{\mu}}, \quad r \geq r_0(\mu). \tag{1.11}$$

При этом *порядком роста* ρ целой функции $f(\lambda)$ называется нижняя грань тех $\mu > 0$, для которых верно (1.11).

Очевидно, что для целой функции экспоненциального типа порядок роста ρ равен 1. В комплексном анализе хорошо известно, что показатель сходимости последовательности нулей целой функции не превосходит ее порядка роста ($\tau \leq \rho$). Из (1.8) следует, что последовательность $\{\lambda_k\}$ –нули функции $\xi_1 + \hat{u}_1(\lambda)$. Но это целая функция экспоненциального типа, следовательно, ее порядок роста равен 1 и показатель сходимости последовательности ее нулей не превосходит 1. При этом выше было установлено, что для $\{\lambda_k\}$ число τ больше единицы. Установленное противоречие доказывает теорему.

Заключение. “Неустойчивость” управляемости для ядра, состоящего из конечного числа экспонент. Если ядро в уравнении (1.1) состоит лишь из конечного числа убывающих экспоненциальных функций, то, используя методы работ [3, 4], можно доказать, что рассматриваемую механическую систему можно привести в покой за конечное время, если управление приложено ко всей области. Поэтому из доказанной теоремы можно получить важное следствие о “неустойчивости” управляемости этой системы. Заметим, что эта “неустойчивость” связана с добавлением к новому ядру малого возмущения, т.е., согласно доказанной теореме, управляемость теряется, если это возмущение представляет собой остаток ряда $K_1(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* Theory of Heat Conduction With Finite Wave Speed // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113–126.
2. *Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S.* Spectral Analysis and Correct Solvability of Abstract Integro-Differential Equations Arising in Thermophysics and Acoustics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011. V. 39. P. 36–65.
3. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory // J. Dynamical and Control Systems. 2013. V. 18. № 4. P. 611–623.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by the Wave Equation With Memory // arXiv. doi 1503.04461.
5. *Romanov I., Romanova A.* Some Problems of Controllability of Distributed Systems Governed by Integrodifferential Equations // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. № 2. P. 132–137.
6. *Romanov I., Shamaev A.* Non-controllability to Rest of the Two-Dimensional Distributed System Governed by the Integrodifferential Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2016. V. 170. № 3. P. 772–782.
7. *Ivanov S., Pandofi L.* Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
8. *Romanova A.V., Romanov I.V.* On the Problems of Controllability and Uncontrollability for Some Mechanical Systems Described by the Equations of Vibrations of Plates and Beams with Integral Memory // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. V. 1083. № 012041. P 1–9.
9. *Biccaria U., Micu U.* Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019. № 267. P. 1376–1422.

EDN: GHWPRO
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 62–79

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.4:629.7:519.85

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЯ КАТАЛОГА ОБЪЕКТОВ ПОДВИЖНЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ С УЧЕТОМ НАКЛАДЫВАЕМЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

© 2022 г. Д. Н. Рулев

ПАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, Королёв, Моск. обл., Россия

e-mail: dmitry.rulev@rsce.ru

Поступила в редакцию 02.09.2020 г.
После доработки 14.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Задача планирования наблюдений заданного каталога объектов подвижным наблюдателем с учетом наложения ограничений на моменты выполнения наблюдений и затраты на перемещение наблюдателя между его задаваемыми “граничными” положениями рассмотрена как задача выбора маршрута. Предложен алгоритм решения задачи как задачи минимальной размерности, равной сумме количества объектов наблюдения и сегментов маршрута (числа наблюдателей). При этом контроль выполнения остальных условий и ограничений осуществляется без увеличения размерности решаемой задачи путем проверки данных ограничений на каждом шаге итерационного процесса решения задачи. Приведены примеры построения программ наблюдений наземных и астрономических объектов с летательного/космического аппарата при решении ряда практических задач в области сельского хозяйства и космических исследований, показывающие эффективность использования предложенного подхода.

DOI: 10.31857/S0002338822020135

Введение. Рассматривается задача планирования наблюдений заданного перечня объектов подвижным наблюдателем. Требуется выбрать последовательность наблюдений так, чтобы затраты на переход от наблюдения одного объекта к следующему были минимальны [1–5]. В качестве затрат может выступать, например, длительность перемещения/переориентации наблюдателя между наблюдениями или расход требуемых для этого ресурсов.

Задача сводится к выбору маршрута: из начальной точки маршрута (начального положения наблюдателя) после однократного просмотра всех объектов требуется перейти в конечную точку маршрута (конечное положение наблюдателя), при этом искомый маршрут должен удовлетворять накладываемым на него ограничениям.

Наблюдатель имеет ограниченный запас необходимых ресурсов, который может восполняться в задаваемых точках. Если затраты на наблюдение объектов превышают предельный запас ресурсов, то искомый маршрут должен состоять из отрезков (называем их *сегментами*), начинающихся и заканчивающихся в точках восполнения ресурсов, и затраты на реализацию каждого из которых не превышают предельный запас ресурсов наблюдателя. Кроме этого возможно требование выполнения наблюдений объектов (прохождения точек маршрута) в заданные интервалы времени.

1. Формализация и метод решения задачи. Рассматриваем полный ориентированный граф $G = (V, A)$:

$V = N \cup K$ – множество вершин, включающее подмножество $N = \{\overline{1, n}\}$ внутренних вершин сегментов маршрута (наблюдаемые объекты) и подмножество $K = \{\overline{1, |K|}\}$ граничных вершин сегментов маршрута;

$A = \{(i, j) \in V \times V : i \neq j, (i, j) \notin K \times K\}$ – множество дуг; длина c_{ij} дуги (i, j) составляет затраты на переход от вершины i к вершине j (для $i = j \in N$ и $(i, j) \in K \times K$ значения c_{ij} можно доопределить как ∞), t_{ij} – время, необходимое для перехода от вершины i к вершине j.

Требуется найти в графе (V, A) кратчайший замкнутый маршрут (цикл), проходящий через все вершины, каждую не более одного раза. Для формализации задачи используем булевские переменные x_{ij}, x_{ij}^k:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ дуга } (i, j) \text{ входит в маршрут,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{дуга } (i, j) \quad \text{входит в } k\text{-й сегмент маршрута,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\sum_{k \in K} x_{ij}^k = x_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A, \tag{1.1}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in K, \tag{1.2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i, j) \in A. \tag{1.3}$$

Требуется минимизировать целевую функцию затрат (длину маршрута):

$$\min \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} c_{ij} \tag{1.4}$$

при выполнении (1.1)–(1.3) и следующих условий.

В каждой внутренней вершине заканчивается и начинается по одной дуге одного и того же сегмента маршрута:

$$\sum_{i \in V, i \neq l} x_{il} = 1, \quad \sum_{j \in V, j \neq l} x_{lj} = 1, \quad \forall l \in N, \tag{1.5}$$

$$\sum_{i \in V, i \neq l} x_{il}^k \leq \sum_{j \in V, j \neq l} x_{lj}^k, \quad \forall l \in N, \quad \forall k \in K. \tag{1.6}$$

В каждой граничной вершине начинается дуга с окончанием во внутнней вершине и заканчивается дуга с началом во внутренней вершине:

$$\sum_{i \in N} x_{il} = 1, \quad \sum_{j \in N} x_{lj} = 1, \quad \forall l \in K. \tag{1.7}$$

Запрещены циклические последовательности внутренних вершин:

$$\sum_{i=1}^{p-1} x_{j_i j_{i+1}} + x_{j_p j_1} < p, \quad p = \overline{\{2, n - |K|\}}, \quad j_1 j_2 \ldots j_p \subseteq P(n, |K|), \tag{1.8}$$

$P(n, |K|)$ – множество размещений:

$$|P(n, |K|)| = \sum_{p=2}^{n-|K|} \frac{n!}{(n-p)!\, p},$$

из n по p внутренних вершин, в котором последовательности, полученные переходом из начала в конец и из конца в начало ($j_1 j_2 \ldots j_p$; $j_2 \ldots j_p j_1$; ...; $j_p j_1 \ldots j_{p-1}$), рассматриваются как идентичные.

Вершины подмножества K разбивают искомый маршрут на сегменты, каждый из которых начинается вершиной подмножества K, оканчивается вершиной подмножества K, содержит как минимум одну вершину подмножества N и не содержит других вершин подмножества K. Длина каждого сегмента не превышает заданного значения C_0:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^k c_{ij} \leq C_0, \quad \forall k \in K. \tag{1.9}$$

Обозначаем через t_i время начала прохождения вершины $i \in V$; t_l^* – время вхождения в вершину $l \in K$ по окончании сегмента маршрута.

Каждая вершина $i \in V$ должна быть пройдена в течение интервалов времени $[t_{im}^{-}, t_{im}^{+}]$, $m = \overline{1, M_i}$, при длительности нахождения в вершине не менее Δ_i:

для $\forall i \in V$ существует m, такое, что

$$t_{im}^{-} \le t_i, \quad t_i + \Delta \le t_{im}^{+}, \tag{1.10}$$

для $\forall l \in K$ существует m, такое, что

$$t_{lm}^{-} \le t_l^{*}, \quad t_l^{*} + \Delta_l \le t_{lm}^{+}. \tag{1.11}$$

Если соединяющая внутреннюю или граничную вершину $l \in V$ и внутреннюю вершину $j \in N$ дуга (l, j) входит в маршрут, то вершину j проходят через требуемое время после вершины l:

$$t_l + \Delta_l + t_{lj} \le t_j. \tag{1.12}$$

Если соединяющая внутреннюю вершину $i \in N$ и граничную вершину $l \in K$ дуга (i, l) входит в маршрут, то вход в граничную вершину l выполняется через требуемое время после прохождения внутренней вершины i:

$$t_i + \Delta_i + t_{il} \le t_l^{*}. \tag{1.13}$$

При последовательном прохождении сегментов маршрута для всех граничных вершин $l \in K$ кроме вершины начала/окончания маршрута l^*

$$t_l^{*} \le t_l, \quad \forall l \in K, \quad l \ne l^*. \tag{1.14}$$

При параллельном прохождении сегментов маршрута несколькими наблюдателями условия (1.14) отсутствуют.

В постановках транспортных задач *Vehicle Routing Problem* (VRP) [6–8] и др. множество вершин $V = \{0\} \cup N$ содержит одну граничную вершину $\{0\}$, а формализация требований/ограничений (1.1), (1.5)–(1.7), (1.9), связанных с наличием нескольких сегментов маршрута, реализуется использованием множества $K = \{\overline{1, |K|}\}$ транспортных средств (наблюдателей) с формулировкой условий по прохождению всех сегментов маршрута через данную одну вершину:

$$\sum_{j \in \delta^{+}(0)} x_{0j} = |K|, \tag{1.15}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^{+}(S)} x_{ij} \ge r(S), \quad \forall S \subseteq N, \tag{1.16}$$

$$\delta^{+}(S) = \{(i, j) \in A : i \in S, j \ne S\}, \quad S \subseteq V,$$

$r(S)$ – минимальное количество наблюдателей, необходимое для прохождения S вершин, и формулировкой соответствующих ограничений (1.9) на длины сегментов.

Задача с условиями на интервалы времени прохождения вершин известна как *Vehicle Routing Problem with Time Windows* (VRPTW) [9–13] и др. При ее решении, в частности, ограничения (1.10)–(1.14) формализуются условиями вида

$$\sum_{(i,j) \in A(p)}^{L} x_{ij} \le |A(p)| - 1, \quad \forall p \in P, \tag{1.17}$$

P – множество путей в графе (V, A), $A = \{(i, j) \in V \times V : i \ne j\}$, которые не удовлетворяют ограничениям на интервалы времени прохождения вершин; $A(p)$ – множество дуг в пути $p \in P$.

Задача (1.4) при условиях (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.14) и/или соответствующих эквивалентных условиях (1.15)–(1.17) является частично целочисленной задачей линейного программирования и решается методами линейного и целочисленного программирования [14, 15].

Например, данными методами в [16] задача планирования наблюдений с космического аппарата (КА) каталога наземных объектов решается как задача построения программы маневров КА при минимизации затрат энергетических ресурсов КА и максимизации информативности наблюдений с учетом заданных ограничений, в том числе на моменты выполнения наблюдений. Задачи планирования астрономических наблюдений с КА при ограничениях на моменты време-

ни выполнения наблюдений, включая моменты переориентации оси визирования аппаратуры наблюдения, рассмотрены и решаются указанными методами в [1, 2, 5, 17].

Особенностью сформулированной задачи является существенное количество и сложность ограничений (1.1), (1.6), (1.8)–(1.14).

2. Алгоритм решения задачи. В настоящей работе задачу (1.4) решаем как задачу минимальной размерности – при условиях (1.3), (1.5), (1.7) (т.е. размерность решаемой задачи равна сумме количества объектов и сегментов маршрута $n + |K|$), а контроль остальных условий и ограничений осуществляем без увеличения размерности решаемой задачи путем проверки выполнения данных ограничений на каждом шаге итерационного процесса решения задачи.

Задача (1.4) решается как задача минимальной размерности, например по алгоритму Литтла [18], использующему идею метода “ветвей и границ”. Алгоритм основан на разделении числа перебираемых вариантов на классы (ветви) с расчетом оценок (границ) для этих классов так, чтобы иметь возможность прерывать ветви, которые не приведут к оптимальному решению. При этом учет ограничений (1.1), (1.6) и (1.8)–(1.14) выполняем путем исключения из дальнейшего рассмотрения тех комбинаций вершин, которые не удовлетворяют данным ограничениям. Алгоритм решения задачи можно представить в следующем виде.

Называем: *решение* – набор присутствующих и запрещенных в маршруте дуг; *запрет* дуги – замена стоимости дуги на ∞; *оценка* (О) – нижняя граница стоимости *решения*; *главный список* (ГС) – набор *решений*, подлежащих рассмотрению; *рекорд* – стоимость кратчайшего из найденных циклов; *приведение* матрицы – операция, согласно которой вычитаем последовательно из каждой строки и каждого столбца матрицы их минимальные элементы, которые называем *приводящими константами*.

Ш а г 1. Текущее *решение* R и ГС пусты. *Приводим* матрицу затрат и вычисляем О(R) как сумму *приводящих констант* (СПК): $\text{О}(R) = СПК(R)$.

Ш а г 2. Элементом ветвления (k, l) *решения* R выбираем нулевой элемент *приведенной* матрицы с максимальным штрафом (штраф вычисляем как сумму наименьших ненулевых элементов строки k и столбца l). Формируем *решение* R^+ как R с присутствием дуги (k, l). Если оно не удовлетворяет условиям (1.1), (1.6), (1.9)–(1.14), то исключаем его из дальнейших операций, иначе в R^+ *запрещаем* дуги, присутствие которых приведет к возникновению “внутреннего” цикла (контролируем выполнение условий (1.8)), и вычисляем $\text{О}(R^+) = \text{О}(R) + \text{СПК}(R^+)$. Формируем *решение* R^- как R с *запрещением* дуги (k, l) и вычисляем $\text{О}(R^-) = \text{О}(R) + \text{СПК}(R^-)$.

Ш а г 3. Если ГС, R^+ и R^- пусты, то на шаг 5, иначе берем из ГС *решение* $R^{ГС}$ с минимальной *оценкой* и определяем $\text{О}^{\min} = \min\{\text{О}(R^+), \text{О}(R^-), \text{О}(R^{ГС})\}$. *Решение* с $\text{О}^{\min}$ назначаем новым *решением* R, $\text{О}(R) = \text{О}^{\min}$, оставшиеся из *решений* R^+, R^- и $R^{ГС}$ добавляем/возвращаем в ГС. Если R – цикл, то на шаг 4, иначе – на шаг 2.

Ш а г 4. Если *рекорд* пуст или $\text{О}^{\min} <$ *рекорд*, то *рекорд* $= \text{О}^{\min}$ и удаляем из ГС *решения* с *оценкой* меньше, чем *рекорд*. Если ГС пуст, то на шаг 5, иначе – берем из ГС *решение* $R^{ГС}$ с минимальной *оценкой* как новое *решение* R, $\text{О}(R) = \text{О}(R^{ГС})$ и идем на шаг 2.

Ш а г 5. Текущий *рекорд* оптимален (если *рекорд* пуст, то задача не имеет решения).

Рассмотрим примеры построения программ наблюдений наземных и астрономических объектов с летательного/космического аппарата (ЛА/КА) при решении ряда практических задач. Примеры, представленные в разд. 3, иллюстрируют учет ограничений на моменты времени выполнения наблюдений, в разд. 4 – ограничений на затраты на перемещение наблюдателя. В обоих разделах представлен учет наличия нескольких сегментов маршрута (нескольких наблюдателей) и требований к граничным положениям наблюдателя.

3. Построение последовательностей наблюдения объектов с ЛА/КА, движущегося па заданной траектории/орбите. 3.1. Наблюдение астрономических объектов. Рассмотрим планирование наблюдений с орбитального КА каталога астрономических объектов – например, 13 наиболее ярких звезд из созвездий Близнецов, Возничего, Малого и Большого Пса, Ориона, Тельца: 1) Бета Ориона (Ригель), 2) Альфа Возничего (Капелла), 3) Гамма Ориона (Беллатрикс), 4) Бета Тельца (Эльнат), 5) Дзета 1 Ориона (Альнитак), 6) Альфа Ориона (Бетельгейзе), 7) Бета Возничего (Менкалинан), 8) Гамма Близнецов (Альхена), 9) Альфа Большого Пса (Сириус),

Таблица 1. Длины кратчайших маршрутов наблюдения объектов с КА

Дата	Ω, град	T, мин	S, град, Δt = 1.5 мин	S, град, Δt = 2 мин
07.09.2017	349.3	36.0	178.23 (рис. 1, *а*)	198.00
10.09.2017	333.3	35.6	185.82	$\bar{\exists}$
13.09.2017	317.2	34.5	185.82	$\bar{\exists}$
16.09.2017	301.2	32.4	185.69	$\bar{\exists}$
20.09.2017	285.2	30.0	180.22	$\bar{\exists}$
23.09.2017	269.1	29.1	174.51	180.22
26.09.2017	253.1	31.1	174.51	174.51
29.09.2017	237.1	33.5	174.51	174.51
06.10.2017	205.0	35.9	174.51	174.51
12.10.2017	173.0	34.9	178.23	178.23
15.10.2017	156.9	32.8	188.31 (рис. 1, *б*)	188.63
19.10.2017	140.9	28.6	192.71	$\bar{\exists}$
22.10.2017	124.9	22.3	177.30 (рис. 1, *в*)	$\bar{\exists}$
25.10.2017	108.8	22.1	174.51	$\bar{\exists}$

10) Эпсилон Большого Пса (Адара), 11) Бета Большого Пса (Мирцам), 12) Альфа Близнецов (Кастор), 13) Альфа Малого Пса (Процион). На теневых участках орбиты необходимо выполнить наблюдение всех объектов, при этом исходная и конечная ориентации КА совпадают с ориентацией для наблюдения объектов. Затраты на переориентацию КА от наблюдения одного объекта к другому характеризуем угловым расстоянием между объектами. Требуется построить программу наблюдений так, чтобы сумма затрат на переориентацию КА была минимальна [3, 5].

Наблюдения выполняем с орбитальной космической станции с параметрами орбиты: высота околокруговой орбиты ≈410 км, на момент прохождения восходящего узла орбиты 01.02.2017 23:57:52.42 (ДМВ – декретное московское время) долгота восходящего узла орбиты в инерциальной системе координат $\Omega = 352.9°$, наклонение орбиты составляет 51.64°. Возможные интервалы $[t_{im}^{-}, t_{im}^{+}]$, $m = \overline{1, M_i}$, времени выполнения наблюдений определяются зонами видимости объектов на теневой части витков орбиты КА. Значение требуемой длительности наблюдения объектов Δt (считаем ее одинаковой для всех объектов) выбираем с учетом длительности T теневых участков орбиты на рассматриваемом интервале полета. Например, в интервале 07.09 ... 25.10.2017 величина T составляет 22 ... 36 мин, что соответствует максимальным значениям Δt 1.7 ... 2.8 мин ($\Delta t < T/N$, $N = 13$). Рассмотрим планирование наблюдений для вариантов значений Δt = 1.5 и 2 мин; длительности t_{ij} перехода от объекта к объекту определяем как отношение углового расстояния между объектами к скорости поворота оси визирования аппаратуры наблюдения в инерциальном пространстве, принимаемой равной 180 град/мин.

В табл. 1 и на рис. 1 представлены полученные кратчайшие маршруты, S, град – длины маршрутов.

На рис. 1 в левой части рисунков на карте звездного неба приведены маршруты наблюдения объектов с указанием даты, Δt и длины S, в правой части рисунков по вертикальной оси – номера объектов/вершин (0 – граничная вершина). По горизонтальной оси отображена шкала времени от начала теневого участка, относительно которой показаны интервалы видимости объектов и последовательность переориентаций КА из исходной ориентации КА (граничная вершина под номером 0), через ориентацию КА для наблюдения каждого из объектов (внутренние вершины под номерами объектов 1–13) в конечную ориентацию КА (возврат в граничную вершину под номером 0).

Представленные результаты показывают, что для рассмотренного примера длина кратчайшего маршрута изменяется в зависимости от даты полета в пределах ~10% от минимально возможной. При этом на каждом витке можно реализовать последовательное наблюдение всех объектов с длительностью наблюдения объекта не менее Δt = 1.5 мин, в то время как при Δt = 2 мин в

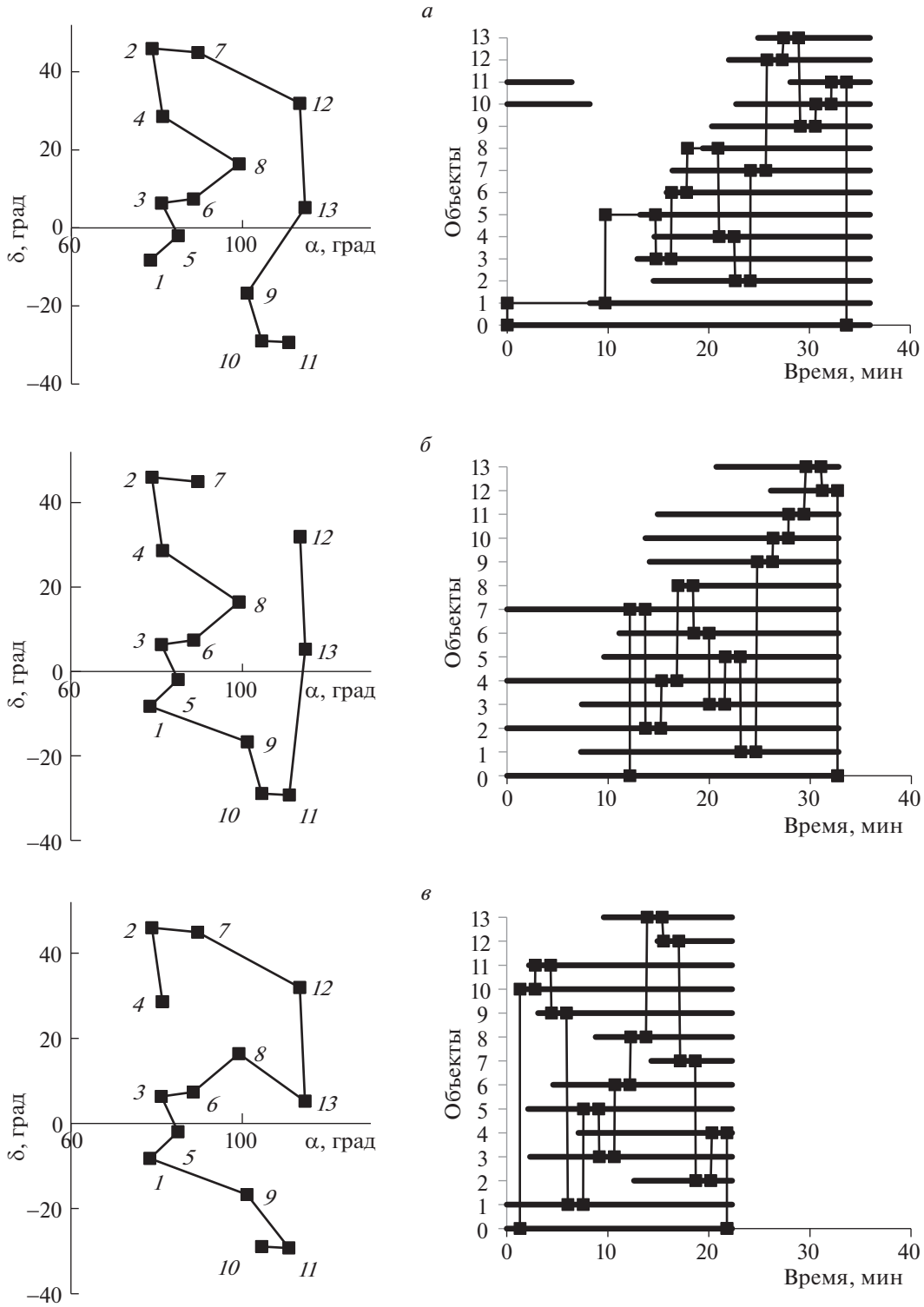

Рис. 1. Кратчайшие маршруты наблюдения объектов с КА: *а* – Δt = 1.5 мин, S = 178.2 град (07.09.2017); *б* – Δt = 1.5 мин, S = 188.3 град (15.10.2017); *в* – Δt = 1.5 мин, S = 177.3 град (22.10.2017)

определенные даты такой возможности не существует: при $T < 26$ мин – из-за недостаточности данной продолжительности теневого участка для наблюдения 13 объектов; при $T > 26$ мин – из-за “неудачного” относительного расположения зон видимости объектов. Отметим, что на более широком интервале дат может также не существовать как возможности наблюдения по крайней

мере одного из объектов (видимость объекта на теневом участке орбиты $<\Delta t$), так и самого теневого участка (“солнечная” орбита).

3.2. Наблюдение наземных объектов. Рассмотрим планирование наблюдений наземных объектов с ЛА/КА, движущегося па заданной траектории/орбите. Направление оси визирования аппаратуры наблюдения задаем следующими углами: γ – угол от направления в надир до проекции оси визирования на плоскость орбиты (положительный отсчет в сторону полета); β – угол от направления в надир до проекции оси визирования на плоскость, перпендикулярную вектору скорости ЛА/КА (положительный отсчет в сторону вектора кинетического момента орбитального движения ЛА/КА). Считаем, что техническими характеристиками аппаратуры наблюдения определены максимальные абсолютные значения $\omega_*^\gamma, \omega_*^\beta$ угловой скорости поворота оси визирования по данным углам.

Требуется построить программу наблюдений так, чтобы минимизировать суммарное время на переориентацию оси визирования от наблюдения очередного объекта к последующему.

На каждом шаге итерационного процесса решения задачи проверяем выполнение условий (1.10)–(1.14), которые определяют возможность наблюдений, используя следующую расчетную схему:

$$t_i^- \le t_i, \quad t_i + \Delta_i \le t_i^+, \tag{3.1}$$

$$\vec{r}\,(t_i) + \vec{l}\,(t_i, \gamma_i, \beta_i) = \vec{\rho}_i, \quad \vec{r}\,(t_i + \Delta_i) + \vec{l}\,(t_i + \Delta_i, \gamma_i, \beta_i^\Delta) = \vec{\rho}_i, \tag{3.2}$$

где t_i^-, t_i^+ – границы интервала видимости с ЛА/КА объекта i, Δ_i – требуемая длительность наблюдения объекта i, t_i – момент начала наблюдения объекта i. Момент начала наблюдения объекта j после объекта i определяем как

$$t_j = t_i + \Delta_i + t_{ij} + p_j. \tag{3.3}$$

Здесь $p_j \ge 0$ – время от окончания поворота оси визирования в положение для наблюдения объекта j до начала выполнения наблюдения (на данном интервале ось визирования фиксирована в положении γ_j, β_j); t_{ij} – длительность поворота оси визирования от наблюдения объекта i в положение для наблюдения объекта j:

$$t_{ij} = \max\left\{\frac{|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^\gamma}, \frac{|\beta_j - \beta_i^\Delta|}{\omega_*^\beta}\right\}, \tag{3.4}$$

$$\omega_{ij}^\gamma = \frac{\gamma_j - \gamma_i}{t_{ij}}, \quad \omega_{ij}^\beta = \frac{\beta_j - \beta_i^\Delta}{t_{ij}}, \quad \omega_j^\beta = \frac{\beta_j^\Delta - \beta_j}{\Delta_j},$$

$$|\omega_{ij}^\gamma| \le \omega_*^\gamma, \quad |\omega_{ij}^\beta| \le \omega_*^\beta, \quad |\omega_j^\beta| \le \omega_*^\beta.$$

Здесь γ_i – угол γ на интервале наблюдения объекта i, β_i, β_i^Δ – угол β на моменты начала и окончания наблюдения объекта i, ω_{ij}^γ, ω_{ij}^β – угловые скорости поворота оси визирования от наблюдения объекта i в положение для наблюдения объекта j по углам γ и β, ω_j^β – угловая скорость поворота оси визирования по углу β в процессе наблюдения объекта j, $\vec{r}\,(t)$ – радиус-вектор ЛА/КА в момент t, $\vec{l}\,(t, \gamma, \beta)$ – вектор от ЛА/КА до земной поверхности вдоль направления оси визирования, заданного углами γ и β, в момент t, $\vec{\rho}_i$ – радиус-вектор объекта i.

Для круговой орбиты ЛА/КА и сферической Земли (3.2) принимает вид

$$\mathrm{tg}\gamma_j = \frac{\sin(y_j/R_e)}{1 + \dfrac{H_{orb}}{R_e} - \cos\dfrac{y_j}{R_e}}, \quad \mathrm{tg}\beta_j = \frac{\sin((x_j - \nu t_j)/R_e)}{1 + \dfrac{H_{orb}}{R_e} - \cos\dfrac{x_j - \nu t_j}{R_e}},$$

$$\mathrm{tg}\beta_j^\Delta = \frac{\sin((x_j - \nu(t_j + \Delta_j))/R_e)}{1 + \dfrac{H_{orb}}{R_e} - \cos\dfrac{x_j - \nu(t_j + \Delta_j)}{R_e}}.$$

Здесь (x_j, y_j) – координаты объекта j относительно трассы полета ЛА/КА: расстояние x вдоль трассы полета от точки $t = 0$ и расстояние y от трассы полета (положительный отсчет в сторону вектора кинетического момента орбитального движения), $\nu = 2\pi R_e/T_{orb}$ – линейная скорость перемещения подспутниковой точки вдоль трассы полета, T_{orb} – период обращения ЛА/КА вокруг Земли, R_e – радиус Земли; H_{orb} – высота полета ЛА/КА над поверхностью Земли.

Коэффициентами матрицы затрат являются длительности поворота оси визирования между наблюдениями объектов, точные значения которых задаются (3.4) и в рассматриваемой формулировке задачи не могут быть определены заранее – до получения точных значений углов γ_i, β_i, β_i^{Δ}.

Поэтому для составления целевой функции используем условные ожидаемые значения длительности поворота, соответствующие наблюдению объектов на минимальном удалении от ЛА/КА. Коэффициенты матрицы затрат рассчитываем как длительности переориентации оси визирования после завершения наблюдения объекта i в момент $t_i^{\min}$ минимального удаления ЛА/КА от объекта i в положение для наблюдения объекта j в момент, максимально близкий к моменту $t_j^{\min}$ минимального удаления ЛА/КА до объекта j:

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^{\gamma}} \quad \text{при} \quad x_i - x_j + \dfrac{\nu|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^{\gamma}} \le 0, \\ \max\left\{\dfrac{|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^{\gamma}}, \dfrac{|\beta_j^*|}{\omega_*^{\beta}}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x_i - x_j + \nu\dfrac{|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^{\gamma}} < \nu(dt_j + dt_i - \Delta_i - \Delta_j), \\ \infty \quad \text{при} \quad \nu(dt_j + dt_i - \Delta_i - \Delta_j) \le x_i - x_j + \nu\dfrac{|\gamma_j - \gamma_i|}{\omega_*^{\gamma}}, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $dt_j = (t_j^+ - t_j^-)/2$ – время от границы интервала видимости объекта до момента минимального удаления до объекта (1/2 интервала видимости объекта);

$$\mathrm{tg}\beta_j^* = \frac{\sin((x_j - x_i - \nu|\gamma_j - \gamma_i|/\omega_*^{\gamma})/R_e)}{1 + \dfrac{H_{orb}}{R_e} - \cos\dfrac{x_j - x_i - \nu|\gamma_j - \gamma_i|/\omega_*^{\gamma}}{R_e}}. \tag{3.6}$$

В (3.5) первое и второе условия определяют длительности поворота оси визирования после наблюдения объекта i в момент минимального удаления ЛА/КА от объекта ($\beta_i^{\Delta} = 0$) в положение для наблюдения объекта j в момент минимального удаления ЛА/КА до объекта ($\beta_j = 0$) (первое условие) и в положение для наблюдения объекта j максимально близко ко времени минимального удаления ЛА/КА до объекта ($\beta_j = \beta_j^*$ задается соотношением (3.6)) (второе условие); третье условие описывает случай, когда после объекта i наблюдение объекта j невозможно.

При проверке выполнения условий (3.1) в процессе решения задачи моменты наблюдения (3.3) определяем их самыми ранними значениями:

$$t_j = t_i + \Delta_i + t_{ij} + p_j \Rightarrow \min.$$

По окончании решения осуществляем перерасчет моментов наблюдения для получения их итоговых значений, максимально близких к моментам $T_{\min} = \{t_i^{\min}\}$ минимального удаления ЛА/КА от объектов наблюдений (пересчет осуществляется последовательно в обратном порядке – от следующего объекта наблюдения к предыдущему):

$$\left|t_i - t_i^{\min}\right| = \left|t_j - \Delta_i - t_{ij} - p_j - t_i^{\min}\right| \Rightarrow \min, \tag{3.7}$$

и рассчитываем соответствующую им итоговую суммарную длительность переориентации оси визирования.

Поскольку решение оптимизационной задачи будет получено минимизацией целевой функции (1.4) не с точными (3.4), а с условными значениями (3.5) длительности переориентации оси визирования, то найденное таким образом решение в общем случае превышает истинное кратчайшее

решение исходной задачи. Поэтому в дальнейшем при анализе качества получаемых решений будем называть решения задачи (1.4) с (3.5), (3.7) не оптимальными, а оптимизированными.

В качестве примера рассмотрим наблюдение случайных каталогов наземных объектов с ЛА (самолета) с высотой полета 2 км и с КА с высотой орбиты 400, 500 и 600 км. Ограничение на угловые скорости переориентации оси визирования аппаратуры наблюдения, установленной на самолете, составляет 30 град/с, на КА – 3 град/с, угол поля зрения аппаратуры наблюдения от надира – 45° для наблюдений с самолета и 30° – с КА.

На рис. 2 и 3 представлены примеры оптимизированных решений для $n = 40$ объектов: в системе координат, связанной с трассой полета, пунктирном показаны направления от ЛА/КА на наблюдаемый объект в моменты начала и окончания наблюдения, точечными линиями – отрезки, проекция которых на трассу полета составляет интервал местоположений ЛА/КА, когда соответствующий объект доступен наблюдению. Для наблюдений с самолета представлены оптимизированные решения с 1, 2 и 3 сегментами маршрута, которые соответствуют наличию на ЛА/КА нескольких наблюдателей (комплектов аппаратуры наблюдения). Данные решения, в частности, иллюстрируют возможность увеличения длительности наблюдения объектов Δ_i за счет использования дополнительных наблюдателей.

На рис. 4 приведено изменение углов γ, β и порядок наблюдения объектов по номерам, присвоенным по порядку моментов времени начала зон видимости объектов, в оптимизированном решении наблюдения объектов с ЛА (рис. 2, *а*) $K = 1$ (в длину маршрута S входит время переориентации оси визирования аппаратуры между наблюдениями без времени поворота оси визирования по углу β в процессе наблюдения).

Для анализа эффективности решений выполнено моделирование, включающее получение для 100 случайных каталогов объектов оптимизированных решений, точных кратчайших решений методом перебора и простых решений (в случаях, когда они существуют) в виде упорядоченных последовательностей объектов по порядку времени минимального удаления объекта от трассы (решение *простое 1*) или по порядку начала зоны видимости объекта с ЛА/КА (решение *простое 2*). Простым решением считаем лучшее из имеющихся в наличии данных двух решений.

Длительность интервала полета, в течение которого на подстилающей поверхности вдоль трассы полета (в области, доступной наблюдению с ЛА/КА) появляются n случайных объектов, составляет

$$T_{\text{полет}} = \frac{q(t_{\text{пов.ср}} + \Delta_{\text{ср}})n}{K}, \qquad \Delta_{\text{ср}} = \left(\sum_i \Delta_i\right)/n,$$

где $t_{\text{пов.ср}}$ – среднее время поворота оси визирования между наблюдениями, $\Delta_{\text{ср}}$ – средняя длительность наблюдения объектов, K – количество наблюдателей (количество сегментов маршрута), $q \geq 1$ – коэффициент, задающий увеличение длительности рассматриваемого интервала относительно минимальной, реализуемой при $q = 1$.

На рис. 5 представлены результаты моделирования по 100 случайным каталогам для рассмотренных четырех вариантов высоты полета ЛА/КА при $q = 1$; 1.25; 1.5; 1.75; 2 (данные значения реализуют случаи от максимальной при $q = 1$ до двукратно уменьшенной при $q = 2$ частоты появления объектов на подстилающей поверхности вдоль трассы полета).

На рис. 5, *а* приведено среднее отличие оптимизированных решений от простых и кратчайших для $n = 5 - 12$ объектов при одном наблюдателе и при значениях коэффициента $q = 1$; 1.25; 1.5; 1.75; 2. Графики рис. 5, *а* показывают, что получаемые оптимизированные решения превышают кратчайшие на 5–10% и улучшают простые решения (при их наличии) до 35%.

На рис. 5, *б* представлен объем вычислений для получения оптимизированных решений, характеризуемый средним числом выполненных итераций (количеством решенных задач – на каждой итерации выполняется операция *приведения* матрицы затрат и вычисляется сумма *приводящих* констант) и средним числом переменных в решенных задачах. На рис. 5, *в* показан процент наличия простых решений.

Отличие значений простых решений от оптимизированных, объем вычислений и наличие простых решений существенно зависят от указанной частоты появления объектов и количества объектов n. Максимальной частоте появления объектов ($q = 1$) соответствует минимальное отличие значений простых решений от оптимизированных, максимальный объем вычислений для получения оптимизированного решения, минимальное наличие простых решений. С уменьшением данной частоты (с увеличением q) объем вычислений (число выполненных итераций)

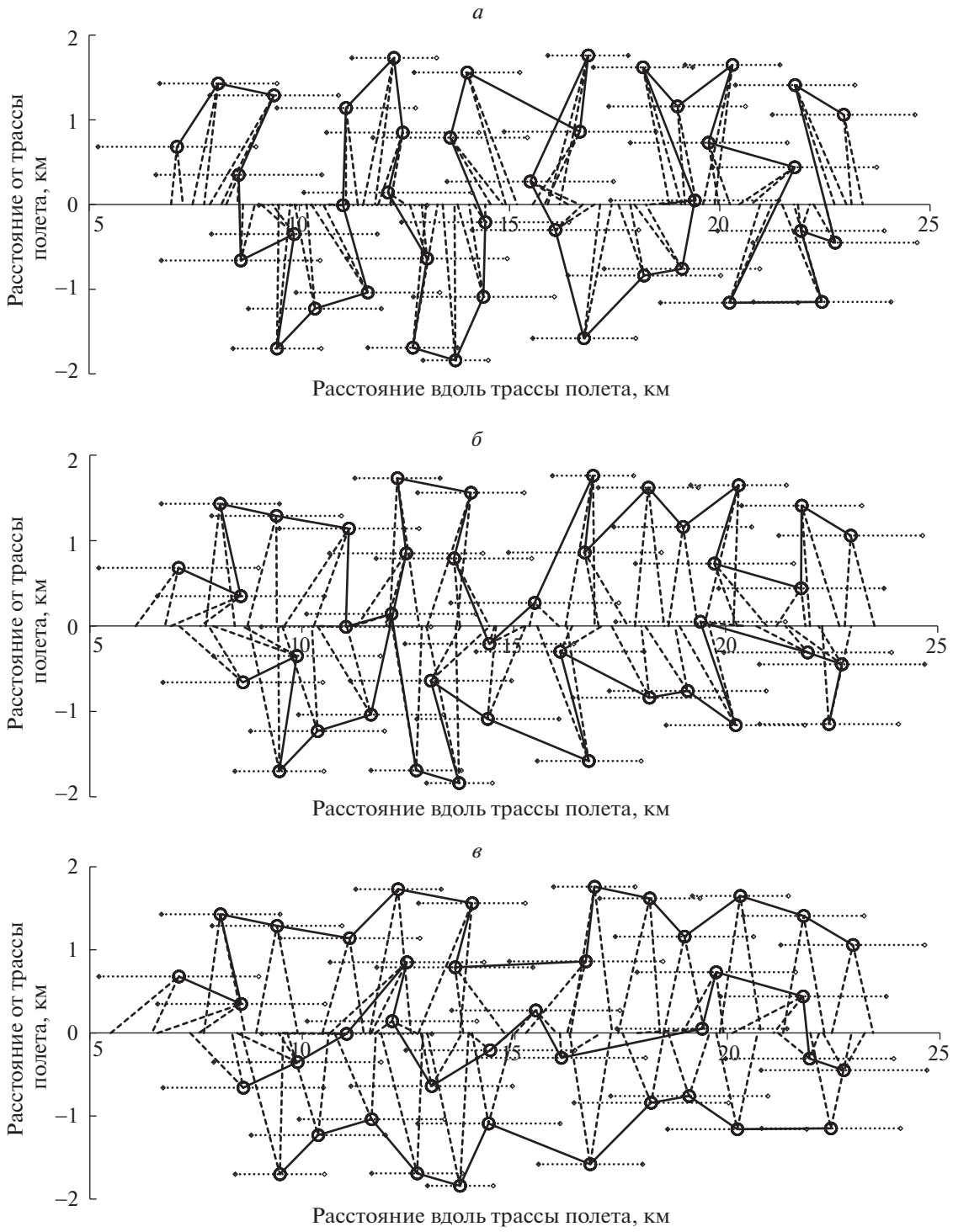

Рис. 2. Оптимизированные последовательности наблюдения объектов с ЛА с высотой полета 2 км: *а* – $\Delta = 2$ с, $K = 1$, $S = 37$ с; *б* – $\Delta = 5$ с, $K = 2$, $S = 38$ с; *в* – $\Delta = 7$ с, $K = 3$, $S = 35$ с

существенно сокращается, а наличие простых решений увеличивается (вплоть до 100%). С ростом количества объектов n объем вычислений (число выполненных итераций) существенно возрастает, наличие простых решений сокращается (вплоть до исчезновения), а отличие значений простых решений от оптимизированных остается примерно на одном и том же уровне. Среднее число переменных в решенных задачах с ростом количества объектов n монотонно увеличивается с коэффициентом ~1/2.

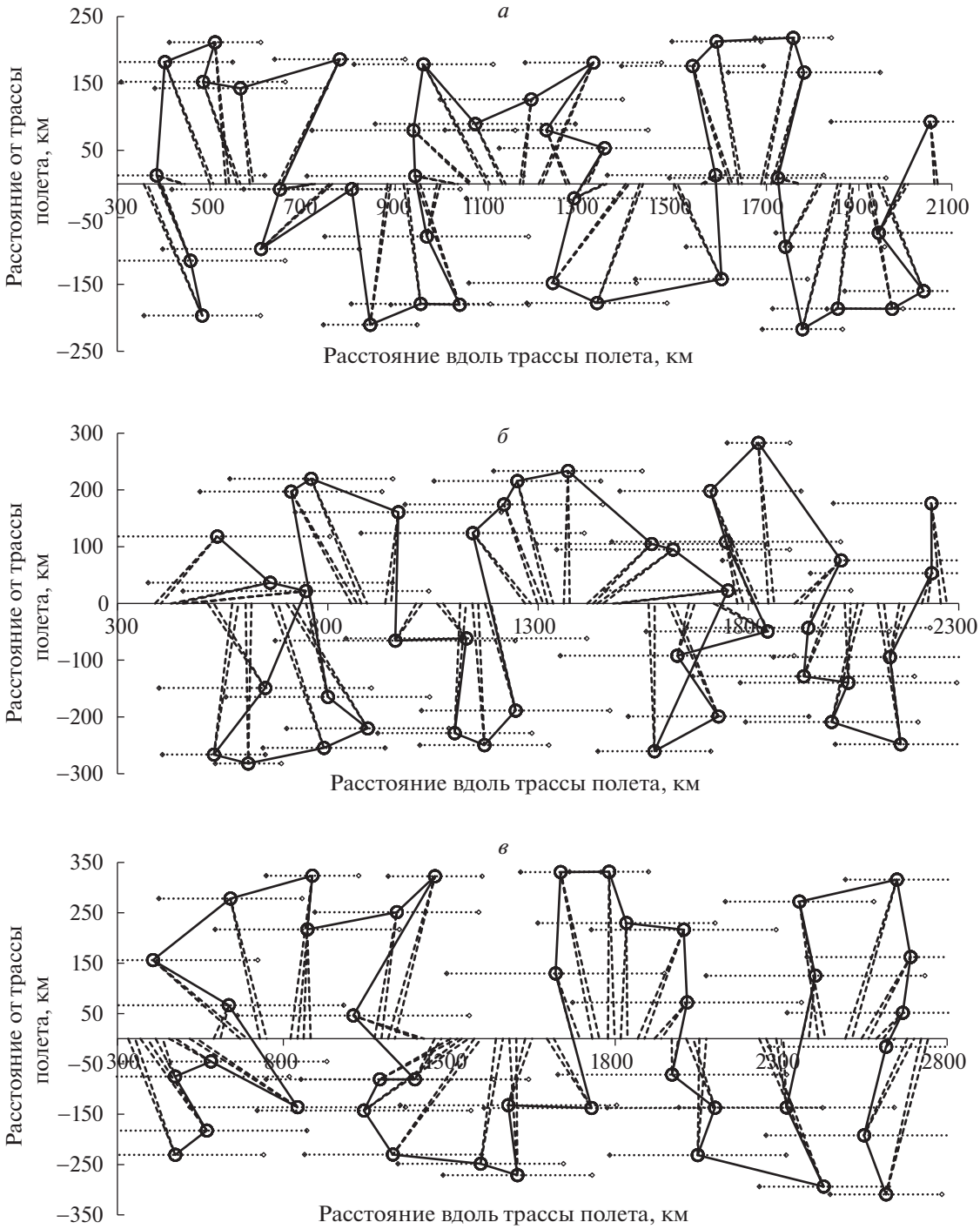

Рис. 3. Оптимизированные последовательности наблюдения объектов с КА: *а* – H_{orb} = 400 км, Δ = 1 с, K = 1, S = 197 с; *б* – H_{orb} = 500 км, Δ = 2 с, K = 1, S = 190; *в* – H_{orb} = 600 км, Δ = 3 с, K = 1, S = 181 с

Спецификой рассматриваемой задачи является то, что возможность выполнения наблюдений объектов возникает последовательно по мере пролета ЛА/КА над подстилающей поверхностью. При этом на оптимальный выбор следующего объекта для выполнения наблюдений влияние оказывает только некоторое ограниченное количество n^* предшествующих наблюдений. Их количество можно определить термином *глубина* планирования. Поэтому задачу поиска оптимального решения целесообразно разбивать на решение последовательных подзадач, каждая из которых охватывает данное количество наблюдений.

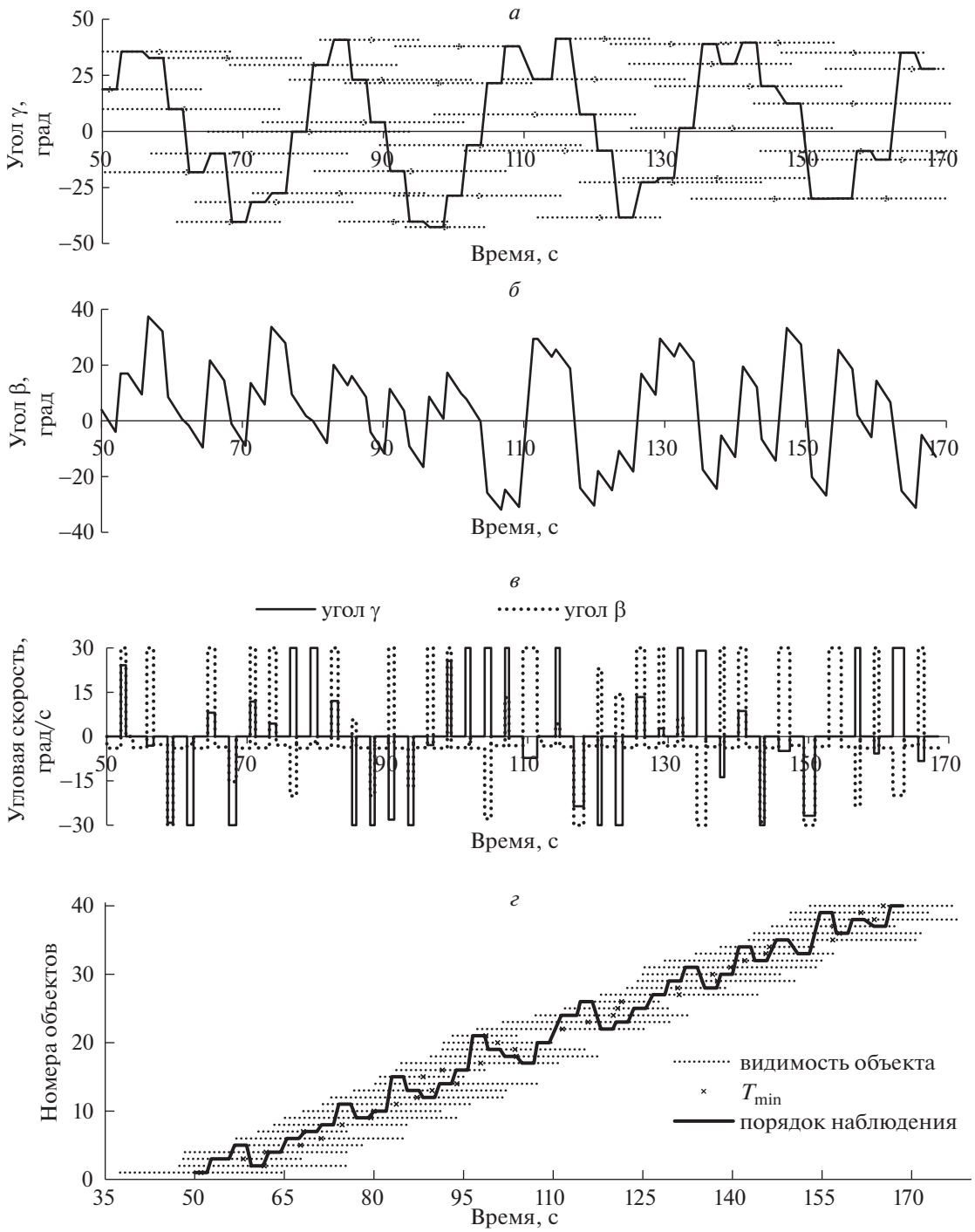

Рис. 4. Изменение углов γ, β и порядок наблюдения объектов в оптимизированном решении, представленном на рис. 2, *а*

На рис. 5, *г* приведены результаты моделирования для рассмотренных четырех вариантов высоты полета ЛА/КА по 100 случайным каталогам объектов для каждого n = 30, 50, 70 при значениях коэффициента q = 1; 1.25; 1.5; 1.75 – среднее отличие оптимизированных решений, полученных с n^* = 5 – 15, от решения, найденного с n^* = 16. Графики на рис. 5, *г* показывают, что для рассмотренных вариантов ЛА/КА *глубину* планирования можно определить значениями n^* ~10–12 объектов. Оптимизированные решения для любого количества объектов наблюдения могут быть получены последовательным решением оптимизационных задач для $n = n^*$ объектов, в

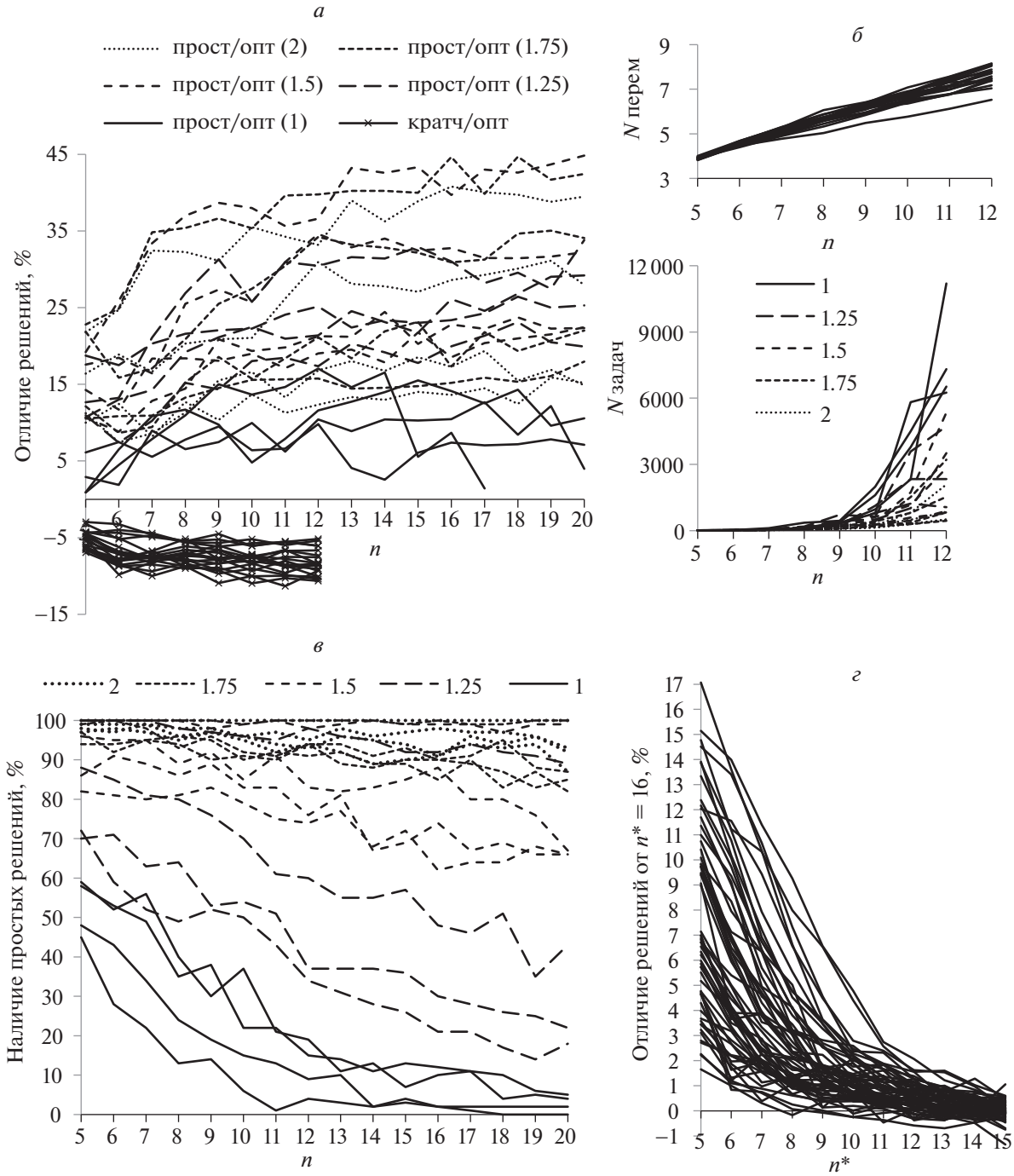

Рис. 5. Результаты моделирования для q = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2: *а* – среднее отличие оптимизированных (опт) решений (в процентах) от простых (прост) и кратчайших (кратч); *б* – объем вычислений (среднее количество решенных задач $N_{зад}$ и среднее число переменных в задаче $N_{пер}$); *в* – процент наличия простых решений; *г* – среднее отличие оптимизированных решений (в процентах) с n^* = 5 – 15 от решения с n^* = 16

которые входят $n - 1$ последних объекта из решения предшествующей оптимизационной задачи и один новый объект – следующий объект из упорядоченной последовательности объектов наблюдений. Данное упорядочивание объектов можно выполнять как по временам минимального удаления объектов от трассы (как в решении *простое 1*), так и по началу зоны видимости объекта с ЛА/КА (как в решении *простое 2*). Учитывая, что решение *простое 1* реализуется до 20% чаще,

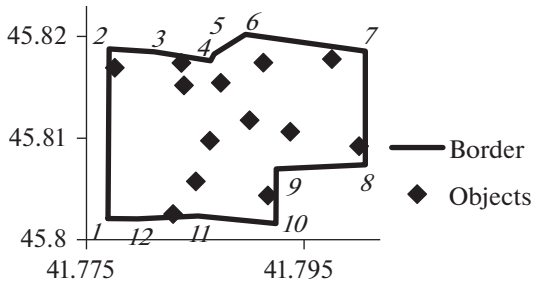

Рис. 6. Каталог объектов наблюдения (Objects) и замкнутая ломаная линия границы поля (Border)

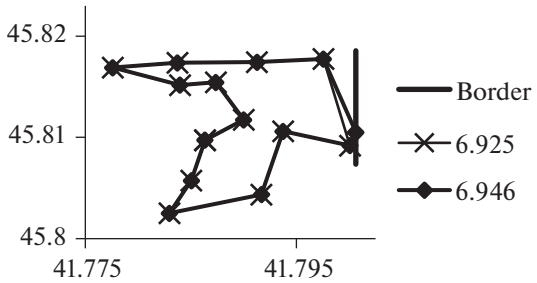

Рис. 7. Кратчайшие цикл и замкнутый маршрут

чем решение *простое 2*, можно для определенности применять этот вариант упорядочивания. Таким образом, описанная методика обеспечивает возможность решения задач планирования практически без ограничений на количество объектов наблюдений.

4. Примеры построения маршрутов наблюдения наземных объектов с беспилотного летательного аппарата (БЛА). Рассмотрим планирование наблюдений каталога наземных объектов с БЛА, например при мониторинге проблемных участков посевов [4]. Нахождение кратчайшего маршрута наблюдения объектов позволит обеспечить эффективный расход ресурсов БЛА, а также решить задачу максимальной синхронизации съемки данного района земной поверхности с КА с подспутниковыми наблюдениями, выполняемыми с БЛА.

На рис. 6 на карте земной поверхности отображены 13 объектов (точек) наблюдения и замкнутая ломаная линия из 12 отрезков границы поля, которая рассматривается как возможная область начала/окончания движения БЛА (вершины/отрезки линии границы поля отсчитываем по часовой стрелке начиная с/от левой нижней вершины). В зависимости от особенностей эксплуатации БЛА можно сформулировать, например, следующие варианты искомых маршрутов.

1. Маршрут, начинающийся и заканчивающийся в точке граничной области, положение которой определяется исходя из требования минимизации длины маршрута. Задача решается в два этапа: а) находим кратчайший цикл (без условий на начало/окончание маршрута: $K = \varnothing$); б) определяем точку граничной области, расстояние от которой до двух соседних вершин кратчайшего цикла минимально. Искомый маршрут получаем введением в кратчайший цикл между

Таблица 2. Кратчайшие маршруты для различных вариантов граничной области

Варианты граничной области	Длина S, км	K
A (отрезки 1–12 линии границы поля)	3.755	6
B (отрезки 1–7 линии границы поля)	4.928	5
C (отрезки 2–7 линии границы поля)	5.418	4
D (отрезки 1, 8–12 линии границы поля)	4.832	3
E (отрезки 1, 10–12 линии границы поля)	5.417	2
F (отрезки 10–12 линии границы поля)	6.548	1

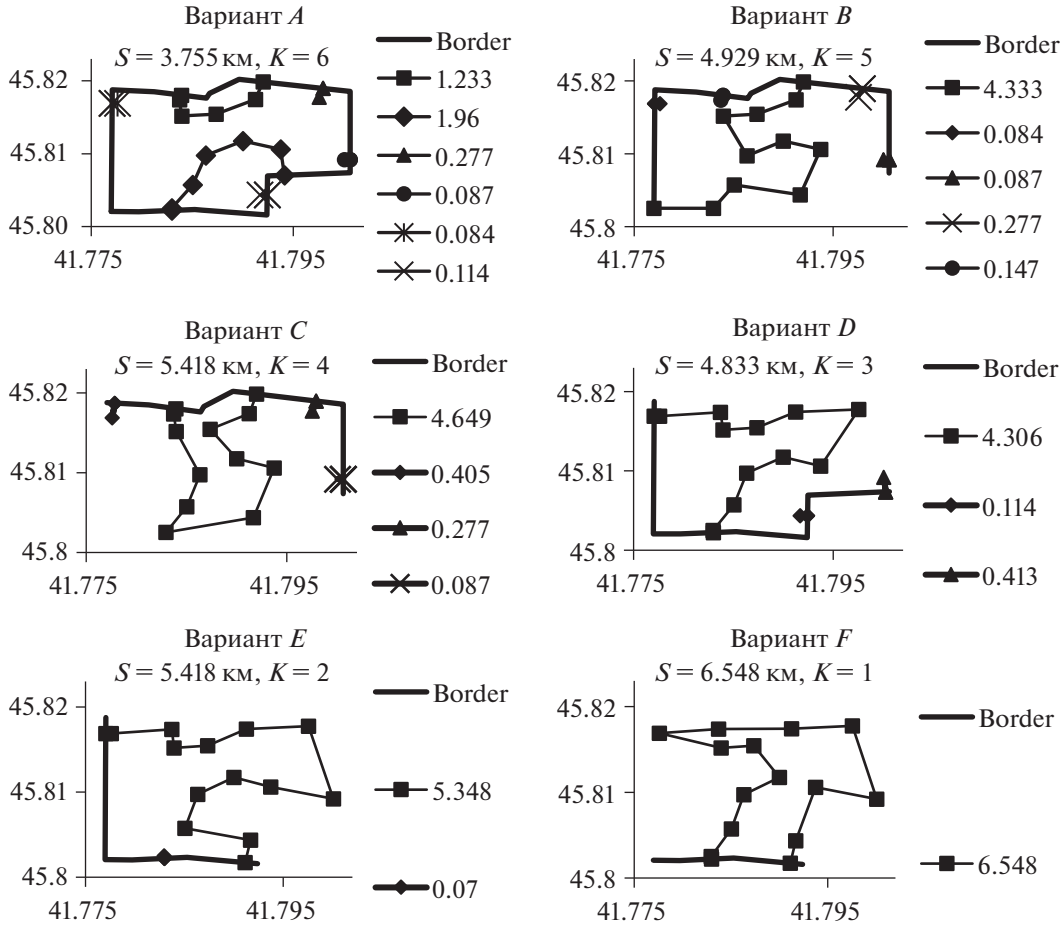

Рис. 8. Кратчайшие маршруты для различных вариантов граничной области

данными двумя вершинами найденной точки граничной области. На рис. 7 отображен кратчайший цикл длиной 6.925 км и кратчайший замкнутый маршрут длиной 6.946 км для граничной области, заданной отрезком *7* линии границы поля.

2. Кратчайшие маршруты наблюдения объектов для различных вариантов граничной области, на которой могут располагаться граничные вершины сегментов маршрута. Варианты граничной области задаем наборами отрезков линии границы поля. Задачу решаем последовательно для различного количества $K = 1, 2, \ldots$ граничных вершин, останавливая вычисления, когда

Таблица 3. Кратчайшие маршруты, сегменты которых могут начинаться и заканчиваться в вершинах *1*, *4*, *7*, *9* линии границы поля

Ограничение на длину сегментов	Маршруты без требования связности (рис. 9, *а*)		Связные маршруты (рис. 9, *б*)		Сегменты маршрута замкнуты в одну вершину (рис. 9, *в*)	
	S, км	*K*	*S*, км	*K*	*S*, км	*K*
Нет	6.249	2	6.362	1	6.925	1
Не более 6 км	6.249	2	6.616	2	7.243	2
Не более 5 км	6.249	2	6.616	2	7.838	2
Не более 4 км	6.249	2	6.749	3	8.843	3
Не более 3 км	6.696	3	7.000	3	—	

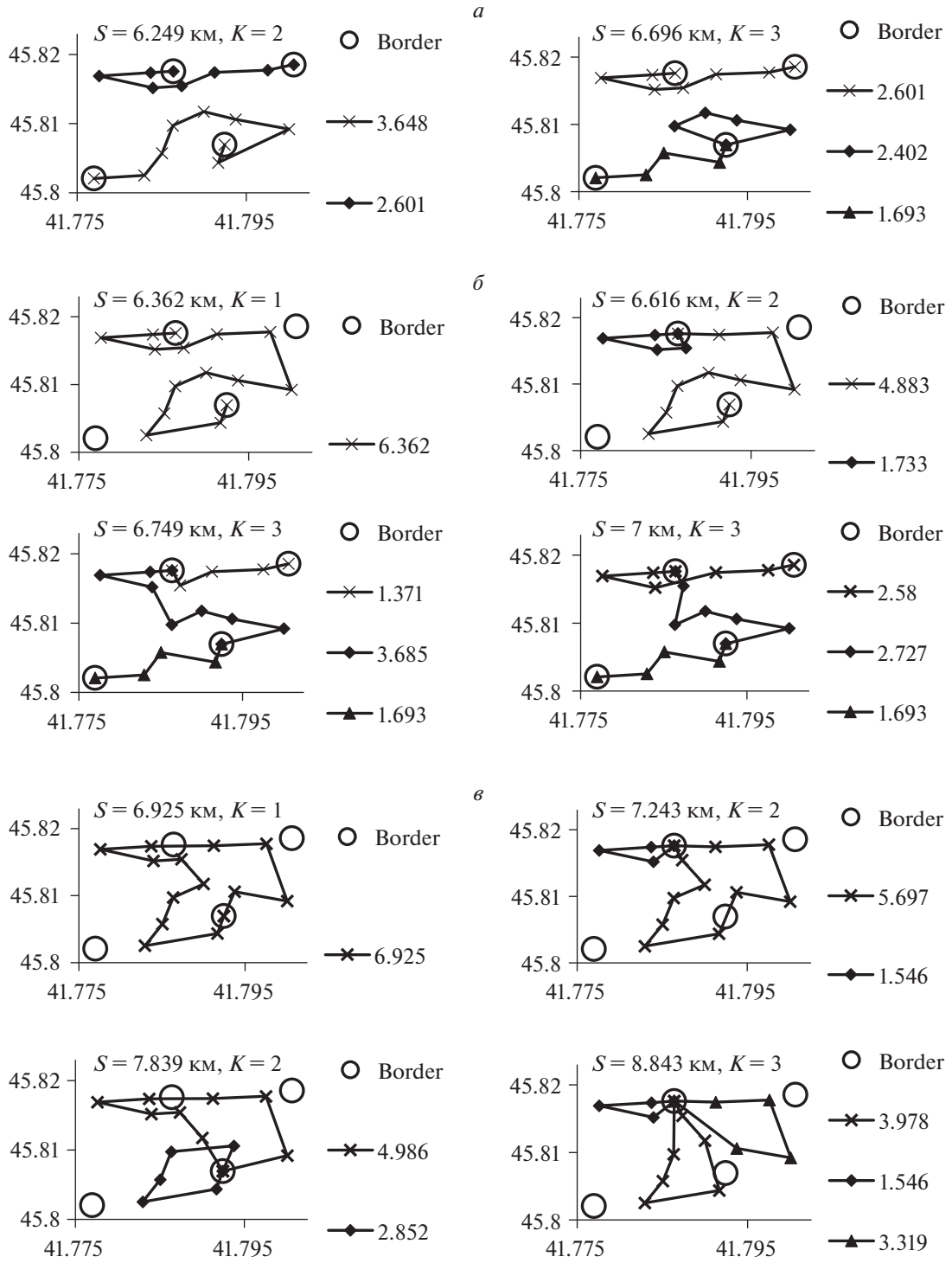

Рис. 9. Кратчайшие маршруты для граничной области, заданной точками: *а* – маршруты без требования связности; *б* – связные маршруты; *в* – маршруты, все сегменты которых замкнуты в одну вершину

длина маршрута перестанет уменьшаться. В табл. 2 и на рис. 8 представлены варианты $A - F$ граничной области и полученные кратчайшие маршруты с указанием длины маршрута S (км) и количества сегментов K. На рис. 8 в легенде рядом с типом линии/маркера сегмента маршрута указана длина сегмента (км).

3. Кратчайшие маршруты наблюдения для случая, когда точки начала/окончания сегментов маршрутов выбираются из заданного перечня фиксированных точек. Рассмотрим различные

ограничения на длины сегментов и требования к *связности* маршрутов (*связным* маршрутом называем маршрут, в котором следующий сегмент начинается в точке окончания предшествующего сегмента). Граничную область представляем четырьмя точками – вершинами *1*, *4*, *7*, *9* линии границы поля (нумерация вершин приведена на рис. 6). В табл. 3 и на рис. 9 рассмотрены варианты ограничений на длины сегментов и кратчайшие маршруты, которые в общем случае не являются связными (рис. 9, *а*), произвольные связные маршруты (рис. 9, *б*) и маршруты, все сегменты которых замкнуты в одну вершину (рис. 9, *в*). Требуемую связность сегментов маршрута достигаем путем решения задачи для всех соответствующих приведенному требованию связности вариантов местоположения граничных вершин, каждая из которых содержит окончание одного и начало другого сегмента маршрута.

Представленные результаты, в частности, показывают, что для описанного примера длина кратчайшего маршрута изменяется: в зависимости от вариантов граничных областей (табл. 2) – в пределах ~80% от минимально возможной; в зависимости от ограничений на длины сегментов и требований связности искомых маршрутов (табл. 3) – в пределах ~40% от минимально возможной.

Заключение. Задача оптимизации планирования наблюдения каталога объектов подвижным наблюдателем с учетом ограничений на моменты выполнения наблюдений и затраты на перемещение наблюдателя между возможными/требуемыми граничными положениями рассмотрена как задача выбора маршрута.

Сформулированную задачу выбора маршрута решаем как задачу минимальной размерности, равной сумме количества объектов наблюдения и сегментов маршрута (числа наблюдателей). При этом контроль выполнения условий и ограничений на моменты времени выполнения наблюдений и на затраты на перемещение наблюдателя между возможными/требуемыми граничными положениями осуществляем без увеличения размерности решаемой задачи путем проверки выполнения данных ограничений на каждом шаге итерационного процесса решения задачи.

Учет наличия нескольких наблюдателей (или нескольких сегментов маршрута, замыкающихся в одни и те же граничные положения наблюдателя) реализуем путем дополнения графа задачи соответствующим количеством граничных вершин, что позволяет формализовать и решать рассматриваемую задачу как задачу определения кратчайшего цикла с использованием соответствующего простого алгоритма ее решения.

Представленные примеры иллюстрируют применение предложенного подхода при решении ряда практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бырков Б.П., Силов В.В.* К вопросу об оптимизации расписания функционирования перспективных космических станций // Тр. XVI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Секция “Проблемы ракетной и космической техники”. М.: ИИЕТ, 1982. С. 37–44.
2. *Garton D., Frank H.* ROSAT Mission Planning and its Perspectives for Planning Future Scientific Missions // AIAA Pap. 1990. № 5092. 6 p.
3. *Беляев М.Ю., Легостаев В.П., Рулев Д.Н.* Экономия энергетических затрат при планировании последовательности наблюдения с космического аппарата астрономических объектов // Изв. РАН. Энергетика. 2013. № 1. С. 15–23.
4. *Федоренко В.Ф., Воронков И.В., Рулев Д.Н., Рулев Н.Д.* Оптимизация маршрутов технических средств мониторинга и обработки посевов // Техника и оборудование для села. 2017. № 10 (244). С. 10–15.
5. *Рулев Д.Н., Рулев Н.Д.* Планирование наблюдений астрономических объектов с космического аппарата с учетом ограничений на моменты выполнения наблюдений // Космическая техника и технологии. 2019. № 1 (24). С. 110–119.
6. *Christofides N., Mingozzi A., Toth P.* The Vehicle Routing Problem // Combinatorial Optimization / Eds N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth, and C. Sandi. Chichester, UK. 1979. Ch. 11. P. 315–338.
7. *Laporte G., Nobert Y., Desrochers M.* Optimal Routing under Capacity and Distance Restrictions // Operations Research. 1985. V. 33. № 5. P. 1050–1073.
8. *Toth P., Vigo D.* An Overview of Vehicle Routing Problems // The Vehicle Routing Problem / Eds P. Toth and D. Vigo. SIAM, Philadelphia. 2002. Ch. 1. P. 1–26.
9. *Solomon M.M.* Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problem with Time Window Constraints // Operations Research. 1987. V. 35. № 2. P. 254–265.
10. *Cordeau J.-F., Desaulniers G., Desrosiers J., Solomon M.M., Soumis F.* VRP with Time Windows // The Vehicle Routing Problem / Eds P. Toth and D. Vigo. SIAM, Philadelphia. 2002. Ch. 7. P. 157–193.

11. *Bard J., Kontoravdis G., Yu G.* A Branch-and-Cut Procedure for the Vehicle Routing Problem with Time Windows // Transportation Science. 2002. V. 36. № 2. P. 250– 269.
12. *Kallehauge B.* Formulations and Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem with Time Windows // Computers & Operations Research. 2008. V. 35. P. 2307–2330.
13. *Baldacci R., Mingozzi A., Roberti R.* Recent Exact Algorithms for Solving the Vehicle Routing Problem under Capacity and Time Window Constraints // Europ. Operational Research. 2012. V. 218. P. 1–6.
14. *Моудер Дж., Элмаграби С.* Исследование операций. Методологические основы и математические методы. М.: Мир, 1981. 704 с.
15. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М.: Мир, 1984. 224 с.
16. *Беляев М.Ю., Рулев Д.Н.* Повышение информативности наблюдений наземных объектов с ИСЗ // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 1. С. 56–68.
17. *Ryumin V.V., Solovyov V.A., Belyaev M.Yu., Rulev D.N., Teslenko V.P.* Optimization of Control of Space Investigations in “Gamma” project // 11th IFAC World Congress on Automatic Control. Tallinn, Estonia, USSR, 1990, 1.1-CS control in aerospace. Preprints. V. 1. P. 96–100.
18. *Литтл Дж. и др.* Алгоритм решения задачи о коммивояжере // Экономика и мат. методы. 1965. Т. 1. № 1. С. 94–107.

EDN: EXNDFT
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 80–85

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 004.8

ПОКАДРОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭМОЦИЙ НА ВИДЕОЗАПИСИ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

© 2022 г. Ф. Р. Ахияров[a], Л. А. Деревягин[a], В. В. Макаров[a,*], В. И. Цурков[b], А. Н. Яковлев[a]
[a]*МФТИ (НИУ), Москва, Россия*
[b]*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*
**e-mail: viktor.makarov@phystech.edu*

Поступила в редакцию 27.09.2021 г.
После доработки 18.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Предложена архитектура многослойной нейронной сети для решения задачи определения эмоции человека на видеозаписи. Сформированы соответствующие признаки. Под эмоциями понимаются страх, радость, грусть и др. Для обучения используются известные и широко применяемые наборы данных. С помощью комбинирования в архитектуре удается доучить нейросеть и повысить точность ее окончательной версии.

DOI: 10.31857/S0002338822020020

Введение. Распознавание эмоций человека по мимике лица является важной научно-исследовательской проблемой, которая затрагивает множество дисциплин и областей [1–3]. Эта тематика актуальна в таких сферах, как медицина, психология [4] и безопасность. В данной работе рассматриваются подходы к распознаванию эмоций человека по визуальным признакам лица. Применяется глубокое обучение многослойных нейронных сетей.

Существует огромное разнообразие алгоритмов, способных распознавать эмоции человека по мимике лица [5]. Однако качество этих систем уменьшается из-за следующих обстоятельств:

маленькая выборка для обучения,

расхождение в пропорциях лица,

наигранность эмоций,

освещенность во время съемки,

окклюзия,

различный угол поворота головы,

внутриклассовое различие и межклассовое сходство,

этническая принадлежность, пол, возраст.

Использование многослойных нейронных сетей направлено на повышение точности определения эмоций на изображениях.

1. Краткий обзор существующих подходов. Наиболее точно на сегодняшний день эмоции человека были описаны П. Экманом в работе [6], где каждая эмоция была представлена при помощи кодирования лицевых движений, но данный подход сложно автоматизировать [7, 8]. Это связано с тем, что он содержит 46 основных категорий и более 50 дополнительных, а эмоции являются комбинациями таких групп. Поэтому для подготовки такие датасеты (пронумерованный набор изображений, фонограмм или видеозаписей с указанием исследуемых признаков каждого элемента) обрабатываются психологами вручную с учетом указанных обстоятельств.

Особый интерес представляет датасет Aff-Wild [9–11], который состоит из фрагментов видеороликов платформы YouTube, они не являются предзаписанными в видеостудии. Это значит, что условия записи материалов максимально приближены к действительности.

Существует два принципиально разных подхода в распознавании эмоций:

с предварительным алгоритмическим извлечением визуальных признаков и последующей машинной классификацией [12],

с использованием глубоких нейронных сетей без предварительного извлечения признаков.

Визуальные признаки могут быть извлечены при помощи выявления:

геометрических объектов лица (брови, нос, рот, глаза и др.) [13, 14] методами дескриптора line edge map, сравнения направленности градиентов [15, 16], активной модели формы ASM [17], курвлет-преобразования [18], использования структурных моделей [19] и др.;

текстурных особенностей методами фильтра Габора, дискретным вейвлет-преобразованием [20] и др.;

глобальных и локальных объектов методами главных компонент [21], оптического потока [22], морфологическими преобразованиями [23] и др.

Но при условии наличия достаточного датасета наиболее высокой точности классификации удается достичь именно при помощи автоматического выявления признаков и классификацией глубокими нейронными сетями [24–26].

2. Обучение нейронной сети. Сначала осуществляется предварительная обработка. Этот этап предподготовки информации позволяет минимизировать перечисленные ранее причины ошибок. В первую очередь выполняется обнаружение области лица, обрезка изображения и масштабирование для подведения под нужный размер. Затем производится изменение контрастности для уменьшения ошибок, возникающих из-за большой разницы освещения, и выделение общих визуальных особенностей лица. Под этими особенностями понимаются компоненты лица, такие, как губы, нос, рот, брови и т. д., а также немаловажный признак – текстура кожи. Этот этап нужен для более точной постановки задачи перед алгоритмом классификации.

Среди известных подходов обнаружения лиц на изображении существуют две категории.

1. Методы, построенные на конкретном наборе составленных правил, основанных на выделении независимых свойств изображений лиц. Здесь имеет место два этапа построения:

установка явных признаков, характерных для изображений лица,

обработка найденных признаков.

2. Методы, в которых задействован вычислительный вектор признаков, разделяющий изображение на два типа: лицо и не лицо. Выбор метода зависит от установленных ограничений и условий в процессе выполнения задачи. Выделяются следующие возможные ограничения:

пространственные характеристики положения лиц;

наличие или отсутствие ограничений на возможные искусственные помехи на лице;

количество лиц на изображении;

условия освещенности объектов;

цветность изображения;

приоритет в минимизации ложных обнаружений или в количестве обнаруженных лиц;

масштаб лиц и разрешение изображения.

Для анализа видеопотока была выбрана библиотека для проектирования нейросетей – Theano. Это библиотека, которая используется для разработки систем машинного обучения как сама по себе, так и в качестве вычислительного бекэнда для более высокоуровневых библиотек, в данном случае – Lasagne. Также применяется Nolearn как дополнительная и вспомогательная библиотека машинного обучения.

Вычисления проводились для различных датасетов. Для датасета RAVDESS [27] каждый видеоматериал разбивался на части по 0.5 с, и при обработке они перемешивались. Для датасета CK+ [28] из каждой директории брали 3–5 последних кадров, они отбирались многократно и случайным образом, а затем была проведена аугментация в виде поворота кадра в случайный угол на 10°, для того чтобы достичь баланса в классификации. Для датасета Aff-Wild из видео выбирались 4–16 кадров случайного отрезка, а сами видеоматериалы определялись также многократно и случайным образом, после проводилась аугментация для достижения баланса. Дальнейшая работа заключалась в фиксации лица и его переформировании в конкретное изображение лица в формат 256 × 256, чтобы пропустить его через сверточную нейронную сеть.

После прохождения нейронной сетью обучения требуется тестирование ее полученной архитектуры. Происходит это посредством обработки нейронной сетью новых данных. Для этого была сделана выборка из датасета RAVDESS. Для работы над видеоматериалами были также взяты выборки из CK+ и Aff-Wild. На основе этой выборки была проведена оптимизация гиперпараметров для получения более точного результата. Целевая функция использовала кортеж гиперпараметров и возвращала связанные с ними потери. Использовался случайный перебор всех

комбинаций на выборку их случайным образом при помощи библиотеки Keras Tuner, а именно с применением алгоритмов случайного поиска и HyperBand.

Случайный поиск заменяет полный перебор всех комбинаций на выборку их случайным образом. Метод может быть обобщен к непрерывным и смешанным пространствам. Случайный поиск может превзойти поиск по решетке особенно в случае, если только малое число гиперпараметров оказывает влияние на производительность алгоритма обучения машины. Следовательно, задача оптимизации имеет низкую внутреннюю размерность. Случайный поиск также легко параллелизуем и, кроме того, позволяет использовать предварительные данные путем указания распределения для выборки случайных параметров.

3. Комбинирование архитектурой нейронных сетей и датасетов. В рамках проведения экспериментов были получены следующие результаты тестирования нейронной сети для видеофиксации.

Датасет RAVDESS, точность – 69.35%. Классификация по эмоциям:

грусть,

злость,

нейтральное состояние,

отвращение,

радость,

спокойствие,

страх,

удивление.

Датасет CK+: точность – 82.3%. Классификация по эмоциям:

грусть,

злость,

отвращение,

презрение,

радость,

страх,

удивление.

Датасет Aff-Wild: точность – 60.7%. Классификация по состояниям:

нейтральное состояние,

возбужденное позитивное,

возбужденное негативное,

расслабленное позитивное,

расслабленное негативное.

Здесь в каждой из трех групп вводятся неотрицательные коэффициенты (вероятности), сумма которых равна единице. Цель распознавания – нахождение максимального коэффициента.

Остановимся на результатах датасета Aff-Wild. Он является единственным из представленных, в котором материал для анализа содержит изображения в различных ракурсах. Из этого делается следующий вывод: в датасетах CK+ и RAVDESS наличие схожих кадров лиц неизбежно привело бы к ухудшению показателей результата.

На предыдущем этапе разработки была создана и обучена нейросеть, которая показывает хорошую точность в условиях, близких к идеальным: при правильном освещении, фоне, расстоянии от камеры до лица. Но при ухудшении условий точность результатов падает. Поэтому следующей задачей является создание нейросети, которая обучена уже на данных, приближенных к реальным.

Для обучения был выбран датасет Aff-Wild, который участвовал в предыдущем этапе разработки, но в качестве датасета результативной выборки. Сама организация процесса обучения выглядит следующим образом.

Обучаем первичную сеть на простой задаче, удаляя первый класс. При этом датасет сбалансируется, так как в исходной версии было много нейтральных кадров с нулевой результативностью. На этом этапе кадры обрабатываются по отдельности без последовательности. Точность на этом этапе составляет 72%.

Из обученной в предыдущем этапе нейросети убираем последние слои, дойдя до слоя укрупнения (maxpool) с предыдущего блока слоев. Полученную нейросеть делаем первичной. После чего пропускаем через эту нейросеть датасет RAVDESS и сохраняем найденный промежуточный результат.

Таким образом получаем промежуточный датасет для обучения нейросетей по определению эмоций и их силы. В результате такой комбинации архитектур нейросети будут достаточно точны при пропускании через них материалов, приближенных к реальным условиям, потому что первичная нейросеть уже умеет с ними работать, а студийные условия выступают лишь как частный случай.

Нейросети должны объединять в себе точность, скорость работы и простоту реализации. Работа с изображением все так же предполагает работу со сверточными нейронными сетями в силу их спецификации. Точность сети можно предварительно оценить, исходя из результатов теста cifar-10. В тесте убирается первый слой, а после через нейросеть пропускаются картинки размером 32 × 32, разбитые на 10 классов.

Подходящие под все три критерия сети обладают большим количеством простых слоев и относятся к одному из двух видов:

полносвязные (dense), в которых результат свертки объединяется с исходными данными;

остаточные (residual), в которых результат свертки (или нескольких) суммируется с исходными данными.

Особенность обеих архитектур состоит в том, что градиент ошибки, являющийся фактором обучения, не угасает от слоя к слою, а равномерно обучает все слои сети. Кроме того, обе архитектуры используют после каждого слоя (либо перед каждым слоем) нормализацию внутри партии. Это значит, что из исходных данных вычитается среднее, а отклонение делается равным единице. Этот процесс заметно стабилизирует и ускоряет обучение и заодно повышает точность, однако замедляет работу примерно на 30%.

Выбран вариант нейросети с нарастанием. Используются тонкие свертки с нелинейностью elu и нормализацией результата, потому что исходные данные уже нормализованы, при добавлении новых данных остаются нормализованными, и нет смысла повторять вычисления.

Также для удобства реализации создан слой плотной свертки, в котором последовательно объединены:

тонкая свертка с ядром 1 × 1,

основная свертка с ядром 3 × 3 и нелинейностью,

нормализация по партии,

объединения с исходными данными.

Две первые операции эквивалентны обычной свертке, но требуют на порядок меньше вычислений, а значит и времени. Для нормализации (простой вариант) мы обучаем параметры beta и gamma, и итоговое значение будет

$$result = \frac{(conv - conv_{mean})}{conv_{std}} gamma + beta,$$

где $conv_{mean}$ – среднее по осям партии, длине и ширине свертки, $conv_{std}$ – стандартное отклонение по осям партии, длине и ширине свертки.

В отличие от стандартной архитектуры, из модели удалены полносвязные слои, образующие итоговый набор классов. Вместо них при достижении слоем размеров менее 5 × 5 происходит усреднение внутри слоев.

Видео читается покадрово при помощи библиотеки Scikit-video. Для удобства работы написан итератор, который перебирает элементы контейнерного класса без необходимости пользователю знать реализацию определенного контейнерного класса. Он определяет характеристики видео из заголовка и затем читает видео посекундно. Лишние кадры удаляются, а на оставшихся итератор находит лицо при помощи библиотеки Dlib, и изменяет его размер до 256 × 256 при помощи библиотек Scikit-image или CV2. Полученные изображения объединяем в партию и обрабатываем первичной нейросетью. Полноценно архитектура сети выглядит следующим образом:

первые слои сети – нормализация внутри партии и обнуление (dropout) с вероятностью 0.1,

далее следует свертка с ядром 5 × 5 и шагом 2,

4–8 плотных сверток с ядром 3 × 3 и 15 каналами,

укрупнение размера промежуточного изображения,

слой нормализации,

слой обнуления,

свертки 1 × 1 с числом каналов, равным половине входящих,

последний блок, который впоследствии будет отбрасываться,

обнуление с вероятностью 0.3,

свертка размером 90 × 1 × 1,

6 плотных сверток с ядром 1 × 1,

усреднение слоев,

нормализация по партии,

усреднение каналов до 5 созданных классов.

Контрольная выборка была взята из расширенного датасета RAVDESS, в которой три актера произносили одну фразу с разными эмоциональными оттенками. Итоговая нейросеть правильно классифицировала 91 файл из 100, тем самым можно сделать вывод об увеличении точности на 21% по сравнению с предварительными итогами.

Заключение. Последующее исследование будет связано с анализом и разработкой нейронных сетей для классификации эмоциональных состояний в фонограммах. Совместное применение аудио- и видеосистем увеличит точность распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.А., Кирпичников А.П., Ляшева С.А., Шлеймович М.П.* Анализ эмоционального состояния человека на изображении // Вестн. технологического ун-та. 2019. Т. 22. № 8. С. 120–123.
2. *Заболеева-Зотова А.В.* Развитие системы автоматизированного определения эмоций и возможные сферы применения // Открытое образование. 2011. № 2. С. 59–62.
3. *Люсин Д.В.* Современные представления об эмоциональном интеллекте // Социальный интеллект: теория, измерение, исследования / Под ред. Д.В. Люсина, Д.В. Ушакова. М.: Изд-во Ин-та психологии РАН, 2004. С. 29–36.
4. *Гранская Ю.В.* Распознавание эмоций по выражению лица: Автореф. дис. ... канд. психологических наук по специальности 09.00.01. СПб., 1998.
5. *Бобе А.С., Конышев Д.В., Воротников С.А.* Система распознавания базовых эмоций на основе анализа двигательных единиц лица // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 9. С. 7.
6. *Ekman P.* Facial Action Coding System. Palo Alto. USA: Consulting Psychologist Press, 1978.
7. *Kollias D., Zafeiriou S.* Expression, Affect, Action Unit Recognition: Aff-Wild2, Multi-Task Learning and ArcFace // arXiv preprint arXiv: 1910.04855, 2019.
8. *Kollias D.* Face Behavior a la carte: Expressions, Affect and Action Units in a Single Network // arXiv preprint arXiv: 1910.11111, 2019.
9. *Kollias D.* Analysing Affective Behavior in the First ABAW 2020 Competition // arXiv preprint arXiv:2001.11409, 2020.
10. *Kollias D.* Deep Affect Prediction in-the-wild: Aff-Wild Database and Challenge, Deep Architectures, and Beyond // Intern. J. Computer Vision (IJCV). 2019. № 127. P. 907–929.
11. *Kollias D.* Distribution Matching for Heterogeneous Multi-Task Learning: a Large-scale Face Study // arXiv preprint arXiv:2105.03790, 2020.
12. *Abdulrahman M., Eleyan A.* Facial Expression Recognition Using Support Vector Machines // Proc. 23nd Signal Processing and Communications Applications Conf. (SIU 2015). Malatya, Turkey, 2015. P. 276–279.
13. *Tripathi A., Pandey S.* Efficient Facial Expression Recognition System Based on Geometric Features Using Neural Network // Lecture Notes in Networks and Systems. 2018. V. 10. P. 181–190.
14. *Hernandez-Matamoros A., Bonarini A., Escamilla-Hernandez E., Nakano-Miyatake M., Perez-Meana H.* A Facial Expression Recognition with Automatic Segmentation of Face Regions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 532. P. 529–540.
15. *Jumani S.Z., Ali F., Guriro S., Kandhro I.A., Khan A., Zaidi A.* Facial Expression Recognition with Histogram of Oriented Gradients Using CNN // Indian J. Science and Technology. 2019. V. 12. № 24. P. 1–8.
16. *Greche L., Es-Sbai N., Lavendelis E.* Histogram of Oriented Gradient and Multi Layer Feed Forward Neural Network for Facial Expression Identification // Proc. Intern. Conf. on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD 2017). Hammamet, Tunisia, 2017. P. 333–337.

17. *Iqtait M., Mohamad F.S., Mamat M.* Feature Extraction for Face Recognition Via Active Shape Model (ASM) and Active Appearance Model (AAM) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Tangerang Selatan, Indonesia, 2018. V. 332. P. 1–8.
18. *Candès E., Demanet L., Donoho D., Ying L.* Fast Discrete Curvelet Transforms // Multiscale Modeling & Simulation. 2006. V. 5. № 3. P. 861–899.
19. *Себряков Г.Г., Визильтер Ю.В.* Разработка методики построения специализированных экспертных систем для анализа цифровых изображений в задачах обнаружения и идентификации сложных структурных объектов // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 1997. № 3. С. 31.
20. *Nigam S., Singh R., Misra A.K.* Efficient Facial Expression Recognition Using Histogram of Oriented Gradients in Wavelet Domain // Multimedia Tools and Applications. 2018. V. 77. № 21. P. 28725–28747.
21. *Varma S., Shinde M., Chavan S.S.* Analysis of PCA and LDA Features for Facial Expression Recognition Using SVM and HMM Classifiers // Techno-Societal 2018: Proc. 2nd Intern. Conf. on Advanced Technologies for Societal Applications. Berlin, Germany, 2019. V. 1. P. 109–119.
22. *Zhao J., Mao X., Zhang J.* Learning Deep Facial Expression Features from Image and Optical Flow Sequences Using 3D CNN // Visual Computer. 2018. V. 34. № 10. P. 1461–1475.
23. *Визильтер Ю.В., Выголов О.В., Желтов С.Ю., Князь В.В.* Метрический подход к семантико-морфологическому сравнению изображений // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 2020. Т. 17. № 5 (191). С. 3–12.
24. *Рюмина Е.В., Карпов А.А.* Аналитический обзор методов распознавания эмоций по выражениям лица человека // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. № 2. С. 163–176.
25. *Talegaonkar I., Joshi K., Valunj S., Kohok R., Kulkarni A.* Real Time Facial Expression Recognition Using Deep Learning // Proc. of Intern. Conf. on Communication and Information Processing (ICCIP). 2019 [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=3421486.
26. *Визильтер Ю.В., Горбацевич В.С., Желтов С.Ю.* Структурно-функциональный анализ и синтез глубоких конволюционных нейронных сетей // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 5. С. 886–900.
27. *Livingstone S.R., Russo F.A.* The Ryerson Audio-visual Database of Emotional Speech and Song (RAVDESS): A dynamic, Multimodal Set of Facial and Vocal Expressions in North American English // PLoS ONE. 2018. V. 13. № 5. C. 1–35.
28. *Lucey P.* The Extended Cohn-Kanade Dataset (CK+): A Complete Bataset for Action Unit and Emotion-specified Expression // Proc. IEEE CVPR Workshop on Biometrics. San Francisco: IEEE Computer Society, 2010. P. 94–101.

EDN: ZFAJVY
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 86–99

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 004.932.2, 004.852

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ПОДДЕЛОК В МОБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ПО ЛИЦУ ПРИ ПОМОЩИ СТЕРЕОКАМЕРЫ[1]

© 2022 г. Ю. С. Ефимов[a,*], И. А. Матвеев[b,]**

[a] *МФТИ, Долгопрудный, МО, Россия*
[b] *ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*
**e-mail: yuri.efimov@phystech.edu*
***e-mail: matveev@ccas.ru*

Поступила в редакцию 14.10.2021 г.
После доработки 16.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Предложен метод обнаружения спуфинг-атак в системах распознавания по лицу на мобильных устройствах. Метод способен работать в реальном времени на устройствах с ограниченными вычислительными возможностями, различными условиями регистрации и с использованием штатной стереокамеры, особенностью которой является малый стереобазис. Метод основан на сверточной нейронной сети и многоцелевом обучении, предложена специальная функция потерь. Рассмотрены следующие типы подделок: высококачественные распечатанные изображения лиц, цифровые фотографии и видеопоследовательности, показываемые на экранах высокого разрешения. Полученный алгоритм протестирован на нескольких наборах стереоизображений как общедоступных, так и собранных вручную, отличающихся большим разнообразием условий съемки.

DOI: 10.31857/S0002338822020068

Введение. Технология распознавания по лицу получила распространение в разных областях, от крупномасштабных систем видеонаблюдения до мобильных устройств. Важным преимуществом этой технологии является возможность применения практически без взаимодействия с субъектом [1]. Как и другие биометрические модальности, распознавание лиц уязвимо по отношению к предоставлению подделок или *спуфингу*. В отличие от систем, использующих трудно воспроизводимые биометрические признаки, такие, как рисунок отпечатка пальца или текстура радужки, изображение лица человека несложно получить и подделать. Множество систем распознавания лиц использует изображения в видимом диапазоне, что позволяет осуществлять спуфинг-атаку на такую систему при помощи простой качественной фотографии, показываемой на цифровом экране или распечатанной на принтере высокого разрешения.

В настоящее время широко распространены социальные сети и сервисы по обмену фотографиями и видеозаписями, поэтому получить набор изображений лица практически любого человека не составляет труда. Помимо этого, изображения лица возможно получить и при помощи скрытой фото- или видеосъемки, которая сейчас доступна в высоком качестве каждому имеющему современный смартфон. Таким образом, уровень безопасности систем распознавания по лицу в первую очередь определяется устойчивостью к предъявлению подделок, следовательно, задача определения живости или *антиспуфинга* является актуальной.

1. Современное состояние области исследования. Подделки лица человека можно разделить на три группы по способу их создания: распечатки изображения лица, цифровые изображения или видео и лицевые маски [2]. Сложность детектирования подделок во многом определяется качеством используемых материалов и устройств. Важнейшим принципом обнаружения подделки лица является определение трехмерных характеристик видимой сцены. Первые два способа здесь отсекаются, третий становится значительно более трудоемким.

Описанные в литературе методы антиспуфинга можно разделить на две группы: использующие дополнительное оборудование (сенсоры глубины [3], камеры в ближнем инфракрасном

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 19-07-01231, 19-31-90167).

диапазоне (ИК-камеры) [4], тепловые камеры [5]) и основанные исключительно на программной обработке входного изображения. Методы первой группы позволяют решать задачу детектирования подделок с высокой точностью, однако их применение на практике существенно увеличивает стоимость системы. Вторую группу можно разделить на две подгруппы: кооперативные и некооперативные методы. Кооперативные методы требуют выполнения определенных движений лицом и/или его частями в соответствии с запросом системы, что повышает уровень безопасности, но раздражает пользователя и увеличивает время отклика системы.

Системы биометрической идентификации в мобильных устройствах, таких, как смартфоны и ноутбуки, должны иметь малое время отклика, возможность работать на ограниченных вычислительных ресурсах, допускать применение в разнообразных и неконтролируемых условиях съемки. В случае с изображением лица человека в видимом спектре изменчивость условий съемки делает возможным появление практически идентичных низкокачественных изображений настоящих лиц и подделок [2]. Эти факторы существенно ограничивают набор подходов к решению задачи.

Большинство представленных на рынке мобильных устройств с системой распознавания по лицу, дающей доступ к личной информации пользователя и осуществлению платежных операций, оборудовано дополнительными датчиками [6], [7] для обеспечения высокого уровня безопасности против спуфинг-атак, как правило сенсорами определения глубины. При этом лишь сравнительно небольшая группа устройств [8], [9] снабжена парой фронтальных камер, позволяющих оценивать глубину снимаемых сцен алгоритмами стереозрения. По сравнению с большинством более совершенных датчиков, используемых для оценки глубины сцены, дополнительная фронтальная камера вносит небольшую добавочную стоимость в систему по ряду причин. Во-первых, упомянутые сенсоры применяют технологию активной подсветки для получения карты глубины, что требует установки источника этой подсветки и приемника – дополнительной камеры, зачастую восприимчивой к ИК-излучению, что делает ее совмещение с основной фронтальной камерой невозможным. Во-вторых, два добавочных датчика требуют для установки дополнительное пространство на передней панели мобильного устройства, большую часть которой занимает сенсорный дисплей. Поэтому разумно исследовать возможности применения фронтальных стереокамер мобильных устройств для решения задачи антиспуфинга в системах распознавания по лицу.

Задача построения карты глубины сцены по изображениям стереокамеры является классической [10]. Ее решение, как правило, состоит из нескольких этапов: калибровка стереопары, построение карты смещений (диспаратности) и последующее построение карты глубин с учетом параметров калибровки.

Более современный подход – применение сверточных нейронных сетей [11–13]. При наличии достаточно большого по объему и разнообразию набора входных изображений можно решать как задачу оценки смещений [11], так и извлечения глубины изображения в разнообразных условиях освещенности [12]. Недостатками этих подходов применительно к их использованию в мобильных устройствах являются высокие вычислительные затраты и необходимость большого стереобазиса, такого, как, например, в беспилотных автомобилях. Описаны менее ресурсоемкие подходы [14]. Для предсказания глубины сцены авторы предлагают задействовать как информацию от мобильной стереопары с малым расстоянием между центрами камер, так и от подсистемы фазового фокуса одной из камер (PDAF, phase detection auto focus).

Большинство описанных в литературе методов, использующих стререоизображения для антиспуфинга, так или иначе пытаются извлечь информацию о глубине изображения или видео лица человека для определения его живости [15]. Эти подходы имеют преимущество перед однокадровыми, особенно для изображений, полученных в разнообразных условиях съемки. Как правило, такие алгоритмы основаны на классических или нейросетевых классификаторах, обрабатывающих признаки карты смещений или карты глубин. В [16] авторы предлагают способ построения приблизительной карты диспаратности при помощи небольшой сверточной нейронной сети, предобученной на целевом домене. После этого этапа обучается вторая нейронная сеть, использующая признаковые описания, которые получены от первой.

В [17] для предсказания метки класса предлагается нейронная сеть, построенная по принципу автокодировщика и состоящая из двух частей. Кодирующая часть нейронной сети извлекает промежуточные признаки, которые затем используются декодирующей частью для регрессии значений диспаратности. Результат обработки входных изображений декодером затем подается в небольшую сверточную нейронную сеть для классификации. Обе части нейронной сети обучаются совместно как на регрессию истинных значений диспаратности, так и на предсказание пра-

вильной метки класса, что повышает обобщающую способность полученной нейронной сети. Аналогичный подход был применен в ряде работ по детектированию подделок и привел к повышению точности итоговых решений [18]. Недостатком этого подхода является вычислительная сложность, поскольку для предсказания метки класса требуется пропустить входную пару изображений через обе части нейронной сети.

Все упомянутые работы используют обучающие выборки, полученные при помощи стереокамер с большим стереобазисом (более 4 см), что повышает устойчивость и точность восстановления трехмерных признаков. Однако типичные стереокамеры мобильных устройств имеют расстояния между центрами сенсоров не более 2 см.

В работе предлагается алгоритм определения живости лица на стереоизображении, основанный на применении сверточной нейронной сети. Используется нейронная сеть с небольшой вычислительной сложностью, обученная на парах изображений, полученных штатной стереокамерой мобильного устройства. Предлагаемый метод протестирован на наборе изображений, зарегистрированных при большом разнообразии условий освещенности.

2. Описание предлагаемого метода. Решение задачи основано на сверточной нейронной сети, входом которой является стереопара изображений. Используется информация о положении лица на одном из изображений.

2.1. Постановка задачи. Входными данными для предлагаемого метода является пара изображений, про которые известно, что на них лицо содержится целиком. Определение живости осуществляется после этапа образмеривания, т.е. когда найдены область лица и координаты глаз. Без ограничения общности будем предполагать, что пара изображений I_0 и I_1 есть квадратные растры размером $W \times W$ пикселей, индекс 0 соответствует левой камере, 1 – правой. Обозначим координаты центров правого и левого глаз на изображении (x_R, y_R) и (x_L, y_L) соответственно. Каждая пара изображений имеет также бинарную метку класса: $y = \{0;1\}$, где “1” обозначает “настоящее лицо”, “0” – “подделка”.

Решается задача классификации объектов, т.е. строится отображение:

$$a : (I_0, I_1; w) \mapsto y, \tag{2.1}$$

где w – набор параметров алгоритма. Для оценки точности бинарной классификации существуют известные характеристики: TP (true positive) – доля объектов класса “1”, которым была корректно присвоена метка “1”; FN (false negative) – доля объектов класса “0”, которым была некорректно присвоена метка “1”; FP (false positive) – доля объектов класса “1”, которым была некорректно присвоена метка “0”; TN (true negative) – доля объектов класса “0”, которым была корректно присвоена метка “0”.

Используются следующие меры качества, предписанные в стандарте [19]:

CCR (correct classification rate) – доля корректно классифицированных объектов:

$$\mathrm{CCR} = \frac{\mathrm{TP} + \mathrm{TN}}{\mathrm{TP} + \mathrm{FP} + \mathrm{FN} + \mathrm{TN}}; \tag{2.2}$$

APCER (attack presentation classification error rate) – доля изображений подделок, классифицированных как содержащие живое лицо:

$$\mathrm{APCER} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FP} + \mathrm{TN}}; \tag{2.3}$$

BPCER (bona-fide presentation classification error rate) – доля изображений настоящих лиц, классифицированных как содержащие подделку:

$$\mathrm{BPCER} = \frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{TP} + \mathrm{FN}}; \tag{2.4}$$

EER (equal error rate) – уровень ошибки классификатора при некотором пороговом значении решающего правила, при котором значения ошибок обоих видов равны.

2.2. Предварительная обработка изображений. Большое значение для качества работы классификатора имеет предварительная подготовка данных, минимизирующая различия в условиях регистрации. Здесь рассматриваются ректификация, определение ориентации лица и выбор цветового пространства.

Калибровка и ректификация. Первым этапом предобработки изображений стереопары является *ректификация* – приведение изображений к некоторому стандартному виду путем

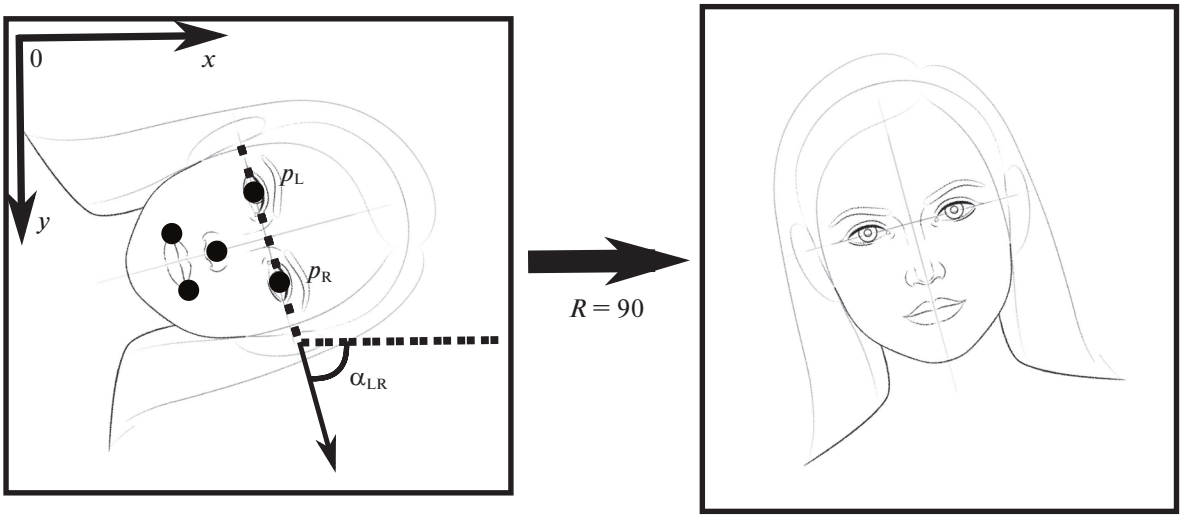

Рис. 1. Определение ориентации лица на изображении

компенсации искажений, вносимых инивидуальными особенностями камер. Ректификация производится на основании калибровочных данных, (матрица внутренних параметров камеры и коэффициенты дисторсии) могут быть извлечены из памяти устройства [20]. Каждая камера современных мобильных устройств калибруется на производственных линиях на специальной установке, как правило, еще до окончательной сборки корпуса. К сожалению, при сборке, транспортировке и эксплуатации положения сенсоров и/или линз камер может измениться, что приводит к несоответствию калибровки действительным параметрам камер [21]. Дефекты калибровки незаметны в большинстве приложений, однако являются существенными для фотограмметрии. Повторная калибровка на стороне пользователя нежелательна даже в автоматизированном режиме, поскольку это снижает удобство и вносит значительный риск некорректного выполнения.

По этой причине в данной работе используются изображения, полученные без ректификации.

Определение ориентации лица. Особенностью использования мобильных устройств является то, что их ориентация при распознавании может быть различной: портретной и ландшафтной. Детектирование подделок происходит после этапа образмеривания.

Среди точек, полученных при образмеривании, содержатся положения центров глаз $\vec{p}_R = (x_R, y_R)$ и $\vec{p}_L = (x_L, y_L)$, эти координаты можно использовать для определения ориентации входного растра. Угол наклона прямой, соединяющей зрачки к оси OX, равен

$$\alpha_{LR} = \left(\frac{y_R - y_L}{x_R - x_L}\right)$$

и определяет ориентацию R входного кадра (рис. 1):

$$R = \begin{cases} 0, & |\alpha_{LR}| < \dfrac{\pi}{4}, \\ 90, & \dfrac{\pi}{4} < \alpha_{LR} < \dfrac{3\pi}{4}, \\ 180, & |\alpha_{LR}| > \dfrac{3\pi}{4}, \\ 270, & -\dfrac{3\pi}{4} < \alpha_{LR} < -\dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Значение R задает угол, на который требуется повернуть исходный растр против часовой стрелки, чтобы ориентация лица на нем стала естественной, строго “подбородком вниз”.

Выбор цветового пространства. Цветовые каналы RGB-представления изображений сильно скореллированы, поэтому для повышения обобщающей способности нейронных сетей предлагается применять либо иные цветовые пространства, либо избавляться от цветности вовсе [22].

В работе изображения перед подачей в нейронную сеть преобразовываются к одноканальному (монохромному) представлению. К полученным парам растров применяется алгоритм блочного приведения гистограмм [23], чтобы избавиться от искажений, вносимых расхождением автоэкспозиций стереокамер.

2.3. Выбор функции потерь. Детектирование подделок – это задача бинарная классификация, при решении которой при помощи методов машинного обучения часто применяют логистическую функцию потерь или перекрестную кросс-энтропию:

$$L_0 = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{N}(-y^i \log a^i - (1-y^i)\log(1-a^i)) \to \min, \tag{2.6}$$

где $y^i \in \{0;1\}$ – метка класса, a^i – ответ алгоритма на i-м примере обучающей выборки, имеющей размер K.

Классификатором (2.1) является нейросеть $\mathbb{N}(I_0, I_1; w)$ с набором весов w. Ее предсказания соответствуют вероятности принадлежности лица на стереоизображении к положительному классу (в данном случае – к классу “настоящее лицо”):

$$a^i = \mathbb{N}(I_0^{(i)}, I_1^{(i)}; w) = P(y^i = 1; w). \tag{2.7}$$

Представим упомянутую сеть в виде композиции подсетей, осуществляющих извлечение признаков из пары изображений $\mathbb{N}_{\mathrm{f}}(I_0, I_1; w_{\mathrm{f}})$ и предсказание метки класса $\mathbb{N}_{\mathrm{o}}(I; w_{\mathrm{o}})$:

$$\mathbb{N}(I_0, I_1; w) = \mathbb{N}_{\mathrm{o}}(\mathbb{N}_{\mathrm{f}}(I_0^{(i)}, I_1^{(i)}; w_{\mathrm{f}}); w_{\mathrm{o}}). \tag{2.8}$$

В работе подразумевается, что при генерации метки класса итоговая модель должна опираться на отличия глубины сцен, содержащих настоящие и поддельные лица. При этом процедура минимизации функции потерь не гарантирует того, что модель научится извлекать релевантные и устойчивые признаки для корректных предсказаний на отложенных данных. Более того, как показывают эксперименты, оптимизация лишь перекрестной кросс-энтропии не обеспечивает хорошей обобщающей способности результата обучения в случаях ограниченных по разнообразию и размеру обучающих выборок.

В литературе описаны способы повышения обобщающей способности нейронных сетей за счет многоцелевого обучения [24]. Оптимизация осуществляется для суммы нескольких функций потерь, соответствующих разным, но связанным между собой подзадачам. В результате при прохождении входного сигнала через обученную нейронную сеть в ней возникают промежуточные представления, порождающие более устойчивое признаковое описание для решения каждой из подзадач, в том числе и основной. Обобщающая способность повышается за счет того, что процедура обучения не позволяет весам нейронной сети оказаться в тривиальном для данного набора данных локальном оптимуме.

Применение данного подхода описано для задачи детектирования подделок среди цветных изображений лиц [18, 25]. Полученные модели показывали лучшее качество по сравнению с их аналогами с единственной классификационной функцией потерь.

В работе используется вспомогательная функция потерь, которая позволяет нейронной сети извлекать информацию о глубине представленной на стереоизображении сцены. Предлагается добавить в модель подсеть $\mathbb{N}_{\mathrm{a}}(I; w_{\mathrm{a}})$, которая предсказывает карту принадлежности пикселей A к переднему плану с помощью признакового описания, полученного подсетью $N_{\mathrm{f}}(.,.; w_{\mathrm{f}})$. Каждый элемент A может принимать только значения 0 или 1. Примеры таких карт для истинного и поддельного лица показаны на рис. 2.

Для каждого пикселя первого из входных изображений I_0 с координатами $m \in [1; M]$, $n \in [1; N]$ нейронная сеть $\mathbb{N}_{\mathrm{a}}(.; w)$ должна также предсказать вероятность:

$$b_{mn} = \mathbb{N}_{\mathrm{a}}(\mathbb{N}_{\mathrm{f}}(I_0, I_1; w_{\mathrm{f}}); w_{\mathrm{a}})_{mn} = P(A_{mn} = 1; w_{\mathrm{a}}, w_{\mathrm{f}}). \tag{2.9}$$

В таком случае внутренние представления обученной нейронной сети будут содержать в себе информацию, связанную с особенностями глубины изображений и величинами смещений между левым и правым изображениями стереопары. Для моделирования принадлежности пикселей

а *б*

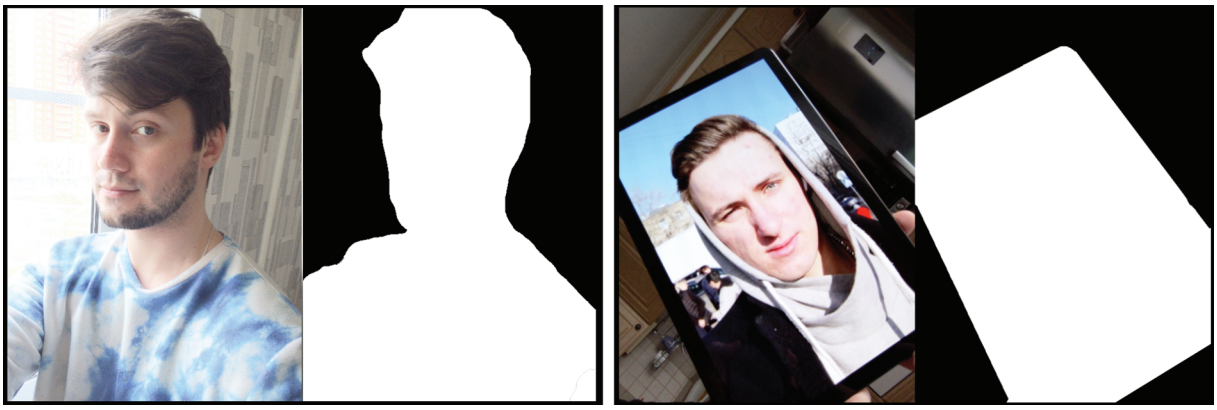

Рис. 2. Маски принадлежности пикселей к переднему плану: *а* – настоящее лицо; *б* – подделка

предлагается использовать сигмоидную функцию активации и для обучения применять логистическую функцию потерь (2.6) для каждого из пикселей по отдельности:

$$L_1^i = \frac{1}{MN}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(-A_{mn}^i \log b_{mn}^i - (1 - A_{mn}^i)\log(1 - b_{mn}^i)) \to \min, \tag{2.10}$$

$$L_1 = \frac{1}{K} L_1^i. \tag{2.11}$$

Итоговая функция потерь определяется как сумма: $L = L_0 + L_1$.

2.4. Архитектура модели. В качестве основы для построения нейронной сети была выбрана сравнительно легковесная архитектура семейства UNet [26] с добавлением остаточных блоков [27] для улучшения сходимости. Модель устроена по принципу автокодировщика, составленного из комбинаций сверточных блоков и операций сокращения пространственной размерности (пулинга). Общее строение представлено на рис. 3, архитектуры блоков кодирующей и декодирующей частей сети – на рис. 4. Каждый элемент блок-схемы содержит название операции, ее параметры и размер результирующего тензора. Символом s' обозначена величина смещения фильтра операции свертки. Большая часть сверточных блоков кодировочной части построена по принципу, описанному в [28] для повышения производительности архитектуры. Строение используемых сверточных блоков дано в табл. 1.

Пары изображений подаются в модель в исходной их ориентации (как они получены с сенсоров камер), чтобы сохранить горизонтальным направление смещений соответственных пикселей и упростить задачу сегментации переднего плана для декодирующей части. При этом промежуточное признаковое описание лица после обработки входного сигнала кодировщиком может быть представлено в некорректной ориентации (2.5). Чтобы упростить классификацию, имеет смысл повернуть это признаковое описание пространственно на угол, кратный $\pi/2$, таким образом, чтобы линия уровня глаз соответствовала ориентации $R = 0$. На рис. 3 эта операция обозначена как слой компенсации поворота.

2.5. Преобразование карты признаков. В сетях, построенных по принципу автокодировщиков, нейроны внутреннего представления обычно имеют большие рецептивные поля, охватывающие значительные связные области пикселей входного изображения. Такие представления с малой пространственной размерностью и большим количеством каналов содержат богатое агрегированное признаковое описание. В случае предсказания карты глубины или аналогичных задач с попиксельным предсказанием некоторых значений важно при построении ответа с помощью декодирующей части сети использовать внутреннее представление целиком. Однако задача детектирования подделок является локальной: содержательная часть признаков “живости” пространственно локализована в области лица на исходном растре с поправкой на операции пулинга. Отличия подделок от настоящих лиц содержатся именно в особенностях карты глубины вокруг лицевой области: у настоящего лица в этой области присутствует резкий перепад по отношению к заднему плану и плавные перепады на переднем плане, а у поддельного

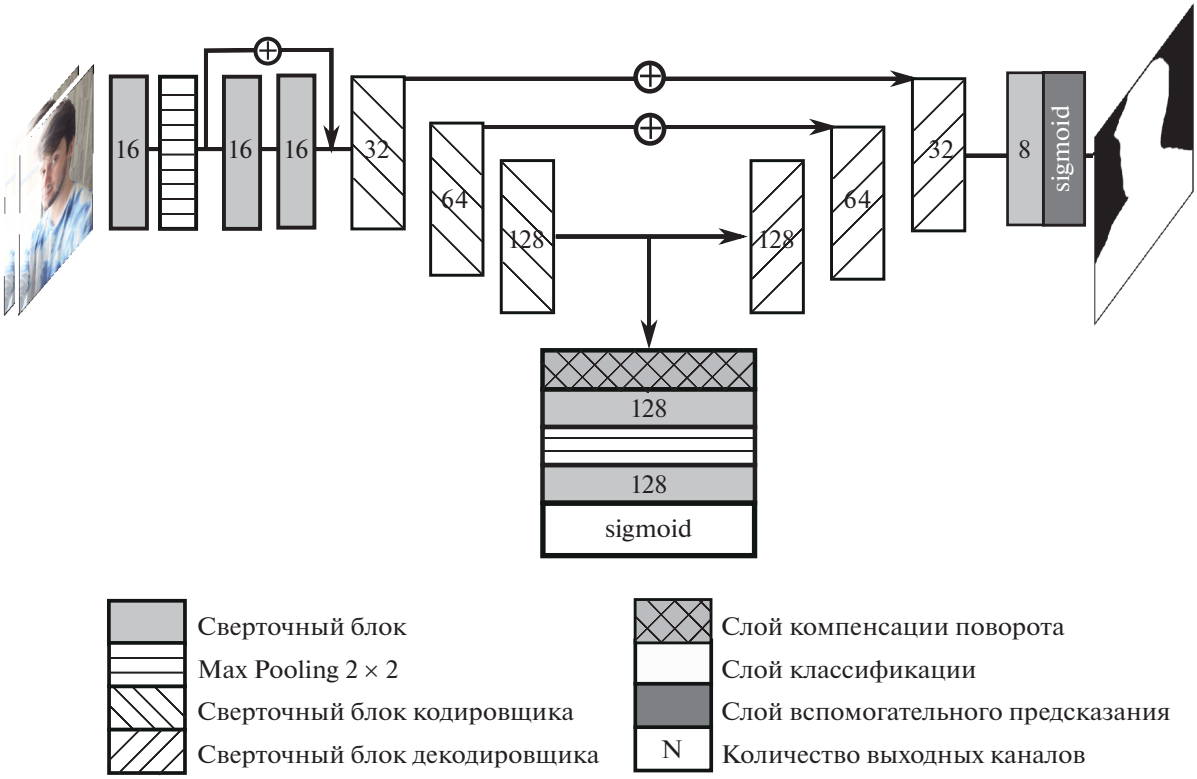

Рис. 3. Архитектура используемой нейронной сети

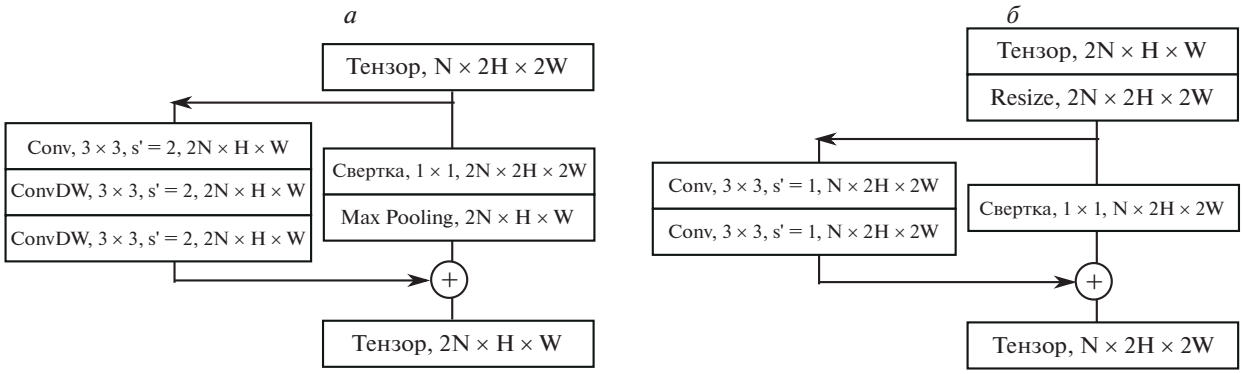

Рис. 4. Строение блоков: *а* – кодирующая часть; *б* – декодирующая часть

перепад к фону и на переднем плане отсутствует. Более того, учет информации от заднего плана может привести к переобучению в связи с ограниченным размером обучающей выборки.

При этом подача растра лицевой области напрямую в нейронную сеть нецелесообразна, так как часть информации о соотношении глубины фона и переднего плана может потеряться. Более того, лицо на изображении может занимать различную площадь ввиду разнообразия расстояний съемки, поэтому будет необходимо приведение входных данных к общему размеру, что может исказить исходную карту смещений между правым и левым растром в стереопаре. В работе предлагается отобразить область лица в промежуточном представлении входного сигнала нейронной сети в результирующий тензор T_o фиксированного размера $S \times S$ для его последующей обработки блоком предсказания метки класса. Для отображения используется билинейная интерполяция.

Таблица 1. Архитектура сверточных блоков

Слой	Размер ядра	Шаг	Размер входного тензора
Строение блока $Conv, s' = s$			
Свертка	3×3	s	$N \times K \times K$
Batch normalization	–	–	$N \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Активация ReLu	–	–	$N \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Строение блока $ConvDW, s' = s$			
Depth-wise свертка	3×3	s	$N \times K \times K$
Batch normalization	–	–	$N \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Активация ReLu	–	–	$N \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Свертка	1×1	1	$N \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Batch normalization	–	–	$M \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$
Активация ReLu	–	–	$M \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right) \times \left(\frac{K-3}{s}+1\right)$

Область лица задается в данном случае как прямоугольник $C = (x, y, w, h)$, где x, y – положение центра прямоугольной области, w, h – ее ширина и высота соответственно. Значения параметров вычисляются из положения ключевых точек на лице:

$$x = \frac{1}{4}(x_L + x_R + x_{ML} + x_{MR}), \tag{2.12}$$

$$y = \frac{1}{4}(y_L + y_R + y_{ML} + y_{MR}), \tag{2.13}$$

$$w = h = 2\sqrt{(x_R - x_L)^2 + (y_R - y_L)^2}. \tag{2.14}$$

В данной работе разрешение результирующего представления области лица $S = 10$ выбрано с учетом средних параметров области интереса, определенных на обучающей выборке.

3. Численные эксперименты. Предложенный метод протестирован на различных наборах стереоизображений как общедоступных, так и собранных вручную. Большое внимание уделено получению изображений с разнообразными условиями регистрации.

3.1. Формирование базы изображений. В литературе описано несколько баз стереоизображений для задачи детектирования подделок, полученных при помощи полноразмерных стереопар с большим стереобазисом [16, 17]. Набора данных для мобильных приложений и поставленной задачи в открытом доступе авторы не нашли. Тем не менее, известна обширная база изображений Holopix [29], полученная при помощи мобильной стереокамеры и содержащая большое разнообразие типов сцен, среди которых присутствует класс “селфи”, соответствующий классу “настоящих лиц” в контексте данной работы. При съемке были использованы два вида сенсоров: со стереобазисом в 12 и 5 мм. Выборка содержит изображения различных разрешений, снятые в разнообразных условиях. Среди 50 тыс. растров этой выборки лишь 1052 можно отнести к классу “селфи”, который подразумевает наличие единственного лица в кадре и его расположение на расстоянии от 20 до 60 см до камеры (рис. 5). Для полуавтоматического отбора изображений применялся алгоритм детектирования лиц [30]. Упомянутый набор данных допустимо использовать в качестве отложенной тестовой выборки для проверки обобщающей способности алгоритма.

По причине нехватки открытых баз изображений был осуществлен дополнительный сбор данных при помощи Google Pixel 3 – одного из смартфонов с двойной фронтальной камерой,

Рис. 5. Примеры изображений выборки Holopix50k

позволяющей получать изображения с обоих сенсоров одновременно. Выборка изображений лиц получена от 90 участников обоих полов. Каждому участнику предлагалось принять участие в съемке трех сценариев освещенности: естественное освещение в помещении (E1), яркая засветка с одной из сторон или всей сцены целиком (E2, E3 или E5) и съемка в полутемном помещении (E4). Примеры изображений даны на рис. 6.

Полученные фотографии частично были использованы для создания изображений подделок следующих типов: распечатка лица (PR, printed), лицо на экране высокого разрешения (SI, screen image) и лицо на небольшом дисплее мобильного устройства (SM, smartphone). Примеры изображений подделок даны на рис. 7. Сбор изображений подделок происходил как минимум в двух условиях освещенности: при достатке (E1 или E5) и недостатке света (E4).

Съемки каждого участника вживую и подделок его лица осуществлялись в двух ориентациях мобильного устройства: портретной и ландшафтной. Применялись два расстояния до сенсора камеры: порядка 25–30 см, что соответствует комфортному положению смартфона относительно глаз, и порядка 45–60 см – положение смартфона в вытянутой руке. Подробное описание

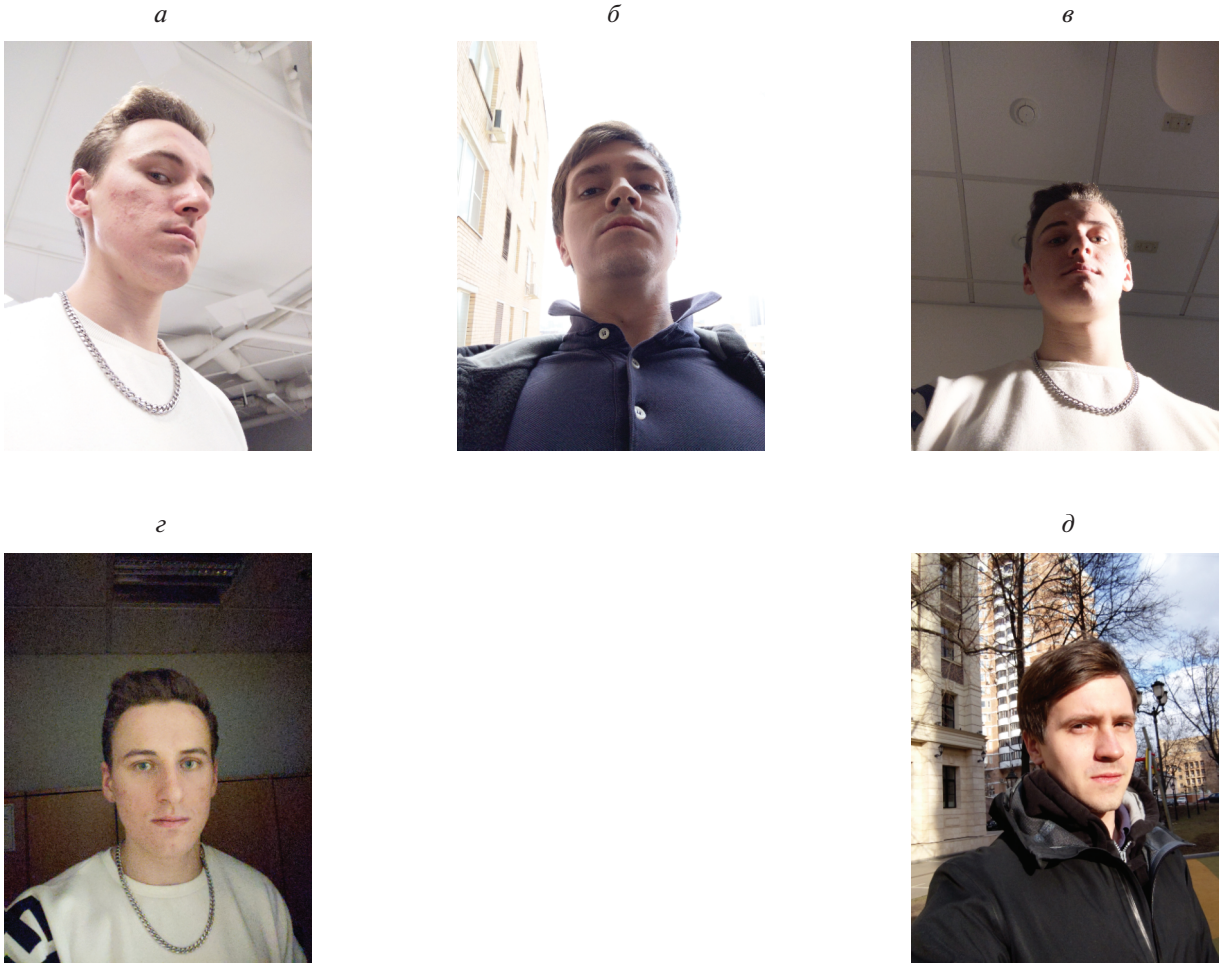

Рис. 6. Примеры условий освещенности: *а* – E1; *б* – E2; *в* – E3; *г* – E4; *д* – E5

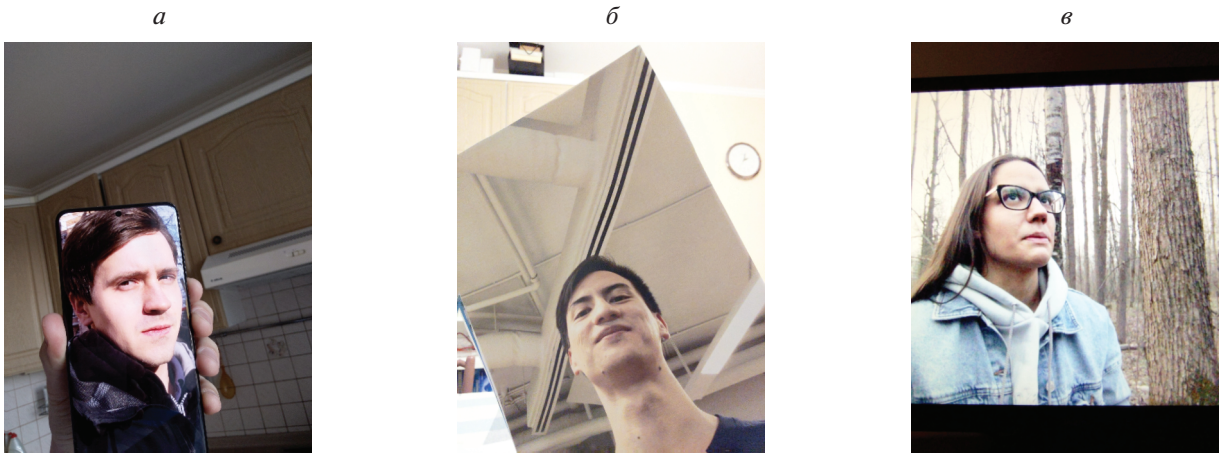

Рис. 7. Примеры изображений подделок: *а* – SM; *б* – PR; *в* – SI

полученного набора изображений приведено в табл. 2. Разбиение на обучающую и валидационную выборки осуществлялось в пропорции 7 к 3. При этом изображения одного и того же участника помещались лишь в одну из подвыборок.

Таблица 2. Описание использованной базы изображений

Тип освещенности	Количество изображений			
	Настоящие лица	Подделки		
		SM	PR	SI
E1	11326	5667	5844	7117
E2	7840	1839	8923	3006
E3	10980			
E5	3240			
E4	10335	4555	4617	4822
Всего	43721	12221	19384	15936

Положения лиц и ключевых точек на каждом из полученных изображений определены при помощи метода [30]. Для формирования бинарных карт принадлежности пикселей переднему плану, описанных ранее, использован один из методов вычисления оптического потока с его последующей бинаризацией [31]. Грубые ошибки определения оптического потока, возникающие вследствие некорректной работы камеры мобильного устройства и/или съемки в сложных условиях освещенности, исключены из обучающей выборки.

3.2. Границы применимости метода. Как известно, разрешающая способность стереопары по глубине dZ, согласно эпиполярной геометрии [32], зависит от нескольких параметров: величины стереобазиса B, фокусного расстояния используемых сенсоров f, погрешности измерения смещений d и самой глубины данной точки Z:

$$dZ = Z^2 \frac{d}{fB}. \tag{3.1}$$

Мобильное устройство Google Pixel 3 имеет следующие характеристики камер: $B = 10$ мм $= 0.01$ м, разрешение сенсоров $W \times H = 2448 \times 3264$ пикселя, $f = 4.5$ мм $= 0.0045$ м, апертура 1/1.8. Оценочный размер сенсора по разрешению и значению апертуры составляет порядка $\omega = 5$ мм $= 0.005$ м. Таким образом, один пиксель на выходном изображении имеет физический размер $\omega/W = 2 \times 10^{-6}$ м. При этом в целях повышения скорости обработки входных изображений нейронной сетью пространственное разрешение требуется сократить до некоторого

$$W_{\text{CNN}} = \frac{W}{s}, \tag{3.2}$$

где $s > 1$ – коэффициент масштабирования, который можно определить в рамках поставленной задачи.

В данной работе предполагается, что обученная нейронная сеть должна уметь отличать настоящее лицо от плоского поддельного на расстоянии от 20 до 60 см при помощи информации о глубине сцены, которая содержится в стереоизображениях. Характерный размер головы человека можно определить как 20 см, поэтому величина dZ не должна превосходить это значение, чтобы потенциально извлекаемая карта глубины могла различать видимое лицо на фоне близкого плоского объекта позади, в худшем случае при $Z = 0.6$ м.

Точность определения смещений d задаётся равной 1 пикселю на растре пониженного разрешения W_{CNN}, т.е.

$$d = \frac{s\omega}{W} = 2 \times 10^{-6} s. \tag{3.3}$$

Требуется выполнение следующего неравенства:

$$Z^2 \frac{s\omega}{fBW} < dZ \leftrightarrow s < \frac{fBW \cdot dZ}{\omega Z^2}. \tag{3.4}$$

Подставляя ранее определенные значения, получаем

$$s \lessapprox 12.24. \tag{3.5}$$

В таком случае наименьший допустимый размер используемого изображения в пикселях равен

$$\frac{W}{s} = \frac{2448}{12.24} = 200.$$

Это значение было выбрано в качестве разрешения входных изображений для нейронной сети.

Ограничение сверху на разрешающую способность также определяет невозможность применения предлагаемого метода для детектирования подделок в виде плоских масок. Для детектирования этого типа спуфинга требуется разрешение $dZ \approx 5$ см $= 0.05$ м, дабы извлекать информацию о геометрии лица и его частей. Тогда требуется использовать коэффициент масштабирования $s_{\text{mask}} = \frac{1}{4}s \lessapprox 3.06$, что определяет минимальный размер изображения в 816 пикселей. Применение нейронных сетей в условиях видеопотока в реальном времени на маломощных мобильных вычислительных устройствах затруднительно.

3.3. Процедура обучения. Все эксперименты с обучением нейронных сетей проводились на обучающей части выборки с контролем на валидационной части. Модели обучались методом стохастического градиентного спуска с адаптивным моментом. Первоначальное значение темпа обучения составляло 0.001 и уменьшалось экспоненциально в 0.9 раза каждые 10 эпох. Обучение каждой модели проводилось на протяжении 128 эпох. Для предсказания метки класса при валидации использовались лишь кодирующий и классификационный блоки нейронной сети. Декодирующий блок не участвовал, поскольку его предназначение – лишь регуляризация обучения.

Во время обучения для повышения устойчивости модели к вариациям входных данных применялись аугментации случайной яркостной коррекции, наложения случайного пуассоновского шума, случайного аффинного поворота на угол до 20° относительно оптического центра изображения, случайного отображения по горизонтали и извлечения случайного региона фиксированного размера вокруг области лица, меньшего, чем размер исходного изображения.

Помимо этого, в отдельном эксперименте была применена операция случайного обнуления смещений между пикселями пары: для некоторых примеров вне зависимости от метки класса одно из них приравнивалось к другому, результату присваивалась метка “поддельное лицо” и вспомогательная маска (2.9) заполнялась нулями. Интуиция подобного подхода состоит в регуляризации процедуры обучения нейронной сети. В результате описанного преобразования построенные в модели признаковые описания должны опираться на особенности карт смещений, а не на текстурные характеристики растров. Нейронная сеть, обученная таким образом, помечена как “RandomZero”.

3.4. Сравнение модификаций предлагаемого подхода. Поскольку осуществить сравнение качества решения предлагаемого метода с аналогами затруднительно ввиду различий области применения и источников входных данных, решено осуществить сравнение с базовыми алгоритмами, не использующими стереоинформацию.

В работе рассматривается несколько способов построения нейросетевого классификатора для решения задачи антиспуфинга. Самый простой способ – использование лишь одного изображения из стереопары в черно-белом режиме для предсказания метки класса. Такая модель применена в качестве базового алгоритма с именем “Base”. Этот подход можно усложнить, добавив интерполяцию карты признаков вокруг региона лица. Модели с такой модификацией обозначены как “ROI”.

Основной способ предсказания метки класса – использование пары изображений в черно-белом режиме без добавления декодирующего блока (разд. 2.3) и без применения интерполяции признаков региона лица (разд. 2.5). Этот класс моделей имеет наименование “Stereo”. Далее этот подход можно развить, добавив соответствующие модификации, первую из которых предлагается обозначить через “Aux”.

Результаты вычислительных экспериментов с разными модификациями предлагаемого подхода даны в табл. 3. Основной мерой качества в задаче детектирования подделок считается значение равной ошибки классификации (EER). Значения APCER и BPCER отражают склонность моделей к присваиванию метки класса “1” или “0” на пороге принятия решения 0.5.

По итогам вычислительного эксперимента наилучшая точность решения на валидационной выборке достигается для модели типа “Stereo” со всеми упомянутыми выше модификациями. Базовые модели этого типа чаще присваивают входным изображениям метку класса “подделка”. При этом добавление модификаций, призванных получить более информативные признаки для

Таблица 3. Качество решения на валидационной выборке

Модель	Значения мер, %		
	APCER	BPCER	EER
Base	**0.12**	41.31	12.54
Base+ROI	0.58	15.06	4.82
Stereo	2.35	13.02	4.95
Stereo+Aux	0.89	**2.9**	1.89
Stereo+Aux+ROI	0.57	3.01	1.45
Stereo+Aux+ROI+RandomZero	0.23	5.24	**1.24**

решения поставленной задачи, действительно повышает обобщающую способность моделей, что отражается на итоговых мерах качества.

Модели типа “Stereo” позволяют получить лучшее решение задачи по сравнению с моделями типа “Base”. При этом добавление модификации “ROI” дает возможность повысить производительность до уровня базовой модели типа “Stereo” без модификаций. Модели “Stereo” используют больше информации при работе. Скорее всего, это связано с тем, что модификация “ROI” снижает склонность сети к переобучению на признаках заднего плана, а текстурной информации лицевой области растров достаточно, чтобы достичь сравнительно высокой точности решения на валидационной выборке.

В качестве отложенной тестовой выборки была использована подвыборка набора изображений [29]. Для оценки выбрана модель “Stereo + Aux + ROI + RandomZero”, порог принятия решения был принят равным порогу меры EER: 0.38. В результате 970 из 1052 пар растров было помечено алгоритмом как “настоящее лицо”. Это соответствует точности классификации в 92.2%. Среди ошибок классификации большую часть (51 пример) составляют пары, содержащие изображение лица на большом расстоянии и снятые на сенсоры со стереобазисом в 5 мм, что можно понять из визуализации карты смещений для этих примеров. Оставшиеся ошибочные предсказания содержат, напротив, лица, снятые с очень близкого расстояния (менее 20 см), и лица, снятые со значительными бликами от солнца в кадре.

3.5. Оценка производительности. Предлагаемая модель для классификации в режиме тестирования использует лишь кодирующий и предсказательный блок описанной нейронной сети. Суммарное количество операций умножения и сложения в данных блоках модели составляет порядка 63.2 MFlop. Медианное время выполнения на одном ядре процессора Snapdragon 888 составляет 65 мс. Применение 8-битной квантизации весов и активаций обученной нейронной сети методом [33] позволяет сократить время выполнения до 23 мс за счет применения целочисленной арифметики и оптимизации операций свертки.

Заключение. Предложен метод определения спуфинг-атак в мобильных системах распознавания по лицу с применением пары камер с малым стереобазисом. Он заключается в использовании сверточной нейронной сети небольшого размера, обученной со специальной функцией потерь. Предлагаемый подход достигает высоких показателей точности детектирования подделок, сравнимых с описанными в современной литературе аналогичными подходами, в том числе на данных открытой базы стереоизображений. От известных аналогов предлагаемый метод отличается малым временем выполнения на современных мобильных процессорах, поэтому может быть применен для детектирования подделок в биометрических системах с малыми вычислительными ресурсами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galbally J., Marcel S., Fierrez J.* Biometric Antispoofing Methods: A Survey in Face Recognition // IEEE Access. 2014. V. 2. P. 1530–1552.
2. *Yu Z., Qin Y., Li X., Zhao C., Lei Z., Zhao G.* Deep Learning for Face Anti-Spoofing: A Survey // arXiv:2106.14948v1 [cs.CV] 28 Jun 2021.
3. *Sun X., Huang L., Liu C.* Multimodal Face Spoofing Detection via RGBD Images // Proc. Intern. Conf. Pattern Recognition. Beijing, China, 2018. P. 2221–2226.
4. *Song L., Liu C.* Face Liveness Detection Based on Joint Analysis of RGB and Near-Infrared Image of Faces // Electronic Imaging. 2018. V. 6. P. 373-1–373-6.

5. *Seo J., Chung I.-J.* Face Liveness Detection Using Thermal Face-CNN with External Knowledge // Symmetry. 2019. V. 11. 3. P. 360.
6. Apple Face ID Technology // Электронный ресурс https://support.apple.com/en-us/HT208108, дата обращения 11.10.2021.
7. Google Face Unlock Technology // Электронный ресурс https://support.google.com/pixelphone/answer/9517039, дата обращения 11.10.2021.
8. Google Pixel 3 Device Description // Электронный ресурс https://en.wikipedia.org/wiki/Pixel_3, дата обращения 11.10.2021.
9. Samsung Galaxy S10+ Device Description // Электронный ресурс https://en.wikipedia.org/wiki/Samsung_Galaxy_S10, дата обращения 11.10.2021.
10. *Лобанов А.Н.* Фотограмметрия. М.: Недра, 1984.
11. *Chang J., Chen Y.* Pyramid Stereo Matching Network // Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, Utah, USA, 2018. P. 5410–5418.
12. *Khamis S., Fanello S., Rhemann C., Kowdle A., Valentin J., Izadi S.* StereoNet: Guided Hierarchical Refinement for Real-Time Edge-Aware Depth Prediction // Proc. 15th Europ. Conf. Computer Vision. Munich, Germany, 2018. P. 596–613.
13. *Zhang F., Prisacariu V., Yang R., Torr P.H.S.* GA-Net: Guided Aggregation Net for End-to-End Stereo Matching // Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach, CA, USA, 2019. P. 185–194.
14. *Zhang Y., Wadhwa N., Orts-Escolano S., Haene C., Fanello S., Garg R.* Du2Net: Learning Depth Estimation from Dual-Cameras and Dual-Pixels // European Conf. Computer Vision. Lecture Notes in Computer Science / Eds. A.Vedaldi, H.Bischof, T.Brox, JM.Frahm. V.12346. Springer, Cham, 2020.
15. *Sun X., Huang L., Liu C.* Dual Camera Based Feature for Face Spoofing Detection // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 662. P. 332–344.
16. *Rehman Y.A., Po L.M., Liu M.* SLNet: Stereo Face Liveness Detection via Dynamic Disparity Maps and Convolutional Neural Network // Expert Systems with Applications. 2020. V. 142. P. 113002.
17. *Li Z., Yuan J., Jia B., He Y., Xie L.* An Effective Face Anti-Spoofing Method via Stereo Matching // IEEE Signal Processing Letters. 2021. V. 28. P. 847–851.
18. *Liu Y., Jourabloo A., Liu X.* Learning Deep Models for Face Anti-Spoofing: Binary or Auxiliary Supervision // IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, UT, USA, 2018. P. 389–398.
19. International Organization for Standardization ISO/IEC 30107-1:2016. Information Technology – Biometric Presentation Attack Detection. Pt 1. Framework, 2016.
20. Android Camera API // Электронный ресурс https://developers.google.com/ar/reference/java/com/google/ar/core/CameraIntrinsics, дата обращения 11.10.2021.
21. *SiVerdi S., Barron J.T., Shao X.* Geometric Calibration for Mobile, Stereo, Autofocus Cameras // Proc. IEEE Winter Conf. Applications of Computer Vision. Lake Placid, NY, USA, 2016. P. 1–8.
22. *Atoum Y., Liu Y., Jourabloo A., Liu X.* Face Anti-spoofing Using Patch and Depth-based CNNs // Proc. IEEE Intern. Joint Conf. Biometrics. Denver, Colorado, USA, 2017. P. 319–328.
23. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982.
24. *Ruder S.* An Overview of Multi-Task Learning in Deep Neural Networks // arXiv:1706.05098v1 [cs.LG] 15 Jun 2017.
25. *George A., Marcel S.* Deep Pixel-wise Binary Supervision for Face Presentation Attack Detection // Proc. Intern. Conf. Biometrics. Crete, Greece, 2019. P. 1–8.
26. *Ronnenberger O., Fischer P., Brox T.* U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // Proc. 18th Intern. Conf. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. Munich, Germany, 2015. P. 234–241.
27. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep Residual Learning for Image Recognition // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas, NV, USA, 2016. P. 770–778.
28. *Howard A., Zhu M., Chen B., Kalenichenko D., Wang W., Weyand T., Andreetto M., Adam H.* Mobilenets: Efficient Convolutional Neural Networks for Mobile Vision Applications // arXiv:1704.04861v1 [cs.CV] 17 Apr 2017.
29. *Hua Y., Kohli P., Uplavikar P., Ravi A., Gunaseelan S., Orozco J., Li E.* Holopix 50k: A Large-Scale In-the-wild Stereo Image Dataset // arXiv:2003.11172v1 [cs.CV] 25 Mar 2020.
30. *Zhang K., Zhang Z., Li Z., Qiao Y.* Joint Face Detection and Alignment Using Multitask Cascaded Convolutional Networks // IEEE Signal Processing Letters. 2016. V. 13. № 10. P. 1499–1503.
31. *Liu C.* Beyond Pixels: Exploring New Representations and Applications for Motion Analysis // Doctoral Thesis. Massachusetts Institute of Technology. 2009.
32. *Шапиро Л., Стокман Дж.* Компьютерное зрение. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2006. 752 с.
33. *Bhalgat Y., Lee J., Nagel M., Blankevoort T., Kwak N.* LSQ+: Improving Low-bit Quantization through Learnable Offsets and Better Initialization // arXiv:2004.09576v1 [cs.CV] 20 Apr 2020.

EDN: OWNOQJ
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 100–106

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 004.93

РАСПОЗНАВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА ПО ВИДЕОДАННЫМ

© 2022 г. М. С. Каприелова[a,*], В. Ю. Леонов[b], Р. Г. Нейчев[a,]**

[a]*МФТИ, Москва, Россия*

[b]*Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kaprielova.ms@phystech.edu*

***e-mail: neychev@phystech.edu*

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.
После доработки 19.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Проанализированы различные подходы к задаче распознавания движений человека по видеоданным. Задача рассматривается в двух постановках: обучения с учителем и обучения без подготовки (zero-shot learning). Для приведенных подходов представлен анализ их свойств и указана их общность с подходами к обработке естественного языка. Отдельное внимание уделено вопросам использования дополнительных модальностей и работе в условиях недостатка размеченных данных.

DOI: 10.31857/S0002338822020093

Введение. Задача распознавания движений человека по видеоданным актуальна для множества прикладных областей. Примерами отраслей являются виртуальная реальность, восстановительная медицина и здравоохранение, безопасность и видеонаблюдение, обеспечение безопасности на производствах, спорт, робототехника, взаимодействие компьютеров и человека и др. Распознавание движений человека может помочь рассчитать взаимодействие нескольких агентов, что необходимо, например, при разработке программного обеспечения для беспилотных автомобилей. Решение задачи распознавания движений человека осложняется тем, что на то, как человек двигается, влияет множество факторов от взаимодействия с внешней средой до физических возможностей, телосложения и эмоционального состояния конкретного человека. Кроме того, движения человека могут быть обусловлены внешними воздействиями. Количество данных для тренировки сетей довольно ограниченно, а разметка датасетов под распознавание движений – достаточно трудоемкая задача. Помимо количества данных играют роль и условия, в которых они были сняты. В связи с этим большинство алгоритмов хорошо работают только на данных какого-то конкретного типа. Для большинства практических применений решений задачи распознавания движений человека по видеоданным важным критерием является возможность работы в реальном времени и на ограниченных ресурсах. Задача распознавания движений человека имеет множество разновидностей: распознавание движений всего тела, мимики, жестов и др. В статье рассматриваются задачи распознавания движений всего тела в двух постановках: обучение с учителем и решения zero-shot постановки задачи, а также формулируются ответы на три вопроса:

1) как влияет наличие дополнительных модальностей данных на точность решения задачи распознавания движений человека,

2) как подойти к задаче распознавания движений в условиях недостатка размеченных данных,

3) как могут помочь подходы из области обработки естественного языка (и, в частности, языкового моделирования) в решении задачи распознавания движений человека?

1. Постановка задачи. Сначала изучается задача обучения с учителем. Задана выборка видеозаписей, содержащих движения человека, $D = \{X, Y\}$, где X – множество элементов выборки, Y – конечное множество меток класса. Необходимо найти оптимальный классификатор $f(x)$, такой, что

$$f^* = \arg\min_f L(f, D),$$

где $L(f, D)$ – заданная функция потерь, например, количество ошибок классификации

$$L_{mis} = \sum_{(x,y)\in D} [f(x) \neq y].$$

Здесь $x \in X$, $y \in Y$, $[\cdot]$ – скобка Айверсона, функция, возвращающая 1, если аргумент является истинным утверждением и 0, если аргумент ложный.

Затем рассматривается постановка обучения без подготовки (zero-shot learning). Аналогичным образом задана выборка видеозаписей, содержащих движения человека, $D=\{X, Y\}$. При этом множество Y представляет собой объединение двух непересекающихся множеств: $Y = Y_{train} \cup Y_{test}$, где $Y_{train} \cap Y_{test} = \varnothing$, Y_{test} – метки классов тестовой выборки, Y_{train} – метки классов тренировочной выборки. Множество соответствующих меткам классов из Y_{test} объектов обозначим через X_{test}. Отложенной выборкой будем называть $D_{test} = \{X_{test}, Y_{test}\}$. Заметим, что в отложенной выборке встречаются исключительно метки классов из множества Y_{test}, не встречавшиеся в обучающей выборке. Необходимо найти классификатор $f(x)$, минимизирующий ошибку на отложенной выборке D_{test}, такой, что

$$f^* = \arg\min_f \mathrm{L}(f, D_{test}),$$

где $L(f, D)$ – заданная функция потерь, при этом $\forall (x, y) \in D_{test}$ верно, что $y \notin Y_{train}$.

2. Краткое описание подходов обучения с учителем. С развитием глубокого обучения появилось множество подходов к решению задачи распознавания движений человека по видеоданным. Изначально для решения задачи распознавания движений по видео использовались 2D-сверточные сети, после чего информация, извлеченная из обработки каждого кадра отдельно, суммировалась с целью учета упорядоченной во времени информации [1–3]. Например, в [3] были представлены TRN (temporal relation networks сети, учитывающие временные зависимости) и MTRN (multi-scale temporal relations networks сети, учитывающие временные зависимости в различных шкалах). Эти подходы не всегда достаточно эффективны для работы с длинными видеозаписями, что критично для некоторых областей применения (например, спорт).

При работе с данными часто возникает проблема наличия неинформативных признаков [4]. В частном случае задачи распознавания движений человека по видеоданным эта проблема проявляется в наличии неинформативных кадров в видеозаписях. Обработка этих данных повышает вычислительную сложность, но при этом несет крайне мало информации, необходимой для решения задачи. В связи с этим для снижения вычислительной сложности были предложены схемы семплирования, которые позволяют извлекать наиболее информативные кадры для их последующей обработки. Примером работы на эту тему являются исследования [2, 5]. В [5] утверждается, что при использовании схемы семплирования, основанной не на покадровом анализе видео, а на обработке фрагментов записи (SMART), можно выделить из видео только информативные кадры. Такой подход позволяет не только сократить вычислительную сложность, но и повысить точность.

Для более эффективного учета упорядоченности информации во времени использовались рекуррентные сети, например LSTM (долгая краткосрочная память) [6, 7], DB-LSTM (полносвязная двунаправленная долгая краткосрочная память) [8]. Так в [6] авторы предложили решение на основе LSTM с несколькими ядрами свертки и attention механизма, адаптированного под работу с ядрами разного размера. Авторы [8] сначала обрабатывали каждый шестой кадр видеозаписи сверточной нейросетью, а затем полученные данные подавали на вход двунаправленной LSTM с целью учета временной структуры. Иногда из видеоданных предварительно извлекаются ключевые точки, позволяющие определить позу человека, и с учетом этой информации решается задача распознавания движений человека [7, 9, 10]. Например, в [7] такие последовательности подавались на вход системе, состоящей из трех LSTM и семи сверточных сетей. В [9] авторы решали задачу распознавания движений на ключевых точках с помощью графовых нейросетей. Подобные архитектуры в последнее время все чаще появляются в публикациях, посвященных оценке позы человека.

При работе с видео появляется необходимость учитывать временную структуру данных. Для решения проблемы моделирования используются различные подходы. Так, в [11] для анализа данных различной природы (в частности, временных рядов, представленных в разных шкалах) предлагается применять несколько моделей. В частном случае задачи распознавания движений

человека для восстановления временной структуры и повышения точности часто используются дополнительные модальности. Примером добавления таких модальностей в задаче распознавания движений может являться звуковая дорожка видеозаписи [12–14], оценка позы человека [15] или оптический поток [13, 16, 17]. В [13] авторы отдельно обрабатывают звуковую дорожку и оптический поток, при этом информация о взаимодействии между модальностями извлекается до учета временной структуры. Авторы [12] разработали решение, состоящее из двух частей: первая часть основана на механизме дистилляции [18]: модель-учитель, которая обучена на видеоданных, и модель-ученик, которой на вход подается звуковая дорожка и первый кадр видеозаписи. Вторая часть представляет собой LSTM, которая избирательно обрабатывает кадры и аудиофрагменты. В [15] в начале оценивается поза человека по видеоданным, а затем конструируется пространственно-временной граф на последовательности поз. А в [16] предлагается предварительно извлекать из оптического потока признаки для использования в дальнейшем обучении моделей. Некоторые модальности значительно повышают вычислительную сложность, что привело к развитию отдельного направления исследований: распознавания движений человека по сжатым видеоданным. Дело в том, что в сжатых видеозаписях содержатся векторы движения, которые кодируют движения отдельных блоков пикселей [14, 19, 20]. Применение их вместо оптического потока позволяет значительно снизить вычислительную сложность, но имеет свои минусы: потеря информации о связях между различными модальностями, падение точности предсказаний в связи с потерей части информации при переходе от оптического потока к векторам движения, повышение зашумленности данных. В [20] представлены подходы к обучению, позволяющие повысить качество предсказания с помощью векторов движения. В [19] проведено сравнение нескольких стратегий обучения систем учитель-ученик, где модель-учитель обучается на оптическом потоке, а модель-ученик – на векторах движения (MV-CNN).

Для решения задачи распознавания движений человека по видеоданным применяются и 3D-сверточные сети. Пример такой модели – Two-Stream I3D [21]. Использование нейронных сетей такого типа позволяет учитывать пространственную и временную информацию одновременно благодаря применению операции свертки сразу к последовательности кадров [22, 23]. Внедрение 3D-CNN (3D-сверточные сети) хоть и позволило повысить точность решений, но сделало вычисления значительно более вычислительно затратными. В рамках борьбы с этой проблемой авторы [24–26] представили разнообразные псевдосвертки, позволяющие снизить вычислительную сложность. Одна из моделей такого типа – R[2 + 1]D [27].

В литературе также встречаются решения задачи распознавания движений человека по видеоданным, использующие информацию о связях между различными модальностями для повышения качества моделей. Методы извлечения дополнительной информации из отношений между модальностями варьируются от билинейного пулинга в общем пространстве [28] до зарекомендовавшей себя в задачах языкового моделирования архитектуры Transformer [14, 29, 30]. Так, авторы [29, 30] обучали модели на базе архитектуры Transformer одновременно на графических и текстовых данных. В [31] обучение проводилось на визуальных и аудиоданных, а в [32, 33] – на визуальных, аудио- и текстовых данных.

В последнее время в задачах компьютерного зрения набирает популярность использование механизма self-attention, стоящего в основе архитектуры Transformer. Эта тенденция не обошла стороной и распознавание движений человека по видеоданным. Так, с выходом Vision Transformer (ViT) [34] появились публикации, посвященные применению подобной архитектуры для задачи классификации видео [35, 36]. В исследовании [36] было экспериментально установлено, что временной и пространственный attention механизмы, примененные отдельно к каждому блоку, значительно повышают качество классификации. В [14] успешно использовали трансформер для распознавания движений человека на сжатых видеоданных, принимая на вход изображения, данные о движении и звуковую дорожку. Работа интересна тем, что предложенное в ней решение позволяет учитывать информацию о связях между различными модальностями.

В табл. 1 приведены результаты, достигнутые с помощью различных архитектур на датасете UCF101 [37], который представляет собой 13320 видеозаписей, на каждой из которых представлено одно действие, выполняемое человеком. Средняя длительность видео составляет 180 кадров, всего содержится 101 действие.

В [38] представлена модель (VidTr-L) на основе Vision Transformer, в [39] использовали оптический поток в качестве модальности (Optical Flow Guided Feature), авторы [40] выбрали LSTM (TS-LSTM), а в основе [41] лежат графовые сети (MLGCN).

3. Методы обучения без подготовки (zero-shot обучение). Часто область практического применения распознавания движений человека по видеоданным предполагает возможность работы с

Таблица 1. Результаты, достигнутые с использованием различных архитектур на датасете UCF101 [37]

Модель	Статья	Точность на топ-3	Год выпуска	Особенности архитектуры
SMART	[5]	98.64	2020	Использование стратегии выделения наиболее информативных кадров
Two-Stream I3D (imagenet + kinetics pretraining)	[21]	97.8	2017	3D-сверточные сети
R[2 + 1]D – TwoStream (kinetics pretrained)	[27]	97.3	2017	2D + псевдосвертки
VidTr-L	[38]	96.7	2021	Трансформер
Optical flow Guided feature	[39]	96	2017	Использование оптического потока
TS-LSTM	[40]	94.1	2017	LSTM
MV-CNN	[19]	86.4	2016	Учитель (на оптическом потоке), ученик (на векторах движения)
MLGCN	[41]	63.27	2019	Графовые сети

движениями, которых не было в обучающей выборке. Это обусловлено тем, что сбор достаточного количества размеченных данных для моделей – дорогая и трудозатратная задача. В связи с этим активно исследуется область zero-shot обучения для задачи распознавания движений. Zero-shot обучение нацелено на возможность обобщения модели для распознавания движений на виды движений, которые не были представлены в тренировочной выборке. Для распознавания незнакомых движений такой генерализованной модели не понадобится размеченных данных.

Для каждого класса (вида детектируемого движения) строятся векторные представления в семантическом пространстве. Таким образом удается построить связи между классами из тренировочной и тестовой выборок. Чаще всего используется метод поиска ближайшего соседа. Существует несколько подходов к построению векторных представлений для решения задачи zero-shot обучения. Каждый из этих подходов имеет свои плюсы и минусы. В [42, 43] для построения представлений атрибуты действий задаются вручную. Такой метод не всегда эффективен, так как действиям иногда непросто определить корректные атрибуты.

Использование визуальных (основанных на графических данных) векторных представлений интуитивно, но не всегда удобно, так как иногда данных недостаточно для построения информативных представлений. Способы получения информативных векторных представлений из графических данных исследовались в [44–46]. В [44] для построений векторных представлений используются объекты, распознанные на видео нейронной сетью (O2A). Авторы [45] связывают не только атрибуты и информацию о распознанных объектах из тестовой выборки с атрибутами и информацией о распознанных объектах из тренировочной выборки соответственно, но и атрибуты и информацию о распознанных объектах попарно (TS-GCN). С одной стороны, такой подход имеет преимущества: объектам легко сопоставить векторные представления, которые хорошо обобщаются. С другой стороны, такой подход к построению представлений не учитывает взаимодействия объектов. В некоторых исследованиях для создания векторных представлений используются 3D-нейронные сети, способные выделять пространственную и временную информацию из видео, что является несомненным преимуществом. В [47] предложен иной подход: авторы предлагают применять модель похожей архитектуры для предсказания векторных представлений для названий действий (E2E). Минусом этого подхода является склонность к переобучению на тренировочной выборке. Альтернативный способ построения векторных представлений – использование в качестве данных для построения названий действий. Например, в [48] предлагается решение, основанное на помехоустойчивом кодировании (ZSECOC). Но и этот, казалось бы, интуитивно понятный и эффективный подход не универсален. Слова могут иметь разное значение в зависимости от контекста, а названия действий могут содержать слова, употребленные в переносном смысле.

В последнее время популярность набирает подход, объединяющий в себе векторные представления, основанные на тексте и визуальных данных. В качестве примера может выступить работа [49]. В ней обрабатывают описания действий для получения представлений из текста и соответствующие действиям изображения (ASR). Любопытно, что сами видеоданные для

Таблица 2. Результаты, достигнутые с использованием различных подходов на датасете UCF101 [37]

Модель	Статья	Точность на топ-1	Год выпуска
ER-ZSAR	[50]	51.8	2021
E2E	[47]	48	2020
TS-GCN	[45]	34.2	2019
O2A	[44]	30.3	2015
ASR	[49]	24.4	2017
ZSECOC	[48]	15.1	2017

построения векторных представлений не используются. Авторы [50] обрабатывали предложения, которые описывают действия, предобученным BERT [51] и линейным преобразованием (ER-ZSAR). Таким образом они получили информативные векторные представления. Также строятся представления на основании пространственно-временной информации с помощью 3D-нейросети из видеоданных и применяется информация об объектах, распознанных на видео.

В табл. 2 приведены результаты, достигнутые с использованием различных подходов на датасете UCF101 [37].

Отдельно рассматривается вопрос чистоты экспериментов в области zero-shot обучения. Часто в обучающую выборку попадают объекты из тестовой выборки. В частности, на исследование этой проблемы направлено внимание в [52], где предложен новый протокол составления обучающей и тестовой выборок, позволяющий оценивать работу решений zero-shot обучения на тестовых выборках, которые не пересекаются с тренировочными.

Заключение. Использование дополнительных модальностей позволяет решать задачу распознавания движений с более высокой точностью/качеством как в случае обучения с учителем, так и в постановке типа zero-shot. В течение последних лет основные подходы перешли от работы исключительно с визуальным доменом к использованию как визуальных данных, так и данных другого рода.

3D-свертки и трансформеры применяются для выявления связей/зависимостей на “низком уровне” не только для пикселей, но и для данных, упорядоченных во времени.

Языковые модели вдохновляют развитие других областей. Предложенные для задач языкового моделирования архитектуры достаточно универсальны. Это указывает на их способность не только улавливать разноплановые низкоуровневые зависимости в языке (на уровне символов/морфем/слов), но и в других данных сложной структуры, обусловленных на какой-то достаточно строго формализованный процесс (например, движения человека).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karpathy A., Toderici G., Shetty S., Leung T., Sukthankar R., Fei-Fei L.* Large-scale Video Classification with Convolutional Neural Networks // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, 2014. С. 1725–1732.
2. *Wang L., Xiong Y., Wang Z., Qiao Y., Lin D., Tang X., Van Gool L.* Temporal Segment Networks: Towards Good Practices for Deep Action Recognition // Europ. Conf. on Computer Vision. Cham: Springer, 2016. С. 20–36.
3. *Zhou B., Andonian A., Oliva A., Torralba A.* Temporal Relational Reasoning in Videos // Proc. Europ. Conf. on Computer Vision (ECCV). Munich, 2018. С. 803–818.
4. *Neichev R.G., Katrutsa A.M., Strizhov V.V.* Robust Selection of Multicollinear Features in Forecasting // Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials. 2016. Т. 82. № 3. С. 68–74.
5. *Gowda S. N., Rohrbach M., Sevilla-Lara L.* SMART Frame Selection for Action Recognition // arXiv preprint arXiv:2012.10671. 2020.
6. *Agethen S., Hsu W.H.* Deep Multi-kernel Convolutional LSTM Networks and an Attention-based Mechanism for Videos // IEEE Transactions on Multimedia. 2019. Т. 22. № 3. С. 819–829.
7. *Li C., Wang P., Wang S., Hou Y., Li W.* Skeleton-based Action Recognition Using LSTM and CNN // IEEE Intern. Conf. on Multimedia & Expo Workshops (ICMEW). Hong Kong: IEEE, 2017. С. 585–590.
8. *Ullah A., Ahmad J., Muhammad K., Sajjad M., Baik S.W.* Action Recognition in Video Sequences Using Deep Bi-directional LSTM with CNN Features // IEEE Access. 2017. Т. 6. С. 1155–1166.
9. *Li S., Yi J., Farha Y. A., Gall J.* Pose Refinement Graph Convolutional Network for Skeleton-Based Action Recognition // IEEE Robotics and Automation Letters. 2021. Т. 6. № 2. С. 1028–1035.

10. *Peng W., Shi J., Xia Z., Zhao G.* Mix Dimension in Poincaré Geometry for 3d Skeleton-based Action Recognition // Proc. of the 28th ACM Intern. Conf. on Multimedia. Seattle, 2020. С. 1432–1440.
11. *Neichev R.G.* Multimodel Forecasting of Multiscale Time Series in Internet of Things // Proc. 11th Intern. Conf. on Intelligent Data Processing: Theory and Applications, Barcelona, Spain, 2016.
12. *Gao R., Oh T.H., Grauman K., Torresani L.* Listen to Look: Action Recognition by Previewing Audio // Proc. IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle, 2020. С. 10457–10467.
13. *Kazakos E., Nagrani A., Zisserman A., Damen D.* Epic-fusion: Audio-visual Temporal Binding for Egocentric Action Recognition // Proc. IEEE/CVF Intern. Conf. on Computer Vision. Seoul, 2019. С. 5492–5501.
14. *Chen J., Ho C.M.* MM-ViT: Multi-Modal Video Transformer for Compressed Video Action Recognition // arXiv preprint arXiv:2108.09322. 2021.
15. *Yan S., Xiong Y., Lin D.* Spatial Temporal Graph Convolutional Networks for Skeleton-based Action Recognition // Thirty-second AAAI Conf. on Artificial Intelligence. 2018. New Orleans.
16. *Kwon H., Kim M., Kwak S., Cho M.* Motionsqueeze: Neural Motion Feature Learning for Video Understanding // Europ. Conf. on Computer Vision. Cham: Springer, 2020. С. 345–362.
17. *Simonyan K., Zisserman A.* Two-stream Convolutional Networks for Action Recognition in Videos // arXiv preprint arXiv:1406.2199. 2014.
18. *Hinton G., Vinyals O., Dean J.* Distilling the Knowledge in a Neural Network // arXiv preprint arXiv:1503.02531. 2015.
19. *Zhang B., Wang L., Wang Z., Qiao Y., Wang H.* Real-time Action Recognition with Enhanced Motion Vector CNNs // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas. 2016. С. 2718–2726.
20. *Zhang B., Wang L., Wang Z., Qiao Y., Wang H.* Real-time Action Recognition with Deeply Transferred Motion Vector CNNs // IEEE Transactions on Image Processing. 2018. Т. 27. № 5. С. 2326–2339.
21. *Carreira J., Zisserman A.* Quo Vadis, Action Recognition? A New Model and the Kinetics Dataset // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Honolulu, 2017. С. 6299–6308.
22. *Ji S., Xu W., Yang M., Yu K.* 3D Convolutional Neural Networks for Human Action Recognition // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2012. Т. 35. № 1. С. 221–231.
23. *Tran D., Bourdev L., Fergus R., Torresani L., Paluri M.* Learning Spatiotemporal Features with 3D Convolutional Networks // Proc. IEEE Intern. Conf. on Computer Vision. Santiago, 2015. С. 4489–4497.
24. *Chen J., Hsiao J., Ho C.M.* Residual Frames with Efficient Pseudo-3D CNN for Human Action Recognition // arXiv preprint arXiv:2008.01057. 2020.
25. *Qiu Z., Yao T., Mei T.* Learning Spatio-temporal Representation with Pseudo-3d Residual Networks // Proc. IEEE Intern. Conf. on Computer Vision. Venice. 2017. С. 5533–5541.
26. *Tran D., Wang H., Torresani L., Feiszli M.* Video Classification with Channel-separated Convolutional Networks // Proc. IEEE/CVF Intern. Conf. on Computer Vision. Seoul. 2019. С. 5552–5561.
27. *Tran D., Wang H., Torresani L., Ray J., LeCun Y., Paluri M.* A Closer Look at Spatiotemporal Convolutions for Action Recognition // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City. 2018. С. 6450–6459.
28. *Fukui A., Park D.H., Yang D., Rohrbach A., Darrell T., Rohrbach M.* Multimodal Compact Bilinear Pooling for Visual Question Answering and Visual Grounding // arXiv preprint arXiv:1606.01847. 2016.
29. *Radford A., Kim J.W., Hallacy C. et al.* Learning Transferable Visual Models from Natural Language Supervision // arXiv preprint arXiv:2103.00020. 2021.
30. *Luo H., Ji L., Zhong M. et al.* Clip4clip: An Empirical Study of Clip for End to End Video Clip Retrieval // arXiv preprint arXiv:2104.08860. 2021.
31. *Lee S., Yu Y., Kim G. et al.* Parameter Efficient Multimodal Transformers for Video Representation Learning // arXiv preprint arXiv:2012.04124. 2020.
32. *Tsai Y.H.H., Bai S., Liang P.P. et al.* Multimodal Transformer for Unaligned Multimodal Language Sequences // Proc. of the Conf. Association for Computational Linguistics. Meeting: NIH Public Access. 2019. Т. 2019. С. 6558.
33. *Zadeh A., Mao C., Shi K. et al.* Factorized Multimodal Transformer for Multimodal Sequential Learning // arXiv preprint arXiv:1911.09826. 2019.
34. *Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A. et al.* An Image is Worth 16 × 16 Words: Transformers for Image Recognition at Scale // arXiv preprint arXiv:2010.11929. 2020.
35. *Arnab A., Dehghani M., Heigold G. et al.* Vivit: A Video Vision Transformer // arXiv preprint arXiv:2103.15691. 2021.
36. *Bertasius G., Wang H., Torresani L.* Is Space-Time Attention All You Need for Video Understanding? // arXiv preprint arXiv:2102.05095. 2021.
37. *Soomro K., Zamir A. R., Shah M.* A Dataset of 101 Human Action Classes from Videos in the Wild // Center for Research in Computer Vision. 2012. Т. 2. № 11.

38. *Li X., Liu C., Zhang Y. et al.* VidTr: Video Transformer Without Convolutions // arXiv preprint arXiv:2104.11746. 2021.
39. *Sun S., Kuang Z., Sheng L. et al.* Optical Flow Guided Feature: A Fast and Robust Motion Representation for Video Action Recognition // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, 2018. С. 1390–1399.
40. *Ma C.Y., Chen M.H., Kira Z. et al.* TS-LSTM and Temporal-inception: Exploiting Spatiotemporal Dynamics for Activity Recognition // Signal Processing: Image Communication. 2019. Т. 71. С. 76–87.
41. *Mazari A., Sahbi H.* MLGCN: Multi-Laplacian Graph Convolutional Networks for Human Action Recognition // BMVC. Cardiff, 2019. С. 281.
42. *Liu J., Kuipers B., Savarese S.* Recognizing Human Actions by Attributes // CVPR. IEEE Colorado Springs, 2011. С. 3337–3344.
43. *Zellers R., Choi Y.* Zero-shot Activity Recognition with Verb Attribute Induction // arXiv preprint arXiv:1707.09468. 2017.
44. *Jain M., Van Gemert J.C., Mensink T. et al.* Objects2Action: Classifying and Localizing Actions Without any Video Example // Proc. IEEE Intern. Conf. on Computer Vision. Santiago. 2015. С. 4588–4596.
45. *Gao J., Zhang T., Xu C.* I Know the Relationships: Zero-shot Action Recognition via Two-stream Graph Convolutional Networks and Knowledge Graphs // Proc. AAAI Conf. on Artificial Intelligence. Honolulu, 2019. Т. 33. № 01. С. 8303–8311.
46. *Gan C., Lin M., Yang Y. et al.* Concepts not Alone: Exploring Pairwise Relationships for Zero-shot Video Activity Recognition // Thirtieth AAAI Conf. on Artificial Intelligence. Phoenix, 2016.
47. *Brattoli B., Tighe J., Zhdanov F. et al.* Rethinking Zero-shot Video Classification: End-to-end Training for Realistic Applications // Proc. IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle, 2020. С. 4613–4623.
48. *Qin J., Liu L., Shao L. et al.* Zero-shot Action Recognition with Error-correcting Output Codes // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Honolulu, 2017. С. 2833–2842.
49. *Wang Q., Chen K.* Alternative Semantic Representations for Zero-shot Human Action Recognition // Joint Europ. Conf. on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. Cham: Springer, 2017. С. 87–102.
50. *Chen S., Huang D.* Elaborative Rehearsal for Zero-shot Action Recognition // arXiv preprint arXiv:2108.02833. 2021.
51. *Devlin J., Chang M.W., Lee K., Toutanova K.* Bert: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // arXiv preprint arXiv:1810.04805. 2018.
52. *Gowda S.N., Sevilla-Lara L., Kim K., Keller F., Rohrbach M.* A New Split for Evaluating True Zero-Shot Action Recognition // arXiv preprint arXiv:2107.13029. 2021.

EDN: HRZBKP
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 107–119

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.01+629.7.05

КАЛИБРОВКА БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ С АСИММЕТРИЧНЫМИ МОДЕЛЯМИ ПОКАЗАНИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

© 2022 г. А. А. Голован[a,*], А. И. Матасов[a], И. Е. Тарыгин[a]

[a] *Лаборатория управления и навигации механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: aagolovan@yandex.ru, alexander.matasov@gmail.com, vindlage@gmail.com*

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.
После доработки 20.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматривается задача одновременной калибровки блока ньютонометров и номинально высокоточного стенда. В отличие от традиционных постановок задач калибровки предполагается, что ошибки масштабных коэффициентов зависят от знаков входных сигналов ньютонометров. К соответствующей задаче оценивания применяется гарантирующий подход. Численно получен оптимальный план калибровки и построены оптимальные гарантирующие оценки искомых параметров.

DOI: 10.31857/S000233882202007X

Введение. Инерциальные навигационные системы [1, 2] широко применяются в технике. Блок из трех ньютонометров является одним из основных сенсоров инерциальной навигационной системы. Этот блок нуждается в калибровке перед началом функционирования навигационной системы. Калибровке блока ньютонометров (в технике они называются акселерометрами) посвящена обширная литература (см., например, [3–24]). На протяжении долгого времени предполагалось, что угловые и геометрические погрешности прецизионных стендов малы настолько, что ими можно пренебречь. Однако анализ экспериментов показывает, что, кроме ошибок самого блока, разумно включать в состав оцениваемых параметров возможные геометрические погрешности номинально высокоточного стенда (перекосы осей вращения, негоризонтальность основания из-за просадки фундамента) и его инструментальные погрешности (систематические ошибки измерения углов поворота). При этом задача оценивания становится многопараметрической, и тогда выбор плана экспериментов не очевиден [8]. Использование гарантирующего подхода к калибровке позволяет достаточно просто найти оптимальные угловые положения стенда и построить оптимальные алгоритмы калибровки блока ньютонометров (см., например, [3, 4, 8, 9]).

Однако традиционные линейные модели показаний блока ньютонометров не всегда вполне удовлетворительны. В ряде случаев допускают, что ошибки масштабных коэффициентов блока зависят от знака сигнала, поступающего на вход ньютонометра. В работе рассматривается асимметричная (кусочно-линейная) модель блока ньютонометров. В рамках гарантирующего подхода к оцениванию параметров определяется оптимальный план экспериментов и строятся соответствующие алгоритмы оценивания.

1. Постановка задачи оценивания. Опишем кратко двухстепенной стенд [8]. Пусть основание стенда неподвижно относительно Земли. Предполагается, что из-за неточности установки основания внешняя ось стенда отклонена от горизонтальной плоскости на малый угол κ. Внешняя рама стенда может вращаться относительно основания вокруг внешней оси; обозначим угол соответствующего поворота через α_{tr}; внутренняя рама может вращаться относительно внешней рамы вокруг внутренней оси; обозначим угол соответствующего поворота через β_{tr}. Указанные углы поворота рам измеряются на фоне шумов:

$$\alpha = \alpha_{tr} + \Delta\alpha + \Delta\alpha_{fl}, \quad \beta = \beta_{tr} + \Delta\beta + \Delta\beta_{fl},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00054-а).

где (α, β) – результаты измерений, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ – неизвестные одинаковые для всех измерений константы, $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$ – неизвестные непараметрические (флуктуационные) составляющие, разные для разных измерений углов. Для высокоточных стендов в дальнейшем будем пренебрегать флуктуационными составляющими $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$, считая их достаточно малыми (порядка 1 угл. с).

При $\alpha_{tr} = 0$ внутренняя ось направлена (почти) по географической вертикали; отклонение внутренней оси от вертикальной плоскости, образованной внешней осью и географической вертикалью, вследствие негоризонтальности основания обозначим малым углом α^*. Будем считать, что внешняя и внутренняя оси пересекаются в точке M^b, но могут не быть в точности ортогональны; малый угол их неортогональности обозначим через ε. С внутренней рамой жестко свяжем систему координат $M^b j$ следующим образом. Третья ось $M^b j_3$ направлена по внутренней оси. Ось $M^b j_1$ при $\beta_{tr} = 0$ лежит в плоскости, образованной внешней и внутренней осями, ортогональна $M^b j_3$ и близка к внешней оси. Ось $M^b j_2$ образует с $M^b j_1$ и $M^b j_3$ правый ортогональный трехгранник.

С блоком ньютонометров свяжем правый ортогональный трехгранник Mz, по осям которого должны (при отсутствии погрешностей блока) располагаться оси чувствительности ньютонометров (точка M является центром блока). Трехгранник Mz называется приборным. Блок ньютонометров устанавливается на внутренней раме так, чтобы оси приборного трехгранника Mz как можно точнее были направлены по осям трехгранника Mf, который связан с внутренней рамой и развернут относительно $M^b j$ заданным образом. Пусть этот разворот определяется известной ортогональной матрицей ориентации Q: $\chi'' = Q\chi'$, где χ' и χ'' – проекции произвольного вектора на оси $M^b j$ и Mf соответственно. Погрешность установки Mz по осям Mf опишем неизвестным вектором малого поворота $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)^{\mathrm{T}}$. Ошибку в знании ускорения силы тяжести в точке проведения испытаний обозначим через Δg.

Структурная модель показаний блока ньютонометров имеет вид

$$f' = (I_3 + \Gamma) f_z + \Delta f^0 + \Delta f^s, \tag{1.1}$$

где $f' \in \mathbb{R}^3$ – показания блока ньютонометров, $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ – единичная матрица, $\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times3}$ – матрица погрешностей блока (в которой диагональные элементы характеризуют ошибки масштабных коэффициентов, а внедиагональные – угловые несоосности ньютонометров), $f_z \in \mathbb{R}^3$ – вектор удельной силы, действующей на чувствительную массу ньютонометра, в проекциях на оси приборного трехгранника (при рассматриваемых нами статических экспериментах эта удельная сила равна ускорению силы тяжести с обратным знаком), $\Delta f^0 \in \mathbb{R}^3$ – систематические смещения показаний блока, $\Delta f^s \in \mathbb{R}^3$ – флуктуационные погрешности (влияние которых существенно снижается осреднением до уровня остаточного немоделируемого сигнала электромеханического контура блока ньютонометров).

Пусть $\langle f' \rangle$ – известные осредненные показания блока ньютонометров в некотором неподвижном относительно Земли угловом положении, (α, β) – результат измерения углов поворота внешней и внутренней рам стенда, $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ – предсказанные по непосредственному измерению углов поворота рам стенда показания блока (они точно известны). Тогда измерения для соответствующей задачи оценивания формируются как нормированная разность осредненных показаний блока ньютонометров и их предсказанных значений по измерениям углов стенда. В линейном приближении вектор этих измерений имеет вид

$$\begin{aligned} z(\alpha,\beta) &= g^{-1}\left\{\langle f' \rangle - \tilde{f}(\alpha,\beta)\right\} = \\ &= -g^{-1}\{(I_3 + \Gamma)(I_3 + \hat{\vartheta}) Q g^G(\alpha,\beta,q) + \Delta f^0 - Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta)\} + \varrho(\alpha,\beta), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где g – модельное значение ускорения силы тяжести, $g^G(\alpha,\beta,q)$ – истинное значение вектора ускорения силы тяжести в проекциях на оси трехгранника $M^b j$ (связанного с внутренней рамой), $q = (\kappa, \epsilon, \Delta\alpha, \Delta\beta, \alpha^*, \Delta g/g)^{\mathrm{T}}$ – вектор параметров погрешностей стенда, $\tilde{g}^G(\alpha,\beta) = g^G(\alpha,\beta,0)$ – точно вычисляемый по измерениям углов прогнозируемый вектор ускорения силы тяжести в

проекциях на оси трехгранника $M^b j$, $\varrho(\alpha,\beta)$ – вектор флуктуационных составляющих ошибок измерений [3, 8].

После простых, но громоздких выкладок нетрудно подсчитать, что в линейном приближении

$$g^G(\alpha,\beta,q\ ) = g\left\{-\begin{pmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\end{pmatrix}\left(1-\frac{\Delta g}{g}\right)+\begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\kappa+\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\epsilon+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\cos\beta\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}(\Delta\alpha+\alpha^*)+\begin{pmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ -\sin\alpha\sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\Delta\beta\right\},\quad \hat{\vartheta}=\begin{pmatrix}0 & \vartheta_3 & -\vartheta_2\\ -\vartheta_3 & 0 & \vartheta_1\\ \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда из (1.2) получим, что

$$z(\alpha,\beta) = -Q\begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\kappa - Q\begin{pmatrix}\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\cos\beta\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}(\Delta\alpha+\alpha^*) - Q\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\epsilon+ \tag{1.3}$$

$$+\left(\Gamma+\hat{\vartheta}-I_3\frac{\Delta g}{g}+QNQ^{-1}\Delta\beta\right)Q\begin{pmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\end{pmatrix}+\frac{\Delta f^0}{g}+\rho,\quad N=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Представим (1.3) в более стандартной форме:

$$z(\alpha,\beta) = F^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)x + \varrho(\alpha,\beta), \tag{1.4}$$

где

$$F(\alpha,\beta) = \left(\overset{(1)}{F}(\alpha,\beta), \overset{(2)}{F}(\alpha,\beta), \overset{(3)}{F}(\alpha,\beta),\right) = \{F_{dt}(\alpha,\beta)\},\quad d=\overline{1,15},\quad t=1,2,3$$

(здесь индексы над F означают номера столбцов) имеет вид

$$F(\alpha,\beta) = \left(Q\begin{pmatrix}-\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\cos\beta\\ \sin\beta & -\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\\ 0 & \sin\alpha & 0\end{pmatrix}, \left(\left(Q\begin{pmatrix}\sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\end{pmatrix}\right)\otimes I_3\right)^{\mathrm{T}}, I_3\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{15\times 3}$$

(здесь $\otimes$ – символ кронекеровского произведения матриц), $x = \mathrm{col}(u,v,w)\in\mathbb{R}^{15}$,

$$u=\begin{pmatrix}\kappa\\ \Delta\alpha+\alpha^*\\ \varepsilon\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}-\dfrac{\Delta g}{g}\\ \Gamma_{21}-\vartheta_3+(Q_{11}Q_{22}-Q_{12}Q_{21})\Delta\beta\\ \Gamma_{31}+\vartheta_2+(Q_{11}Q_{32}-Q_{12}Q_{31})\Delta\beta\\ \Gamma_{12}+\vartheta_3-(Q_{11}Q_{22}-Q_{12}Q_{21})\Delta\beta\\ \Gamma_{22}-\dfrac{\Delta g}{g}\\ \Gamma_{32}-\vartheta_1+(Q_{21}Q_{32}-Q_{22}Q_{31})\Delta\beta\\ \Gamma_{13}-\vartheta_2-(Q_{11}Q_{32}-Q_{12}Q_{31})\Delta\beta\\ \Gamma_{23}+\vartheta_1-(Q_{21}Q_{32}-Q_{22}Q_{31})\Delta\beta\\ \Gamma_{33}-\dfrac{\Delta g}{g}\end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix}\dfrac{\Delta f_1^0}{g}\\ \dfrac{\Delta f_2^0}{g}\\ \dfrac{\Delta f_3^0}{g}\end{pmatrix}.$$

В отличие от стандартных подходов в данной работе считается, что ошибка масштабного коэффициента p-го ньютонометра Γ_{pp} зависит от знака входного сигнала ньютонометра f_p^{inp}, т.е. является асимметричной (кусочно-постоянной) по входу:

$$\Gamma_{pp} = \begin{cases} \Gamma_{pp}^{+}, \text{ если } & f_p^{\text{inp}} > 0, \\ \Gamma_{pp}^{-}, \text{ если } & f_p^{\text{inp}} < 0, \end{cases} \qquad p = 1,2,3$$

(при нулевом входном сигнале значение масштабного коэффициента не существенно).

Однако входные сигналы ньютонометров $f^{\text{inp}} = \text{col}(f_1^{\text{inp}}, f_2^{\text{inp}}, f_3^{\text{inp}})$ непосредственно не доступны, поэтому построим их оценки. Имеет место соотношение

$$f^{\text{inp}}(\alpha,\beta,q\ ) = f^{\text{inp}}(\alpha,\beta,q\ ) + Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta) - Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta), \tag{1.5}$$

$$-\tilde{g}^G(\alpha,\beta)g\begin{pmatrix} \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ясно, что входной сигнал описывается формулой (1.1), в которой надо положить равными нулю масштабные коэффициенты, систематические смещения и флуктуационную составляющую помехи:

$$f^{\text{inp}}(\alpha,\beta,q) = f'(\alpha,\beta,q)|_{\substack{\Gamma_{11}=\Gamma_{22}=\Gamma_{33}=0,\\ \Delta f^0=0,\Delta f^s=0}} = gz(\alpha,\beta)\,|_{\substack{\Gamma_{11}=\Gamma_{22}=\Gamma_{33}=0,\\ \Delta f^0=0,\varrho=0}} - Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta).$$

Тогда, очевидно,

$$f^{\text{inp}}(\alpha,\beta,q) = gF^{\text{T}}(\alpha,\beta)x^0 - Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta). \tag{1.6}$$

Здесь

$$x^0 = \begin{pmatrix} u \\ v^0 \\ 0_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{15}, \quad v^0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{21} - \vartheta_3 + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})\Delta\beta \\ \Gamma_{31} + \vartheta_2 + (Q_{11}Q_{32} - Q_{12}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{12} + \vartheta_3 - (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})\Delta\beta \\ -\dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{32} - \vartheta_1 + (Q_{21}Q_{32} - Q_{22}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{13} - \vartheta_2 - (Q_{11}Q_{32} - Q_{12}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{23} + \vartheta_1 - (Q_{21}Q_{32} - Q_{22}Q_{31})\Delta\beta \\ -\dfrac{\Delta g}{g} \end{pmatrix},$$

где 0_n – нулевой вектор-столбец размерности n.

Обозначим через $u_k^{\max}$, $k = 1,2,3$, и $v_s^{0\max}$, $s = \overline{1,9}$, максимальные абсолютные значения компонент u_k и v_s^0; введем верхние границы для компонент вектора $F^{\text{T}}(\alpha,\beta)x^0$:

$$s_p^{\max}(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{3}|\overset{(p)}{F}_k(\alpha,\beta)|u_k^{\max} + \sum_{s=4}^{12}|\overset{(p)}{F}_s(\alpha,\beta)|v_s^{0\max}, \tag{1.7}$$

$$\overset{(p)}{F}(\alpha,\beta) = \text{col}\left(\overset{(p)}{F}_1(\alpha,\beta),\ldots,\overset{(p)}{F}_{15}(\alpha,\beta)\right).$$

Введем также обозначение:

$$\text{col}(M_1(\alpha,\beta), M_2(\alpha,\beta), M_3(\alpha,\beta)) = -g^{-1}Q\tilde{g}^G(\alpha,\beta). \tag{1.8}$$

Поэтому, если

$$|M_p(\alpha,\beta)| > s_p^{\max}(\alpha,\beta), \tag{1.9}$$

то знак входного сигнала p-го ньютонометра определен. В противном случае надежная информация о знаке входного сигнала отсутствует, и такие измерения следует исключить из рассмотрения. Угловые положения, при которых для p-й группы измерений выполнено условие (1.9), назовем допустимыми.

Итак, следует модифицировать модель измерений таким образом, чтобы она, оставаясь линейной по оцениваемым параметрам, отражала бы неоднозначность масштабных коэффициентов:

$$\Gamma_{pp} = \begin{cases} \Gamma_{pp}^{+}, & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) > s_p^{\max}(\alpha,\beta), \\ \Gamma_{pp}^{-}, & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) < -s_p^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases} \qquad p = 1,2,3.$$

Это можно осуществить, вводя расширенные векторы из $\mathbb{R}^{18}$:

$$\overset{(1)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(F_{11}, F_{21}, F_{31}, M_1^{+}(\alpha,\beta), M_1^{-}(\alpha,\beta), 0_2, M_2(\alpha,\beta), 0_3, M_3(\alpha,\beta), 0_3, 1, 0_2),$$

$$\overset{(2)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(F_{12}, F_{22}, F_{32}, 0_2, M_1(\alpha,\beta), 0_2, M_2^{+}(\alpha,\beta), M_2^{-}(\alpha,\beta), 0_2, M_3(\alpha,\beta), 0_3, 1, 0), \tag{1.10}$$

$\overset{(3)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(F_{13}, F_{23}, F_{33}, 0_3, M_1(\alpha,\beta), 0_3, M_2(\alpha,\beta), 0_2, M_3^{+}(\alpha,\beta), M_3^{-}(\alpha,\beta), 0_2, 1)$, в которых

$$M_p^{+}(\alpha,\beta) = \begin{cases} M_p(\alpha,\beta), & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) > s_p^{\max}(\alpha,\beta), \\ 0, & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) < -s_p^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases} \qquad p = 1,2,3,$$

$$M_p^{-}(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) > s_p^{\max}(\alpha,\beta), \\ M_p(\alpha,\beta), & \text{если} \quad M_p(\alpha,\beta) < -s_p^{\max}(\alpha,\beta). \end{cases} \qquad p = 1,2,3,$$

Тогда измерения для случая зависимых от знака входного сигнала ошибок масштабных коэффициентов можно представить в следующем расширенном виде:

$$\overset{(p)}{z}(\alpha,\beta) = \overset{(p)}{\mathcal{F}}{}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\mathcal{X} + \overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta), \qquad p = 1,2,3, \tag{1.11}$$

где $\mathcal{X} = \mathrm{col}(u, v^{\pm}, w) \in \mathbb{R}^{18}$,

$$v^{\pm} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{+} - \dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{11}^{-} - \dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{21} - \vartheta_3 + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})\Delta\beta \\ \Gamma_{31} + \vartheta_2 + (Q_{11}Q_{32} - Q_{12}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{12} + \vartheta_3 - (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})\Delta\beta \\ \Gamma_{22}^{+} - \dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{22}^{-} - \dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{32} - \vartheta_1 + (Q_{21}Q_{32} - Q_{22}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{13} - \vartheta_2 - (Q_{11}Q_{32} - Q_{12}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{23} + \vartheta_1 - (Q_{21}Q_{32} - Q_{22}Q_{31})\Delta\beta \\ \Gamma_{33}^{+} - \dfrac{\Delta g}{g} \\ \Gamma_{33}^{-} - \dfrac{\Delta g}{g} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \qquad z(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \overset{(1)}{z}(\alpha,\beta) \\ \overset{(2)}{z}(\alpha,\beta) \\ \overset{(3)}{z}(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad \varrho(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \overset{(1)}{\varrho}(\alpha,\beta) \\ \overset{(2)}{\varrho}(\alpha,\beta) \\ \overset{(3)}{\varrho}(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Требуется по измерениям (1.11) при всевозможных допустимых угловых положениях из $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ оценить: (a) погрешности стенда; (b) масштабные коэффициенты (с точностью до ошибки знания ускорения силы тяжести); (c) несоосности осей чувствительности ньютонометров; (d) погрешности углов установки блока ньютонометров на планшайбу (с точностью до систематического смещения в измерении угла поворота внутренней рамы); (e) систематические смещения показаний ньютонометров.

При калибровке принимается одно из двух соглашений (можно принять любое): (A1) матрица Г является нижнетреугольной; (A2) матрица Г – симметричной. В случае (A1) это соответствует оцениванию следующих параметров: (a) $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$, $\mathscr{X}_3$; (b) $\mathscr{X}_4, \mathscr{X}_5$, $\mathscr{X}_9, \mathscr{X}_{10}$, $\mathscr{X}_{14}, \mathscr{X}_{15}$; (c) $\mathscr{X}_6+\mathscr{X}_8$, $\mathscr{X}_7+\mathscr{X}_{12}$, $\mathscr{X}_{11}+\mathscr{X}_{13}$; (d) $\mathscr{X}_8$, $-\mathscr{X}_{12}$, $\mathscr{X}_{13}$; (e) $\mathscr{X}_{16}$, $\mathscr{X}_{17}$, $\mathscr{X}_{18}$. В случае (A2) наборы оцениваемых параметров (a), (b), (e) совпадают с наборами для случая (A1), а наборы (c) и (d) заменяются на: (c) $1/2(\mathscr{X}_6+\mathscr{X}_8)$, $1/2(\mathscr{X}_7+\mathscr{X}_{12})$, $1/2(\mathscr{X}_{11}+\mathscr{X}_{13})$; (d) $1/2(\mathscr{X}_8-\mathscr{X}_6)$, $1/2(\mathscr{X}_7-\mathscr{X}_{12})$, $1/2(\mathscr{X}_{13}-\mathscr{X}_{11})$.

Для численных расчетов на квадрате $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ зададим сетку. Множество элементов сетки, для которых выполнено условие (1.9), обозначим через $\mathscr{G}_p$.

2. Метод гарантирующего оценивания. Опишем кратко метод гарантирующего оценивания [3, 25–32]. Рассмотрим три группы измерений (1.11). Будем полагать, что погрешности измерений могут быть произвольными числами, ограниченными известной величиной σ:

$$|\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)| \le \sigma, \quad (\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p, \quad p=1,2,3. \tag{2.1}$$

Подчеркнем, что модель (2.1) вполне соответствует задаче калибровки блока ньютонометров, поскольку после обязательного осреднения показаний ньютонометров погрешности измерений состоят из суммы остаточного сигнала электромеханического контура блока ньютонометров и отброшенных малых квадратичных членов. Эти погрешности измерений не имеют ни четкой параметрической модели, ни устойчивого спектра.

Пусть требуется оценить скалярную величину $l=a^{\mathrm{T}}\mathscr{X}$, где $a\in\mathbb{R}^{18}$ – заданный вектор. Обозначим единичный координатный орт из $\mathbb{R}^{18}$ с единицей на ν-м месте через $e^{(\nu)}$. Тогда для решения задачи калибровки нужно решить 18 задач. Причем в случае нижнетреугольной матрицы Г: $a=e^{(\nu)}$, $\nu=\overline{1,5},\overline{8,10},\overline{13,18}$ и $a=e^{(6)}+e^{(8)}$, $a=e^{(7)}+e^{(12)}$, $a=e^{(11)}+e^{(13)}$, $a=-e^{(12)}$; а в случае симметричной матрицы Г: $a=e^{(\nu)}$, $\nu=\overline{1,5},9,10,\overline{14,18}$ и $a=1/2(e^{(6)}+e^{(8)})$, $a=1/2(e^{(7)}+e^{(12)})$, $a=1/2(e^{(11)}+e^{(13)})$, $a=1/2(e^{(8)}-e^{(6)})$, $a=1/2(e^{(7)}-e^{(12)})$, $a=1/2(e^{(13)}-e^{(11)})$.

Рассмотрим линейные оцениватели для $l=a^{\mathrm{T}}\mathscr{X}$ вида

$$\tilde{l}=\sum_{p=1}^{3}\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p}\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)\,\overset{(p)}{z}(\alpha,\beta), \tag{2.2}$$

где $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$ – некоторые весовые коэффициенты.

Величина

$$\max_{\mathscr{X}\in\mathbb{R}^{18},\,|\varrho(\alpha,\beta)|\le\sigma}|\tilde{l}-l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки; укороченная запись $|\varrho(\alpha,\beta)|\le\sigma$ означает выполнение условия (2.1). При выбранном оценивателе – это максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов $\mathscr{X}$ и ϱ.

Будем искать весовые коэффициенты $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки:

$$\min_{\Phi(\alpha,\beta)}\max_{\mathscr{X}\in\mathbb{R}^{18},\,|\varrho(\alpha,\beta)|\le\sigma}|\tilde{l}-l|$$

(здесь под $\Phi(\alpha,\beta)$ понимается набор из $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$, $p=1,2,3$). Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания.

Итак, для решения задачи калибровки и диагностики стенда нужно решить 18 отдельных задач. Можно показать, что привлечение произвольных нелинейных оценивателей в дополнение к линейным оценивателям вида (2.2) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [32], т.е. можно ограничиться линейными оценивателями.

Легко убедиться, что

$$\tilde{l} - l = \left\{ \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} \overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta)\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta) - a \right\}^{\mathrm{T}} \mathcal{X} + \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} \overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta). \tag{2.3}$$

Явно вычисляя гарантированную ошибку оценки с учетом предыдущей формулы, можно показать, что эта задача сводится к вариационной задаче вида

$$\min_{\Phi(\alpha,\beta)} \sigma \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} |\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)| \tag{2.4}$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} \overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta)\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta) = a. \tag{2.5}$$

Величина функционала (2.4) определяет гарантированную ошибку оценки. Условия (2.5) называются условиями несмещенности, так как при их выполнении в отсутствие ошибок измерений оценка $\tilde{l}$ совпадает с l.

Имеет место утверждение [26, 31, 33].

Утверждение. Решение задачи (2.4), (2.5) существует и, по крайней мере, одно решение в совокупности содержит не более чем 18 отличных от нуля компонент.

Это означает, что решение задачи оптимального гарантирующего оценивания (для каждого оцениваемого параметра) из всех элементов сетки $\mathcal{G} = \cup_{p=1}^{3}\mathcal{G}_p$ выделяет не более чем 18 необходимых угловых положений стенда, т.е. одновременно доставляет оптимальный план измерений. Это обстоятельство делает применение гарантирующего подхода весьма эффективным для решения задачи калибровки блока ньютонометров и диагностики стенда.

Негладкая вариационная задача сводится к следующей канонической задаче линейного программирования [26, 31]:

$$\min_{\Phi(\alpha,\beta)} \sigma \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} \left(\overset{(p)}{\Phi}{}^{+}(\alpha,\beta) + \overset{(p)}{\Phi}{}^{-}(\alpha,\beta) \right) \tag{2.6}$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p} \overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta) \left(\overset{(p)}{\Phi}{}^{+}(\alpha,\beta) - \overset{(p)}{\Phi}{}^{-}(\alpha,\beta) \right) = a, \quad \overset{(p)}{\Phi}{}^{+}(\alpha,\beta) \geq 0, \quad \overset{(p)}{\Phi}{}^{-}(\alpha,\beta) \geq 0. \tag{2.7}$$

Если $\{\overset{(p)}{\Phi}{}_{\circ}^{+}(\alpha,\beta), \overset{(p)}{\Phi}{}_{\circ}^{-}(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p}^{p=1,2,3}$ является ее решением, то $\{\overset{(p)}{\Phi}{}_{\circ}(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p}^{p=1,2,3} = \{\overset{(p)}{\Phi}{}_{\circ}^{+}(\alpha,\beta) - \overset{(p)}{\Phi}{}_{\circ}^{-}(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p}^{p=1,2,3}$ – решение исходной вариационной задачи (2.4), (2.5). Задача (2.6), (2.7) может быть численно решена симплекс-методом или методом внутренней точки [33–36].

3. Численное решение. Для численного решения задачи (2.4), (2.5) (или (2.6), (2.7)) рассмотрим случай, когда приборный трехгранник устанавливается по осям внутренней рамы, т.е. при $Q = I_3$. Тогда приведенные выше выражения для регрессионных векторов упрощаются и принимают вид

$$\overset{(1)}{\mathcal{F}} = \mathrm{col}(-\cos\beta, -\cos\alpha\sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta, s_1^{+}(\alpha,\beta), s_1^{-}(\alpha,\beta), 0_2, \sin\alpha\cos\beta, 0_3, \cos\alpha, 0_3, 1, 0_2),$$

$$\overset{(2)}{\mathcal{F}} = \mathrm{col}(\sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, 0_2, \sin\alpha\sin\beta, 0_2, s_2^{+}(\alpha,\beta), s_2^{-}(\alpha,\beta), 0_2, \cos\alpha, 0_3, 1, 0), \tag{3.1}$$

$$\overset{(3)}{\mathscr{F}} = \mathrm{col}(0, \sin\alpha, 0_4, \sin\alpha\sin\beta, 0_3, \sin\alpha\cos\beta, 0_2, s_3^+(\alpha,\beta), s_3^-(\alpha,\beta), 0_2, 1),$$

где

$$s_1^+(\alpha,\beta) = \begin{cases} \sin\alpha\sin\beta, & \text{если} \quad \sin\alpha\sin\beta > s_1^{\max}(\alpha,\beta), \\ 0, & \text{если} \quad \sin\alpha\sin\beta < -s_1^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$s_1^-(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sin\alpha\sin\beta > s_1^{\max}(\alpha,\beta), \\ \sin\alpha\sin\beta, & \text{если} \quad \sin\alpha\sin\beta < -s_1^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$s_2^+(\alpha,\beta) = \begin{cases} \sin\alpha\cos\beta, & \text{если} \quad \sin\alpha\cos\beta > s_2^{\max}(\alpha,\beta), \\ 0, & \text{если} \quad \sin\alpha\cos\beta < -s_2^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$s_2^-(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sin\alpha\cos\beta > s_2^{\max}(\alpha,\beta), \\ \sin\alpha\cos\beta, & \text{если} \quad \sin\alpha\cos\beta < -s_2^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$s_3^+(\alpha,\beta) = \begin{cases} \cos\alpha, & \text{если} \quad \cos\alpha > s_3^{\max}(\alpha,\beta), \\ 0, & \text{если} \quad \cos\alpha < -s_3^{\max}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$s_3^-(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \cos\alpha > s_3^{\max}(\alpha,\beta), \\ \cos\alpha, & \text{если} \quad \cos\alpha < -s_3^{\max}(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Здесь $s_p^{\max}(\alpha,\beta)$, $p = 1,2,3$, определяются формулой (1.7), в которой $v_s^{0\max}$ есть максимальное значение s-го элемента вектора

$$v^0 = \mathrm{col}\left(-\frac{\Delta g}{g}, \Gamma_{21} - \vartheta_3 + \Delta\beta, \Gamma_{31} + \vartheta_2, \Gamma_{12} + \vartheta_3 - \Delta\beta, -\frac{\Delta g}{g}, \Gamma_{32} - \vartheta_1, \Gamma_{13} - \vartheta_2, \Gamma_{23} + \vartheta_1, -\frac{\Delta g}{g}\right),$$

и

$$\overset{(1)}{F}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(-\cos\beta, -\cos\alpha\sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, 0, 0, \sin\alpha\cos\beta, 0, 0, \cos\alpha, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$\overset{(2)}{F}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(\sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, 0, \sin\alpha\sin\beta, 0, 0, \sin\alpha\cos\beta, 0, 0, \cos\alpha, 0, 0, 1, 0),$$

$$\overset{(3)}{F}(\alpha,\beta) = \mathrm{col}(0, \sin\alpha, 0, 0, 0, \sin\alpha\sin\beta, 0, 0, \sin\alpha\cos\beta, 0, 0, \cos\alpha, 0, 0, 1).$$

При вычислениях на исходном квадрате всех значений (α,β) была взята сетка с шагом в 1° по обоим углам. С некоторым загрублением было положено, что $u_k^{\max} = 3\times10^{-3}$, $k = 1,2,3$, а $v_s^{0\max} = 10^{-2}$, $s = \overline{4,12}$. Расчеты выполнялись при помощи пакета IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. Применялись два численных метода: метод внутренней точки и симплекс-метод; они дали одинаковые результаты.

На рисунке изображена область допустимых значений сетки $\mathscr{G}_1$, соответствующая принятым величинам $u_k^{\max}$ и $v_s^{0\max}$, и указаны оптимальные положения углов для оценивания компоненты $\mathscr{X}_4$. Области $\mathscr{G}_2$ и $\mathscr{G}_3$ весьма близки к $\mathscr{G}_1$. Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2. В них в первом столбце указаны оцениваемые параметры, во втором – через запятую приведены значения (в градусах) пар углов поворота стенда (α,β) и номера используемых для построения соответствующей оценки ньютонометров, в третьем – значения весовых коэффициентов оценивателя, а в четвертом – оптимальные точности гарантирующего оценивания (значения функционалов).

4. Субоптимальные угловые положения. Обозначим оптимальные угловые положения для p-й группы измерений $\overset{(p)}{z}(\alpha,\beta)$ (соответствующие отличным от нуля компонентам $\{\overset{(p)}{\Phi}_\circ(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p}$) через $\mathscr{G}_p^\circ$. В некоторых случаях технически не легко в точности реализовать требуемые оптимальные

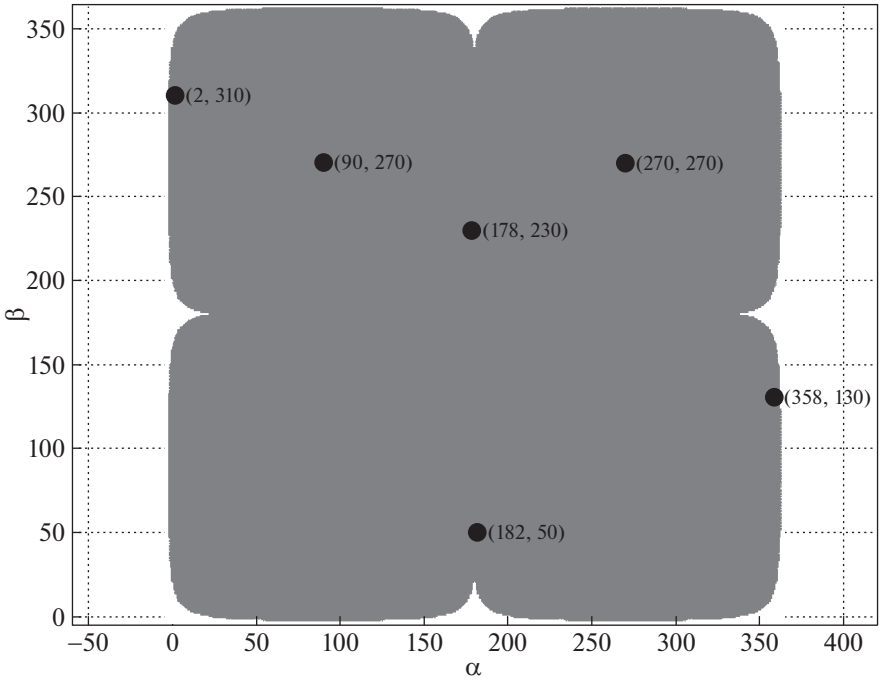

Рисунок. Область $\mathcal{G}_1$ допустимых значений углов (в градусах)

угловые положения $\mathcal{G}_p^\circ$, а можно поставить стенд в близкие угловые положения $(\alpha + \overset{(p)}{\delta\alpha}, \beta + \overset{(p)}{\delta\beta})$ для $(\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_p^\circ$.

При наличии ошибок установки углов условия несмещенности (2.5), вообще говоря, уже не будут выполнены:

$$\sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p^\circ} \overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha + \overset{(p)}{\delta\alpha}, \beta + \overset{(p)}{\delta\beta})\, \overset{(p)}{\Phi}_\circ(\alpha,\beta) - a = b \neq 0, \quad b = \mathrm{col}(b_1,\ldots,b_{18}). \tag{4.1}$$

Если множество $\mathcal{G}^\circ = \cup_{p=1}^3 \mathcal{G}_p^\circ$ состоит из 18 элементов и соответствующий набор $\{\overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p}^{p=1,2,3}$ линейно независим, то в силу малости $(\overset{(p)}{\delta\alpha}, \overset{(p)}{\delta\beta})$ набор $\{\overset{(p)}{\mathcal{F}}(\alpha + \overset{(p)}{\delta\alpha}, \beta + \overset{(p)}{\delta\beta})\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p}^{p=1,2,3}$ также будет линейно независимым. Несмещенный субоптимальный оцениватель находится из условий несмещенности. Ясно, что гарантированная ошибка оценки субоптимального оценивателя будет близка к оптимальной.

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\mathcal{G}^\circ$ содержит менее 18 элементов. Пусть дополнительно известно, что $|\mathcal{X}_\nu| \le \mathcal{X}_\nu^{\max}$, $\nu = \overline{1,18}$ (для краткости будем обозначать эти условия как $|\mathcal{X}| \le \mathcal{X}^{\max}$). Тогда с учетом (2.3) гарантированная величина ошибки оценки параметра l имеет вид

$$\max_{|\mathcal{X}|\le\mathcal{X}^{\max},\,|\varrho(\alpha,\beta)|\le\sigma} |\tilde{l} - l| = \sum_{\nu=1}^{18} |b_\nu| \mathcal{X}_\nu^{\max} + \sigma \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p^\circ} |\overset{(p)}{\Phi}_\circ(\alpha,\beta)|.$$

Если

$$\sum_{\nu=1}^{18} |b_\nu| \mathcal{X}_\nu^{\max} \ll \sigma \sum_{p=1}^{3} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}_p^\circ} |\overset{(p)}{\Phi}_\circ(\alpha,\beta)|,$$

то неточность в выставке углов стенда приемлема. В противном случае надо воспользоваться схемой компенсации, описанной и обоснованной в [9]. Пусть подлежат оценке величины

Таблица 1. Результаты вычислений оценок параметров (a), (b) для случая (A1)

Параметр	Угловые положения, град	Весовые коэффициенты	Точность
$\mathscr{X}_1$	$p = 1$: (87,178); (89,2); (120,182); (124,2); (279,2); (288,182); (294,358)	0.113004; –0.153208; 0.091198; –0.066789; –0.079964; 0.219288; –0.123528	1.00σ
	$p = 2$: (56,88); (122,88); (124,268); (260,268); (262,88)	0.000111; 0.044698; –0.038232; –0.038584; 0.032007	
$\mathscr{X}_2$	$p = 3$: (92,45); (268,225)	0.500305; –0.500305	1.00σ
$\mathscr{X}_3$	$p = 1$: (10,170); (170,190); (190,10) (350,350)	0.257773; –0.257773; 0.257773 –0.257773;	1.00σ
$\mathscr{X}_4$	$p = 1$: (2,310); (90,270); (178,230); (182,50); (270,270); (358,130);	–0.256867; 0.027469; –0.256867; –0.256867; 1.000000; – 0.256867;	2.05σ
$\mathscr{X}_5$	$p = 1$: (182,130); (182,310); (270,90); (270,270); (358,50); (358,230);	0.256867; 0.256867; –1.013734 –0.013734; 0.256867; 0.256867	2.05σ
$\mathscr{X}_9$	$p = 2$: (182,40); (182,320); (270,180); (270,360); (358,40); (358,320);	–0.256867; –0.256867; 1.000000 0.027469; –0.256867; –0.256867	2.05σ
$\mathscr{X}_{10}$	$p = 2$: (182,140); (182,220); (270,180); (270,360); (358,140); (358,220);	0.256867; 0.256867; –0.027469; –1.000000; 0.256867; 0.256867	2.05σ
$\mathscr{X}_{14}$	$p = 3$: (92,53); (92,225); (180,277); (268,1); (268,89); (360,2);	–0.447556; –0.070525; 0.036162; –0.214207; –0.303874; 1.000000	2.07σ
$\mathscr{X}_{15}$	$p = 3$: (88,45); (88,200); (180,5); (272,19); (272,114); (360,274)	0.436524; 0.081556; –1.000000; 0.327419; 0.190662; –0.036162	2.07σ

$l^{(\nu)} = a^{(\nu)T}\mathscr{X}$, $\nu = \overline{1,18}$, причем векторы $a^{(1)},\ldots,a^{(18)}$ линейно независимы (в нашем случае это, очевидно, так). Тогда субоптимальные оценки $\tilde{l}^{(\nu)}$ параметров $l^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1,18}$, следует строить по формуле, аналогичной соответствующей формуле в [9]:

$$\tilde{l}^{(\nu)} = a^{(\nu)T}\mathscr{W}^{-1}\cdot\mathscr{Z}, \tag{4.2}$$

где

$$\mathscr{W} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ} \overset{(p)}{\Phi}{}_\circ^{(1)}(\alpha,\beta)\,\overset{(p)}{\mathscr{F}}{}^{\mathrm{T}}(\alpha+\overset{(p)}{\delta}\alpha,\beta+\overset{(p)}{\delta}\beta) \\ \vdots \\ \sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ} \overset{(p)}{\Phi}{}_\circ^{(18)}(\alpha,\beta)\,\overset{(p)}{\mathscr{F}}{}^{\mathrm{T}}(\alpha+\overset{(p)}{\delta}\alpha,\beta+\overset{(p)}{\delta}\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{18\times 18},$$

$$\mathscr{Z} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ} \overset{(p)}{\Phi}{}_\circ^{(1)}(\alpha,\beta)\,\overset{(p)}{z}(\alpha+\overset{(p)}{\delta}\alpha,\beta+\overset{(p)}{\delta}\beta) \\ \vdots \\ \sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ} \overset{(p)}{\Phi}{}_\circ^{(18)}(\alpha,\beta)\,\overset{(p)}{z}(\alpha+\overset{(p)}{\delta}\alpha,\beta+\overset{(p)}{\delta}\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{18}.$$

Таблица 2. Результаты вычислений оценок параметров (c)–(e) для случая (A1)

Параметр	Угловые положения, град	Весовые коэффициенты	Точность
$\mathscr{X}_6 + \mathscr{X}_8$	$p = 1$: (90,178); (270,182)	–0.500305; 0.500305	2.00σ
	$p = 2$: (90,88); (90,272); (270,88); (270,272)	0.250152; –0.250152; –0.250152; 0.250152	
$\mathscr{X}_7 + \mathscr{X}_{12}$	$p = 1$: (2,68); (2,251); (182,50); (182,245); (182,270); (358,263); (358,302)	0.036440; 0.041929; –0.051752; –0.078714; –0.369839; 0.343043; 0.078892	2.00σ
	$p = 3$: (88,270); (92,90); (92,270); (272,270)	–0.407391; 0.092914; –0.092914; 0.407391	
$\mathscr{X}_{11} + \mathscr{X}_{13}$	$p = 2$: (2,13); (2,166); (2,179); (178,15); (178,153); (178,332); (182,354); (358,330)	0.020308; 0.125096; 0.275617; –0.006597; –0.099269; –0.015193; –0.379245; 0.079284	2.00σ
	$p = 3$: (272,180); (272,360)	0.500305; –0.500305	
$\mathscr{X}_8$	$p = 1$: (90,178); (270,182)	–0.500305; 0.500305	1.00σ
$-\mathscr{X}_{12}$	$p = 1$: (2,56); (2,233); (178,90); (178,124); (182,55); (182,257); (358,268); (358,292)	–0.011289; –0.097459; 0.302084; 0.093598; 0.095018; 0.009606; –0.230376; –0.161180	1.00σ
$\mathscr{X}_{13}$	$p = 2$: (2,194); (2,350); (178,177); (178,193); (182,146); (182,341); (358,14); (358,336)	0.053382; 0.062675; –0.215213; –0.155860; –0.074451; –0.054781; 0.277628; 0.106621	1.00σ
$\mathscr{X}_{16}$	$p = 1$: (2,230); (178,310); (182,230); (270,90); (270,270); (358,310)	0.256867; 0.256867; 0.256867; –0.013734; –0.013734; 0.256867	1.05σ
$\mathscr{X}_{17}$	$p = 2$: (182,140); (182,320); (270,180); (270,360); (358,140); (358,320)	0.256867; 0.256867; –0.013734; –0.013734; 0.256867; 0.256867	1.05σ
$\mathscr{X}_{18}$	$p = 3$: (88,84); (92,161); (180,5); (272,153); (272,317); (360,274)	0.061464; 0.456617; –0.015936; 0.495707; 0.022374; –0.020226	1.07σ

Множество $\{\overset{(p)}{z}(\alpha + \overset{(p)}{\delta\alpha}, \beta + \overset{(p)}{\delta\beta})\}_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ}^{p=1,2,3}$ образовано измерениями в близких к оптимальным угловых положениях, а наборы $\{\overset{(p)}{\Phi}{}_\circ^{(\nu)}(\alpha,\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{G}_p^\circ}^{p=1,2,3}$ состоят из отличных от нуля компонент оптимальных решений вариационной задачи (2.4), (2.5) для $a = a^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1,18}$. Аналогично тому, как это сделано в [9], можно показать, что при достаточно малых $(\overset{(p)}{\delta\alpha}, \overset{(p)}{\delta\beta})$ обратная матрица к $\mathscr{W}$ существует, а полученные субоптимальные оценки являются несмещенными и их гарантированные ошибки оценок близки к оптимальным.

5. Краткое описание обработки экспериментов. Разработанная теория была применена для калибровки реального блока ньютонометров на высокоточном испытательном стенде. Сначала была проверена корректность полученных в экспериментах “сырых” данных. Во-первых, была подтверждена стабильность угловых положений блока ньютонометров. Для этого были вычислены средние (по времени) значения и разброс показаний датчиков углов в каждом угловом положении. Кроме того, угловые данные тестировались на наличие линейного тренда. Вычисления показали практическое отсутствие линейного тренда и высокий уровень стабильности угловых положений. Поэтому положения блока для каждой пары углов можно считать жестко фиксированными относительно Земли.

Во-вторых, для каждого ньютонометра во всех положениях вычислялись средние (по времени) значения и разбросы их показаний; кроме того, оценивался соответствующий линейный

тренд. Экспериментальные данные показали наличие большого начального временного интервала температурной нестабильности показаний ньютонометров и позволили определить моменты времени, начиная с которых средние показания ньютонометров можно было считать надежными. Результаты экспериментов также подтвердили необходимость осреднения показаний ньютонометров в каждом положении и указали на наличие незначительного остаточного линейного (по-видимому, температурного) тренда. При этом вариации средних значений показаний ньютонометров, трактующиеся как ошибки измерений, заведомо принадлежали нужному диапазону точности.

Описанная выше методика калибровки использовала линеаризацию соответствующих соотношений и тем самым предполагала малость значений оцениваемых параметров. В то же время на исходные показания блока заметно влияли слишком большие ошибки масштабных коэффициентов, что ставило под сомнение точность линеаризации и тем самым препятствовало непосредственному применению разработанной в данной статье теории. Поэтому предварительно была проведена “грубая” калибровка блока ньютонометров, при которой игнорировались как асимметрия ошибок масштабных коэффициентов, так и наличие несоосностей ньютонометров. После этого исходная модель показаний блока была нужным образом скорректирована для ее соответствия предлагаемой методике. Таким образом, решению задачи оценивания предшествовал трудоемкий этап обработки исходных данных для их подготовки к “точной” калибровке. В итоге с помощью процедуры “точной” калибровки были получены оценки погрешностей блока ньютонометров, которые, в частности, выявили значимую асимметрию ошибок масштабных коэффициентов в одном из ньютонометров блока.

Заключение. Для калибровки блока ньютонометров в случае асимметрии ошибок масштабных коэффициентов применен гарантирующий подход. Этот подход позволил достаточно просто получить оптимальный план угловых калибровочных положений. Эффективность гарантирующего подхода к оцениванию подтверждена реальными экспериментами на испытательном стенде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
2. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.
3. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
4. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 8–14.
5. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13–27.
6. *Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю.* Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов // Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования. Т. 1. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2009. С. 212–223.
7. *Веремеенко К.К., Галай И.А.* Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Труды МАИ. 2013. № 63. http://www.trudymai.ru.
8. *Голован А.А., Матасов А.И.* Гарантирующий подход для определения оптимального плана калибровки // Фундаментальная и прикладная математика. 2018. Т. 22. № 2. С. 133–145.
9. *Голован А.А., Матасов А.И.* Применение гарантирующего подхода к задаче калибровки блока ньютонометров // АиТ. 2020. № 4. С. 140–160.
10. *Гусинский В.З., Лесючевский В.М., Литманович Ю.А., Столбов А.А.* Алгоритм калибровки трехосного блока ньютонометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. 2000. № 4(31). С. 86.
11. *Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Формализация последовательной схемы калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // АиТ. 2018. № 1. С. 66–83.
12. *Драницына Е.В.* Калибровка измерительного модуля по навигационному решению БИНС: выбор плана движений стенда / Сб. матер. XXIV Санкт-Петербургск. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн “ЦНИИ Электроприбор”, 2017. С. 235–240.
13. *Егоров Ю.Г., Попов Е.А.* Исследование минимально избыточных программ калибровки триады акселерометров // Авиакосмическое приборостроение. 2016. № 6. С. 3–8.
14. *Емельянцев Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн “ЦНИИ Электроприбор”, 2016.

15. *Ермаков В.С., Дунаев Д.А., Широков А.А. и др.* Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Аэрокосмическая техника. Вестник ПГТУ. 2004. № 18. С. 25–30.
16. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. матер. Юбилейной XV Санкт-Петербургск. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ "ЦНИИ Электроприбор", 2008. С. 145–154.
17. *Сазонов И.Ю., Шаймарданов И.Х.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы на микромеханических датчиках ньютонометров и гироскопов // Вопросы оборонной техники: научно-технический сборник. Сер. 9. "Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы". М.: Информтехника, 2010. № 3. С. 73–82.
18. *Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y.* Systematic Calibration for Ultra-high Accuracy Inertial Measurement Unit // Sensors. 2016. V. 16. (940).
19. *Moon-Sik Kim, Si-Bok Yu, Kwang-Soo Lee.* Development of High-precision Calibration Method for Inertial Measurement Unit // Intern. J. of Precision Engineering and Manufacturing. 2014. V. 15. № 3. P. 567–575.
20. *Panahandeh G., Skog I., Jansson M.* Calibration of the Accelerometer Triad of an Inertial Measurement Unit, Maximum Likelihood Estimation and Cramer-Rao Bound // Proc. Intern. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Zurich, Switzerland, 2010.
21. *Paternain S., Tailanian M., Canetti R.* Calibration of an Inertial Measurement Unit // Proc. 16th Intern. Conf. on Advanced Robotics. Montevideo, Uruguay, 2013.
22. *Secer G., Barshan B.* Improvements in Deterministic Error Modeling and Calibration of Inertial Sensors and Magnitometers // Sensors and Actuators A. 2016. (247). P. 522–538.
23. *Syed Z.F., Aggarwal P., Goodall C., Niu X., El-Sheimy N.* A New Multi-position Calibration Method for MEMS Inertial Navigation Systems // Measurement Science and Technology. 2007. № 18. P. 1897–1907.
24. *Xu Y., Wang Y., Su Y., Zhu X.* Research on the Calibration Method for Micro Inertial Measurement Unit for Engineering Applications // J. Sensors. 2016. ID 9108197.
25. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
26. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. Препринт № 71. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010.
27. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
28. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
29. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
30. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния в динамических системах. М.: Наука, 1988.
31. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
32. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business, Media, B.V., 2013.
33. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
34. *Лидов М.Л.* О модификации симплекс-метода линейного программирования в случае вырождения // Космич. исслед. 1991. Т. 29. № 4. С. 499–508.
35. *Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И., Федяев К.С.* О вырожденных задачах линейного программирования // АиТ. 2000. № 1. С. 105–117.
36. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cabridge University Press, 2004.

EDN: UTLMJC
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 120–136

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 531.38

ПРЕОДОЛЕНИЕ ИНСЕКТОМОРФНЫМ РОБОТОМ ПРЕПЯТСТВИЯ В ВИДЕ ШТАБЕЛЯ ИЗ ШЕРОХОВАТЫХ ЦИЛИНДРОВ

© 2022 г. Ю. Ф. Голубев[a,]*, В. В. Корянов[a,]**

[a] *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

**e-mail: golubev@keldysh.ru*

***e-mail: korianov@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 20.09.2021 г.
После доработки 05.10.2021 г.
Принята к публикации 29.11.2021 г.

Представлен метод преодоления инсектоморфным роботом препятствия в виде штабеля из трех шероховатых цилиндров разного радиуса, два из которых лежат на горизонтальной плоскости, а третий цилиндр лежит сверху на указанных двух. На цилиндры действуют сила тяжести, сухое трение и трение качения. Найдены условия равновесия системы под действием внешней силы, возникающей из-за опоры робота на систему цилиндров. С привлечением средств компьютерного моделирования разработан алгоритм преодоления штабеля, не разрушающего структуру препятствия. Приводятся результаты численных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0002338822020081

Введение. В [1] показано, что шагающие машины и, в частности, инсектоморфные роботы, имея достаточно развитую кинематику конечностей относительно корпуса, теоретически могут успешно преодолевать весьма сложные препятствия. Встречающиеся в естественной среде завалы из стволов деревьев бывают очень разнообразны [2]. Применение для повышения надежности опоры в стопах ног аппарата таких специальных средств, как вакуумные присоски, магнитные контактные устройства и средства химической адгезии [3–5], представляется в рассматриваемом случае нецелесообразным. В наиболее простом варианте взаимодействия с опорой робот контактирует с ней стопами ног, и в точках контакта возникает сила сухого трения. Особенность преодоления завалов состоит в том, что робот, наступая на отдельные предметы и создавая дополнительную нагрузку на опору, может ее разрушить. Поэтому проблемы выбора опорных точек на бревнах и направлений опорных усилий в процессе преодоления препятствия требуют специального исследования. Часто можно встретить завалы из отдельных стволов деревьев. Простейший вариант этой задачи, когда деревья были представлены круговыми шероховатыми параллельными цилиндрами, причем каждый из них лежал на опорной горизонтальной плоскости, был рассмотрен в [6].

Более сложные варианты завалов возникают, когда стволы деревьев находятся друг на друге. Один из вариантов получается, когда два цилиндра в произвольном положении лежат на опорной плоскости, а третий цилиндр – на них поперек. Если радиусы цилиндров, лежащих на плоскости, равны, то такая система цилиндров будет в безразличном равновесии. Исследование ее движения в предположении, что все контакты системы абсолютно шероховаты, известно как задача А.Ю. Ишлинского. Уравнения движения для этой задачи были выведены в [7] в виде уравнений Лагранжа с множителями. Из них как частный случай можно получить и условия равновесия системы. В [8, 9] исследованы некоторые свойства движений такой системы. Вместе с тем предположение об абсолютной шероховатости контактов цилиндров является слишком сильным для анализа возможности опоры о препятствие. Кроме того, если радиусы цилиндров, лежащих на плоскости, не равны, то равновесие системы достигается лишь в некоторых отдельных ее конфигурациях. Одна из таких конфигураций образуется тремя параллельными цилиндрами, два из которых лежат на плоскости, а третий лежит на них и образует подобие штабеля.

Равновесие штабеля и возможность его использования в качестве опоры для шагающего робота будут исследоваться в предположении, что сухое трение и трение качения в контактах системы ограничены. Предлагаемая статья развивает результаты работ [1, 6] и увеличивает набор

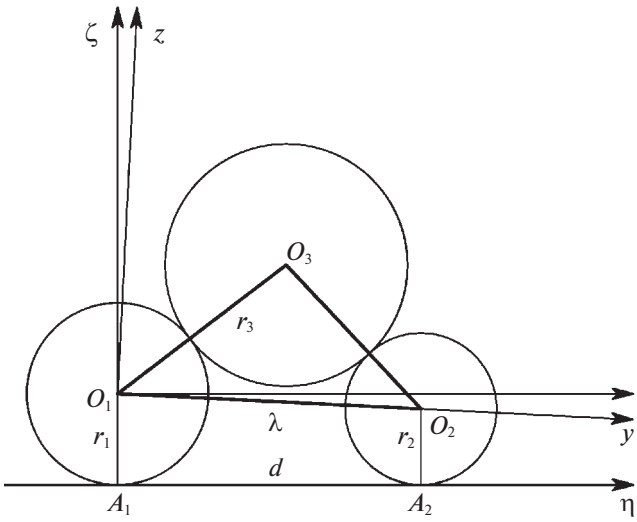

Рис. 1. Торец штабеля

препятствий, которые инсектоморфный робот теоретически может преодолеть. В статье рассматривается следующая локомоционная задача. На горизонтальной плоскости лежит штабель из трех параллельных прямых круговых шероховатых цилиндров. Первоначально робот движется в направлении, перпендикулярном осям цилиндров. В общем случае он не видит участок опорной плоскости за препятствием. Если в процессе движения робота будет установлено, что опорная плоскость за препятствием непосредственно по курсу движения робота непригодна для наступания, то робот, находясь на препятствии, должен изменить свое положение на нем так, чтобы спуститься с препятствия в доступном для опоры месте. В статье представлен конструктивно построенный алгоритм решения сформулированной задачи. Этот алгоритм был отработан на программном комплексе “Универсальный механизм” [10] с учетом полной динамики системы в целом. Представленные результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о принципиальной реализуемости предложенного алгоритма. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса “Универсальный механизм” [10].

1. Равновесие штабеля из трех цилиндров. Следуя [11], рассмотрим вариант препятствия, моделирующего совокупность трех бревен, расположенных на горизонтальной плоскости параллельно друг другу так, что одно бревно лежит на двух других. Для простоты пусть это будут однородные шероховатые прямые круговые цилиндры разного радиуса. Вид торцевого сечения такой системы цилиндров вертикальной плоскостью, перпендикулярной осям цилиндров, представлен на рис. 1. Радиусы цилиндров, лежащих на горизонтальной плоскости, обозначим r_1 и r_2. Для определенности будем считать, что $r_1 \geq r_2$; r_3 – радиус цилиндра, лежащего на двух других. Точки O_1, O_2, O_3 – центры окружностей торцевых сечений цилиндров соответственно. К некоторой точке B верхнего цилиндра приложим силу $\mathbf{F}$. Выберем абсолютную декартову систему координат $A_1\xi\eta\zeta$. Начало координат A_1 поместим в точку соприкосновения торцевой окружности радиуса r_1 с опорной плоскостью, ось $A_1\eta$ направим в сторону точки A_2 соприкосновения торцевой окружности радиуса r_2, ось $A_1\zeta$ – вертикально вверх, ось $A_1\xi$ дополняет систему координат до правоориентированной. Расстояние между точками A_1 и A_2 обозначим буквой d. Расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей, касающихся оси $A_1\eta$, обозначим буквой $\lambda = \sqrt{d^2 + (r_1 - r_2)^2}$. Возьмем вспомогательную декартову систему координат O_1xyz. Ось O_1y пустим вдоль линии центров от точки O_1 к точке O_2, ось O_1z направим вверх в вертикальной плоскости. Ось O_1x будет сонаправлена с осью $A_1\xi$ (рис. 1).

Точка O_3 принадлежит пересечению двух окружностей. Одна из них имеет центр O_1 и радиус $R_1 = r_1 + r_3$, а другая – центр O_2 и радиус $R_2 = r_2 + r_3$. Найдем координаты (y_3, z_3) точки O_3, как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} y_3^2 + z_3^2 = R_1^2, \\ (y_3 - \lambda)^2 + z_3^2 = R_2^2. \end{cases}$$

У системы есть два решения. Из них следует выбрать решение с положительным значением координаты z_3:

$$y_3 = \frac{1}{2\lambda}(R_1^2 - R_2^2 + \lambda^2), \quad z_3 = \sqrt{R_1^2 - y_3^2}. \tag{1.1}$$

В осях $A_1\xi\eta\zeta$ координаты (η_3, ζ_3) точки O_3 выражаются следующим образом:

$$\eta_3 = \frac{1}{\lambda}[y_3 d + (r_1 - r_2)z_3], \quad \zeta_3 = \frac{1}{\lambda}[z_3 d - (r_1 - r_2)y_3] + r_1. \tag{1.2}$$

Когда нижние цилиндры касаются, имеем $\lambda = r_1 + r_2$ и $d = 2\sqrt{r_1 r_2}$, а формулы (1.1) принимают вид

$$y_3 = \frac{r_3(r_1 - r_3) + r_1(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}, \quad z_3 = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_1 + r_2}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим условия равновесия системы. Пусть активная сила $\mathbf{F} = (F_\eta, F_\zeta)$ приложена к точке верхнего цилиндра, заданной центральным углом φ, который отсчитывается от вертикального радиуса этого цилиндра, направленного вверх. Координата этой точки вдоль оси $A_1\xi$ так же, как и активная составляющая F_ξ силы $\mathbf{F}$, для рассматриваемой задачи значения не имеют из-за того, что цилиндры в дальнейшем предполагаются достаточно протяженными.

Рассмотрим случай, когда $d > 2\sqrt{r_1 r_2}$, т.е. нижние цилиндры не находятся в соприкосновении. Обозначим через $\mathbf{N}_1 = (N_{1\eta}, N_{1\zeta})$, $\mathbf{N}_2 = (N_{2\eta}, N_{2\zeta})$ неизвестные реакции опоры в точках A_1 и A_2 соответственно. Уравнения равновесия системы в целом в осях координат $A_1\eta\zeta$ имеют вид

$$\begin{cases} F_\eta + N_{1\eta} + N_{2\eta} = 0, \\ F_\zeta - g(m_1 + m_2 + m_3) + N_{1\zeta} + N_{2\zeta} = 0, \\ F_\zeta(\eta_3 - r_3 \sin\varphi) - F_\eta(\zeta_3 + r_3 \cos\varphi) - g(m_2 d + m_3\eta_3) + N_{2\zeta} d = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Первые два уравнения системы (1.4) выражают равенство нулю главного вектора внешних сил, приложенных к системе цилиндров, а третье уравнение выражает равенство нулю моментов внешних сил относительно точки A_1. Из этой системы можно однозначно найти только вертикальные составляющие реакций опоры:

$$\begin{gathered} N_{2\zeta} = \frac{1}{d}[g(m_2 d + m_3\eta_3) - M_1], \\ N_{1\zeta} = \frac{1}{d}[g(m_1 d + m_3(d - \eta_3)) + M_2], \\ N_{1\eta} + N_{2\eta} = -F_\eta, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{gathered} M_1 = F_\zeta(\eta_3 - r_3 \sin\varphi) - F_\eta(\zeta_3 + r_3 \cos\varphi), \\ M_2 = F_\zeta(\eta_3 - r_3 \sin\varphi - d) - F_\eta(\zeta_3 + r_3 \cos\varphi) \end{gathered} \tag{1.6}$$

суть моменты силы $\mathbf{F}$ относительно точек A_1 и A_2 соответственно.

Для того чтобы найти горизонтальные составляющие, рассмотрим уравнения равновесия нижних цилиндров. Обозначим через $\mathbf{Q}_1 = (Q_{1\eta}, Q_{1\zeta})$ нормальную составляющую силы, действу-

ющей со стороны верхнего цилиндра на первый цилиндр, а через $\mathbf{T}_1 = (T_{1\eta}, T_{1\zeta})$ – касательную составляющую той же силы:

$$\begin{aligned} Q_{1\eta} &= Q_1 \frac{\eta_3}{r_1 + r_3}, \quad Q_{1\zeta} = Q_1 \frac{\zeta_3 - r_1}{r_1 + r_3}, \\ T_{1\eta} &= T_1 \frac{\zeta_3 - r_1}{r_1 + r_3}, \quad T_{1\zeta} = -T_1 \frac{\eta_3}{r_1 + r_3}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где Q_1 – величина нормальной (со знаком), T_1 – величина касательной (со знаком) составляющих силы в точке касания первого и третьего цилиндров. Уравнения равновесия первого цилиндра примут вид

$$\begin{cases} N_{1\eta} + Q_1 \dfrac{\eta_3}{r_1 + r_3} + T_1 \dfrac{\zeta_3 - r_1}{r_1 + r_3} = 0, \\ N_{1\zeta} + Q_1 \dfrac{\zeta_3 - r_1}{r_1 + r_3} - T_1 \dfrac{\eta_3}{r_1 + r_3} - gm_1 = 0, \\ (N_{1\eta} - T_1) r_1 = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где третье уравнение выражает равенство нулю момента всех сил, действующих на первый цилиндр, относительно его оси. Отсюда находим

$$T_1 = (N_{1\zeta} - gm_1) a_1, \quad Q_1 = -\frac{T_1}{k_1}, \quad N_{1\eta} = T_1, \tag{1.9}$$

где

$$a_1 = \frac{\eta_3 (r_1 + r_3)}{(\zeta_3 - r_1)(\zeta_3 + r_3) + \eta_3^2}, \quad k_1 = \frac{\eta_3}{\zeta_3 + r_3}. \tag{1.10}$$

Напишем условия равновесия второго цилиндра. Пусть $\mathbf{Q}_2 = (Q_{2\eta}, Q_{2\zeta})$ – нормальная составляющая силы, действующей со стороны верхнего цилиндра на второй цилиндр, а $\mathbf{T}_2 = (T_{2\eta}, T_{2\zeta})$ – касательная составляющая той же силы:

$$\begin{aligned} Q_{2\eta} &= Q_2 \frac{\eta_3 - d}{r_2 + r_3}, \quad Q_{2\zeta} = Q_2 \frac{\zeta_3 - r_2}{r_2 + r_3}, \\ T_{2\eta} &= T_2 \frac{\zeta_3 - r_2}{r_2 + r_3}, \quad T_{2\zeta} = -T_2 \frac{\eta_3 - d}{r_2 + r_3}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где Q_2 – величина нормальной, T_2 – величина касательной составляющих силы в точке касания второго и третьего цилиндров. Уравнения равновесия второго цилиндра примут вид

$$\begin{cases} N_{2\eta} + Q_2 \dfrac{\eta_3 - d}{r_2 + r_3} + T_2 \dfrac{\zeta_3 - r_2}{r_2 + r_3} = 0, \\ N_{2\zeta} + Q_2 \dfrac{\zeta_3 - r_2}{r_2 + r_3} - T_2 \dfrac{\eta_3 - d}{r_2 + r_3} - gm_2 = 0, \\ (N_{2\eta} - T_2) r_2 = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где третье уравнение выражает равенство нулю момента всех сил, действующих на второй цилиндр, относительно его оси. Отсюда

$$T_2 = (N_{2\zeta} - gm_2) a_2, \quad Q_2 = -\frac{T_2}{k_2}, \quad N_{2\eta} = T_2, \tag{1.13}$$

где

$$a_2 = \frac{(\eta_3 - d)(r_2 + r_3)}{(\zeta_3 - r_2)(\zeta_3 + r_3) + (\eta_3 - d)^2}, \quad k_2 = \frac{\eta_3 - d}{\zeta_3 + r_3}. \tag{1.14}$$

Условия, которым должны удовлетворять реакции связей в точках контакта шероховатых односторонних поверхностей, имеют вид

$$N_{1\zeta} \geq 0, \quad N_{2\zeta} \geq 0, \quad Q_1 \leq 0, \quad Q_2 \leq 0,$$
$$|N_{1\eta}| \leq k|N_{1\zeta}|, \quad |N_{2\eta}| \leq k|N_{2\zeta}|, \quad |T_1| \leq k|Q_1|, \quad |T_2| \leq k|Q_2|, \tag{1.15}$$

где k – коэффициент сухого кулоновского трения.

Проанализируем сначала формулы (1.9), приняв во внимание ограничения (1.15). Очевидно, что $\zeta_3 > r_1$. Поэтому знаки коэффициентов a_1 и k_1 совпадают со знаком координаты η_3. Далее с учетом (1.5) имеем

$$T_1 = -k_1 Q_1 = \frac{1}{d}[gm_3(d - \eta_3) + M_2]a_1. \tag{1.16}$$

Равновесие должно быть как в случае, когда $M_2 = 0$ (т.е. робот еще не наступил на верхнее бревно), так и в случае, когда $M_2 \neq 0$. Поскольку должно быть $Q_1 \leq 0$, то при указанных условиях равенство (1.16) может быть выполнено, лишь если

$$\eta_3 \leq d, \quad M_2 \geq gm_3(\eta_3 - d). \tag{1.17}$$

Ограничение по трению на линии контакта первого и третьего цилиндров, а также на линии контакта первого цилиндра с опорной плоскостью приводит к неравенствам

$$|k_1| \leq k, \quad |a_1|\left(1 - \frac{gm_1}{N_{1\zeta}}\right) \leq k, \tag{1.18}$$

где k – коэффициент сухого кулоновского трения. Приняв во внимание второе неравенство (1.17), а также второе равенство (1.5), заключаем, что выражение в скобках второго неравенства (1.18) не превосходит единицу. Это облегчает выполнение ограничений по трению.

Аналогично проанализируем формулы (1.13). Примем, что $\zeta_3 > r_2$. Тогда знаки a_2 и k_2 совпадают со знаком разности $\eta_3 - d$. Далее с учетом (1.5) имеем

$$T_2 = -k_2 Q_2 = \frac{1}{d}[gm_3\eta_3 - M_1]a_2. \tag{1.19}$$

Равновесие должно быть как в случае, когда $M_1 = 0$ (т.е. робот еще не наступил на верхнее бревно), так и в случае, когда $M_1 \neq 0$. Поскольку должно быть $Q_2 \leq 0$, то при указанных условиях равенство (1.19) может быть выполнено, лишь если

$$\eta_3 \geq 0, \quad M_1 \leq gm_3\eta_3. \tag{1.20}$$

Ограничение по трению на линии контакта второго и третьего цилиндров, а также на линии контакта второго цилиндра с опорной плоскостью приводит к неравенствам

$$|k_2| \leq k, \quad |a_2|\left(1 - \frac{gm_2}{N_{2\zeta}}\right) \leq k. \tag{1.21}$$

Приняв во внимание второе неравенство (1.20), а также второе равенство (1.5), заключаем, что выражение в скобках второго неравенства (1.21) не превосходит единицу. Это облегчает выполнение ограничений по трению.

Из неравенств (1.17) и (1.20) видно, что для равновесия системы необходимо выполнение неравенств

$$0 \leq \eta_3 \leq d, \quad M_1 = F_\zeta\eta \leq gm_3\eta_3, \quad M_2 = F_\zeta(\eta - d) \geq gm_3(\eta_3 - d), \tag{1.22}$$

где η – координата точки пересечения линии действия силы $\mathbf{F}$ с осью $O\eta$. Поскольку речь идет о возможности опоры шагающего аппарата о верхний цилиндр, следует принять условие $F_\zeta < 0$. Поэтому если

$$0 \leq \eta_3 \leq d, \quad 0 \leq \eta \leq d, \tag{1.23}$$

то ограничения на моменты в формуле (1.22) будут выполнены независимо от величины приложенной силы. Другими словами, линия действия силы в точке опоры шагающего аппарата о третий цилиндр должна проходить через отрезок $[0, d]$ между проекциями центров O_1 и O_2 на ось $O\eta$.

Примем во внимание ограничения по трению в точках касания цилиндров друг с другом. Из первых неравенств в формулах (1.18) и (1.21) найдем

$$d - k(\zeta_3 + r_3) \le \eta_3 \le k(\zeta_3 + r_3), \tag{1.24}$$

что возможно, лишь если высота препятствия $\zeta_3 + r_3 \ge d/(2k)$.

Рассмотрим ограничения по трению в точках A_1 и A_2. Заметим, что при выполнении первого из неравенств (1.22) будет верно $a_1 \ge 0$, $a_2 \le 0$. Предположим, что при отсутствии силы **F** ограничения по трению выполняются, т.е.

$$\begin{gathered}\frac{N_{1\eta}}{N_{1\zeta}} = a_1\left(1 - \frac{m_1 d}{m_1 d + m_3(d - \eta_3)}\right) \le k,\\ \left|\frac{N_{2\eta}}{N_{2\zeta}}\right| = |a_2|\left(1 - \frac{m_2 d}{m_2 d + m_3\eta_3}\right) \le k.\end{gathered} \tag{1.25}$$

Кроме того, в отсутствие силы **F** должно быть реализовано равенство $N_{1\eta} = -N_{2\eta}$. Поэтому критичной в смысле нарушения ограничения по трению будет та точка опоры A_i, $i = 1, 2$, для которой вертикальная нагрузка окажется меньше.

При действии силы **F** ограничения по трению примут вид

$$\begin{gathered}\frac{N_{1\eta}}{N_{1\zeta}} = a_1\left(1 - \frac{gm_1 d}{gm_1 d + gm_3(d - \eta_3) + M_2}\right) \le k,\\ \left|\frac{N_{2\eta}}{N_{2\zeta}}\right| = |a_2|\left(1 - \frac{gm_2 d}{gm_2 d + gm_3\eta_3 - M_1}\right) \le k.\end{gathered} \tag{1.26}$$

Поскольку $M_1 = F_\zeta\eta$, $M_2 = F_\zeta(\eta - d)$, $0 \le \eta \le d$ и $F_\zeta \le 0$, видим, что при действии силы F_ζ левые части неравенств (1.26) могут только увеличиваться по сравнению с соответствующими левыми частями неравенств (1.25). Вместе с тем если $\eta = 0$ (сила **F** проходит через точку опоры первого цилиндра), то $M_1 = 0$, $M_2 = -dF_\zeta \ge 0$ и возрастает только отношение $N_{1\eta}/N_{1\zeta}$, а величина $|N_{2\eta}/N_{2\zeta}|$ не меняется. С другой стороны, если $\eta = d$, то $M_1 = dF_\zeta \le 0$, $M_2 = 0$ и возрастает только величина $|N_{2\eta}/N_{2\zeta}|$, а отношение $N_{1\eta}/N_{1\zeta}$ не меняется.

За счет выбора координаты η можно регулировать нагрузку на точки A_1 и A_2 с тем, чтобы уравнять глубину погружения реакций в соответствующие конусы трения. Для этого достаточно найти решение уравнения

$$a_1\left(1 - \frac{gm_1 d}{gm_1 d + gm_3(d - \eta_3) + F_\zeta(\eta - d)}\right) = |a_2|\left(1 - \frac{gm_2 d}{gm_2 d + gm_3\eta_3 - F_\zeta\eta}\right) \tag{1.27}$$

относительно η. Уравнение (1.27) сводится к квадратному, и найти его точное решение не составляет трудностей. Однако такое решение, будучи достаточно громоздким, не представляет практического интереса из-за того, что в походных условиях параметры цилиндров будут заранее неизвестны, а определить их затруднительно. Однако ясно, что если возникла необходимость создать меньшую нагрузку на первый цилиндр, то силу **F** надо направлять ближе к точке опоры второго цилиндра, и, наоборот, если мы хотим разгрузить второй цилиндр, то силу **F** надо направлять ближе к точке опоры первого цилиндра.

В случае, когда $r_1 = r_2$, оказывается, что $a_1 = a_2$ и $\eta_3 = d/2$, а уравнение (1.27) принимает вид

$$m_1(gm_3 d - 2F_\zeta\eta) = m_2[gm_3 d + 2F_\zeta(\eta - d)].$$

Отсюда при $F_\zeta \ne 0$ с учетом того, что $0 \le \eta \le d$, получим

$$\eta = d\frac{gm_3(m_1 - m_2) + 2m_2F_\zeta}{2(m_1 + m_2)F_\zeta}, \quad F_\zeta < \min\left\{\frac{gm_3(m_2 - m_1)}{2m_2}, \frac{gm_3(m_1 - m_2)}{2m_1}\right\}. \tag{1.28}$$

Если при этом окажется, что $m_1 = m_2$, то получим $\eta = 0.5$. Отсюда ясно, что если цилиндры, лежащие на опорной плоскости, имеют приблизительно равные радиусы и массы, то для сохране-

ния устойчивости опорной конструкции силу в опорной точке следует направить в середину опорного отрезка $[0, d]$.

В качестве итога проведенного исследования можно сформулировать следующие рекомендации, касающиеся поведения робота при преодолении завала из бревен.

1. Препятствие в виде штабеля из трех бревен устойчиво, если высота препятствия больше половины основания, деленного на коэффициент сухого трения (см. формулу (1.24)).

2. Если в основании штабеля лежат приблизительно одинаковые бревна, то линия действия силы в точке опоры робота о верхнее бревно должна проходить приблизительно через середину основания препятствия. При необходимости уменьшения опасности проскальзывания какого-либо нижнего цилиндра силу, действующую со стороны ног на верхний цилиндр, следует направлять ближе к точке опоры другого нижнего цилиндра.

Дополнительно отметим, что система цилиндров, изображенная на рис. 1, имеет принципиальную возможность катиться без нарушения своей конфигурации вдоль опорной плоскости [7]. Для этого достаточно выбрать

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = -\omega_3 r_3 = v, \tag{1.29}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 – соответственно угловые скорости цилиндров, а v – скорость движения центра масс системы. Если система цилиндров до опоры шагающего аппарата была неподвижной, то при выполнении рассмотренных выше условий равновесия, предполагающих равенство нулю силовых моментов, равновесие при опоре о нее робота не нарушится и система останется неподвижной. Наличие в точках контакта трения качения создает некоторую дополнительную гарантию надежности опоры.

2. Механическая модель системы. Конструкция робота совпадает с принятой в [1]. Твердый корпус робота имеет форму прямоугольного параллелепипеда массой m, a – его боковая сторона (длина), b – передний или задний край (ширина), c – высота параллелепипеда. По бокам корпуса симметрично прикреплены шесть одинаковых инсектоморфных ног. Точки прикрепления ног с каждой стороны корпуса расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Отдельная нога состоит из двух твердых звеньев: бедра длиной l_1, массой m_1 и голени длиной l_2, массой m_2. Допускается касание роботом поверхности опоры и окружающих предметов только стопами, ноги робота не должны иметь взаимных пересечений во все время движения.

Программные значения шарнирных углов генерируются алгоритмом управления с учетом информации о реализовавшейся конфигурации робота при его движении. Реализация программных значений шарнирных углов осуществляется так же, как в [1], с помощью простейшей модели электроприводов с самоиндукцией. Предполагается, что роботу известны: собственное положение относительно препятствий, несущая способность участков поверхности, выбираемых для опоры, шарнирные углы, скорости перемещения как самого робота, так и объектов, выбираемых для опоры.

Цилиндры, образующие препятствия, могут свободно перекатываться по плоскости и друг по другу. На них действует сухое кулоновское трение и трение качения. Если какие-нибудь реакции выходят за ограничивающие их пределы, то возникает соответствующее проскальзывание.

Траектории переносов ног формируются в виде плоских шаговых циклов [1, 12], адаптируемых в зависимости от поверхностей препятствий, скорости движения робота, предписанных следовых точек. Движения ног, соответствующие шаговым циклам, сглаживаются, чтобы сохранить непрерывность как самого движения, так и его скорости [1].

Наличие силового момента в опорных точках не предполагается. Реакции в них должны удовлетворять условию малой деформации опорной поверхности и должны принадлежать конусам кулоновского трения с заданным коэффициентом [1]. Коэффициент трения при контактах стоп ног с цилиндрами предполагается равным единице. Контакты цилиндров друг с другом могут иметь иные характеристики. Программное движение создается в виде последовательности событий, в начале каждого из которых в некоторой абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$ определяются траектории перемещений стоп и точек их крепления к корпусу.

3. Постановки задачи. Решаемая задача формулируется следующим образом. Шестиногий робот идет вдоль прямолинейной трассы по горизонтальной плоскости походкой “трешки” [12]. Поперек трассы под прямым углом к ней расположены три цилиндра разных радиусов, уложенные в виде штабеля. Расстояния между центрами цилиндров удовлетворяют неравенству треугольника. Штабель – устойчивый, так что центр верхнего цилиндра проектируется на горизонтальную плоскость между проекциями центров нижних цилиндров на ту же плоскость.

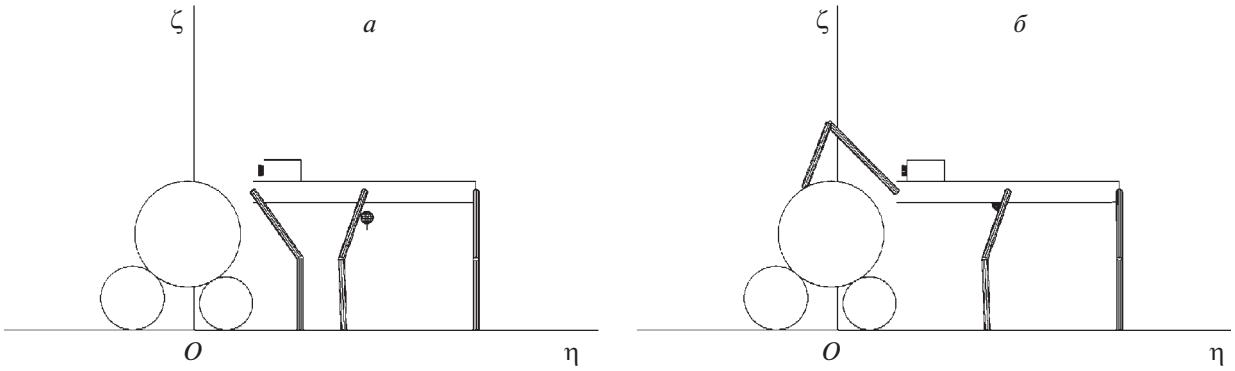

Рис. 2. *а* – этап 1.1, *б* – этап 1.2

Цилиндры могут свободно катиться по опорной плоскости и при возможности друг по другу. Если нижние цилиндры не соприкасаются, то система цилиндров может свободно перемещаться вдоль опорной плоскости как единое целое, когда угловые скорости нижних и верхнего цилиндров удовлетворяют соотношению (1.29). Это обстоятельство несколько затрудняет задачу преодоления препятствия. Если нижние цилиндры соприкасаются, то свободному перемещению системы будет препятствовать трение скольжения в их точке соприкосновения. Высота штабеля удовлетворяет условию (1.24) и превосходит маршевую высоту робота. Робот не видит опорную плоскость за штабелем. Он должен забраться на штабель, не разрушив его, и, если за штабелем имеется достаточно хорошая опора, продолжить движение поперек штабеля, а если за штабелем опора ненадежная, то он должен переместиться вдоль штабеля так, чтобы обойти ненадежный участок, и затем спуститься на опорную плоскость.

Из-за неустойчивости системы в целом последовательность действий робота будет зависеть от высоты преодолеваемого штабеля. В дальнейшем будут рассмотрены два варианта. В первом из них (низкий штабель) высота препятствия приблизительно совпадает с маршевой высотой робота, а во втором (высокий штабель) она в 1.5 раза превышает маршевую высоту робота.

4. Преодоление препятствий. 4.1. Задача “низкий штабель”. Все размеры укажем относительно длины корпуса. Радиусы цилиндров имеют следующие размеры:

$$r_1 = 0.15; \quad r_2 = 0.125; \quad r_3 = 0.25.$$

Расстояние между точками опоры нижних цилиндров равно $d = 0.44$, высота всего препятствия составляет ≈ 0.7, маршевое расстояние от корпуса до опорной поверхности равно 0.65. С такой высоты робот не видит, что находится непосредственно за препятствием. Опишем основные этапы действий робота.

Э т а п 1.1. Приблизившись к препятствию походкой “трешки”, робот перестраивает положение ног для походки “галоп” [12] и готовится к постановке передних ног на верхний цилиндр (рис. 2, *а*). На этом рисунке также отмечены оси $O\eta$, $O\zeta$.

Э т а п 1.2. Передними ногами робот наступает на верхний цилиндр. Точка опоры передних ног расположена за центром верхнего цилиндра (по ходу движения корпуса робота). Такое расположение точки опоры создает силовой момент, направленный против хода часовой стрелки относительно центра верхнего цилиндра, и с учетом соотношения (1.29) придает дополнительную устойчивость системе (рис. 2, *б*).

Э т а п 1.3. Передняя точка корпуса (середина отрезка между точками крепления передних ног) движется по вертикальной окружности с центром на оси верхнего цилиндра и с радиусом $r_3 + \sigma$, средняя точка корпуса совершает вынужденное движение по прямой, составляющей с горизонтальной осью $O\eta$ угол $-\varepsilon$ (рис. 3, *а*). Значения σ и ε выбираются так, чтобы обеспечить последующий поворот корпуса [1, 6].

Э т а п 1.4. Робот переносит задние ноги в точки опоры, расположенные ближе к препятствию. Готовится перенос средних ног (рис. 3, *б*).

Э т а п 1.5. Средние ноги переносятся в точки опоры на цилиндр наименьшего радиуса (рис. 4, *а*). На этом цилиндре возможность выбора точек опоры ограничена, так как над ним нависает

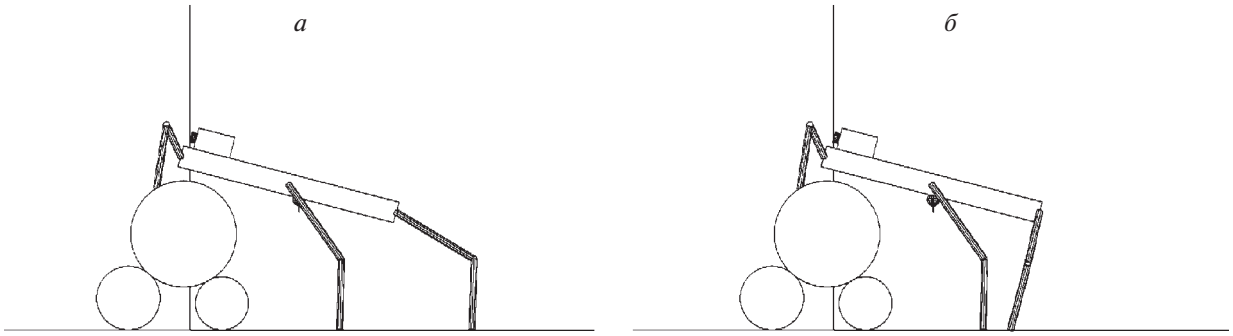

Рис. 3. *а* – этап 1.3, *б* – этап 1.4

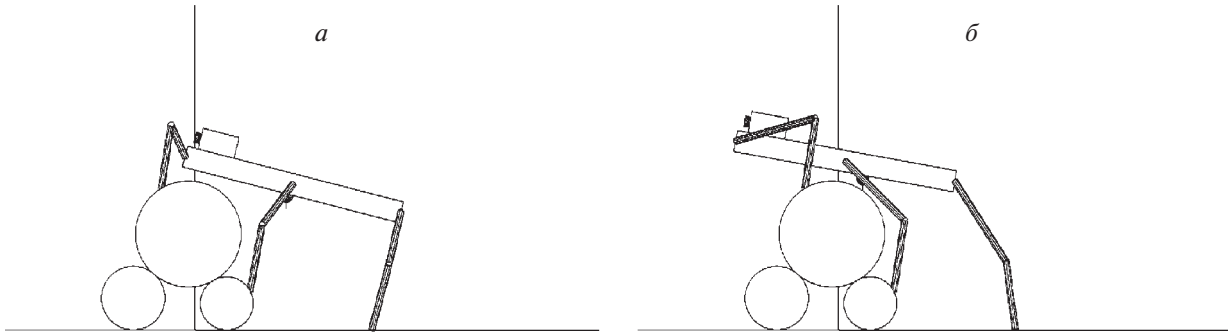

Рис. 4. *а* – этап 1.5, *б* – этап 1.6

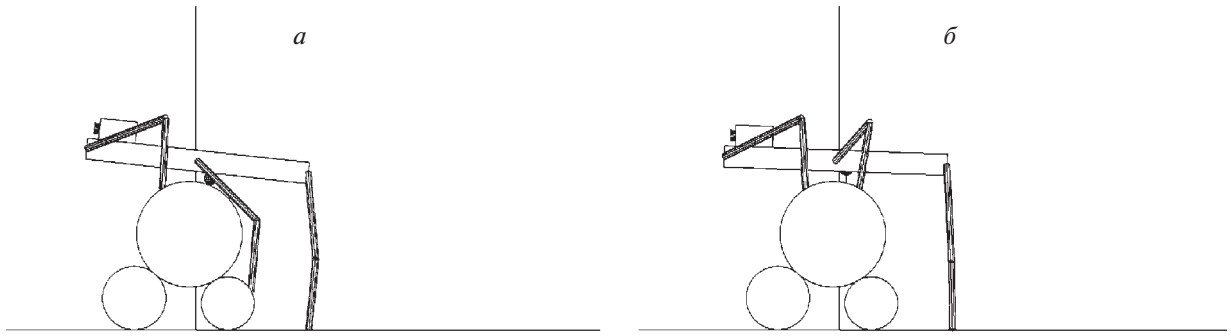

Рис. 5. *а* – этап 1.7, *б* – этап 1.8

верхний цилиндр и создает помеху для дальнейшего движения средних ног из-за предстоящего перемещения корпуса робота.

Э т а п 1.6. Корпус робота перемещается параллельно его боковой стороне, так чтобы центр масс робота проектировался в опорный четырехугольник, образованный точками опоры передних и средних ног. В результате движения корпуса его центр оказывается на расстоянии $r_3 + \sigma$ от верхнего цилиндра, и корпус ориентирован по касательной к нему [1, 6]. Готовится перенос задних ног (рис. 4, *б*).

Э т а п 1.7. Задние ноги переносятся поближе к препятствию, и осуществляется поворот корпуса против хода часовой стрелки (рис. 5, *а*).

Э т а п 1.8. Стопы средних ног переносятся на верхний цилиндр, а корпус продолжает поворачиваться до горизонтального положения. Задние ноги почти предельно распрямлены (рис. 5, *б*).

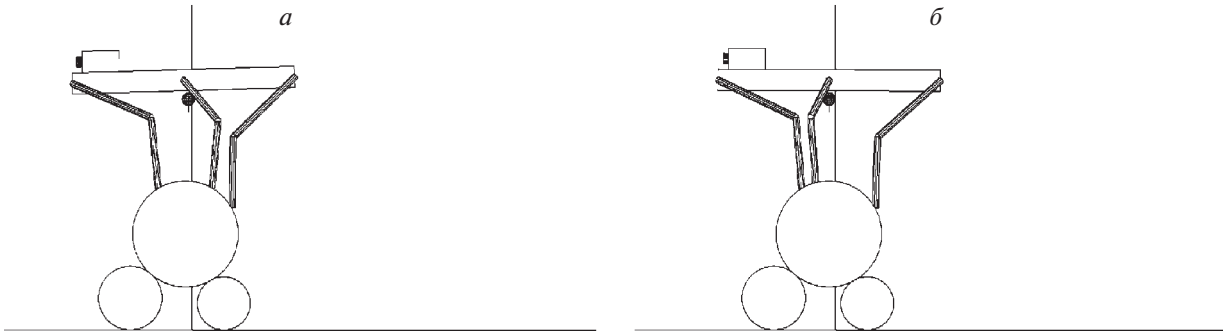

Рис. 6. *а* – этап 1.9, *б* – этап 1.10

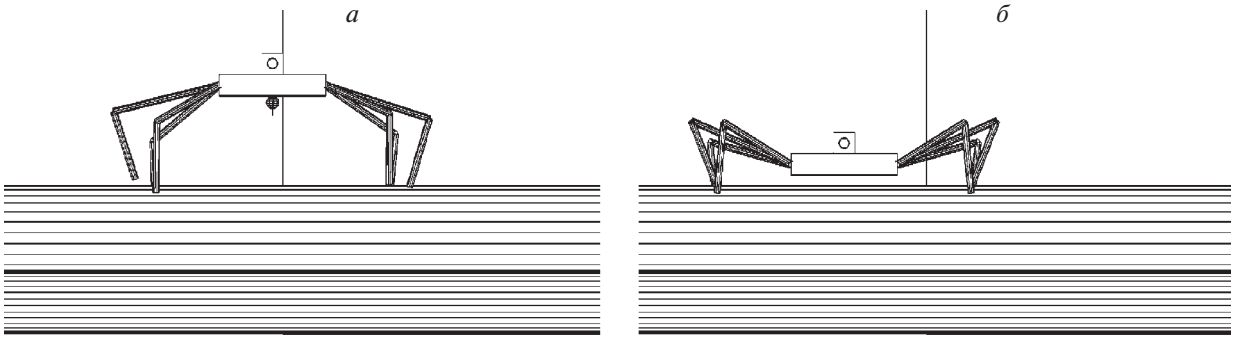

Рис. 7. *а* – этап 1.11, *б* – этап 1.12

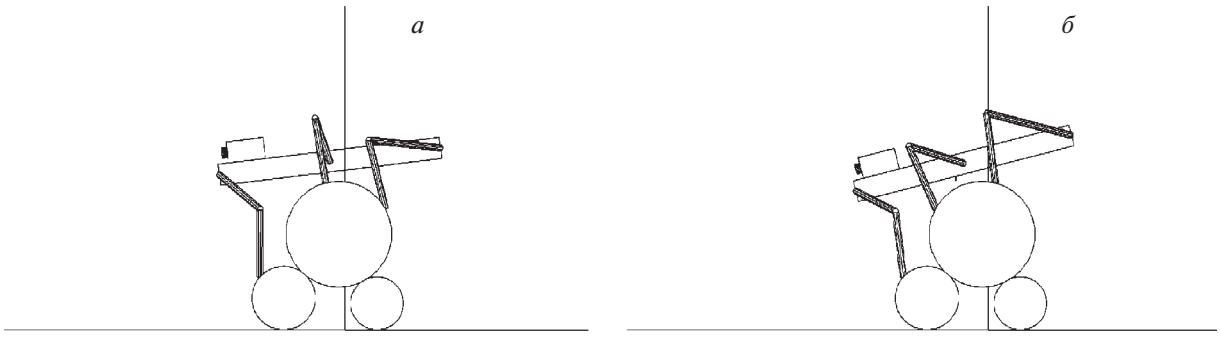

Рис. 8. *а* – этап 1.13, *б* – этап 1.14

Э т а п 1.9. Задние ноги опираются о верхний цилиндр. Корпус поднимается над препятствием и приводится в горизонтальное положение (рис. 6, *а*).

Э т а п 1.10. Средние ноги переносятся так, чтобы центр масс робота проектировался в опорный многоугольник, образованный стопами средних и задних ног (рис. 6, *б*).

Э т а п 1.11. Робот обнаруживает, что в месте предполагаемого спуска со штабеля имеется непроходимая зона. Он начинает движение вдоль штабеля походкой “трешки” (рис. 7, *а*).

Э т а п 1.12. Обход непроходимой зоны закончен. Робот приседает, чтобы начать спуск со штабеля (рис. 7, *б*).

Э т а п 1.13. Робот ставит передние ноги на левый нижний цилиндр, одновременно наклоняя корпус и смещая его в направлении движения (рис. 8, *а*).

Э т а п 1.14. Средние ноги переносятся вперед на верхнем цилиндре с одновременным наклоном и смещением корпуса (рис. 8, *б*).

Рис. 9. *а* – этап 1.15, *б* – этап 1.16

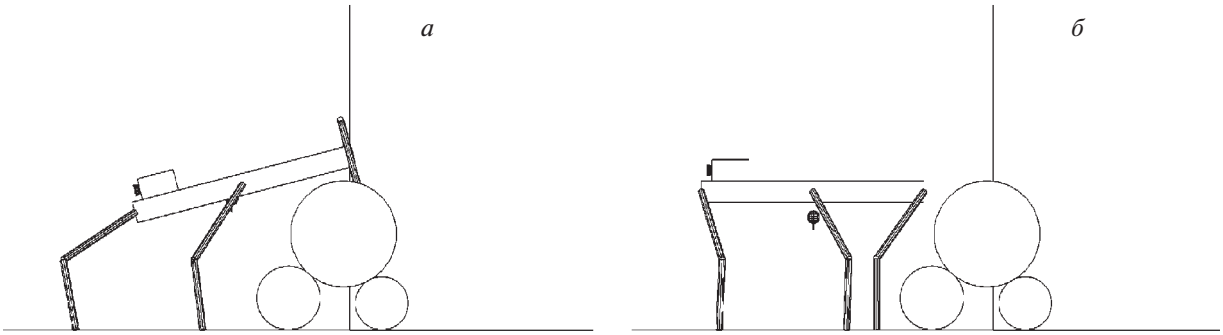

Рис. 10. *а* – этап 1.17, *б* – этап 1.18

Э т а п 1.15. Передние ноги выполняют полный шаг и ставятся на опорную плоскость, а корпус продвигается вперед параллельно своей боковой стороне (рис. 9, *а*).

Э т а п 1.16. Средние ноги переносятся и ставятся на опорную плоскость вблизи точек опоры передних ног (рис. 9, *б*).

Э т а п 1.17. Передние ноги делают шаг вперед, а корпус, продвигаясь вперед, постепенно уменьшает наклон, стремясь к своему нормальному горизонтальному положению (рис. 10, *а*). Движение корпуса формируется аналогично тому, как это делалось на этапе 1.3 с применением необходимых зеркальных коррекций, соответствующих слезанию.

Э т а п 1.18. Задние ноги переносятся с верхнего цилиндра на опорную плоскость. Это завершает процесс преодоления препятствия в виде сравнительно невысокого штабеля.

В процессе компьютерного экспериментирования было принято, что коэффициент трения во всех контактах не превосходит единицы, а трение качения покоя в контактах между цилиндрами, а также между цилиндрами и плоскостью отсутствует. Тем не менее в процессе маневров штабель остается на месте и представляет собой достаточно надежную опору для робота. В естественных условиях трение качения покоя всегда имеется, и оно будет увеличивать способность робота к преодолению препятствий рассмотренного типа.

4.2. З а д а ч а “в ы с о к и й ш т а б е л ь”. Все размеры по-прежнему указываются относительно длины корпуса. Радиусы цилиндров имеют следующие размеры:

$$r_1 = 0.225; \quad r_2 = 0.1875; \quad r_3 = 0.375.$$

Расстояние между точками опоры нижних цилиндров равно $d = 0.66$, высота всего препятствия составляет ≈1.05, а маршевое расстояние от корпуса до опорной поверхности равно 0.65. Опишем основные этапы действий робота.

Э т а п 2.1. Приблизившись к препятствию, робот перестраивает свою конфигурацию в начальную позицию, показанную на рис. 11, *а*. На этом рисунке также отмечены оси $O\eta$, $O\zeta$.

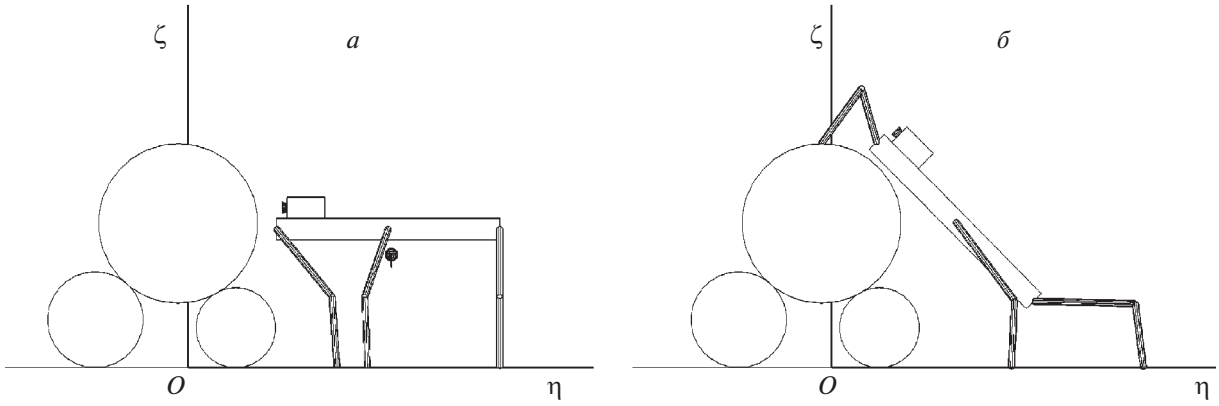

Рис. 11. *а* – этап 2.1, *б* – этап 2.2

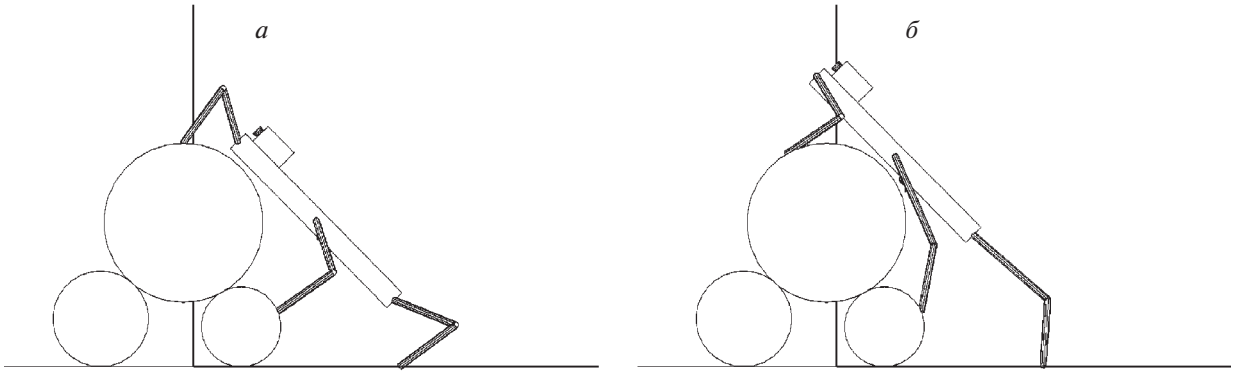

Рис. 12. *а* – этап 2.3, *б* – этап 2.4

Э т а п 2.2. Робот, сохраняя горизонтальное положение корпуса, ставит передние ноги на вершину штабеля. В данном случае это оказывается почти на пределе возможности робота, когда клиренс его корпуса равен маршевой высоте. Для преодоления более высокого штабеля необходимо будет либо приподнимать передний край корпуса робота, либо увеличивать клиренс. Далее корпус робота при опоре на все ноги поворачивается аналогично тому, как это делалось на этапе 1.3 задачи “низкий штабель” (рис. 11, *б*). Передняя точка корпуса движется по вертикальной окружности радиуса $r_3 + \sigma_2$, с центром на оси верхнего цилиндра, средняя точка движется по прямой под углом $-\varepsilon$ к оси $O\eta$. В результате корпус приближается к верхнему цилиндру.

Э т а п 2.3. Робот сначала переставляет задние ноги на опорную плоскость поближе к заднему краю корпуса робота. Затем он переносит средние ноги на нижний второй цилиндр (рис. 12, *а*).

Э т а п 2.4. Передние ноги переставляются на верхнем цилиндре для обеспечения возможности опоры на нем других ног. Корпус продвигается вверх параллельно самому себе так, чтобы центр масс проектировался внутрь опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами (рис. 12, *б*). В результате движения корпуса его центр оказывается на расстоянии $r_3 + \sigma_2$ от верхнего цилиндра, и корпус ориентирован по касательной к нему.

Э т а п 2.5. Задние ноги переставляются ближе к штабелю, чтобы обеспечить надежную опору при подъеме вверх заднего края корпуса робота (рис. 13, *а*).

Э т а п 2.6. Средние ноги переставляются на верхний цилиндр, а корпус продвигается вверх с одновременным поворотом заднего края до полного распрямления задних ног (рис. 13, *б*).

Э т а п 2.7. Задние ноги переставляются на второй нижний цилиндр, затем средние ноги переставляются на верхнем цилиндре поближе к его вершине. Корпус начинает приподниматься над верхним цилиндром и поворачиваться в горизонтальное положение с одновременным переносом задних ног на верхний цилиндр (рис. 14, *а*).

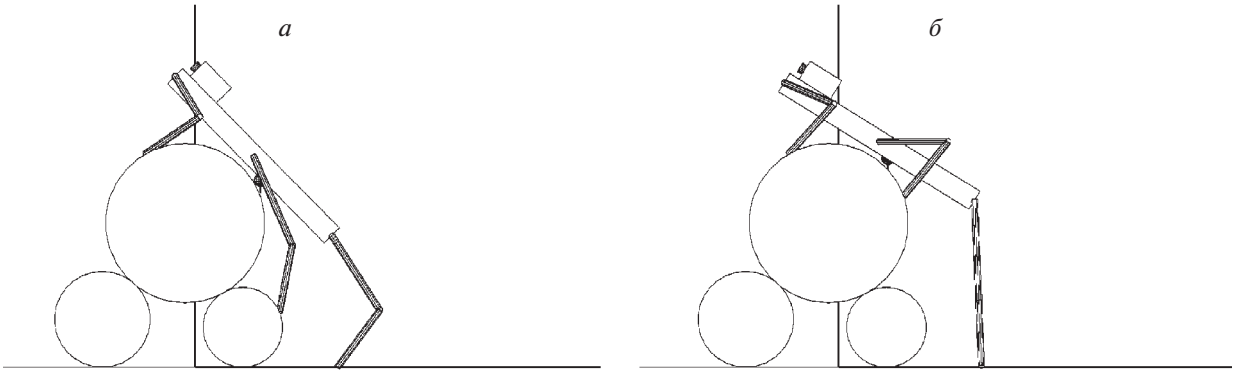

Рис. 13. *а* – этап 2.5, *б* – этап 2.6

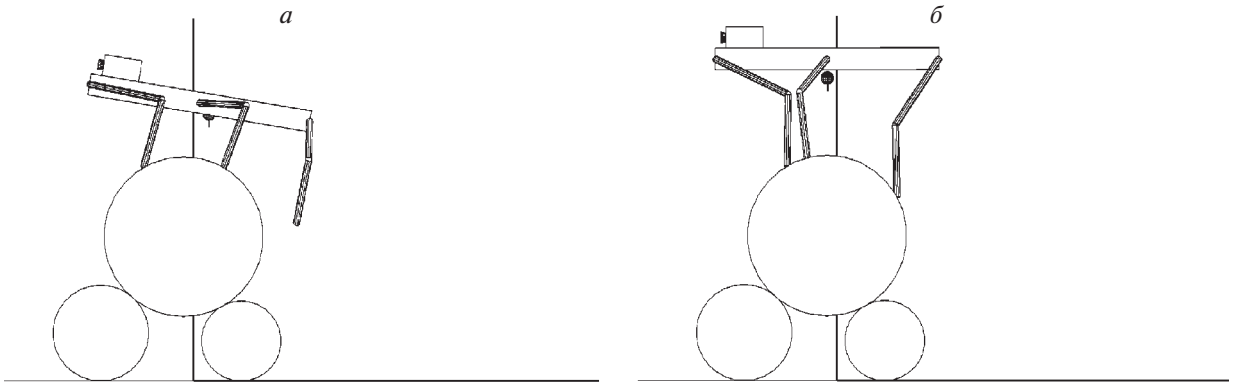

Рис. 14. *а* – этап 2.7, *б* – этап 2.8

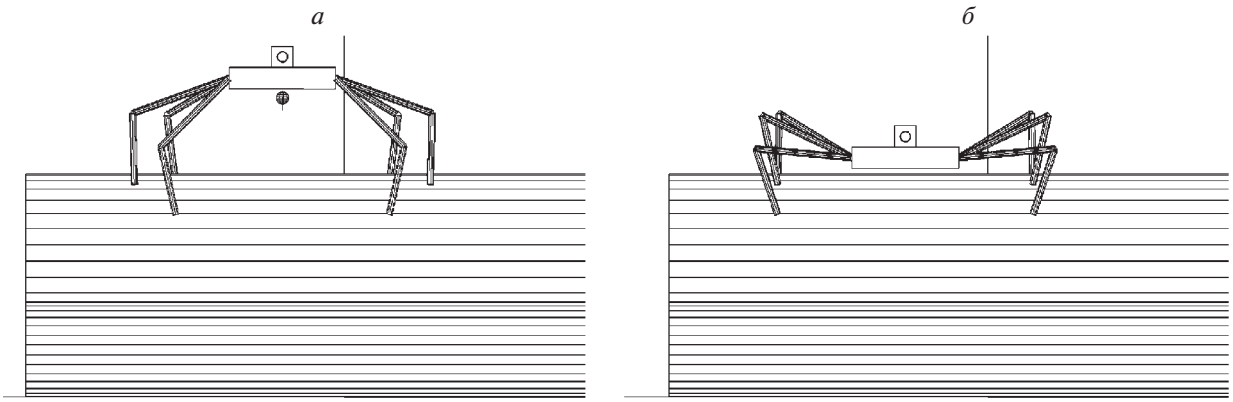

Рис. 15. *а* – этап 2.9, *б* – этап 2.10

Э т а п 2.8. Задние ноги робота поставлены на верхний цилиндр, корпус приведен в горизонтальное положение, центр масс робота расположен над вершиной верхнего цилиндра, а средние ноги перенесены вперед поближе к передним ногам. Залезание робота на штабель закончено. Робот видит перед собой непроходимый участок и начинает подготовку к боковому маневру (рис. 14, *б*), который будет осуществляться походкой “трешки”.

Э т а п 2.9. Робот переместился вбок на достаточное расстояние и начинает подготовку к спуску со штабеля (рис. 15, *а*).

Рис. 16. *а* – этап 2.11, *б* – этап 2.12

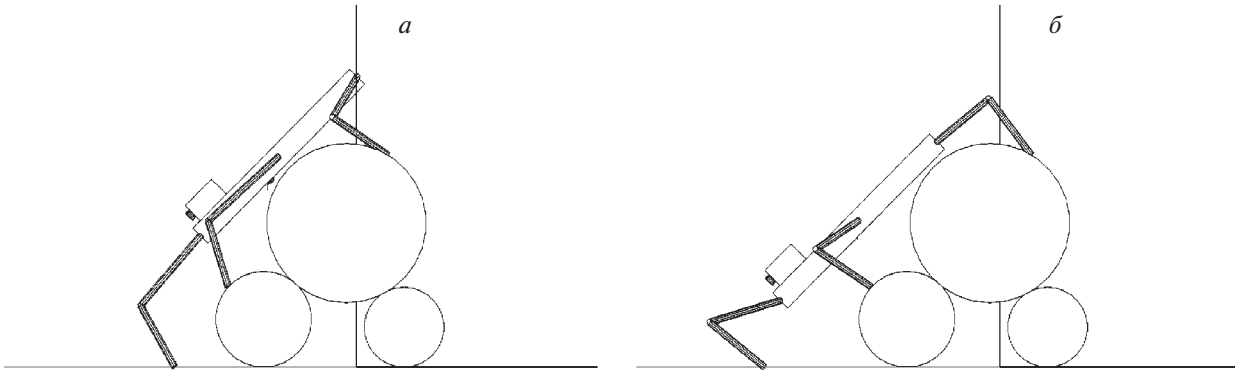

Рис. 17. *а* – этап 2.13, *б* – этап 2.14

Э т а п 2.10. Робот перестраивает свою конфигурацию для продолжения движения походкой “галоп” и приседает, чтобы обеспечить себе возможность дотягивания до необходимых точек опоры (рис. 15, *б*).

Э т а п 2.11. Робот начинает наклонять корпус вперед с одновременным смещением его вдоль поверхности верхнего цилиндра и переносит передние ноги на первый нижний цилиндр. Проекция центра масс робота находится внутри опорного многоугольника средних и задних ног (рис. 16, *а*).

Э т а п 2.12. Робот переносит средние ноги вперед в новые точки опоры на верхнем цилиндре и продолжает наклон корпуса вперед с одновременным смещением его вдоль поверхности верхнего цилиндра до возможности постановки передних ног на опорную плоскость (рис. 16, *б*). Этот маневр необходим из-за того, что на первом нижнем цилиндре не хватает места для точек опоры средних ног.

Э т а п 2.13. Корпус робота вращается вокруг верхнего цилиндра до тех пор, пока задние ноги едва не начнут касаться боковой стороной голени поверхности верхнего цилиндра, затем средние ноги ставятся на правый нижний цилиндр (рис. 17, *а*).

Э т а п 2.14. Передние ноги переносятся на плоскости вперед, затем, используя опору на них, робот продолжает движение корпуса вперед и вниз (рис. 17, *б*).

Э т а п 2.15. Робот переносит задние ноги на поверхность верхнего цилиндра, а затем он переносит средние ноги на опорную плоскость (рис. 18, *а*).

Э т а п 2.16. Робот переносит передние ноги и поворачивает корпус с одновременным перемещением его вперед так, чтобы центр масс робота попал внутрь опорного многоугольника передних и средних ног (рис. 18, *б*). Движение корпуса формируется аналогично тому, как это делалось на этапе 2.2 с применением необходимых зеркальных коррекций, соответствующих слезанию. Это движение можно делать до тех пор, пока задние ноги не касаются каким-либо своим звеном верхнего цилиндра (рис. 19, *а*).

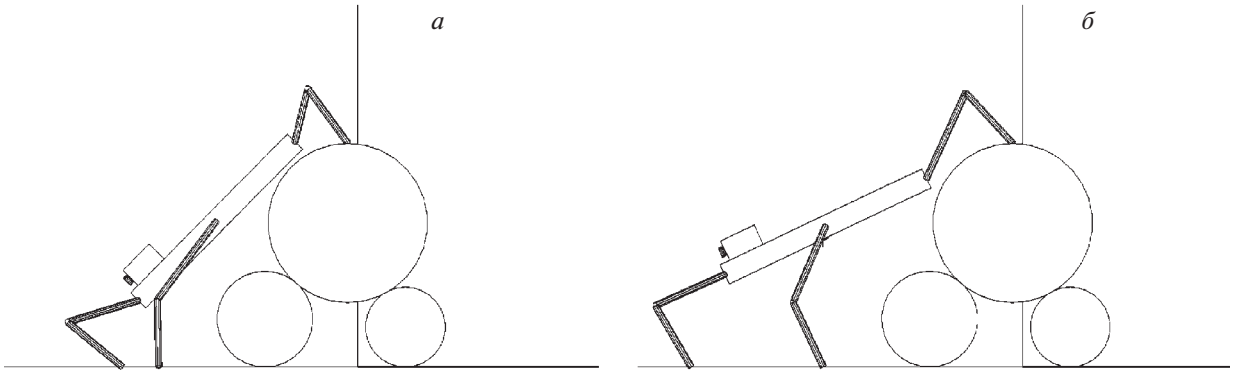

Рис. 18. *а* – этап 2.15, *б* – этап 2.16

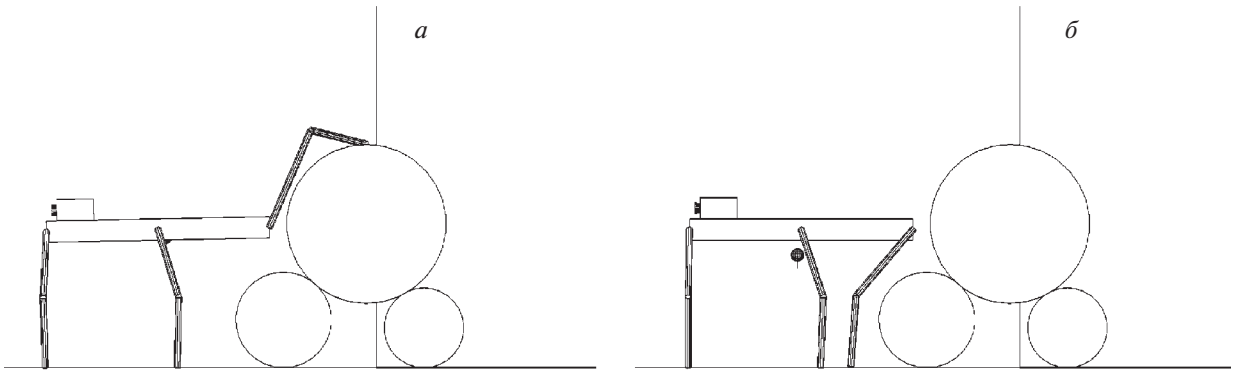

Рис. 19. *а* – этап 2.16, *б* – этап 2.17

Э т а п 2.17. Задние ноги переносятся сразу на опорную плоскость. Преодоление препятствия завершено (рис. 19, *б*).

5. Компьютерное моделирование. Компьютерное моделирование осуществлялось аналогично тому, как это было описано в [1]. Управление роботом, закон взаимодействия корпуса и стоп ног с опорой реализованы в виде DLL-библиотеки, подключенной к программному комплексу “Универсальный механизм” [10]. Тем самым создается виртуальная среда обитания робота. Неподвижная опорная поверхность в ней представлена горизонтальной плоскостью. Опорная плоскость, корпус и ноги робота взаимодействуют друг с другом, согласно модели трения, основанной на вязкоупругом взаимодействии тел в точках контакта. Управление движением реализуется посредством компьютерного моделирования работы электромеханических приводов шарнирных углов. Выполнение требуемого движения робота осуществляется, как и в реальности, лишь в результате подачи значения управляющего электрического напряжения на модели электромеханических приводов. Соотношение размеров корпуса и звеньев ног имеет вид

$$a : b : c : l_1 : l_2 = 1 : 0.5 : 0.1 : 0.5 : 0.33.$$

Массы корпуса робота и звеньев ног относятся как

$$m : m_1 : m_2 = 10 : 0.5 : 0.5.$$

Представление о движении корпуса робота и его ног возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений полной трехмерной динамики робота и элементов окружающей среды. Поскольку в точках контакта объектов предполагается силовое взаимодействие, соответствующая механическая система имеет 42 степени свободы. Уравнения динамики синтезируются автоматически [10]. Результаты компьютерного моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов.

На рис. 20, 21 представлены графики изменения по времени вертикальных координат нечетных стоп ζ_1, ζ_3, ζ_5, а также передней и задней точек корпуса ζ_f, ζ_r для задач из разд. 4.1 и 4.2. На рис. 21 дополнительно нанесен модуль линейной скорости верхнего цилиндра v_3. Все величины даны в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$. По графикам можно подробно отследить все

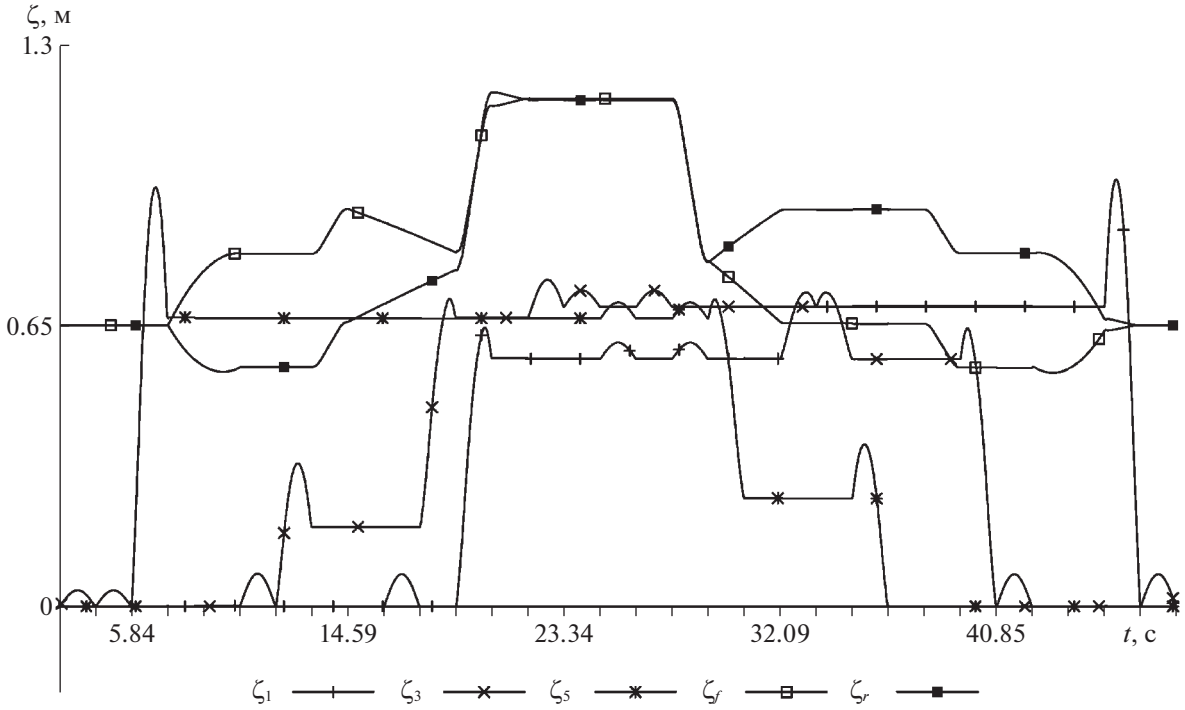

Рис. 20. Зависимость основных параметров от времени (низкий штабель)

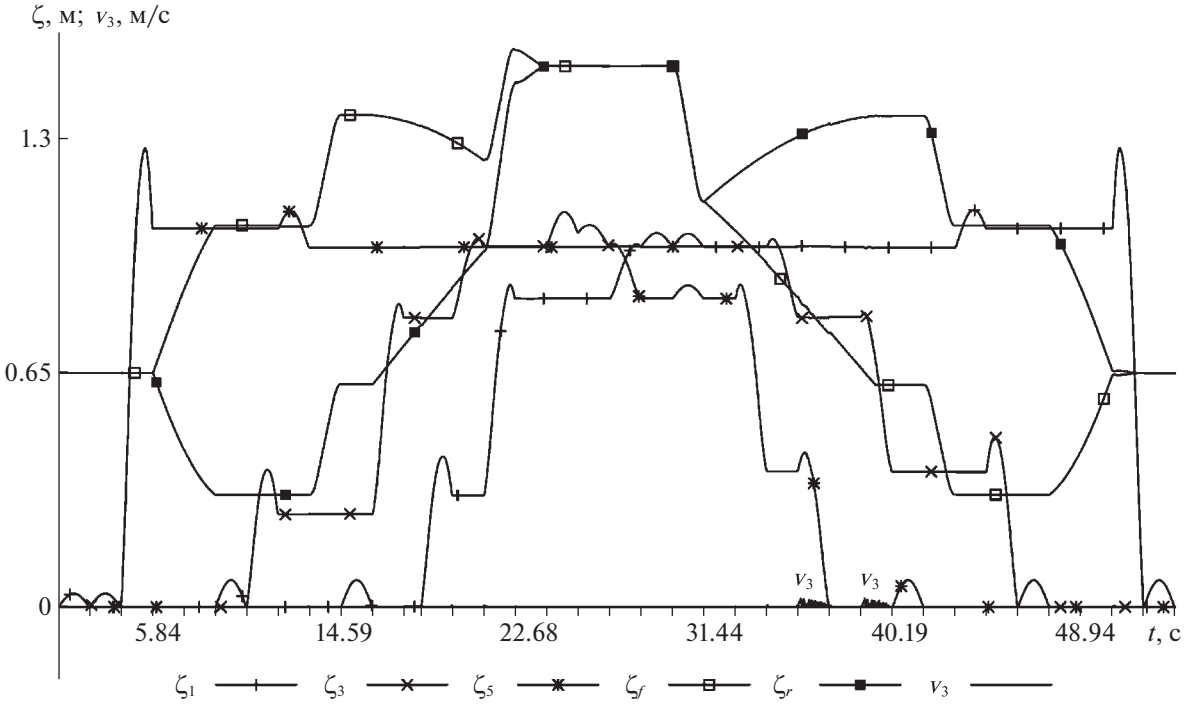

Рис. 21. Зависимость основных параметров от времени (высокий штабель)

подробности выполнения вышеописанных этапов выполнения задач. Напомним, что уровень 0.65 м соответствует маршевой высоте корпуса над опорной плоскостью, уровень 0.7 м – высоте низкого штабеля, а уровень 1.05 м – высоте высокого штабеля. В середине процесса преодоления препятствия видны характерные для походки “трешки” волнообразные зависимости высот стоп от времени.

На рис. 21 видны небольшие колебания скорости v_3 между отметками времени 31.44 и 40.19. Максимальное значение v_3 на графике составляет ≈ 0.023 м/с. Небольшие колебания не мешали движению, т.е. подсистема отслеживания реальных положений стоп робота справлялась с такими помехами.

Управляющие шарнирные моменты были ограничены по модулю величинами 30 и 60 Н·м для задач из разд. 4.1 и 4.2 соответственно.

Заключение. Исследована новая задача о преодолении инсектоморфным роботом препятствий в виде штабеля из трех параллельных бревен разного радиуса. Установлена принципиальная возможность преодоления препятствий указанного типа, имеющих высоту, существенно превосходящую характерные размеры робота.

Аналитически получены условия устойчивости штабеля при действии на него ограниченных сил сухого трения и трения качения, а также активной равнодействующей сил, возникающих из-за опоры робота на штабель. Сформулированы простые правила, руководствуясь которыми робот может качественно определять возможность опоры о препятствие без его разрушения, а также выбирать надежные точки опоры на препятствии и направления действия сил в точках опоры для сохранения равновесия системы.

Конструктивно построены алгоритмы залезания робота на штабели разной высоты. Специфика алгоритмов существенно зависит от высоты препятствия из-за возникающих потребностей дотягивания до надежных точек опоры, тесноты областей, пригодных для опоры, и других геометрических ограничений.

Предложенные алгоритмы формирования движения робота при преодолении указанных препятствий были отработаны средствами компьютерного моделирования в программной среде комплекса “Универсальный механизм”. Этот комплекс автоматически реализует расчет взаимодействия трехмерной полной динамической модели робота и окружающих его объектов с учетом сил кулоновского трения, трения качения и моделей электромеханических приводов в шарнирах робота. Показано, что предложенные программные движения выполнимы при коэффициенте трения, не превышающем единицы. Возникающие в шарнирных углах переходные процессы не разрушают требуемое программное движение робота на всех этапах движения системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8, https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev.
2. Завал. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Завал (дата обращения: 09.03.2020).
3. *Сырых Н.В., Чащухин В.Г.* Роботы вертикального перемещения с контактными устройствами но основе постоянных магнитов: конструкции и принципы управления контактными устройствами // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 5. С. 163–173. https://doi.org/10.1134/S0002338819050135
4. *Градецкий В.Г., Князьков М.М., Кравчук Л.Н., Крюкова А.А., Семенов Е.А., Суханов А.Н., Чащухин В.Г.* Управляемое формирование вакуума в устройствах сцепления с поверхностями при движении мобильных роботов с аэродинамическим прижимом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 7. С. 447–452. https://doi.org/10.17587/mau.18.447-452
5. *Longo D., Muscato G.* Adhesion Techniques for Climbing Robots: State of the Art and Experimental Considerations // Proc. 11-th Internat. Conf. CLAWAR-2008. Coimbra, Portugal: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2008. P. 6–28.
6. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление инсектоморфным роботом завалов в виде изолированных цилиндров // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 2. С. 156–176. https://doi.org/10.31857/S0002338821020050
7. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
8. *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* Nonholonomic Motion of Rigid Mechanical Systems from a DAE Viewpoint. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. 140 p.
9. *Кулешов А.С., Рыбин В.В.* Об управляемости системы А.Ю. Ишлинского // Вестн. Санкт-Петербургск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59). Вып. 2. С. 98–103.
10. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: http://www.umlab.ru (дата обращения: 10.03.2020).
11. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление шестиногим роботом штабеля из шероховатых цилиндров: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 55. 28 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-55
12. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Физматлит, 1984. 312 с.

EDN: EPQWRR
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 137–161

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 531.8

ИСКУССТВЕННЫЕ МЫШЦЫ (ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ)[1]

© 2022 г. А. П. Алисейчик[a], Д. А. Грибков[a], А. Р. Ефимов[b], И. А. Орлов[a,*], В. Е. Павловский[a], А. В. Подопросветов[a], И. В. Хайдукова[a]

[a] *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
[b] *ПАО Сбербанк, Москва, Россия*
**e-mail: i.orlov@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 12.05.2021 г.
После доработки 22.07.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Представлен обзор текущего состояния разработок в области систем и приводов для управления мягкими экзоскелетами. Предметом изучения являются наиболее важные прототипы податливых приводов. Рассматриваются применения данных приводов в медицине и промышленности. Приведены классификация и рекомендации по построению подобных аппаратов на основе анализа эффективности существующих макетов сторонними исследовательскими группами.

DOI: 10.31857/S0002338822010024

Словарь терминов:

AJB – active joint brace (тяга активного шарнира),
ASO – active soft orthotic (активное мягкое ортопедическое приспособление),
APAM – anisotropic PAM (анизотропный пневмомускул),
BLDC – brushless direct current (DC) motor (бесколлекторные постоянного тока),
BLAC – brushless alternating current (AC) motor (бесколлекторные переменного тока),
CP – conducting polymer (проводящий полимер),
CNT – carbon nanotube (углеродные нанотрубки),
DEA – dielectric elastomer actuators (диэлектрические эластомерные приводы),
DMSP/MAS – наименование серий пневмомускулов компании Festo,
EAP – electroactive polymer (электроактивные полимеры),
EA – elastomer actuator (упругий привод),
ECF – electro-conjugate fluid (электроконъюгированная жидкость),
EEAP – электронные EAP,
FEA – fluidic elastomer actuator (жидкостный упругий привод),
FDM – fused deposition modeling (моделирование методом послойного наплавления),
PAM – pneumatic artificial muscles (пневмомускул),
PPAM – pleated PAM (гофрированный пневмомускул),
VIA – variable Impedance actuators (привод с переменным сопротивлением),
SEA – series elastic actuators (механизмы, использующие последовательные пружины),
SPEA – series–parallel elastic actuation (последовательно-параллельный упругий привод),
SMA – shape-memory alloy (эффект памяти формы),
MACCEPA – mechanically adjustable compliance and controllable equilibrium position actuator (механизмы с переменным механическим сопротивлением),
HAM – hydraulic McKibben artificial muscles (гидравлический искусственный мускул),
HAL – hybrid assistive limb (экзоскелет компании Cyberdyne),

[1] Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект № 18-71-10112).

IEAP – ionic EAP (ионные электроактивные полимеры),

искусственные сухожилия – нерастяжимые мягкие элементы,

искусственная мышечная ткань – engineered muscle tissue actuators,

мышцы антагонисты – мышцы, которые осуществляют движение в противоположных направлениях.

Введение. В современных системах управления носимыми роботизированными устройствами, в частности экзоскелетами и ортезами, используются двигатели, редукторы, цилиндры, насосы, клапаны и компрессоры. Они служат для приведения в действие частей конструкций. Активные экзоскелеты содержат приводы (actuators – исполнительные или управляющие механизмы), преобразовывающие энергию в механическое движение и приводящие в действие суставы экзоскелета. Пассивные экзоскелеты вместо этого применяют материалы, способные запасать и использовать энергию движений [1].

Большинство типов приводов, используемых в робототехнике, нельзя применять в экзоскелетах. Причиной этому является то, что для этого требуются высокие крутящие моменты с более высокими скоростями, чем те, которые могут обеспечить большинство приводов. Также эти компоненты предназначены для промышленного применения, а не для ношения их на теле, так как обычно они требуют создания тяжелых, жестких и громоздких конструкций, тогда как эффективный экзоскелет должен быть легким и носимым. К тому же повышенная сложность конструкции промышленных приводов может существенно увеличить стоимость экзоскелета.

Таким образом, только часть используемых в промышленности управляющих механизмов может быть применена для разработки экзоскелетов. Основными кандидатами среди них являются электрические, пневматические, гидравлические и последовательные упругие механизмы SEA [2]. Детальная классификация искусственных мышц, применяемых в экзоскелетах, состоит из следующих типов.

Активные:

1) пневматические:

пневматические мышцы (PAM),

мышцы МакКиббена,

гофрированные мышцы МакКиббена (PPAM),

изгибные пневматические мышцы;

2) жидкостные эластомерные управляющие механизмы (FEA):

гидравлические мышцы МакКиббена,

pH-чувствительные мышцы МакКиббена,

гидравлические;

3) электродвигатели:

коллекторные двигатели постоянного тока,

бесколлекторные двигатели постоянного тока,

бесколлекторные двигатели переменного тока,

ультразвуковые двигатели,

сервоприводы,

пьезоэлектрические двигатели;

4) гидравлические цилиндры;

5) пневматические цилиндры;

6) тросовые приводы;

7) механизмы с переменным сопротивлением (VIA):

механизмы с регулированием податливости (MACCEPA),

механизмы, использующие последовательные пружины (SEA).

Пассивные:

1) пружины;

2) упругие структуры;

3) твердотельные элементы;

4) эластичные тросы;

5) газлифты;

6) SMA.

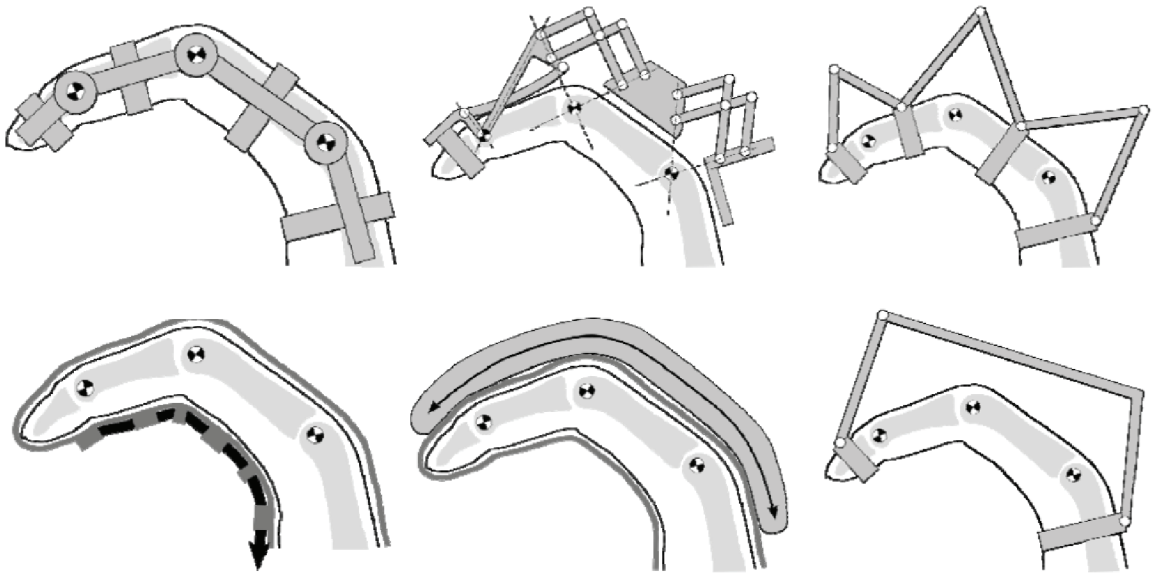

Рис. 1. Варианты конструкции, предназначенные для согласования центров вращения звеньев с центром вращения суставов или устранения необходимости точного выравнивания

Расположение привода непосредственно на месте управления суставом (direct drive), несомненно, удобнее, так как это позволяет упрощать конструкцию и уменьшать общий размер устройства [3]. Однако иметь привод, например на запястье, было бы неудобно, так как это увеличивает момент в локте и плече. Таким образом, при отсутствии непосредственного соединения привода с подвижной частью экзоскелета, как это реализовано, например, в мышцах МакКиббена, используются механизмы передачи усилия (power transmission). Данные механизмы могут иметь следующие варианты реализации [4, 5]:

1) зубчатые передачи (gear drives);
2) тросовые передачи (cable drives);
3) мальтийский механизм (geneva drive);
4) звенья (linkage mechanism);
5) прямое соединение (direct drive);
6) растяжение “искусственных сухожилий” (tendon drive);
7) муфты;
8) гидравлическая жидкость (hydraulic fluid/oil);
9) воздух (pneumatic fluid);
10) винтовые передачи;
11) цепные передачи;
12) ременные передачи.

Наиболее используемыми механизмами передачи являются тросы, механические звенья и зубчатые передачи [6].

Одной из важных проблем, возникающих при передаче движения к определенному суставу человека, выступает выравнивание центров вращения звеньев экзоскелета относительно центров вращения суставов. Экзоскелет должен обладать возможностью настройки конструкции таким образом, чтобы решить эту проблему для разных пользователей, у которых различаются длины конечностей и размеры суставов. На рис. 1 на примере экзоскелетов кисти представлены возможные варианты конструкции, предназначенные для согласования центров вращения звеньев с центром вращения суставов или устранения необходимости точного выравнивания [6].

Управление, наиболее часто встречающееся в современных экзоскелетах, основывается на электромагнитных двигателях и подаче жидкости или газа в камерах давления изменяемого объема. Данное изменение управляется электрически, гидравлическим насосом или пневматическим компрессором [5, 7, 8]. Наиболее используемым типом являются мышцы с электродвига-

телями. На примере обзора экзоскелетов 2011 г. 65% экзоскелетов включало электродвигатели, 27% управлялись пневматическими мышцами, а оставшиеся 8% имели пневматические и другие системы управления [9]. Обзор 2016 г. показал схожие данные с применением электродвигателей в 67% случаев, гидравлических насосов – в 12% и пневматических компрессоров – в 21% [5]. По данным работы 2017 г., электродвигатели применяются в 72% активных экзоскелетов [10].

Экзоскелеты можно разделить как по активности мышц, так и по их жесткости. Конструкции, использующие мягкие искусственные мышцы, более характерны мягким экзоскелетам. Корпус мягких роботов и экзоскелетов изготавливается из мягких или растяжимых материалов. Эти роботы имеют непрерывно деформируемую структуру с мышечно-подобным приводом, которая имитирует биологические системы и дает относительно большое число степеней свободы по сравнению с их твердотельными аналогами. Соответственно жесткие искусственные мышцы состоят в основном из жестких элементов. В зависимости от конструкции и применяемых механизмов передачи усилия один тип искусственных мышц может относиться как к мягкому, так и к жесткому типу.

1. Мягкие типы искусственных мышц. Отличительной особенностью мягких мышц является то, что по своей податливости они схожи с биологическими тканями человека, что повышает удобство их использования и снижает риск травмы такими элементами.

Достоинства мягких типов искусственных мышц:

безопасное взаимодействие с человеком и окружающей средой;

простая структура мышц;

простой алгоритм управления;

гибкая форма мышц, которая может давать больше степеней свободы и позволяет лучше адаптироваться к анатомии.

Недостатком мягких искусственных мышц выступает невозможность создания большой силы [7]. К мягким искусственным мышцам относятся:

упругие структуры;

PAM;

FEA;

SMA;

тросовые приводы.

Основные варианты конструкции мягких мышц, представленные на рис. 2, делятся на:

изгиб в результате продольного натяжения (например, троса или сплава с памятью формы);

сжатие из-за поперечно расположенных активных элементов;

сжатие в результате раздутия пневматической трубки в плетеной оболочке;

изгиб пневматической или гидравлической сети каналов в эластомере вокруг более жесткого материала (pneu-nets) [11].

1.1. Упругие структуры. 1.1.1. Твердотельные элементы. Наиболее простым решением в качестве поддерживающих и управляющих конструкций экзоскелета являются упругие жесткие элементы, восстанавливающие свою форму после деформации без дополнительных воздействий. При полной автономности экзоскелета основной недостаток – его малая эффективность. Данный тип конструкции широко применяется в недорогих промышленных экзоскелетах [12], а также хорошо подходит для реабилитации детей с целью компенсации гравитации [13] (рис. 3). Подобные экзоскелеты могут быть как полностью жесткими, так и мягкими.

1.1.2. Эластичные тросы. Другой разновидностью простого дизайна является использование эластичных тросов и лент. Такие пассивные экзоскелеты создают меньшую нагрузку на конечности и подходят для реабилитации после травм и инсультов. Данный тип экзоскелетов удобен для самостоятельного применениия, а также имеет низкую стоимость. Примером подобных систем может служить отечественный экзоскелет нижних конечностей лечебнный костюм (ЛК) “Регент” [14] (рис. 4).

1.2. PAM. Приводы, основанные на PAM, могут генерировать силу только за счет сокращения, поэтому для реализации каждой степени свободы часто используются пары PAM для создания двунаправленного движения аналогично мышцам-антагонистам.

1.2.1. Мышцы МакКиббена. Наиболее распространенной моделью PAM являются мышцы МакКиббена, предложенные в 50-х годах. С этого момента разные компании, такие, как Bridgestone Co., Shadow Robot Company, Merlin Systems Corporation, Festo, выпускали,

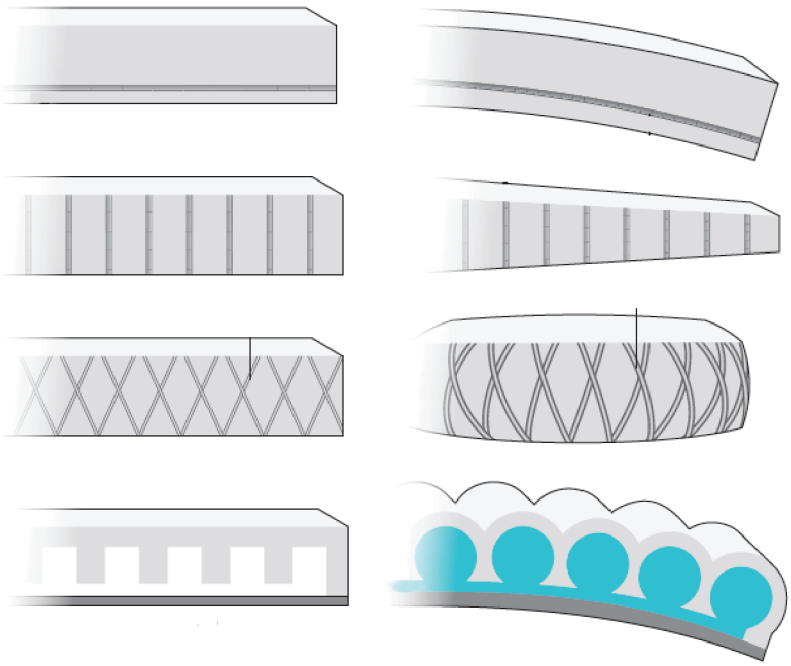

Рис. 2. Варианты конструкции мягких мышц

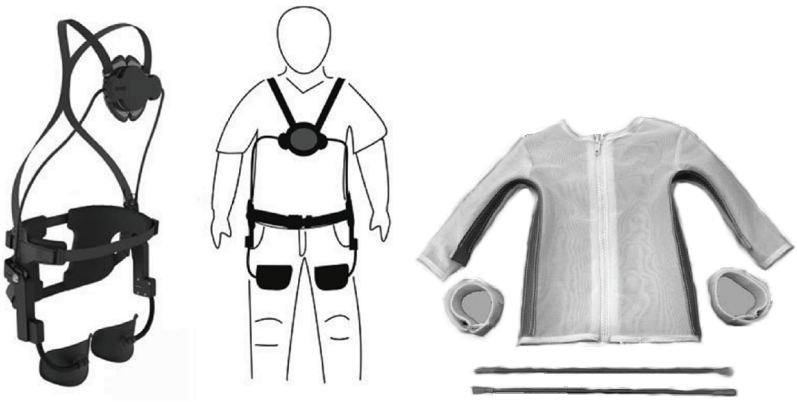

Рис. 3. Экзоскелет Laevo 2.5 (слева), пассивный детский экзоскелет для компенсации гравитации Playskin lift (справа)

совершенствовали и патентовали различные варианты мышц МакКиббена. Единый принцип действия этого типа мышц представлен на рис. 5. Подобный тип мышц переводит объемное увеличение внутреннего пространства в продольное сжатие с силой, значительно превышающей эквивалентную гидравлическую или пневматическую систему [16].

В отличие от других пневматических приводов, таких, как различные поршневые устройства и пневмоцилиндры, работа пневматической мышцы в гораздо меньшей степени зависит от внешней температуры, влажности и прочих факторов. В случае, когда концы герметичны, применение мышцы возможно даже в воде и на глубине. Через компрессор внутрь мышцы подается обычный воздух, без специальной фильтрации и впрыскивания масляных примесей, поэтому нет необходимости в проведении специального технического обслуживания, а также при работе не будет возникать явление застоя.

К левому, закрепленному концу мышцы подведен шланг от компрессора. Рассмотрим модель мышцы, изображенной на рис. 6. Далее обозначим: x_0 – начальная длина; y_0 – начальный

Рис. 4. Пассивный экзоскелет нижних конечностей ЛК “Регент”

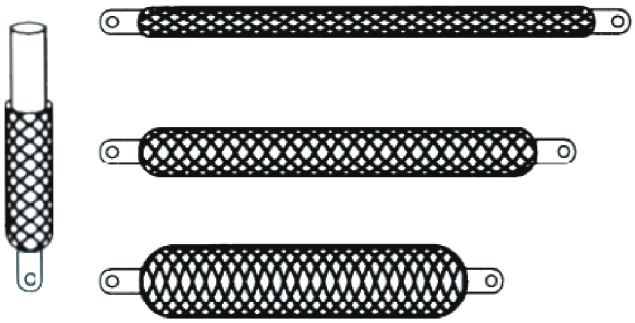

Рис. 5. Пневматические мышцы МакКиббена [15]

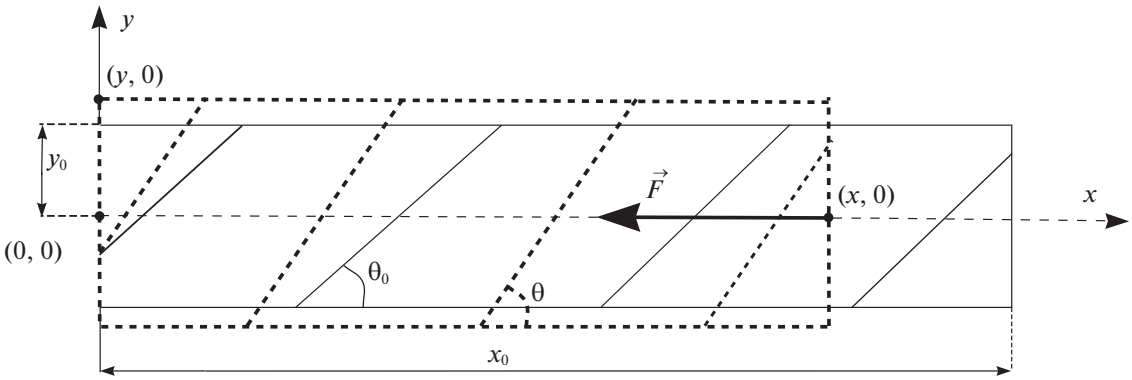

Рис. 6. Пневматические мышцы МакКиббена (модель)

диаметр; d_0 – диаметр шланга (входного отверстия); Q – расход (характеристика компрессора); θ – угол намотки нити относительно горизонтальной оси; p – разница созданного в мышце давления и атмосферного из предположения, что рассматриваются только два состояния: полностью напряженной и полностью расслабленной мышц; $\vec{F}$ – тяговое усилие, создаваемое на конце мышцы; $d\vec{r}_x$ – вектор перемещения крайней правой точки; F и dx – проекции векторов силы и перемещения на ось Ox.

Допущения: оболочка мышцы тонкая, мышца в процессе сокращения остается цилиндрической, газ считается идеальным.

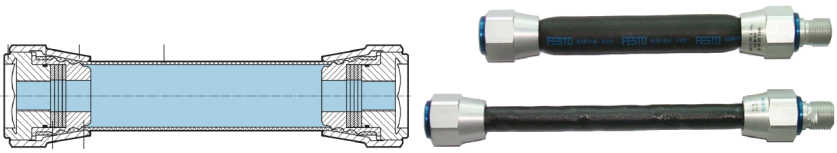

Рис. 7. Пневмомускул MAS компании Festo

Статическая задача: работа идеального газа будет равна $A = pdV$. В то же время эта работа преобразуется в работу по перемещению правого конца мышцы: $pdV = (\vec{F}, d\vec{r}_x) = Fdx$.

Приравнивая расход компрессора к изменению объема мышцы [17], добавив ограничения на движение, получим систему, описывающую кинематику правого свободного конца:

$$\begin{cases} x^3(t) - b^2x(t) + \dfrac{b^2}{\pi y_0^2}\left(1 - \left(\dfrac{x_0}{b}\right)^2\right)(Qt + \pi y_0^2 x_0) = 0, \\ y(t) = \dfrac{y_0}{1 - \left(\dfrac{x_0}{b}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\dfrac{x(t)}{b}\right)^2}, \\ \dfrac{b}{\sqrt{3}} < x(t) \le x_0, \\ y_0 \le y(t) < \dfrac{y_0 b\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\sqrt{b^2 - x_0^2}}. \end{cases}$$

Тогда из закона изменения энергии следует движение точки массы m, закрепленной на правом конце:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - \dfrac{3p\pi y_0^2}{mb^2\left(1 - \left(\dfrac{x_0}{b}\right)^2\right)}x(t)^2 = \dfrac{p\pi y_0^2}{m\left(1 - \left(\dfrac{x_0}{b}\right)^2\right)}, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

Так, компания Festo выпускает наиболее распространенный аналог мышцы МакКиббена – “Пневмомускул DMSP/MAS” (fluidic muscle DMSP/MAS), состоящий из резинового шланга, армированного арамидным волокном изнутри (рис. 7) [18]. Аналоги данной конструкции часто используются в разработке экзоскелетов [19, 20].

Одним из наиболее известных экзоскелетов, применявших мышцы МакКиббена, является мягкий экзоскелет нижних конечностей Soft exosuits, созданный в Гарвардском университете. Предшествующий прототип конструкции использовал мышцы МакКиббена (рис. 8), однако они требовали мощный компрессор и были более сложными в управлении. Поэтому в последнем прототипе они были заменены на редуктор с бесколлекторными электродвигателями постоянного тока Maxon EC 4pole, натягивающими боуден-тросы (рис. 8). Благодаря этому была реализована автономность экзоскелета [21, 22].

1.2.2. P P A M. PAM, также называемые PMA (pneumatic muscle actuator) также разрабатывались в брюссельском университете Vrije Universiteit с 1995 г. [23]. Первое поколение гофрированных искусственных мышц – PPAM 1.0 – было способно генерировать продольную силу до 5 кН при массе в 100 г. Для решения проблемы утечек и малого срока службы был предложен второй прототип – PPAM 2.0 – с измененным составом мембраны (рис. 9). Третий вариант PPAM 3.0 отличается более простым процессом изготовления, включающим аддитивные технологии FDM, повышенной надежностью, широким диапазоном размеров (от 4 до 50 см) и меньшей массой.

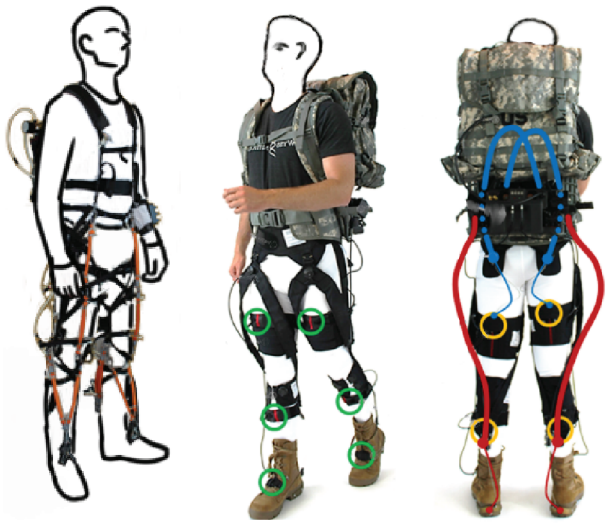

Рис. 8. Предшествующий пневматический прототип экзоскелета Soft exosuits (слева), современный вариант автономного экзоскелета Soft exosuits (справа)

Рис. 9. Второй прототип PPAM (слева), третий прототип PPAM (справа)

Сравнение PPAM с пневмомускулом от Festo в 2012 г. показало, что PPAM имеет схожий диапазон генерирования силы, проигрывает Festo по толщине мышцы, но выигрывает по массе, что обеспечивает лучшие соотношения силы к массе и энергии к массе [24].

1.2.3. Гидравлические мышцы МакКиббена. Гидравлические мышцы МакКиббена (HAM) являются новым поколением, в котором воздух заменен на масло или воду. Достоинство данного типа мышц состоит в возможности использования меньших насосов по сравнению с обычными мышцами МакКиббена. Сила, генерируемая механизмом, зависит от его размера. Однако следует отметить, что время срабатывания гидравлического типа мышц больше, чем пневматического [15].

1.2.4. pH-чувствительные мышцы МакКиббена. Другая вариация мышц МакКиббена – замена сжатого воздуха на pH-чувствительные мышцы МакКиббена (pH-activated McKibben artificial muscle), в состав которых входят pH-регулируемые сферы гидрогеля. Для увеличения и уменьшения объема этих сфер применялся поток растворов оснований и кислот. Недостатками являются медленное время срабатывания, малая деформация мышцы и необходимость дополнительных резервуаров и конструкций для создания потока раствора [15].

1.2.5. Изгибные пневматические мышцы. Широко используемым типом пневматических мышц служат изгибные пневматические мышцы (bending type pneumatic muscle). Их конструкция вызывает при раздутии изгиб в ту или иную сторону. Широкое применение этого типа мышц позволило выделить его в отдельную категорию искусственных мышц – эластомерные управляющие механизмы ЕА. Так как раздутие мышцы может проводиться при помощи жидкости или газа, они носят название жидкостных эластомерных управляющих механизмов FEA [6]. Мышцы такого типа также носят название анизотропных APAM. Два типа конструкции

Рис. 10. Анизотропные пневматические мышцы с неравномерным армированием (слева) и с поперечно расположенными канавками (справа)

подобных искусственных мышц были предложены в исследовании Сеульского университета [25]. Первый вариант включает в себя неравномерное распределение армирующих нитей. Второй вариант, похожий на пневматические ячейки (pneu-nets), представляет собой мышцу с узкими канавками, поперечно расположенными с одной стороны, что увеличивает площадь поверхности и приводит к изгибу (рис. 10).

1.3. FEA-мышцы. В жидкостных эластомерных управляющих механизмах эластомерные слои деформируются под давлением жидкости. Давление, используемое в FEA, может генерироваться пневматически или гидравлически. Среди всех мягких типов мышц пневматические и гидравлические наиболее распространены, однако в настоящее время ведется много разработок в области электроактивируемых эластомерных мышц. Для реализации асимметричного сокращения эластомерных мышц часть конструкции выполняется из более прочного материала. Другим вариантом является армирование эластомера, что снижает возникающие в нем напряжения и риск его повреждения. Также был предложен вариант использования SMA, изгиб которого управляется температурой жидкости, подаваемой внутрь мышцы [6].

1.3.1. Пневматические. Пневматические эластомерные конструкции на основе pneu-nets отличаются необходимостью наличия больших деформаций для активации движений, что приводит к большему времени срабатывания и частым нарушениям структуры из-за разрывов. Однако более сложные варианты конструкции снижают объем воздуха, необходимый для приведения мышц в движение, что благоприятно отражается на времени срабатывания [11]. Пневматическая активация FEA часто предпочтительнее гидравлической благодаря простоте хранения воздуха, небольшой массе, безвредности для окружающей среды и высокой скорости срабатывания [26]. Также в Сеульском университете были разработаны плоские пневматические эластомерные мышцы, имеющие меньшие габариты по сравнению со стандартными вариантами пневматических конструкций (рис. 11). Плоские FEA были использованы при создании экзоскелета нижних конечностей Second Skin. Экзоскелет разрабатывался для детской реабилитации, поэтому поведение прототипа было изучено на распечатанной модели нижней конечности ребенка. Испытания показали максимальный угол сгиба ноги, равный 37°, с высокой степенью повторяемости результата (1–3°) [27].

1.3.2. Гидравлические. Одним из примеров применения гидравлических FEA является мягкая роботизированная перчатка для реабилитации в домашних условиях. Эластичные приводы представляют собой композитные трубчатые конструкции, состоящие из эластомерной матрицы, армированной анизотропными волокнами (рис. 12). Портативная конструкция перчатки содержит гидравлические насосы и резервуар для воды для приведения в действие. Масса перчатки составляет 500 г, гидравлический источник питания и вспомогательные электромеханические компоненты закреплены на поясе [28].

1.4. SMA. Материалы SMA (эффект памяти формы) применяются в искусственных мышцах благодаря их способности восстанавливать свою первоначальную форму при нагреве после предварительной деформации. Наиболее используемым сплавом с памятью формы является нитинол. Материал доступен в виде проволоки, труб, пружин или лент. Существуют материалы с односторонней и двусторонней памятью формы. При одностороннем эффекте памяти форма тела возвращается в исходное состояние после нагревания выше температуры перехода. После остывания форма тела не изменяется. При двухсторонней памяти материал способен восстанавливать две разные формы: одну при низких температурах, а другую – при высоких. В качестве

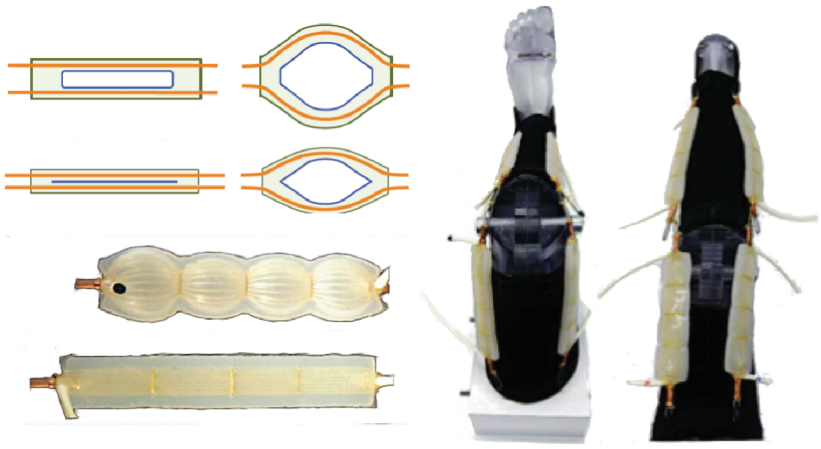

Рис. 11. Сравнение стандартных воздушных камер с плоскими пневматическими FEA (сверху слева), вид плоских FEA в сдутом и раздутом состоянии (снизу слева), экзоскелет нижних конечностей (справа)

Рис. 12. Гидравлическая роботизированная перчатка для реабилитации в домашних условиях

искусственных мышц используют предварительно деформированные формы элементов из SMA. При нагреве форма возвращается в исходную, высвобождая полезную энергию. Активация мышц происходит путем подачи электрического тока через SMA или с помощью экзотермической реакции [5, 15, 29, 30]. SMA были применены в разработке экзоскелета нижних конечностей ASO для помощи во время одной из фаз ходьбы. Предварительная обработка нитиноловой проволоки включала отжиг при 400°C, что способствовало увеличению деформации мышцы, обеспечивая полный диапазон движения колена, но уменьшило ее выходную силу. ASO для коленного сустава имело четыре набора приводов на задней поверхности коленного сустава (для облегчения сгибания) и одного комплекта на передней поверхности (для облегчения разгибания). ASO для голеностопного сустава состояло из четырех наборов приводов: по одному на передней, задней и боковых поверхностях сустава (рис. 13). При активации мышцы общее отклонение составило 34°, что достаточно для помощи пациенту во время ходьбы. Однако стоит отметить очень большое время срабатывания – около 25 с [31]. В настоящее время продолжается совершенствование конструкций SMA, встроенных в ткани, которые позволят обеспечивать движения с несколькими степенями свободы более эффективно [32, 33].

1.5. Тросовые приводы. Тросовые приводы применяются совместно с двигателями, пружинами и другими механизмами, обеспечивающими натяжение тросов. Наиболее используемым типом тросового привода являются боуден-тросы. Они позволяют передавать усилия от двигателя к определенной части экзоскелета. Примером применения боуден-тросов может служить экзоскелет локтевого сустава Soft elbow exosuit (рис. 14). Электродвигатель постоянного тока соединен с тросами. Тросы натягивают искусственное сухожилие, приводя в движение предплечье. Механизм блокировки удерживает натяжение, когда требуется статическое положение [34].

Достоинства и недостатки экзоскелетов, использующих мышцы мягкого типа, представлены в табл. 1–3.

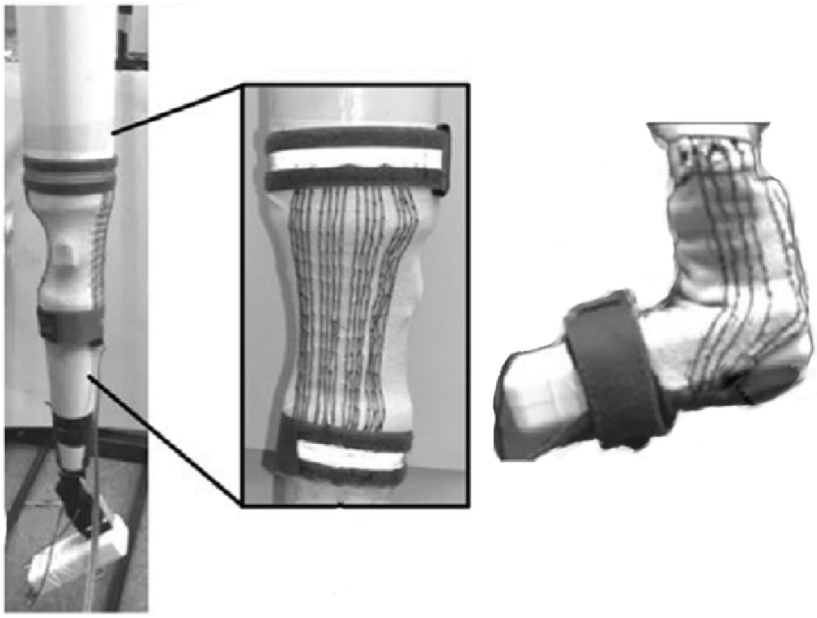

Рис. 13. Экзоскелет нижних конечностей ASO с применением SMA

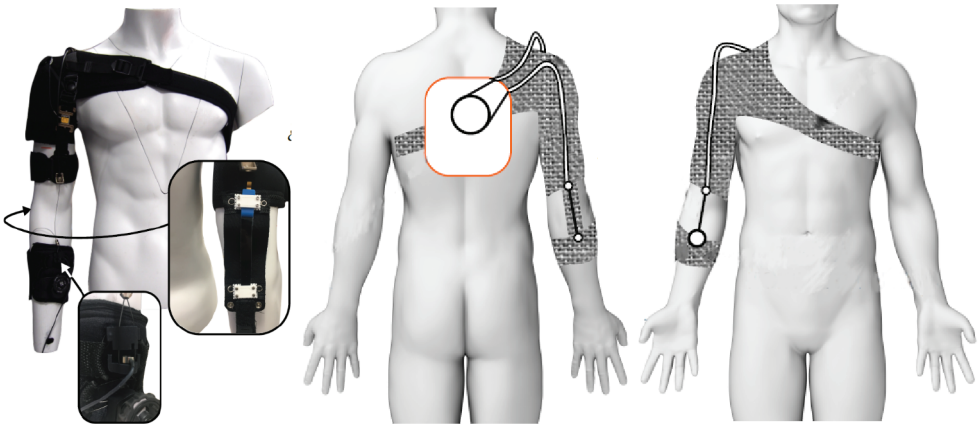

Рис. 14. Экзоскелет Soft elbow exosuit

Также проводятся активные разработки некоторых типов мягких искусственных мышц, которые в настоящий момент не удовлетворяют требованиям экзоскелетов, в основном по выходной силе и деформации, однако являются перспективными для экзоскелетов. Данные типы мышц находятся на стадии разработки или применения в роботах малых размеров [3, 5, 6, 15, 35].

К таким мышцам относятся:

1) полимерные молекулярные мышцы;

2) электросопряженная жидкость (electro-conjugated fluid);

3) искусственная мышечная ткань;

4) электроактивные полимеры (EAP).

Гидрогелевые молекулярные мышцы деформируются под действием света за счет окислительно-восстановительных реакций.

Электроконъюгированная жидкость (ECF) является разновидностью функциональной жидкости, которая создает струйный поток при воздействии высокого постоянного напряжения.

Таблица 1. Достоинства и недостатки экзоскелетов, использующих мышцы мягкого типа. Управляющие “сухожилия” (length variable tendon) [7]

Достоинства	Недостатки
Тип мышц – кабели	
Использование наиболее простых в управлении и недорогих типов двигателей на внешней платформе для приведения в действие.	Необходимость дополнительных элементов: двигателей, пружин и т.д.
Двигатели располагаются удаленно, не увеличивая инерцию конечностей	
Тип мышц – SMA [15]	
Простота управления.	Относительно небольшая деформация (у SMA спиральной формы деформация выше).
SMA спиральной формы способны к деформации на 300%	
Может создавать высокую силу со скоростью и удельной мощностью, аналогичной человеческим мышцам.	Высокая стоимость. Повышенные требования к процессу обработки.
Сверхпластичность.	Высокий гистерезис
Сверхупругость.	
Кислотостойкость.	
Высокая скорость деформации без повреждений.	
Биосовместимость (некоторых сплавов)	

Таблица 2. Достоинства и недостатки экзоскелетов, использующих мышцы мягкого типа. Жидкостные управляющие механизмы (fluidic actuation) [7, 11]

Достоинства	Недостатки
Тип мышц – пневматические эластомерные	
Доступность воздуха.	Проблемы внутренней утечки и трения.
Экологичность.	Сложность управления нелинейными характеристиками.
Небольшая масса.	Низкая пропускная способность
Для поддержания формы после деформации требуется небольшая дополнительная энергия.	
Переменная управляемая податливость.	
Хорошее соотношение силы к массе	
Тип мышц – гидравлические эластомерные	
Высокая сила (по сравнению с пневматическими приводами).	Проблемы внутренней утечки и трения
Низкий уровень шума.	
Высокая точность и плавность.	
Пыле- и влагозащита.	
Отсутствие открытых движущихся компонентов.	
Для поддержания формы после деформации требуется небольшая дополнительная энергия	

Известно, что сильная струя ECF создается в неоднородном электрическом поле, например в поле с парой игольчатого и кольцевого электродов.

Искусственная мышечная ткань производится из различных материалов переплетением под определенным углом. Деформация происходит под действием тепловых или химических

Таблица 3. Достоинства и недостатки экзоскелетов, использующих мышцы мягкого типа PAM [8, 24]

Достоинства	Недостатки
Высокое соотношение мощности к весу по сравнению с электродвигателями.	Возможна потеря герметичности.
Доступность воздуха.	Необходимость компрессора.
Аналогичность биологическим мышцам по анатомии, гибкости, мягкости, переменной жесткости.	Нелинейные характеристики активации, усложняющие управление PAM.
Низкий уровень шума.	Низкий диапазон частот управления (5 Гц), который может быть увеличен при добавлении заполнителей
Легкая интегрируемость с ортезом и одеждой, малозаметность.	
Управляемая податливость благодаря антагонистической активации.	
Устойчивость к влажной и грязной среде.	
Зависимость силы от размеров привода или рабочего давления.	
Небольшая масса.	
Малое время срабатывания.	
Высокая деформация (25–30%)	

воздействий. Например, при нагревании волокна нейлона сжимаются, при этом увеличиваясь в диаметре, что заставляет их изгибаться. Прочным и достаточно гибким материалом служат углеродные нанотрубки, которые представляют собой длинные полые цилиндры из графена с сильными связями. Искусственное волокно при погружении в раствор электролита сокращается при подаче напряжения. Другим вариантом управляемой деформации является пропитка воском и нагревание.

Электроактивные полимеры меняют форму под действием электрического напряжения.

Типы EAP

1) ионные EAP (IEAP):

проводящие полимеры;

углеродные нанотрубки (CNT).

2) электронные EAP (EEAP):

диэлектрические эластомерные приводы (DEA).

Особенности перспективных типов искусственных мышц представлены в табл. 4, 5.

2. Жесткие типы искусственных мышц. Наиболее часто роботы приводятся в действие жесткими двигателями, а различные сложные механизмы реализуются с помощью ротационных и линейных исполнительных систем [7].

К жестким искусственным мышцам могут относиться:

1) электродвигатели;

2) гидравлические цилиндры;

3) пневматические цилиндры;

4) пружины;

5) VIA.

Также в зависимости от конструкции и наличия жестких элементов следующие типы искусственных мышц могут относиться к жестким:

1) пневматические;

2) гидравлические;

3) SMA;

4) SEA;

5) тросовые приводы.

Таблица 4. Особенности искусственных мышц EAP [7], потенциально подходящих для экзоскелетов

Достоинства	Недостатки
Тип мышц – электронные	
Высокая плотность энергии.	Необходимость герметизации или защитного слоя на открытом воздухе.
Большая сила по сравнению с ионным классом.	Отсутствие материалов с достаточным крутящим моментом.
Быстрое время отклика в диапазоне миллисекунд.	Сложность изготовления
Длительное время работы.	
Возможность миниатюризации конструкции	
Тип мышц – ионные	
Низкое напряжение срабатывания.	Отсутствие материалов с достаточным крутящим моментом.
Большое сгибающее смещение.	Сложность изготовления
Возможность двунаправленного приведения в действие.	
Возможность миниатюризации конструкции	
Тип мышц – CP [15]	
Низкое рабочее напряжение.	Низкая деформация на сжатие (обычно достигает 2–10%), но возможно ее увеличение до 40%.
Способность к большим деформациям по сравнению с CNT.	Низкая скорость срабатывания (<1% в с)
Стоимость ниже, чем CNT.	
Наличие способов, повышающих деформацию и скорость срабатывания	
Тип мышц – CNT 5	
Создание большой силы со скоростью и удельной мощностью, аналогичной человеческим мышцам.	Недостаточное генерирование мощности, деформации и силы из-за тонкости структуры
Высокая скорость срабатывания.	
Температурная стабильность.	
Высокая плотность энергии	
Тип мышц – DEA [5, 15]	
Способность генерировать напряжение, деформацию, скорость и удельную силу, аналогичные человеческим мышцам.	Недостаточное генерирование мощности и силы из-за малых размеров.
Способность определения положение без дополнительных датчиков.	Большие габариты и масса дополнительных конструкций.
Высокая деформация и скорость деформации	Низкая безопасность из-за высокого напряжения между пластинами

2.1. Электродвигатели. Элементами передачи от сервоприводных мышц могут выступать гармонические приводы, винтовые, ременные и цепные передачи и колеса [5]. Общими достоинствами использования электродвигателей являются:

легкое управление;

портативность при наличии батареи;

высокая эффективность.

Классификация электродвигателей [6, 36]:

1) постоянного тока:

коллекторные постоянного тока (brushed DC motor);

Таблица 5. Особенности типов искусственных мышц, потенциально подходящих для экзоскелетов

Тип мышц	Недостатки
Полимерные молекулярные мышцы	Активация отдельных молекул должна быть скоординирована для хорошей производительности объемного привода.
	Низкая эффективность
Электросопряженная жидкость	Удельная мощность привода уменьшается с размером, что делает его неконкурентоспособным с электромагнитными приводами.
	Низкая эффективность
Искусственная мышечная ткань	Для функционирования требуется регулируемая среда [18].
	Сложность соединения ткани привода с механической нагрузкой

2) переменного тока:
асинхронные;
синхронные;
бесколлекторные постоянного тока (BLDC);
бесколлекторные переменного тока (BLAC);
электродвигатели шаговые;
ультразвуковые двигатели.
3) сервоприводы;
4) пьезоэлектрические двигатели.

2.1.1. Коллекторные двигатели постоянного тока. Коллекторные двигатели постоянного тока широко используются в разработке экзоскелетов благодаря простой конструкции привода, меньшей цене и простоте управления. Однако они требуют регулярного технического обслуживания из-за механического контакта между щеткой и коммутатором [6]. Электродвигатели постоянного тока были применены в прототипе HAL-5 экзоскелета всего тела HAL (рис. 15). Прототип, представленный в 2006 г., был улучшен за счет добавления менее габаритных двигателей постоянного тока, расположенных на плечах, локтях, бедрах и коленях. С помощью таких приводов и общего пластикового каркаса можно также улучшить дизайн экзоскелета по сравнению с предыдущими прототипами, например HAL-3. Энергоэффективность приводов позволяет автономное использование всей конструкции в течение 2 ч 40 мин, имея комплект аккумуляторов [37]. Также примером применения такого типа двигателей является экзоскелет верхней конечности AJB. Для перемещения частей конструкции применялся коллекторный двигатель постоянного тока. Крутящий момент передавался через тросовую систему с гибким

Рис. 15. Экзоскелет тела HAL (слева), экзоскелет верхней конечности AJB (справа)

Рис. 16. Тип используемого привода (слева), вид экзоскелета Stuttgart Exo-Jacket (справа)

Рис. 17. Экзоскелет кисти, совместимый с магнитно-резонансной томографией

корпусом. Для управления мышцами AJB использует электромиограмму, регистрируемую на сгибающих и разгибающих мышцах локтевого сустава. Эти сигналы определяют необходимый крутящий момент [38].

2.1.2. Бесколлекторные двигатели постоянного тока. Электродвигатель BLDC не только не требует регулярного технического обслуживания, но также обладает рядом преимуществ: высокая скорость и момент работы, более точное позиционирование, большая эффективность, низкий уровень шума. Кроме того, в двигателе BLDC вращается легкий постоянный магнит, благодаря чему малая инерция двигателя позволяет осуществлять быстрое ускорение и замедление [3, 6].

В экзоскелете Stuttgart Exo-Jacket, разработанном в институте Фраунгофера (Fraunhofer Institute for Manufacturing Engineering and Automation IPA), в качестве управляющих механизмов были использованы плоские вентильные двигатели высокой мощности при промощи волновой передачи (harmonic drive) (рис. 16). Момент на плечевом и локтевом суставах экзоскелета может превышать 40 и 25 Н·м соответственно, а скорость создания этого момента на суставах равна 107 и 155 град/с.

2.1.3. Бесколлекторные двигатели переменного тока. Недостатком всех двигателей постоянного тока является то, что они требуют механического сцепления и трансмиссии, что значительно увеличивает вес. Двигатели переменного тока позволяют решить эту проблему. Однако двигатели BLAC, как правило, дороже, чем BLDC [6].

2.1.4. Ультразвуковые двигатели. Основным достоинством ультразвуковых двигателей является то, что они не влияют на магнитные поля и не создают их. Это позволило использовать их в разработке экзоскелета кисти для параллельного проведения функциональной магнитно-резонансной томографии и исследования влияния реабилитации на процессы в мозге.

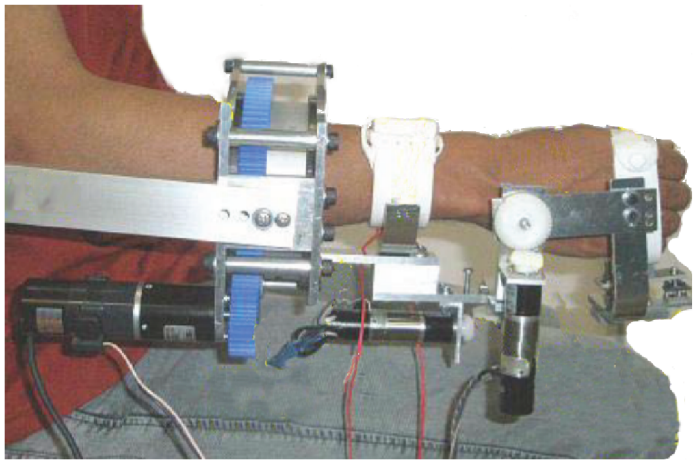

Рис. 18. Стационарный экзоскелет верхней конечности

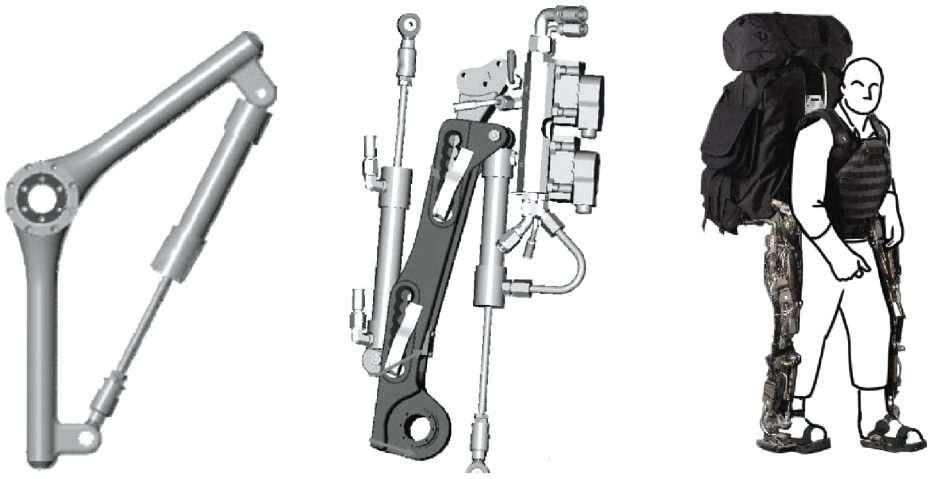

Рис. 19. Концепт использования линейного привода (слева), бедренная часть экзоскелета BLEEX (по центру), общий вид экзоскелета BLEEX 1 (справа)

Основной корпус экзоскелета был выполнен из пластика. Момент, генерируемый на двигателе, передавался на суставы кисти при помощи ременной передачи (рис. 17) [39].

2.1.5. Сервоприводы. Сервоприводы редко применяются в экзоскелетах. Они могут требовать ремонта после нескольких тысяч часов и им необходим энкодер. Сервопривод, имеющий в составе двигатель постоянного тока и развивающий необходимый момент, обладает существенным весом. Примером использования сервопривода постоянного тока RH-mini служит стационарный экзоскелет верхней конечности, разработанный в Японии [40]. Три степени свободы позволяли осуществлять полный диапазон движений запястья (рис. 18).

2.1.6. Пьезоэлектрические двигатели. Пьезоэлектрическим двигателем называется электрический двигатель, в котором механическое перемещение ведомого органа (ротора или якоря) осуществляется за счет пьезоэлектрического или пьезомагнитного эффекта [41]. Казалось бы, достаточно возбудить пьезоэлемент переменным электрическим напряжением и, с помощью известных механических средств преобразовать колебательное движение пьезоэлемента во вращательное движение ведомого органа. Однако, несмотря на простоту этого принципа, его трудно реализовать для амплитуд и частот колебаний пьезоэлемента, которые встречаются на практике. Поэтому такого рода двигатели в дальнейшем не будут рассматриваться в данной работе.

Рис. 20. Экзоскелеты Muscle suit, Muscle suit power, Muscle suit edge (слева–направо)

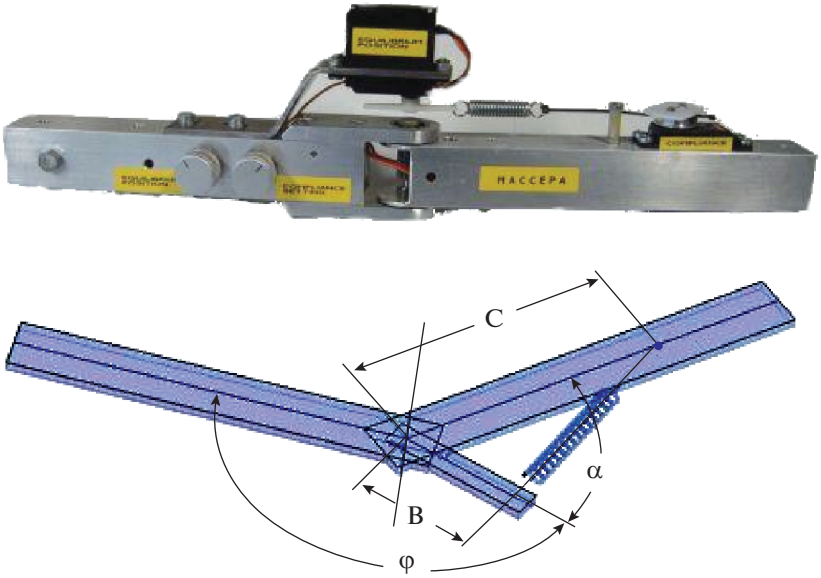

Рис. 21. Прототип привода МАССЕРА

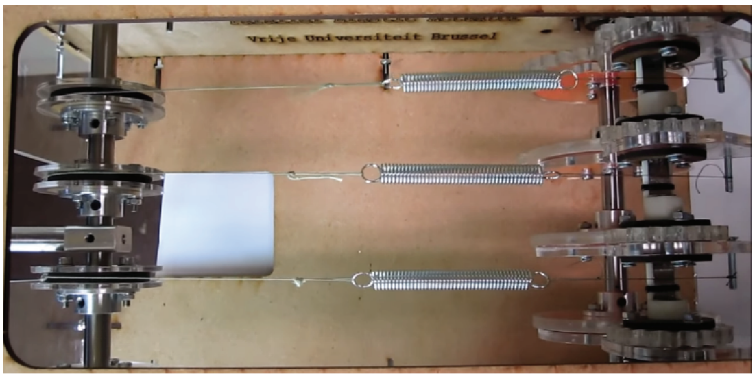

Рис. 22. Концепция последовательного и параллельного использования пружин

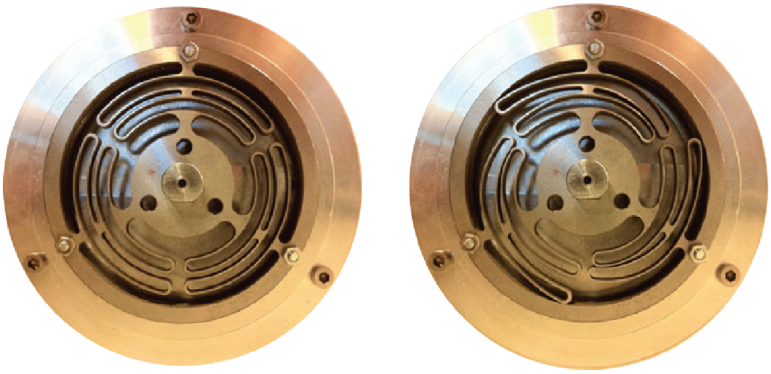

Рис. 23. Вид упругого элемента для экзоскелета коленного сустава в свободном (слева) и нагруженном состоянии (справа)

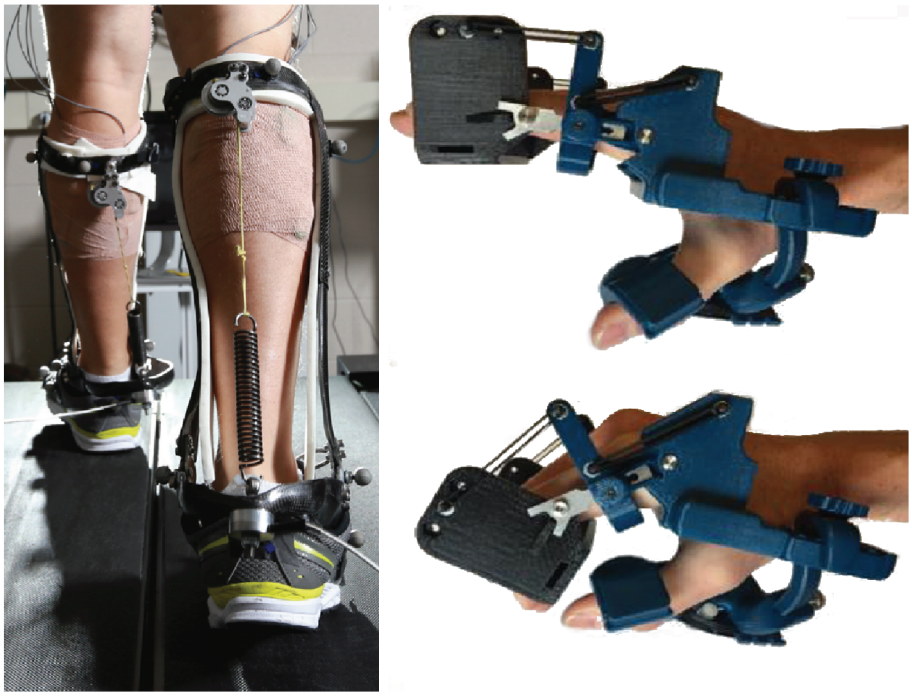

Рис. 24. Пассивный экзоскелет нижних конечностей (слева) и верхних конечностей ArmAssist-2.0 (справа)

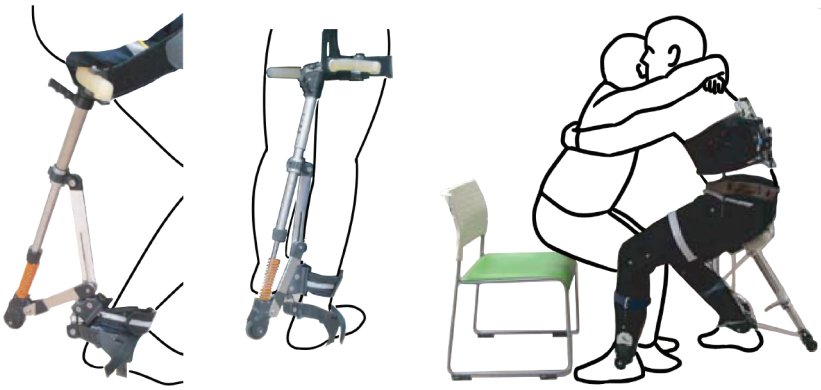

Рис. 25. Экзоскелет для снижения нагрузки на позвоночник и коленный сустав при подъеме пациентов

Таблица 6. Достоинства и недостатки различных типов мышц

Достоинства	Недостатки
Тип мышц – электродвигатели [2, 3, 5, 53]	
Точность движения с точки зрения положения и скорости.	Жесткость превышает анатомическую.
Простота управления.	Сложность реализации регулируемого алгоритма управления.
Простота сборки из-за разработанности и распространенности двигателей.	Потребность в механизме передачи усилия, который может приводить к дополнительным недостаткам.
Высокая удельная мощность.	Низкий крутящий момент на низких скоростях
Снижение потребляемой энергии при ходьбе.	
Компактность и портативность.	
Низкая стоимость	
Тип мышц – гидравлические цилиндры [2, 5]	
Компактность.	Зависимость от стационарных источников давления или малая автономность.
Высокая удельная мощность.	Малая эффективность из-за потери энергии.
Высокая выходная сила.	Большой масса.
Широкий диапазон частот управления.	Проблемы внутренней утечки и трения.
Малая масса.	Большие габариты
Плавность активации.	
Быстрый отклик	
Возможность удаленного расположения.	
Зависимость выходной силы и скорости от размеров привода или рабочего давления.	
Низкий шум	
Тип мышц – пневматические цилиндры [2, 5]	
Высокая удельная мощность.	Зависимость от стационарных источников давления или малая автономность.
Высокая удельная сила.	Малая эффективность из-за потери энергии.
Небольшая масса.	Высокая податливость воздуха.
Упругий материал, минимальная потеря энергии.	Проблемы внутренней утечки и трения.
Низкий уровень шума.	Большие габариты
Не требуется дополнительной энергии для блокирования положения.	
Снижение диапазона частот управления.	
Возможность обратного хода.	
Управляемая податливость благодаря антагонистической активации.	
Устойчивость к влажной и грязной среде.	
Зависимость величины силы от размеров привода или рабочего давления	

Таблица 6. Окончание

Достоинства	Недостатки
Тип мышц – SEA 48	
Простота конструкции	Крутящий момент, создаваемый соединением, должен генерироваться электродвигателем. Небольшой рабочий диапазон частот
Тип мышц – пружины	
Небольшая масса. Простота конструкции	Не генерируют активных движений, ограничены упражнениями на приложение силы в противоположном направлении и балансированием силы тяжести

2.2. Гидравлические цилиндры. Гидравлические цилиндры могут находить применение в больших экзоскелетах, переносящих вес на землю, так как они способны генерировать большие усилия, но их трудно герметизировать. Они тяжелые и громоздкие, особенно с учетом необходимых насосов и компрессоров. Несмотря на эти недостатки, гидравлические линейные приводы находят применение в экзоскелетах нижних конечностей или всего тела. В экзоскелете нижних конечностей berkeley lower extremity exoskeleton (BLEEX) [42] гидравлические цилиндры были выбраны из-за высокой удельной мощности и несжимаемости жидкости, что позволяет реализовать широкий диапазон частот управления. Ротационные гидравлические приводы не использовались из-за более частых проблем с внутренними утечками и трением. В результате в экзоскелете BLEEX были применены линейные гидравлические приводы двустороннего действия (рис. 19). Они компактны, имеют небольшую массу и способны генерировать большую силу. Прототип BLEEX 2 имеет лучшие характеристики по габаритам и массе, которая составляет 14 кг [37].

2.3. Пневматические цилиндры. Наиболее распространенными промышленными экзоскелетами, использующими пневматические цилиндры, является серия Muscle suit компании Innophys [43]. Конструкция имеет два или четыре пневматических искусственных мускула, которые могут активироваться при поддутии воздуха в клапан на плече. За спиной рабочего располагается баллон со сжатым воздухом, однако система может быть также подключена к компрессору. В настоящий момент на рынке представлены три последние модели экзоскелета: Muscle suit [43], Muscle suit power [44] и Muscle suit edge [45] (рис. 20).

2.4. VIA. 2.4.1. MACCEPA. Механизмы с переменным механическим сопротивлением, использующие сервоприводы и пружины, также были разработаны исследовательской группой Robotics & Multibody Mechanics брюссельского университета Vrije Universiteit [46]. Данный тип привода позволяет отдельное механическое регулирование податливости и положения равновесия (рис. 21). Привод представляет собой регулируемую пружину кручения. Один сервопривод устанавливает угол α, в нулевом значении определяющий положение равновесия, в котором пружина не будет создавать крутящего момента. Второй привод натяжением троса устанавливает предварительное натяжение пружины, которое влияет на величину создаваемого крутящего момента для определенного угла α.

2.4.2. SEA. Механизмы, использующие последовательные пружины, применялись в реабилитационных устройствах, но они все сталкиваются с общим ограничением относительно постоянной жесткости упругого элемента, который зафиксирован в определенном положении (рис. 22). SEA представляет собой простое и эффективное решение, которое в основном состоит из редуктора, соединенного последовательно с пружиной, которая крепится к нагрузке [2].

К достоинствам SEA относится то, что они устраняют нелинейные эффекты двигателей, такие, как инерция, а также позволяют увеличивать точность управлением силы или крутящего момента. Кроме того, упрощается оценка генерируемой силы, так как она зависит от деформации пружин. Основным недостатком SEA является уменьшение рабочего диапазона частот из-за повышенной податливости системы, а максимальная жесткость системы ограничена жесткостью упругого элемента [47]. Прототип механизма, комбинирующего последовательное и

Таблица 7. Критерии для выбора искусственных мышц при разработке экзоскелетов

Критерий	Дополнение
Податливость	Для лучшего соответствия различным выполняемым задачам при реабилитации податливость должна иметь возможность регулирования
Удельная мощность	Необходимо выбирать привод с максимальной удельной мощностью. Этот критерий является одним из самых важных для разработки экзоскелета по данным статьи [2]
Удельная сила	Необходимо выбирать привод с высокой удельной силой. В исследовании [5] предполагается, что искусственные мышцы должны обеспечивать уровень силы, соответствующий мышцам человека
Конструкция	Центр масс в экзоскелете должен как можно меньше отличаться от центра масс человека
Форма	Мышцы экзоскелета должны быть минимально заметными, в идеале интегрированными или скрытыми под одеждой. Эргономичный дизайн критичен для частого использования экзоскелета
Стоимость	Максимально низкая
Уровень шума	Максимально низкий
Внешний вид	Необходимо обеспечить возможность очистки (пыле- и влагозащищенность). Экзоскелет не должен содержать открытые части, или они должны быть безопасными
Безопасность	Необходимо ограничение диапазона движения, скорости и силы для предотвращения вреда суставам
Автономность	В исследовании [5] в качестве рекомендуемого времени работы автономного экзоскелета предлагается 8 ч
Биомеханическое соответствие	Параметры и тип искусственных мышц должны обеспечивать плавность, скорость, ускорение и диапазон движений, соответствующие конкретному пользователю
Изменяемый обратный ход	В стандартной ситуации обратный ход мышц экзоскелета должен быть неограниченным для уменьшения энергетических затрат. Однако в аварийной ситуации экзоскелет должен фиксировать положение, например, для предотвращения падения
Диапазон частот управления	Диапазон частот управления должен быть максимальным

параллельное использование пружин SPEA, был предложен в университете Брюсселя для устранения недостатка SEA путем управляемого вовлечения параллельно расположенных пружин. Достоинство концепции состоит в значительном снижении требования к крутящему моменту двигателя и в повышении эффективности [48]. Различные конфигурации и типы VIA представлены подробнее в обзоре [49].

В [47] исследователями из лаборатории Биомедицинской робототехники и биомикросистем был предложен компактный монолитный упругий элемент, разработанный для пассивного

экзоскелета коленного сустава. Оптимизированная конструкция, представленная на рис. 23, подходит для создания нескольких последовательных/параллельных соединений SPEA.

2.5. Пружины. Пассивные экзоскелеты, использующие простые пружины, отличаются простым дизайном и малой эффективностью. Они предназначены только для небольшого ассистирования в движениях и компенсации гравитации. Примерами таких экзоскелетов являются экзоскелеты нижних (рис. 24) [50] и верхних конечностей ArmAssist-2.0 (рис. 24) [51].

2.6. Газлифт. Газлифт или газовая пружина – это тип упругого механизма, который (в отличие от обычной механической пружины) применяет сжатый газ в закрытом цилиндре, ограниченный подвижным поршнем. Механизм используется для пневматического накопления потенциальной энергии и противостояния внешней силе, приложенной вдоль оси поршня. Различные конструкции позволяют механическую регулировку скорости хода, фиксацию поршня в различных положениях и другие настройки.

Применение газлифта (gas spring) в качестве искусственных мышц в экзоскелетах позволяет снизить физическую нагрузку, например при уходе за маломобильными пациентами. Преимуществами их применения является низкая стоимость и масса, а также простота использования. Экзоскелет нижних конечностей с помощью газлифта был разработан для персонала больницы, помогающего в переносе пациентов на небольшие расстояния. Газлифт, прикрепленный к одной из ног, снижает нагрузку на позвоночник и коленный сустав при подъеме пациентов (рис. 25) [52].

Достоинства и недостатки экзоскелетов, использующих мышцы жесткого типа, представлены в табл. 6.

Заключение. Исходя из обзоров [5, 9] и проанализированных статей был дополнен список критериев, которые необходимо учитывать при выборе искусственных мышц для проектирования экзоскелета (табл. 7).

На данный момент не существует искусственной мышцы, удовлетворяющей всем критериям для произвольной задачи. Прежде всего учитываются требования к мобильности и мощности используемых приводов. В зависимости от важности оптимизации конкретных параметров тип и характеристики привода должны выбираться отдельно (см. табл. 6). Стоит отметить, что в случае, когда механизм содержит более одной мышцы, их характеристики и типы также могут отличаться и должны оптимизироваться для каждого сустава.

Разработка носимого ассистивного механизма требует внимательного исследования физиологии костно-мышечной системы. Необходимость слежения за совпадением виртуальных шарниров вращения элементов носимого устройства с соответствующим суставом оператора накладывает множественные ограничения на кинематическую схему создаваемого аппарата. Использование сферического шарнира в качестве модели сустава правомерно только при небольших перемещениях. Для согласования центров вращения обычно применяется набор из двух или трех цилиндрических шарниров, при этом наборы из трех активных шарниров встречаются крайне редко. Жесткая конструкция, выполняющая заданную функцию, либо имеет большие габариты, либо требует использования крайне прочных и дорогостоящих материалов.

Это неизбежно приводит к необходимости применения мягких и упругих элементов [54–57]. И хотя этот подход сильно осложнен практической невозможностью моделирования кинематики и динамики движения из-за специализации большинства систем моделирования на твердотельных моделях, рост повсеместного использования мягких носимых роботов все больше побуждает исследователей к созданию новых и оптимизации существующих мягких приводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Looze M.P., Bosch T., Krause F., Stadler K.S., O'Sullivan L.W.* Exoskeletons for Industrial Application and Their Potential Effects on Physical Work Load // Ergonomics. 2016. V. 59 (5). P. 671–681.
2. *Bortole M., Venkatakrishnan A., Zhu F. et al.* The H2 Robotic Exoskeleton for Gait Rehabilitation After Stroke: Early Findings from a Clinical Study // J. NeuroEngineering and Rehabilitation. 2015. V. 12. № 54. https://jneuroengrehab.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12984-015-0048-y
3. *Lidka M.* Comparison of DC Motors and Dielectric Elastomer Actuators for Wearable Wrist Exoskeletons // Electronic Thesis and Dissertation Repository. 2017. https://ir.lib.uwo.ca/etd/5032.
4. *Gopura R.A.R.C., Kiguchi K.* Mechanical Designs of Active Upper-limb Exoskeleton Robots State-of-the-art and Design Difficulties // Proc. IEEE Intern. Conf. on Rehabilitation Robotics. Kyoto, 2009. P. 178–187.
5. *Veale A.J., Xie S.Q.* Towards Compliant and Wearable Robotic Orthoses: A Review of Current and Emerging Actuator Technologies // Medical Engineering and Physics. 2016. V. 38 (4). P. 317–325.

6. *Heo P., Gu G.M., Lee Sj., Rhee K., Kim J.* Current Hand Exoskeleton Technologies for Rehabilitation and Assistive Engineering // Intern. J. Precision Engineering and Manufacturing. 2012. V. 13. P. 807–824.
7. *Lee C., Kim M., Kim Y.J. et al.* Soft Robot Review // Intern. J. Control, Automation and Systems. 2017. V. 15. P. 3–15.
8. *Lo H.S., Xie S.Q.* Exoskeleton Robots for Upper-limb Rehabilitation: State of the Art and Future Prospects // Medical Engineering and Physics. 2012. V. 34 (3). P. 261–268.
9. *Gopura R.A.R.C., Kiguchi K., Bandara D.S.V.* A Brief Review on Upper Extremity Robotic Exoskeleton Systems // Proc. 6th Intern. Conf. on Industrial and Information Systems. Kandy, 2011. P. 346–351.
10. *Ebrahimi A.* Stuttgart Exo-Jacket: An Exoskeleton for Industrial Upper Body Applications // Proc. 10th Intern. Conf. on Human System Interactions (HSI). Ulsan, 2017. P. 258–263.
11. *Rus D., Tolley M.T.* Design, Fabrication and Control of Soft Robots // Nature. 2015. V. 521. P. 467–475.
12. *Motmans R., Debaets T., Chrispeels S.* Effect of a Passive Exoskeleton on Muscle Activity and Posture During Order Picking // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2019. V. 820. P. 338–346.
13. *Hall M.L., Lobo M.A.* Design and Development of the First Exoskeletal Garment to Enhance arm Mobility for Children with Movement Impairments // Assist. Technol. 2018. V. 30 (5). P. 251–258.
14. Центр авиакосмической медицины и технологий. Лечебный костюм “Регент” [электронный ресурс]. http://amc-si.com/tovari-i-uslugi/lechebniy-kostium-regent.
15. *Daerden F., Lefeber D.* Pneumatic Artificial Muscles: Actuators for Robotics and Automation // Europ. J. Mechanical and Environmental Engineering. 2002. V. 47. P. 11–21.
16. thesis *Sangian D.* New Types of McKibben Artificial Muscles // PhD Dissertation. University of Wollongong, 2016.
17. *Chumichev M.A., Gribkov D.A., Pavlovsky V.E., Orlov I.A.* A Model of the Pneumatic Artificial Muscle // Extreme Robotics. 2019. V. 1 (1). P. 453–461.
18. Официальный сайт компании FESTO. Пневмомускул MAS [электронный ресурс]. https://www.festo.com/cat/ru_ru/data/doc_ru/PDF/RU/MAS_RU.PDF
19. *Belforte G., Eula G., Ivanov A., Raparelli T., Sirolli S.* Presentation of Textile Pneumatic Muscle Prototypes Applied in an Upper Limb Active Suit Experimental Model // J. Textile Institute. 2017. V. 109 (6). P. 757–766.
20. *Gobee S., Durairajah V., Mugilan G.* Design and Development of Upper Limb Soft Exoskeleton for Rehabilitation // Proc. 2nd Intern. Conf. for Innovation in Biomedical Engineering and Life Sciences. ICIBEL 2017. IFMBE Proceedings. Singapore: Springer, 2018. P. 111–116.
21. *Lee S., Kim J., Baker L. et al.* Autonomous Multi-Joint Soft Exosuit with Augmentation-Power-Based Control Parameter Tuning Reduces Energy Cost of Loaded Walking // J. Neuroengineering and Rehabilitation. 2018. Vol. 15(1). № 66. https://jneuroengrehab.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12984-018-0410-y
22. *Asbeck A.T., De Rossi S.M.M., Galiana I., Ding Y., Walsh C.J.* Stronger, Smarter, Softer: Next-Generation Wearable Robots // IEEE Robot. Autom. Mag. 2014. V. 21. P. 22–23.
23. *Verrelst B., Van Ham R., Vanderborght B., Lefeber D., Daerden F., Van Damme M.* Second Generation Pleated Pneumatic Artificial Muscle and Its Robotic Applications // Advanced Robotics. 2006. V. 20 (7). P. 783–805.
24. *Villegas D., Van Damme M., Vanderborght B., Beyl P., Lefeber D.* Third-Generation Pleated Pneumatic Artificial Muscles for Robotic Applications: Development and Comparison with Mckibben Muscle // Advanced Robotics. 2012. V. 26 (11–12). P. 1205–1227.
25. *Kim H., Park H., Kim J., Cho K., Park Y.* Design of Anisotropic Pneumatic Artificial Muscles and Their Applications to Soft Wearable Devices for Text Neck Symptoms // Proc. 39th Annual Intern. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). Jeju, 2017. P. 4135–4138.
26. *Polygerinos P., Lyne S., Wang Z. et al.* Towards a Soft Pneumatic Glove for Hand Rehabilitation // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Tokyo, 2013. P. 1512–1517.
27. *Park Y., Santos J., Galloway K.G., Goldfield E.C., Wood R.J.* A Soft Wearable Robotic Device for Active Knee Motions Using Flat Pneumatic Artificial Muscles // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). Hong Kong, 2014. P. 4805–4810.
28. *Polygerinos P., Wang Z., Galloway K.C., Wood R.J., Walsh C.J.* Soft Robotic Glove for Combined Assistance and At-Home Rehabilitation // Robotics and Autonomous Systems. 2015. V. 73. P. 135–143.
29. *Махсидов В.В., Шиенок А.М., Иошин Д.В.* Измерение деформации материала с помощью волоконных брэгговских решеток (обобщающая статья) // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 11. С. 54–60.
30. *Huang W.* Shape Memory Alloys and Their Application to Actuators for Deployable Structures // PhD Dissertation. Engineering Department. Cambridge University, 1998.
31. *Stirling L., Yu C.H., Miller J. et al.* Applicability of Shape Memory Alloy Wire for an Active, Soft Orthotic // J. Materials Engineering and Performance. 2011. V. 20. P. 658–662.
32. *Chenal T.P., Case J.C., Paik J., Kramer R.K.* Variable Stiffness Fabrics with Embedded Shape Memory Materials for Wearable Applications // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Chicago, 2014. P. 2827–2831.

33. *Yuen M., Cherian A., Case J.C., Seipel J., Kramer R.K.* Conformable Actuation and Sensing with Robotic Fabric // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Chicago, 2014. P. 580–586.
34. *Chiaradia D., Xiloyannis M., Antuvan C.W., Frisoli A., Masia L.* Design and Embedded Control of a Soft Elbow Exosuit // Proc. IEEE Intern. Conf. on Soft Robotics (RoboSoft). Livorno, 2018. P. 565–571.
35. *Hines L., Petersen K., Lum G.Z., Sitti M.* Soft Actuators for Small-Scale Robotics // Advanced Materials (Deerfield Beach, Fla.). 2017. V. 29 (13). № 1603483. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adma.201603483.
36. *Marks D.* Electric Motors for Machines and Mechanisms [электронный ресурс]. http://fab.cba.mit.edu/classes/S62.12/docs/motors.pdf.
37. *Guizzo E., Goldstein H.* The Rise of the Body Bots robotic exoskeletons // IEEE Spectrum. 2005. V. 42 (10). P. 50–56.
38. *Stein J., Narendran K., McBean J., Krebs K., Hughes R.* Electromyography-Controlled Exoskeletal Upper-Limb-Powered Orthosis for Exercise Training After Stroke // American J. Physical Medicine and Rehabilitation. 2007. V. 86 (4). P. 255–261.
39. *Kim S.J., Kim Y., Lee H., Ghasemlou P., Kim J.* Development of an MR-Compatible Hand Exoskeleton that is Capable of Providing Interactive Robotic Rehabilitation During fMRI Imaging // Medical and Biological Engineering and Computing. 2018. V. 56 (2). P. 261–272.
40. *Yamamoto I., Inagawa N., Hachisuka K., Oda F., Nakanishi Y.* Development of Compact Rehabilitation Robot for a Wrist Using Biological Signal // Proc. ICME Intern. Conf. on Complex Medical Engineering (CME). Kobe, 2012. P. 557–560.
41. *Лавриненко В.В., Карташев И.А., Вишневский В.С.* Пьезоэлектрические двигатели. М.: Энергия, 1980. 112 с.
42. *Zoss A., Kazerooni H., Chu A.* On the Mechanical Design of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton (BLEEX) // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Edmonton, 2005. P. 3465–3472.
43. Официальный сайт компании INNOPHYS. Muscle suit [электронный ресурс]. https://innophys.jp/product/standard/
44. Официальный сайт компании INNOPHYS. Muscle suit Edge [электронный ресурс]. https://innophys.jp/product/edge/
45. Официальный сайт компании INNOPHYS. Muscle suit Power [электронный ресурс]. https://innophys.jp/product/power/
46. *Vanderborght B., Tsagarakis N.G., Van Ham R. et al.* MACCEPA 2.0: Compliant Actuator Used for Energy Efficient Hopping Robot Chobino1D // Autonomous Robots. 2011. V. 31 (1). P. 55–65.
47. *Carpino G., Accoto D., Sergi F., Tagliamonte N., Guglielmelli E.* A Novel Compact Torsional Spring for Series Elastic Actuators for Assistive Wearable Robots // J. Mechanical Design. 2012. V. 134. P. 1–10.
48. *Mathijssen G., Brackx B., Van Damme M., Lefeber D., Vanderborght B.* Series-Parallel Elastic Actuation (SPEA) with Intermittent Mechanism for Reduced Motor Torque and Increased Efficiency // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Tokyo, 2013. P. 5841–5846.
49. *Vanderborght B., Albu-Schaeffer A., Bicchi A. et al.* Variable Impedance Actuators: A Review // Robotics and Autonomous Systems. 2013. V. 61 (12). P. 1601–1614.
50. *Collins S., Wiggin M., Sawicki G.* Reducing the Energy Cost of Human Walking Using an Unpowered Exoskeleton // Nature. 2015. V. 522. P. 212–215.
51. *Butler N.R., Goodwin S.A., Perry J.C.* Design Parameters and Torque Profile Modification of a Spring-Assisted Hand-Opening Exoskeleton Module // Proc. 15th IEEE Intern. Conf. on Rehabilitation Robotics (ICORR). London, 2017. P. 591–596.
52. *Hasegawa Y., Muramatsu M.* Wearable Lower-Limb Assistive Device for Physical Load Reduction of Caregiver on Transferring Support // Proc. IEEE/ASME Intern. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics. Wollongong, 2013. P. 1027–1032.
53. *Hiesmair L.* Compliant Exoskeleton // Thesis for the Attainment of the Academic Degree Bachelor of Science. Clarkson University. Automation Engineering, 2016.
54. *Dollar A.M., Herr H.* Lower Extremity Exoskeletons and Active Orthoses: Challenges and State-of-the-Art // IEEE Transactions on Robotics. 2008. V. 24 (1). P. 144–158.
55. *Kawamura S., Yamamoto T., Ishida D. et al.* Development of Passive Elements with Variable Mechanical Impedance for Wearable Robots // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292). Washington, D.C., 2002. V. 1. P. 248–253.
56. *Park Y., Chen B., Majidi C., Wood R.J., Nagpal R., Goldfield E.* Active Modular Elastomer Sleeve for Soft Wearable Assistance Robots // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. Algarve, 2012. P. 1595–1602.
57. *Park Y., Ryu S.C., Black R.J., Chau K.K., Moslehi B., Cutkosky M.R.* Exoskeletal Force-Sensing End-Effectors with Embedded Optical Fiber-Bragg-Grating Sensors // IEEE Transactions on Robotics. 2009. V. 25 (6). P. 1319–1331.

EDN: BISXQU
ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 2, с. 162–176

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 681.5.015.24

РАЗРАБОТКА РОБАСТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА ГРАМИАНОВ[1]

© 2022 г. А. А. Анисимов[a,*], К. Е. Соколов[a], С. В. Тарарыкин[a]
[a]*ФГБОУ ВО "Ивановский государственный энергетический ун-т им. В.И. Ленина", Иваново, Россия*
**e-mail: anis-2012@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.05.2021 г.
После доработки 20.05.2021 г.
Принята к публикации 27.07.2021 г.

Разрабатывается метод синтеза робастной системы управления манипуляционным роботом, основанный на линеаризации модели объекта управления, преобразовании структуры полученной модели с помощью предрегулятора в направлении повышения управляемости с использованием математического аппарата грамианов, последующего модального расчета централизованного регулятора состояния и применения синтезированных устройств для управления исходным нелинейным объектом. Грамиан управляемости представляет собой матрицу Грама, вычисленную для состояний линейной динамической системы при реакции на дельта-импульс. Предлагаемый метод позволяет улучшить робастные свойства и повысить быстродействие системы управления роботом при сохранении апериодического характера процессов в условиях взаимного влияния звеньев и вариации их параметров.

DOI: 10.31857/S0002338821060032

Введение. В настоящее время манипуляционные роботы (МР), воспроизводящие рабочие функции рук человека, широко применяются в промышленности, преимущественно на машиностроительных предприятиях, где выполняют операции сварки, окраски, смены заготовок и др. [1–4]. К их системам автоматического управления (САУ) обычно предъявляются жесткие требования, которые предполагают обеспечение апериодического характера переходных процессов по положению при высоких показателях быстродействия.

Достижение заданного качества управления МР осложняется нелинейным характером подобных объектов, взаимным влиянием каналов управления звеньями, а также изменением параметров в широких пределах. Несмотря на большое количество методов синтеза, основанных на принципах модального, оптимального и адаптивного управления, повышение качества САУ МР до сих пор представляет собой актуальную задачу [1, 3, 4].

В настоящее время большинство САУ МР строится по принципу декомпозиции объекта на отдельные звенья и синтеза локальных регуляторов их перемещений [1, 2, 4]. Однако при таком подходе не учитывается взаимное влияние звеньев, что приводит к ухудшению качества управления МР при одновременном движении по нескольким координатам.

Другим распространенным методом синтеза САУ роботами является введение каналов компенсации влияния перекрестных связей по силам и моментам [1, 3]. Недостаток такого подхода – высокая чувствительность компенсационных систем к воздействию неучтенных факторов и вариациям параметров мехатронного объекта управления, например к изменению массы переносимого груза.

Применение принципов адаптивного управления потенциально позволяет повысить эффективность как локальных, так и централизованных систем управления МР [3, 4]. Вместе с тем разработка и реализация адаптивных САУ роботами представляет собой весьма сложную задачу, поскольку необходимо обеспечивать высокий темп их самонастройки при изменении параметров объекта в процессе интенсивного движения.

[1] Результаты были получены в рамках выполнения базовой части государственного задания Министерства образования и науки России на 2021 г.

Более простым подходом может быть синтез САУ с централизованным регулятором методами модального или оптимального управления по линейной модели, учитывающей взаимное влияние звеньев манипулятора [1, 3]. Однако синтез централизованной системы осложняется проблемой робастности, поскольку параметры МР в процессе движения меняются, а его линеаризованная в рабочей точке модель является приближенной [5–7].

Поскольку МР обычно имеет несколько каналов управления, эффективным решением в данном случае представляется применение грамианных методов синтеза робастных САУ с предрегулятором и централизованным регулятором состояния [8]. Такой подход основан на целенаправленном изменении распределения сингулярных чисел грамианов линеаризованных структур путем введения в систему дополнительных каналов регулирования, корректирующих свойства объекта в направлении повышения управляемости и создающих основу для дальнейшего улучшения ее робастных свойств.

В данной работе предлагается метод синтеза робастной системы управления МР повышенного быстродействия, базирующийся на линеаризации математической модели объекта управления, преобразовании структуры полученной модели с помощью предрегулятора в направлении повышения управляемости с использованием математического аппарата грамианов, последующего модального расчета централизованного регулятора состояния и применения синтезированных устройств для управления исходным нелинейным объектом. Предлагаемый метод позволяет улучшить робастные свойства и повысить быстродействие системы управления МР при сохранении апериодического характера процессов в условиях взаимного влияния звеньев и вариации их параметров.

Исследование сопровождается конкретными числовыми примерами синтеза различных систем управления, обеспечивающими наглядную иллюстрацию эффективности полученных результатов. Расчетная часть работы выполняется средствами программного комплекса MatLab.

1. Постановка задачи исследования. Рассмотрим задачу управления динамикой промышленного робота на примере типового двухзвенного манипулятора, первое звено которого совершает вращательное, а второе – поступательное движение. Его кинематическая схема приведена на рис. 1, где l_1 и l_2 – длины 1-го и 2-го звеньев; p_1 и p_2 – координаты центров масс; q_1 – угловое положение 1-го звена; q_2 – линейное положение 2-го звена.

Динамические свойства МР как объекта управления описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, отражающих движение каждого звена механизма [1–3]. Для получения такой математической модели наиболее часто используют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $L = E_k - E_p$ – функция Лагранжа, Q_i – обобщенная сила, $E_k = E_{k1} + \ldots + E_{kn}$ – кинетическая энергия n звеньев манипулятора; $E_p = E_{p1} + \ldots + E_{pn}$ – потенциальная энергия n звеньев манипулятора; q_i и $\dot{q}_i$ – обобщенная координата и скорость i-го звена в глобальной системе отсчета.

Анализируя динамику двухзвенного манипулятора в глобальной системе координат, можно показать, что математические выражения его кинетической и потенциальной энергии имеют следующий вид:

$$E_k = \sum_{i=1}^{2} E_{ki} = \frac{J_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}[\dot{q}_2^2 + (q_2 - l_2 + p_2)^2\dot{q}_1^2] + \frac{J_2}{2}\dot{q}_1^2,$$

$$E_p = \sum_{i=1}^{2} E_{pi} = g\,[m_1 p_1 + m_2 l_1].$$

Здесь J_1 и J_2 – моменты инерции 1-го и 2-го звеньев относительно осей вращения; m_1 и m_2 – массы звеньев манипулятора; g – ускорение свободного падения.

Подставляя полученные выражения для кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа (1.1) и пренебрегая наличием механических сопротивлений, получаем описание динамики двухзвенного манипулятора в виде нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} [J_1 + J_2 + m_2(q_2 - l_2 + p_2)^2]\,\ddot{q}_1 + 2m_2(q_2 - l_2 + p_2)\,\dot{q}_2\dot{q}_1 = M_1, \\ m_2\ddot{q}_2 - m_2(q_2 - l_2 + p_2)\,\dot{q}_1^2 = F_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\ddot{q}_1$ и $\ddot{q}_2$ – ускорения 1-го и 2-го звеньев манипулятора; M_1 – вращательный момент привода 1-го звена; F_2 – силовое воздействие привода 2-го звена.

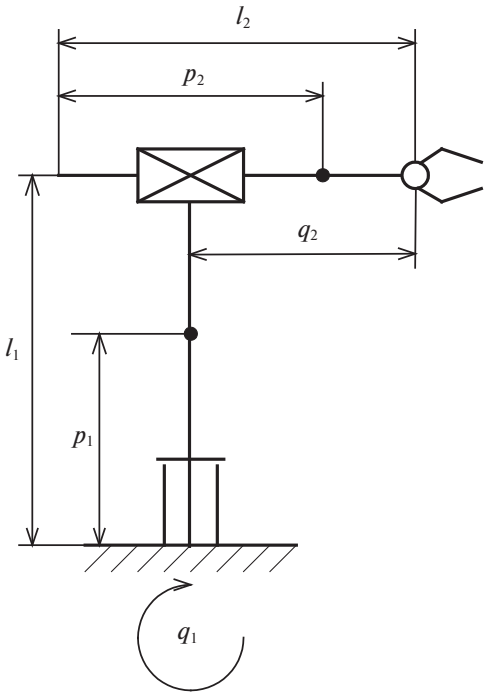

Рис. 1. Кинематическая схема манипуляционного робота

Структурная схема полученной нелинейной модели МР, соответствующая уравнениям (1.2), приведена на рис. 2, где u_1 и u_2 – задающие воздействия, e_1 и e_2 – сигналы ошибки локальных контуров управления; kl_{11}, kl_{12} и kl_{21}, kl_{22} – параметры локальных регуляторов. Динамика быстродействующих электроприводов 1-го и 2-го звеньев приближенно описывается передаточными функциями первого порядка с коэффициентами передачи K_{p1} и K_{p2}, постоянными времени T_1 и T_2.

Наиболее часто САУ промышленными МР строятся на базе автономных сепаратных подсистем управления звеньями, при разработке которых не учитывается влияние перекрестных связей между каналами. При таком подходе звенья манипулятора считаются независимыми объектами управления, что позволяет синтезировать линейные регуляторы низкого порядка.

Линейные модели 1-го и 2-го звеньев манипулятора в координатах состояния $\mathbf{x}_1 = [\dot{q}_1 \;\; q_1]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}_2 = [\dot{q}_2 \;\; q_2]^{\mathrm{T}}$ в этом случае принимают следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 M_1, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 F_2,$$
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{J_s} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

где $J_s = J_1 + J_2$ – суммарный момент инерции манипуляционного робота.

Пренебрегая инерционностью исполнительных механизмов в целях повышения параметрической грубости САУ, можно выразить управляющие воздействия локальных регуляторов состояния (РС) звеньев манипулятора:

$$M_1 = K_{p1}(u_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{x}_1), \quad F_2 = K_{p2}(u_2 + \mathbf{K}_2\mathbf{x}_2),$$

где $\mathbf{K}_1 = [kl_{11}\; kl_{12}]$ и $\mathbf{K}_2 = [kl_{21}\; kl_{22}]$ – векторы параметров РС 1-го и 2-го звена соответственно.

Параметрический синтез регуляторов состояния $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ может осуществляться методом модального управления на основе характеристического полинома Ньютона $D(s) = (s + \Omega_0)^2$, где Ω_0 – среднегеометрический корень (СГК), что обеспечивает апериодический характер и заданный темп переходных процессов в локальных подсистемах при поочередном пуске звеньев МР.

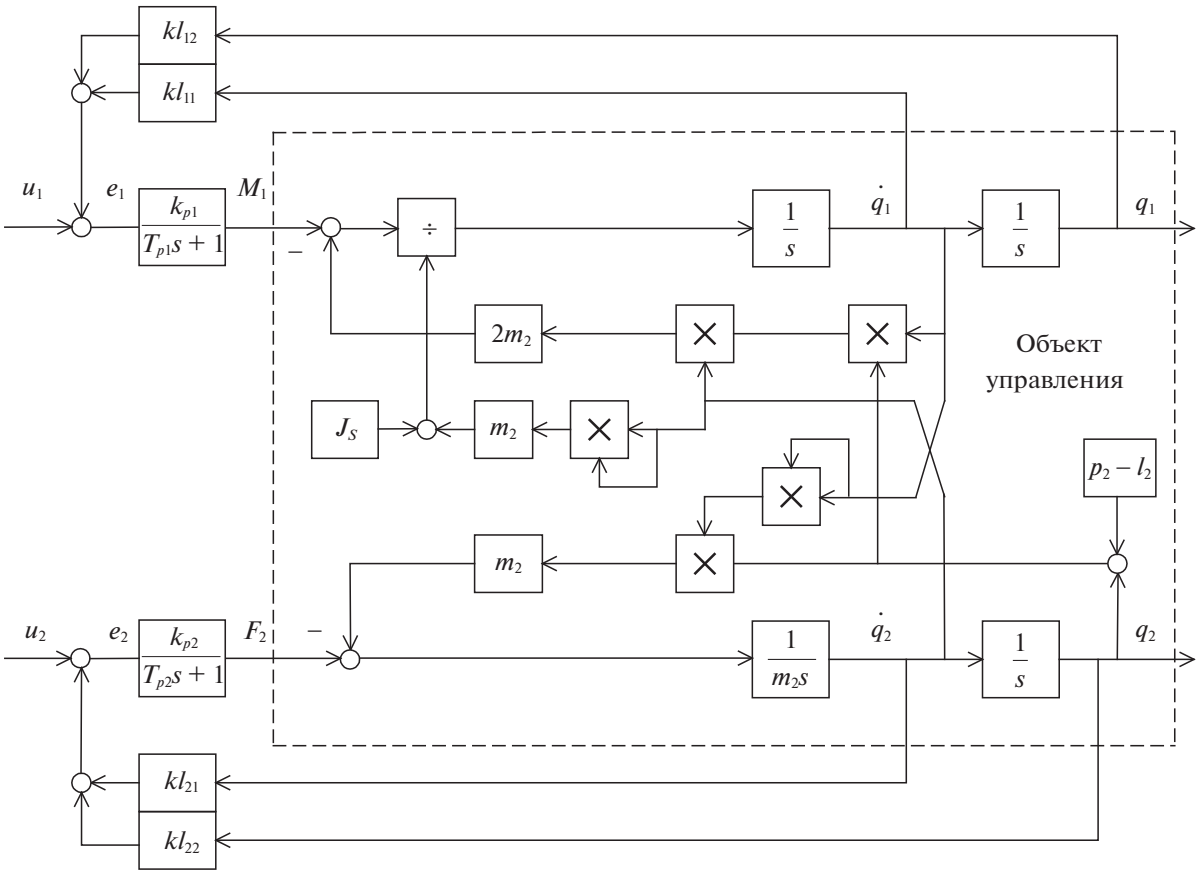

Рис. 2. Структурная схема нелинейной модели манипуляционного робота

Вместе с тем при одновременном пуске звеньев манипулятора в целях повышения его производительности качество переходных процессов существенно ухудшается, что объясняется влиянием неучтенных при синтезе перекрестных связей между каналами управления. При изменении массы m_2 и момента инерции J_s манипулятора качество переходных процессов снижается в еще большей степени.

Для восстановления апериодического характера переходных процессов вынужденно снижают быстродействие контуров управления координатами МР, что приводит к соответствующему уменьшению производительности конкретного производственного механизма или целой технологической цепочки.

Введение каналов динамической компенсации влияния перекрестных связей по силам и моментам обеспечивает автономизацию каналов управления 1-м и 2-м звеньями, и, как следствие, повышение качества переходных процессов при номинальных параметрах МР. Значения компенсирующих силовых воздействий $M_1 = K_{p1}\bar{M}_1$ и $F_2 = K_{p2}\bar{F}_2$ в этом случае определяются на основе уравнений динамики манипулятора (1.2):

$$\begin{cases} \bar{M}_1 = e_1\left(1 + \dfrac{\bar{m}_2}{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}(q_2 - l_2 + p_2)^2\right) + \dfrac{2\bar{m}_2}{K_{p1}}(q_2 - l_2 + p_2)\dot{q}_2\dot{q}_1, \\ \bar{F}_2 = e_2 - \dfrac{\bar{m}_2}{K_{p2}}(q_2 - l_2 + p_2)\dot{q}_1^2, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\bar{M}_1$ и $\bar{F}_2$ – задающие воздействия на входах приводных устройств; $e_1 = u_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{x}_1$ и $e_2 = u_2 + \mathbf{K}_2\mathbf{x}_2$ – сигналы ошибки в локальных контурах управления (рис. 2); $\bar{m}_2$, $\bar{J}_1$ и $\bar{J}_2$ – оценки соответствующих параметров.

Подставляя выражения компенсирующих воздействий (1.4) в уравнения динамики манипулятора (1.2) при условии равенства оценок параметров их действительным значениям, получаем линейные дифференциальные уравнения, соответствующие векторно-матричной модели (1.3). Переходные процессы координат состояния q_1 и q_2 в этом случае носят апериодический характер и имеют заданное быстродействие, определяемое принятой при синтезе локальных РС величиной СГК.

Вместе с тем влияние малых постоянных времени приводных устройств T_1 и T_2, а также отклонений параметров манипулятора от расчетных значений приводят к существенному ухудшению качества переходных процессов в системе управления роботом с каналами компенсации силовых перекрестных связей.

Поставим задачу повышения быстродействия САУ манипуляционным роботом с одновременным ступенчатым воздействием на оба канала управления без использования автономизирующих связей при сохранении апериодического характера переходных процессов относительно точек позиционирования по координатам положения q_1 и q_2 в условиях вариации параметров механизма m_2 и J_2 в заданных пределах.

Таким образом, разработанная система управления должна снизить время и обеспечить апериодический характер переходных процессов при перемещении манипулятора из некоторого исходного положения в заданную точку в пределах рабочей зоны МР, а также обратном перемещении, при заранее неизвестной массе переносимого груза.

Поскольку наиболее неблагоприятное взаимное влияние каналов МР, а также вариации m_2 и J_2 можно рассматривать как внутренние параметрические возмущения, будем решать поставленную задачу путем улучшения робастных свойств синтезируемой САУ. Это достигается за счет повышения степени управляемости двухканального объекта на основе применения математического аппарата грамианов управляемости и их сингулярного разложения. Под робастной здесь понимается система, обеспечивающая устойчивость и апериодический характер переходных процессов в условиях вариации параметров объекта управления в определенных пределах [6, 7].

2. Линеаризация модели манипуляционного робота и синтез централизованного РС. Как показывает анализ (1.2), исходная модель управляемого МР допускает линеаризацию в рабочих режимах, поскольку нелинейные характеристики являются непрерывными и дифференцируемыми. Это в свою очередь позволяет использовать при синтезе систем управления манипулятором линейные методы, основанные на представлении объекта в пространстве состояний.

Полученная линеаризованная модель МР приведена в виде структурной схемы на рис. 3, а ее соответствующее векторно-матричное описание в координатах состояния $\mathbf{x} = [\dot{q}_1\ \ q_1\ \ \dot{q}_2\ \ q_2]^{\mathrm{T}}$ с выходами $\mathbf{y} = [q_1\ \ q_2]^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 M_1 + \mathbf{B}_2 F_2,\\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},\end{gathered}\qquad (2.1)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{-K_{11} + K_{p1}kl_{11}}{J_s} & \dfrac{K_{p1}kl_{12}}{J_s} & -\dfrac{K_{31}}{J_s} & -\dfrac{K_{41}}{J_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{K_{13}}{m_2} & 0 & \dfrac{K_{p2}kl_{21}}{m_2} & \dfrac{-K_{43} + K_{p2}kl_{22}}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{K_{p1}}{J_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_{p2}}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В состав объекта управления и его модели включаются локальные РС с параметрами $\mathbf{K}_1 = [kl_{11}\ kl_{12}]$ и $\mathbf{K}_2 = [kl_{21}\ kl_{22}]$, синтезируемые методом модального управления и формирующие исходный

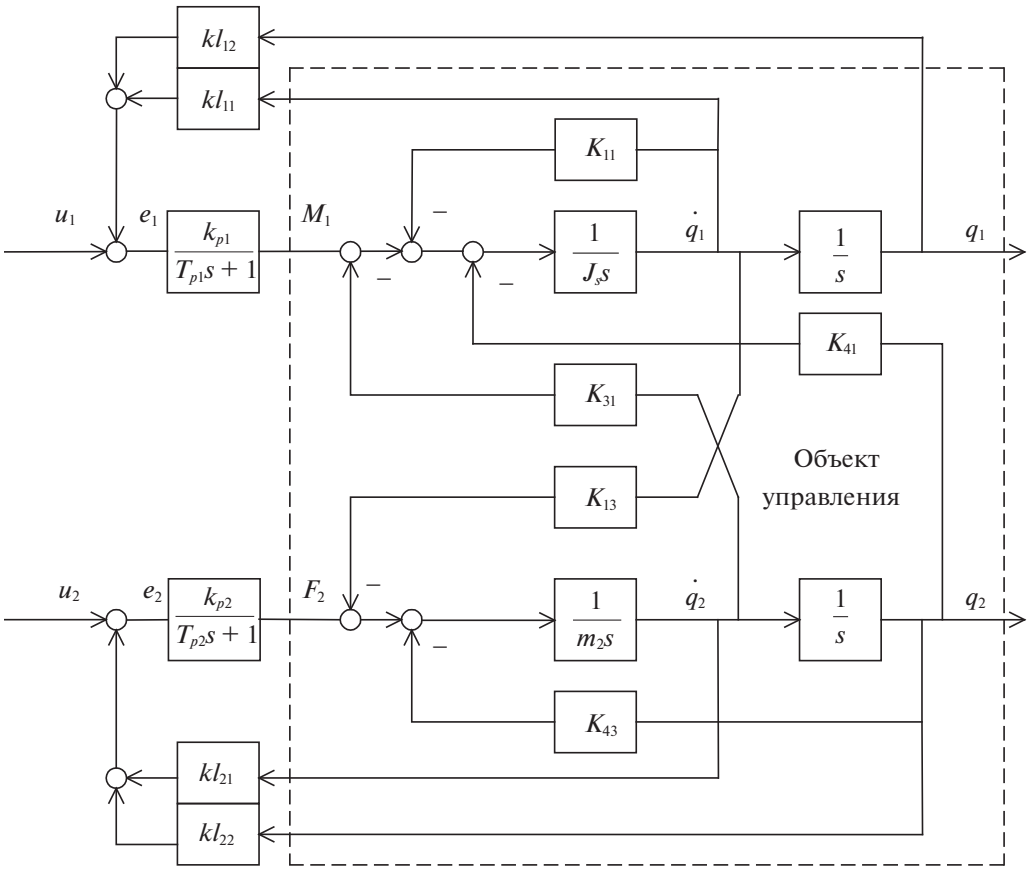

Рис. 3. Структурная схема линеаризованной системы управления манипулятором

(медленный) темп переходных процессов, приобретающих апериодический характер в условиях снижения взаимного влияния звеньев МР.

Коэффициенты линеаризации стабилизированной модели манипуляционного робота определяются путем дифференцирования нелинейных характеристик, что приводит к следующим выражениям:

$$K_{11} = 2m_2\dot{q}_2(q_2 + p_2 - l_2); \quad K_{13} = 2m_2\dot{q}_1(q_2 + p_2 - l_2);$$

$$K_{31} = 2m_2\dot{q}_1(q_2 + p_2 - l_2); \quad K_{41} = 2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2; \quad K_{43} = 2m_2\dot{q}_2.$$

Величины коэффициентов линеаризации зависят от значений координат q_2, $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, которые, очевидно, меняются при движении манипулятора. В данных условиях значения коэффициентов целесообразно определять путем оптимизационной процедуры идентификации динамических характеристик линейной и нелинейной моделей объекта в режиме отработки ступенчатого задающего воздействия на оба канала управления. В качестве критерия оптимальности полученных значений при этом используется минимум среднеквадратической ошибки идентификации.

Для полученной линейной модели манипуляционного робота, учитывающей влияние перекрестных связей между звеньями, может быть синтезирован централизованный регулятор состояния, воздействующий на вход локального контура управления 1-м звеном (рис. 3):

$$u_1 = q_{1ref} + \mathbf{Kx}, \quad u_2 = q_{2ref},$$

где $\mathbf{K} = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3 \;\; k_4]$ – вектор параметров РС; q_{1ref} и q_{2ref} – заданные значения координат.

Параметры РС в этом случае определяются методом модального управления [5, 7] с использованием в качестве желаемого характеристического полинома Ньютона $D(s) = (s + \Omega_o)^4$, обеспечивающего апериодический характер и заданную длительность переходных процессов в линейной системе управления манипуляционным роботом при номинальных параметрах объекта.

Однако при изменении параметров манипуляционного робота, например увеличении массы звена m_2, переходные процессы в синтезированной системе управления принимают колебательный характер, что не соответствует предъявляемым требованиям. Причиной высокой параметрической чувствительности САУ МР обычно является недостаточная управляемость объекта, обусловленная его конструктивными особенностями и требующая соответствующей коррекции его системных свойств.

3. Повышение управляемости манипуляционного робота грамианным методом. В соответствии с предложенным ранее грамианным методом синтеза робастных систем управления [8] представим линеаризованную модель МР (2.1) в двухканальной форме, приняв вход 1-го звена в качестве управляющего, а вход 2-го звена используем для коррекции системных свойств объекта:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{B} = [\mathbf{B_1}\ \mathbf{B}_2]$ – матрица входов объекта размерностью $2 \times n$. Отметим, что матрицы линейной модели $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ при синтезе робастной САУ должны рассматриваться как интервальные, поскольку значения их элементов зависят от переменных параметров робота m_2 и J_2.

Преобразования структуры векторно-матричной модели объекта в направлении повышения управляемости будем проводить с использованием математического аппарата грамианов управляемости $\mathbf{G}_c$ и их сингулярного разложения, определяемых выражениями [9–11]:

$$\mathbf{G}_c = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t} dt, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{U}_c \mathbf{\Sigma}_c \mathbf{U}_c^{\mathrm{T}}, \tag{3.3}$$

где t – время, $\mathbf{\Sigma}_c = \mathrm{diag}\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \ldots, \sigma_{cn}\}$ – диагональная матрица, состоящие из сингулярных чисел грамиана управляемости; $\mathbf{U}_c$ – матрица преобразования грамиана к диагональной форме.

Помимо проведения системного анализа, математический аппарат грамианов позволяет решать и обратные задачи, в том числе формировать модели объектов управления с заданным соотношением управляемости и наблюдаемости. Подобный подход, основанный на целенаправленном изменении сингулярных чисел грамиана (3.2) с последующим вычислением модифицированных матриц$\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$, был использован для формирования структуры объекта с повышенной степенью управляемости, обеспечивающей успешное решение задачи синтеза робастной САУ [8, 12].

Основная идея преобразования структуры объекта заключается в том, что для исходной матричной модели МР принудительно увеличивают значения сингулярных чисел грамиана управляемости: $\hat{\mathbf{\Sigma}}_c = \mathbf{\Sigma}_c + \Delta\mathbf{\Sigma}_c$. Затем определяются матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ преобразованной модели объекта в пространстве состояния путем аналитического или численного решения интегрального уравнения:

$$\int_0^\infty e^{\hat{\mathbf{A}}t}\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} e^{\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}t} dt = \hat{\mathbf{U}}_c \hat{\mathbf{\Sigma}}_c \hat{\mathbf{U}}_c^{\mathrm{T}}, \tag{3.4}$$

Математически строго данное уравнение решается при условии идентичности передаточных функций исходной и преобразованной моделей объекта, которое выражается через грамианы управляемости следующим образом:

$$\hat{\mathbf{G}}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}_c\mathbf{T}^{-\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{T}$ – матрица преобразования подобия размером $n \times n$, $\hat{\mathbf{G}}_c$ – грамиан управляемости преобразованной модели. В этом случае матрицы $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{C}}$ модели объекта в новой системе координат состояния определяются преобразованием подобия:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}. \tag{3.6}$$

Выражение для матрицы преобразования подобия $\mathbf{T}$, полученное на основе уравнения (3.5), а также формул сингулярного разложения (3.3) грамианов управляемости в исходной $\mathbf{G}_c = \mathbf{U}_c\mathbf{\Sigma}_c\mathbf{U}_c^{\mathrm{T}}$ и преобразованной $\hat{\mathbf{G}}_c = \hat{\mathbf{U}}_c\hat{\mathbf{\Sigma}}_c\hat{\mathbf{U}}_c^{\mathrm{T}}$ системах координат имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}_c\mathbf{\Sigma}_c^{1/2}\hat{\mathbf{\Sigma}}_c^{-1/2}\hat{\mathbf{U}}_c^{-1}. \tag{3.7}$$

Причем матрица преобразования $\mathbf{U}_c$ в данном случае остается неизменной: $\hat{\mathbf{U}}_c = \mathbf{U}_c$, что позволяет минимизировать изменение структуры объекта.

Предлагаемые преобразования физически реализуются путем введения в структуру объекта дополнительных прямых и обратных связей, т. е. выполняется синтез дополнительного к основному РС так называемого предрегулятора, параметры которого определяются по формулам

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}. \tag{3.8}$$

Как показывает анализ структуры САУ МР, приведенной на рис. 3, корректирующие связи целесообразно вводить по каналу управления вторым звеном u_2, поскольку на вход первого звена u_1 поступает сигнал основного регулятора состояния. Это означает, что в данном случае возможно изменение только третьей строки матрицы линеаризованной модели объекта $\mathbf{A}$, что выражается математически введением двоичной маски $\mathbf{E} = [\,0\ 0\ 1\ 0\,] : u_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A}'\mathbf{x}$.

В связи с этим при синтезе робастной системы управления манипулятором предлагается использовать итерационный алгоритм решения уравнения (3.4), позволяющий получить заданное распределение сингулярных чисел грамиана управляемости путем вариации одной строки матрицы $\mathbf{A}$, если снять ограничение на изменение матрицы $\mathbf{U}_c$ объекта [8].

При таком подходе используются модифицированные варианты формул (3.6) и (3.7), позволяющие выполнять преобразование подобия итерационным способом, с помощью двоичных масок:

$$\hat{\mathbf{A}}(i+1) = \mathbf{E}_1\mathbf{A} + \mathbf{E}(\mathbf{T}_i^{-1}\hat{\mathbf{A}}(i)\,\mathbf{T}_i), \tag{3.9}$$

$$\mathbf{T}_i = \hat{\mathbf{U}}_c(i)\hat{\mathbf{\Sigma}}_c^{1/2}(i)\,\hat{\mathbf{\Sigma}}_c^{-1/2}\hat{\mathbf{U}}_c^{-1}(i). \tag{3.10}$$

Здесь i – номер итерации; $\mathbf{E}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{E}$ – двоичная диагональная матрица, в которой единицы соответствуют неизменным строкам $\mathbf{A}$; $\hat{\mathbf{U}}_c(i)$ и $\hat{\mathbf{\Sigma}}_c(i)$ – текущие значения матриц, полученные при сингулярном разложении грамиана $\hat{\mathbf{G}}_c(i) = \hat{\mathbf{U}}_c(i)\hat{\mathbf{\Sigma}}_c(i)\hat{\mathbf{U}}_c^{\mathrm{T}}(i)$, вычисленного для $\hat{\mathbf{A}}(i)$.

В этом случае решение уравнения (3.4) при заданном векторе сингулярных чисел $\hat{\mathbf{\Sigma}}_c$ и переменной матрице $\hat{\mathbf{U}}_c$ может быть найдено при помощи итерационной процедуры, в каждом цикле которой вычисляется новое значение $\mathbf{T}_i$ и выполняется преобразование матрицы $\hat{\mathbf{A}}(i)$ по формулам (3.9) и (3.10).

Таким образом, применение итерационной процедуры позволяет получить заданное распределение сингулярных чисел грамиана $\mathbf{G}_c$ с целью повышения степени управляемости объекта путем введения дополнительного предрегулятора с матрицей $\mathbf{A}'$.

В дальнейшем это позволит обеспечить необходимые робастные свойства САУ МР при синтезе основного регулятора состояния с матрицей $\mathbf{K}$ методом модального управления.

4. Методика синтеза робастной системы управления манипуляционным роботом. На основе предложенного грамианного подхода была реализована итерационная процедура синтеза робастной САУ МР повышенного быстродействия. Данная процедура включает в себя этапы линеаризации модели объекта, коррекции ее системных свойств в направлении повышения управляемости и синтеза централизованного регулятора состояния методом модального управления (рис. 4).

На первом этапе (блок 1) на базе исходной нелинейной модели определяется структура линеаризованной модели МР в векторно-матричной форме, назначается основной и вспомогательный каналы управления, формируется двоичная маска $\mathbf{E}$. На этом этапе осуществляется также синтез локальных РС, формирующих исходный темп переходных процессов в объекте и обеспечивающих необходимые условия для последующего вычисления грамианов.

Затем (блок 2) в типичном (основном) режиме работы проводится параметрическая идентификация линейной и нелинейной моделей объекта управления оптимизационными методами, в

результате чего определяются значения элементов матриц **A** и **B**, а также интервалы их изменения $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{B}$.

Далее (блок 3) для полученной линейной модели МР выполняется вычисление грамиана управляемости и его разложение на диагональную матрицу сингулярных чисел $\mathbf{\Sigma}_c$ и матрицу $\mathbf{U}_c$.

На втором этапе разработки САУ МР реализуется итерационный алгоритм коррекции системных свойств модели объекта и синтез предрегулятора. В качестве исходных при этом принимаются значения матриц объекта $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ и $\hat{\mathbf{\Sigma}}_c = \mathbf{\Sigma}_c$.

Итерационный процесс начинается с проверки условия достижения верхней границы области вариации сингулярных чисел грамиана управляемости, на которой все сингулярные числа совпадают: $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \ldots = \sigma_{cn}$ (блок 4). Если граница достигнута, то осуществляется прекращение процедуры поиска и вывод соответствующего сообщения (блок 13).

В противоположном случае выполняется последовательное увеличение сингулярных чисел грамиана управляемости методом регулярного сканирования в диапазоне от наименьшего числа σ_{c1} до наибольшего σ_{cn} с заданным шагом $\Delta\sigma_c$ (блок 5).

Для каждого нового сочетания сингулярных чисел $\hat{\mathbf{\Sigma}}_c$ (блок 6) определяется преобразованное значение матрицы объекта $\hat{\mathbf{A}}(i)$ на основе итерационных формул (3.9) и (3.10).

На третьем этапе синтеза для преобразованной модели объекта управления с матрицами $\hat{\mathbf{A}}$ и **B** методом модального управления выполняется расчет матрицы обратных связей $\hat{\mathbf{K}}$ регулятора состояния (блок 7).

Затем для синтезированного варианта САУ манипуляционным роботом с регулятором состояния рассчитываются интервалы робастной устойчивости и значения показателей качества управления методом регулярного сканирования (блок 8).

Далее проводится проверка условия достижения заданных интервалов робастной устойчивости и показателей качества управления (блок 9). При невыполнении данных условий процедура коррекции объекта управления и синтеза РС для преобразованной модели циклически повторяется.

Если полученный вариант системы управления манипулятором отвечает требованиям робастности, то осуществляется выход из итерационной процедуры синтеза. При этом вычисляются параметры корректирующих связей (блок 10) по формуле (3.8), выполняется расчет фильтров, компенсирующих нули передаточных функций объекта (блок 11), вывод параметров основного регулятора состояния (блок 12) и завершение алгоритма.

В результате выполнения предложенной итерационной процедуры удается получить решение, отвечающее требованиям робастности либо наиболее близкое к нему в заданной области изменения сингулярных чисел и при заданном наборе каналов управления объектом.

5. Пример синтеза системы управления манипуляционным роботом. Рассмотрим применение метода для синтеза робастной системы управления двухзвенным манипуляционным роботом, структура которого приведена на рис. 2, а динамические свойства описываются уравнениями (1.2). Значения основных параметров манипулятора приведены в таблице, параметры 2-го звена J_2 и m_2 носят интервальный характер, параметры приводных устройств $K_{p1} = 1$ Н м, $K_{p2} = 1$ Н и $T_1 = 0.02$ с, $T_2 = 0.02$ с.

Первоначально для данного МР был выполнен синтез системы с сепаратными каналами управления и локальными регуляторами на основе линейной модели (1.3), не учитывающей влияние перекрестных связей между каналами.

Синтез локальных регуляторов состояния 1-го и 2-го звеньев МР осуществлялся методом модального управления на основе желаемого характеристического полинома Ньютона $D(s) = (s + \Omega_o)^2$ при заданном значении $\Omega_o = 15.5$ рад/с, в результате были получены следующие значения параметров: $\mathbf{K}_1 = [-7.477 \times 10 - 5.795 \times 10^2]$ и $\mathbf{K}_2 = [-7.068 \times 10^2 - 5.478 \times 10^3]$.

Переходные характеристики полученной САУ МР с локальными регуляторами при одновременном ступенчатом задающем воздействии по обоим каналам приведены на рис. 5, *а* и *б*, где кривые *1* соответствуют номинальным параметрам объекта, кривые *2* и *3* – изменению массы m_2 в пределах ±50%.

Полученная система не удовлетворяет предъявляемым требованием апериодичности переходных процессов, поскольку при одновременном пуске звеньев из-за влияния перекрестных

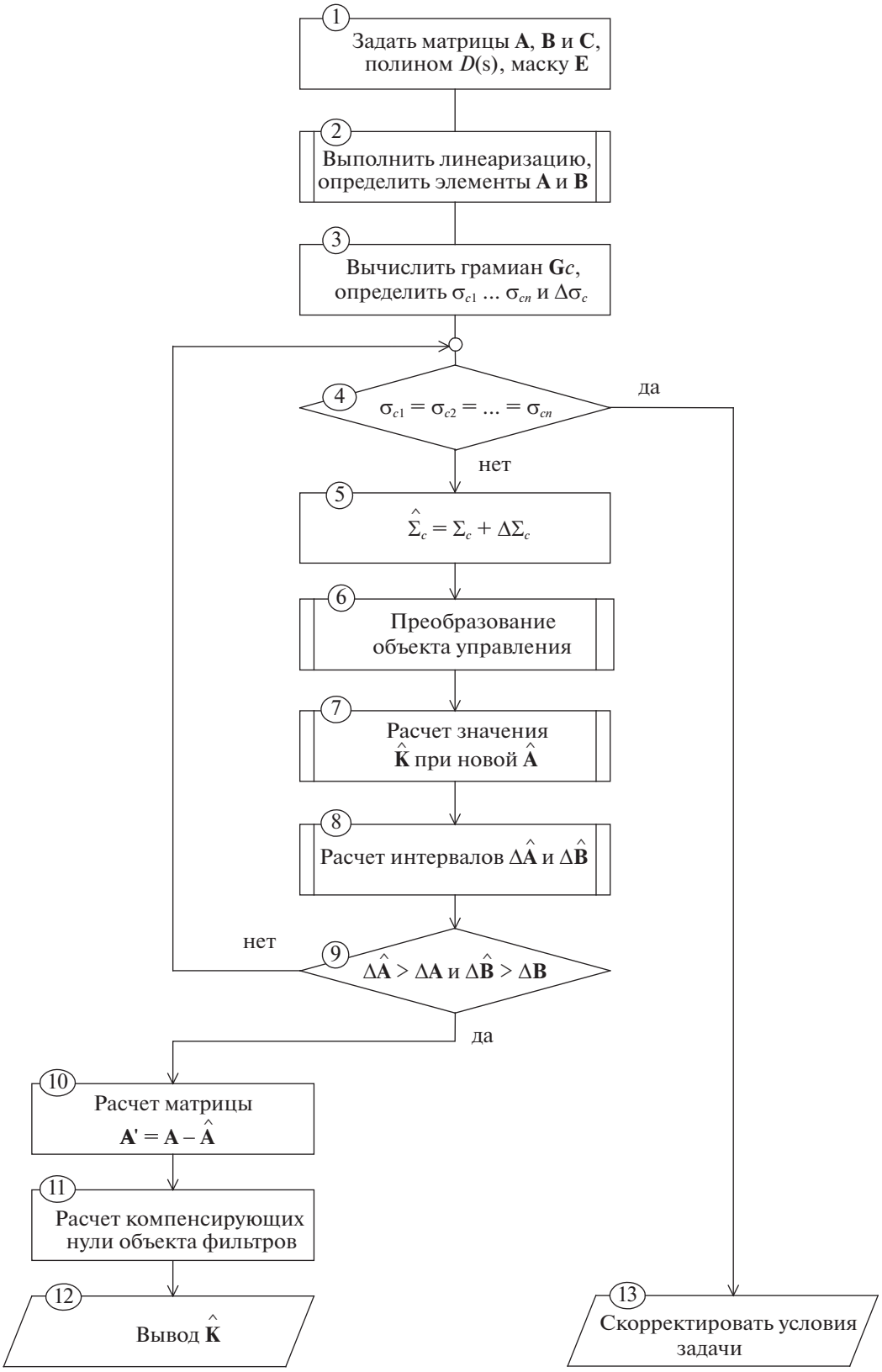

Рис. 4. Схема алгоритма синтеза робастной системы управления манипуляционным роботом

Таблица. Номинальные значения параметров манипулятора

Номер звена	Масса звена, кг	Длина звена, м	Расстояние до центра масс, м	Момент инерции звена, кг м^2
i	m_i	l_i	p_i	J_i
1	50	0.4	0.22	0.32
2	22.5 ± 10	1.14	0.7	1.2 ± 0.5

связей, а также изменения параметров объекта возникает существенное перерегулирование по положению 1-го и 2-го звеньев.

Снижения быстродействия локального контура управления 1-м звеном манипулятора при уменьшении СГК характеристического полинома до $\Omega_o = 5.5$ рад/с позволяет обеспечить близкий к апериодическому характер переходных процессов по выходным координатам САУ. Однако в этом случае время переходных процессов в системе по координате q_1 существенно возрастает, как показано на рис. 5, *в* и *г*.

Введение в систему управления автономизирующих каналов компенсации влияния перекрестных связей в соответствии с формулами (1.4) при расчетных параметрах объекта обеспечивает высокий темп и апериодический характер переходных процессов. Вместе с тем при учете малых постоянных времени приводных устройств T_1 и T_2, а также при изменении массы m_2

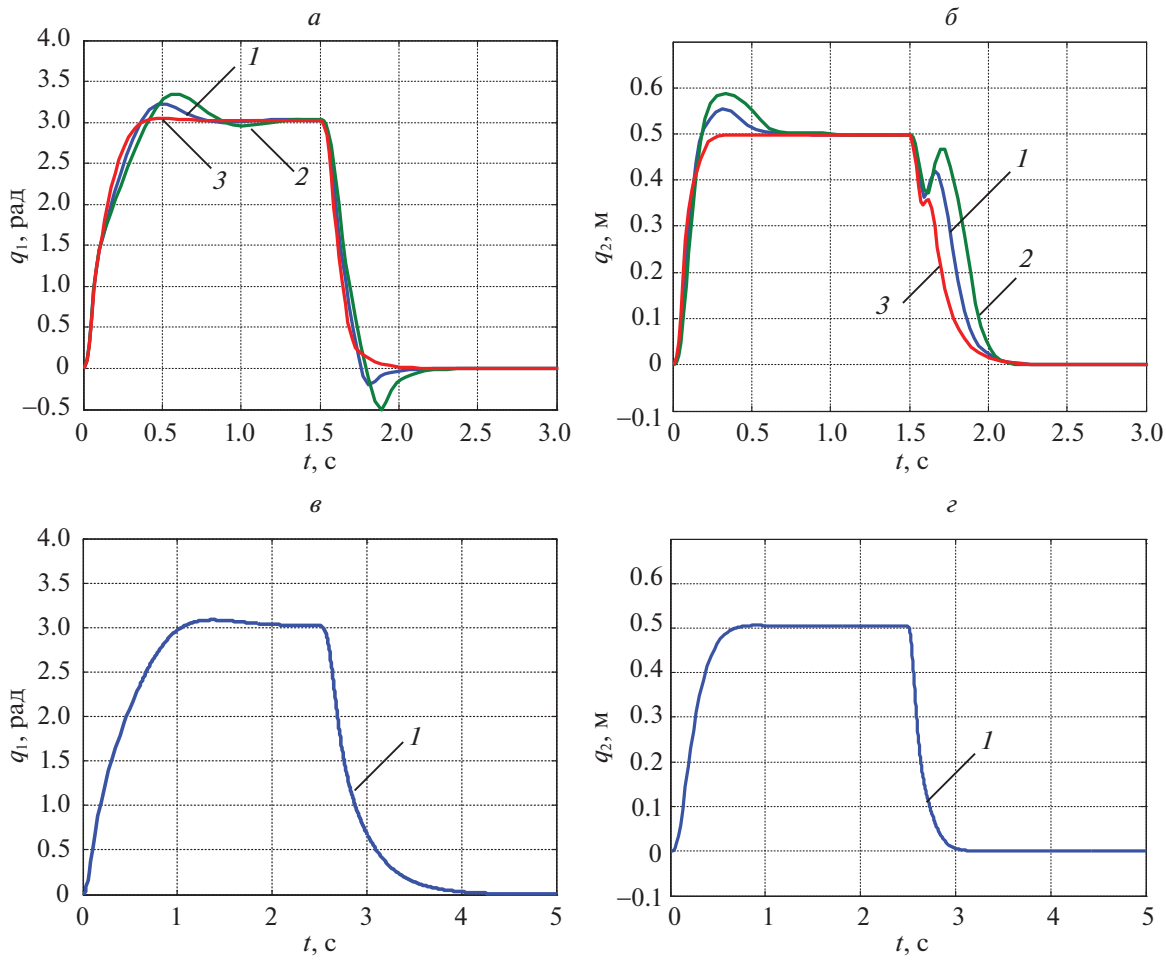

Рис. 5. Переходные характеристики САУ манипулятором с локальными регуляторами

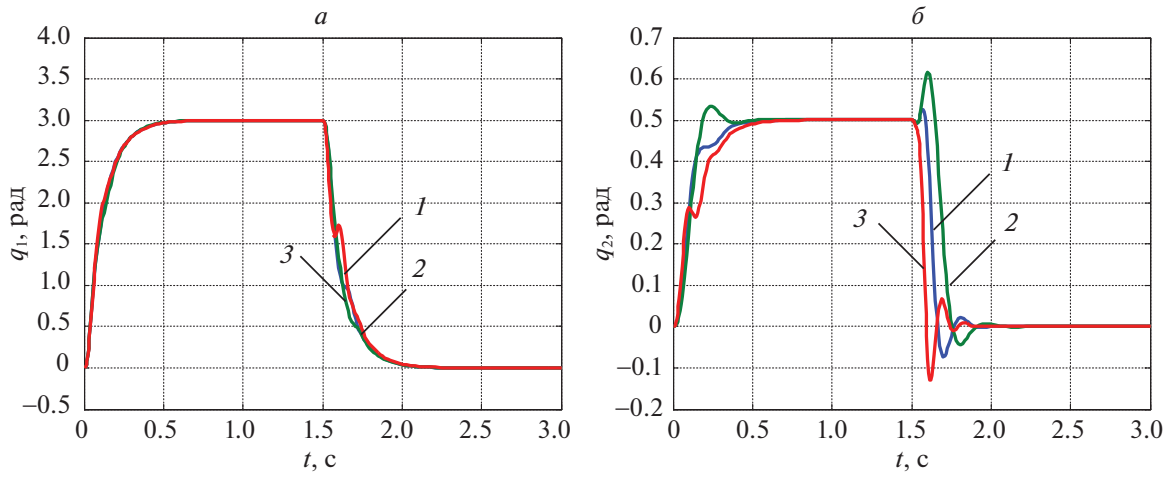

Рис. 6. Переходные характеристики САУ манипулятором с компенсационным регулятором

переходные процессы по координате q_2 приобретают колебательный характер, что иллюстрирует рисунок 6.

Синтез САУ МР с централизованным регулятором состояния будем проводить на основе приведенной на рис. 3 линейной модели, векторно-матричное описание которой имеет вид (2.1). В состав объекта управления при этом входят локальные регуляторы с параметрами $\mathbf{K}_1 = [-2.653 \times \times 10 - 7.296 \times 10^2]$ и $\mathbf{K}_2 = [-7.068 \times 10^2 - 5.478 \times 10^3]$.

В результате идентификации линейной и нелинейной моделей манипуляционного робота с использованием симплексного метода были определены значения коэффициентов линеаризации: $K_{11} = 5.517$; $K_{13} = K_{31} = 8.025$; $K_{41} = 3.21$; $K_{43} = 2.334$ в рабочей точке $\dot{q}_1 = 0.32$ рад/с, $\dot{q}_2 = 0.22$ м/с и $q_2 = = 0.55$ м. Подставляя полученные коэффициенты в выражения (2.1), получим следующие значения матриц линейной модели:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12.679 & -30.914 & -3.118 & -1.247 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & -28.0 & -195.84 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.342 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0438 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Синтез централизованного РС для линейной модели объекта на основе желаемого характеристического полинома Ньютона $D(s) = (s + \Omega_o)^4$ при $\Omega_o = 16.5$ рад/с дает следующие значения:

$$\mathbf{K} = [-8.044 \times 10^1 \;\; -1.099 \times 10^3 \;\; 4.717 \times 10^1 \;\; 5.622 \times 10^2].$$

Для компенсации влияния нулей передаточных функций объекта по 1-му и 2-му каналам управления на динамические характеристики САУ с централизованным РС используются фильтры задающих воздействий:

$$H_{F1}(s) = \frac{1}{T_{11}s + 1}; \quad H_{F2}(s) = \frac{1}{(T_{21}s + 1)(T_{22}s + 1)}, \tag{5.2}$$

где $T_{11} = 0.05$ с; $T_{21} = T_{22} = 0.058$ с – постоянные времени фильтров.

Переходные характеристики САУ МР с централизованным регулятором состояния, приведенные на рис. 7 (кривые *1* соответствуют номинальным параметрам объекта, кривые *2* и *3* – изменению массы m_2 в пределах ±50%), говорят о высокой чувствительности к вариациям параметров объекта управления, т. е. полученное решение не отвечает требованиям робастности.

В целях повышения параметрической грубости централизованной системы управления манипуляционным роботом воспользуемся предложенным грамианным методом. Примем вход

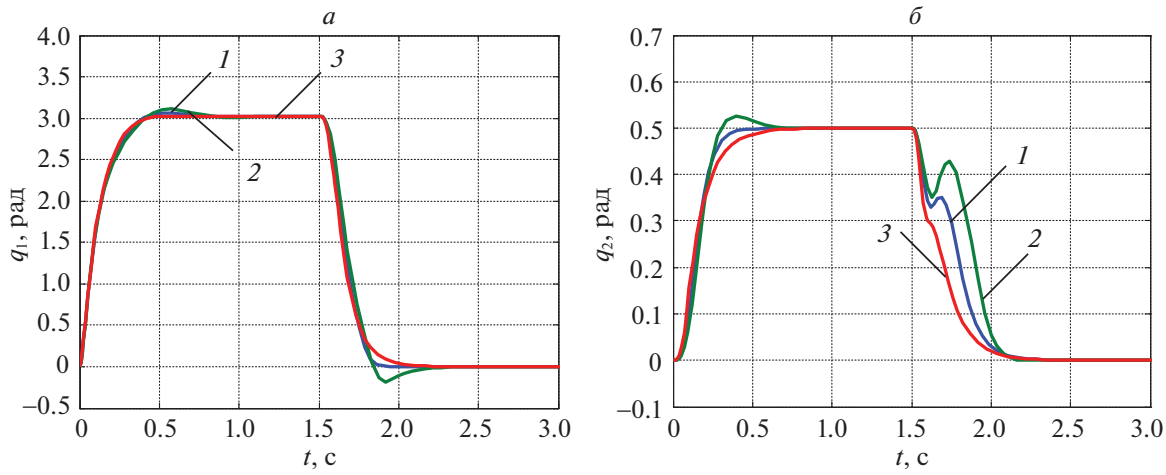

Рис. 7. Переходные характеристики САУ манипулятором с централизованным регулятором состояния

контура управления 1-м звеном u_1 в качестве основного, а вход контура управления 2-м звеном u_2 используем для коррекции системных свойств объекта, что соответствует матрице $\mathbf{E} = [0\ 0\ 1\ 0]$. Тогда структура робастной системы, включающая в себя регулятор состояния с матрицей $\mathbf{K}$ и корректирующий предрегулятор с матрицей $\mathbf{A}'$, будет иметь вид, приведенный на рис. 8.

Реализуемая средствами комплекса MatLab для линейной модели МР с параметрами (5.1) процедура вычисления грамиана управляемости *gram* с последующим сингулярным разложением *svd* дает следующие результаты:

$$\mathbf{\Sigma}_c = \mathrm{diag}[4.6\times10^{-3}\ \ 1.489\times10^{-4}\ \ 2.069\times10^{-7}\ \ 3.938\times10^{-9}].$$

Относительно малые значения 3-го и 4-го сингулярных чисел грамиана свидетельствуют о низкой степени управляемости объекта.

Применение предложенного итерационного алгоритма (рис. 4) дает новое распределение сингулярных чисел грамиана управляемости объекта, позволяющее решить задачу синтеза робастной системы с регулятором состояния:

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_c = \mathrm{diag}[4.579\times10^{-3}\ \ 1.488\times10^{-4}\ \ 2.688\times10^{-6}\ \ 4.435\times10^{-8}].$$

Желаемое распределение сингулярных чисел грамиана управляемости достигается путем коррекции 3-й строки матрицы состояния объекта $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{A}'$, физически реализуемой введением в структуру САУ дополнительного регулятора с параметрами:

$$ka_1 = 1.128\,; \quad ka_2 = 0.417; \quad ka_3 = -1.217; \quad ka_4 = -27.967.$$

Для скорректированного таким образом объекта с матрицами состояния $\hat{\mathbf{A}}$ и входа $\mathbf{B}_1$ методом модального управления синтезируется робастная система с регуляторами состояния.

Синтез основного регулятора состояния был проведен на основе желаемого характеристического полиномы Ньютона $D(s) = (s + \Omega_o)^4$ при заданном значении $\Omega_o = 16.5$ рад/с по линейной модели скорректированного объекта:

$$\mathbf{K} = [-9.349\times10^{1}\ \ -1.147\times10^{3}\ \ -8.721\times10^{1}\ \ -1.418\times10^{2}].$$

Параметры компенсирующих влияние нулей передаточных функций объекта фильтров (5.2) в этом случае принимают значения: $T_{11} = 0.05$ с ; $T_{21} = 0.047$ с, $T_{22} = 0.063$ с.

Переходные характеристики системы управления, полученные с учетом нелинейных свойств объекта, приведены на рис. 9, где кривая *1* соответствует номинальным параметрам объекта, кривые *2* и *3* – изменению массы 2-го звена в пределах ± 50%.

Как показывает анализ, система обладает робастными свойствами и обеспечивает существенное (почти двукратное) снижение длительности и апериодический характер переходных

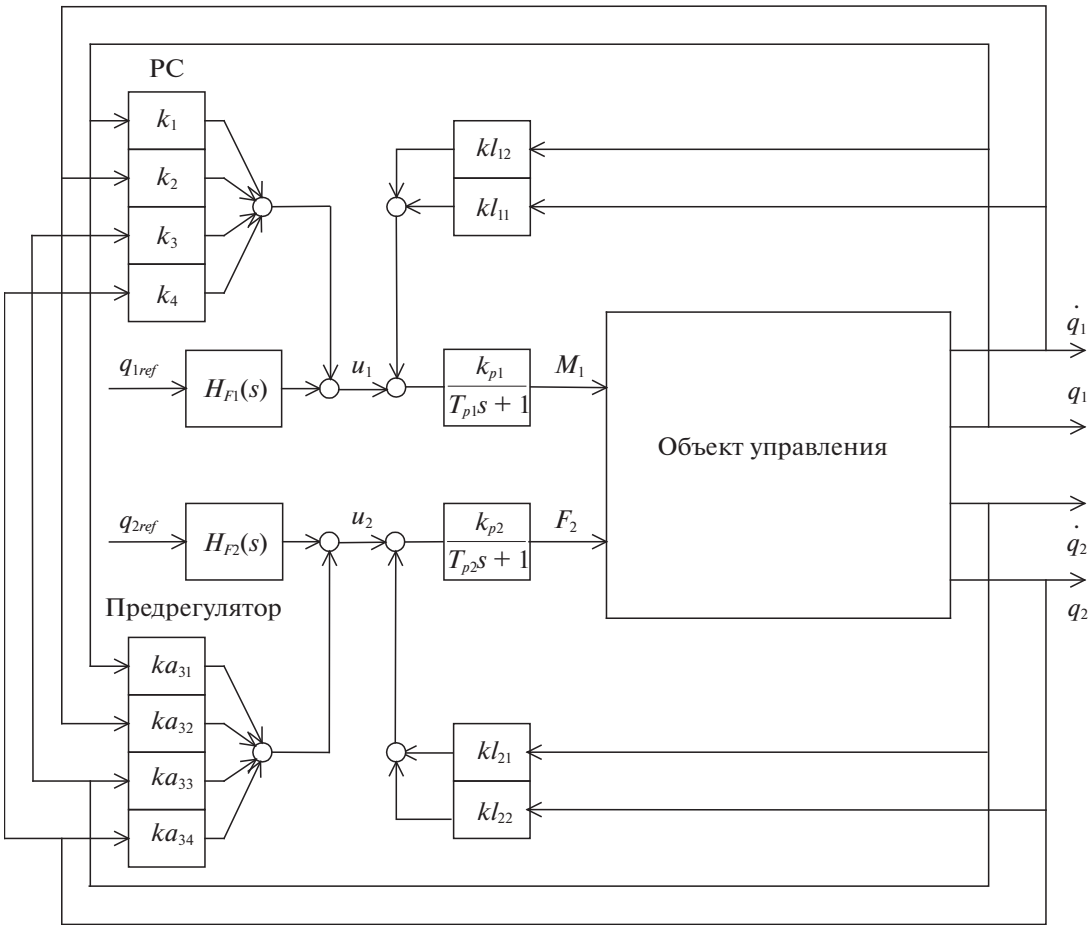

Рис. 8. Структура двухканальной робастной САУ манипулятором с централизованным регулятором состояния

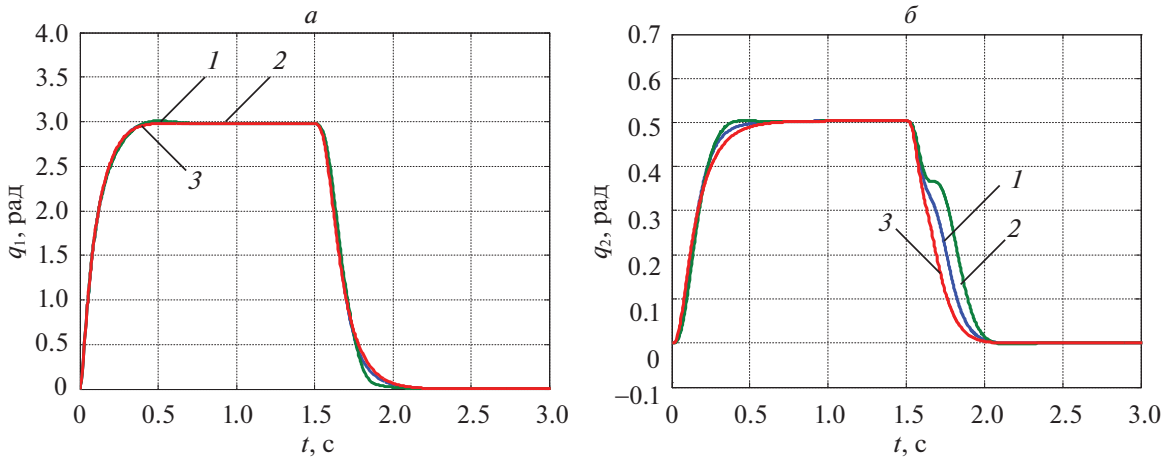

Рис. 9. Переходные характеристики робастной САУ манипулятором с централизованным регулятором состояния

процессов относительно точек позиционирования звеньев в условиях заданных вариаций их параметров.

Заключение. Таким образом, разработанный метод синтеза САУ манипуляционным роботом позволяет достаточно эффективно решать задачу повышения ее быстродействия за счет существенного улучшения робастных свойств, т.е. снижения чувствительности к технологическим

вариациям параметров, а также к их изменениям, обусловленным взаимным влиянием звеньев при их интенсивных одновременных перемещениях.

В этом отношении предложенный подход может рассматриваться как более удачная альтернатива методу автономизации локальных каналов управления звеньями манипулятора при помощи компенсирующих связей. В данном случае эффект достигается не за счет малоробастной автономизации каналов управления, а путем улучшения их взаимосвязи, управляемости и координации (согласованности), реализуемыми управляющими устройствами, синтезируемыми на основе математического аппарата грамианов. При этом осуществляется поэтапная процедура синтеза робастной системы управления манипуляционным роботом повышенного быстродействия.

На первом этапе выполняется линеаризация модели манипуляционного робота в рабочем режиме с использованием оптимизационных методов идентификации и формирование векторно-матричного описания объекта управления.

На втором этапе преобразуется структура линейной модели объекта в направлении повышения управляемости путем коррекции сингулярных чисел грамиана управляемости. Сформированная таким образом структура реализуется предрегулятором путем введения дополнительных прямых и обратных связей, определяемых с учетом физических особенностей объекта.

На третьем этапе осуществляется классический синтез централизованного регулятора состояния методом модального управления для скорректированной структуры линейной модели и применение полученных управляющих устройств для управления исходным нелинейным объектом.

Предложенный метод позволяет разработчикам повысить качество управления манипуляционными роботами и их производительность в условиях вариаций параметров и интенсификации технологических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G.* Robotics: Modeling, Planning and Control. L.: Springer-Verlag, 2009. 644 p.
2. *Lynch K.M., Park F.G.* Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control. Cambridge University Press, 2017. 642 p.
3. Mechatronic System Control, Logic and Data Acquisition. The Mechatronic Handbook / Ed. R.H. Bishop. Second Edition. N. Y.: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2008. 755 p.
4. *Bolton W.* Mechatronic: Electronic Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering, Sixth Edition, Harlow. Edinburgh Gate: Pearson Education Limited, 2015. 663 p.
5. Control System Advanced Methods. The Control Handbook / Ed. W.S. Levin. Second Edition. N. Y.: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2011. 1702 p.
6. *Тарарыкин С.В., Тютиков В.В.* Робастное модальное управление динамическими системами // АиТ. 2002. № 5. С. 41–55.
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
8. *Анисимов А.А., Тарарыкин С.В.* Итерационный метод структурно-параметрического синтеза робастных систем с регуляторами состояния на основе грамианного подхода // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 42–56.
9. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.
10. *Ober R., McFarlane D.* Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A Normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. 1989. V. 122–124. P. 23–64.
11. *Moore B.C.* Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 17–32.
12. *Tararykin S.V., Anisimov A.A., Gerasimov A.A.* Synthesizing Parametrically Robust Control Systems with State Controllers and Observers Based on Gramian Method // IJCAS. 2019. V. 17. № 10. P. 2490–2499.